Д'АЛАМБЕРА ОПЕРАТОР, волновой оператор, даламбертиан,— дифференциальный оператор 2-го порядка, имеющий в декартовых координатах вид

$$\Box u \equiv \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где Δ — оператор Лапласа, c — постоянная. Д. о. в сферич. координатах:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

в цилиндрич. координатах:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

в общих криволинейных координатах:

$$\Box u \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\right),$$

где g — определитель матрицы $\|g_{\mu\nu}\|$, составленной из коэффициентов метрич. тензора $g_{\mu\nu}$.

Назван по имени Ж. Д'Аламбера (J. D'Alembert, 1747), к-рый рассматривал его простейший вид при решении одномерного волнового уравнения.

А. Б. Иванов.

Д'АЛАМБЕРА ПРИЗНАК сходимости ряда: если для числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

существует такое число q, $0<q<1$, что начиная с нек-рого номера выполняется неравенство

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < q,$$

то данный ряд абсолютно сходится; если же начиная с нек-рого номера

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1,$$

то ряд расходится. В частности, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1,$$

то рассматриваемый ряд абсолютно сходится, а если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1,$$

то он расходится. Напр., ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

абсолютно сходится для всех комплексных z, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|}=0,$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$ расходится при всех $z \neq 0$, так как

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|(n+1)!\, z^{n+1}|}{|n!\, z^n|} = +\infty.$$

Если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 1,$$

то ряд может как сходиться, так и расходиться: ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

удовлетворяют этому условию, причем первый ряд сходится, а второй расходится.

Установлен Ж. Д'Аламбером (J. D'Alembert, 1768).

Л. Д. Кудрявцев.

Д'АЛАМБЕРА ПРИНЦИП — один из основных принципов динамики несвободных механич. систем; он содержит общий метод, с помощью к-рого уравнения движения любой механич. системы можно вывести в виде уравнений равновесия сил (и в этом смысле Д. п. сводит динамику к статике), а также определить реакции связей. Принцип сформулирован Ж. Д'Аламбером [1] в виде правила для определения движений (под к-рыми понимаются векторы скоростей) нескольких тел, действующих одно на другое при помощи нитей или жестких стержней: движения, передаваемые телам, раскладывают каждое на два движения — на движение, фактически воспринятое телами, и на нек-рое другое, причем эти два движения должны быть таковыми, что если телам будет передано лишь первое движение, то тела могут совершать это движение, не мешая одно другому, если же телам передано лишь второе движение, то тела будут оставаться в покое.

Д. п. был успешно применен Ж. Д'Аламбером и другими учеными при решении ряда задач. Однако разложение движений, требуемое принципом, и определение тех сил, к-рые должны уничтожаться, представляют трудную задачу. Это побудило Ж. Лагранжа [2] предложить иную формулировку Д. п., основанную на установлении равновесия между силами и вызванными ими движениями, но направленными противоположно, к-рая близка к современной. Если обозначить через F_ν и R_ν заданную активную силу и реакцию связей, действующие на движущуюся с ускорением w_ν материальную точку с массой m_ν, то, согласно Д. п.,

$$F_\nu + R_\nu - m_\nu w_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \qquad (*)$$

т. е. в каждый момент времени заданная активная сила и реакция связей, приложенные к движущейся материальной точке, уравновешиваются силой инерции — $m_\nu w_\nu$ точки. Или, если разложить силу F_ν на две составляющие силы:

$$F_\nu = m_\nu w_\nu + P_\nu,$$

то равенства (*) примут вид:

$$P_\nu + R_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

т. е. в каждый момент времени «потерянная сила» $P_\nu = F_\nu - m_\nu w_\nu$ уравновешивается силой реакции связей (см. [3]).

Лит.: [1] D'Alembert J., Traité de dynamique, P., 1743 (рус. пер.: Даламбер Ж., Динамика, М.—Л., 1950); [2] Lagrange J., Mécanique analytique, P., 1788 (рус. пер.: Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1, 2 изд., М.—Л., 1950); [3] Суслов Г. К., Теоретическая механика, 3 изд., М.—Л., 1946. *В. В. Румянцев.*

Д'АЛАМБЕРА УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение вида

$$y=x\varphi(y')+f(y'),$$

где φ и f — дифференцируемые функции; впервые исследовалось Ж. Д'Аламбером (J. D'Alembert, 1748). Известно также под назв. уравнения Лагранжа. *БСЭ-2.*

Д'АЛАМБЕРА ФОРМУЛА — формула, выражающая решение задачи Коши для волнового уравнения с одной пространственной переменной. Пусть заданные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат соответственно пространствам $C^2(-\infty, +\infty)$ и $C^1(-\infty, +\infty)$, а $f(t, x)$ непрерывна вместе с первой производной по x в полуплоскости $\{t\geqslant 0, -\infty<x<+\infty\}$. Тогда классич. решение $u(t, x)$ в $\{t>0, -\infty<x<\infty\}$ *Коши задачи*

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}=f(t, x), \tag{1}$$

$$u(t, x)\Big|_{t=0}=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), \tag{2}$$

выражается Д. ф.:

$$u(t, x)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, \xi)\,d\xi\,d\tau+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)].$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы и удовлетворяют указанным условиям гладкости на интервале $\{|x-x_0|<aT\}$, а $f(t, x)$ — в треугольнике

$$Q^T_{x_0}=\{|x-x_0|<a(T-t), \quad t\geqslant 0\},$$

то Д. ф. дает единственное решение задачи (1), (2) в $Q^T_{x_0}$. Требования на заданные функции могут быть ослаблены, если интересоваться решениями в нек-ром обобщенном смысле. Напр., из Д. ф. следует, что при f, интегрируемой по любому треугольнику $Q^T_{x_0}$, локально интегрируемой ψ и непрерывной φ можно определить слабое решение задачи Коши (1),(2) как равномерный (в любом $Q^T_{x_0}$) предел классич. решений (с гладкими данными) и оно также выражается Д. ф.

Формула названа по имени Ж. Д'Аламбера (J. D'Alembert, 1747).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966. *А. К. Гущин.*

Д'АЛАМБЕРА — ЛАГРАНЖА ПРИНЦИП — один из основных, наиболее общих дифференциальных *вариационных принципов классической механики*, выражающий необходимое и достаточное условие соответствия заданным активным силам действительного движения системы материальных точек, стесненной идеальными связями. В Д.— Л. п. сравниваются положения системы в ее действительном движении с бесконечно близкими положениями, допускаемыми связями в рассматриваемый момент времени.

Согласно Д.— Л. п. в действительном движении системы сумма элементарных работ заданных активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях меньше или равна нулю:

$$\sum_\nu (F_\nu-m_\nu w_\nu)\,\delta r_\nu\leqslant 0 \tag{*}$$

в любой момент времени. Знак = имеет место для обратимых возможных перемещений, знак $\leqslant$ для необратимых возможных перемещений δr_ν; F_ν — заданные активные силы, m_ν и w_ν — массы и ускорения точек.

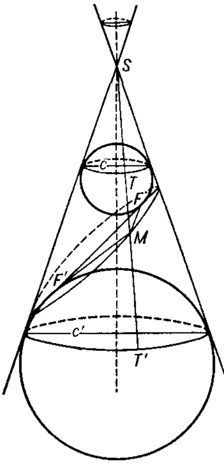
Уравнение (*) — общее уравнение динамики систем с идеальными связями; в нем содержатся все уравнения и законы движения, благодаря чему можно сказать, что вся динамика сводится к одной общей формуле (*).

Принцип установлен Ж. Лагранжем [1] путем обобщения *возможных перемещений принципа* с помощью *Д'Аламбера принципа.* Из формулы (*) для систем, стесненных удерживающими связями, Ж. Лагранж вывел общие свойства и законы движения тел, а также уравнения движения и применил их к решению ряда задач динамики, включая задачи движения несжимаемых, сжимаемых и упругих жидкостей, объединив тем самым «динамику и гидродинамику как ветви единого принципа и как выводы из единой общей формулы».

Лит.: [1] Lagrange J., Mécanique analytique, P., 1788 (рус. пер.: Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1, 2 изд., М.—Л., 1950). *В. В. Румянцев.*

Д'АЛАМБЕРА — ЭЙЛЕРА УСЛОВИЯ — см. *Коши — Римана условия.*

ДАНДЕЛЕНА ШАРЫ — сферы, участвующие в геометрич. построении, к-рое связывает планиметрич. определение эллипса, гиперболы или параболы со стереометрич. определением. Пусть, напр., в круговой конус вписаны две сферы (их и называют шарами Данделена), к-рые касаются поверхности конуса по окружности c и c' (см. рис.) и некоторой плоскости π в точках F и F'. Если взять на линии пересечения конуса и плоскости π произвольную точку M и провести через нее образующую SM, к-рая пересекается с окружностями c и c' в точках T и T', то при перемещении точки M, точки T и T' будут перемещаться по окружностям c и c' с сохранением расстояния TT', т. е. линия пересечения — эллипс. Для случая гиперболы Д. ш. находятся в разных полостях.



Предложены Ж. Данделеном (G. Dandelin) в 1822.

Лит.: [1] Моденов П. С., Аналитическая геометрия, М., 1969. *А. Б. Иванов.*

ДАНЖУА ИНТЕГРАЛ — 1) Данжуа узкий (специальный) интеграл — обобщение понятия интеграла Лебега. Функция $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле узкого (специального, D^*) интеграла Данжуа на $[a, b]$, если существует такая непрерывная функция $F(x)$ на $[a, b]$, что $F'(x)=f(x)$ почти всюду, и каково бы ни было совершенное множество P, существует порция P, на к-рой $F(x)$ абсолютно непрерывна и

$$\sum_n \omega(F; (\alpha_n, \beta_n)) < \infty,$$

где $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ — совокупность смежных интервалов к порции P, $\omega(F; (\alpha, \beta))$ — колебание $F(x)$ на (α, β); при этом

$$(D^*) \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Такое обобщение интеграла Лебега ввел А. Данжуа [1]; он показал, что этот интеграл восстанавливает функцию по ее точной конечной производной. Интеграл D^* эквивалентен *Перрона интегралу.*

2) Данжуа широкий (общий) интеграл — обобщение понятия узкого Д. и. Функция $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле широкого (общего, D) интеграла Данжуа на $[a, b]$, если существует такая

непрерывная функция $F(x)$ на $[a, b]$, что ее *аппроксимативная производная* почти всюду равна $f(x)$ и каково бы ни было совершенное множество P, существует порция P, на к-рой $F(x)$ абсолютно непрерывна; при этом

$$(D) \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Введен независимо и почти одновременно А. Данжуа [2] и А. Я. Хинчиным [3], [4]. Интеграл D восстанавливает непрерывную функцию по ее точной конечной аппроксимативной производной.

3) Т о т а л и з а ц и я $(T_{2s})_0$ представляет собой конструктивно определенный интеграл для решения задачи построения такого обобщения интеграла Лебега, к-рое позволило бы всякий всюду сходящийся тригонометрич. ряд рассматривать в качестве ряда Фурье (по этому интегралу). Введена А. Данжуа [5].

4) Т о т а л и з а ц и я (T_{2s}) отличается от тотализации $(T_{2s})_0$ тем, что при определении тотализации $(T_{2s})_0$ обычный предел заменен на аппроксимативный. Для тотализации (T_{2s}) А. Данжуа [5] дал и дескриптивное определение.

О взаимосвязях тотализаций $(T_{2s})_0$ и (T_{2s}) с другими интегралами см. [6].

Лит.: [1] D e n j o y A., «C. r. Acad. sci.», 1912, t. 154, p. 859—62, 1075—78; [2] е г о ж е, там же, 1916, t. 162, p. 377—80; [3] K h i n t c h i n e A., там же, 1916, t. 162, p. 287—91; [4] Х и н ч и н А. Я., «Матем. сб.», 1918, т. 30, с. 543—57; [5] D e n j o y A., Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique, pt 1—4, P., 1941—49; [6] В и н о г р а д о в а И. А., С к в о р ц о в В. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971, с. 65—107; [7] С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949. *Т. П. Лукашенко.*

ДАНЖУА ТЕОРЕМА о п р о и з в о д н ы х ч и с л а х: *производные числа* каждой конечной функции $F(x)$ почти в каждой точке x удовлетворяют одному из следующих соотношений:

$$\overline{F}^+(x) = \overline{F}^-(x) = +\infty, \qquad \underline{F}^+(x) = \underline{F}^-(x) = -\infty;$$

$$\overline{F}^+(x) = \underline{F}^-(x) \neq \infty, \quad \underline{F}^+(x) = -\infty, \quad \overline{F}^-(x) = +\infty,$$

$$\underline{F}^+(x) = \overline{F}^-(x) \neq \infty, \quad \overline{F}^+(x) = +\infty, \quad \underline{F}^-(x) = -\infty;$$

$$\overline{F}^+(x) = \underline{F}^+(x) = \overline{F}^-(x) = \underline{F}^-(x) \neq \infty.$$

Доказана для непрерывных функций А. Данжуа [1]. Обобщением утверждения Данжуа является теорема [2]: для почти каждого x *контингенция* графика $F(x)$ в точке $(x, F(x))$ является одной из следующих фигур: плоскость, полуплоскость (с невертикальной граничной прямой), прямая (невертикальная).

Лит.: [1] D e n j o y A., «J. math. pures et appl.», 1915, Ser. 7, t. 1, p. 105—240; [2] С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949. *Т. П. Лукашенко.*

ДАНЖУА — ЛУЗИНА ТЕОРЕМА об абсолютно сходящихся тригонометрич. рядах: если тригонометрич. ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (1)$$

сходится на множестве положительной меры Лебега, то ряд, составленный из абсолютных величин его коэффициентов

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \qquad (2)$$

сходится и, следовательно, исходный ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси. Свойство положительности меры множества сходимости ряда (1), будучи, согласно Д.— Л. т., достаточным для сходимости ряда (2), не является, однако, необходимым. Существуют, напр., совершенные множества меры нуль, из сходимости на к-рых ряда (1) следует сходимость ряда (2).

Теорема установлена независимо А. Данжуа [1] и Н. Н. Лузиным [2]; имеются различные ее обобщения (см. [3]).

Лит.: [1] Denjoy A., «C. r. Acad. sci.», 1912, t. 155, p. 135—6; [2] Лузин Н. Н., «Матем. сб.», 1912, т. 28, с. 461—72; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961. *Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин.*

ДАНИЕЛЯ ИНТЕГРАЛ — расширение понятия интеграла, предложенное П. Даниелем [1]. Схема построения этого интеграла наз. схемой Даниеля, представляет собой продолжение на более широкий класс функций интеграла, определенного первоначально для нек-рой совокупности функций, называемых элементарными функциями. При сохранении способа продолжения изменение объема исходной совокупности элементарных функций приводит к разным расширениям понятия интеграла. В этой схеме аксиоматизируется понятие элементарного интеграла, в отличие от схемы Лебега (см. *Лебега интеграл*), аксиоматизирующей понятие меры.

Пусть X — произвольное множество и L_0 — некоторая совокупность определенных на X действительных ограниченных функций; эти функции наз. элементарными. Предполагается, что L_0 — векторная решетка, т. е. из $f, g \in L_0$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha f + \beta g \in L_0$,

$$f, g \in L_0 \Longrightarrow \sup(f, g) \text{ и } \inf(f, g) \in L_0.$$

Пусть на L_0 определен функционал $I(f)$, принимающий действительные значения и такой, что

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g) \text{ (дистрибутивность);}$$

$$f(x) \geqslant 0 \Longrightarrow I(f) \geqslant 0 \text{ (неотрицательность);}$$

если $f_n(x) \downarrow 0$ для любого x, то $I(f_n) \to 0$ (непрерывность относительно монотонной сходимости).

Такой функционал наз. интегралом от элементарных функций, или элементарным интегралом. Множество $M \subset X$ наз. множеством меры нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая неубывающая последовательность $\{g_n\} \subset L_0$, что $\sup\limits_n g_n(x) \geqslant \chi_M(x)$, где $\chi_M(x)$ — характеристич. функция множества M:

$$\sup I(g_n) \leqslant \varepsilon.$$

Функция $f(x)$, определенная на X, принадлежит классу L^+, если существует такая последовательность $\{f_n\} \subset L_0$, что $f_n(x) \uparrow f(x)$ почти всюду и $I(f_n) \leqslant c < +\infty$. Число

$$I(f) = \lim_n I(f_n)$$

наз. интегралом от f. Интеграл $I(f)$ не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{f_n\}$.

Классом L наз. совокупность функций f, определенных на X и представимых в виде $f = f_1 - f_2$, где $f_1, f_2 \in L^+$. Функции класса L наз. суммируемыми, а число

$$I(f) = I(f_1) - I(f_2)$$

— интегралом Даниеля от функции f. Класс L с точностью до множества меры нуль является векторной решеткой конечных функций, замкнутой относительно сходимости почти всюду с ограниченными интегралами, и Д. и. от суммируемых функций обладает свойствами дистрибутивности, неотрицательности, непрерывности (относительно сходимости почти всюду), мажорированной суммируемой функцией (теорема Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла), а также рядом других естественных свойств интеграла.

В том случае, когда $X = [a, b]$ и L_0 есть совокупность ступенчатых функций

$$f(x) = c_i, \ a_i \leqslant x < b_i, \ \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i) = [a, b), \ b_i = a_{i+1},$$

Д. и. совпадает с интегралом Лебега от функций, суммируемых на $[a, b]$. Схема Даниеля применима для построения интеграла от функций со значениями в σ-полной решетке.

Лит.: [1] Daniell P., «Ann. Math.», 1917, v. 19, p. 279—94; [2] Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л., Интеграл, мера и производная, 2 изд., М., 1967; [3] Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., М., 1956.

В. И. Соболев.

ДАНТОВО ПРОСТРАНСТВО — один из типов топологич. пространств. Пусть X — топологич. пространство, Y — его подпространство, τ и λ — бесконечные кардиналы. Пространство Y наз. τ-монолитным в X, если для каждого $A \subset Y$ такого, что $\operatorname{card} A \leqslant \tau$ замыкание $[A]$ в X является бикомпактом веса $\leqslant \tau$. Пространство X τ-подавляет подпространство Y, если из $\lambda \geqslant \tau$, $A \subset Y$ и $\operatorname{card} A \leqslant \exp \lambda$ следует, что существует $A' \subset X$, для к-рого $[A'] \supset A$ и $\operatorname{card} A' \leqslant \lambda$. Пространство X наз. дантовым, если для каждого бесконечного кардинала τ существует всюду плотное в X подпространство Y, к-рое одновременно τ-монолитно в себе и τ-подавляется пространством X. Класс Д. п. содержит класс *диадических бикомпактов*. *Б. А. Ефимов.*

ДАРБУ ВЕКТОР — направляющий вектор $\boldsymbol{\delta}$ мгновенной оси вращения, вокруг к-рой сопровождающий триэдр кривой L поворачивается при равномерном движении точки M по кривой L. Д. в. лежит в спрямляющей плоскости кривой L и выражается через единичные векторы главной нормали $\boldsymbol{n}$ и касательной $\boldsymbol{t}$ к кривой L:

$$\boldsymbol{\delta} = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2}\,(\boldsymbol{t} \cos \theta + \boldsymbol{n} \sin \theta),$$

где τ и σ — кривизна и кручение L, θ — угол между Д. в. и касательной к L. С помощью вектора Дарбу *Френе формулы* могут быть записаны в виде:

$$\dot{\boldsymbol{t}} = [\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{t}], \quad \dot{\boldsymbol{n}} = [\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{n}], \quad \dot{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{b}],$$

где $\boldsymbol{b}$ — бинормаль L.

Применительно к сопровождающему триэдру пространственной кривой Д. в. в его геометрич. значении впервые указан Г. Дарбу [1].

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces..., pt 1, P., 1887—96, livre 1, ch. 1, p. 1—18; [2] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1, М.—Л., 1947. *Е. В. Шикин.*

ДАРБУ ИНВАРИАНТЫ СЕТИ — выражения h и k.

$$h = c + ab - \frac{\partial a}{\partial u}, \quad k = c + ab - \frac{\partial b}{\partial v},$$

составленные из коэффициентов уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = a \frac{\partial \theta}{\partial u} + b \frac{\partial \theta}{\partial v} + c\theta. \qquad (*)$$

Уравнению (*) удовлетворяет каждая из однородных координат точки x, описывающей *сопряженную сеть* из линий u и v на двумерной поверхности проективного n-мерного пространства ($n \geqslant 3$). Г. Дарбу [1] показал, что Д. и. с. h и k не меняют своего значения при изменении нормирования координат точки x. Накладывая то или иное условие на Д. и. с., получают частные виды сопряженных сетей.

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces..., pt 2, P., 1889, [2] Tzitzeica G., Geométrie différentielle projective des réseaux, P.—Bucarest, 1924; [3] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.—Л., 1950.

В. Т. Базылев.

ДАРБУ КВАДРИКА — поверхность 2-го порядка, имеющая с поверхностью S трехмерного проективного пространства P_3 касание 2-го порядка в точке x, и у к-рой линия пересечения с поверхностью S имеет точку x особой точкой специального типа. Из множества квадрик, имеющих с поверхностью S касание 2-го порядка в точке x, можно выделить такие квадрики, у к-рых линия пересечения с поверхностью S имеет точку x особой точкой с тремя совпадающими касательными. На поверхности S существуют три направления (**направления Дарбу**) для этих трех совпавших касательных. В точке $x \in S$ существует однопараметрич. семейство Д. к.— **пучок Дарбу**. Обобщение пучка Дарбу — пучок гиперквадрик, соприкасающихся в точке x с гиперповерхностью S_n проективного пространства P_{n+1}. Гиперповерхность S_n (неразвертывающаяся) вырождается в гиперквадрику тогда и только тогда, когда равен нулю обобщенный *Дарбу тензор* гиперповерхности (см. [2]).

Лит.: [1] Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.—Л., 1937; [2] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—382. *В. Т. Базылев.*

ДАРБУ ПОВЕРХНОСТИ — поверхности, ассоциированные с *бесконечно малым изгибанием* одной из них; открыты Г. Дарбу [1]. Д. п. образуют «венок» из 12 поверхностей с радиус-векторами $x_1, \ldots, x_6, z_1, \ldots, z_6$, удовлетворяющими уравнениям

$$dz_i=[z_{i+1}, dx_i],\ dx_i=[x_{i-1}, dz_i],\ z_i-x_{i+1}=[z_{i+1}, x_i],$$
$$i=1, \ldots, 6,$$
$$x_{i+6}=x_i, \quad z_{i+6}=z_i;$$

при этом z_{i+1} и x_i находятся в *Петерсона соответствии*, z_{i+1} и x_{i-1} — в *полярном соответствии*, z_i и x_{i+1} являются полостями конгруэнции W. Аналогичный «венок» образуется парами изометричных поверхностей эллиптич. пространства.

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces..., pt 4, P., 1896, 3 ed., 1946; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963. *М. И. Войцеховский.*

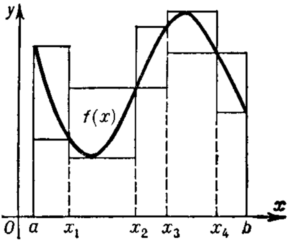
ДАРБУ СУММА — сумма специального вида. Пусть действительная функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$, $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — его разбиение:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_k=b,$$
$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\quad m_i=\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x),\quad M_i=\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x),$$
$$i=1, 2, \ldots, k.$$

Суммы

$$s_\tau=\sum_{i=1}^{k} m_i\,\Delta x_i \quad \text{и} \quad S_\tau=\sum_{i=1}^{k} M_i\,\Delta x_i$$

наз. соответственно **нижней** и **верхней** интегральной Д. с. Для любых двух разбиений τ и τ' отрезка $[a, b]$ справедливо неравенство $s_\tau \leqslant S_{\tau'}$, т. е. любая нижняя Д. с. меньше верхней. Если



$$\sigma_\tau=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$
$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

— интегральная сумма Римана, то

$$s_\tau=\inf_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau,$$
$$S_\tau=\sup_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau.$$

Геометрич. смысл нижней и верхней Д. с. заключается в том, что они равны площадям ступенчатых фигур, состоящих из прямоугольников с основаниями длины Δx_i и высотами соответственно m_i и M_i (см. рис.). Эти фигуры в случае, когда $f(x)\geqslant 0$, аппроксимируют изнутри и извне криволинейную трапецию, образованную графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ (которые могут вырождаться в точки).

Величины

$$I_*=\sup_\tau s_\tau \quad \text{и} \quad I^*=\inf_\tau S_\tau \tag{1}$$

наз. соответственно **нижним и верхним интегралом Дарбу**. Они являются пределами нижних и верхних Д. с.:

$$I_* = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau, \quad I^* = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau,$$

где

$$\delta_\tau = \max_{i=1,2,\ldots,k} \Delta x_i$$

— **мелкость разбиения** τ. Условие

$$I_* = I^* \qquad (2)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. При этом в случае выполнения условия (2) значение нижнего и верхнего интегралов Дарбу совпадает с интегралом Римана

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Условие (2) с помощью Д. с. может быть сформулировано в следующей эквивалентной форме: для любого $\varepsilon>0$ существует такое разбиение τ, что

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Условие

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$$

также является необходимым и достаточным для интегрируемости по Риману функции на отрезке $[a, b]$. При этом

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^k \omega_i(f)\, \Delta x_i,$$

где $\omega_i(f)$ — *колебание функции* $f(x)$ на отрезке

$$[x_{i-1}, x_i], \quad i=1, 2, \ldots, k.$$

Понятие нижних и верхних Д. с. обобщается на случай функций многих переменных, измеримых в смысле нек-рой положительной меры μ. Пусть E — измеримое (напр., по Жордану или по Лебегу) множество n-мерного пространства $n=1, 2, \ldots$, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ — разбиение множества E, т. е. система таких измеримых множеств E, что

$$\bigcup_{i=1}^k E_i = E, \qquad (3)$$

$$\mu(E_i \cap E_{i'}) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq i'. \qquad (4)$$

Пусть функция f ограничена на множестве E,

$$m_i = \inf_{x \in E_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in E_i} f(x), \quad i=1, 2, \ldots, k. \qquad (5)$$

Суммы

$$s_\tau = \sum_{i=1}^k m_i \mu(E_i), \quad S_\tau = \sum_{i=1}^k M_i \mu(E_i) \qquad (6)$$

также наз. нижней и, соответственно, верхней Д. с. Нижний I_* и верхний I^* интегралы определяются по формулам (1). В случае меры Жордана их равенство является необходимым и достаточным условием интегрируемости функции по Риману, причем их общее значение совпадает с интегралом Римана. В случае же меры Лебега для ограниченных измеримых по Лебегу функций всегда

$$I_* = I^* = \int_E f(x)\, dx.$$

Вообще, если μ — полная σ-аддитивная мера, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{S}_\mu = \{E\}$, f — ограниченная μ-измеримая на E действительная функция, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ — разбиение множества $E \in \mathfrak{S}_\mu$ на μ-измеримые множества

E_i, удовлетворяющие условиям (3), (4), Д. с. s_τ и S_τ определяются по формулам (5) — (6), а интегралы I_* и I^* — по формулам (1), в к-рых везде под μ понимают рассматриваемую меру, то

$$I_* = I^* = \int_E f(x)\, d\mu.$$

Обобщением Д. с. для неограниченных μ-измеримых функций f, определенных на множествах $E \in \mathfrak{S}_\mu$, являются ряды (если они абсолютно сходятся)

$$\begin{aligned} s_\tau &= \sum_{i=1}^{\infty} m_i \mu(E_i), \\ S_\tau &= \sum_{i=1}^{\infty} M_i \mu(E_i), \end{aligned} \qquad (7)$$

где $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ — разбиение множества $E \in \mathfrak{S}_\mu$ (это разбиение состоит, вообще говоря, из бесконечного числа μ-измеримых множеств E_i, удовлетворяющих условию (4) и, конечно, таких, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$), а m_i и M_i определяются по формулам (5), при этом в формулах (7) (как и выше в формулах (6)) считается, что $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$. Если снова определить I_* и I^* по (1), понимая теперь s_τ и S_τ в смысле (7), то $I_* = I^*$, причем в случае, когда величина $I = I_* = I^*$ является конечной, функция f интегрируема по мере μ и $I = \int_E f(x) d\mu$.

Названы по имени Г. Дарбу [1].

Лит.: [1] Darboux G., «Ann. sci. Ecole Norm. supér.», 1875, ser. 2, t. 4, p. 57—112; [2] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., т. 1—2, М., 1971—73; [3] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1—2, М., 1973; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

ДАРБУ ТЕНЗОР — симметрический тензор третьей валентности

$$\theta_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\beta\gamma} - \frac{b_{\alpha\beta}K_\gamma + b_{\beta\gamma}K_\alpha + b_{\gamma\alpha}K_\beta}{4K},$$

где $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности, K — гауссова кривизна, а $b_{\alpha\beta\gamma}$ и K_α — их ковариантные производные. К этому тензору в специальных координатах впервые пришел Г. Дарбу [1].

С Д. т. связана кубическая дифференциальная форма:

$$\theta_{\alpha\beta\gamma}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma = b_{\alpha\beta\gamma}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma - \\ - \frac{3}{4} \frac{K_\gamma}{K} b_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma.$$

Эта форма, отнесенная к кривой на поверхности, наз. инвариантом Дарбу. На поверхности постоянной отрицательной кривизны инвариант Дарбу совпадает с *дифференциальным параметром* на любой ее кривой. Кривая, в каждой точке к-рой инвариант Дарбу равен нулю, наз. линией Дарбу. На нелинейчатой поверхности отрицательной кривизны существует одно действительное семейство линий Дарбу. На поверхности положительной кривизны существуют три действительных семейства линий Дарбу. Поверхность, в каждой точке к-рой Д. т. определен и тождественно равен нулю, наз. поверхностью Дарбу. Поверхности Дарбу являются поверхностями 2-го порядка, не развертывающимися на плоскость.

Лит.: [1] Darboux G., «Bull. sci. math.», 1880, ser. 2, t. 4, p. 348—84; [2] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.—Л., 1948, стр. 210—33.

Е. В. Шикин.

ДАРБУ ТЕОРЕМА: если функция в каждой точке некоторого промежутка оси действительных чисел имеет конечную производную, то, принимая два каких-либо значения на этом промежутке, производная принимает на нем и любое промежуточное.

Л. Д. Кудрявцев.

ДАРБУ ТРЕХГРАННИК, Дарбу триэдр,— трехгранник, связанный с точкой поверхности и определяемый тройкой векторов, составленной из орта нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности и двух взаимно ортогональных ортов $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, касательных к поверхности

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{\partial r}{\partial u};\quad \boldsymbol{r}_2=\frac{\partial r}{\partial v};\quad \boldsymbol{n}=\frac{r_1\times r_2}{|r_1\times r_2|}.$$

Свойства поверхности отражаются в законах перемещения Д. т., когда его вершина описывает поверхность. Систематич. применение Д. т. к изучению поверхностей привело Г. Дарбу [1] к *подвижного репера методу*.

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces..., pt. 1, P., 1887. *А. Б. Иванов.*

ДАРБУ УРАВНЕНИЕ — 1) Д. у.— обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)+yR(x, y)}{Q(x, y)+xR(x, y)},$$

где P, Q, R — целые многочлены относительно x и y. Это уравнение впервые исследовал Г. Дарбу [1]. Частный случай Д. у.— *Якоби уравнение*. Пусть n — высшая степень многочленов P, Q, R; если Д. у. имеет s известных частных алгебраических решений, то при $s\geqslant\frac{1}{2}n(n+1)+2$ его общее решение отыскивается без квадратур, а при $s=\frac{1}{2}n(n+1)+1$ можно найти интегрирующий множитель (см. [2]). Если P и Q — однородные функции степени m, а R — однородная функция степени k, то при $k=m-1$ Д. у. является однородным дифференциальным уравнением, а при $k\neq m-1$ подстановкой $y=zx$ Д. у. приводится к *Бернулли уравнению*.

Лит.: [1] Darboux G., «Bull. sci. math.», 1878, t. 2, p. 66—96; [2] Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Хар., 1939. *Н. Х. Розов.*

2) Д. у.— гиперболическое уравнение

$$u_{tt}-\Delta u-\frac{\lambda(t, x)}{t}u_t=0,\quad t\neq 0,$$

где $\lambda(t, x)$ — неотрицательная, непрерывно дифференцируемая функция, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для решений Д. у., как и для решений волнового уравнения, справедлива следующая теорема единственности. Если какое-нибудь дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x, t)$ Д. у. обращается вместе со своей производной по t в нуль на основании, лежащем в плоскости $t=0$, характеристич. конуса, то оно равно нулю внутри всей области, ограниченной этим конусом. Характеристич. конус имеет тот же вид, что и для *волнового уравнения*.

При $\lambda(t, x)=n-1>0$ решением Д. у., удовлетворяющим начальным условиям

$$u(t, x)|_{t=0}=\varphi(x),$$

$$u_t(t, x)|_{t=0}=0$$

с дважды непрерывно дифференцируемой функцией $\varphi(x)$, является функция

$$u(x, t)=\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}t^{n-1}}\int_{|x-y|=t}\varphi(y)\,dS_y,$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Это решение Д. у. и решение $v(x, t)$ волнового уравнения, удовлетворяющее условиям

$$v(t, x)|_{t=0}=\varphi(x),\quad v_t(t, x)|_{t=0}=0,$$

связаны соотношением

$$u(t, x)=2\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)\sqrt{\pi}}\int_0^1 v(t\beta, x)(1-\beta^2)^{(n-3)/2}\,d\beta.$$

Д. у. названо по имени Г. Дарбу (G. Darboux).

Лит.: [1] Ион Ф., Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, пер. с англ., М., 1958. *А. К. Гущин.*

ДАРВИНА — ФАУЛЕРА МЕТОД — метод вывода канонического и большого канонич. распределений из микроканонического (см. *Гиббса распределение*). Для этого рассматривается ансамбль одинаковых статистич. систем, образующий в целом замкнутую систему, и характеризующая его функция распределения суммируется по микроскопич. состояниям всех систем ансамбля, кроме одной. Предполагается, что число систем в ансамбле стремится к бесконечности (при большом, но фиксированном числе частиц в каждой из систем ансамбля), что позволяет при расчете применять метод перевала. Использование указанной процедуры для установления ряда общих особенностей статистич. систем и расчета конкретных их характеристик приводит к тем же результатам, что и метод, основанный на канонич. распределениях Гиббса. Метод разработан Ч. Дарвиным (Ch. Darwin) и Р. Фаулером (R. Fowler) в 1923.

Лит.: [1] Фаулер Р., Гуггенгейм Э., Статистическая термодинамика, пер. с англ., М., 1949; [2] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966.

И. А. Квасников.

ДВЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в к-ром любое подмножество либо открыто, либо замкнуто. *А. А. Мальцев.*

ДВИЖЕНИЕ — преобразование пространства, сохраняющее геометрич. свойства фигур (размеры, форму и др.). Понятие Д. сформировалось путем абстракции реальных перемещений твердых тел в евклидовом пространстве. Д. принимается иногда в качестве основного понятия при аксиоматическом построении геометрии.

Д. евклидова пространства — преобразование пространства, сохраняющее расстояние между точками. Д. наз. собственным (Д. первого рода) или несобственным (Д. второго рода) в зависимости от того, сохраняет оно или не сохраняет *ориентацию* пространства.

На плоскости собственные Д. выражаются аналитически в прямоугольной системе координат (x, y) при помощи следующих формул

$$\tilde{x} = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a,$$

$$\tilde{y} = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b,$$

показывающих, что совокупность всех собственных Д. на плоскости зависит от трех параметров a, b, φ. Первые два параметра характеризуют *параллельный перенос* плоскости на вектор (a, b), а параметр φ — *вращение* (поворот) плоскости вокруг начала координат. Собственное Д. представляет собой произведение (композицию) вращения вокруг начала на угол φ и параллельного переноса на вектор (a, b). Всякое собственное Д. может быть представлено либо как параллельный перенос, либо как вращение вокруг некоторой точки.

Несобственные Д. выражаются при помощи формул

$$\tilde{x} = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a,$$
$$\tilde{y} = x\sin\varphi - y\cos\varphi + b,$$

показывающих, что несобственное Д. есть произведение собственного Д. на преобразование *симметрии* относительно нек-рой прямой. Всякое несобственное Д. представляет собой произведение параллельного переноса вдоль нек-рого направления и симметрии относительно прямой, имеющей то же направление.

В пространстве собственное Д. есть или вращение вокруг оси, или параллельный перенос, или может быть представлено в виде произведения вращения вокруг оси и параллельного переноса в направлении этой оси (винтовое Д.). Несобственное Д. есть либо симметрия относительно плоскости, либо может быть представлено в виде произведения симметрии относительно плоскости на вращение вокруг оси, перпендикулярной к этой плоскости, либо — в виде произведения симметрии относительно плоскости на перенос в направлении вектора, параллельного этой плоскости.

В прямоугольной системе координат (x, y, z) в пространстве Д. выражается аналитически при помощи формул

$$\tilde{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a,$$
$$\tilde{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b,$$
$$\tilde{z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c,$$

где элементы матрицы $\|a_{ij}\|$ удовлетворяют следующим условиям ортогональности

$$a_{1r}a_{1s} + a_{2r}a_{2s} + a_{3r}a_{3s} = \delta_{rs}$$

($\delta_{rs}=1$ при $r=s$, $\delta_{rs}=0$ при $r \neq s$). Д. является собственным или несобственным в зависимости от того, равняется ли определитель этой матрицы 1 или —1. См. *Ортогональное преобразование*.

Аналогично в случае n-мерных евклидовых пространств Д. выражается аналитически в прямоугольных координатах при помощи ортогональной матрицы $A = \|a_{ij}\|$:

$$a_{1r}a_{1s} + a_{2r}a_{2s} + \ldots + a_{nr}a_{ns} = \delta_{rs}.$$

Д. р и м а н о в а п р о с т р а н с т в а — взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение класса C^s, $s \geqslant 2$, при к-ром сохраняются длины соответствующих линий. Линейный элемент пространства

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^\alpha dx^\beta,$$

где по индексам α, β производится суммирование, инвариантен относительно Д. Аналитически Д. определяется формулами, выражающими координаты преобразованной точки $\tilde{M}(\tilde{x}^i)$ через координаты исходной точки $M(x^i)$ при помощи функций $f^i(x)$ класса C^s:

$$\tilde{x}^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n), \qquad (*)$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, n.$$

Условие инвариантности линейного элемента означает, что

$$g_{\alpha\beta}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^n) \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^j} = g_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

Важное значение имеет понятие Д. в римановых пространствах общей теории относительности: в сильных асимметрических гравитационных полях твердые тела могут иметь лишь весьма ограниченные движения. Возможны также случаи, когда они не будут вовсе допускать никаких Д. В последней ситуации при любом преобразовании пространства метрика не остается инвариантной. Другими словами, любое перемещение сопровождается деформацией тела.

Д. п р о с т р а н с т в а а ф ф и н н о й с в я з н о с т и — взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение класса C^s, $s \geqslant 2$, при к-ром всякое поле параллельных векторов вдоль любой гладкой линии переходит в поле параллельных векторов преобразованной кривой. При Д. объект аффинной связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$ переходит в себя. Обратно, всякое отображение $(*)$, переводящее объект аффинной связности в себя, есть Д.

Д. составляют группу преобразований (см. *Движений группа*). Они являются простейшими преобразованиями пространства.

Лит.: [1] Е г о р о в И. П., Лекции по аксиоматике Вейля и неевклидовым геометриям, Рязань, 1973; [2] е г о ж е, Движения в пространствах аффинной связности, Казань, 1965; [3] Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П., Геометрия, т. 1, М., 1974. *И. П. Егоров.*

ДВИЖЕНИЙ ГРУППА — непрерывная группа преобразований пространства, элементами к-рой являются *движения* этого пространства, а групповой операцией — последовательное выполнение в указанном порядке двух движений. В широком смысле, любая группа непрерывных преобразований пространства может быть сделана Д. г. этого пространства. А именно, введение для заданной группы понятия равенства фигур приводит к нек-рой новой геометрии, в к-рой эта группа служит Д. г. (см. *Эрлангенская программа*).

Д. г. наз. транзитивной Д. г., если для любых двух точек пространства можно указать в данной группе движение, к-рое переводит одну точку в другую, и интранзитивной Д. г., если существуют пары точек, для к-рых такого движения указать нельзя.

Пространство, в к-ром можно ввести заданную Д. г., наз. пространством, допускающим эту Д. г. Если Д. г. пространства имеет максимальный порядок, то она наз. полной Д. г. Напр., полная транзитивная Д. г. n-мерного евклидова пространства есть группа порядка $n(n+1)/2$, т. е. группа, зависящая от $n(n+1)/2$ параметров. В частном случае евклидовой плоскости в качестве параметров полной Д. г. можно взять координаты точки, в к-рую переходит начало координат, и угол поворота, т. е. эта Д. г.— трехпараметрическая. Д. г. G евклидовой плоскости есть некоммутативная разрешимая группа. Ее подгруппа вращений H коммутативна и интранзитивна, а подгруппа N параллельных переносов коммутативна и транзитивна и является нормальным делителем Д. г. Пересечение этих двух подгрупп — единица Д. г. Факторгруппа G/N изоморфна H, коммутант Д. г. G содержится в N. В качестве параметров полной Д. г. трехмерного евклидова пространства можно взять координаты точки $O(a, b, c)$, в к-рую переходит начало, и *эйлеровы углы*, т. е. эта Д. г.— шестипараметрическая.

Исследования по Д. г. в обобщенных дифференциально-геометрич. пространствах ведутся одновременно по нескольким направлениям, важнейшими из к-рых являются следующие.

1) Направление теоретико-группового характера [3]. Это — построение в пространстве, в к-ром действует группа преобразований, инвариантной метрики или связности.

2) Изучение Д. г. в заданных пространствах, т. е. групп, к-рые допускает пространство с заданной метрикой или связностью (см. [1], [2]).

3) Направление, пограничное с первыми двумя и состоящее в изучении лакун и *лакунарных пространств*, т. е. либо построение пространств, допускающих полную Д. г. заданного порядка, либо доказательство несуществования пространств определенного типа, допускающих ту или иную заданную Д. г.

Напр., n-мерное аффинное пространство допускает Д. г. максимального порядка $r=n^2+n$. Порядки Д. г. других пространств аффинной связности принадлежат отрезку натурального ряда $[1, n^2+n]$, но не каждое число из этого отрезка может быть порядком полной Д. г.

Интервалы наибольшей длины, составленные из чисел, не являющихся порядками полных Д. г., наз. лакунами, а дополнения к ним до указанного отрезка натурального ряда — отрезками конденсации. Пространство наз. пространством k-й лакунарности, если порядок его полной Д. г. принадлежит отрезку конденсации, имеющему номер k. Основная проблема состоит в распределении лакун и отрезков конденсации возможных порядков полных Д. г., определении для последних самих Д. г. и соответствующих им лакунарных пространств. Этот вопрос тесно связан с исследованием степеней подвижности твердых тел.

Полную Д. г. порядка $n(n+1)/2$ допускает лишь риманово пространство постоянной кривизны. Во всяком другом случае Д. г. пространства имеет меньшее число параметров. Многообразие аффинной связности допускает полную Д. г. (порядка $n(n+1)$) тогда и только тогда, когда связность симметрична, а кривизна равна нулю; при этом Д. г. является общей *линейной группой*.

Лит.: [1] Егоров И. П., в кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 375—428; [2] его же, Движения в пространствах аффинной связности, Казань, 1965; [3] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967. *И. П. Егоров.*

ДВОЕТОЧИЕ — топологич. пространство F, состоящее из двух точек. Если в F открыты оба одноточечных подмножества (и тогда оба замкнуты), то F наз. простым двоеточием. Если в F открыто лишь одно из двух одноточечных подмножеств, то F наз. связным двоеточием. Наконец, если в F открыты лишь пустое подмножество и все F, то F называется слипшимся двоеточием. Последнее пространство, в отличие от очень важных при всей их простоте первых двух, применений не находит.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977. *А. А. Мальцев.*

ДВОИЧНАЯ ЕДИНИЦА в теории информации — то же, что *бит.*

ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ — позиционная система *счисления* с основанием, равным двум. Арифметич. операции в ней выполняются особенно просто, так как в этой системе счисления нетривиальные действия с однозначными числами сводятся к следующим двум: $1+1=10$, $1\cdot 1=1$. *В. И. Нечаев.*

ДВОИЧНЫЙ ДИСКОНТИНУУМ — топологическое произведение простых двоеточий — дискретных пространств, состоящих из двух точек.

ДВОЙНАЯ ПЛОСКОСТЬ — алгебраическая поверхность, представляющая собой двумерный аналог *гиперэллиптической кривой*. Неособая алгебраическая проективная поверхность X над алгебраически замкнутым полем k наз. двойной плоскостью, если ее поле рациональных функций $k(X)$ является квадратичным расширением поля рациональных функций от двух переменных. Если характеристика поля отлична от 2 (в дальнейшем это условие предполагается выполненным), то каждая Д. п. бирационально изоморфна аффинной поверхности, задаваемой в трехмерном аффинном пространстве уравнением

$$z^2+F(x, y)=0.$$

Иногда именно поверхности такого типа наз. Д. п. Для каждой Д. п. X существует морфизм f в проективную плоскость $P^2(k)$, разлагающийся в композицию бирационального морфизма

$$\varphi:\quad X\to X'$$

на некоторую нормальную поверхность X' и конечного морфизма степени два

$$\varphi': X' \longrightarrow P^2(k).$$

Кривая ветвления W морфизма φ' наз. кривой ветвления Д. п. (и определяется, вообще говоря, не однозначно по X). Кривая ветвления Д. п. играет основную роль в их изучении. Напр., по ней вычисляются численные инварианты Д. п. Если W неприводима, то иррегулярность Д. п. X равна нулю. Если степень W (всегда четная) равна $2k$ и все особенности W только двойные обыкновенные или каспидальные (см. *Особая точка* алгебраической кривой), то арифметич. род $p_a(X)$ и эйлерова характеристика $\chi(X)$ (топологическая или l-адическая) вычисляются по формулам:

$$p_a(X)=\frac{(k-1)(k-2)}{2}, \quad \chi(X)=4k^2-6k+6.$$

В общем случае существует бирациональный морфизм $F \to P^2(k)$ такой, что проекция на F нормализации $\overline{X}$ расслоенного произведения X и F над $P^2(k)$ на F является конечным накрытием степени 2 с неособой (быть может, приводимой) кривой ветвления $\overline{W}$. В этом случае имеют место формулы:

$$p_a(X)=p_a(\overline{X})=1-\frac{\chi(\overline{W})}{4}-\frac{(\overline{W})^2}{8},$$

$$\chi(\overline{X})=2\chi(F)-\chi(\overline{W}).$$

Для любой кривой W четной степени на проективной плоскости всегда существует Д. п., имеющая W в качестве своей кривой ветвления. Выбор подходящей кривой W позволяет во многих случаях решать задачу построения алгебраич. поверхности с заданными инвариантами (см. [1], [3]).

Классификация Д. п. проводится отдельно в каждом классе алгебраич. поверхностей. Описаны [5] рациональные и линейчатые Д. п.; перечислены [3] Д. п., являющиеся *эллиптическими поверхностями* или *К3-поверхностями*. Рассмотрено (см. [3], [4]) много примеров Д. п. основного типа.

Лит.: [1] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 77—170; [2] Zariski O., Algebraic surfaces, B., 1971; [3] Enriques F., Le superficie algebriche, Bologna, 1949; [4] Campedelli L., «Atti Accad. naz. Lincei Rend.», ser. 6, 1932, v. 15, p. 203—8, 358—62, 536—42; [5] Jung H. W. E., «J. reine und angew. Math.», 1942, Bd 184, № 4, S. 199—237. *И. В. Долгачев.*

ДВОЙНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность нек-рых элементов, занумерованных двумя индексами:

$$a_{mn}, \quad m=1,\ 2,\ \ldots, \quad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Д. п. по сравнению с обычными последовательностями (т. е. такими, у к-рых нумерация производится одним индексом) имеют ряд специфич. особенностей: существует, напр., несколько определений пределов Д. п., не эквивалентных между собой.

Понятие двойной числовой последовательности тесно связано с понятием двойного числового ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn},$$

у к-рого как его члены, так и частичные суммы

$$s_{mn}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} u_{kl}$$

составляют Д. п. При этом для всякой двойной числовой последовательности существует ряд, для к-рого она является последовательностью его частичных сумм. См. также *Двойной ряд*. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДВОЙНАЯ ТОЧКА — один из видов *особых точек* кривой $F(x, y)=0$, в к-рой первые частные производные равны нулю и по крайней мере одна из вторых частных производных функции $F(x, y)$ не равна нулю. При исследовании строения кривой вблизи Д. т. рассматривают знак выражения

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)_0^2.$$

Если $\Delta>0$, то Д. т. наз. изолированной точкой; напр., у кривой

$$y^2-x^4+4x^2=0$$

начало координат есть изолированная Д. т. (см. рис. 1). Если $\Delta<0$, то Д. т. наз. *узловой*, или *точкой самопересечения*; напр., у кривой

$$(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2-a^4=0$$

начало координат есть узловая точка (см. рис. 2). Если $\Delta=0$, то Д. т. кривой является либо изолированной, либо характеризуется тем, что различные ветви кривой имеют в этой точке общую касательную: например, а) *точка возврата 1-го рода* — ветви кривой расположены по разные стороны от общей касательной и по одну сторону от общей нормали (см., напр., рис. 3; $y^2-x^3=0$); б) *точка возврата 2-го рода* — ветви кривой расположены по одну сторону от общей касательной и по одну сторону от общей нормали (см., напр., рис. 4; $(y-x^2)^2-x^5=0$); в) *точка самоприкосновения* — ветви кривой соприкасаются (см., напр., рис. 5; $y^2-x^4=0$).

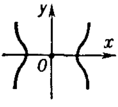


Рис. 1.

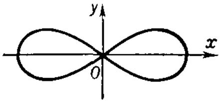


Рис. 2.

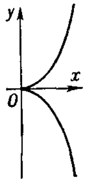


Рис. 3.

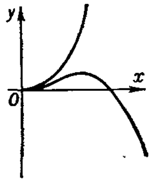


Рис. 4.

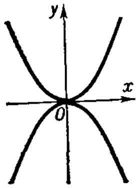


Рис. 5.

А. Б. Иванов.

ДВОЙНОГО ОТРИЦАНИЯ ЗАКОН — логический принцип, согласно к-рому «если неверно, что неверно A, то верно A». Д. о. з. наз. также *законом снятия двойного отрицания*. В формализованном языке логики высказываний Д. о. з. выражается формулой $\urcorner\urcorner p\supset p$ и в таком виде (или в виде соответствующей *аксиом схемы*) фигурирует обычно в перечне логич. аксиом формальных теорий. В традиционной содержательной математике Д. о. з. служит логич. основанием для проведения так наз. *доказательств от противного* в непротиворечивых теориях по следующей схеме: из предположения, что суждение A данной математич. теории неверно, выводится противоречие в этой теории, затем на основании непротиворечивости теории делается вывод, что неверно «не A», и тогда по Д. о. з. заключают, что верно A. В рамках конструктивных рассмотрений, когда действует требование алгоритмич. эффективности обоснования математич. суждений, Д. о. з. оказывается, вообще говоря, неприемлемым. Типичным тому примером служит всякое доказательство от противного суждения A, имеющего вид «при всяком x существует y такой, что верно $B(x, y)$», когда последний шаг, состоящий в применении Д. о. з., оказывается невозможным из-за того, что конструктивное понимание суждения требует для его обоснования построения алгоритма, к-рый по каждому x давал бы конструкцию y такого, что верно $B(x, y)$. Между тем рассуждение с применением Д. о. з. не приводит к построению какого бы то ни было алгоритма; более того, искомого в этом случае алгоритма может вообще не существовать (см. также *Конструктивного подбора принцип*).

Д. о. з. тесно связан с *исключенного третьего законом*, в определенном смысле он даже эквивалентен последнему. Так, в интуиционистском исчислении высказываний каждый из этих двух законов выводим из другого.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

Ф. А. Кабаков.

ДВОЙНОГО СЛОЯ ПОТЕНЦИАЛ — выражение вида

$$u(x)=\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n_y}(h(r_{xy}))\,\mu(y)\,ds_y, \qquad (1)$$

где Γ — граница произвольной ограниченной N-мерной области $g\subset E^N$, $N\geqslant 2$, n_y — внешняя по отношению к области g нормаль к границе Γ в точке y, $\mu(y)$ — плотность потенциала — функция, заданная на Γ, $h(r_{xy})$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$h(r_{xy})=\begin{cases}\dfrac{1}{(N-2)\,\omega_N}\,r_{xy}^{2-N}, & N>2,\\[2mm] \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_{xy}}, & N=2,\end{cases} \qquad (2)$$

$\omega_N=2(\sqrt{\pi})^N/\Gamma(N/2)$ — площадь поверхности единичной $(N-1)$-мерной сферы, $r_{xy}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2}$ — расстояние между точками x и $y\in E^N$. Граница Γ принадлежит классу $C^{(1,\,\lambda)}$; она является поверхностью или дугой Ляпунова.

Выражение (1) может быть истолковано как потенциал, создаваемый диполями, помещенными на Γ, направление к-рых в каждой точке $y\in\Gamma$ совпадает с направлением внешней нормали n_y, а интенсивность равна $\mu(y)$.

Если $\mu(y)\in C^{(0)}(\Gamma)$, то $u(x)$ определено для всех $x\in E^N$ (в частности и для $x\in\Gamma$) и обладает следующими свойствами.

1) Всюду в $E^N\setminus\Gamma$ функция $u(x)$ имеет производные всех порядков $(\in C^{(\infty)})$ и удовлетворяет уравнению Лапласа, причем производные по координатам точки x можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла.

2) При переходе через границу Γ функция $u(x)$ испытывает разрыв. Пусть x_0 — произвольная точка на Γ, $u^+(x_0)$ и $u^-(x_0)$ — предельные значения изнутри и извне, тогда $u^{\pm}(x_0)$ существуют и равны

$$u^{\pm}(x_0)=\pm\frac{\mu(x_0)}{2}+\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n_y}(h(r_{x_0y}))\,\mu(y)\,ds_y, \qquad (3)$$

причем интеграл в формуле (3) как функция $x_0\in\Gamma$ принадлежит $C^{(0,\,\alpha)}$ при любом $0\leqslant\alpha<1$, кроме того, функция, равная u в g и u^+ на Γ, непрерывна в $g+\Gamma$, а функция, равная u в $E^N-(g+\Gamma)$ и u^- на Γ, непрерывна в E^N-g.

3) Если плотность $\mu(y)\in C^{(0,\,\alpha)}$ и $\alpha\leqslant\lambda$, то $u(x)$, продолженная так же, как в 2) на $g+\Gamma$ или E^N-g, принадлежит классу $C^{(0,\,\alpha)}$ в $g+\Gamma$ или в E^N-g.

4) Если $\alpha>1-\lambda$, а x_1 и x_2 — две точки, принадлежащие нормали, выходящей из точки x_0, симметричные относительно точки x_0, то

$$\lim_{x_1\to x_0}\left(\frac{\partial u(x_2)}{\partial n}-\frac{\partial u(x_1)}{\partial n}\right)=0. \qquad (4)$$

В частности, если существует одна из производных $\partial u^+(x_0)/\partial n$, $\partial u^-(x_0)/\partial n$, то существует и другая и $\partial u^+(x_0)/\partial n=\partial u^-(x_0)/\partial n$. Это свойство справедливо также, если $\mu(y)\in C^{(0)}(\Gamma)$, а $\Gamma\in C^{(2)}$.

Перечисленные выше свойства обобщаются во многих направлениях. Плотность $\mu(x)$ может принадлежать $L_p(\Gamma)$, $p\geqslant 1$. Тогда $u(x)\in L_p(g+\Gamma)$, $u(x)\in C^{(\infty)}$ вне Γ и удовлетворяет уравнению Лапласа, формулы (3) и (4) имеют место для почти всех $x_0\in\Gamma$ и интеграл в (3) принадлежит $L_p(\Gamma)$.

Изучены также свойства Д. с. п., понимаемых как интегралы по произвольной мере ν, определенной на Γ:

$$u(x)=\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n_y}(h(r_{xy}))\,d\nu(y);$$

здесь также $u(x) \in C^{(\infty)}$ вне Γ и удовлетворяет уравнению Лапласа, формулы (3) и (4) имеют место для почти всех $x_0 \in \Gamma$ по мере Лебега $\nu(x)$ с заменой $\mu(x_0)$ на производную меры $\nu'(x_0)$. В определении (1) фундаментальное решение уравнения Лапласа может быть заменено на произвольную функцию Леви для общего эллиптич. оператора 2-го порядка с переменными коэффициентами, а $\partial/\partial n_y$ — на производную по конормали. При этом остаются справедливыми свойства, перечисленные выше (см. [2]).

Д. с. п. играет важную роль в решении краевых задач для эллиптич. уравнений. Представление искомого решения (первой) краевой задачи в виде Д. с. п. с неизвестной плотностью $\mu(y)$ и использование свойства 2) приводит к интегральному *Фредгольма уравнению* второго рода на Γ для определения функции $\mu(y)$ (см. [1], [2]).

При решении краевых задач для параболич. уравнений используется понятие теплового потенциала двойного слоя, т. е. интеграл вида

$$v(x, t)=\int_0^t d\tau \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y}(G(x, t; y, \tau))\,\sigma(y, \tau)\,dy,$$

где $G(x, t; y, \tau)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности в N-мерном пространстве:

$$G(x, t; y, \tau)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^N (t-\tau)^{N/2}}\, e^{-r_{xy}^2/4(t-\tau)},$$

$\sigma(y, \tau)$ — плотность потенциала. Функция $v(x, t)$ и ее обобщение на случай произвольного параболич. уравнения 2-го порядка обладают свойствами, аналогичными указанным выше для $u(x)$ (см. [3], [4], [5]).

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [3] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958; [5] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968. *И. А. Шишмарев.*

ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ, сложное (или ангармоническое) отношение, четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 на прямой — число, обозначаемое символом $(M_1M_2M_3M_4)$ и равное

$$\frac{M_1M_3}{M_3M_2} : \frac{M_1M_4}{M_4M_2}.$$

При этом отношение M_1M_3/M_3M_2 считается положительным, если направления отрезков M_1M_3 и M_3M_2 совпадают, и — отрицательным при различных направлениях. Д. о. зависит от порядка нумерации точек, к-рый может отличаться от порядка следования точек на прямой. Наряду с Д. о. четырех точек, рассматривается Д. о. четырех прямых m_1, m_2, m_3, m_4, проходящих через точку. Это отношение обозначается символом $(m_1m_2m_3m_4)$. Оно равно

$$\frac{\sin(m_1m_3)}{\sin(m_3m_2)} : \frac{\sin(m_1m_4)}{\sin(m_4m_2)},$$

причем угол (m_im_j) между прямыми m_i и m_j рассматривается со знаком.

Если точки M_1, M_2, M_3, M_4 лежат на прямых m_1, m_2, m_3, m_4, то

$$(M_1M_2M_3M_4)=(m_1m_2m_3m_4).$$

Если точки M_1, M_2, M_3, M_4 и M_1', M_2', M_3', M_4' получены пересечением одной четверки прямых m_1, m_2, m_3, m_4, то $(M_1,M_2M_3M_4)=(M_1'M_2'M_3'M_4')$.

Д. о. является инвариантом проективных преобразований. Д. о., равное -1, наз. гармоническим отношением (см. *Гармоническая четверка точек*). *Э. Г. Позняк.*

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ — см. *Кратный интеграл.*

ДВОЙНОЙ МОДУЛЬ — 1) То же, что *бимодуль.* 2) Пара подгрупп H и F группы G, участвующая в разложении группы G на двойные смежные классы, т. е. в разбиении G на непересекающиеся подмножества вида HxF, где x — элемент из G. Подмножество HxF наз. смежным классом группы G по Д. м. (H, F), или двойным смежным классом группы G по модулю (H, F). Напр., разложение группы порядка 24 на двойные смежные классы по модулю (H, F), где H и F — ее силовские 2- и 3-подгруппы, состоит из одного смежного класса по Д. м. (H, F). Любой двойной смежный класс HxF состоит из $|H:H\cap xFx^{-1}|$ смежных классов группы G по подгруппе F и одновременно из $|F:F\cap x^{-1}Hx|$ смежных классов группы G по подгруппе H, где $|U:V|$ означает индекс подгруппы V в группе U.

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962. *В. Д. Мазуров.*

ДВОЙНОЙ ПРЕДЕЛ — 1) Д. п. последовательности, предел двойной последовательности $\{x_{mn}\}$, $m, n=1, 2, \ldots,$ — число a, определяемое следующим образом: для любого $\varepsilon>0$ существует такое N_ε, что для всех $m>N_\varepsilon$ и $n>N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|x_{mn}-a|<\varepsilon.$$

Обозначение:

$$a=\lim_{m,\ n\to\infty} x_{mn}.$$

Если для любого $\varepsilon>0$ существует такое N_ε, что для всех $m>N_\varepsilon$ и $n>N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_{mn}|>\varepsilon$, то последовательность x_{mn} имеет своим пределом бесконечность:

$$\lim_{m,\ n\to\infty} x_{mn}=\infty.$$

Аналогично определяются бесконечные пределы

$$\lim_{m,\ n\to\infty} x_{mn}=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{m,\ n\to\infty} x_{mn}=-\infty.$$

Д. п. последовательности является частным случаем Д. п. функции по множеству, а именно в случае, когда это множество состоит из точек плоскости с целочисленными координатами m и n. Поэтому между Д. п. последовательности и ее повторными пределами существует та же связь, что и в общем случае.

2) Д. п. функции — предел функции двух переменных, определяемый следующим образом. Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве E, расположенном в плоскости XOY, а (x_0, y_0) — его *предельная точка.* Число A наз. Д. п. функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), или при $(x, y)\to(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех точек $(x, y)\in E$, координаты к-рых удовлетворяют неравенствам

$$0<|x-x_0|<\delta, \quad 0<|y-y_0|<\delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x, y)=A.$$

Используя понятие предела последовательности, определение Д. п. функции можно сформулировать следующим образом:

$$A=\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x, y),$$

если для любой последовательности

$$(x_n, y_n)\longrightarrow(x_0, y_0),\ (x_0, y_0)\neq(x_n, y_n)\in E,\ n=1, 2, \ldots,$$

выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = A.$$

Аналогично формулируются определения Д. п. функции при стремлении аргумента к бесконечности, а также определения бесконечных Д. п. функции.

Существует связь между Д. п. функции и *повторным пределом* функции в точке (x_0, y_0) или в ∞: пусть x_0 и y_0 — предельные точки (конечные или бесконечные) для числовых множеств X и Y, $E = X \times Y$. Если существует конечный или бесконечный Д. п. функции

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$$

и при любом $y \in Y$ существует конечный предел

$$\varphi(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y),$$

то существует и повторный предел

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y),$$

и он равен Д. п. функции.

Используя понятие окрестности, определению Д. п. функции можно придать следующий вид: пусть a — предельная точка (x_0, y_0) множества E или символ ∞, причем в последнем случае множество E неограничено, A — число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$, тогда

$$A = \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y),$$

если для любой окрестности O_A точки или символа A существует такая окрестность O_a числа или символа a, что для всех $(x, y) \in E \cap O_a$, $(x, y) \neq a$, выполняется условие $f(x, y) \in O_A$. В этом виде определение Д. п. функции переносится на случай, когда функция f определена на произведении топологич. пространств X и Y, $x \in X$, $y \in Y$, а значения $f(x, y)$ также принадлежат нек-рому топологич. пространству. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДВОЙНОЙ РЯД — ряд

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} u_{mn}, \tag{1}$$

члены u_{mn}, m, $n = 1, 2, \ldots$, к-рого образуют двойную числовую последовательность. Конечные суммы

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{mn}$$

наз. частичными суммами Д. р. (1), или прямоугольными частичными суммами. Они также образуют двойную последовательность. Если у этой последовательности $\{S_{mn}\}$ существует конечный *двойной предел*

$$S = \lim_{m, n \to \infty} S_{mn}, \tag{2}$$

то ряд (1) наз. сходящимся, а число S — его суммой:

$$S = \sum_{m, n=1}^{\infty} u_{mn}.$$

Если конечного предела (2) не существует, то ряд (1) наз. расходящимся. На Д. р. переносятся многие свойства обычных (однократных) рядов. Напр., если Д. р.

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} a_{mn} \text{ и } \sum_{m, n=1}^{\infty} b_{mn}$$

сходятся, то при любых числах λ и μ Д. р.

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} (\lambda a_{mn} + \mu b_{mn})$$

также сходится и

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty}(\lambda a_{mn}+\mu b_{mn})=\lambda\sum_{m,\, n=1}^{\infty}a_{mn}+\mu\sum_{m,\, n=1}^{\infty}b_{mn}.$$

Если Д. р. сходится, то

$$\lim_{m,\, n\to\infty} u_{mn}=0$$

(необходимое условие сходимости ряда (1)). Для того чтобы Д. р. (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое число N_ε, что

$$|S_{m+k,\, n+l}-S|<\varepsilon,$$

если только $m>N_\varepsilon$, $n>N_\varepsilon$, а k и l — любые неотрицательные целые. Если все члены ряда (1) неотрицательны, то последовательность его частичных сумм S_{mn} всегда имеет конечный или бесконечный предел, причем

$$\lim_{m,\, n\to+\infty} S_{mn}=\sup_{m,\, n=1,\, 2,\, \ldots} S_{mn}.$$

Д. р. обладают свойствами, обусловленными наличием у его членов двух индексов, к-рые являются специфич. особенностью Д. р. Если сходится Д. р. (1) и для всех $n=1,\, 2,\, \ldots$ сходятся ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn},$$

то повторный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}\right)$$

также сходится и его сумма равна сумме данного ряда.

Д. р. наз. абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty}|u_{mn}|.$$

Если Д. р. абсолютно сходится, то он и просто сходится; более того, сходится любой ряд, полученный перестановкой членов данного Д. р. При этом сумма любого такого ряда совпадает с суммой исходного ряда.

На Д. р., члены к-рых являются функциями, переносятся многие понятия и свойства, присущие обычным функциональным рядам, напр., понятие равномерной сходимости, критерий Коши равномерной сходимости ряда, признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Вместе с тем, далеко не все теоремы об однократных рядах непосредственно переносятся на Д. р. Так, прямой аналог *Абеля теоремы* для степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

не справедлив для двойных степенных рядов, т. е. рядов вида

$$\sum_{m,\, n=0}^{\infty} c_{mn}x^m y^n. \tag{3}$$

Существуют, напр., Д. р. (3), к-рые сходятся только в двух точках плоскости: ряд (3) с коэффициентами

$$c_{0n}=c_{n0}=-c_{1n}=-c_{n1}=n!,$$
$$n=1,\, 2,\, \ldots,\ c_{mn}=0,\ m\geqslant 2,\ n\geqslant 2,$$

сходится только в двух точках (0, 0) и (1, 1).

Кроме определения (2) для Д. р. (1) существуют другие определения его сходимости и суммы, связанные также с наличием у его членов двух индексов. Напр., пусть

$$S_p=\sum_{m+n\leqslant p} u_{mn},\ \ p=1,\, 2,\, \ldots$$

(S_p наз. **треугольной частичной суммой** Д. р. (1)), то Д. р. (1) наз. сходящимся, если последовательность $\{S_p\}$ сходится; ее предел

$$S=\lim_{p\to\infty} S_p,$$

наз. треугольной суммой ряда (1).

Если положить

$$S_r=\sum\nolimits_{m^2+n^2\leqslant r^2} u_{mn},\quad r>0$$

(S_r наз. **круговой частичной суммой**), то Д. р. (1) наз. сходящимся, если функция S_r параметра r имеет предел при $r\to+\infty$, этот предел

$$S=\lim_{r\to+\infty} S_r,$$

наз. круговой суммой ряда (1).

Если через $\mathfrak{N}$ обозначить произвольное конечное множество пар индексов (m, n) и положить

$$S_{\mathfrak{N}}=\sum\nolimits_{(m,\ n)\in\mathfrak{N}} u_{mn},$$

то число S наз. **суммой** ряда (1), если для любого $\varepsilon>0$ существует такое конечное множество $\mathfrak{N}_\varepsilon$ пар индексов (m, n), что для любого $\mathfrak{N}\supset\mathfrak{N}_\varepsilon$ выполняется неравенство $|S-S_{\mathfrak{N}}|<\varepsilon$. Если такое число S существует, то ряд (1) наз. сходящимся.

Все эти определения сходимости Д. р. (1) не эквивалентны между собой. Однако, если члены Д. р. неотрицательны, то из сходимости в одном из указанных смыслов следует сходимость во всех остальных, причем все значения сумм Д. р. (1) в этом случае совпадают. Имеются и другие определения сходимости Д. р. Для Д. р. существуют различные методы суммирования. Понятие Д. р. обобщается на случай, когда его члены являются не числами, а, напр., элементами линейного нормированного пространства.

Лит.: [1] Pringsheim A., «Münchener Sitzungsber. der Math.», 1897, Bd 27, S. 101—53; [2] его же, «Math. Ann.», 1900, Bd 53, S. 289—321; [3] его же, Vorlesungen über Zahlenlehre, Bd 2, Lpz.— B., 1923; [4] Bromwich T. J., Theory of infinite series, 2 ed., L., 1926; [5] Салехов Г. С., Вычисление рядов, М., 1955; [6] Уиттекер Э.-Т., Ватсон Д.-Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1963.

Л. Д. Кудрявцев.

ДВОЙНЫЕ И ДУАЛЬНЫЕ ЧИСЛА — *гиперкомплексные числа* вида $a+be$, где a и b — действительные числа, и для двойных чисел $e^2=+1$, а для дуальных чисел $e^2=0$. Сложение Д. и д. ч. определяется формулой

$$(a_1+b_1e)+(a_2+b_2e)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)e.$$

Умножение двойных чисел производится по формуле

$$(a_1+b_1e)(a_2+b_2e)=(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)e,$$

а дуальных чисел — по формуле

$$(a_1+b_1e)(a_2+b_2e)=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)e.$$

Комплексные числа, двойные числа и дуальные числа наз. также **комплексными числами гиперболического, эллиптического и параболического типов** соответственно. Иногда при помощи этих чисел изображают движения трехмерных пространств Лобачевского, Римана и Евклида (см., напр., *Винтовое исчисление*).

Как двойные, так и дуальные числа образуют двумерные (с базой 1 и e) ассоциативно-коммутативные алгебры над полем действительных чисел. В отличие от поля комплексных чисел эти алгебры содержат делители нуля, причем в алгебре двойных чисел все делители нуля имеют вид $a\neq ae$. Алгебра двойных чисел может быть разложена в прямую сумму двух полей действительных чисел. С этим свойством связано еще одно название двойных чисел — расщепляемые комплексные числа. Встречается и другое наименование двойных чисел — паракомплексные числа. Алгебра дуальных чисел рассматривается не только над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, но и над произвольным полем или коммутативным кольцом. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей и M есть A-модуль. Прямая сумма A-модулей $A \oplus M$ относительно умножения

$$(a, m)(a', m') = (aa', am' + a'm)$$

является коммутативной A-алгеброй и обозначается $I_A(M)$. Она наз. алгеброй дуальных чисел относительно модуля M. A-модуль M отождествляется с идеалом алгебры $I_A(M)$, служащим ядром пополняющего гомоморфизма

$$\varepsilon: I_A(M) \longrightarrow A \quad ((a, m) \longrightarrow a).$$

При этом квадрат M^2 данного идеала равен нулю, а $I_A(M)/M \simeq A$. Если A — регулярное кольцо, то верно и обратное: если B есть A-алгебра и M — идеал в B такой, что $M^2=0$ и $B/M \simeq A$, то $B \simeq I_A(M)$, где M рассматривается как A-модуль (см. [4]).

При $M=A$ алгебра $I_A(M)$ (обозначаемая в этом случае I_A) изоморфна факторалгебре алгебры многочленов $A(T)$ по идеалу T^2. Многие свойства A-модуля M можно переформулировать как свойства алгебры $I_A(M)$, что позволяет сводить многие вопросы об A-модулях к соответствующим вопросам в теории колец (см. [2]).

Если B — произвольная A-алгебра, φ: $B \to A$ — гомоморфизм и ∂: $B \to M$ — *дифференцирование* B со значением в A-модуле M, рассматриваемом как B-модуль относительно гомоморфизма φ, то отображение $\bar{\partial}: B \to I_A(M)$ $(b \to (\varphi(b), \partial(b)))$ является гомоморфизмом A-алгебры. Обратно, для любого гомоморфизма A-алгебр $f: B \to I_A(M)$ композиция $\varepsilon' \circ f: B \to M$, где $\varepsilon': I_A(M) \to M$ — проекция A на M, является A-дифференцированием B со значением в M, рассматриваемом как B-модуль относительно гомоморфизма $\varepsilon \circ f: B \to A$. Это свойство Д. и д. ч. используется для определения касательного пространства к произвольному функтору на категории схем [1], [3].

Лит.: [1] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [2] Fossum R., Trivial extensions of abelian categories, B., 1975; [3] Schémas en groupes, I, B., 1970; [4] Lichtenbaum S., Schlessinger M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1967, v. 128, № 1, p. 41—70.

И. В. Долгачев.

ДВОЙСТВЕННАЯ КАТЕГОРИЯ, дуальная категория, к категории C — категория C° с теми же объектами, что и C и с множествами морфизмов $\mathrm{Hom}_{C^\circ}(A, B) = \mathrm{Hom}_C(B, A)$ («обращение стрелок»). Композиция морфизмов u с v в категории C° определяется как композиция v с u в C. Понятия и утверждения, относящиеся к категории C, заменяются двойственными понятиями и утверждениями в C°. Так, понятие эпиморфизма двойственно понятию мономорфизма, понятие проективного объекта — понятию инъективного объекта, прямое произведение — прямой сумме и т. д. Контравариантный функтор на C становится ковариантным на C°.

Иногда двойственная категория имеет непосредственную реализацию: так, категория дискретных абелевых групп эквивалентна Д. к. к категории компактных абелевых групп (*Понтрягина двойственность*), а категория афинных схем эквивалентна Д. к. к категории коммутативных колец с единицей.

В. И. Данилов.

ДВОЙСТВЕННОСТИ ПРИНЦИП — 1) Д. п. в математической логике — теорема о взаимозаменяемости в определенном смысле логич. операций в формулах формальных логических и логико-предметных языков. Пусть A — формула языка логики высказываний или логики предикатов, не содержащая знака импликации $\supset$: формула A^* наз. **двойственной** формуле A, если она может быть получена из A заменой в A каждого *вхождения* символов $\&$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ двойственными им операциями, т. е. соответственно символами $\vee$, $\&$, $\exists$, $\forall$. Д. п. гласит, что если $A \supset B$ истинно, то истинно $B^* \supset A^*$. В частности, если формулы A и B эквивалентны, то эквивалентны и двойственные им формулы A^* и B^*. Д. п. справедлив для классич. систем, при этом эквивалентность и истинность формул в его формулировке могут пониматься как в терминах интерпретаций, так и в смысле выводимости в соответствующем классич. исчислении. При конструктивном понимании формул Д. п. перестает действовать. Так, напр., в языке логики высказываний импликация $\neg A \& \neg B \supset \neg (A \vee B)$ конструктивно верна и даже выводима в *Гейтинга формальной системе*, однако обратная импликация двойственных формул $\neg (A \& B) \supset \neg A \vee \neg B$ конструктивно неверна (напр., нереализуема по Клини — Роузу).

С Д. п. тесно связана следующая теорема: если $F^*(A_1, \ldots, A_n)$ — формула, двойственная пропозициональной или предикатной формуле $F(A_1, \ldots, A_n)$, построенной без употребления импликации из элементарных высказываний $A_1, \ldots, A_n$, то формула $\neg F(A_1, \ldots, A_n)$ эквивалентна формуле $F^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n)$ в классич. исчислении высказываний или предикатов, соответственно.

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, М., 1959; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *Ф. А. Кабаков.*

2) Д. п. **в геометрии** — принцип, формулируемый в нек-рых разделах геометрии и заключающийся в том, что, заменяя в любом верном предложении все входящие в него понятия на двойственные им, получают верное (двойственное первому) предложение.

Справедливость Д. п. в проективной геометрии вытекает из того, что каждой аксиоме проективной геометрии соответствует двойственное предложение, являющееся либо аксиомой, либо теоремой.

В проективной геометрии на плоскости двойственными являются понятия:

точка	прямая
точка, инцидентная прямой	прямая, инцидентная точке
алгебраическая линия порядка n	алгебраический пучок прямых класса n
касательная прямая к линии	характеристическая точка пучка

Если считать отношением инцидентности между точкой и линией второго порядка принадлежность точки линии второго порядка, а отношением инцидентности прямой с линией второго порядка — касание прямой к линии второго порядка, то понятием, двойственным линии второго порядка, является линия второго порядка. Примером пары двойственных утверждений могут служить *Брианшона теорема* и *Паскаля теорема*. В проективной геометрии в пространстве двойственны понятия точки и плоскости; понятие прямой само себе двойственно.

Д. п. имеет место и в эллиптич. геометрии, где, кроме понятий проективной геометрии, двойственными являются понятия отрезка и угла. Так. напр., в эллиптич. геометрии справедливы следующие два двойственных утверждения:

два треугольника равны, если три стороны одного соответственно равны трем сторонам другого	два треугольника равны, если три угла одного соответственно равны трем углам другого

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971. *А. С. Пархоменко.*

3) Д. п. в проективной геометрии состоит в том, что любой теореме относительно подпространств S_a, S_b, ... *проективного пространства* Π_n их пересечений и сумм соответствует теорема относительно подпространств S_{n-a-1}, S_{n-b-1}, ... их сумм и пересечений. Д. п. определяется двойственным характером аксиом проективной геометрии и вытекающих из них теорем. Для проективного пространства $\Pi_n(X)$ над телом K Д. п. справедлив тогда и только тогда, когда K допускает инверсный автоморфизм. В общем случае имеет место двойственность между проективными пространствами $\Pi_n(X)$ и $\Pi_n(K^*)$, тела K и K^* к-рых инверсно изоморфны: таковы, напр., левое и правое проективные пространства $P_n^l(K)$ и $P_n^r(K)$ над K (см. *Проективная алгебра*, *Корреляция*), причем соответствие между ними, т. е. соответствие между S_k и S_{n-k-1} определяется выбором пары координатных систем в $\Pi_n(K)$ и $\Pi_n(K^*)$. Д. п. можно обосновать также с помощью дуальных отображений линейных пространств $\theta_{n+1}(K)$ над телом, к-рые используются для интерпретации проективных пространств. *М. И. Войцеховский.*

4) Д. п. в частично упорядоченных множествах: если верна какая-либо теорема о частично упорядоченных множествах, сформулированная в общелогич. терминах и терминах порядка, то верна и двойственная ей теорема. Для получения теоремы, двойственной к данной, все высказывания и понятия, относящиеся к порядку, заменяются на двойственные (т. е. все знаки порядка $\leqslant$ заменяются на $\geqslant$, и обратно), а общелогич. термины остаются без изменений. Из справедливости нек-рого утверждения для конкретного частично упорядоченного множества (или для конкретного класса частично упорядоченных множеств) еще не вытекает справедливость двойственного утверждения для этого множества. Так, частично упорядоченное множество может иметь наименьший элемент, но не иметь наибольшего, оно может удовлетворять условию минимальности, но не удовлетворять условию максимальности. Справедливость Д. п. вытекает из того, что отношение, обратное к частичному порядку, само является частичным порядком. Иногда под Д. п. понимают именно это утверждение. *Т. С. Фофанова.*

ДВОЙСТВЕННОСТЬ — 1) Д. в алгебраической геометрии — двойственность между различными пространствами когомологий на алгебраич. многообразиях.

Когомологии когерентных пучков. Пусть X — неособое проективное алгебраич. многообразие размерности n над алгебраически замкнутым полем k, а $\mathscr{L}$ — локально свободный пучок на X. Теорема двойственности Серра утверждает, что конечномерные линейные векторные пространства когомологий $H^i(X, \mathscr{L})$ и $H^{n-i}(X, \check{\mathscr{L}}\otimes\omega_X)$ двойственны друг другу. Здесь $\omega_X=\Omega_X^n$ — пучок ростков регулярных дифференциальных форм n-й степени на X, а $\check{\mathscr{L}}=\mathrm{Hom}(\mathscr{L}, \mathscr{O}_X)$ — двойственный к $\mathscr{L}$ локально свободный пучок. В случае, когда $\mathscr{L}=\mathscr{O}_X(D)$ — обратимый пучок, соответствующий дивизору D на X, эта теорема устанавливает равенство

$$\dim H^i(X, \mathscr{O}_X(D))=\dim H^{n-i}(X, \mathscr{O}_X(K-D)),$$

где K — канонич. дивизор на X. При $n=1$ эквивалентное этому равенство было найдено еще в 19 в. Существует обобщение теоремы Серра на случай когомологий произвольных когерентных пучков на полных алгебраич. многообразиях (см. [1], [4]). В частности, когда многообразие X есть подмногообразие Коэна — Маколея (напр., локально полное пересечение) коразмерности d в неособом проективном многообразии Y, имеет место Д. между k-пространством $H^i(X, \mathcal{F})$ и пространством глобальных Ext'ов

$$\operatorname{Ext}^{n-i}(X; \mathcal{F}, \tilde{\omega}_X),$$

где $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, $\tilde{\omega}_X = \operatorname{Ext}^d_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \omega_Y)$ (дуализирующий пучок Гротендика), а $n = \dim X$. При этом пучок $\tilde{\omega}_X$ является обратимым в том и только в том случае, когда X есть схема Горенштейна (см. *Горенштейна кольцо*).

Этальные когомологии. Пусть X — полное связное неособое алгебраич. многообразие размерности d над алгебраически замкнутым полем k, n — целое число, взаимно простое с характеристикой поля k, $\mathcal{F}$ — локально свободный (в этальной топологии) пучок $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-модулей на X, μ_n — пучок корней n-й степени из единицы. Существует невырожденное спаривание $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-модулей [6]:

$$H^i(X, \mathcal{F}) \times H^{2d-i}(X, \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mu_n^{\otimes d})) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Более общая теорема Д. относится к гладким, но необязательно полным многообразиям [5]. Существует невырожденное спаривание $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-модулей

$$H^i_c(X, \mathcal{F}) \times H^{2d-i}\left(X, \operatorname{Hom}\left(F, \mu_n^{\otimes d}\right)\right) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

где слева стоят когомологии с компактными носителями. Если поле k есть алгебраич. замыкание поля k', $X = X' \otimes_{k'} k$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \otimes_{k'} k$, то группа Галуа $\operatorname{Gal}(k/k')$ действует на $H^i(X, \mathcal{F})$ и предыдущее спаривание есть спаривание $\operatorname{Gal}(k/k')$-модулей.

Аналогом первой из приведенных теорем Д. для l-адических когомологий является теорема двойственности Пуанкаре: существует невырожденное спаривание $\mathbb{Z}_l$-модулей

$$H^i(X, \mathbb{Z}_l) \times H^{2d-i}(X, \mathbb{Z}_l[d]) \longrightarrow \mathbb{Z}_l,$$

где $\mathbb{Z}_l[d]$ — пучок Тейта, неканонически изоморфный пучку $\mathbb{Z}_l$ (см. *l-адические когомологии*). Отсюда следует изоморфизм $\mathbb{Q}_l$-пространств

$$H^i(X, \mathbb{Q}_l) \cong \operatorname{Hom}(H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}_l)(d), \mathbb{Z}_l)$$

и, в частности, равенство чисел Бетти

$$b_i(X; l) = b_{2d-i}(X; l).$$

Так же, как и в случае когомологий когерентных пучков, имеется обобщение предыдущих результатов на относительный случай собственного морфизма схем, формулируемый на языке производных категорий [6].

Другие теории когомологий. Аналоги теоремы Пуанкаре имеют место для теории кристальных когомологий [7], когомологий де Рама над полем нулевой характеристики [8]. В теоретико-числовых приложениях важную роль играют когомологии пучков на плоской топологии Гротендика числовых схем. В отдельных частных случаях для таких когомологий также имеются теоремы Д. [9].

Лит.: [1] Гротендик А., в сб.: Международный математический конгресс в Эдинбурге, М., 1962, с. 116—37; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112; [3] Серр Ж.-П., в сб. переводов: Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958, 372—450; [4] Hartshorne R., Residues and duality, В., 1966; [5] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, t. 3, В., 1973; [6] Verdier J. L., в кн.: Proceedings of a Conference on Local Fields, В., 1967, S. 184—98; [7] Berthelot P., Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p>0$, В., 1974; [8] Hartshorne R., Ample subvarieties of algebraic varieties, В., 1970; [9] Mazur B., «Amer. J. Math.», 1970, v. 92, p. 343—61; [10] Altman A., Kleiman S., Introduction to Grothendieck duality theory, В., 1970.

И. В. Долгачев.

2) Д. в алгебраической топологии — положение, когда значения одних топологич. инвариантов определяют значения других. Д. в алгебраич.

топологии выражается: в Д. (в смысле теории характеров) между группами гомологии и когомологии одной и той же размерности при двойственных группах коэффициентов; в изоморфизме между группами гомологии и когомологии дополнительных размерностей многообразия (*Пуанкаре двойственность*); в изоморфизме между группами гомологии и когомологии взаимно дополнительных множеств пространства (*Александера двойственность*); во взаимозаменяемости в определенных ситуациях гомотопических и когомотопических, а также гомологич. и когомологич. групп, к-рая без дополнительных ограничений на размерность пространства имеет место не для обычных, а для S-гомотопич. и S-когомотопич. групп (см. *S-двойственность*).

Д. между гомологиями и когомологиями состоит в следующем. Пусть $\{H_r(X, A), f_*, \partial\}$ — произвольная *гомологии теория* над нек-рой допустимой категорией пар пространств и их отображений, т. е. система, удовлетворяющая *Стинрода — Эйленберга аксиомам* теории гомологий с дискретной или компактной абелевой группой $H_r(X, A)$. Тогда система $\{H^r(X, A), f^*, \delta\}$, где $H^r(X, A)$ — группа характеров группы $H_r(X, A)$, а f^* и δ — гомоморфизмы, сопряженные соответственно гомоморфизмам f_* и ∂, удовлетворяет аксиомам Стинрода — Эйленберга теории гомологий и стало быть представляет собой теорию когомологии над той же категорией с компактной или, соответственно, дискретной группой $H^r(X, A)$. Подобным же образом для каждой теории когомологии может быть построена двойственная теория гомологии. Следовательно, теории гомологии и когомологии составляют двойственные пары; при этом, преобразование одной теории в другую, с точностью до естественных эквивалентностей, является инволюцией. Для любой теоремы теории гомологии, т. е. теоремы относительно системы $\{H_r(X, A), f, \partial\}$, существует двойственное утверждение относительно системы $\{H^r(X, A), f^*, \delta\}$, т. е. теорема теории когомологии, и наоборот. При переходе к двойственному утверждению группы заменяются их группами характеров, гомоморфизмы меняют направление, подгруппы заменяются факторгруппами, и наоборот. Примерами могут служить сами аксиомы Стинрода — Эйленберга. В случае конкретных категорий или теорий построение этой Д. осуществляется, напр., следующим образом. Пусть $K=\{t^r\}$ (конечный) комплекс. За произведение r-мерной цепи c_r комплекса K над дискретной или компактной группой X коэффициентов и r-мерной коцепи c^r комплекса K над группой X^* коэффициентов, двойственной X в смысле теории характеров, принимается число mod 1

$$(c_r, c^r)=\sum_{t^r \in K} c_r(t^r)\, c^r(t^r).$$

Это произведение определяет умножение класса гомологии с классом когомологии и превращает r-мерные группы гомологии и когомологии в группы характеров одна другой. На бесконечных комплексах имеются группы двух видов — проекционные и спектровые. Спектровые группы гомологии являются пределами прямых спектров групп гомологии замкнутых подкомплексов, упорядоченных по возрастанию, а проекционные группы гомологии — гомологич. группами пределов прямых спектров из групп цепей указанных подкомплексов. Группы когомологии получаются аналогично, как пределы соответствующих обратных спектров. При дискретной группе коэффициентов обе гомологич. группы совпадают и дают группу гомологии конечных циклов, а при компактной группе совпадают когомологич. группы и дают группу когомологии бесконечных коциклов. Д. в случае конечных комплексов порождает Д. проекционных групп между собой и спектровых групп между собой, а эти последние Д. (посредством сингулярных комплексов, нервов покрытий и т. п.) — Д. r-мерной проекционной (соответственно спектровой) группы гомологии $H_r(R, X)$ пространства R над дискретной или компактной группой X коэффициентов в какой-либо теории (*сингулярных гомологий, Александрова — Чеха гомологий и когомологий, Вьеториса гомологий* и т. п.) с r-мерной проекционной (соответственно спектровой) группой когомологии $H^r(R, X^*)$ в той же теории над группой X^*, двойственной X (см. [1], [3], [6], [9]):

$$H_r(R, X) \mid H^r(R, X^*) \text{ при } X \mid X^*.$$

Соотношения между инвариантами, выражающими связности дополнительных размерностей многообразия, были установлены в первой же работе по алгебраич. топологии — в статье А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1895), где было показано, что для n-мерного ориентируемого многообразия его p-мерное и $(n-p)$-мерное числа Бетти равны друг другу, равно как и p-мерный и $(n-p-1)$-мерный коэффициенты кручения. Эта теорема была усилена О. Вебленом (O. Veblen, 1923), сформулировавшим ее для баз гомологии, а применение групп когомологии придало ей форму, полнее выражающую содержание этой Д. Для получения этой формы следует поставить в соответствие каждой r-мерной цепи c_r, заданной на какой-либо триангуляции K гомологического n-мерного ориентированного многообразия M^n и принимающей значения из дискретной или компактной группы X коэффициентов $(n-p)$-мерную коцепь c^{n-p} клеточного комплекса K^* из барицентрических звезд K, принимающую на какой-либо звезде то значение, которое c_p имеет на соответствующем этой звезде симплексе. Указанное соответствие, в силу совпадения групп комплексов K и K^*, определяет изоморфизм групп гомологии и когомологии дополнительных размерностей многообразия M^n:

$$H_r(M^n, X) \sim H^{n-r}(M^n, X).$$

При этом X может быть и модулем, а в случае неориентируемого многообразия теорема верна по модулю 2. Замена группы $H^{n-r}(M^n, X)$ двойственной ей группой $H_{n-r}(M^n, X^*)$ приводит к Д. [1]:

$$H_r(M^n, X) \mid H_{n-r}(M^n, X^*), \text{ при } X \mid X^*,$$

представляющей интерес еще и тем, что при ней произведением оказывается индекс пересечения циклов, произвольно выбранных из перемножаемых классов (см. [1], [11], [12], [13], [15], [16]).

Большой этап, вначале теоретико-множественный, по отысканию топологич. свойств множества, к-рые определялись бы топологич. свойствами его дополнения, завершился теоремой, полученной Дж. Александером (J. Alexander, 1922) и утверждающей, что r-мерное число Бетти mod 2 полиэдра, лежащего в n-мерной сфере, равно $(n-r-1)$-мерному числу Бетти mod 2 дополнения (см. *Александера двойственность*).

В свою очередь, эта теорема положила начало ряду исследований, в сильной мере повлиявших на развитие всей алгебраич. топологии. Исследования велись в направлении обобщения классов пространств (плоскость, евклидовы пространства, сферы и многообразия любых размерностей, локально компактные пространства и т. д.), их подмножеств (полиэдры, замкнутые подмножества, произвольные подмножества) и областей коэффициентов (целые числа по модулю 2, группа целых чисел, поле рациональных чисел, другие конкретные группы и поля, произвольная абелева группа, топологич., в основном компактные, абелевы группы и т. п.), для к-рых имеет место двойственность Александера, а также усиления тех соотношений, к-рые связывают инварианты взаимно дополнительных множеств (равенство чисел Бетти, изоморфизм групп, Д. топологических групп, естественные и связывающие гомоморфизмы и т. п.). Ряд полученных результатов может быть представлен в виде диаграммы (см. [1], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [11]):

$$\frac{H_r(A, X)}{H^r(A, X^*)} \;\Big|\!\!\!\times\; \frac{H_{n-r-1}(B, X^*)}{H^{n-r-1}(B, X)},$$

где X — дискретная или компактная группа коэффициентов, $X^*|X$, A и B — взаимно дополнительные множества n-мерного сферич. многообразия M^n, $H_r(A, X)$ и $H^r(A, X^*)$ — r-мерные группы гомологии и когомологии (с компактными носителями) Александрова — Чеха множества A над X и соответственно X^*, а $H_{n-r-1}(B, X^*)$ и $H^{n-r-1}(B, X)$ суть $(n-r-1)$-мерные спектровые группы гомологии и когомологии Александрова — Чеха множества B над X^* и соответственно над X. Указанные в диаграмме соотношения, полученные различными авторами и различными способами, согласованы в том смысле, что соответствующие при изоморфизмах элементы представляют собой один и тот же характер остальных групп при вертикальных и горизонтальных Д. Таким образом, они являются различными формами одной и той же т е о р е м ы д в о й с т в е н н о с т и. Верхняя двойственность есть Д. зацепления, т. е. при ней произведением элементов является *зацепления коэффициент* циклов, произвольно выбранных из перемножаемых классов или, в случае компактной группы X^*, определяется по непрерывности зацеплением циклов. В приведенной диаграмме группы первого столбца могут быть заменены $(r+1)$-мерными группами гомологии и когомологии Стинрода с компактными носителями, а группы второго столбца — $(n-r-1)$-мерными проекционными группами гомологии и когомологии Александрова — Чеха; тогда, в случае компактного A изоморфизм главной диагонали дает теорему двойственности Стинрода в ее первоначальном виде, если когомологич. группу множества B заменить, по теореме Пуанкаре, $(r+1)$-мерной группой гомологии бесконечных циклов. Если группа X компактна, то диаграммы изоморфны; если, кроме того, и множество A компактно, то двойственность верхней строки диаграммы представляет собой теорему, полученную Л. С. Понтрягиным в 1934 ([1], см. *Понтрягина двойственность*). О дальнейших обобщениях и направлениях см. [10], [14], [15], [16].

Важным видом двойственности Александера, касающимся связывающего гомоморфизма и аксиомы точности, является изоморфизм между группами гомологии, а также между группами когомологии соседних размерностей. Эти изоморфизмы, установленные П. С. Александровым и А. Н. Колмогоровым, утверждают, что r-мерная группа гомологии (соответственно когомологии) замкнутого множества A нормального локально бикомпактного пространства R, ацикличного в размерностях r и $r+1$, над компактной (соответственно дискретной) группой X изоморфна $(r+1)$-мерной группе гомологии (соответственно когомологии) дополнения:

$$H_r(A, X) \sim H_{r+1}(R \setminus A, X)$$

и

$$H^r(A, X) \sim H^{r+1}(R \setminus A, X).$$

Из этих изоморфизмов выводится теорема Понтрягина. П. С. Александров [2] получил эти изоморфизмы из общих соотношений Д., связывающих группы гомологии и когомологии взаимно дополнительных множеств и пространства, а также ядра, образы и факторгруппы этих групп при их естественных гомоморфизмах вложения и высечения. Эти соотношения несут также много другой важной информации о расположении множеств в пространстве. П. С. Александров [2] получил их с помощью спектровых групп гомологий и когомологий относительно так называемых особых подкомплексов нервов, состоящих из симплексов, замыкания вершин которых некомпактны. А. Н. Колмогоров доказал вышеуказанные изоморфизмы Д. посредством так называемых функциональных групп гомологий и когомологий (см. *Колмогорова двойственность*). Указанные выше и другие Д. (напр., *Лефшеца двойственность*) связаны между собой различными соотношениями. Они могут быть рассмотрены и как следствия нек-рой общей Д., в к-рой участвуют так называемые внешние группы множества, являющиеся прямым пределом групп когомологии окрестностей этого множества, упорядоченных по вложению (см. [3], [4], [5], [6], [7], [12], [13]). Связи между различными Д. приобретают новый вид при их рассмотрении с помощью *пучков теории*.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 2, с. 21—44; [2] Александров П. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1942, т. 6, с. 227—82; [3] его же, «Матем. сб.», 1947, т. 21, № 2, с. 161—232; [4] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1955, т. 48, с. 1—108; 1959, т. 54, с. 1—136; [5] Чогошвили Г. С., «Докл. АН СССР», 1946 т. 51, № 2, с. 87—90; [6] его же, «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 23—34; [7] Kaplan S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 62, p. 248—71; [8] Ситников К. А., «Матем. сб.», 1954, т. 34, с. 3—54; 1955, т. 37, с. 385—434; 1959, т. 48, с. 213—26; [9] Берикашвили Н. А., «Тр. Тбил. матем. ин-та», 1957, т. 24, с. 409—84; [10] Баладзе Д. С., там же, 1972, т. 41, с. 41—83; [11] Bourgin D., Modern Algebraic Topology, N. Y.—L., 1963; [12] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [13] Switzer R. M., Algebraic Topology Homotopy and Homology, B.—Heid.—N. Y., 1975; [14] Скляренко Е. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 4, с. 831—43; [15] Borel A., Moore J. C., «Michig. Math. J.», 1960, v. 7, p. 137—60; [16] Bredon G. E., Sheaf Theory, N. Y., [1967].

Г. С. Чогошвили.

3) Д. в теории аналитических пространств — двойственность между различными векторными топологич. пространствами когомологий комплексных пространств. Имеются три типа теорем Д., соответствующие двойственностям Пуанкаре, Лефшеца и Александера — Понтрягина в топологии, но относящиеся к пространствам когомологий $H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$ комплексного пространства X со значениями в когерентном аналитич. пучке $\mathcal{F}$ и носителями в семействе Φ или их факторпространствам (см. *Когомологии* со значениями в пучке).

Первому типу принадлежит теорема двойственности Серра [1]. Пусть X — комплексное многообразие размерности n со счетной базой, Ω — пучок голоморфных дифференциальных форм степени n, а $\mathcal{F}$ — локально свободный аналитич. пучок на X. Для каждого целого p, $0 \leqslant p \leqslant n$, определено билинейное отображение

$$H^p(X, \mathcal{F}) \times H_c^{n-p}(X, \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \Omega)) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (*)$$

которое можно записать как композицию $\cup$-умножения

$$H^p(X, \mathcal{F}) \times H_c^{n-p}(X, \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \Omega)) \longrightarrow H_c^n(X, \Omega)$$

(c означает семейство компактных носителей) и линейной формы s на $H_c^n(X, \Omega)$, называемой следом и имеющей вид

$$s(\hat{\omega}) = (-1)^n \int_X \omega,$$

где ω — форма типа (n, n) с компактным носителем, отвечающая классу $\hat{\omega}$ в силу теоремы Дольбо (см. *Дифференциальная форма*). Теорема двойственности Серра утверждает, что если наделить пространства когомологий канонической локально выпуклой топологией (см. *Когерентный аналитический пучок*), то отображение (∗) непрерывно по первому аргументу и, при условии отделимости пространства $H^{p+1}(X, \mathcal{F})$, устанавливает изоморфизм векторных пространств:

$$(H^p(X, \mathcal{F}))' \cong H_c^{n-p}(X, \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \Omega)).$$

Пучки $\mathcal{F}$ и $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \Omega)$ можно поменять ролями, поскольку операция $\operatorname{Hom}(\cdot, \Omega)$ на локально свободных пучках инволютивна.

В частности, если многообразие X компактно, K канонический, а D — любой *дивизор* на X, то из теоремы Серра вытекает равенство размерностей пространств $H^p(X, \mathcal{O}_X(D))$ и $H^{n-p}(X, \mathcal{O}_X(K-D))$, к-рое часто используется при вычислениях с когомологиями. Известна аналогичная теорема Д. для неособых проективных алгебраич. многообразий над произвольным полем (см. *Двойственность* в алгебраич. геометрии).

В случае, когда $\mathcal{F}$ — произвольный когерентный аналитич. пучок на многообразии X, имеет место естественная топологич. Д. между отделимыми пространствами, ассоциированными с векторными топологич. пространствами $H_\Phi^p(X, \mathcal{F})$ и $\operatorname{Ext}_\Psi^{n-p}(X; \mathcal{F}, \Omega)$, где Φ — семейство замкнутых носителей, Ψ — семейство компактных носителей или наоборот, а через $\operatorname{Ext}_\Psi^{n-p}(X; \mathcal{F})$ обозначены производные функтора $\operatorname{Hom}_\Psi(X; \mathcal{F}, \cdot)$. При этом пространство $H_\Phi^p(X, \mathcal{F})$ отделимо одновременно с $\operatorname{Ext}_\Psi^{n-p+1}(X; \mathcal{F}, \Omega)$ (см. [2], [3]). Для компактного X отсюда следует изоморфизм конечномерных пространств

$$(H^p(X, \mathcal{F}))' \cong \operatorname{Ext}^{n-p}(X; \mathcal{F}, \Omega).$$

Если X — многообразие Штейна, то получается топологич. Д. между $H^0(X, \mathcal{F})$ и $\operatorname{Ext}_c^n(X; \mathcal{F}, \Omega)$ и между $H_c^p(X, \mathcal{F})$ и $\operatorname{Ext}^{n-p}(X; \mathcal{F}, \Omega)$.

Имеется также обобщение этих результатов на случай комплексных пространств с особенностями [4] и на относительный случай [5], аналогичное соответствующим теоремам Д. в алгебраич. геометрии.

Аналогом теоремы Лефшеца является следующая теорема Д. [3]: пусть X — комплексное многообразие со счетной базой размерности n, K — штейнов компакт в X. Для любого когерентного аналитич. пучка $\mathcal{F}$ на X и любого целого $p \geqslant 0$ пространство $\operatorname{Ext}^{n-p}(K; \mathcal{F}, \Omega)$ имеет топологию типа DFS (сильно сопряженное к пространству Фреше — Шварца), а его сопряженное пространство алгебраически изоморфно $H_K^p(X, \mathcal{F})$. Другая теорема того же типа [6]: в тех же предположениях, если $Y \subset X$ открыто, то пространство $H_Y^p(X, \mathcal{F})$ имеет топологию типа QFS (факторпространства Фреше — Шварца), $\operatorname{Ext}_c^{n-p}(Y; \mathcal{F}, \Omega)$ имеет топологию типа QDFS (факторпространства типа DFS), а ассоциированные с ними отделимые пространства находятся в топологич. Д. Пространство $H_Y^p(X, \mathcal{F})$ отделимо одновременно с $\operatorname{Ext}_c^{n-p+1}(Y; \mathcal{F}, \Omega)$.

Третий тип теорем Д. представлен следующей теоремой [8]: для любого открытого подмножества $Y \subset X = \mathbb{C}P^1$ — сильное сопряженное к пространству $\Gamma(Y, \mathcal{O}_X / \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ изоморфно $\Gamma(X \setminus Y, \mathcal{O}_X)$. Эта теорема допускает следующее обобщение [7]: пусть X — n-мерное комплексное многообразие, счетное на бесконечности, $Y \subset X$ открыто, $\mathcal{F}$ — когерентный аналитич. пучок на X, $p \geqslant 0$ — целое число. Рассматриваются канонич. отображения векторных топологич. пространств

$$\alpha: H^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(Y, \mathcal{F}),$$

$$\gamma: H_{X \setminus Y}^{p+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{F}),$$

$$\beta: \operatorname{Ext}_c^{n-p-1}(X; \mathcal{F}, \Omega) \longrightarrow \operatorname{Ext}_c^{n-p-1}(X \setminus Y; \mathcal{F}, \Omega).$$

Для того чтобы отделимое пространство, ассоциированное с Coker β, было изоморфно сильному сопряженному к Coker α, необходимо и достаточно, чтобы Ker γ было замкнуто. (Известен пример, когда Ker γ не замкнуто.) В частности, если пучок $\mathcal{F}$ локально свободен и

$$H^p(X, \mathcal{F}) = H^{p+1}(X, \mathcal{F}) = 0,$$

то отделимые пространства, ассоциированные с $H^p(Y, \mathcal{F})$ и $H_c^{n-p-1}(X \setminus Y, \mathrm{Hom}\,(\mathcal{F}, \Omega))$, находятся в Д.

Лит.: [1] Serre J.-P., «Comm. math. helv.», 1955, t. 29, p. 9—26; [2] Malgrange B., Séminaire Bourbaki, 1962/63, p. 246; [3] Banica C., Stanasila O., Metode algebrice în teoria globala a spatiilor complexe, Bucureşti, 1974; [4] Ramis J. P., Ruget G., «Publ. IHES», 1970, t. 38, p. 77—91; [5] их же, «Invent. math.», 1974, Bd 26, № 2, S. 89—131; [6] Головин В. Д., «Функциональный анализ», 1971, т. 5, № 4, с. 66; [7] его же, «Матем. заметки», 1973, т. 13, № 4, с. 561; [8] Grothendieck A., «J. reine und angew. Math.», 1953, Bd 122, № 1, S. 35.

В. П. Паламодов.

4) Д. в теории аналитических функций.

а) Преобразование Бореля. Э. Борелю (E. Borel, 1895) принадлежит идея преобразования каждого ряда вида:

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

в ряд

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n,$$

и обратно, при условии

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \sigma < +\infty.$$

Так устанавливается отношение Д. между функциями, аналитическими в окрестности бесконечно удаленной точки $|z| > \sigma$ и целыми функциями экспоненциального типа σ. На этом пути, напр., получается теорема Пойа: пусть $k(\varphi)$ — опорная функция выпуклой оболочки множества особенностей функции $a(z)$ (при аналитическом продолжении на полуплоскость вида $\mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) > c$, а

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln |A(re^{i\varphi})|}{r}$$

— индикатор роста целой функции $A(z)$; тогда

$$h(\varphi) = k(-\varphi), \quad \sigma \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

В силу этого отношения двойственности задача аналитич. продолжения функции $a(z)$ в круг $|z| < \sigma$ эквивалентна изучению роста соответствующей целой функции $A(z)$ по различным направлениям.

б) Д. в пространствах аналитич. функций. Пусть G — открытое множество расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $A(G)$ — пространство всех аналитических в G функций с топологией, задаваемой системой норм

$$p_n(f) = \max_{z \in K_n} |f(z)|, \quad f \in A(G),$$

где $\{K_n\}$ — возрастающая система компактных множеств, содержащихся в G и исчерпывающих G; таким образом, сходимость $f_n \to f$ в $A(G)$ означает равномерную сходимость $f_n(z) \to f(z)$ на всех компактных подмножествах G. Пусть $\infty \in G$, $A_0(G)$ — подпространство $A(G)$, для функций к-рого $f(\infty) = 0$, и F — компактное подмножество $\overline{\mathbb{C}}$. Рассматривается система $\mathfrak{G}^F$ всех открытых множеств $G \supset F$ и множество функций $\bigcup_{G \in \mathfrak{G}^F} A(G)$.

Две функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ из этого множества считаются эквивалентными, если совпадают их сужения на нек-рое множество $G \in \mathfrak{G}^F$. Введенное отношение эквивалентности разбивает всю рассматриваемую совокупность на классы $\overline{f}$. Каждый класс наз. локально аналитической на F функцией, и совокупность таких функций обозначается $A(F)$. Класс $A(F)$ естественным образом превращается в линейное пространство, и в нем вводится топология индуктивного предела последовательности нормированных пространств B_n. Последние строятся следующим образом. Пусть $\{G_n\}$ — убывающая последовательность множеств из $\mathfrak{G}^F$ такая, что $G_{n+1} \subset G_n$ и $\forall G \in \mathfrak{G}^F$

$$\exists n_0 : n \geqslant n_0 \Longrightarrow G_n \subset G.$$

Тогда B_n — пространство ограниченных в G_n аналитич. функций с нормой

$$\|f\| = \max_{z \in G_n} |f(z)|.$$

Простейший факт о Д. пространств аналитических функций состоит в следующем. Пусть G — открытое множество и (для определенности) $\infty \in G$, а $F = \overline{\mathbb{C}} \setminus G$. Двойственным (сопряженным) к пространству $A_0(G)$ (в смысле теории линейных топологич. пространств) является пространство $A(F)$. Эта Д. устанавливается следующим образом: если $\Lambda(f)$ — непрерывный линейный функционал над $A_0(G)$, то существует единственный элемент $\overline{g} \in A(F)$ такой, что

$$\Lambda(f) = \int_\gamma f(z)\, g(z)\, dz,$$

где γ — некоторый (сложный) контур, идущий в G и охватывающий F, а $g \in \overline{g}$ ($\Lambda(f)$ не зависит от $g(z) \in \overline{g}$). Пространства $A(E)$ могут быть определены для произвольных множеств $E \subseteq \mathbb{C}$, а не только для рассмотренных здесь случаев, когда $E = G$ — открытое множество и $E = F$ — компакт. Дальнейшие обобщения: рассмотрение множеств на римановых поверхностях, пространств функций многих комплексных переменных, пространств векторнозначных аналитич. функций (со значениями в линейных топологич. пространствах).

Развитие теории Д. пространств аналитич. функций, с одной стороны, стимулировалось развитием общей теории Д. линейных топологич. пространств, а с другой стороны, само стимулировало развитие общей теории выявлением глубоких конкретных закономерностей. Применения Д. пространств аналитич. функций многообразны: вопросы интерполяции и аппроксимации (см. ниже), аналитическое продолжение, разделение и устранение множеств особенностей, интегральные представления различных классов функций.

в) Д. между теоремами полноты и единственности. Полнота системы элементов $\{f_n\}$ какого-либо локально выпуклого пространства X имеет место в том и только том случае, когда для произвольного линейного непрерывного в X функционала Λ из $\Lambda(f_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, следует $\Lambda = 0$. Этот факт приводит к установлению связи между проблемами полноты в пространствах аналитич. функций и разного рода теоремами единственности для аналитич. функций. С функционалом Λ связывается (ср. п. 1) нек-рая аналитич. функция $F(z)$. Условие $\Lambda(f_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, приводит к равенству нулю $F(z)$ в нек-рых точках или к равенству нулю коэффициентов $F(z)$. Теоремы единственности позволяют заключить, что $F(z) \equiv 0$, а затем и что функционал $\Lambda \equiv 0$. Для пространств аналитич. функций в круге был сформулирован следующий принцип двойственности проблем единственности и полноты. Пусть A_R и A_P — соответственно пространства функций, аналитических в кругах: $|z| < R$ и $|\zeta| < P$, где $0 < R$, $P \leqslant \infty$ и $F(z, \zeta)$ — функция, аналитическая в бицилиндре: $|z| < R$, $|\zeta| < P$. Пусть L

и $\underset{\zeta}{\Lambda}$ — линейные функционалы, определенные в A_R и A_P, и пусть $\mathfrak{G}\subset A_R$ и $\Omega\subset A_P$ — подмножества функций, представимых соответственно в виде $\underset{\zeta}{\Lambda}F(z, \zeta)$ и $\underset{z}{L}F(z, \zeta)$. Последовательность функций $\underset{\zeta}{\Lambda_n}F(z, \zeta)$ будет полной в $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда для каждой $\varphi(\zeta)\in\Omega$ из $\underset{\zeta}{\Lambda_n}\varphi=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$, следует: $\varphi(\zeta)\equiv0$. В частности, когда $R=P=\infty$ и $F(z, \zeta)=e^{z\zeta}$, оба множества $\mathfrak{G}$ и Ω совпадают с совокупностью всех целых функций экспоненциального типа.

г) Д. в экстремальных задачах теории функций. Известно, что задачи наилучшего приближения в нормированных пространствах двойственно связаны с нек-рыми линейными экстремальными задачами. Так, если E — подпространство в нормированном пространстве X и ω — произвольный элемент X, то

$$\sup_{l\in E^{\perp},\ \|l\|\leqslant 1} |l(\omega)|=\inf_{x\in E}\|\omega-x\|, \tag{1}$$

где $E^{\perp}$ — аннулятор E, т. е. совокупность линейных функционалов l, обращающихся в нуль на элементах E. Соотношение (1), устанавливаемое на основании теоремы Хана — Банаха, оказалось впоследствии частным случаем двойственных связей экстремальных задач математич. программирования. Пусть G есть n-связная область, граница ∂G к-рой состоит из спрямляемых контуров, B^1 — класс аналитических в G функций $f(z)$, $|f(z)|\leqslant1$, E^1 — класс аналитических в G функций, представимых интегралом Коши через свои граничные значения, $\omega(\zeta)$ — какая-либо интегрируемая функция на ∂G. Имеет место равенство:

$$\sup_{f\in B^1}\left|\int_{\partial G} f(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta\right|=$$
$$=\inf_{\varphi\in E^1}\int_{\partial G}|\omega(\zeta)-\varphi(\zeta)|\,|d\zeta|. \tag{2}$$

Слева в этом соотношении стоит линейная экстремальная задача для ограниченных функций (напр., при $\omega(\zeta)=\frac{1}{2\pi i(\zeta-z_0)^2}$ получают задачу о $\sup\limits_{f\in B^1}|f'(z_0)|$ — задачу о «лемме Шварца» — в многосвязной области); справа — задача наилучшего приближения произвольной функции $\omega(\zeta)$ на ∂G граничными значениями аналитич. функций в интегральной метрике. Соотношение (2) служит отправным пунктом для проникновения в каждую из двух экстремальных задач, содержащихся в нем: с его помощью устанавливаются характеристич. свойства экстремальных функций $f^*(z)\in B^1$ и $\varphi^*(z)\in E^1$, исследуется вопрос об их единственности и т. д. Функция $f^*(z)$ оказывается наделенной важными геометрич. свойствами: в задаче о лемме Шварца она отображает G на n-листный круг; в других задачах с $\omega(\zeta)$, аналитической на ∂G, функция $f^*(z)$ отображает G на $m\geqslant n$-листный круг (см. [2] — [4]).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Избранные главы теории аналитических функций, М., 1976; [2] Итоги науки. Математический анализ. 1964, М., 1966, с. 76—164; [3] Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 75—132; [4] Итоги науки. Математический анализ. 1963, М., 1965, с. 5—80; [5] Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М., 1960, с. 77—95.

А. И. Маркушевич, С. Я. Хавинсон.

5) Д. в теории топологических векторных пространств — тройка $\{F, G, f\}$, в к-рой F, G — векторные пространства над полем K, f — билинейный функционал (форма) в $F\times G$, обладающий свойством отделимости: если $f(x, y)=0$ для каждого y, $y\in G$, то $x=\mathfrak{G}$; если $f(x, y)=0$ для каждого x, $x\in F$, то $y=\mathfrak{G}$. Говорят также, что форма f

осуществляет Д., а пространства F, G находятся в Д., или образуют дуальную пару; если f фиксирована, то пишут $f(x, y)=(x, y)$. Важнейшим примером является естественная двойственность: $F=(F, \tau)$ — локально выпуклое топологическое векторное пространство с топологией τ, $G=(F, \tau)'$ — сопряженное пространство всех линейных τ-непрерывных функционалов в F и $(x, x')=x'(x)$ при $x\in F$, $x'\in G$; свойство отделимости для этой формы $(.,.)$ вытекает, напр., из локальной выпуклости топологии τ (теорема о достаточном числе функционалов — следствие теоремы Хана — Банаха). Теория Д. изучает в основном способы построения объектов в F или G, дуальных (двойственных) заданным относительно формы $(.,.)$; соответствия между свойствами взаимно дуальных объектов; топологии, порождаемые Д. Основным инструментом этого изучения является аппарат поляр (при $K=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ полярой множества A, $A\subset F$ наз. множество

$$A^{\circ}=\{y\in G:\mathrm{Re}(x, y)\leqslant 1, \ \forall x\in A\}).$$

Д. порождает различные локально выпуклые топологии на F (и равным образом на G); такие, напр., как слабая топология $\sigma(F, G)$ (порожденная заданной Д.), задаваемая семейством полунорм $|(\cdot, y)|$, $y\in G$, это — слабейшая топология, при к-рой все отображения $(\cdot, y)$ непрерывны; топология Макки $\mu(F, G)$ с базой окрестностей нуля, образованной полярами A° абсолютно выпуклых $\sigma(G, F)$-компактных подмножеств A в G; сильная топология $\tau^*(F, G)$, база к-рой образована полярами A^0 ограниченных подмножеств A в $(G, \sigma(G, F))$. Для любого A, $A\subset F$ множество A^{00} является выпуклой $\sigma(F, G)$-замкнутой оболочкой множества $A\cup\{\mathcal{O}\}$ (теорема о биполяре). Пространство G совпадает с $(F, \sigma(F, G))'$ (основная теорема теории Д., показывающая, что любую Д. можно интерпретировать как естественную). Пространство $(F', \sigma(F', F))$ наз. слабым сопряженным с F.

Пусть F — локально выпуклое пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Для ограниченности множества A, $A\subset F$, необходимо и достаточно каждое из условий: а) A ограниченно в слабой топологии; б) A^0 — поглощающее множество. Если A — окрестность, то A^0 является $\sigma(F', F)$-компактом. Метризуемое пространство F полно в том и только в том случае, когда замкнутость множества A, $A\subset F'$, в топологии $\sigma(F', F)$ равносильна замкнутости в той же топологии всех пересечений $A\cap U^{\circ}$, где U — окрестность нуля в F (теорема Крейна — Шмульяна). Если F — полное сепарабельное пространство и f — линейный функционал в F', то $f\in(F', \sigma(F', F))'$ тогда и только тогда, когда из условия $\lim\limits_{n} x_n=\mathcal{O}$ в топологии $\sigma(F', F)$ следует $\lim\limits_{n} f(x_n)=0$ (теорема Гротендика). Подмножество A полного пространства F относительно $\sigma(F, F')$-компактно, если оно относительно $\sigma(F, F')$-секвенциально компактно (теорема Эберлейна). Выпуклое подмножество A пространства Фреше над $\mathbb{R}$ $\sigma(F, F')$-компактно тогда и только тогда, когда для любого f, $f\in F'$, существует a, $a\in A$ такое, что $\sup\limits_{A} f=f(a)$ (теорема Джеймса). Для того чтобы $(F, \tau)'=G$, необходимо и достаточно условие: топология τ не слабее топологии $\sigma(F, G)$ и не сильнее топологии $\mu(F, G)$ (теорема Макки — Аренса, дающая важное в приложениях описание топологий, сохраняющих Д.). Каждое из следующих условий на пространство (F, τ) достаточно для совпадения τ с топологией Макки: а) F — *бочечное пространство*, б) F — борнологическое пространство (в частности, метризуемое). Сильная топология $\tau^*(F, G)$, вообще говоря, не сохраняет Д.; если $X=G$ локально выпукло и $X'=F$, то пространство $X^*=(X', \tau^*(X', X))$ наз. сильным сопряженным с X, и в случае, когда $\tau^*(X', X)$ сохраняет Д. (т. е. $X^{*\prime}=X$), пространство X наз. полурефлексивным (X — *рефлексивное пространство*, если $X^{**}=X$).

Если H — подпространство F, то $\{H, G/H^0\}$ и $\{F/H, H^0\}$ — дуальные пары относительно естественных факторизаций формы $(\cdot, \cdot)$. Если задано семейство Д. $\{F_\alpha, G_\alpha, (\cdot, \cdot)_\alpha\}$, то Д. произведения пространств $F=\Pi_\alpha F_\alpha$ и подпространства $G=\Pi_\alpha^* G_\alpha$ всех финитных семейств из $\Pi_\alpha G_\alpha$ осуществляет форма

$$(f, g)=\sum\nolimits_\alpha (f_\alpha, g_\alpha)_\alpha,$$

где

$$f=\{f_\alpha\}\in\prod\nolimits_\alpha F_\alpha, \quad g=\{g_\alpha\}\in\prod\nolimits_\alpha^* G_\alpha.$$

Подобным же образом описывается Д. индуктивного и проективного пределов $\lim\limits_\alpha \operatorname{ind} F_\alpha$, $\lim\limits_\alpha \operatorname{pr} F_\alpha$. Наличие в пространствах F, F_α топологий, сохраняющих Д., позволяет истолковать эти утверждения как описание естественных Д. для $\Pi_\alpha F_\alpha$ (тихоновская топология), F/H (факторгопология), H (индуцированная топология), $\lim\limits_\alpha \operatorname{ind} F_\alpha$ и $\lim \operatorname{pr} F_\alpha$, соответственно. В случае нормированного пространства F естественный изоморфизм H^* и F^*/H^0 является изометрией:

$$\| f \mid H \| = \operatorname{dist}(f, H^0), \quad f\in F^*.$$

Использование Д. в конкретных задачах линейного анализа пропорционально той роли, какую играют в этих задачах линейные (непрерывные) функционалы. Особенно заметными (если не определяющими) являются идеи теории Д. в следующих разделах анализа: в исследовании линейно топологических (метрических) свойств локально выпуклых пространств и, в частности, описании естественной Д. для данного пространства [1]—[3], [5], в теории обобщенных функций [4], в теории экстремальных задач [6]—[7], в спектральной и структурной теории линейных операторов [1], [2] в теоремах полноты и единственности в теории аналитических функций, в теории аналитических функционалов Фантапье [8], см. также Двойственность в теории аналитических функций.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Робертсон А. П., Робертсон В.-Дж., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967; [3] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [4] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., т. 1, М., 1962, т. 2, М., 1966; [5] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [6] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М., Теория экстремальных задач, М., 1974; [7] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973; [8] Хавин В. П., Итоги науки. Математический анализ. 1964, М., 1966, с. 76—164; [9] Хавинсон С. Я., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 2, с. 25—98; [10] Diestel J., Geometry of Banach spaces-selected topics, B.—N.Y., 1975.
Н. К. Никольский.

6) Д. в экстремальных задачах и выпуклом анализе — особенность выпуклых множеств, выпуклых функций и выпуклых экстремальных задач, состоящая в возможности задавать их двояким образом — в основном и сопряженном пространствах. Замкнутые выпуклые множества в локально выпуклом топологич. векторном пространстве допускают двойственное описание: они совпадают с пересечением замкнутых полупространств, их содержащих. Это позволяет связать с каждым выпуклым множеством A в векторном пространстве X двойственный объект в сопряженном пространстве — его поляру $A^0=\{x^*\in X^* : \langle x^*, x\rangle\leqslant 1, \ x\in A\}$. Замкнутые выпуклые функции (т. е. функции с выпуклыми и замкнутыми надграфиками) в локально выпуклом топологич. векторном пространстве также допускают двойственное опи-

сание: они являются поточечными верхними гранями аффинных функций, их не превосходящих. Такая Д. позволяет связать с каждой выпуклой функцией $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ двойственный объект — сопряженную функцию, заданную на сопряженном пространстве X^* и определяемую формулой

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} (\langle x^*, x\rangle - f(x)).$$

Поточечные верхние грани линейных функций в локально выпуклом топологич. векторном пространстве суть выпуклые замкнутые однородные функции, и в этом факте заложена Д. между выпуклыми множествами и выпуклыми однородными функциями. В основании описанных Д. лежат теоремы Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов и теоремы отделимости выпуклых множеств.

Сущность двойственного задания выпуклых множеств и выпуклых функций находит свое отражение в инволютивности оператора полярности $A^{00}=A$ и сопряжения $f^{**}=f$, имеющей место для выпуклых замкнутых множеств, содержащих нуль, и выпуклых замкнутых функций, всюду больших $-\infty$. Последний результат, касающийся функций (наз. теоремой Фенхеля — Моро), порождает многочисленные теоремы Д. для экстремальных задач линейного и выпуклого программирования. Примером пары двойственных задач являются следующие две задачи линейного программирования

$$\text{I. } (c, x) \longrightarrow \inf; \quad \text{II. } (b, y) \longrightarrow \sup \qquad (1)$$

$$Ax \geqslant b, \ x \geqslant 0 \qquad A^*y \leqslant c, \ y \geqslant 0.$$

Здесь

$$x, c \in \mathbb{R}^n, \ (c, x) = \sum\nolimits_{i=1}^n c_i x_i, \ y, b \in \mathbb{R}^m,$$

$$(b, y) = \sum\nolimits_{i=1}^m b_i y_i, \quad A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Для пары двойственных задач линейного программирования имеет место следующая альтернатива: либо значения задач конечны и равны и в обеих задачах существует решение, либо в одной из задач множество допустимых значений пусто или значение задачи бесконечно.

Обычный прием построения двойственной задачи состоит в следующем. Задача минимизации

$$f(x) \longrightarrow \inf, \quad x \in X, \qquad (2)$$

где X — линейное пространство, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, включается в класс подобных ей задач, зависящих от параметра:

$$F(x, y) \longrightarrow \inf, \quad x \in X,$$

где Y — некоторое другое линейное пространство, $F: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $F(x, 0)=f(x)$ (функцию F наз. возмущением f). Обычно F предполагается выпуклой. Двойственной к задаче по отношению к данному возмущению наз. задача

$$-F^*(0, y^*) \longrightarrow \sup, \quad y^* \in Y^*, \qquad (2^*)$$

где F^* — функция, двойственная (сопряженная) с F в смысле Лежандра — Юнга — Фенхеля. Для простейших задач выпуклого программирования типа

$$f_0(x) \longrightarrow \inf, \quad f_i(x) \leqslant 0, \ i=1, \ldots, m, \ x \in B, \qquad (3)$$

где X — линейное пространство, $f_i: X \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклые функции на X, B — выпуклое множество в X (частными случаями (3) являются задачи линейного программирования), обычно применяются следующие стандартные возмущения, зависящие от параметров $y \in \overline{\mathbb{R}}^m$, $y=(y_1, \ldots, y_m)$, $f_0(x) \to \inf$, $f_i(x) \leqslant y_i$, $i=1, \ldots, m$, $x \in B$. Теоремы двойственности для общих классов задач выпуклого программирования утверждают, что при нек-рых допущениях на возмущение F значения задач (2) и (2*) совпадают, и более того, решение одной из задач является множителем Лагранжа для другой.

Лит.: [1] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, Lpz.—B., 1910; [2] его же, Gesammelte Abhandlungen, Bd 1—2, Lpz.—B., 1911; [3] Fenchel W., «Canad. J. Math.», 1949, v. 1, p. 73—77; [4] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973; [5] Ekeland I., Teman R., Convex Analysis and Variational Problem, N. Y., 1976; [6] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М., Теория экстремальных задач, М., 1974. *В. М. Тихомиров.*

7) Д. конечных абелевых групп — классический прототип общей *Понтрягина двойственности* и различных более поздних ее модификаций. Относится к свойствам изоморфного соответствия между конечной абелевой группой A и группой $\hat{A} = \mathrm{Hom}(A, k^*)$ ее характеров со значениями в мультипликативной группе k^* алгебраически замкнутого поля k характеристики, не делящей порядок группы A (см. *Характеров группа*). Естественное отображение $f : A \to \hat{\hat{A}}$, определенное правилом

$$f(a)(\chi) = \chi(a)$$

для всех $a \in A$, $\chi \in \hat{A}$, также является изоморфизмом, причем для любой подгруппы $B \subseteq A$ имеет место равенство $f(B) = (B^{\perp})^{\perp}$, где

$$B^{\perp} = \{\chi \in \hat{A} \mid \chi(b) = 1 \text{ для всех } b \in B\} \cong \widehat{A/B}.$$

Соответствие $B \to B^{\perp}$ устанавливает двойственность между решетками подгрупп групп A и $\hat{A}$. Это соответствие взаимно однозначно и обладает свойствами

$$(BC)^{\perp} = B^{\perp} \cap C^{\perp}, \quad (B \cap C)^{\perp} = B^{\perp} C^{\perp}.$$

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973, гл. 6; [2] Huppert B., Endliche Gruppen I, B., 1967, S. 688—96. *А. И. Кострикин.*

S-ДВОЙСТВЕННОСТЬ, стационарная двойственность, Спеньера двойственность, — двойственность в теории гомотопии, имеющая место (при отсутствии ограничений на размерность пространств) для аналогов обычных гомотопич. и когомотопич. групп в надстроечной категории — для S-гомотопич. и S-когомотопич. групп или стационарных групп гомотопий и когомотопий, образующих экстраординарные (обобщенные) теории гомологий и когомологий. Надстроечной категорией, или S-категорией, наз. категория, объектами к-рой являются топологич. пространства X, а морфизмами — классы $\{f\}$ S-гомотопных отображений f p-кратной *надстройки* S^pX_1 в S^pX_2, причем f и $g : S^qX_1 \to S^qX_2$ считаются S-гомотопными, если существует такое $r \geqslant \max(p, q)$, что надстройки $S^{r-p}f$ и $S^{r-q}g$ гомотопны в обычном смысле. Множество $\{X_1, X_2\}$ таких классов, наз. S-отображениями, составляет абелеву группу (относительно так наз. колейного сложения, см. [1], [2], [4], [5]). Группа $\{X_1, X_2\}$ есть предел прямого спектра множеств $[S^kX_1, S^kX_2]$ обычных гомотопич. классов с надстроечными отображениями в качестве проекций, являющегося при достаточно больших k спектром групп с гомоморфизмами. Имеет место изоморфизм $S : \{X_1, X_2\} \to \{SX_1, SX_2\}$, при к-ром соответствующие друг другу элементы представляются одним и тем же отображением $S^pX_1 \to S^pX_2$, $p \geqslant 1$. Полиэдром, n-двойственным к полиэдру X сферы S^n, наз. произвольный полиэдр D_nX в S^n, являющийся S-деформационным ретрактом дополнения $S^n \setminus X$, т. е. если морфизм, соответствующий вложению $D_nX \subset S^n \setminus X$, есть S-эквивалентность. Полиэдр D_nX существует для каждого X, и можно рассматривать X как D_n^2X.

Для любых полиэдров X_1, X_2 и любых n-двойственных им полиэдров D_nX_1 и D_nX_2 существует единственное отображение

$$D_n:\{X_1, X_2\} \longrightarrow \{D_nX_2, D_nX_1\},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

а) Оно является инволютивным контравариантным функториальным изоморфизмом, т. е. D_n есть такой гомоморфизм, что если

$$i : X_1 \subset X_2 \text{ и } i' : D_nX_2 \subset D_nX_1,$$

то

$$D_n\{i\} = \{i'\};$$

если

$$\{f_1\} \in \{X_1, X_2\} \text{ и } \{f_2\} \in \{X_2, X_3\},$$

то

$$D_n(\{f_2\}\cdot\{f_1\}) = D_n\{f_1\}\cdot D_n\{f_2\};$$

если θ — элемент из $\{X_1, X_2\}$ или из $\{D_nX_2, D_nX_1\}$, то $D_nD_n\theta = \theta$.

б) Оно удовлетворяет соотношениям

$$SD_n = D_{n+1} \text{ и } D_{n+1}S = D_n,$$

где SD_nX_i и D_nX_i рассматриваются как полиэдры, $(n+1)$-двойственные к полиэдрам X_i и, соответственно, SX_i, $i=1, 2$; это значит, что оно не зависит от n и стационарно относительно надстройки.

в) Оно удовлетворяет равенству

$$D^n_a\theta_* = (D_n\theta)^* D^n_a,$$

где

$$\theta_*: H_p(X_1) \longrightarrow H_p(X_2)$$

и

$$(D_n\theta)^*: H^{n-p-1}(D_nX_1) \longrightarrow H^{n-p-1}(D_nX_2)$$

— гомоморфизмы указанных групп гомологии и когомологии, индуцированные S-отображениями $\theta \in \{X_1, X_2\}$ и $D_n\theta$, а

$$D_a : H_p(X_i) \to H^{n-p-1}(D_nX_i), \; i=1, 2,$$

есть изоморфизм, к-рый получается из изоморфизма *Александера двойственности* заменой множества $S^n \setminus X_i$ его S-деформационным ретрактом D_nX_i.

Построение D_n опирается на представление данного отображения как композиции вложения и S-деформационной ретракции.

S-г о м о т о п и ч е с к о й г р у п п о й $\Sigma_p(X)$ пространства X наз. группа $\{S^p, X\}$, а S-к о г о м о т о п и ч е с к о й г р у п п о й $\Sigma^p(X)$ пространства X — группа $\{X, S^p\}$. Как и в обычной теории гомотопии, определяются гомоморфизмы

$$\varphi_p: \sum\nolimits_p(X) \longrightarrow H_p(X),$$

$$\varphi^p: \sum\nolimits^p(X) \longrightarrow H^p(X).$$

Рассмотрение сфер S^p и S^{n-p-1} как n-двойственных приводит к изоморфизму

$$D_n: \sum\nolimits_p(X) \longrightarrow \sum\nolimits^{n-p-1}(D_nX)$$

и к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
\sum_p(X) & \xrightarrow{\quad\varphi_p\quad} & H_p(X) \\
{\scriptstyle D_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D^n_a} \\
\sum^{n-p-1}(D_nX) & \xrightarrow{\varphi^{n-p-1}} & H^{n-p-1}(D_nX).
\end{array}$$

Таким образом, изоморфизм D_n связывает S-гомотопич. и S-когомотопич. группы подобно тому, как изоморфизм двойственности Александера D^n_a связывает группы гомологии и когомологии. Какая-либо двойственность в S-категории приводит к двойственности в случае обычных гомотопич. классов, если на пространство наложить требования, из к-рых следует наличие взаимно однозначного соответствия множества указанных классов с множеством S-гомотопических классов.

Примерами двойственных предложений в этой теории являются теорема Гуревича об изоморфизме и теорема классификации Хопфа. D_n переводит одну из этих теорем в другую, что означает замену S-гомотопич. групп S-когомотопическими, групп гомологии — группами когомологии, отображения φ_p — отображениями φ^{n-p-1}, наименьшей размерности с нетривиальной гомологич. группой — наивысшей размерностью с нетривиальной группой когомологии, и наоборот. В обычной теории гомотопии для определения n-когомотопич. группы требуется, чтобы размерность пространства не превышала $2n-2$ (или, более общо, чтобы пространство было $(2n-1)$-косвязным, $n>1$), что нарушает полную общность двойственности.

Теория обобщается в различных направлениях: напр., рассматриваются пространства, имеющие S-гомотопический тип полиэдров, относительный случай, теория с носителями и др. (см. [3], [5], [6], [7]). Она послужила одним из источников стационарной гомотопической теории [8].

Лит.: [1] Спаньер Э. Г., «Математика», 1959, т. 3, № 1, с. 17—25; [2] Spanier E. H., Whitehead J. H. C., «Mathematica», 1955, v. 2, № 3, p. 56—80; [3] их же, «Ann. Math.», 1958, v. 67, № 2, p. 203—38; [4] Barratt M. G., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1955, v. 5, p. 71—106, 285—329; [5] Спаньер Э. Г., Уайтхед Дж. Г., «Математика», 1959, т. 3, № 1, с. 27—56; [6] Экман Б., Хилтон П., там же, 1960, т. 4, № 3, с. 3—27; [7] Спаньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [8] Уайтхед Дж., Новейшие достижения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1974.

Г. С. Чогошвили.

ДВОЙСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ — дополнительные по Юнгу функции, т. е. строго *выпуклые функции*, связанные *Лежандра преобразованием*.

ДВОЙСТВЕННЫЙ БАЗИС, дуальный базис, к базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$ модуля E относительно формы f — такой базис $\{c_1, \ldots, c_n\}$ модуля E, что

$$f(e_i, c_i)=1, \quad f(e_i, c_j)=0,$$
$$i\neq j, \quad 1\leqslant i, \ j\leqslant n,$$

где E — свободный K-модуль над коммутативным кольцом K с единицей, а f — неособая билинейная форма на E.

Пусть E^* — модуль, сопряженный к E, а $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ — базис E^*, сопряженный к исходному базису E : $e_i^*(e_i)=1$, $e_i^*(e_j)=0$, $i\neq j$. Тогда каждой билинейной форме f на E отвечают отображения φ_f, $\psi_f : E\to E^*$, определяемые равенствами

$$\varphi_f(x)(y)=f(x, y), \quad \psi_f(x)(y)=f(y, x).$$

Если форма f неособая, то каждое из отображений φ_f, ψ_f является изоморфизмом, и обратно. При этом двойственный к $\{e_1, \ldots, e_n\}$ базис $\{c_1, \ldots, c_n\}$ характеризуется тем свойством, что

$$\psi_f(c_i)=e_i^* \quad (i=1, \ \ldots, \ n).$$

Е. Н. Кузьмин.

ДВОЯКОКРУГОВАЯ ОБЛАСТЬ — область D двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$, обладающая свойством: существует такая точка (a_1, a_2), что вместе с каждой точкой (z_1^0, z_2^0) области D принадлежат все точки (z_1, z_2) с координатами

$$z_j=\left\{a_j+\left(z_j^0-a_j\right)e^{i\varphi_j}\right\},$$
$$0\leqslant\varphi_j\leqslant 2\pi, \ j=1, \ 2.$$

Точка (a_1, a_2) наз. центром Д. о. Если Д. о. содержит свой центр, то она наз. полной Д. о., в противном случае — неполной Д. о. Примеры полной Д. о.— шар или бикруг, неполной — декартово произведение круговых колец. Аналогично определяется и n-круговая область, или область Рейнхардта.

М. Ширинбеков.

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — однозначная аналитич. функция $f(z)$, имеющая только изолированные особенности на всей конечной плоскости комплексного переменного z и такая, что существуют два числа p_1, p_2, отношение к-рых не является действительным числом и к-рые являются периодами $f(z)$, т. е. p_1, p_2 таковы, что имеет место тождество

$$f(z+p_1)=f(z+p_2)=f(z).$$

(Если отношение p_1/p_2 действительно и рационально, то $f(z)$ — одноперιодич. функция; если оно — иррационально, то $f(z)\equiv\text{const}$.) Все числа вида mp_1+np_2, где m, n — целые, также являются периодами $f(z)$. Все периоды данной Д. ф. образуют дискретную абелеву группу по сложению, наз. группой периодов (или модулем периодов), базис к-рой (базис периодов) состоит из двух примитивных периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$, $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_3)\neq 0$. Все остальные периоды этой Д. ф. представимы в виде $2m\omega_1+2n\omega_3$, где m, n — целые. Не существует аналитич. функций одного комплексного переменного, кроме констант, имеющих более двух примитивных периодов.

Точки вида $2m\omega_1+2n\omega_3$, где m, n — целые, образуют решетку периодов, разбивающую всю плоскость z на параллелограммы периодов. Точки (числа) z_1, z_2, для к-рых

$$z_1-z_2=2m\omega_1+2n\omega_3,$$

наз. конгруэнтными (сравнимыми по модулю периодов). В конгруэнтных точках Д. ф. $f(z)$ принимает одно и то же значение, поэтому достаточно изучить поведение $f(z)$ в к.-л. основном параллелограмме периодов. Обычно в качестве такового принимается множество точек

$$\{z=z_0+2t_1\omega_1+2t_3\omega_3;\ 0\leqslant t_1<1,\ 0\leqslant t_3<1\},$$

т. е. параллелограмм с вершинами

$$0,\ z_0+2\omega_1,\ z_0+2\omega_2=z_0+2\omega_1+2\omega_3,\ z_0+2\omega_3.$$

Не существует отличной от константы Д. ф., регулярной во всем основном параллелограмме периодов. Мероморфные Д. ф. наз. *эллиптическими функциями*. Обобщение понятия эллиптич. функций на случай функций $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ от $n\geqslant 1$ комплексных переменных носит название *абелевых функций*.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 2, 2 изд., М., 1968, гл. 7; [2] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 2; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963, гл. 20; [4] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970.

Е. Д. Соломенцев.

ДВУГРАННЫЙ УГОЛ — фигура в пространстве, образованная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой, а также часть пространства, ограниченная этими полуплоскостями. Полуплоскости наз. гранями Д. у., а их общая прямая — ребром. Д. у. измеряется линейным углом, т. е. углом между двумя перпендикулярами к ребру, выходящими из одной точки и лежащими в разных гранях, или, иначе, углом, образованным пересечением Д. у. плоскостью, перпендикулярной к ребру.

БСЭ.

ДВУЖИДКОСТНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАЗМЫ — гидродинамическая модель, в к-рой плазма рассматривается как совокупность двух «жидкостей» (электронной и ионной), движущихся одна сквозь другую. Электрич. сопротивление плазмы рассматривается как результат взаимного трения этих жидкостей.

Система уравнений движения в предположении, что на электроны действует только электронное давление p_e, а на ионы — лишь ионное давление p_i, имеет вид

$$\frac{dm\boldsymbol{V}_e}{dt} = -e\left(\boldsymbol{E} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{V}_e \times \boldsymbol{H}]\right) - \frac{\nabla p_e}{n_e} - Rn_i(\boldsymbol{V}_e - \boldsymbol{V}_i), \quad (1)$$

$$\frac{dM\boldsymbol{V}_i}{dt} = Ze\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{V}_i \times \boldsymbol{H}]\right) - \frac{\nabla p_i}{n_i} - Rn_e(\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_e). \quad (2)$$

Взаимодействие электронов и ионов учтено посредством силы трения, пропорциональной произведению разности скоростей на концентрацию тормозящих частиц. Величина R наз. коэффициентом взаимного трения, или коэффициентом диффузионного сопротивления. Учитывая условие квазинейтральности плазмы ($n_e = zn_i = n$), уравнение движения Д. м. п. приводится к виду

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho c}[\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}],$$

где

$$\boldsymbol{V} = \frac{n_i M \boldsymbol{V}_i + n_e m \boldsymbol{V}_e}{Mn_i + mn_e}$$

— средняя массовая скорость, $p = p_i + p_e$ — суммарное давление, а $\boldsymbol{j} = e(Zn_i\boldsymbol{Z}_i - n_e\boldsymbol{Z}_e)$ — ионный ток. Если $m/M \ll 1$, то $\boldsymbol{V}_i \approx \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}_e \approx \boldsymbol{V} - \boldsymbol{j}/ne$.

Уравнения (1), (2) могут быть использованы для получения обобщенного закона Ома, связывающего плотность тока j с другими величинами. Если можно пренебречь членами вида $(\boldsymbol{V}\nabla)\boldsymbol{V}$ (а также при $m/M \ll 1$), обобщенный закон Ома записывается в виде:

$$\frac{dj}{dt} = \frac{ne^2}{m}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{H}]\right) - \frac{e}{mc}[\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}] + \frac{e}{m}\nabla p_e - \frac{\boldsymbol{j}}{\tau},$$

где $\tau = 1/\nu_{ei}$ — так наз. время передачи импульса, ν_{ei} — эффективная частота передачи импульса, определяемая выражением:

$$R = \frac{m}{n_i}\nu_{ei} = \frac{m}{n_e}\nu_{ie}.$$

Лит.: [1] Франк-Каменецкий Д. А., Лекции по физике плазмы, 2 изд., М., 1968; [2] Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Магнитная гидродинамика, М., 1962.

В. А. Дородницын.

ДВУЗНАЧНАЯ ЛОГИКА — то же, что *алгебра логики.*

ДВУМЕРНАЯ КЛЕТКА — топологический образ *диска.*

А. В. Чернавский.

ДВУМЕРНОЕ КОЛЬЦО в топологии — топологический образ замкнутой части плоскости, заключенной между несовпадающими концентрическими окружностями. Д. к. есть ориентируемое *двумерное многообразие* рода нуль с двумя компонентами края.

А. В. Чернавский.

ДВУМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — топологическое пространство, каждая точка к-рого обладает окрестностью, гомеоморфной плоскости или полуплоскости. Д. м. — наиболее наглядный класс многообразий: к ним относятся сфера, круг, лист Мёбиуса, проективная плоскость, бутылка Клейна и др.

Точки, имеющие лишь такие окрестности, к-рые гомеоморфны полуплоскости (если они есть), образуют край многообразия.

Рис. 1.

Важнейший класс Д. м. составляют замкнутые ориентируемые Д. м., или замкнутые поверхности. Простейшая из них — сфера S^2 — поверхность рода 0. Поверхность рода g получается из S^2 удалением $2g$ пар непересекающихся дисков и отождествлением с каждой парой граничных окружностей границ изогнутого цилиндра (рис. 1). Этот процесс наз. приклеиванием ручек, а замкнутая поверхность рода g — сферой с g ручками (рис. 2).

Более широкий класс Д. м. составляют компактные ориентируемые Д. м., или поверхности с краем, получаемые из к.-л. замкнутой поверхности удалением внутренних точек конечного числа непересекающихся дисков. Их границы образуют край возникающего Д. м. Родом этого Д. м. считается род исходной поверхности (рис. 3). Д. м. рода 0 — диск или диск с дырами.

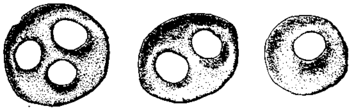


Рис. 2.

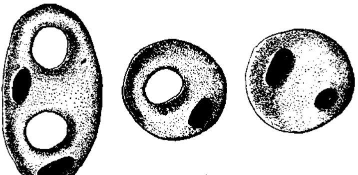


Рис. 3.

В другой класс Д. м. входят компактные неориентируемые Д. м. Они также могут быть замкнутыми и с краем. Простейшее среди них — *Мёбиуса лист* (рис. 4). Он не может быть ориентирован, т. е. на нем нельзя выбрать одновременно для каждой точки направления вращения вокруг нее так, чтобы эти направления переходили друг в друга непрерывно. Другой пример — *проективная плоскость* $\mathbb{R}P^2$; любая окрестность каждой проективной прямой на $\mathbb{R}P^2$ содержит лист Мёбиуса и поэтому $\mathbb{R}P^2$ также неориентируема. В общем случае компактные неориентируемые Д. м. получаются из замкнутых поверхностей удалением внутренних точек непересекающихся дисков и заклейкой их (не обязательно каждого) листами Мёбиуса (на рис. 5 лист Мёбиуса представлен в виде скрещенной крышки, т. е. с самопересечением по отрезку). Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ получается из сферы заменой одного диска на лист Мёбиуса. Если заменить листами Мёбиуса два диска, то получится *Клейна поверхность* (рис. 6), ее удобно изображать также как сферу с неориентируемой ручкой. Вообще, приклейку двух листов Мёбиуса можно заменить приклейкой одной неориентируемой ручки, и наоборот. С другой стороны, если обвести один конец обычной ручки по средней ли-

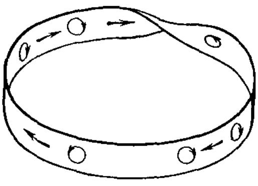


Рис. 4.

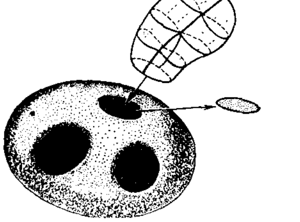


Рис. 5.

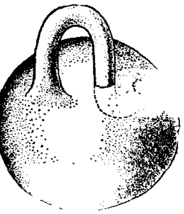


Рис. 6.

нии листа Мёбиуса, то эта ручка станет неориентируемой (рис. 7). Таким образом, в неориентируемом Д. м. любую ручку можно заменить на два листа Мёбиуса, и наоборот.

Сферами с ручками или с листами Мёбиуса и, возможно, с удаленными дисками исчерпываются все компактные связные (состоящие из одного куска) Д. м. Некомпактные Д. м., напр. плоскость $\mathbb{R}^2$, полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$ и вообще любое открытое подмножество любого компактного Д. м., могут быть очень сложно устроены. Напр., если на $\mathbb{R}^2$ взять бесконечное число дисков, уходящих на бесконечность, и заменить их на ручки или листы Мёбиуса, то получится Д. м., к-рое не является открытым подмножеством никакого компактного Д. м. (рис. 8). Некомпактные Д. м. без края наз. открытыми.

Одним из подходов к изучению Д. м. является комбинаторный подход, при к-ром Д. м. рассматривается

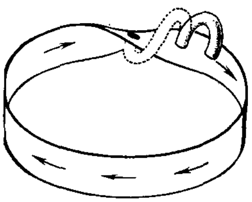


Рис. 7.

состоящим из выпуклых многоугольников (граней), примыкающих друг к другу по общим ребрам. Особенно важны *триангуляции* Д. м., где гранями являются треугольники. Если два Д. м. триангулированы, то их триангуляции наз. комбинаторно эквивалентными, когда они имеют изоморфные подразделения, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее примыкание соответствующих граней. Из произвольных двумерных *комплексов* триангулированные Д. м. выделяются тем, что к каждому ребру примыкают одна (для ребер на краю) или две грани и вокруг каждой вершины триангуляции грани образуют один цикл (звезду)

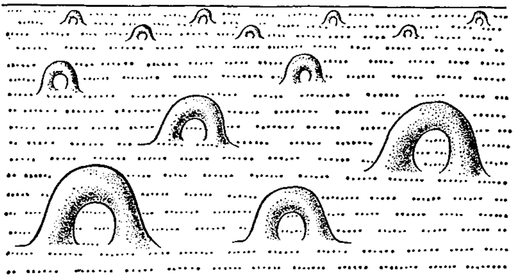


Рис. 8.

последовательно примыкающих друг к другу граней (рис. 9). Цикл замкнут, если вершина не лежит на краю (a), и незамкнут, если она лежит там (b). Компактность Д. м. равносильна конечности числа граней любой триангуляции, а связность — возможности соединить любые две вершины цепочкой ребер. В связном Д. м. любые две грани соединимы цепочкой граней, в к-рой две соседние имеют общее ребро. Неориентируемость равносильна существованию такой цепочки, к-рая содержит в себе лист Мёбиуса.

С помощью триангуляций удобно вводить инварианты, т. е. характеристики, одинаковые у комбинаторно эквивалентных Д. м. Важнейшим инвариантом

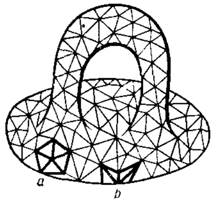


Рис. 9.

является *эйлерова характеристика* $\chi(M)$, равная для данной триангуляции числу $B-P+\Gamma$, где B, P, Γ — числа вершин, ребер и граней триангуляции соответственно. χ не меняется при подразделениях, и поэтому если $\chi(M_1)\neq\neq\chi(M_2)$, то M_1 и M_2 комбинаторно неэквивалентны. Для сферы с g ручками $\chi(M)=2-2g$, в частности для сферы она равна 2, для тора 0, для проективной плоскости 1, для бутылки Клейна 0, для сферы с k листами Мёбиуса $2-k$. Если из Д. м. выбросить внутренности k дисков, то $\chi(M)$ уменьшится на k. Сопоставляя компактному связному Д. м. три числа

$$\{\varepsilon,\ \chi,\ k\},$$

где $\varepsilon = \pm 1$ в зависимости от ориентируемости, $\chi = \chi(M)$, а k — число компонент края, получаем тем самым полное описание Д. м. с точностью до комбинаторной эквивалентности, поскольку эти тройки чисел различны для описанных выше Д. м. (сфер с ручками, сфер с листами Мёбиуса и, возможно, еще с дырами), и в то же время любое компактное связное Д. м. комбинаторно эквивалентно одному из этих Д. м. (см. [1], [3]). Для открытых Д. м. классификация также проведена, но она здесь гораздо сложнее, так как имеется несчетно много различных поверхностей [5].

Для чисто топологич. изучения Д. м. основную роль играет *Жордана теорема*. Пусть C — кривая без самопересечений, соединяющая две точки края многообразия M или замкнутая; она называется с е ч е н и е м M.

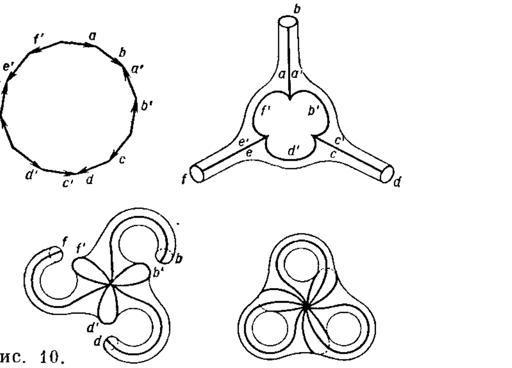


Рис. 10.

Сечение C не разбивает M, если любые две точки M соединимы дугой, не пересекающей C. Максимальное число сечений, к-рые вместе не разбивают M, увеличенное на единицу, наз. ч и с л о м с в я з н о с т и M. Так, согласно теореме Жордана, сфера и диск односвязны. Связность замкнутой поверхности рода g равна $2g+1 = 3-\chi$. Для такой поверхности имеется набор из $2g$ сечений, к-рые все выходят из одной точки и разбиваются на пары так, что каждая пара осуществляет разрез одной ручки. Такой набор наз. к а н о н и ч е с к и м р а з р е з о м M: в результате разрезания по всем сечениям M превращается в диск. Аналогично имеются канонич. разрезы неориентируемых Д. м. (по средним линиям листов Мёбиуса). Для Д. м. с краем нужно провести еще сечения из базисной точки к каждой компоненте края. Обратно, Д. м. возникает из диска, край к-рого разбит на сегменты, склеиванием этих сегментов попарно между собой. Если склеивание осуществляется по схеме рис. 10, то получается ориентируемое Д. м., если по схеме рис. 11, то — неориентируемое. (Сегмент x надо склеить с сегментом x' так, чтобы совпали направления стрелок.) Край возникает, если имеется несколько сегментов, по к-рым не производится склейки.

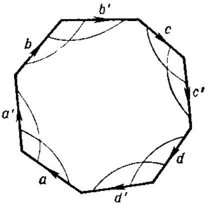


Рис. 11.

Теорема Жордана позволяет также дать топологич. характеризацию Д. м. В частности, сфера есть единственный *локально связный континуум*, содержащий топологич. образ окружности, разбиваемый каждым образом окружности и не разбиваемый никакой парой точек. Вообще, Д. м. выделяются в классе локально связных континуумов тем, что они не разбиваются никакой парой точек и разбиваются достаточно малой окружностью (т е о р е м а У а й л д е р а, 1949).

Поскольку у гомеоморфных Д. м. любые две триангуляции комбинаторно эквивалентны, комбинаторная классификация Д. м. имеет чисто топологич. смысл. Хотя набором ε, χ, k компактные Д. м. характеризуются однозначно, для изучения свойств Д. м. имеют значение и другие топологич. инварианты. В первую очередь это — одномерных *гомологий группа* $H_1(M)$ и *фундаментальная группа* $\pi_1(M)$. Для замкнутой поверхности рода g $H_1(M)$ равна прямой сумме $2g$ экземпляров группы $\mathbb{Z}$ целых чисел. В качестве образующих обычно берутся g пар окружностей канонич. разреза. Для неориентируемого замкнутого Д. м. с числом связности s $H_1(M)$ есть сумма $s-1$ экземпляров группы $\mathbb{Z}$ и одного экземпляра группы $\mathbb{Z}_2$. За образующие берутся сечения канонич. разреза (за вычетом одного) и еще дезориентирующий путь (после разреза по которому Д. м. становится ориентируемым). Для $\pi_1(M)$ *копредставление* удобнее всего получается с помощью канонического разреза: его сечения берутся за образующие, а соотношение получается при обходе края диска, возникшего после разреза. В ориентируемом случае получается копредставление

$$\{a_1,\ b_1;\ \ldots,\ a_g,\ \ b_g;\ a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ \ldots\ a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}=1\},$$

а в неориентируемом

$$\{a_1,\ \ldots,\ a_s;\ a_1^2a_2^2\ldots a_s^2=1\}.$$

Имеет значение тот факт, что *универсальным накрытием* любого связного Д. м. без края (кроме s^2 и $\mathbb{R}P^2$) является плоскость $\mathbb{R}^2$, а соответствующая *монодромии группа* реализуется движениями евклидовой плоскости или плоскости Лобачевского. Напр., тор получается отождествлением всех точек плоскости, отличающихся друг от друга на $m\boldsymbol{r}_1+n\boldsymbol{r}_2$, где $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — два данных вектора, а m и n — целые числа. Для применений важны также и накрытия с ветвлением. Пусть отображение $f: M_1 \to M_2$, где M_1 и M_2 — замкнутые и триангулированные Д. м., линейно отображают каждую грань M_1 на некоторую грань M_2, причем для каждого ребра l в M_1 примыкающие к нему две грани отображаются на разные грани, примыкающие к ребру $f(l)$ в M_2. Для каждой точки $x \in M_1$, отличной от вершин, найдется в M_1 окрестность, к-рую f переводит взаимно однозначно на окрестность точки $f(x)$ в M_2. Если для вершины v из M_1 обойти в циклич. порядке примыкающие к ней грани, то соответствующие грани в M_2 обойдут в циклич. порядке вершину $f(v)$ в M_2 целое число k раз. Если $k=1$, то v — обыкновенная точка, если же $k>1$, то v — точка ветвления, а k — кратность ветвления в точке v. Если $f^{-1}(w)$ для $w \in M_2$ не содержит точек ветвления, то w также наз. обыкновенной. Поскольку прообразы близких обыкновенных точек из M_2 состоят из равного числа точек, по соображениям непрерывности получается, что это число — одно и то же для всех обыкновенных точек. Оно наз. числом листов накрытия. Это число d равно для ориентируемого Д. м. *степени отображения* f (в случае неориентируемости его следует привести по модулю два). Если $f^{-1}(w)$ содержит точки ветвления с кратностями $k_1, \ldots, k_t$, то $f^{-1}(w)$ содержит на $\sum(k_i-1)$ меньше точек, чем обыкновенная точка (здесь суммирование по всем точкам ветвления в M_1). Поскольку число вершин $B(M_1)$ на $\sum(k_i-1)$ меньше $d\cdot B(M_2)$, а для числа ребер и граней: $P(M_1)=d\cdot P(M_2)$ и $\Gamma(M_1)=d\cdot\Gamma(M_2)$, то

$$\chi(M_1)=d\cdot\chi(M_2)-\sum(k_i-1).$$

Это — формула Римана — Гурвица.

С точки зрения дифференциальной геометрии Д. м. рассматриваются как гладкие многообразия, к-рые снабжаются дополнительными структурами (напр., метрикой, связностью и т. д.) или рассматриваются вложенными (с возможными самопересечениями) в евклидовы пространства. Гладкое Д. м. можно триангулировать так, что ребра будут гладкими дугами, а все углы отличны от нуля (теорема Кернса, 1934). Оказывается, что при этом диффеоморфным Д. м. отвечают комбинаторно эквивалентные триангуляции, и обратно. Таким образом, классификация Д. м. сохраняет силу и для гладких Д. м. Примером теоремы, связывающей топологич. характеристики Д. м. с его дифференциально-геометрич. свойствами, является теорема Гаусса — Бонне [3]: интеграл от кривизны замкнутой поверхности (точнее, от гауссовой кривизны, определяемой нек-рой *римановой связностью*, к-рую всегда можно определить на гладком Д. м.) равен $2\pi\chi(M)$. Этот факт, а также его интерпретация с помощью так наз. гауссова отображения (в частности, сферического отображения) в многообразие Грассмана, если рассматриваемое многообразие погружено в евклидово пространство, находит обобщение в теории *характеристических классов*. Другая теорема, также послужившая одним из истоков этой теории: сумма *индексов* особых точек любого векторного поля на замкнутой поверхности равна $\chi(M)$.

Важную роль Д. м. играют в теории функций комплексного переменного. Здесь Д. м. наделяются комплексными структурами, т. е. локальными параметризациями окрестностей точек, связанными между собой аналитич. функциями, и наз. *римановыми поверхностями* [4]. Они обязательно ориентируемы. Замкнутые римановы поверхности являются геометрич. моделями комплексных *алгебраических кривых*. Комплексное строение на Д. м. не определяется однозначно его дифференциально-топологич. строением: напр., на поверхности рода g комплексные структуры образуют континуум размерности $6g-6$ (теорема Тейхмюллера, 1940).

К определению Д. м. иногда добавляются требования, чтобы оно как топологич. пространство было хаусдорфовым или имело счетную базу (последнее, в частности, необходимо для триангулируемости Д. м.: существуют хаусдорфовы нетриангулируемые Д. м., см. *Прюфера поверхность*).

Лит.: [1] Александров П. С., Ефремович В. А., Очерк основных понятий топологии, М.—Л., 1936; [2] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 2 изд., М.—Л., 1951; [3] Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию «в целом», М., 1973; [4] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [5] Стоилов С., Лекции о топологических принципах теории аналитических функций, пер. с франц., М., 1964.

А. В. Черновский.

ДВУМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ — метрическое пространство, являющееся двумерным многообразием с внутренней метрикой, для к-рого определены аналоги таких понятий двумерной римановой геометрии, как длина и интегральная кривизна кривой, площадь и интегральная гауссова кривизна множества.

Частным случаем Д. м. о. к. являются двумерные римановы пространства и поверхности многогранников в трехмерном евклидовом пространстве. В общем случае класс Д. м. о. к. может рассматриваться как замыкание класса двумерных римановых многообразий относительно надлежащих предельных переходов.

Пусть M — двумерное риманово многообразие, $K(x)$ — гауссова кривизна M в точке x; $\sigma(E)$ — площадь множества $E\subset M$; для $E\subset M$ кривизна:

$$\omega(E)=\iint_E K(x)\,d\sigma(x),$$

абсолютная кривизна:

$$|\omega|(E)=\iint_E |K(x)|\,d\sigma(x);$$

положительная часть кривизны множества E:

$$\omega^+(E) = \iint_E K^+(x)\, d\sigma(x),$$

где $K^+(x) = \max\{0, K(x)\}$. Если x и y — две точки риманова пространства M, то $\rho(x, y)$ — нижняя грань длин кривых на M, соединяющих точки x и y. Функция ρ является *внутренней метрикой*. Она наз. естественной метрикой риманова пространства M.

Пусть M — произвольное двумерное многообразие с метрикой ρ. Говорят, что метрика ρ — риманова, если многообразие M, наделенное метрикой ρ, изометрично нек-рому двумерному риманову пространству, снабженному его естественной метрикой.

Двумерное многообразие M с внутренней метрикой ρ есть Д. м. о. к., если выполнено следующее условие. Существует последовательность римановых метрик ρ_n, $n=1, 2, \ldots$, определенных на многообразии M, такая, что для всякого компактного множества $A \subset M$ будет $\rho_n \to \rho$ равномерно (т. е. функции $\rho_n(x, y)$ сходятся к функции $\rho(x, y)$ равномерно на множестве $A \times A$) и последовательность $|\omega_n|(A)$, $n=1, 2, \ldots$, ограничена, где $|\omega_n|$ — абсолютная кривизна римановой метрики ρ_n. Д. м. о. к. может быть определено аксиоматически.

В части достаточности условия данного здесь определения Д. м. о. к. могут быть ослаблены. Именно, двумерное многообразие M с внутренней метрикой ρ будет Д. м. о. к., если для всякой его точки можно указать окрестности U и V, где $V \subset U$ и последовательность римановых метрик ρ_n, $n=1, 2, \ldots$, определенных на U таким образом, что $\rho_n \to \rho$ равномерно на V, и последовательность $\{\omega_n^+(V)\}$ ограничена.

Для всякого Д. м. о. к. определены вполне аддитивные функции множества $\sigma(E)$ и $\omega(E)$ — площадь и, соответственно, кривизна множества. В отличие от риманова случая, $\omega(E)$ может и не быть абсолютно непрерывна относительно $\sigma(E)$. В Д. м. о. к. определено понятие поворота кривой — аналог понятия интегральной геодезич. кривизны кривой.

Всякая выпуклая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве есть Д. м. о. к. В этом случае кривизна множества всегда неотрицательна.

Д. м. о. к. допускают особенности типа конич. точек p (для таких точек $\omega(\{p\})$ отлично от нуля), ребер, границы основания цилиндра и т. д.

Лит.: [1] Александров А. Д., Залгаллер В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны, М.—Л., 1962; [2] Двумерные многообразия ограниченной кривизны, ч. 2, М.—Л., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 76).

Ю. Г. Решетняк.

ДВУМЕРНЫЙ УЗЕЛ — класс изотопных вложений двумерной сферы S^2 в четырехмерную S^4. Чисто топологич. теория не развита, ибо еще не выяснено (1978) соотношение чистой и кусочно линейной топологии в размерности 4. Обычно накладывается условие локальной плоскостности. Метод изучения — рассмотрение сечений S^2 пучком параллельных трехмерных плоскостей. Основным является вопрос о том, будет ли узел тривиален, если его группа $\pi_1(S^4 \setminus S^2)$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Известно, что в этом случае дополнение $S^4 \setminus S^2$ имеет гомотопич. тип S^1.

3-лентой в S^4 наз. образ D^3 такой иммерсии $\varphi: \Delta^3 \to S^4$, где Δ^3 — трехмерный диск, что $\varphi|_{\partial\Delta^3}$ — вложение; самопересечения φ состоят из конечного числа попарно непересекающихся двумерных дисков $D_1, \ldots, D_n$; прообраз $\varphi^1(D_i)$ каждого диска D_i является объединением двух таких дисков D_i' и D_i'', что $D_i' \cap D_i'' = \varnothing$, $D_i' \subset \operatorname{int} \Delta^3$, $\partial D_i'' = D_i'' \cap \partial\Delta^3$. Образ края $\partial\Delta^3$ является двумерным узлом в S^4. Так получаемые узлы наз. ленточными узлами. Это — один из наиболее изученных классов Д. у. Всякий ленточный Д. у. является границей нек-рого трехмерного подмногообразия сферы S^4, гомеоморфного либо диску Δ^3, либо связной сумме нек-рого числа $(S^1 \times S^2) \diagdown \Delta^3$. Ленточный Д. у. тривиален тогда и только тогда, когда фундаментальная группа его дополнения изоморфна $\mathbb{Z}$. Группа G тогда и только тогда является группой нек-рого ленточного Д. у. в S^4, когда она имеет копредставление Виртингера, т. е. копредставление $|x_1, \ldots, x_n : r_1, \ldots, r_m|$, где каждое соотношение имеет вид $x_i = \omega_{i,j} x_j \omega_{i,j}^{-1}$, в к-ром число соотношений на единицу меньше числа образующих в $G/[G, G] = \mathbb{Z}$.

Класс групп всех Д. у. полностью не описан. Известно, что этот класс шире класса групп k-мерных узлов в S^{k+2}, $k \geqslant 3$. Последний класс полностью охарактеризован (см. *Многомерный узел*). Свойства групп Д. у., к-рыми, вообще говоря, не обладают группы трехмерных узлов в S^5, таковы:

$$\dim H_2(G', \mathbb{Q}) \leqslant \dim H_1(G', \mathbb{Q}),$$

где $G' = [G, G]$ — коммутант; на конечной группе $T = \mathrm{Tors}(G'/G'')$ существует такая невырожденная симметричная форма $L : T \otimes T \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, что для любых $m \in G$, $x, y \in T$ имеет место $L(x, y) = L(\tau x, \tau y)$, где $\tau : T \to T$ — автоморфизм, индуцированный сопряжением в группе G на элемент m.

Задача вычисления $\pi_2(S^4 \diagdown S^2)$ решена лишь для частных типов Д. у., напр. полученных конструкцией Артина, ленточных и расслоенных.

А. В. Чернавский, М. Ш. Фарбер.

ДВУПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД — см. *Гиперболоид*.

ДВУСТОРОННЕЕ БОРЕЛЕВСКОЕ МНОЖЕСТВО класса α — борелевское подмножество метрического или (более широко) совершенно нормального топологич. пространства, являющееся одновременно множеством аддитивного класса α и мультипликативного класса α, т. е. принадлежащее одновременно классам F_α и G_α. Д. б. м. класса 0 — открыто замкнутые множества. Д. б. м. класса 1 — множества типов F_σ и G_δ одновременно. Любое борелевское множество класса α есть Д. б. м. класса β при всяком $\beta > \alpha$. Д. б. м. класса α образуют поле множеств.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, т. 1, пер. М. Я. Антоновского, М., 1966; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937. *А. Г. Елькин.*

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА — совокупность оценок некоторой величины a сверху и снизу. Оценкой сверху наз. неравенство вида $a \leqslant A_1$; оценкой снизу — неравенство противоположного смысла $a \geqslant A_0$. Величины A_0, A_1, с помощью к-рых оценивается величина a, как правило, имеют или более простой вид или значительно легче вычисляются чем a.

Примеры. 1) Пусть m, M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$; тогда для интеграла $\int_\alpha^\beta f(x) dx$ справедлива Д. о.:

$$m(\beta - \alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leqslant M(\beta - \alpha),$$

где

$$A_0 = m(\beta - \alpha), \quad a = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx, \quad A_1 = M(\beta - \alpha).$$

2) Д. о. констант Лебега L_n при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$0{,}9897 \ldots < L_n - \frac{4}{\pi^2} \ln(2n+1) \leqslant 1.$$

3) Д. о. собственных значений. Пусть поставлена задача на собственные значения линейного самосопряженного оператора $T : Tu = \lambda u$ в гильбертовом пространстве H. Строится следующий итерационный процесс: $Tf_{n+1} = f_n$, где $f_0 \neq 0$. В силу самосопряженности оператора T скалярные произведения (f_m, f_k) зависят лишь от

суммы индексов $m+k$. Числа $a_n=(f_0, f_n)=(f_m, f_{n-m})$ наз. постоянными Шварца, а числа $\mu_{n+1}=a_n/a_{n+1}$ — частными Рэлея — Шварца. Если оператор T положительный, то μ_n образуют монотонную невозрастающую сходящуюся последовательность.

Если λ_0 — собственное значение оператора T, $a<\lambda_0<b$, $a<\mu_{2k}<b$, и на интервале (a, b) нет других точек спектра оператора T, то

$$\mu_{2k}-\frac{\rho^2}{b-\mu_{2k}}\leqslant\lambda_0\leqslant\mu_{2k}+\frac{\rho^2}{\mu_{2k}-a}, \quad \rho^2=\frac{\mu_{2k-1}-\mu_{2k}}{\mu_{2k}}$$

(теорема Темпля [3]). При определенных условиях частные Рэлея — Шварца сходятся к нек-рому собственному значению оператора T.

Численные методы получения Д. о. (двусторонних приближений) наз. двусторонними методами [4]. Рассмотренный выше способ построения частных Рэлея — Шварца является примером двустороннего метода. Нек-рые двусторонние методы основаны на использовании пары приближенных формул, имеющих остаточные члены противоположных знаков. Пусть, напр., функция $f(x)$, заданная в точках (узлах интерполяции) $x_0<x_1<\ldots<x_n$, интерполируется многочленом Лагранжа $L_0(x)$ с узлами $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, $L_1(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда для остаточных членов справедливы соотношения:

$$R_0(x)=f(x)-L_0(x)=\frac{f^{(n)}(\xi_0)}{n!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}),$$

$$R_1(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

где $\xi_0, \xi_1\in[x_0, x_n]$. Если производная $f^{(n)}(x)$ не меняет знака на отрезке $[x_0, x_n]$, то $R_0(x)$ и $R_1(x)$ имеют разные знаки. Справедлива Д. о.:

$$\min(L_0(x), L_1(x))\leqslant f(x)\leqslant\max(L_0(x), L_1(x)).$$

Наиболее разработаны двусторонние методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений [5] — [9].

Двусторонние методы дают возможность указать границы области, в к-рой заведомо лежит решение задачи. При этом приходится согласиться с усложнением алгоритма. Более того, чтобы обеспечить двусторонность в реальных вычислениях (при наличии ошибок округлений), приходится еще более усложнять алгоритм. Двусторонние методы применяются в основном в тех случаях, когда необходимо иметь гарантированную оценку погрешности.

Лит.: [1] Галкин П. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 109, с. 3—5; [2] Коллатц Л., Задачи на собственные значения с техническими приложениями, пер. с нем., М., 1968; [3] его же, Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [5] Волков Е. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 112, с. 141—51; [6] Ремез Е. Я., «Зап. природнего-технiчного вiддiлу» АН УССР, 1931, № 1, с. 1—38; [7] Горбунов А. Д., Шахов Ю. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1963, т. 3, № 2, 239—53; 1964, т. 6, № 3, 426—33; [8] Девятко В. И., там же, 1963, т. 3, № 2, 254—65; [9] Салихов Н. П., там же, 1962, т. 2, № 4, 515—28.

В. В. Поспелов.

ДВУСТОРОННЯЯ ПОВЕРХНОСТЬ — см. *Односторонние и двусторонние поверхности.*

ДВУУГОЛЬНИК сферический — фигура, образованная двумя полуокружностями больших кругов сферы, исходящими из диаметрально противоположных точек. См. *Сферическая геометрия.*

А. Б. Иванов.

ДВУХ КОНСТАНТ ТЕОРЕМА — пусть D — конечносвязная жорданова область на плоскости комплексного переменного z, $w(z)$ — регулярная аналитич. функция в D, удовлетворяющая неравенству $|w(z)|\leqslant M$, причем на нек-рой дуге α границы ∂D выполняется соотношение

$$\lim_{z \to \zeta} \sup |w(z)| \leqslant m < M, \quad z \in D, \quad \zeta \in \alpha;$$

тогда в каждой точке z множества

$$\{z \in D; \quad 0 < \lambda \leqslant \omega(z; \alpha, D) < 1\},$$

где $\omega(z; \alpha, D)$ — *гармоническая мера* дуги α относительно D в точке z, выполняется неравенство

$$|w(z)| \leqslant m^{\lambda} \cdot M^{1-\lambda}.$$

Если для нек-рого z (удовлетворяющего условию $\omega(z; \alpha, D)=\lambda$) достигается равенство, то оно сохраняется и для всех $z \in D$ и всех λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, а функция $w(z)$ в этом случае имеет вид

$$w(z) = e^{ia} m^{\varphi(z)} M^{1-\varphi(z)},$$

где a — действительное число, $\varphi(z)$ — аналитич. функция в D, для к-рой $\operatorname{Re}\varphi(z)=\omega(z; \alpha, D)$ (см. [1], [2]).

Д. к. т. дает количественное выражение граничного свойства единственности аналитич. функций и имеет важные применения в теории функций [3]. *Адамара теорема* о трех кругах получается из нее как частный случай. О возможных аналогах Д. к. т. для гармонич. функций в пространстве см. [4], [5].

Лит.: [1] Nevanlinna F. und R., «Acta Soc. scient. fennica», 1922, Bd 50, № 5; [2] Ostrowski A., «Jahresber. Dtsch. Math. Ver.», 1923, Bd 32, H. 9—12; [3] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [4] Мергелян С. Н., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 5, с. 3—26; [5] Соломенцев Е. Д., «Докл. АН Арм. ССР», 1966, т. 42, № 5, 274—78.

Е. Д. Соломенцев.

ДВУХ ТЕЛ ЗАДАЧА — задача о движении в трехмерном евклидовом пространстве E^3 двух материальных точек P_1 и P_2 с массами m_1 и m_2 под действием ньютонова притяжения. Д. т. з. является частным случаем задачи n тел, к-рая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $6n$ и имеет 10 независимых интегралов: 6 — движения центра инерции, 3 — площадей и 1 — энергии (см. [1]). Д. т. з. имеет, кроме того, еще три интеграла Лапласа (из них один независим от предыдущих) и является полностью интегрируемой (см. [2]).

Интегрирование Д. т. з. удобнее производить в специальных системах координат, использующих указанные интегралы. Если начало декартовых координат x, y, z поместить в точку P_1 (при этом используются все 6 интегралов движения центра инерции) и ось z направить по вектору, составленному из интегралов площадей (при этом используются два интеграла площадей), то движение точки P_2 происходит в плоскости $z=0$ и удовлетворяет системе

$$\ddot{x} = -\mu x r^{-3}, \quad \ddot{y} = -\mu y r^{-3}, \tag{1}$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\mu=f(m_1+m_2)$, f — гравитационная постоянная. Система (1) имеет 4 интеграла:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c \text{ (площадей)},$$

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \mu r^{-1} = h \text{ (энергии)},$$

$$c\dot{y} - \mu x r^{-1} = \lambda_1 \quad \text{и} \quad c\dot{x} + \mu y r^{-1} = -\lambda_2 \text{ (Лапласа)},$$

связанных соотношением

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1 + 2hc^2.$$

При этом

$$c^2 = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \mu r, \tag{2}$$

т. е. орбиты точки P_2 суть конич. сечения с параметром $p=c^2/\mu$, большой полуосью $a=-\mu/(2h)$, эксцентриситетом $e=\mu^{-1}\sqrt{1+2hc^2}$, долготой перицентра ω

$$(\lambda_1 = \mu e \cos\omega, \ \lambda_2 = \mu e \sin\omega)$$

и с фокусом в начале координат. Положение точки P_2 на орбите определяют истинной аномалией v, отсчитываемой от направления на перицентр; тогда (2) дает $r=p/(1+e\cos v)$. Если $c\neq 0$, то возможны три типа орбит

(I) при $h<0$ это — эллипсы, тогда

$$t-\tau=\sqrt{a^3}\,(u-e\sin u),$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2};$$

(II) при $h>0$ это — гиперболы, тогда

$$t-\tau=\sqrt{-a^3}\,(e\operatorname{sh}u-u),$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\operatorname{th}\frac{u}{2};$$

(III) при $h=0$ это — параболы, тогда

$$t-\tau=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^3}{\mu}}\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}\right).$$

Здесь τ — момент прохождения через перицентр, u — эксцентрическая аномалия. Если $c=0$, то движение происходит по прямой линии. Д. т. з. описывает невозмущенное кеплерово движение планеты относительно Солнца либо спутника относительно планеты и т. п.

Лит.: [1] Зигель К. Л., Лекции по небесной механике, пер. с нем., М., 1959; [2] Абалакин В. К. (и др.), Справочник по небесной механике и астродинамике, М., 1971.

А. Д. Брюно.

ДВУХТОЧЕЧНЫЙ ТЕНЗОР — тензор T, зависящий от пар точек x, x' многообразия X, т. е. тензорное поле $T(x, x')$, определенное на произведении $X\times X$. Напр., Д. т. являются ковариантные производные *мировой функции* $\Omega(x, x')$ и вообще произвольного двухточечного инварианта. Свойства Д. т., в частности пределы совпадения T и его производных при $x'\to x$, напр.

$$[T_{ij'}]=\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_{j'}T(x, x'),$$

используются в вариационном исчислении и теории относительности.

Лит.: [1] Синг Дж.-Л., Общая теория относительности, пер. с англ., М., 1963. *М. И. Войцеховский.*

ДВУЧЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ — алгебраическое сравнение вида

$$x^n\equiv a \pmod m, \tag{1}$$

где a, m — взаимно простые целые числа, а $n\geqslant 2$ — натуральное число. Если сравнение (1) разрешимо, то a наз. вычетом степени n по модулю m. В противном случае a наз. невычетом степени n по модулю m.

Вопрос о разрешимости Д. с. по составному модулю m сводится к изучению аналогичного вопроса для случая простого модуля p (см. *Сравнение*). Для простого модуля имеется критерий разрешимости, доказанный Л. Эйлером (L. Euler): для разрешимости сравнения

$$x^n\equiv a \pmod p$$

необходимо, чтобы выполнялось условие

$$a^{\frac{p-1}{\delta}}\equiv 1 \pmod p,$$

где δ — наибольший общий делитель чисел n и $p-1$; при выполнении этого условия данное сравнение имеет ровно δ решений.

Из критерия Эйлера непосредственно следует, что среди чисел $1, 2, \ldots, p-1$ имеется в точности $(p-1)/\delta$ вычетов и $(\delta-1)(p-1)/\delta$ невычетов степени n по модулю p.

Значительно сложнее обратная задача: найти все модули p, по к-рым заданное число a является вычетом (или невычетом) степени $n\geqslant 2$. Л. Эйлером установлено, что разрешимость или неразрешимость сравнения $x^2\equiv$

$\equiv a \pmod p$ зависит от того, принадлежит или нет простой модуль p некоторым арифметич. прогрессиям. Полное доказательство этого результата впервые получил К. Гаусс (C. Gauss, 1801; см. [4], а также *Гаусса закон взаимности*, *Квадратичный закон взаимности*). Более того, К. Гаусс заметил, что полное решение указанной задачи при $n \geqslant 3$ возможно только в нек-ром расширении кольца целых рациональных чисел. Так, для установления закона взаимности для биквадратичных вычетов он вынужден был расширить кольцо целых рациональных чисел до кольца целых комплексных чисел $Z[i]$. Разрешимость или неразрешимость биквадратичного сравнения $x^4 \equiv \omega \pmod p$ в кольце $Z[i]$ при заданном $\omega \in Z[i]$ зависит от того, каков вычет числа p по нек-рому постоянному модулю D кольца $Z[i]$.

Новый этап в изучении Д. с. и их применений к другим задачам теории чисел был начат работами И. М. Виноградова, к-рый в 1914 доказал, что количество R квадратичных вычетов по простому модулю p среди чисел $1, 2, \ldots, Q$, $Q \leqslant p-1$, выражается формулой

$$R = \frac{1}{2} Q + \theta \sqrt{p} \ln p,$$

где $|\theta| \leqslant 1$. Аналогичный результат был впоследствии получен И. М. Виноградовым и для более общей задачи о числе решений сравнения

$$x^n \equiv y \pmod p), \quad n \geqslant 2,$$

когда y пробегает неполную систему вычетов $1 \leqslant y \leqslant Q$.

Лит.: [1] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [3] его же, Избр. труды, М., 1952; [4] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, [пер.], М., 1959.

С. А. Степанов.

ДВУЧЛЕННОЕ УРАВНЕНИЕ — алгебраическое уравнение вида $ax^n + b = 0$, где a и b — комплексные числа, и $ab \neq 0$. Д. у. имеют n различных комплексных корней

$$x_k = \sqrt[n]{\left|\frac{b}{a}\right|} \exp\left(\frac{2\pi k + \varphi}{n} i\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \varphi = \arg\left(-\frac{b}{a}\right).$$

Корни Д. у. на комплексной плоскости расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|b/a|}$ с центром в начале координат в вершинах правильного вписанного n-угольника.

А. И. Галочкин.

ДЕБАЕВСКАЯ ДЛИНА, дебаевский радиус, — расстояние, на к-рое распространяется действие электрического поля отдельного заряда в нейтральной среде, состоящей из положительно и отрицательно заряженных частиц (плазма, электролиты). Вне сферы радиуса Д. д. электрич. поле заряда экранируется в результате поляризации окружающей среды.

Д. д. определяется формулой:

$$d = \left\{ \sum_j \frac{4\pi e_j^2 N_j}{k T_j} \right\}^{-1/2},$$

где e_j, N_j, T_j — заряд, плотность и температура частиц сорта j, k — постоянная Больцмана. Суммирование идет по всем сортам частиц, при этом должно выполняться условие нейтральности: $\sum_j e_j N_j = 0$. Важным параметром среды является число частиц в сфере радиуса Д. д.:

$$n_D = \frac{4\pi}{3} d^3 \sum_j N_j.$$

Оно характеризует отношение средней кинетич. энергии частиц к средней энергии их кулоновского взаимодействия:

$$n_D \sim (E_{\text{кин}}/E_{\text{кул}})^{3/2}.$$

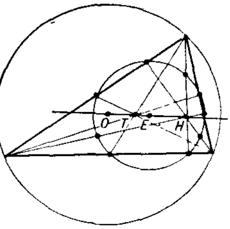
Для электролитов это число мало: $n_D \sim 10^{-4}$; для плазмы, находящейся в самых различных физич. условиях, —

велико. Это позволяет использовать методы кинетич. теории для описания плазмы.

Понятие Д. д. введено П. Дебаем (P. Debye) в связи с изучением явлений электролиза. *Д. П. Костомаров.*

ДЕВИАТОР — тензор напряжений (или деформаций) с равным нулю первым инвариантом, т. е. с равной нулю суммой членов главной диагонали матрицы тензора. См. *Деформаций тензор*, *Напряжений тензор*.

ДЕВЯТИ ТОЧЕК ОКРУЖНОСТЬ, окружность Эйлера,— окружность, на к-рой расположены середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр треугольника с вершинами. Ее радиус равен половине радиуса окружности, описанной около треугольника. Д. т. о. треугольника касается вписанной в него окружности и трех вневписанных окружностей. Пусть H — ортоцентр неравностороннего треугольника, T — центр тяжести, O — центр описанной окружности, E — центр Д. т. о. Точки H, T, O, E лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем E — середина отрезка HO и пара точек H, T гармонически разделяет пару точек O, E.



Лит.: [1] Зетель С. И., Новая геометрия треугольника, 2 изд., М., 1962; [2] Перепелкин Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. 1, М.—Л., 1948. *В. Т. Базылев.*

ДЕДЕКИНДА ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ — см. *Дзета-функция* в теории чисел.

ДЕДЕКИНДА ПРИЗНАК сходимости ряда: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, где a_n и b_n — комплексные числа, сходится, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится, $a_n \to 0$ и частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДЕДЕКИНДА ТЕОРЕМА о непрерывности числовой прямой: для всякого сечения $A|B$ множества действительных чисел (см. *Дедекиндово сечение*) существует действительное число α, являющееся либо наибольшим в классе A, либо наименьшим в классе B. Это утверждение наз. также принципом (или аксиомой) Дедекинда непрерывности числовой прямой (см. *Действительное число*). Число α является верхней гранью множества A и нижней гранью множества B. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДЕДЕКИНДОВА РЕШЕТКА, дедекиндова структура, модулярная решетка (структура),— решетка, в к-рой справедлив модулярный закон, т. е. $a \leqslant c$ влечет $(a+b)c = a+bc$ для всякого b. Высказанное требование равносильно справедливости тождества $(ac+b)c = ac+bc$. Примерами Д. р. служат решетки подпространств линейного пространства, нормальных делителей (но не подгрупп) группы, идеалов кольца и др. Решетка, имеющая *композиционный ряд*, является Д. р. тогда и только тогда, когда на ней существует функция размерности d, т. е. такая целочисленная функция, что $d(x+y)+d(xy) = d(x)+d(y)$ и что из простоты интервала $[a, b]$ вытекает $d(b) = d(a)+1$. Если $w = a_1^{(1)} \ldots a_{m_1}^{(1)} = a_1^{(2)} \ldots a_{m_2}^{(2)}$, каждый из элементов $a_i^{(k)}$ не представим в виде произведения отличных от него элементов и

$$a_1^{(k)} \ldots a_{i-1}^{(k)} a_{i+1}^{(k)} \ldots a_{m_k}^{(k)} \nleqslant a_i^{(k)},$$

то $m_1 = m_2$ и для всякого $a_i^{(1)}$ найдется такой элемент $a_j^{(2)}$, что

$$w = a_1^{(1)} \ldots a_{i-1}^{(1)} a_j^{(2)} a_{i+1}^{(1)} \ldots a_{m_1}^{(1)}$$

(см. [3], [6]). Ненулевые элементы $a_1, \ldots, a_n$ из Д. р. с нулем 0 называются независимыми, если $(a_1 + \ldots$

$\ldots+a_{i-1}+a_{i+1}+\ldots+a_n)a_i=0$ для всех i. Это определение позволяет обобщить многие свойства линейно независимых систем векторов (см. [3], [5], [6]). Если $a_1, \ldots, a_n$ независимы, то их сумма обозначается как $a_1\oplus\ldots\oplus a_n$. Теорема Оре: если Д. р. имеет композиционный ряд и

$$1=a_1^{(1)}\oplus\ldots\oplus a_{m_1}^{(1)}=a_1^{(2)}\oplus\ldots\oplus a_{m_2}^{(2)},$$

причем каждый из элементов $a_i^{(k)}$ не представляется в виде суммы двух независимых элементов, то $m_1=m_2$ и для всякого $a_i^{(i)}$ найдется такой элемент $a_j^{(2)}$, что

$$1=a_1^{(1)}\oplus\ldots\oplus a_{i-1}^{(1)}\oplus a_j^{(2)}\oplus a_{i+1}^{(1)}\oplus\ldots\oplus a_{m_1}^{(1)}$$

(см. [3], [6]). В случае полных Д. р., подчиненных нек-рым дополнительным требованиям, теоремы о независимых элементах и прямых разложениях можно распространить на бесконечные множества (см. [4], [5]). Исследовались Д. р. с дополнениями, то есть Д. р. с 0 и 1, для каждого элемента x к-рых существует хотя бы один такой элемент y (наз. дополнением элемента x), что $x+y=1$, $xy=0$. Д. р. с дополнениями, обладающая композиционным рядом, изоморфна Д. р. всех подпространств конечномерного линейного пространства над нек-рым телом. Полная Д. р. L с дополнениями изоморфна Д. р. всех подпространств линейного пространства (не обязательно конечномерного) над нек-рым телом тогда и только тогда, когда: а) если $0\neq a\in L$, то найдется *атом* $p\leqslant a$; б) если p — атом и $p\leqslant\sup A$, где $A\subseteq L$, то $p\leqslant\sup F$ для нек-рого конечного множества $F\subseteq A$; в) если p, q — атомы, то найдется атом $r\leqslant p+q$, причем $r\neq p$, q; г) существует не менее трех независимых атомов. Условие г) можно заменить требованием справедливости *Дезарга предложения* (см. [2]). Дальнейшее обобщение этого результата, приводящее к регулярным кольцам (см. [7], [5]), смыкается с теорией алгебр Неймана. Для Д. р. с композиционным рядом наличие дополнений равносильно представимости единицы в виде суммы атомов.

Д. р. названы в честь Р. Дедекинда, к-рый первым сформулировал модулярный закон и установил ряд его следствий [1].

Лит.: [1] Dedekind R., Gesammelte mathematische Werke, Bd 2, Braunschweig, 1931, S. 236—71; [2] Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, пер. с англ., М., 1955; [3] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [4] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [5] Скорняков Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [6] его же, Элементы теории структур, М., 1970; [7] Neumann J. von, Continuous geometry, N. Y., 1960. *Л. А. Скорняков.*

ДЕДЕКИНДОВО КОЛЬЦО — ассоциативное коммутативное кольцо R с единицей, не содержащее делителей нуля (т. е. коммутативная область целостности), в к-ром каждый собственный идеал представим в виде произведения простых идеалов (идеал P кольца R наз. простым, если факторкольцо R/P не содержит делителей нуля). Свое название эти кольца получили по имени Р. Дедекинда (R. Dedekind), к-рый в числе первых изучал такие кольца в 70-х гг. 19 в.

Каждая область главных идеалов является Д. к. Если R есть Д. к., L — конечное алгебраич. расширение его поля частных, то целое замыкание R' кольца R в L (т. е. совокупность элементов из L, являющихся корнями уравнений вида $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, $a_i\in R$) снова будет Д. к. В частности, дедекиндовыми являются кольцо целых алгебраич. чисел и максимальные порядки полей алгебраич. чисел, т. е. целые замыкания кольца целых чисел в конечных алгебраич. расширениях поля рациональных чисел.

В Д. к. R каждый собственный идеал обладает единственным представлением в виде произведения простых идеалов. Эта теорема возникла из задачи о разложении элементов на простые множители в максимальных порядках полей алгебраич. чисел. Такое разложение, вообще говоря, не единственно.

Кольцо R дедекиндово тогда и только тогда, когда полугруппа *дробных идеалов* этого кольца является группой. Каждый дробный идеал Д. к. R обладает единственным представлением в виде произведения степеней (положительных или отрицательных) простых идеалов кольца R. Д. к. обладает следующей характеризацией: коммутативная область целостности является Д. к. тогда и только тогда, когда R есть нётерово кольцо, каждый собственный простой идеал кольца R максимален и R целозамкнуто, т. е. совпадает со своим целым замыканием в поле частных. Другими словами, Д. к. есть нётерово нормальное кольцо размерности один по Круллю. Для Д. к. R выполняется так наз. «китайская теорема об остатках»: для данного конечного набора идеалов I_i и элементов x_i кольца R, $i=1, 2, \ldots, n$, система сравнений $x \equiv x_i (\mathrm{mod}\, I_i)$ имеет решение $x \in R$ тогда и только тогда, когда $x_i \equiv x_j (\mathrm{mod} I_i + I_j)$ для $i \neq j$. Д. к. R можно охарактеризовать также как *Крулля кольцо* размерности один. Каждое Д. к. является регулярным коммутативным кольцом и все его локализации по максимальным идеалам есть *дискретного нормирования кольцо*. Полугруппа ненулевых идеалов Д. к. R изоморфна полугруппе P *дивизоров* этого кольца.

Лит.: [1] Зариский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [3] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, М., 2 изд., 1972; [4] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

Л. А. Бокуть.

ДЕДЕКИНДОВО СЕЧЕНИЕ, сечение,— разбиение множества действительных (или только одних рациональных) чисел R на два такие непустые множества A и B, в сумме дающие R, что для каждого $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a<b$. Д. с. обозначается символом $A|B$. Множество A наз. нижним, а множество B — верхним классом сечения $A|B$. Д. с. множества рациональных чисел применяются для построения теории *действительных чисел*. В терминах Д. с. действительных чисел формулируется понятие непрерывности числовой прямой. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДЕДУКЦИИ ТЕОРЕМА — общее название ряда теорем, позволяющих устанавливать доказуемость импликации $A \supset B$ в случае, когда дан логический вывод формулы B из формулы A. В простейшем случае классического, интуиционистского и т. п. исчислений высказываний Д. т. утверждает: если $\Gamma, A \vdash B$ (из допущений Γ, A выводимо B), то

$$\Gamma \vdash (A \supset B) \qquad (*)$$

(Γ может быть пусто). При наличии кванторов аналогичное утверждение неверно:

$$A\ (x) \vdash \forall x A\ (x),$$

но не

$$\vdash A\ (x) \supset \forall x A\ (x).$$

Одна из формулировок Д. т. для традиционных исчислений предикатов (классического, интуиционистского и т. п.): если $\Gamma, A \vdash B$, то

$$\Gamma \vdash (\forall A \supset B),$$

где $\forall A$ означает результат приписывания $\forall$ -кванторов (см. *Квантор*) по всем свободным переменным формулы A. В частности, если A — замкнутая формула, Д. т. принимает форму (*). Эта формулировка Д. т. дает возможность сводить поиск вывода в аксиоматич. теориях к поиску вывода в исчислении предикатов: формула B выводима из аксиом $A_1, \ldots, A_n$ тогда и

только тогда, когда в исчислении предикатов выводима формула
$$\forall A_1 \supset (\forall A_2 \supset \ldots \supset (\forall A_n \supset B)\ldots).$$

Похожим образом формулируется Д. т. для логик, где имеются связки, «похожие» на кванторы. Так, для *модальных логик* $S4$ и $S5$ Д. т. имеет вид: если $\Gamma,\ A \vdash B$, то
$$\Gamma \vdash (\Box A \supset B).$$

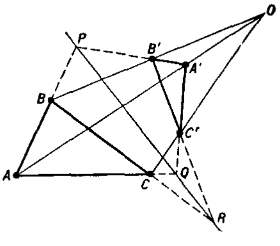
Более тонкие формулы Д. т. получаются, если вводить $\forall$-кванторы не по всем свободным переменным, а лишь по тем, к-рые связываются кванторами в процессе вывода. Говорят, что переменная y варьируется для формулы A в данном выводе, если y входит свободно в A и в рассматриваемом выводе имеется применение правила введения $\forall$ в заключение импликации (или введения $\exists$ в посылку), при к-ром вводится квантор по y, причем посылка этого применения зависит в данном выводе от A. Теперь Д. т. для традиционных исчислений предикатов уточняется так: если $\Gamma,\ A \vdash B$, то
$$\Gamma \vdash (\forall y_1 \ldots y_n A \supset B),$$
где $y_1, \ldots, y_n$ — полный список переменных, к-рые варьируются для A в данном выводе. В частности, если никакая свободная переменная из A не варьируется, то Д. т. принимает форму (*). При формулировке соответствующего уточнения Д. т. для модальных логик следует считать, что варьирование происходит в правилах введения $\Box$ в заключение импликации и $\Diamond$ — в посылку.

При установлении Д. т. для исчислений релевантной импликации (т. е. для систем, согласованных с истолкованием $A \supset B$ как «B выводимо с существенным использованием допущения A») приходится либо модифицировать само понятие вывода, либо считать, что варьирование происходит при всяком использовании «постороннего» допущения; напр., при переходе от пары $A,\ \Gamma \vdash C,\ \Gamma \vdash D$ к $A,\ \Gamma \vdash (C \& D)$ варьируется формула A, т. к. она не входит во второй член пары.

Если A не варьируется в данном выводе, то Д. т. принимает форму (*), а если A варьируется, то Д. т. принимает вид: если $A,\ \Gamma \vdash B$, то
$$\Gamma \vdash ((A \ \& \ t) \supset B),$$
где t — константа «истина» (или конъюнкция формул $(p \supset p)$ для всех пропозициональных переменных p, выходящих в $A,\ \Gamma,\ B$).

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Карри Х. Б., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969. *Г. Е. Минц.*

ДЕЗАРГА ПРЕДЛОЖЕНИЕ, теорема Дезарга: если соответствующие стороны двух треугольников ABC и $A'B'C'$ пересекаются в точках P, Q, R, лежащих на одной прямой, то прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке; обратно: если прямые, соединяющие соответствующие вершины треугольников ABC и $A'B'C'$, сходятся в одной точке, то соответствующие стороны этих треугольников пересекаются в точках, лежащих на одной прямой. Обратное утверждение для треугольников, лежащих в одной плоскости, двойственно прямому по малому принципу двойственности. В обоих случаях точки и прямые составляют конфигурацию Дезарга (конфигурацию 10_3), расположенную в нек-ром двумерном или трехмерном проективном пространстве.



Если оба треугольника принадлежат одной *проективной плоскости*, то Д. п. нельзя доказать лишь на основе аксиом инцидентности плоскости (см. *Недезаргова геометрия*), однако оно справедливо на любой проективной плоскости, к-рую можно вложить в проективное пространство большей размерности. Пространственный случай Д. п. следует из аксиом инцидентности пространства.

Выполнение Д. п. необходимо и достаточно для построения проективной алгебры точек проективной прямой и введения синтетическим путем *проективных координат*. Д. п. установлено Ж. Дезаргом [1]. *М. И. Войцеховский.*

В теоретико-структурных терминах (см. *Решетка*) Д. п. может быть сформулировано в виде тождества (см. [4])

$$[(x+z)(y+u)+(x+u)(y+z)](x+y)\leqslant$$
$$\leqslant[(y+x)(z+u)+(y+u)(z+x)](y+z)+$$
$$+[(z+y)(x+u)+(z+u)(x+y)](z+x).$$

Л. А. Скорняков.

Лит.: [1] Bosse A., Manière universelle de m-r Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied comme le géométral, P., 1648; [2] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.—Л., 1948; [3] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971; [4] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952.

ДЕЗАРГОВА ГЕОМЕТРИЯ, геометрия дезаргова пространства, — *геодезических геометрия*, в к-рой роль геодезических играют обыкновенные прямые. Точнее, дезарговым пространством R наз. G-пространство, допускающее такое топологич. отображение в проективное пространство P^n, что каждая геодезическая R отображается в прямую P^n.

Для того чтобы R было дезарговым пространством, необходимо и достаточно, чтобы:

1) геодезическая, проходящая через две различные точки, была единственна;

2) при $\dim R=2$ выполнялось *Дезарга предложение*, и обратное ему, если только существуют все пересечения, имеющиеся там;

3) при $\dim R>2$ любые три точки R лежали в одной плоскости.

При этом R, отображенное в P^n, либо покрывает все P^n, и в этом случае геодезические R являются окружностями одной и той же длины, либо R не содержит ни одной точки нек-рой гиперплоскости и может рассматриваться как открытая выпуклая область аффинного пространства.

В римановом случае единственными Д. г. являются евклидова, гиперболич. и эллиптич. геометрии, т.е. из дезаргова характера пространства следуют весьма сильные свойства подвижности (теорема Бельтрами). Это — пример поразительной теоремы римановой геометрии, не имеющей аналога в более общих пространствах. При достаточно сильных условиях дифференцируемости был дан метод построения Д. г., однако окончательное и общее решение этой, так наз. 4-й проблемы Гильберта о метризации проективного пространства или его выпуклых подобластей без какого-то ни было предположения регулярности, дал А. В. Погорелов [2]. Другой пример Д. г., ценный для изучения пространств неположительной кривизны, доставляет *Гильберта геометрия.*

Важным примером неримановых Д. г. является *Минковского геометрия*, к-рую можно рассматривать как прототип всех неримановых геометрий (в т. ч. *финслеровой геометрии*).

Лит.: [1] Буземан Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962; [2] Погорелов А. В., Четвертая проблема Гильберта, М., 1974. *М. И. Войцеховский.*

ДЕЗОРИЕНТИРУЮЩИЙ ПУТЬ — замкнутый путь в многообразии, обладающий тем свойством, что при его обходе локальная ориентация меняет знак (см. *Ориентация* многообразия). Д. п. имеется только в неориентируемом многообразии M, причем однозначно определен гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1 M$ на $\mathbb{Z}_2$ с ядром, состоящим из классов петель, не являющихся Д. п.

А. В. Чернавский.

ДЕЙСТВИЕ — функционал, выражаемый определенным интегралом от функции, стационарные значения к-рого определяют действительное движение механич. системы под действием заданных активных сил в классе кинематически возможных движений, удовлетворяющих определенным условиям, между нек-рыми двумя конечными положениями P_0 и P_1 в пространстве.

Различают Д. по Гамильтону, Лагранжу и Якоби, фигурирующие в соответствующих принципах стационарного действия.

Д. по Гамильтону:

$$\int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt,$$

определено в классе кинематически возможных движений голономной системы, для к-рых начальное и конечное положения системы и время движения между ними одинаковы с таковыми для действительного движения.

Д. по Лагранжу:

$$\int_{t_0}^{t} 2T\, dt,$$

Д. по Якоби:

$$\int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(U+h)}\, ds,$$

$$ds^2 = \sum\nolimits_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\, dq_i\, dq_j,$$

определены в классе кинематически возможных движений голономной консервативной системы, для к-рых начальное и конечное положения системы и постоянная энергия h одинаковы с таковыми для действительного движения. Здесь T — кинетич. энергия системы, причем для консервативной системы

$$T = \frac{1}{2} \sum\nolimits_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где $\dot{q}_i$ — обобщенные лагранжевы координаты, $U(q)$ силовая функция активных сил.

Подробнее см. *Вариационные принципы классической механики*, а также *Гамильтона — Остроградского принцип*, *Лагранжа принцип*, *Якоби принцип*.

В. В. Румянцев.

ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ на многообразии — наиболее изученный случай общего понятия действия группы на пространстве. Топологич. группа G действует на пространстве X, если каждому $g \in G$ поставлен в соответствие гомеоморфизм φ_g пространства X (на себя), удовлетворяющий условиям: 1) $\varphi_g \cdot \varphi_h = \varphi_{gh}$; 2) для единицы $e \in G$ отображение φ_e есть тождественный гомеоморфизм; 3) отображение φ: $G \times X \to X$, $\varphi(g, x) = \varphi_g(x)$ непрерывно. В случае, когда X и G обладают дополнительными структурами, особый интерес представляют Д. г. G, учитывающие эти структуры; напр., если X — дифференцируемое многообразие, G — группа Ли, то отображение φ обычно предполагается дифференцируемым.

Множество $\{\varphi_g(x_0)\}_{g \in G}$ наз. орбитой (траекторией) точки $x_0 \in X$ относительно группы G; пространство орбит обозначается X/G и наз. также факторпространством пространства X по группе G. Важным примером является случай, когда X есть группа Ли, а G — ее подгруппа; тогда X/G есть соответствующее *однородное пространство*. Классические примеры: сферы $S^{n-1}=O(n)/O(n-1)$, *Грассмана многообразия* $O(n)/O(m)\times O(n-m)$, *Штифеля многообразия* $O(n)/O(m)$. Здесь пространство орбит есть многообразие. Обычно же это не так, если действие группы не является свободным, напр., если множество X^G неподвижных точек непусто. При этом под свободным действием группы понимается действие, при к-ром из $gx=x$, $x\in X$, $g\in G$ следует $g=e$. В противоположность этому, X^G будет многообразием, если X — дифференцируемое многообразие, а действие группы G дифференцируемо; это утверждение верно и для когомологич. многообразий над $\mathbb{Z}_p$ для $G=\mathbb{Z}_p$ (теорема Смита).

Если G — некомпактная группа, то пространство X/G, вообще говоря, неотделимо, и поэтому интерес представляет индивидуальное изучение траекторий и их взаимного расположения. Классическим является пример группы $G=\mathbb{R}$ действительных чисел, действующей дифференцируемым образом на дифференцируемом многообразии X. Изучение таких динамич. систем, эквивалентных заданию систем обыкновенных дифференциальных уравнений в локальных координатах, проводится в основном аналитич. методами.

В случае компактной группы G существует предположение, что если X — многообразие, а каждое $g\in G$, $g\neq e$ действует на X нетривиально (т. е. не является действием по закону $(g, x)\to x$), то G есть группа Ли (см. [8]). Поэтому интерес к случаю действия компактной группы концентрируется вокруг действия группы Ли.

Пусть G — компактная группа Ли, X — компактное когомологич. многообразие. Типичными являются следующие результаты. В X существует конечное число типов орбит, окрестности орбиты устроены как прямое произведение (теорема о срезе), имеют место представляющие интерес связи между когомологич. строением пространств X, X/G, X^G.

Если G — компактная группа Ли, X — дифференцируемое многообразие, а действие

$$\varphi: G\times X\to X$$

дифференцируемо, то естественным является отношение эквивалентности: $(X, \varphi)\sim(X', \varphi')\Longleftrightarrow$ найдутся такие (X'', φ''), что граница $\partial X''$ имеет вид $\partial X''=X\cup X'$ и что $\varphi''|X=\varphi$, $\varphi''|X'=\varphi'$. В случае свободного действия группы G классы эквивалентности находятся во взаимно однозначном соответствии с *бордизмами* $\Omega_*(B_G)$ классифицирующего пространства B_G.

Результаты последних лет (сер. 70-х гг.) концентрируются в основном вокруг: 1) определения типов орбит при различных дополнительных предположениях о группе G и многообразии X (см., напр., [6]), 2) классификации Д. г., 3) отыскания связей между глобальными инвариантами многообразия X и локальными свойствами Д. г. G в окрестности неподвижных точек X^G. В решении этих вопросов важную роль играют методы современной дифференциальной топологии (напр., перестройки), аналог K-теории для векторных G-расслоений — K_G-теория [1], теории бордизмов и кобордизмов [3], аналитич. метод исследования Д. г. G, основанный на изучении псевдодифференциальных операторов в G-расслоениях (см. [2], [7]).

Лит.: [1] Атья М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [2] Атья М., Зингер И., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, № 1, с. 127—82; [3] Бухштабер В. М., Мищенко А. С., Новиков С. П., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 2, с. 131—54; [4] Коннер П., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [5] Bredon G., Introduction to Compact Transformation Groups, N. Y., 1972; [6] Wu Yi Hsiang, Cohomology Theory of Topological Transformation Groups, N. Y., 1975; [7] Zagier don B., Equivariant Pontrjagin Classes and Applications to orbit Spaces, 1972; [8] Proceedings of the Conference in Transformation Groups, N. Y. — Hdlb. — L., 1968; [9] Proceedings of the Second Conference on Compact Transformation Groups, B.—Hdlb.—N. Y., 1972.

А. В. Зарелуа.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, у к-рой как множество ее определения, так и множество ее значений являются нек-рыми подмножествами множества действительных чисел. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — множество $A=X(\mathbb{R})$ действительных точек алгебраич. многообразия X, определенного над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Д. а. м. наз. неособым, если X — неособое алгебраич. многообразие. В этом случае A является гладким многообразием, а его размерность $\dim A$ равна размерности комплексного многообразия $\mathbb{C}A=X(\mathbb{C})$, называемого комплексификацией многообразия A.

Наиболее изучены неособые регулярные полные пересечения, т. е. многообразия X в проективном пространстве $\mathbb{R}P^q$, являющиеся неособыми регулярными пересечениями гиперповерхностей $p_i(z)=0, 1\leqslant i\leqslant s$, где $p_i(z)$ — однородный действительный многочлен от q переменных степени m_i. В этом случае матрица

$$\left\|\frac{\partial p_i}{\partial z_j}\right\|$$

имеет ранг s в каждой точке $z\in\mathbb{C}A$; $\dim A=n=q-s$.

Пусть B обозначает Д. а. м., определяемое усеченной системой

$$p_i(z)=0,\ 1\leqslant i\leqslant s-1,\ p(z)=p_s(z) \text{ и } m=m_s.$$

Примеры регулярных полных пересечений:

1) Плоская действительная алгебраич. кривая; при этом $q=2$, $s=1$, $\mathbb{C}B=\mathbb{C}P^2$, $B=\mathbb{R}P^2$.

2) Действительная алгебраич. гиперповерхность; при этом $s=1$, $\mathbb{C}B=\mathbb{C}P^q$, $B=\mathbb{R}P^q$. В частности, при $q=3$ получается действительная алгебраич. поверхность.

3) Действительная алгебраическая пространственная кривая; при этом $q=3$, $s=2$. Поверхность B задается уравнением $p_1(z)=0$, а кривая A высекается на B поверхностью $p_2(z)=0$.

Плоская действительная алгебраич. кривая A порядка m_1 состоит в плоскости $\mathbb{R}P^2$ из конечного числа компонент, диффеоморфных окружности. При m_1 четном все они вложены в $\mathbb{R}P^2$ двусторонне, а при m_1 нечетном одна компонента вложена односторонне, а остальные — двусторонне. Двусторонне вложенная компонента кривой A наз. овалом кривой A. Овал, лежащий внутри нечетного числа других овалов кривой A, наз. нечетным, остальные овалы наз. четными.

Число компонент плоской действительной алгебраич. кривой порядка m_1 не превосходит $\frac{1}{2}(m_1-1)(m_1-2)+1$ (теорема Гарнака), [1]. Для каждого m_1 существует плоская действительная алгебраич. кривая с этим наибольшим числом компонент — M-кривая (о способах построения M-кривых см. [1], [2], [3], об обобщении этих результатов на пространственные кривые см. [2]).

Д. Гильберт (D. Hilbert) в 1900 поставил задачу изучения топологии Д. а.м., а также вложений Д. а. м. в $\mathbb{R}P^q$ и одного Д. а. м. в другое Д. а. м. (16-я проблема Гильберта). Он указал также трудные частные задачи: изучить взаимное расположение овалов кривой 6-го порядка, топологию и вложение в $\mathbb{R}P^3$ действительной алгебраич. поверхности 4-го порядка. Эти частные задачи решены (см. [12], [13]).

Для плоской действительной алгебраич. кривой A четного порядка m_1 выполняется точное неравенство

$$-\frac{1}{8}(3m_1^2-6m_1)\leqslant P-N\leqslant\frac{1}{8}(3m_1^2-6m_1)+1,$$

где P — число четных овалов кривой A, а N — число ее нечетных овалов (теорема Петровского).

Если m_1 нечетно, то аналогичное неравенство выполнено для $A \bigcup L$, где L — прямая в общем положении [4]. При обобщении этих результатов на случай действительной алгебраич. гиперповерхности четного порядка роль разности $P-N$ играет эйлерова характеристика $\chi(B_+)$, где $B_+=\{z \in B | p(z) \geqslant 0\}$, если же q нечетно, то роль $P-N$ играет $\chi(A)$. Так, для действительной алгебраич. гиперповерхности A четного порядка m_1

$$|\chi(B_+)| \leqslant \frac{1}{2}(m_1-1)^q - s(q;\ m_1) + \frac{1}{2},$$

где $s(q;\ m_1)$ — число членов многочлена

$$\prod_{i=1}^{q}\left(1+x_i+\ldots+x_i^{m-2}\right),$$

степень которых не превосходит $^1/_2(qm_1-2q-m_1)$; при нечетном q и любом m_1

$$|\chi(A)| \leqslant (m_1-1)^q - 2s(q;\ m_1) + 1$$

(см. [5]). Для действительной алгебраической пространственной кривой (в $\mathbb{R}P^3$) при четном m_1 выполняется неравенство

$$|\chi(B_+)| \leqslant \frac{1}{3} m_1^3 + \frac{3}{8} m_1 m_2^2 + \frac{1}{4} m_1^2 m_2 -$$

$$- m_1^2 - m_1 m_2 + \frac{7}{6} m_1 + \frac{|\chi(B)|}{2}$$

(в случае $m_1=2$ эта оценка точная) (см. [6]). Имеются обобщения теорем Петровского на произвольные Д. а. м. (см. [10]).

Для плоской действительной алгебраич. M-кривой четного порядка m_1 выполняется сравнение

$$P-N \equiv \left(\frac{m_1}{2}\right)^2 \bmod 8$$

(см. [8], [9], [13]). При доказательстве этого сравнения (см. [8], [9]) были применены для изучения Д. а. м. методы дифференциальной топологии, в форме стимулирующей дальнейшие исследования. Пусть плоская действительная алгебраич. кривая A имеет четный порядок $m=2k$, знак перед $p(z)$ выбран так, что B_+ ориентируемо, а P_+, P_0, P_- обозначают соответственно число овалов кривой A, ограничивающих внешним образом компоненту множества B_+ с положительной, нулевой и отрицательной эйлеровыми характеристиками. Аналогично, N_+, N_0, N_- — числа таких же нечетных овалов для $B_-=\{z \in B | p(z) \leqslant 0\}$. Тогда (см. [8], [13])

$$P_- + P_0 \leqslant \frac{1}{2}(k-1)(k-2) + E(k),$$

$$N_- + N_0 \leqslant \frac{1}{2}(k-1)(k-2),$$

$$P_- \geqslant N - \frac{3}{2}k(k-1),$$

$$N_- \geqslant P - \frac{3}{2}k(k-1),$$

где

$$E(k) = \frac{1}{2}(1+(-1)^k).$$

Для произвольного Д. а. м. в q-мерном проективном пространстве выполнено неравенство

$$\dim H_*(A;\ \mathbb{Z}_2) \leqslant \dim H_*(\mathbb{C}A;\ \mathbb{Z}_2),$$

где $H_*(A;\ \mathbb{Z}_2)=\Sigma H_i(A,\ \mathbb{Z}_2)$ — пространство гомологий многообразия A с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ (см. [9]). Это неравенство является обобщением теоремы Гарнака. Если

$$\dim H_*(\mathbb{C}A;\ \mathbb{Z}_2) - \dim H_*(A,\ \mathbb{Z}_2) = 2t$$

(t всегда целое), то A наз. $(M-t)$-многообразием. При $t=0$ A есть M-многообразие.

Доказаны следующие сравнения:

A) Для M-многообразия A при четном n

$$\chi(A) \equiv \sigma(\mathbb{C}A) \bmod 16,$$

где $\sigma(\mathbb{C}A)$ — сигнатура многообразия $\mathbb{C}A$ (см. [9]).

B) Для $(M-1)$-многообразия A при четном n

$$\chi(A) \equiv \sigma(\mathbb{C}A) \pm 2 \bmod 16$$

(см. обзор [13]).

C) В случае регулярного полного пересечения, если n четно, A есть $(M-1)$-многообразие и гомоморфизм включения

$$i_*: H_{\frac{n}{2}}(A, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow N_{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}P^q; \mathbb{Z}_2)$$

нулевой, то

$$d = m_1 m_2 \ldots m_s \equiv 2 \bmod 4$$

и

$$\chi(A) \equiv -\sigma(\mathbb{C}A) + \begin{cases} 2 \bmod 16, \text{ при } d \equiv 2 \bmod 8, \\ -2 \bmod 16, \text{ при } d \equiv -2 \bmod 8. \end{cases}$$

В этом же случае, если n четно, A есть $(M-2)$-многообразие и i_* — нулевой, то

$$\begin{aligned} &\text{при } d \equiv 0 \bmod 8, \ \chi(A) \equiv \pm\sigma(\mathbb{C}A) \bmod 16, \\ &\text{при } d \equiv 2 \bmod 8, \ \chi(A) \equiv -\sigma(\mathbb{C}A) + 4 \bmod 16, \\ &\qquad\text{или } \chi(A) \equiv \pm\sigma(\mathbb{C}A) \bmod 16, \\ &\text{при } d - 2 \bmod 8, \ \chi(A) \equiv -\sigma(\mathbb{C}A) - 4 \bmod 16, \\ &\qquad\text{или } \chi(A) \equiv \pm\sigma(\mathbb{C}A) \bmod 16 \end{aligned}$$

(см. [11]).

В частности, для действительной алгебраич. поверхности A порядка m_1

$$\dim H_*(\mathbb{C}A; \mathbb{Z}_2) = m_1^3 - 4m_1^2 + 6m_1,$$

если A есть M-поверхность, то

$$\chi(A) \equiv \frac{1}{3}(4m_1 - m_1^3) \bmod 16;$$

если A есть $(M-1)$-поверхность, то

$$\chi(A) \equiv \frac{1}{3}(4m_1 - m_1^3) \pm 2 \bmod 16;$$

если A есть $(M-1)$-поверхность и стягивается в $\mathbb{R}P^3$ в точку, то $m_1 = 2 \bmod 4$ и

$$\chi(A) = \begin{cases} 2 \bmod 16 \text{ при } m_1 \equiv 2 \bmod 8, \\ -2 \bmod 16 \text{ при } m_1 \equiv -2 \bmod 8. \end{cases}$$

Если A есть $(M-2)$-поверхность и стягивается в $\mathbb{R}P^3$ в точку, то

$$\chi(A) \equiv \begin{cases} 0 \quad \bmod 16, \text{ при } m_1 \equiv 0 \bmod 8, \\ 0{,}4 \quad \bmod 16, \text{ при } m_1 \equiv 2 \bmod 8, \\ 0, -4 \bmod 16, \text{ при } m_1 \equiv -2 \bmod 8. \end{cases}$$

Доказаны также нек-рые сравнения при нечетном n (см. [9], [13]). В частности, для плоской действительной алгебраич. кривой A, являющейся $(M-1)$-кривой четного порядка m_1:

$$P - N \equiv \left(\frac{m_1}{2}\right)^2 \pm 1 \bmod 8.$$

Имеются некоторые результаты о Д. а. м. с особенностями (см. обзор [13]). Интересный подход к изучению Д. а. м. предложен в [14].

Лит.: [1] Harnack A., «Math. Ann.», 1876, Bd 10, S. 189—99; [2] Hilbert D., там же, 1891, Bd 38, S. 115—38; [3] его же, «Arch. Math. Phys.» (3), 1901, Bd 1, S. 213—37; [4] Петровский И. Г., «Ann. Math.», 1938, v. 39, № 1, p. 189—209; [5] Олейник О. А., Петровский И. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1949, т. 13, с. 389—402; [6] Олейник О. А., «Матем. сб.», 1951, т. 29, с. 133—56; [7] Проблемы Гильберта, М., 1969; [8] Арнольд В. И., «Функциональный анализ», 1971, т. 5, № 3, с. 1—9; [9] Рохлин В. А., там же, 1972, т. 6, № 4, с. 58—64; 1973, т. 7, № 2, с. 91—92; [10] Харламов В. М., «Функциональный анализ», 1974; т. 8, № 2, с. 50—56; 1975, т. 9, № 3, с. 93—94; [11] его же, там же, 1975, т. 9, № 2, с. 51—60; [12] его же, там же, 1976, т. 10, № 4, с. 55—68; [13] Гудков Д. А., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 4, с. 3—79; [14] Сулливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975. *Д. А. Гудков.*

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО, вещественное число, — положительное число, отрицательное число или нуль. Понятие Д. ч. возникло путем расширения понятия *рационального числа.* Необходимость этого расширения обусловлена как практическим использованием математики при выражении значения любой величины с помощью вполне определенного числа, так и внутренним развитием самой математики, в частности стремлением расширить область применимости ряда операций над числами (извлечение корня, вычисление логарифмов, решение уравнений и т. п.). К общему понятию Д. ч. подошли еще древнегреческие математики в своей теории несоизмеримых отрезков, однако как самостоятельное понятие оно было сформулировано впервые лишь в 17 в. И. Ньютоном (I. Newton) в «Arithmetica Universales»: «Число есть не столько совокупность нескольких единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой, однородной с ней принятой за единицу». Строгие теории Д. ч. были построены в конце 19 в. Г. Кантором (G. Cantor), Р. Дедекиндом (R. Dedekind) и К. Вейерштрассом (K. Weierstrass).

Действительные числа образуют совокупность элементов, обладающую следующими свойствами.

I. Свойство упорядоченности. Для любых двух чисел a и b определено соотношение порядка, т. е. два любых Д. ч. a и b удовлетворяют одному и только одному из следующих соотношений: $a<b$, $a=b$ или $a>b$; при этом, если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$ (транзитивность упорядоченности).

II. Свойство операции сложения. Для любой упорядоченной пары чисел a и b определено такое единственное число, наз. их суммой и обозначаемое через $a+b$, что выполняются следующие свойства: II_1) $a+b=b+a$ (коммутативность); II_2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ для любых чисел a, b и c (ассоциативность); II_3) существует такое число, наз. нулем и обозначаемое 0, что $a+0=a$ для любого числа a; II_4) для любого числа a существует такое число, наз. противоположным a и обозначаемое через $-a$, что $a+(-a)=0$; II_5) если $a<b$, то $a+c<b+c$ для любого числа c. Нуль единствен, и для каждого числа единственно противоположное ему число. Для любой упорядоченной пары чисел a и b число $a+(-b)$ наз. разностью чисел a и b и обозначается $a-b$.

III. Свойство операции умножения. Для любой упорядоченной пары чисел a и b определено такое единственное число, наз. их произведением и обозначаемое через ab, что: III_1) $ab=ba$ (коммутативность); III_2) $a(bc)=(ab)c$ для любых чисел a, b и c (ассоциативность); III_3) существует такое число, наз. единицей и обозначаемое через 1, что $a1=a$ для любого числа a; III_4) для любого числа a, не равного нулю, существует такое число, наз. обратным данному и обозначаемое через $1/a$, что $a(1/a)=1$; III_5) если $a<b$ и $c>0$, то $ac<bc$. Эти свойства гарантируют единственность единицы и единственность обратного каждому элементу. Для любой упорядоченной пары чисел a и b, $b\neq0$, число $a(1/b)$ наз. частным от деления a на b и обозначается a/b.

Число $1+1$ обозначается 2, число $2+1$ обозначается 3 и т. д. Эти числа 1, 2, 3... наз. натуральными числами. Числа, бо́льшие нуля, наз. положительными, а числа, меньшие нуля,— отрицательными. Числа 0, ±1, ±2, ... наз. целыми числами (считается, что $+a=a$). Числа вида m/n, где m — целое, а n — натуральное, наз. рациональными числами. Они включают в себя все целые числа. Д. ч., не являющиеся рациональными, наз. иррациональными.

IV. Свойство дистрибутивности умножения относительно сложения. Для любой тройки чисел a, b и c $(a+b)c=ac+bc$.

Совокупность элементов, удовлетворяющих всем перечисленным свойствам, образует линейно *упорядоченное поле*. Д. ч. обладают еще двумя важными свойствами.

V. Архимедово свойство. Каково бы ни было число a, существует такое целое число n, что $n>a$. Совокупность элементов, удовлетворяющих свойствам I — V, образует упорядоченное архимедово поле. Таковым является не только совокупность Д. ч., но и множество рациональных чисел.

Существенным свойством Д. ч. является свойство их непрерывности, к-рым рациональные числа не обладают.

VI. Свойство непрерывности. Для всякой системы вложенных отрезков

$$\{[a_n,\ b_n]\},\ a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

существует хотя бы одно число, к-рое принадлежит всем отрезкам данной системы. Это свойство наз. также принципом вложенных отрезков Кантора. Если длины $b_n - a_n$ вложенных отрезков стремятся к нулю при $n \to \infty$, то существует единственная точка, принадлежащая всем этим отрезкам.

Из перечисленных свойств Д. ч. следуют многие другие; так, из свойств I — V можно получить, что $1>0$, правила действий с рациональными дробями, правила знаков при умножении и делении Д. ч., свойства абсолютной величины Д. ч., правила преобразования равенств и неравенств и т. п. Свойства I — VI полностью описывают свойства множества Д. ч. и только их, иначе говоря, если эти свойства назвать аксиомами, то окажется, что Д. ч. — совокупность элементов, удовлетворяющая аксиомам I — VI. Это означает, что аксиомы I — VI определяют множество Д. ч. с точностью до изоморфизма: если имеются две совокупности X и Y, удовлетворяющие свойствам I — VI, то всегда существует изоморфное относительно упорядоченности и операций сложения и умножения отображение X на Y, т. е. указанное отображение, обозначим его через $x \to y$ (здесь $y \in Y$ является элементом, соответствующим элементу $x \in X$), взаимно однозначно отображает X на Y так, что если

$$x_1 < x_2,\ x_1 \in X,\ x_2 \in X \text{ и } x_1 \longrightarrow y_1,\ x_2 \longrightarrow y_2,$$

то

$$y_1 < y_2,\ x_1 + x_2 \longrightarrow y_1 + y_2,\quad x_1 x_2 \longrightarrow y_1 y_2.$$

Отсюда следует, что множество Д. ч. (в отличие, напр., от множества рациональных чисел) невозможно расширить с сохранением свойств I — V, т. е. не существует множества, в к-ром было бы введено соотношение порядка, операции сложения и умножения, удовлетворяющие свойствам I — V, и к-рое содержало бы подмножество, изоморфное множеству Д. ч., и не совпадало бы с ним. Д. ч. существенно больше, чем рациональных чисел, именно рациональные числа составляют счетное подмножество множества Д. ч., которое само несчетно.

Как рациональные, так и иррациональные числа обладают свойством плотности во множестве всех Д. ч.: каковы бы ни были два Д. ч. a и b, $a<b$, найдутся такое рациональное r, что $a<r<b$, и такое иррациональное ξ, что $a<\xi<b$.

Со свойством непрерывности Д. ч. тесно связано свойство их полноты, состоящее в том, что всякая фундаментальная последовательность Д. ч. является сходящейся. Следует отметить, что множество одних только рациональных чисел уже не обладает свойством полноты: в нем существуют фундаментальные последовательности, не сходящиеся ни к какому рациональному числу. Свойство непрерывности множества Д. ч. (их полнота) связано с их применением для измерения тех или иных непрерывных величин, например для измерения длин геометрических отрезков: если выбрать отрезок единичной длины, то в силу непрерывности множества Д. ч. каждому отрезку сопоставляется определенное положительное Д. ч.— его длина. Образно говоря, непрерывность множества Д. ч. означает, что в нем нет «пустых мест». Из непрерывности множества Д. ч. следует, что из всякого положительного числа можно извлечь корень n-й степени (n — натуральное число) и что всякое положительное число имеет логарифм по любому основанию $a>0$, $a\neq 1$.

Свойство непрерывности Д. ч. можно сформулировать иначе.

VI′. Всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань (см. *Верхняя и нижняя грани*).

Можно использовать также понятие сечения $A|B$ в области Д. ч. (см. *Дедекиндово сечение*). Говорят, что сечение $A|B$ производится числом α, если $a\leqslant\alpha\leqslant b$ для всех $a\in A$, $b\in B$ (при этом либо $\alpha\in A$, либо $\alpha\in B$). Всякое число производит сечение.

Свойство непрерывности, наз. **непрерывностью Д. ч. по Дедекинду**, состоит в справедливости обратного утверждения.

VI″. Всякое сечение Д. ч. производится нек-рым числом. Такое число единственно и является либо наибольшим в нижнем классе, либо наименьшим в верхнем.

Каждое из утверждений VI, VI′ и VI″ равносильно каждому из остальных в том смысле, что из каждого из них, принятого за аксиому (и остальных свойств I—V), вытекают два других. Более того, как из свойства VI′, так и из свойства VI″ (и свойств I—IV) вытекает не только VI, но и архимедово свойство V. Определение Д. ч. как совокупности элементов, обладающих свойствами I—VI, является аксиоматич. построением теории Д. ч. Существует несколько методов построения этой теории на основе рациональных чисел.

Первая такая теория была построена Р. Дедекиндом на основе понятия **сечения** $R_1|R_2$ в области рациональных чисел. Если для данного сечения $R_1|R_2$ рациональных чисел в R_1 есть наибольшее рациональное число или в R_2 наименьшее, то говорят, что сечение $R_1|R_2$ производится этим числом. Всякое рациональное число производит сечение. Сечение, у к-рого в нижнем классе нет наибольшего, а в верхнем нет наименьшего, наз. **иррациональным числом**. Рациональные и иррациональные числа наз. **действительными числами**, при этом для единообразия рациональные числа рассматриваются как сечения, к-рые они производят.

Пусть $x=R_1|R_2$ и $x'=R_1'|R_2'$. Д. ч. x наз. меньшим Д. ч. x' (или, что то же самое, x' наз. большим x), если $R_1\subset R_1'$, $R_1\neq R_2$. Обычным образом вводятся понятия положительных, отрицательных Д. ч. (см. выше) и абсолютной величины $|x|$ Д. ч. x. Суммой Д. ч. x и x' наз. такое число $x+x'$, что для всех $r_1\in R_1$, $r_1'\in R_1'$, $r_2\in R_2$, $r_2'\in R_2'$ выполняются неравенства

$$r_1+r_1'\leqslant x+x'\leqslant r_2+r_2'.$$

Произведением положительных Д. ч. x и x' наз. такое число xx', что для всех положительных r_1, r_1', r_2, r_2' выполняются неравенства $r_1r_1'\leqslant xx'\leqslant r_2r_2'$. Для произвольных Д. ч. x и x', не равных нулю, их произведение определяется как Д. ч., абсолютная величина к-рого равна $|x||x'|$ и к-рое положительно, если x и x' одного знака, и отрицательно, если x и x' разных знаков. Наконец, для любого Д. ч. x полагается $0x=x0=0$.

Сумма и произведение Д. ч. всегда существуют, единственны и вся совокупность таким образом определенных Д. ч. с введенным в них отношением порядка и операциями сложения и умножения обладает свойствами I — VI.

Другая теория была построена Г. Кантором с помощью понятия фундаментальной последовательности рациональных чисел, т. е. такой последовательности $\{r_n\}$ рациональных чисел, что для любого рационального числа $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ и $m\geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|r_n-r_m|<\varepsilon$. Последовательность $\{r_n\}$ рациональных чисел наз. нульпоследовательностью, если для любого рационального $\varepsilon>0$ найдется такой номер n_ε, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство $|r_n|<\varepsilon$. Две фундаментальные последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$ и $\{r_n'\}$ наз. эквивалентными, если последовательность $\{r_n-r_n'\}$ является нульпоследовательностью. Это определение эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, и потому все множество фундаментальных последовательностей рациональных чисел распадается на классы эквивалентности. Совокупность всех этих классов эквивалентности и наз. в этом случае множеством действительных чисел. В силу этого определения, всякое Д. ч. представляет собой класс эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Каждая из этих последовательностей наз. представителем данного Д. ч. Фундаментальная последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ наз. положительной (соответственно отрицательной), если существует такое рациональное число $r>0$, что все члены этой последовательности, начиная с нек-рого, больше, чем r (соответственно, меньше, чем r). Всякая фундаментальная последовательность рациональных чисел является либо нульпоследовательностью, либо положительной, либо отрицательной. Если фундаментальная последовательность рациональных чисел положительна (отрицательна), то и любая ей эквивалентная фундаментальная последовательность рациональных чисел также положительна (отрицательна). Д. ч. наз. положительным (отрицательным), если какой-то, а, следовательно, и любой его представитель положителен (отрицателен). Д. ч. наз. нулем, если нек-рый, а следовательно, и любой его представитель является нульпоследовательностью. Каждое Д. ч. либо положительно, либо отрицательно, либо нуль. Для того, чтобы сложить или умножить два Д. ч. x и x', надо сложить, соответственно умножить, два любых их представителя $\{r_n\}\in x$, $\{r_n'\}\in x'$, тогда получатся снова фундаментальные последовательности рациональных чисел $\{r_n+r_n'\}$ и $\{r_nr_n'\}$. Классы эквивалентности, представителями к-рых они являются, и наз. в этом случае суммой $x+x'$ и произведением xx' данных чисел. Эти операции определены однозначно, т. е. не зависят от выбора представителей данных чисел. Вычитание и деление Д. ч. определяются как действия, обратные сложению и умножению. Если для двух Д. ч. x и y имеется $x-y>0$, то Д. ч. x наз. большим Д. ч. y. Таким образом определенная совокупность Д. ч. с указанным соотношением порядка и операциями сложения и умножения снова удовлетворяет свойствам I — VI.

Еще одна теория Д. ч. была построена К. Вейерштрассом на основе бесконечных десятичных дробей. В этой теории действительным числом наз. всякая бесконечная десятичная дробь со знаком плюс или минус:

$$\pm \alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$

где α_0 — неотрицательное целое число (целые числа считаются известными), а α_n, $n=1, 2, \ldots,$— одна из цифр 0, 1, 2, ..., 9. При этом бесконечная десятичная дробь с периодом из 9:

$$\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\,(9), \quad \alpha_n \neq 9,$$

считается равной бесконечной десятичной дроби

$$\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\,(\alpha_n+1)\,000 \ldots 0 \ldots$$

(в случае $n=0$ равной бесконечной десятичной дроби (α_0+1), 000 ... 0...). Эта дробь записывается также как конечная десятичная дробь

$$\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots (\alpha_n+1),$$

и говорится, что она имеет n значащих цифр после запятой. Бесконечная десятичная дробь, не имеющая периода (9), наз. допустимой бесконечной десятичной дробью. Очевидно, что всякое Д. ч. уже единственным образом записывается в виде допустимой бесконечной десятичной дроби. Если Д. ч. x записывается с помощью допустимой бесконечной десятичной дробью со знаком плюс (минус) и среди цифр α_n имеется хоть одна отличная от нуля, то x наз. положительным (отрицательным) Д. ч. и пишется $x>0$ $(x<0)$, а если все $\alpha_n=0$, $n=0, 1, 2, \ldots,$ то — нулем: $x=0$. Для числа

$$x = \pm\ \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

число $\alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ наз. его абсолютной величиной и обозначается $|x|$, а число, у к-рого знак плюс (соответственно минус) заменен на минус (на плюс), наз. противоположным данному и обозначается $-x$. Если

$$x = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

— допустимая бесконечная десятичная дробь, то число

$$\underline{x}_n = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n,$$

соответственно число

$$\overline{x}_n = \alpha_0,\ \alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n},$$

наз. нижним, соответственно верхним, десятичным приближением порядка n числа x. Пусть x и y — два положительных числа, записанных с помощью допустимых бесконечных десятичных дробей

$$x = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

и

$$y = \beta_0,\ \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots$$

По определению, полагают $x<y$, если либо $\alpha_0<\beta_0$, либо существует такой номер n_0, $n_0=0, 1, \ldots,$ что $\alpha_k=\beta_k$, $k=0, 1, \ldots, n_0$, а $\alpha_{n_0+1}<\beta_{n_0+1}$. Каждое отрицательное число и нуль считаются меньше всякого положительного числа. Если x и y оба отрицательны и $|y|<|x|$, то полагают, что $x<y$.

Последовательность целых чисел n_k, $k=1, 2, \ldots,$ наз. стабилизирующейся к числу m, если существует такой номер k_0, что $n_k=m$ при всех $k \geqslant k_0$. Последовательность бесконечных десятичных дробей

$$x^{(k)} = \alpha_0^{(k)},\ \alpha_1^{(k)}\alpha_2^{(k)} \ldots \alpha_n^{(k)} \ldots$$

наз. стабилизирующейся к числу

$$x = \alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$

если i-й столбец бесконечной матрицы $\|\alpha_i^k\|$, i — номер столбца, k — строчки, стабилизируется для любого

$i=0, 1, 2$ к числу α_i. Если $x>0$ и $y>0$, то конечные десятичные дроби

$$\underline{x}_n+\underline{y}_n,\ \underline{x}_n-\underline{y}_n,\ (\underline{x}_n\underline{y}_n)_n \text{ и } \left(\frac{\underline{x}_n}{\underline{y}_n}\right)_n$$

имеют n значащих цифр после запятой и образуют последовательности, стабилизирующиеся к нек-рым числам. Эти числа и наз. соответственно с у м м о й $x+y$, р а з н о с т ь ю $x-y$, п р о и з в е д е н и е м xy и ч а с т н ы м $\frac{x}{y}$ Д. ч. x и y. Эти определения распространяются на Д. ч. произвольных знаков. Напр., если $x<0$ и $y<0$, то $x+y=-(|x|+|y|)$, если x и y разных знаков, то $x+y=\pm||x|-|y||$, где выбирается знак, одинаковый со знаком того из чисел x или y, абсолютная величина к-рого наибольшая. Для любых чисел x и y полагают $x-y=x+(-y)$ (в случае $x>0$, $y>0$ это определение совпадает с выше сформулированным) и т. д. Совокупность допустимых бесконечных десятичных дробей с таким образом определенными соотношениями порядка, операциями сложения, вычитания, умножения и деления удовлетворяет аксиомам I—VI.

При построении теории Д. ч. можно пользоваться не только десятичной системой счисления, но и другими: двоичной, троичной и т. д. Существенно, что ни при одном из приведенных выше построений теории Д. ч. (аксиоматическом, с помощью сечений рациональных чисел, на базе фундаментальных последовательностей рациональных чисел или на основе бесконечных десятичных дробей) не доказывается существование (непротиворечивость) множества Д. ч. С этой точки зрения все эти методы равноправны.

Геометрически множество Д. ч. изображается направленной (ориентированной) прямой, а отдельные числа — точками этой прямой. Поэтому совокупность Д. ч. часто наз. ч и с л о в о й п р я м о й, а отдельные числа — точками. Имея в виду такое изображение Д. ч., иногда вместо a меньше b (соответственно b больше a) говорят, что число a лежит левее числа b (соответственно, что b лежит правее a). Между точками геометрической (евклидовой) прямой, упорядоченными по их положению, и элементами числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок. Это обстоятельство и является оправданием изображения множества Д. ч. в виде прямой.

Лит.: [1] D e d e k i n d R., Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig, 1872 (рус. пер.— Д е д е к и н д Р., Непрерывность и иррациональные числа, 3 изд., Одесса, 1914); [2] D a n t s c h e r V., Vorlesungen über die Weierstrass'sche Theorie der irrationalen Zahlen, Lpz., 1908; [3] C a n t o r G., «Math. Ann.», 1872, Bd 5, S. 123—30; [4] Н е м ы ц к и й В. В., С л у д с к а я М. И., Ч е р к а с о в А. Н., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1957; [5] И л ь и н В. А., П о з н я к Э. Г., Основы математического анализа, т. 1, 3 изд., М., 1971; [6] К у д р я в ц е в Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973; [7] Н и к о л ь с к и й С. М., Курс математического анализа, т. 1, М., 1973; [8] Ф и х т е н г о л ь ц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 2, М., 1969; [9] Б у р б а к и Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969, гл. 4. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДЕКАРТА ТЕОРЕМА, п р а в и л о з н а к о в Д е к а р т а,— теорема, утверждающая, что число положительных корней многочлена с действительными коэффициентами равно или на четное число меньше числа перемен знаков в ряду его коэффициентов (причем каждый корень считается столько раз, какова его кратность) и нулевые коэффициенты при подсчете числа перемен знаков не учитываются. Если известно, что все корни данного многочлена действительны (как, например, для характеристич. многочлена симметрич. матрицы), то Д. т. дает точное число корней. Рассматривая многочлен $f(-x)$ можно с помощью этой же теоремы найти число отрицательных корней $f(x)$.

Лит.: [1] К у р о ш А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *И. В. Проскуряков.*

ДЕКАРТОВ КВАДРАТ, коуниверсальный квадрат (в категории) — диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A \sqcap_S B & \xrightarrow{p_A} & A \\ {\scriptstyle p_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & S \end{array}$$

Здесь $A \sqcap_S B$ — расслоенное произведение объектов A и B, ассоциированное со схемой

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & S \end{array},$$

а p_A и p_B — канонические проекции. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\delta} & A \\ {\scriptstyle \gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & S \end{array}$$

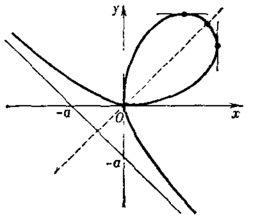
является Д. к. тогда и только тогда, когда она коммутативна и для всякой пары морфизмов $\mu: V \to A$, $\nu: V \to B$ такой, что $\alpha\mu = \beta\nu$, существует единственный морфизм $\lambda: V \to P$, удовлетворяющий условиям $\mu = \delta\lambda$, $\nu = \gamma\lambda$.

Лит.: [1] Букур И., Делянy А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972. *О. А. Иванова.*

ДЕКАРТОВ ЛИСТ — плоская алгебраич. кривая 3-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, параметрические уравнения

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3},$$

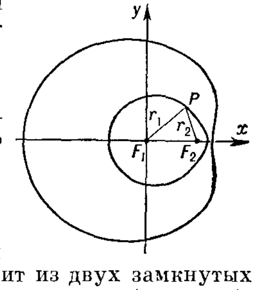
где t — тангенс угла между радиус-вектором кривой и осью Ox. Д. л. симметричен относительно биссектрисы $y = x$ (см. рис.). В точках с координатами $\left(a\sqrt[3]{2},\ a\sqrt[3]{4}\right)$ и $\left(a\sqrt[3]{4},\ a\sqrt[3]{2}\right)$ касательные параллельны координатным осям. Начало координат — узловая точка с касательными, по к-рым проходят оси координат. Асимптота: $y = -x - a$. Площадь между кривой и асимптотой: $S = {}^3/_2 a^2$. Площадь петли: $S = {}^3/_2 a^2$. Д. л. назван по имени Р. Декарта (R. Descartes), впервые его рассмотревшего в 1638.



Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960; [2] Смогоржевский А. С., Столова Е. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961.
Д. Д. Соколов.

ДЕКАРТОВ ОВАЛ — плоская кривая, расстояния r_1 и r_2 каждой точки P к-рой до двух фиксированных точек F_1 и F_2 (фокусов) связаны неоднородным линейным уравнением

$$r_1 + mr_2 = a.$$



Д. о. можно определить при помощи однородного линейного уравнения

$$r_1 + mr_2 + nr_3 = 0,$$

где r_3 — расстояние до третьего фокуса F_3, лежащего на прямой F_1F_2. Д. о. в общем случае состоит из двух замкнутых линий, одна из к-рых объемлет другую (см. рис.). В прямоугольных декартовых координатах уравнение Д. о. имеет вид:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + m\sqrt{(x-d)^2 + y^2} = a,$$

где d — длина отрезка F_1F_2. При $m=1$ и $a>d$ Д. о. представляет собой эллипс, при $m=-1$ и $a<d$ — гиперболу и, если $m=a/d$,— *Паскаля улитку*. Впервые Д. о. исследован Р. Декартом (R. Descartes) в связи с задачами оптики (см. [1]).

Лит.: [1] Декарт Р., Геометрия, пер. [с франц. и латин.], М.—Л., 1938; [2] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Е. В. Шикин.*

ДЕКАРТОВА ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ ортонормированная — прямолинейная система координат в евклидовом пространстве.

Д. п. с. к. на плоскости задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми — осями координат, на каждой из к-рых выбрано положительное направление и задан отрезок единичной длины. Точка пересечения осей координат (O) наз. началом координат. Одна из осей (Ox) координат наз. осью абсцисс, другая — осью ординат (Oy). Оси координат делят плоскость на четыре равные области — четверти, или квадранты.

Прямоугольными декартовыми координатами точки M наз. упорядоченная пара чисел (x, y), первое из к-рых (абсцисса) равно величине ортогональной проекции направленного отрезка OM на ось абсцисс, второе (ордината) — величине ортогональной проекции направленного отрезка OM на ось ординат.

Д. п. с. к. в трехмерном пространстве задается аналогично случаю плоскости: осью абсцисс, осью ординат, осью аппликат и началом координат O. Плоскости, проходящие через оси координат, наз. координатными плоскостями. Они делят пространство на 8 областей — октантов.

Иногда пользуются косоугольной (общей) декартовой системой координат, к-рая отличается от Д. п. с. к. тем, что углы между осями координат не обязательно прямые.

Д. п. с. к. названа по имени Р. Декарта (R. Descartes), к-рый ввел метод прямолинейных координат (см. [1]).

Лит.: [1] Декарт Р., Геометрия, пер. [с франц. и латин.], М.—Л., 1938. *А. Б. Иванов.*

ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ — то же, что полное *прямое произведение*.

ДЕКАРТОВО РАЗЛОЖЕНИЕ (в топологии) — разложение пространства в топологич. произведение. Важна задача о нетривиальных Д. р. кубов I^n и евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$. Напр., если пространство M получено из $\mathbb{R}^m$, $3 \leqslant m < n$, отождествлением точек дуги $l \subset \mathbb{R}^m$, для к-рой $\pi_1(\mathbb{R}^m \setminus l) \neq 1$ (см. *Дикое вложение*), то $M \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{m+1}$ и $M \times M = \mathbb{R}^{2m}$. Любое гладкое компактное стягиваемое многообразие M^m есть сомножитель I^n, $n > m$. Любой сомножитель I^n, $n \leqslant 4$, есть I^m, $m < n$.

Лит.: [1] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 227, 243. *А. В. Чернавский.*

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ — способ определения положения точек на плоскости их расстояниями до двух фиксированных перпендикулярных прямых — осей. Это понятие усматривается уже у Архимеда и Аппология Пергского более двух тысяч лет назад и даже у древних египтян. Впервые эта идея была систематически развита П. Ферма (P. Fermat) и Р. Декартом (R. Descartes); в их формулировках расстояния могли быть только положительными числами или нулем. Мысль о том, что одно или оба эти расстояния можно считать также и отрицательными, принадлежит И. Ньютону (I. Newton). Г. Лейбниц (G. Leibniz) первым назвал эти расстояния «координатами». См. *Декартова прямоугольная система координат.* *М. И. Войцеховский.*

ДЕКОДИРОВАНИЕ — см. *Кодирование и декодирование.*

ДЕЛЁЖ (в теории игр) — удовлетворяющее условиям рациональности распределение в *кооперативной игре* общего выигрыша всех игроков между отдельными игроками. Формально, если игра с множеством игроков $J=\{1, .., n\}$ задана характеристической функцией $v(J)$, то Д. есть такой вектор $x=(x_1, \ldots, x_n)$, что $\sum_{i=1}^n x_i = v(J)$; $x_i \geq v(i)$, $i=1, \ldots, n$. *Г. Н. Дюбин.*

ДЕЛЕНИЕ — действие, обратное к *умножению;* заключается в нахождении такого x, что $bx=a$ или $xb=a$ при заданных a и b. Результат Д. x наз. частным, или отношением a и b; при этом a наз. делимым, а b — делителем. Для обозначения Д. употребляются знаки двоеточия $(a : b)$, горизонтальной или косой черты $\left(\frac{a}{b}\right.$ или $\left.a/b\right)$.

В поле рациональных чисел Д. возможно всегда, кроме деления на нуль, при этом результат Д. определен однозначно. В кольце целых чисел Д. не всегда возможно. Напр., 10 делится на 5, но не делится на 3. Если при Д. (в поле рациональных чисел) целого числа a на целое число b в частном получается целое число, то говорят, что a делится нацело (или без остатка) на b, и записывают это следующим образом: $b|a$. Д. комплексных чисел производится по формуле

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2},$$

а Д. комплексных чисел, записанных в тригонометрич. форме,— по формуле

$$\frac{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{\rho(\cos\beta + i\sin\beta)} = \frac{r}{\rho}\left(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\right).$$

Деление с остатком — это, по существу, совершенно особая операция, отличная от Д. в определенном выше смысле. Если a и $b \neq 0$ — целые числа, то операция Д. с остатком числа a на число b состоит в определении таких целых чисел x и y, что

$$a = bx + y, \quad \text{где } 0 \leqslant y < |b|.$$

При этом a наз. делимым, b — делителем, x — частным, а y — остатком. Эта операция всегда осуществима и однозначна. Если $y=0$, то говорят, что a делится на b без остатка. В этом случае частное получается то же самое, что и частное при обычном Д.

Аналогично определяется Д. с остатком для многочленов с коэффициентами из некоторого поля. Она состоит в нахождении по двум заданным многочленам $A(x)$ и $B(x)$ многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющих условиям

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

и степень $R(x)$ меньше степени $Q(x)$. Эта операция также всегда осуществима и однозначна. Если $R(x)=0$, то говорят, что многочлен $A(x)$ делится на многочлен $B(x)$ без остатка. *С. А. Степанов.*

ДЕЛЕНИЯ КРУГА МНОГОЧЛЕН, круговой многочлен,— многочлен, имеющий вид

$$\Phi_n(x) = \prod_k (x - \varphi_k),$$

где φ_k — *первообразные корни* степени n из единицы и произведение берется по всем числам k, взаимно простым с n и взятым из ряда $1, 2, \ldots, n$. Степень многочлена $\Phi_n(x)$ — число натуральных чисел, меньших, чем n, и взаимно простых с n. Д. к. м. удовлетворяют соотношению

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x),$$

где произведение берется по всем положительным делителям d числа n, включая и само n. Это соотношение позволяет рекурсивно вычислять многочлены $\Phi_n(x)$ путем деления многочлена x^n-1 на произведение всех $\Phi_d(x)$, $d<n$, $d|n$. При этом коэффициенты многочлена оказываются лежащими в исходном простом поле P, а в случае поля рациональных чисел — целыми числами. Так,

$$\Phi_1(x) = x-1, \;\; \Phi_2(x) = x+1, \;\; \Phi_3(x) = x^2+x+1.$$

Если $n=p$ — простое и поле P имеет характеристику 0, то

$$\Phi_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1.$$

Для многочлена $\Phi_n(x)$ можно указать явное выражение через *Мёбиуса функцию* $\mu(k)$:

$$\Phi_n(x)=\prod_{d\mid n}(x^d-1)^{\mu(n/d)}.$$

Напр.,

$$\Phi_{12}(x)=(x^{12}-1)(x^6-1)^{-1}(x^4-1)^{-1}(x^3-1)^0(x^2-1)\times$$
$$\times(x-1)^0=\frac{x^6+1}{x^2+1}=x^4-x^2+1.$$

Над полем рациональных чисел все многочлены $\Phi_n(x)$ неприводимы, но над конечными простыми полями эти многочлены могут быть приводимы. Так, над полем вычетов по модулю 11 имеет место соотношение:

$$\Phi_{12}(x)=x^4-x^2+1=(x^2+5x+1)(x^2-5x+1).$$

Уравнение $\Phi_n(x)=0$, дающее все первообразные корни n-й степени из единицы, наз. **уравнением деления круга (окружности)**. Решение этого уравнения в тригонометрич. форме имеет вид:

$$r_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=e^{2k\pi i/n},$$

где дробь k/n несократима, т. е. k и n взаимно просты. Решение в радикалах уравнения деления круга тесно связано с задачей построения правильного n-угольника или с эквивалентной ей задачей деления окружности на n равных частей, а именно, задача деления окружности на n частей решается с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда уравнение $\Phi_n(x)=0$ решается в квадратных радикалах. Последнее, как доказал К. Гаусс (C. Gauss, 1801), имеет место в том и только в том случае, когда

$$n=2^m p_1 p_2\ldots p_s,$$

где m — целое неотрицательное число и $p_1, p_2,\ldots, p_s$ — попарно различные простые числа, представимые в виде $2^{2^k}+1$ с целым неотрицательным k.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] Сушкевич А. К., Основы высшей алгебры, 4 изд., М.—Л., 1941. *И. В. Проскуряков.*

ДЕЛЕНИЯ КРУГА ПОЛЕ — то же, что *круговое поле*.

***p*-ДЕЛИМАЯ ГРУППА**, группа Барсотти — Тейта,— обобщение понятия коммутативной формальной группы. Гомоморфизм, индуцируемый умножением на простое число p, является эпиморфизмом для p-Д. г.

Пусть S — схема, p — простое число; **p-делимой группой высоты h** наз. индуктивная система $G=(G_n, i_n)$ коммутативных конечных групповых схем G_n порядка p^{nh} такая, что последовательности

$$0\longrightarrow G_n\xrightarrow{i_n}G_{n+1}\xrightarrow{\varphi_n}G_{n+1}$$

являются точными (здесь φ_n — гомоморфизм умножения на p^n). Морфизм p-Д. г. есть морфизм индуктивных систем. p-Д. г. наз. **связной** (соответственно **этальной**), если все G_n — связные (этальные) групповые схемы. Связная p-Д. г. над полем характеристики p есть коммутативная формальная группа (рассматриваемая как индуктивный предел ядер φ_n — умножения на p^n), для к-рой умножение на p является изогенией [6]. Этот факт обобщается на случай произвольной базисной схемы S, на к-рой гомоморфизм, индуцируемый умножением на p, локально нильпотентен [4]. Категория этальных p-Д. г. эквивалентна категории p-адических представлений фундаментальной группы схемы S. Каждая p-Д. г. G над артиновой схемой S

содержит максимальную связную подгруппу G^0, называемую **связной компонентой единицы**, фактор по к-рой является этальной p-Д. г. Размерность алгебры Ли для любой $(G^0)_n$ наз. **размерностью** p-Д. г. G.

Пусть A — абелево многообразие над полем k размерности d, $A(n)$ — ядро гомоморфизма умножения на p^n в A, $i_n : A(n) \to A(n+1)$ — естественное вложение. Индуктивная система $A(\infty) = (A(n), i_n)$ является p-Д. г. высоты $2d$. Ее связная компонента единицы $A(\infty)^0$ совпадает с формальным пополнением A вдоль единичного сечения, а высота $A(\infty)^0$ представляет важный инвариант абелевой схемы.

Пусть $G = (G_n, i_n)$ — p-Д. г. высоты h, $\check{G}_n$ — двойственные по Картье конечные групповые схемы, $\hat{i}_n : \hat{G}_n \to \hat{G}_{n+1}$ — отображение, двойственное к отображению умножения на $p : G_{n+1} \to G_n$. Система $\hat{G} = (\hat{G}_n, \hat{i}_n)$ является p-Д. г. высоты h и наз. **двойственной** к p-Д. г. G. Сумма размерностей G и $\hat{G}$ равна h.

Как и для формальных групп, для p-Д. г. вводится понятие модуля Дьедонне, играющее важную роль в теории деформации p-Д. г. (см. [2], [3], [4]).

В случае, когда S есть спектр разнохарактеристического кольца дискретного нормирования A с полем вычетов характеристики p, структура p-Д. г. тесно связана со структурой пополнения алгебраич. замыкания поля частных K кольца A, рассматриваемого как модуль над группой Галуа поля K (см. [6]).

Лит.: [1] Barsotti I., в кн.: Coloque sur la théorie des groupes algébriques tenu à Bruxelles, P., 1962, p. 77—85; [2] Grothendieck A., в кн.: Actes du Congrès international des mathématiciens. 1970, t. 1, P., 1971, p. 431—36; [3] Mazur B., Messing W., Universal Extensions and one Dimensional Crystalline Cohomology, B., 1974; [4] Messing W., The Crystals Associated to Barsotti — Tate Groups: with Applications to Abelian Schemas, B., 1972; [5] Serre J.-P., «Sem. Bourbaki», exposé 318, 1966—67, N. Y., 1968; [6] Тейт Дж., «Математика», 1969, т. 13, № 2, с. 3—25. *И. В. Долгачев.*

ДЕЛИМОСТИ ПРИЗНАК на натуральное число d — условие, к-рому удовлетворяет натуральное число A в том и только в том случае, если оно делится на d. Желательно, чтобы это условие можно было легко проверить и чтобы эта проверка была не сложнее непосредственного деления числа A на d.

Если разность чисел A и B делится на d, то число A делится на d тогда и только тогда, когда число B делится на d. На этом свойстве основан вывод многих Д. п. Пусть запись числа A в десятичной системе счисления имеет вид:

$$A = (a_n \ldots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \ldots + 10^n a_n,$$

тогда

$$A = a_0 + 10A_1, \text{ где } A_1 = a_1 + 10a_2 + \ldots + 10^{n-1} a_n;$$
$$A = a_0 + 10a_1 + 100A_2, \text{ где } A_2 = a_2 + 10a_3 + \ldots + 10^{n-2} a_n;$$
$$A = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000A_3, \text{ где } A_3 = a_3 + 10a_4 + \ldots$$
$$\ldots + 10^{n-3} a_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Из этих равенств сразу получаются Д. п. на делители чисел 10, 100, 1000,... В частности, для того чтобы число A **делилось на 2**, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра, т. е. число a_0, делилось на 2; для того чтобы число A **делилось на 4** (на 8), необходимо и достаточно, чтобы число, изображаемое двумя (соответственно тремя) последними цифрами числа A, т. е. число a_0+10a_1, делилось на 4 (соответственно $a_0+10a_1+100a_2$ делилось на 8). Так как разность $(a_0+10a_1)-(a_0+2a_1)$ кратна 4, то Д. п. на 4 можно дать и в такой форме: число A делится на 4 тогда и только тогда, когда число a_0+2a_1 делится на 4.

Каждый Д. п. на число d позволяет сопоставить с числом A, если оно не слишком мало, нек-рое неотрицательное целое число, меньшее A, к-рое делится на d в том и только в том случае, когда само число A делится на d. Другими словами, каждый Д. п. на число d определяется нек-рой функцией f, принимающей целые значения и удовлетворяющей условиям: $|f(A)|<A$ для каждого натурального A, начиная с некоторого; $f(A)$ делится на d тогда и только тогда, когда число A делится на d. Любая целозначная функция, удовлетворяющая перечисленным условиям, наз. функцией делимости на число d; множество всех таких функций обозначается $\Omega(d)$. Ясно, что

$$f_1(A)=a_0\in\Omega(2)\cap\Omega(5),$$
$$f_2(A)=a_0+10a_1\in\Omega(4)\cap\Omega(25),$$
$$f_3(A)=a_0+10a_1+100a_2\in\Omega(8)\cap\Omega(125),$$
$$f_4(A)=a_0+2a_1\in\Omega(4).$$

Поскольку

$$A=(a_0+A_1)+9A_1=(a_0+a_1+A_2)+9(A_1+A_2)=$$
$$=\ldots=(a_0+a_1+\ldots+a_n)+9(A_1+A_2+\ldots+A_{n-1}),$$

то

$$f_5(A)=a_0+a_1+\ldots+a_n\in\Omega(9)\subset\Omega(3).$$

Итак, число A делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 3 (соответственно на 9). Аналогично,

$$A=(a_0-A_1)+11A_1=(a_0-a_1+A_2)+11(A_1-A_2)=$$
$$=\ldots=(a_0-a_1+\ldots+(-1)^n a_n)+$$
$$+11(A_1-A_2+\ldots+(-1)^{n-2}A_{n-1}).$$

Следовательно,

$$f_6(A)=a_0-a_1+\ldots+(-1)^n a_n\in\Omega(11).$$

Используя представления чисел в системе счисления с основанием 10^k, где $k=2, 3,\ldots$, можно найти Д. п. на делители чисел вида 10^k+1. Так, при $k=2$ получаются следующие функции делимости на 11 и 101:

$$f_7(A)=(a_1a_0)_{10}+(a_3a_2)_{10}+(a_5a_4)_{10}+\ldots\in\Omega(11),$$
$$f_8(A)=(a_1a_0)_{10}-(a_3a_2)_{10}+(a_5a_4)_{10}-\ldots\in\Omega(101).$$

Поскольку $10^3+1=7\cdot11\cdot13$, получается объединенный Д. п. на числа 7, 11, 13: чтобы узнать, делится ли данное число на какое-нибудь из чисел 7, 11 или 13, достаточно разбить цифры этого числа на грани, начиная справа, по три в каждой, а затем соединить попеременно знаками + и — числа, образованные этими гранями. Полученное число делится на 7, 11 или 13 тогда и только тогда, когда данное число делится соответственно на 7, 11 или 13. Таким образом,

$$f_9(A)=(a_2a_1a_0)_{10}-(a_5a_4a_3)_{10}+(a_8a_7a_6)_{10}-\ldots$$
$$\ldots\in\Omega(7)\cap\Omega(11)\cap\Omega(13).$$

Если целые числа c и d взаимно просты, то число Ac делится на d тогда и только тогда, когда число A делится на d. Это соображение также часто используется при построении Д. п. Пусть d — какой-нибудь делитель разности $10c-1$, тогда числа c и d взаимно просты, и из равенства

$$Ac=(ca_0+A_1)+(10c-1)A_1$$

следует, что число A делится на d в том и только в том случае, если число A_1+ca_0 делится на d. Напр., при $d=19$, $c=2$ разность $10c-1$ делится на 19. Поэтому

$$f_{10}(A)=A_1+2a_0\in\Omega(19).$$

Чтобы узнать, делится ли число на 19, можно последовательно применять этот признак. Пусть d — какой-нибудь делитель суммы $10c+1$. Из равенства

$$Ac=(ca_0-A_1)+(10c+1)A_1$$

следует, что число A делится на d тогда и только тогда, когда число $A_1 - ca_0$ делится на d. Так, при $c=11$ число $10c+1$ делится на 37. Поэтому

$$f_{11}(A) = A_1 - 11a_0 \in \Omega (37).$$

Соответствующий Д. п. можно сформулировать так: чтобы узнать, делится ли число A на 37 или нет, достаточно вычеркнуть последнюю цифру числа A и из числа, образуемого невычеркнутыми цифрами, вычесть произведение 11 на число, изображаемое вычеркнутой цифрой. Число A делится на 37 в том и только в том случае, если полученное число делится на 37. Подобным образом можно вывести Д. п. и на делители чисел вида $10^k c \pm 1$.

Лит.: [1] Воробьев Н. Н., Признаки делимости, 2 изд., М., 1974. *В. И. Нечаев.*

ДЕЛИМОСТЬ в кольце — обобщение понятия делимости целых чисел нацело (см. *Деление*).

Элемент a кольца A делится на другой элемент $b \in A$, если существует такой $c \in A$, что $a=bc$. При этом говорят также, что b делит a, и a наз. кратным элемента b, а b — делителем элемента a. Для обозначения Д. a на b употребляют символ $b|a$.

В любом ассоциативно-коммутативном кольце имеют место следующие свойства Д.:

$$\text{если } b \mid a \text{ и } c \mid b, \text{ то } c \mid a;$$
$$\text{если } b \mid a, \; c \neq 0, \text{ то } cb \mid ca;$$
$$\text{если } c \mid a \text{ и } c \mid b, \text{ то } c \mid (a \pm b).$$

Последние два свойства равносильны тому, что множество элементов, делящихся на b, образует идеал bA кольца A (главный идеал, порожденный элементом b), к-рый содержит b, если A — кольцо с единицей.

В области целостности элементы a и b делятся друг на друга одновременно ($a|b$ и $b|a$) тогда и только тогда, когда они ассоциированы, т. е. $a=\varepsilon b$, где ε — обратимый элемент. Два ассоциированных элемента порождают один и тот же главный идеал. Делители единицы совпадают, по определению, с обратимыми элементами. Простым элементом в кольце наз. ненулевой элемент, не имеющий собственных делителей, кроме делителей единицы. В кольце целых чисел такие элементы наз. простыми числами, в кольце многочленов — неприводимыми многочленами. Кольца, в к-рых подобно кольцу целых чисел или кольцу многочленов имеет место однозначное разложение на простые множители (с точностью до делителей единицы и порядка следования), наз. *факториальными кольцами*. В таком кольце для всякой конечной совокупности элементов существуют наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное, оба определенные однозначно с точностью до делителей единицы.

Лит.: [1] Kummer E., «J. reine und angew. Math.», 1847, Bd 35, S. 319—26; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [3] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972.
О. А. Иванова, С. А. Степанов.

ДЕЛИТЕЛЕЙ ПРОБЛЕМЫ — проблемы теории чисел, касающиеся асимптотич. поведения сумматорных функций

$$D(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau(n), \quad D_k(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau_k(n),$$

(где $\tau(n)$ — число делителей n, а $\tau_k(n)$, $k \geqslant 2$,— число представлений n в виде произведения k натуральных чисел), а также модификаций этих функций.

Проблема делителей Дирихле — проблема наилучшей оценки остаточного члена $\Delta(x)$ в асимптотич. формуле

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n) = x \ln x + (2C-1)x + \Delta x,$$

где C — *Эйлера постоянная*. Асимптотика суммы

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n) = D(x)$$

впервые рассмотрена П. Дирихле (P. Dirichlet) в 1849. Он исходил из того, что данная сумма равна числу точек (u, v) с целыми положительными координатами под гиперболой $uv=x$, и доказал, что

$$D(x)=x\ln x+(2C-1)x+O(\sqrt{x}).$$

Эта формула наз. формулой Дирихле числа делителей.

Д. п. явилась одной из тех моделей, на к-рых развивались методы оценок числа целых точек в разного рода расширяющихся областях. Пусть θ — нижняя грань чисел α в соотношении $\Delta(x)\ll x^{\alpha}$. Согласно П. Дирихле, $\theta\leqslant 1/2$. Г. Ф. Вороной доказал, что $\theta\leqslant 1/3$. Далее последовательно были получены оценки

$$\theta\leqslant\frac{33}{100},\ \theta\leqslant\frac{27}{82},\ \theta\leqslant\frac{15}{46},\ \theta\leqslant\frac{13}{40}.$$

Истинный порядок величины $\Delta(x)$ (к 1978) неизвестен. Существует гипотеза, что

$$\Delta(x)\ll x^{1/4}\ln^2 x.$$

С другой стороны, Х. Харди (H. Hardy) доказал, что $\theta\geqslant 1/4$, или, точнее,

$$\varliminf_{x\to 0}\frac{\Delta(x)}{(x\ln x)^{1/4}\ln\ln x}<0<$$
$$<\varlimsup_{x\to 0}\frac{\Delta(x)}{(x\ln x)^{1/4}\ln\ln x}.$$

Кроме того, известна формула

$$\int_0^x\Delta^2(y)\,dy=Ax^{3/2}+O(x\ln^5 x)$$

(A — постоянная), показывающая справедливость «в среднем» гипотезы о порядке $\Delta(x)$.

Обобщенная проблема делителей — проблема наилучшего асимптотич. выражения при $x\to\infty$ суммы

$$\sum_{n\leqslant x}\tau_k(n)=D_k(x),$$

в частности, при $k=2$

$$\tau_2(n)=\tau(n),\quad D_2(x)=D(x).$$

Обобщенная Д. п. тесно связана с поведением *дзета-функции* Римана $\zeta(s)$ в критич. полосе значений s. Именно, для нецелого $x>0$, $c>1$ имеет место формула

$$D_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\zeta^k(s)\frac{x^s}{s}\,ds.$$

Здесь подинтегральная функция имеет в точке $s=1$ полюс порядка k с вычетом вида $xP_k(\ln x)$, где P_k — многочлен степени $k-1$.

Пусть

$$D_k(x)=xP_k(\ln x)+\Delta_k(x)$$

и пусть $\gamma_k<\gamma<1$, где γ_k — нижняя грань чисел σ, для к-рых

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\zeta(\sigma+it)|^{2k}}{|\sigma+it|^2}\,dt<\infty.$$

Тогда справедливы формула

$$\Delta_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}\zeta^k(s)\frac{x^s}{s}\,ds$$

и обратная формула Меллина:

$$\frac{\zeta^k(s)}{s}=\int_0^{\infty}\Delta_k(x)x^{-s-1}\,dx,\quad s=\sigma+it,$$

где интеграл существует в смысле среднего квадратичного для $\gamma_k<\sigma<1$.

Оценки остаточного члена $\Delta_k(x)$ в формуле $D_k(x)$ еще далеки (к 1978) от ожидаемых. Пусть α_k — наименьшее из чисел α, для к-рых

$$\Delta_k(x) \ll x^{\alpha+\varepsilon}$$

при любом $\varepsilon>0$. Известны оценки:

$$\alpha_k \leqslant \frac{k-1}{k+1},$$

$$\alpha_k \leqslant \frac{k-1}{k+2} \text{ для } k \geqslant 4.$$

Имеются уточнения этих оценок для частных значений k:

$$\alpha_3 \leqslant \frac{37}{75},\ \alpha_7 \leqslant \frac{71}{107},\ \alpha_8 \leqslant \frac{41}{59},\ \alpha_9 \leqslant \frac{26}{35},\ \alpha_{11} \leqslant \frac{19}{25}.$$

Последний результат оценки сверху α_k получен в [3] на основе развития идей *Виноградова метода:* доказано существование такой абсолютной постоянной $c>0$, что

$$\alpha_k \leqslant 1-\frac{c}{k^{2/3}},\ k=2,\ 3,\ \ldots$$

Эта оценка есть следствие оценки $\zeta(s)$ в критич. полосе: для $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \geqslant 2$ существует такая постоянная $a>1$, что

$$\zeta(\sigma+it) \ll |t|^{a(1-\sigma)^{3/2}} \ln|t|.$$

С другой стороны, Х. Харди (G. Hardy) доказал, что

$$\alpha_k \geqslant \frac{k-1}{2k}.$$

Относительно величины $\Delta_k(x)$ существует гипотеза:

$$\alpha_k = \frac{k-1}{2k}$$

при всех $k \geqslant 2$. Однако для ее обоснования недостаточно даже решения *Линделёфа гипотезы*:

$$\zeta(\sigma+it) \ll |t|^{\varepsilon}$$

при любых $\varepsilon>0$, $\sigma>1/2$.

Дальнейшее обобщение Д. п. [4]: равномерно относительно целых $k \geqslant 2$, $m \geqslant 1$ при $x \geqslant 1$

$$\frac{1}{x}\sum_{n \leqslant x} \tau_k^m(n) < A_k^{(m)} (\ln x + k^m - 1)^{k^m-1},$$

где

$$A_k^{(m)} = \frac{k^m}{(k!)^{(k^m-1)/(k-1)}}.$$

Проблема делителей в арифметических прогрессиях — проблема равномерных относительно x, d, $0 \leqslant l \leqslant d$, $(l, d)=1$, оценок сумм

$$\sum_{n \leqslant x,\ n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, d)} \tau_k^m(n) = D_k^{(m)}(x;\ d,\ l).$$

Эти суммы изучались на основе аналитич. методов теории L-функций и важны для многих проблем теории чисел (см. [7]). В простейшем случае ($m=1$) для них получены асимптотич. выражения:

при $k=2$ для $d \leqslant x^{2/3}$ (см. [5]),
при $k=4$ для $d \leqslant x^{1/2}$ (см. [6]),
при $k \geqslant 4$ для $d \leqslant x^{2/k}/\ln^c x$ [см. [8]).

При любом $m \geqslant 1$ и $k=2$ найден (см. [9]) истинный порядок роста ($\asymp$) для $d \leqslant x^{1-\alpha}$, $0<\alpha<1/2$:

$$D_2^{(m)}(x;\ d,\ l) \asymp \frac{x}{d}\left[\ln\frac{x}{d}\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^m-1}\right].$$

В общем случае доказано [10], что

$$\sum_{d \leqslant x^{1/2-\varepsilon}} \max_{l} \left| D_k^{(m)}(x;\ d,\ l) - A_k^{(m)}(x;\ d) \right| < x(\ln x)^{-M},$$

где $A_k^{(m)}(x;\ d)$ — ожидаемый главный член роста, M — положительная сколь угодно большая постоянная, $\varepsilon>0$ — любое число.

Последнее неравенство, в частности, показывает, что суммы $D_k^{(m)}(x;\ d,\ l)$ при любых целых $k\geqslant 2$, $m\geqslant 1$ «в среднем» имеют один и тот же главный член роста для всех примитивных арифметич. прогрессий разности $d\leqslant x^{1/2-\varepsilon}$.

Лит.: [1] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., 1953; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [3] Карацуба А. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 112, с. 241—55; [4] Марджанишвили К. К., «Докл. АН СССР», 1939, т. 22, с. 391—93; [5] Hooley C., «Proc. London Math. Soc.», ser. 3, 1957, v. 7, № 27, p. 396—413; [6] Линник Ю. В., «Матем. сб.», 1961, т. 53, № 1, с. 3—38; [7] его же, Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [8] Лаврик А. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, № 2, с. 433—48; [9] Виноградов А. И., Линник Ю. В., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 4, с. 277—80; [10] Виноградов А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, № 4, с. 903—34. *А. Ф. Лаврик.*

ДЕЛИТЕЛЕЙ ЧИСЛО — функция натурального аргумента n, равная количеству натуральных делителей числа n. Эта арифметич. функция обозначается $\tau(n)$, либо $d(n)$. Известна формула:

$$\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1),$$

где

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$$

— канонич. разложение n на простые сомножители. Для простых p $\tau(p)=2$, но существует бесконечная последовательность n, для к-рых

$$\tau(n)>2^{(1-\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln\ln n}},\ \varepsilon>0.$$

Однако всегда

$$\tau(n)=O\left(n^{\varepsilon}\right);$$

$\tau(n)$ — *мультипликативная арифметическая функция*; $\tau(n)$ равно числу точек с натуральными координатами на гиперболе $xy=n$. Для среднего значения $\tau(n)$ имеется асимптотич. формула Дирихле (см. *Делителей проблемы*). Обобщением функции $\tau(n)$ является функция $\tau_k(n)$ — число решений уравнения $n=x_1x_2\ldots x_k$ в натуральных числах $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_k$.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972. *Н. И. Климов.*

ДЕЛИТЕЛЬ целого числа a — целое число b, делящее без остатка число a. Другими словами, Д. целого числа a — это такое целое число b, для к-рого справедливо равенство $a=bc$ при нек-ром целом c. Делителем многочлена $A(x)$ наз. многочлен $B(x)$, делящий без остатка $A(x)$ (см. *Деление*). Более общо, в произвольном кольце A делителем элемента $a\in A$ наз. такой элемент $b\in A$, что $a=bc$ для нек-рого $c\in A$. *С. А. Степанов.*

ДЕЛИТЕЛЬ ЕДИНИЦЫ — элемент a кольца (коммутативного с единицей 1), для к-рого существует обратный, т. е. такой элемент b, что $ab=1$. В теории алгебраических чисел и алгебраических функций Д. е. наз. также единицами. *О. А. Иванова.*

ДЕЛИТЕЛЬ НУЛЯ в кольце или полугруппе с нулем — ненулевой элемент, произведение к-рого на некоторый ненулевой элемент равно нулю. Элемент a наз. левым (соответственно правым) Д. н., если $ab=0$ (соответственно $ba=0$) хотя бы для одного $b\neq 0$. *О. А. Иванова.*

ДЕЛЬТА АМПЛИТУДЫ — одна из трех основных *Якоби эллиптических функций*. Обозначается

$$\operatorname{dn} u=\operatorname{dn}(u,\ k)=\Delta\operatorname{am} u.$$

Д. а. следующим образом выражается через сигма-функции Вейерштрасса, тета-функции Якоби или при помощи ряда

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(u, k) = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\vartheta_0(0)\,\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)\,\vartheta_0(v)} =$$

$$= 1 - k^2\frac{u^2}{2!} - k^2(4+k^2)\frac{u^4}{4!} - k^2(16+44k^2+k^4)\frac{u^6}{6!} - \ldots,$$

где k — **модуль** Д. а., $0 \leqslant k \leqslant 1$; $v = u/2\omega$, $2\omega = \pi\vartheta_3^2(0)$. При $k=0, 1$ соответственно

$$\operatorname{dn} u = 1, \quad \operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u}.$$

См. также *Вейерштрасса эллиптические функции*, *Эллиптические функции*.

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 2, гл. 3. *Е. Д. Соломенцев.*

ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ МЕТОД — метод нахождения *Грина функции* линейных дифференциальных уравнений математич. физики (т. е. метод определения функции влияния точечного источника) с помощью *дельта-функции* $\delta(x)$. Функция Грина $G(x, x')$ линейного дифференциального оператора $L(x)$ определяется из уравнения

$$L(x)G(x, x') = -\delta(x-x'),$$

как $G(x, x') = -L^{-1}(x)\delta(x-x')$, т. е. выражает влияние точечного источника, расположенного в точке x' на значение возмущения в точке x. Наиболее просто вид обратного оператора $L^{-1}(x)$ определяется в часто встречающемся случае, когда $L(x)$ является дифференциальным оператором с постоянными (не зависящими от x) коэффициентами. Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения общего вида для возмущения $\varphi(x)$ с источником $\rho(x)$:

$$L(x)\varphi(x) = -\rho(x),$$

с помощью функции Грина $G(x, x')$ записывается в виде свертки:

$$\varphi(x) = \int G(x, x')\rho(x')dx',$$

где интегрирование производится по всей области, в к-рой действует источник $\rho(x)$.

Лит.: [1] Иваненко Д., Соколов А., Классическая теория поля, М.—Л., 1951. *В. Д. Кукин.*

ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ, δ-функция, δ-функция Дирака, $\delta(x)$,— функция, позволяющая записать пространственную плотность физич. величины (масса, заряд, интенсивность источника тепла, сила и т. п.), сосредоточенной или приложенной в точке a пространства R_n. Напр., плотность точечной массы m, находящейся в точке a, записывается с помощью Д.-ф. в виде $m\delta(x-a)$. Д.-ф. может быть определена формальным соотношением

$$\int_{R_n} \delta(x-a)\, f(x)\, dx = f(a)$$

для любой непрерывной функции $f(x)$. Аналогично можно определить производные $\delta^{(k)}(x)$ для Д.-ф.:

$$\int_{R_n} \delta^k(x-a)\, f(x)\, dx = (-1)^k f^{(k)}(a)$$

для класса функций $f(x)$, непрерывных в R_n со своими производными $f^{(k)}(x)$до порядка k включительно. Часто используемые формальные операторные соотношения, выражающие свойства Д.-ф.:

$$\delta(-x) = \delta(x); \ \delta(cx) = |c|^{-1}\delta(x), \ c = \text{const};$$

$$x\delta(x) = 0; \ \delta(x) + x\delta'(x) = 0$$

и т. п., следует понимать в смысле данных выше определений, т. е. эти соотношения приобретают смысл лишь после интегрирования их с достаточно гладкими функциями. Таким образом, Д.-ф. не является обычной функцией в смысле классич. теории функций и определяется в теории обобщенных функций как сингулярная *обобщенная функция*, т. е. как непрерывный линейный функционал в пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций $f(x)$, который сопоставляет $f(x)$ ее значение в нуле: $(\delta, f)=f(0)$.

В. Д. Кукин.

ДЕМИКВАДРИКА — линейная система ∞' прямолинейных образующих какой-либо *квадрики*.

ДЕМУЛЕНА ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, обладающая сопряженной сетью линий, касательные к к-рым образуют две конгруэнции W,— так наз. особой сопряженной системой. Д. п. и только они допускают *проективное изгибание*. Введена А. Демуленом [1].

Лит.: [1] Demoulin A., «C. r. Acad. sci.», 1911, t. 153, p. 590—93, 705—07, 797—99, 927—29. *М. И. Войцеховский.*

ДЕМУЛЕНА ТЕОРЕМА: геликоид имеет бесконечное число (а именно ∞^2) систем сопряженных сетей линий, сохраняющихся в непрерывном изгибании этой поверхности — ее главных оснований (см. *Изгибание на главном основании*). Установлена А. Демуленом [1]. При этом оказывается, что указанные главные основания являются *Фосса сетями*. Обратное утверждение (теорема Финикова): единственная поверхность с бесконечным числом главных оснований есть прямой геликоид (см. [2]).

Лит.: [1] Demoulin A., «C. r. Acad. sci.», 1901, t. 133, p. 986—90; [2] Фиников С. П., Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М.—Л., 1937. *М. И. Войцеховский.*

ДЕМУЛЕНА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК — четырехугольник, образованный двумя парами l_1, l_1' и l_2, l_2' прямолинейных образующих соприкасающейся квадрики Ли в гиперболич. точке M поверхности трехмерного (проективного) пространства. Прямые l_1, l_1', l_2, l_2' наз. прямыми Демулена, они параллельны ребрам M_1M_3 и M_2M_3 соответственно канонического тетраэдра $T(M, M_1, M_2, M_3)$, ассоциированного с квадрикой Ли и называемого тетраэдром Демулена. Д. ч. невырожден тогда и только тогда, когда невырождена 3-я *Фубини форма*. Рассмотрен А. Демуленом [1].

Лит.: [1] Demoulin A., «C. r. Acad. sci.», 1908, t. 147, p. 493—96. *М. И. Войцеховский.*

ДЕНА ЛЕММА: пусть в трехмерном многообразии M расположена двумерная клетка D с самопересечениями, имеющая границей простую замкнутую полигональную кривую C без особых точек; тогда существует двумерная клетка D_0 с границей C, кусочно линейно вложенная в M. Д. л. приведена в [1], однако доказательство ее содержало пробелы; полное обоснование дано в [2]. С Д. л. связан результат, наз. теоремой о петле: пусть M — компактное трехмерное многообразие и N — одна из компонент его края; если ядро гомоморфизма $\pi_1(N) \to \pi_1(M)$ нетривиально, то существует простая петля на N, к-рая не гомотопна нулю на N и гомотопна нулю в M. Теорема о петле и Д. л. обычно применяются совместно. Они могут быть объединены в следующую теорему: если M — трехмерное многообразие с краем N и ядро гомоморфизма включения $\pi_1(N) \to \pi_1(M)$ нетривиально, то в M существует кусочно линейно вложенный двумерный диск D, край к-рого лежит на N и не стягиваем на N. К этим теоремам примыкает теорема о сфере, являющаяся вместе с Д. л. и теоремой о петле одним из основных средств топологии трехмерных многообразий: если M — ориентируемое трехмерное многообразие с $\pi_2(M)\neq 0$, то в M существует подмногообразие Σ, гомеоморфное двумерной сфере, к-рое не гомотопно нулю в M.

Эти результаты имеют многочисленные применения в топологии трехмерных многообразий и, в частности, в теории узлов. Так, если K — узел, то $\pi_1(S^3 \setminus K)$ изоморфно $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда K — тривиальный узел. Для n-компонентного зацепления L в S^3 следующие условия равносильны: 1) $\pi_2(S^3 \setminus L) \neq 0$; 2) $\pi_1(S^3 \setminus L)$ есть свободное произведение двух нетривиальных групп; 3) в $S^3 \setminus L$ существует такое подмногообразие N, гомеоморфное двумерной сфере, что обе компоненты $S^3 \setminus N$ содержат точки из L. В частности, если L — узел (т. е. $n=1$), то $\pi_2(S^3 \setminus L)=0$ (теорема об асферичности узлов).

Лит.: [1] Dehn M., «Math. Ann.», 1910, Bd 69, S. 137—168; [2] Папакирьякопулос С. Д., «Математика», 1958, т. 2, № 4, с. 23—47; [3] Масси У., Столлингс Дж., Алгебраическая топология. Введение, пер. с англ., М., 1977. *М. И. Войцеховский, М. Ш. Фарбер.*

ДЕНДРИТ — локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых кривых. Континуум, каждая точка к-рого имеет окрестность, являющуюся Д., наз. локальным дендритом.

А. А. Мальцев.

ДЕНОТАТ данного имени — объект, обозначением к-рого является это *имя*. *В. Е. Плиско.*

ДЕНУМЕРАНТ — число $D(n;\ a_1, a_2, \ldots, a_m)$ разбиений целого числа n на части, равные $a_1, a_2, \ldots, a_m$, т. е. число решений в целых неотрицательных числах уравнения

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m = n.$$

Производящая функция для Д. имеет вид:

$$D(t;\ a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum D(n;\ a_1, a_2, \ldots, a_m)\, t^n = \\ = 1/\left(1-t^{a_1}\right)\left(1-t^{a_2}\right)\ldots\left(1-t^{a_m}\right).$$

Наиболее просто Д. вычисляется по рекуррентному соотношению Эйлера:

$$D(n;\ 1, 2, \ldots, k) - D(n-k;\ 1, 2, \ldots, k) = \\ = D(n;\ 1, 2, \ldots, k-1).$$

Формулы в явном виде для нек-рых Д. могут быть получены из следующей теоремы: если a является наименьшим общим кратным чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то Д.

$$D(an+b;\ a_1, a_2, \ldots, a_m), \\ b = 0, 1, \ldots, a-1,$$

оказывается многочленом степени $m-1$ относительно n.

Лит.: [1] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963. *В. Е. Тараканов.*

ДЕ РАМА КОГОМОЛОГИИ — см. *Рама когомологии.*

ДЕ РАМА КРУЧЕНИЕ — см. *Рама кручение.*

ДЕ РАМА ТЕОРЕМА — см. *Рама теорема.*

ДЕРЕВО в теории графов — связный неориентированный *граф* G, не содержащий циклов. Д. не имеет кратных ребер и петель. Являясь простейшими связными графами, Д. служат хорошими моделями для рассмотрения различных вопросов теории графов. Любое Д. с n вершинами содержит $n-1$ ребер. Число различных Д., к-рые можно построить на n нумерованных вершинах, равно n^{n-2}. Д. с одной выделенной вершиной наз. корневым деревом.

Перечисляющий ряд

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n$$

для числа T_n неизоморфных корневых Д. с n вершинами удовлетворяет функциональному уравнению

$$T(x) = x \exp \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} T(x^r).$$

Перечисляющий ряд

$$t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n$$

для числа t_n неизоморфных Д. с n вершинами можно представить с помощью перечисляющего ряда для корневых Д.:

$$t(x) = T(x) - \frac{1}{2}[T^2(x) - T(x^2)].$$

Функциональные уравнения для $T(x)$ и $t(x)$ позволяют вычислять значения T_n и t_n для конкретных значений n (см., напр., [1]).

Доказано, что при $n \to \infty$

$$t_n \sim C\,\alpha^n/n^{5/2},$$

где $C=0{,}534948\ldots$, $\alpha=2{,}95576\ldots$ (см. [2]). Задачи перечисления Д. определенного вида возникают, напр., в химии при изучении изомеров.

Д. можно достаточно просто кодировать наборами из нулей и единиц. Рассмотрим, напр., к.-л. правильную (без пересечения ребер) укладку Д. D на плоскости (см. *Графа укладка*). Начиная с к.-л. вершины, будем двигаться по ребрам Д. D, сворачивая в каждой вершине на ближайшее справа ребро и поворачивая назад в концевых вершинах Д. Проходя по нек-рому ребру, записываем 0 при движении по ребру в первый раз и 1 при движении по ребру второй раз (в обратном направлении). Если m — число ребер Д. D, то через $2m$ шагов мы вернемся в исходную вершину, пройдя по каждому ребру дважды. Полученная при этом последовательность из 0 и 1 (код Д.) длины $2m$ позволяет однозначно восстанавливать не только само Д. D, но и его укладку на плоскости. Произвольному Д. соответствуют несколько кодов. Из этого способа кодирования вытекает оценка: $t_n < T_n < 4^n$.

Д. G с n вершинами однозначно восстанавливается (с точностью до изоморфизма) по набору всех его $(n-1)$-вершинных подграфов $G-v$, получаемых из G удалением каждой из его вершин v.

Любое Д. однозначно определяется также расстояниями (длиной наименьшей цепи) между его концевыми (степени 1) вершинами.

Остовное дерево (остов) — это подграф данного графа, содержащий все его вершины и являющийся Д. Число остовных Д. произвольного связного графа G без петель и кратных ребер можно вычислить следующим образом. Пусть M — матрица, полученная из матрицы смежности графа G изменением знаков всех элементов на противоположный и заменой i-го элемента главной диагонали степенью вершины v_i. Тогда алгебраич. дополнения всех элементов главной диагонали матрицы M равны между собой и их общее значение есть число остовов графа G. Остовные Д. используются, напр., для нахождения независимых циклов в электрич. схеме.

Важное значение для приложений имеет задача нахождения в связном графе, ребрам к-рого приписаны веса, остовного Д. с наименьшей суммой весов ребер. Такая задача возникает, напр., при проектировании коммуникационных сетей. Известен алгоритм для решения этой задачи о кратчайшем связывающем дереве (см. [3]). Д., растущим (или выходящим) из вершины v_0, наз. ориентированный граф, к-рый является (без учета ориентации) корневым Д. с корнем v_0 и в к-ром для любой вершины v_1 (единственная) цепь, соединяющая v_0 с v_1, является ориентированным путем из v_0 в v_1. Такие Д. используются, напр., для описания детерминированных функций, для представления информации в информационно-поисковых системах и т. д.

Обобщением понятия «Д.» является понятие «леса»; лес — это граф без циклов (не обязательно связный).

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973 (лит.); [2] Otter R., «Ann. Math.», 1948, v. 49, № 3, p. 583—99; [3] Прим Р. К., «Кибернетический сборник», 1961, в. 2, с. 95—107.

В. Б. Алексеев.

ДЕСКРИПТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ — раздел теории множеств, изучающий внутреннее строение множеств в зависимости от тех операций, при помощи к-рых эти множества могут быть построены из множеств сравнительно простой природы (напр., замкнутых или открытых подмножеств данного евклидова, метрич. или топологич. пространства). К указанным операциям относятся объединение, пересечение, взятие дополнения, проектирование и т. д. Д. т. м. зародилась в начале 20 в. в трудах Э. Бореля (E. Borel), Р. Бэра (R. Baire) и А. Лебега (H. Lebesgue) в связи с проблемой измеримости множеств. Множества, измеримые по Борелю, получили название *борелевских множеств*, или B-множеств. С другой стороны, Р. Бэр дал классификацию функций, названных впоследствии бэровскими функциями, и доказал ряд теорем об этих функциях (см. *Бэра классы*, *Бэра теорема*). А. Лебег доказал, что B-множества тождественны *Лебега множествам* бэровских функций, дал первую классификацию B-множеств и доказал непустоту каждого ее класса.

Изучение B-множеств стало важной задачей Д. т. м., причем в первую очередь надлежало выяснить вопрос о мощности B-множеств. После введения *Лебега меры* оказалось, что класс измеримых множеств значительно шире класса B-множеств, и возник вопрос об отыскании средств установления измеримости того или иного множества. Решение этого вопроса в каждом конкретном случае связано, как правило, с выяснением того процесса, при помощи к-рого это множество может быть построено, т. е. его дескриптивной структуры. Так определился еще один важный круг задач Д. т. м.— отыскание возможно более широкого класса (сохраняющих измеримость) операций над множествами и исследование свойств результатов этих операций. Решение этих вопросов, возникших в работах французских математиков, было дано преимущественно русскими математиками — Н. Н. Лузиным и его школой.

Один из наиболее важных вопросов — вопрос о мощности B-множеств — был решен П. С. Александровым [1] в 1916, построившим для этого *A-операцию*. Им было показано, что посредством A-операции, отправляясь от интервалов, можно построить любое B-множество и что всякое несчетное множество, полученное путем A-операции (и называемое A-множеством), содержит совершенное множество и, значит, имеет мощность континуума. Этот результат был независимо получен Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorff). М. Я. Суслин [2] показал, что существует A-множество, не являющееся борелевским. Он же ввел и название A-множества, равно как и A-операции (в честь П. С. Александрова). A-множества наз. также суслинскими множествами или, реже, аналитическими множествами. Для того чтобы A-множество было B-множеством, необходимо и достаточно, чтобы: 1) дополнение к нему снова было A-множеством (*Суслина критерий*); 2) оно являлось результатом A-операции с непересекающимися слагаемыми (*Лузина критерий*). Все A-множества измеримы и обладают *Бэра свойством*. Были найдены следующие новые способы получения A-множеств, эквивалентные A-операции: A-множества суть проекции B-множеств (и даже G_δ); A-множества суть непрерывные образы пространства I иррациональных чисел; и, значит, A-множества суть непрерывные образы B-множеств [3]. В то же время, непрерывный взаимно однозначный (и даже счетнократный [4]) образ B-множества есть B-множество и всякое несчетное B-множество есть объединение не более чем счетного множества и непрерывного взаимно однозначного образа пространства I (см. [3]). Наконец, Н. Н. Лузиным был найден еще один важный способ задания A-множеств при помощи введенной им операции решета (см. *Лузина решето*).

Трансфинитные индексы решета и конституанты стали мощным орудием исследования свойств A-множеств и их дополнений — *CA-множеств.*

При исследовании проблемы о мощности CA-множеств Н. Н. Лузин вводит *проективные множества.* Каждый класс α проективных множеств содержит множества, не принадлежащие классам $<\alpha$ (см. [3], [5]). Важным инструментом при доказательстве этой и других теорем о непустоте тех или иных классов множеств является понятие *универсального множества* (см. [3], [6], [5]). Изучение проективных множеств даже второго класса наталкивается на непреодолимые трудности. Так, не решен полностью вопрос об измеримости множеств (B_2), их мощности и о наличии у них свойства Бэра. Важные результаты в этом направлении получены П. С. Новиковым [4]: существует несчетное CA-множество, относительно к-рого непротиворечиво предположение, что оно не содержит совершенного подмножества; существует множество (B_2), относительно к-рого непротиворечиво утверждение, что оно неизмеримо.

Введение П. С. Александровым [7] Г-операции, дополнительной к A-операции, явилось первым шагом в направлении построенной А. Н. Колмогоровым [8] и Ф. Хаусдорфом [9] общей теории теоретико-множественных операций; однако основной класс операций составляют положительные теоретико-множественные операции, или δs-операции. Для каждой δs-операции Φ была определена дополнительная δs-операция Φ^c и дана формула

$$\Phi^c(\{E_n\}) = C[\Phi(\{CE_n\})],$$

к-рая может рассматриваться как определение Φ^c. Было введено также понятие нормальной δs-операции (для любого семейства M множеств $\Phi(\Phi(M))=\Phi(M)$, см. [8]). A-операция и Г-операция являются взаимно дополнительными нормальными δs-операциями. То же самое справедливо относительно операций счетного объединения и счетного пересечения. Одной из ключевых теорем общей теории операций над множествами, лежащими в топологич. пространствах, является теорема Колмогорова о дополнениях: если пространство содержит дисконтинуум, M — система всех замкнутых подмножеств этого пространства и Φ — произвольная теоретико-множественная операция, то дополнение хотя бы одного множества семейства $\Phi(M)$ ему не принадлежит (см. [8], [5], [9]). Применение к данному семейству M множеств попеременно δs-операции Φ и Φ^c позволяет построить возрастающую трансфинитную последовательность классов $M_0=M$, $M_1, \ldots, M_\alpha, \ldots$, $\alpha<\omega_1$, относительно к-рой верна теорема Колмогорова о непустоте классов: если Φ есть нормальная δs-операция более мощная, чем операции счетного объединения (или счетного пересечения), а M есть семейство всех замкнутых подмножеств метрич. пространства, содержащего дисконтинуум, то все классы M_α, $\alpha<\omega_1$, порождаемые операцией Φ из семейства M, попарно различны. При этом δs-операция Φ считается более мощной, чем δs-операция ψ, если $\Phi(M) \supseteq \psi(M)$ для любого семейства M множеств (см. [8], [5]). Если $\Phi = \bigcup_1^\infty$ (или $\bigcap_1^\infty$), то классы M_α, $\alpha<\omega_1$, порожденные операцией Φ из семейства M, представляют собой классы B-множеств, порожденных семейством M (классификация Хаусдорфа). Аналогичным образом A-операция порождает из семейства M борелевских множеств классы M_α, $\alpha<\omega_1$, C-множеств (*Лузина множеств).* Каждое C-множество измеримо и обладает свойством Бэра. Все C-множества входят в класс (B_2), но не исчерпывают его.

Исключительно важную роль в Д. т. м. играет введенное Н. Н. Лузиным понятие отделимости [4]. Первый принцип отделимости: всякие два непересекающиеся A-множества отделимы (B). Второй принцип отделимости: если E и P — два A-множества (или CA-множества), то множества $E \setminus P$ и $P \setminus E$ отделимы (CA). Существуют два CA-множества, неотделимые (B). Проблема отделимости проективных множеств второго класса была решена П. С. Новиковым [4]; при этом принципы отделимости оказались обращенными: они получаются из соответствующих теорем для проективных множеств первого класса заменой (A) на (CA_2), (CA) на (A_2) и (B) на (B_2). Проблема отделимости в классе C-множеств была также решена П. С. Новиковым [4] (см. также [3]). Им же введено обобщение понятия отделимости множеств — понятие одновременной или кратной отделимости множеств, равно как и основной инструмент при доказательстве теорем кратной отделимости — принцип сравнения индексов [4].

Важная глава в развитии Д. т. м. связана с решением проблемы униформизации. Множество P униформизует множество $E \subset X \times Y$, если $P \subset E$ и если P имеет ту же, что и E, проекцию на X и проектируется на X взаимно однозначно. Всякое B-множество униформизуется CA-множеством. Процесс эффективного выбора точки [4] в непустом CA-множестве позволил получить более сильный результат: всякое CA-множество униформизуется CA-множеством. Всякое A-множество униформизуется множеством типа $A_{\rho\sigma\delta}$ [3] (см. также [10]). Существует A-множество в евклидовой плоскости, не униформизуемое ни A-множеством, ни CA-множеством (см., напр., [11], с. 57). В вопросе о том, в каких случаях B-множество может быть униформизовано B-множеством, наиболее общий результат имеет вид: всякое плоское B-множество, пересекающееся с прямыми $x=\text{const}$ по множествам типа F_σ, униформизуется B-множеством. Проблема униформизации возникла при решении проблемы о неявных B-функциях (см. [3]). При этом возникли и другие задачи: о природе проекций B-множеств, о расщеплении множеств, о накрытии множеств, о природе множества всех тех точек проекции данного B-множества E, прообразы к-рых (в пересечении с E) обладают нек-рым фиксированным свойством. Представление о второй и третьей задачах дают следующие теоремы [3]: B-множество, имеющее счетнократную проекцию, является объединением счетного числа униформных B-множеств, причем, каковы бы ни были два таких множества, одно из них лежит под другим (теорема о расщеплении B-множества); всякое A-множество, имеющее счетнократную проекцию, содержится в нек-ром B-множестве, обладающем этим свойством (теорема о накрытии A-множества).

Помимо классификаций B-множеств, принадлежащих А. Лебегу и Ф. Хаусдорфу, существует классификация Лузина — Валле Пуссена. В этой классификации в качестве инструмента для исследования строения множеств данного класса K_α, $\alpha < \omega_1$, выбраны множества, представимые в виде пересечения и не представимые в виде объединения счетного числа множеств классов $<\alpha$; эти множества наз. элементами класса α. Всякое множество класса K_α есть объединение счетного числа попарно непересекающихся элементов классов $\leqslant \alpha$. Каждый класс K_α разбивается на подклассы K_α^β, $\beta < \omega_1$, причем в каждом классе существуют подклассы со сколь угодно большими номерами $\beta < \omega_1$. Поскольку каждое множество класса α строится из элементов, то возник вопрос об исследовании строения самих элементов, в частности о существовании в каждом классе K_α такого основного топологич. типа элементов, названных каноническими, чтобы каждый элемент класса α мог быть представлен в виде объединения счетного числа канонич. элементов классов $\leqslant\alpha$ (все рассматривается в пространстве I иррациональных чисел). В первом классе имеются канонич. элементы двух типов — одноточечное множество и топологич. образ канторова совершенного множества. Во втором классе [12] каждый элемент есть объединение канонич. элемента класса 2, каковым является множество, гомеоморфное пространству I, и множества класса $\leqslant 1$. Были найдены и канонич. элементы третьего класса: ими оказались элементы третьего класса, построенные Р. Бэром, к-рые являются каноническими (см. [3]). Проблема существования канонич. элементов высших классов, оказавшаяся исключительно трудной, была решена Л. В. Келдыш [13], установившей существование канонич. элементов в каждом классе $\alpha<\omega_1$ и выяснившей их строение. Каждый элемент класса $\alpha>2$ является объединением одного канонич. элемента класса α и не более чем счетного числа множеств классов $<\alpha$. Еще одна трудная задача из этого круга связана с построением арифметич. примеров B-множеств низших классов. Такой пример для класса 3 построен Р. Бэром (см. [3]). Арифметич. примеры элементов всех конечных классов даны Л. В. Келдыш [13] (см. также [3]), указавшей на принципиальную возможность построения таких примеров для классов $\alpha\geqslant\omega_0$.

Важную роль в Д. т. м. играет *Лаврентьева теорема* о продолжении гомеоморфизма (см. [9]): пусть X и Y полные метрич. пространства, $A\subset X$, $B\subset Y$ и $f\colon A\xrightarrow{\text{на}}B$ есть гомеоморфизм; тогда существует продолжение отображения f до гомеоморфизма двух G_δ-множеств, лежащих в этих пространствах. Из этой теоремы легко следует теорема о топологической инвариантности (см. [9]): пусть $\mathfrak{B}$ — система замкнутых множеств и Φ — такая δs-операция, что пересечение $\Phi(\mathfrak{B})$-множества (т. е. множества семейства $\Phi(\mathfrak{B})$ с G_δ-множеством есть снова $\Phi(\mathfrak{B})$-множество; тогда каждое $\Phi(\mathfrak{B})$-множество, лежащее в полном метрич. пространстве, является $\Phi(\mathfrak{B})$-множеством в любом метрич. пространстве, в к-ром оно топологически содержится. Система $\mathfrak{B}$ в этой теореме может быть заменена системой $\mathfrak{A}$ открытых множеств. Таким образом, $\Phi(\mathfrak{B})$-множества, где Φ удовлетворяет указанному выше условию, лежащие в полных метрич. пространствах, являются абсолютными $\Phi(\mathfrak{B})$-множествами, и то же самое верно для $\Phi(\mathfrak{A})$-множеств (при этом имеется в виду абсолютность в классе метрич. пространств). Для ряда частных случаев, напр. CA-множеств [7] (Φ есть Г-операция), этот результат был установлен без применения теоремы Лаврентьева. Всякое полное метрич. пространство есть абсолютное G_δ. Всякое (метризуемое) абсолютное G_δ гомеоморфно нек-рому полному метрич. пространству (теорема Александрова — Хаусдорфа, см. [9]).

Справедлива следующая теорема Александрова — Урысона [12] о топологич. характеристике пространства иррациональных чисел: каждое нульмерное метрич. пространство X со счетной базой, не имеющее ни одной точки локальной компактности и являющееся абсолютным G_δ, гомеоморфно пространству I. А так как I есть абсолютное G_δ и обладает всеми остальными свойствами пространства X, то перечисленные в теореме свойства пространства X полностью характеризуют пространство I с топологич. точки зрения. Эта характеризация позволила доказать следующий результат [14]: каждое метрич. пространство, являющееся непрерывным образом пространства I (и, значит, абсолютным A-множеством), есть также факторный образ пространства I. К этому кругу результатов принадлежат также следующие: непустое сепарабельное метрич. пространство есть непрерывный открытый образ пространства I тогда и только тогда, когда оно есть абсолютное $G\delta$ (см. [15]); здесь «открытый» можно заменить на «замкнутый». Обобщением непрерывного отображения является понятие B-измеримого отображения, или B-функции, в частности, B-измеримого отображения класса α; обобщениями гомеоморфизма являются понятия обобщенного гомеоморфизма класса (α, β) и B-изоморфизма. Об этих отображениях см. [6].

При формулировке результатов, как правило, не указывался тот класс пространств, для к-рого они справедливы. Это объясняется тем, что большинство классич. результатов было получено для подмножеств пространства I, но почти все они (исключения всегда оговаривались) справедливы при замене I любым сепарабельным абсолютным G_δ (в частности, полным метрич. пространством со счетной базой). Дальнейшее развитие Д. т. м. проходило по линии обобщения классич. результатов для случая: 1) полных метрич. пространств (не обязательно сепарабельных); 2) совершенно нормальных топологич. пространств, в частности, бикомпактов; 3) общих топологич. пространств. Даже в первом случае обобщение классич. теории связано с серьезными трудностями, а часто и вовсе не имеет места. Обобщение теории B-множеств и A-множеств для этого случая рассмотрено А. Стоуном [16].

Класс совершенно нормальных пространств есть класс, за пределами к-рого уже не имеет места тот немаловажный факт, что система B-множеств (соответственно A-множеств), порожденных замкнутыми множествами данного пространства, совпадает с системой B-множеств (соответственно A-множеств), порожденных открытыми множествами этого пространства. Справедлива важная теорема о непустоте классов [11]: во всяком несчетном совершенно нормальном бикомпакте для каждого класса $\alpha<\omega_1$ существует B-множество класса α, не являющееся B-множеством класса $<\alpha$.

Проблема униформизации стала частным случаем общей проблемы о сечении многозначного отображения (см. *Сечение отображения*).

Современная разработка Д. т. м. в общих топологич. пространствах (третий случай) имеет связь с потребностями других областей математики (напр., с теорией потенциала). Подробнее см. [17] (имеется обширная библиография).

Идеи и методы Д. т. м. оказали большое влияние на развитие целого ряда областей математики: анализа, теории функций, топологии, математической логики и др.

Лит.: [1] Александров П. С., «C.r. Acad. sci.», 1916, t. 162, p. 323—25; [2] Суслин М. Я., там же, 1917, t. 164, p. 88—90; [3] Лузин Н. Н., *Собр. соч.*, т. 2, М., 1958; [4] Ляпунов А. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 133, с. 11—22; [5] Очан Ю. С., «Успехи матем. наук», 1955, т. 10, в. 3, с. 71—128; [6] Куратовский К., Топология, т. 1, М., 1966; [7] Александров П. С., «Fundam. math.», 1924, t. 5, p. 160—65; [8] Колмогоров А. Н., «Матем. сб.», 1928, т. 35, № 3—4, с. 415—22; [9] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937; [10] Арсенин В. Я., Ляпунов А. А., «Успехи матем. наук», 1950, т. 5, в. 5, с. 45—108; [11] Пономарев В. И., «Докл. АН СССР», 1966, т. 170, № 3, с. 520—23; [12] Александров П. С., Урысон П. С., «Math. Ann.», 1927, Bd 98, S. 89—106 (рус. пер. в кн.: Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 2, М.—Л., 1951, с. 973—92); [13] Келдыш Л. В., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1945, т. 17, с. 1—76; [14] Michael E., Stone A. H., «Pacif. J. Math.», 1969, v. 28, № 3, p. 629—33; [15] Архангельский А. В., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1966, т. 15, с. 181—223; [16] Stone A. H., «General Topology and its Application», 1972, v. 2, p. 249—70; [17] Frolik Z., «Czechoslovak Mathematical Journal», 1970, v. 20, p. 406—67.

А. Г. Елькин, В. И. Пономарев.

ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ — дробь (арифметическая), знаменателем к-рой является целая степень числа 10. Для Д. д. принята запись

$$a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0,\ b_1 b_2 \ldots b_l, \qquad (1)$$

где $0 \leqslant a_i$, $b_j < 10$ — целые числа, причем, если $k \neq 0$, то и $a_k \neq 0$.

Под (1) понимается число, равное

$$a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \\ + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_l}{10^l}.$$

Напр.,

$$\frac{3}{10} = 0{,}3; \quad \frac{3524}{100} = 35{,}24; \quad \frac{15}{1000} = 0{,}015.$$

Цифры, стоящие после запятой, наз. десятичными знаками. Если Д. д. не содержит целой части, т. е. меньше единицы по абсолютной величине, то перед запятой ставится нуль.

Бесконечной десятичной дробью наз. бесконечный ряд чисел вида:

$$a_0,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots, \tag{2}$$

где a_0 — целое число, а каждое из чисел b_j ($j=1, 2, \ldots$) принимает одно из значений 0, 1, 2..., 9. Любое действительное число α является суммой некоторого такого ряда, т. е.

$$\alpha = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}.$$

Частные суммы ряда (2) — конечные Д. д. $a_0,\ b_1 \ldots b_n$, являются приближенными значениями числа α с недостатком, а числа

$$a_0,\ b_1 \ldots b_n + \frac{1}{10^n}$$

— приближенными значениями с избытком. Если существуют такие целые числа n и m, что для всех $i > n$ имеют место равенства

$$b_i = b_{i+m},$$

то бесконечная Д. д. наз. *периодической*. Всякую конечную Д. д. можно рассматривать как бесконечную периодическую с $b_i = 0$ для $i > n$. Если α — рациональное число, то соответствующая ему дробь (2) будет периодической. Для иррационального числа α дробь (2) периодической быть не может. *С. А. Степанов.*

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ — позиционная система счисления с основанием, равным 10. Современная Д. с. с. возникла на основе нумерации, зародившейся около 5 в. н. э. в Индии. Система получила название арабской, т. к. в Европе с ней впервые познакомились по латинским переводам с арабского. Запись числа в Д. с. с. компактна и удобна для производства арифметич. операций. Очевидные преимущества Д. с. с. в сравнении с алфавитными системами или римской системой счисления содействовали ее повсеместному распространению. *В. И. Нечаев.*

ДЕСЯТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ *действительного числа* — приближенное изображение действительного числа конечной *десятичной дробью*. Всякое действительное число a может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби:

$$a = \pm\, \alpha_0,\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$

где α_0 — неотрицательное число, α_n — одна из цифр 0, 1, 2..., 9, $n = 1, 2, \ldots$. Если исключить из рассмотрения бесконечные периодические десятичные дроби с периодами, состоящими только из одних девяток, то всякое действительное число будет записываться в виде бесконечной десятичной дроби однозначным образом. Пусть выбрана такая запись чисел и $a \geqslant 0$, тогда конечная десятичная дробь

$$\underline{a}_n = \alpha_0,\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

(соответственно $\overline{a}_n = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n}$) наз. *нижним* (соответственно *верхним*) *десятичным приближением порядка* n числа a. Если

$a<0$ и $a'=-a$, то нижнее $\underline{a}_n$ и верхнее $\overline{a}_n$ Д. п. порядка n числа a определяются равенствами

$$\underline{a}_n=-\overline{a}'_n,\quad \overline{a}_n=-\underline{a}'_n.$$

Для Д. п. действительного числа выполняются следующие соотношения:

$$\underline{a}_n\leqslant\underline{a}_{n+1}\leqslant a\leqslant\overline{a}_{n+1}\leqslant\overline{a}_n,$$

$$\overline{a}_n-\underline{a}_n=10^{-n}.$$

Из них следует, что

$$\lim_{n\to\infty}(\underline{a}_n\pm\underline{b}_n)=a\pm b,\quad \lim_{n\to\infty}\underline{a}_n\underline{b}_n=ab,$$

а если $b\neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{a}_n/\underline{b}_n=a/b$, при этом вместо нижних Д. п. можно брать верхние.

Д. п. используются на практике для приближенных вычислений. В качестве приближенных значений сумм $a+b$, разностей $a-b$, произведений ab и частных a/b берутся, соответственно, $\underline{a}_n+\underline{b}_n$, $\underline{a}_n-\underline{b}_n$, $\overline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)}_n$ и $\overline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)}_n$. В результате указанных действий над конечными десятичными дробями $\underline{a}_n$ и $\underline{b}_n$, имеющими не более n значащих цифр после запятой, получаются снова десятичные дроби с не более чем n значащими цифрами после запятой. С помощью этих дробей искомый результат можно получить с любой степенью точности. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДЕТЕРМИНАНТ — то же, что *определитель*.

ДЕТЕРМИНАНТНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — множество матриц $D_t(d, n)$ порядка $d\times n$ и ранга меньше t, снабженное структурой алгебраич. многообразия. Пусть $J_t(d, n)$ — идеал кольца многочленов

$$k\left[(T_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant d\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\right]$$

с коэффициентами в поле k, порожденный минорами порядка t матрицы порядка $d\times n$, составленной из переменных T_{ij} (детерминантный идеал). Множество нулей идеала $J_t(d, n)$ в аффинном пространстве $A^{dn}=\mathrm{Spec}(k[(T_{ij})])$ наз. детерминантным многообразием и обозначается $D_t(d, n)$. Для любой коммутативной k-алгебры k' множество k'-точек Д. м. $D_t(d, n)$ естественным образом отождествляется с множеством матриц порядка $d\times n$ и ранга $<t$ с коэффициентами в k'.

Частные случаи Д. м.: $D_d(d, d)$ есть гиперповерхность в A^{d^2}, задаваемая обращением в нуль определителя квадратной матрицы порядка d, составленной из независимых переменных (детерминантная гиперповерхность); $D_2(d, n)$ есть аффинный конус для образа вложения Сегре

$$P^{d-1}\times P^{n-1}\longrightarrow P^{dn-1}$$

произведения проективных пространств [2].

Д. м. обладают следующими свойствами: $D_t(d, n)$ неприводимо, приведено (т. е. идеал $J_t(d, n)$ прост), является многообразием Коэна — Маколея (см. *Коэна — Маколея кольцо*), нормально, и размерность $D_t(d, n)$ равна $(t-1)(n+d-1)$ (см. [1], [2]). При $t=1$ или $d=n$ (и только в этих случаях) $D_t(d, n)$ является схемой Горенштейна (см. *Горенштейна кольцо*) [5]. Д. м. тесно связаны с подмногообразиями Шуберта грассманова многообразия (см. *Шуберта многообразие*).

Лит.: [1] Hochster M., Eagon J., «Amer. J. Math.», 1971, v. 93, № 4, p. 1020—58; [2] Kleiman S., Landolfi J., «Compositio math.», 1971, v. 23, p. 407—34; [3] Laksov D., «Comp. math.», 1975, v. 30, p. 273—92; [4] Musili C., «J. Indian Math. Soc.», 1974, v. 38, p. 131—45; [5] Svanes T., «Advances Math.», 1974, v. 14, p. 369—453. *И. В. Долгачев.*

ДЕФЕКТ, дефектное число оператора,— размерность $\dim D_\lambda$ *дефектного подпространства* линейного оператора. Иногда, в более широком смысле, дефектом линейного многообразия гильбертова пространства наз. размерность ортогонального дополнения этого многообразия. *В. И. Соболев.*

ДЕФЕКТ треугольника — недостаток до двух прямых углов суммы внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского. Д. треугольника пропорционален площади треугольника. Максимальное значение Д. треугольника равно двум прямым углам, когда все вершины треугольника являются бесконечно удаленными точками. *А. Б. Иванов.*

ДЕФЕКТНОЕ ЗНАЧЕНИЕ мероморфной функции f — комплексное число a (конечное или бесконечное), дефект к-рого (см. ниже) $\delta(a, f)$ положителен. Функция f определена в круге $|z|<R\leqslant\infty$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Дефект значения a:

$$\delta(a, f)=1-\overline{\lim_{r\to R}}\frac{N(r, a, f)}{T(r, f)},$$

где $T(r, f)$ — характеристическая функция Неванлинны, отражающая рост f при $r\to R$, и

$$N(r, a, f)=\int_0^r[n(t, a)-n(0, a)]\,d\ln t+n(0, a)\ln r$$

— считающая функция; здесь $n(t, a)$ — число решений уравнения $f(z)=a$ в круге $|z|\leqslant t$ (с учетом кратностей). Если $T(r)\to\infty$ при $r\to R$, то $0\leqslant\delta(a, f)\leqslant 1$ для всех $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Если $f(z)\neq a$ ни для какого z, то $\delta(a, f)=1$ и a есть Д. з.; это равенство возможно и в более общем случае (напр., $f(z)=ze^z$, $R=\infty$ и $a=0$).

Если

$$\overline{\lim}\frac{T(r, f)}{\ln(1/(R-r))}=\infty$$

(или $f\not\equiv$const мероморфна во всей плоскости), то $\sum_a\delta(a,f)\leqslant 2$ (соотношение дефектов), и число Д. з. для такой f не более чем счетно. В остальном множество Д. з. может быть произвольным; напр., для любых последовательностей $\{a_\nu\}\subset\mathbb{C}$ и $\{\delta_\nu\}\subset\mathbb{R}^+$, $\sum_\nu\delta_\nu\leqslant 1$, найдется целая функция f такая, что $\delta(a_\nu, f)=\delta_\nu$ для всех ν и других Д. з. у f нет. Ограничения на рост f влекут за собой ограничения на Д. з. и их дефекты. Напр., мероморфная функция нулевого порядка или целая функция порядка $<1/2$ не могут иметь более одного Д. з.

Число

$$\Delta(a, f)=1-\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r, a, f)}{T(r, f)}$$

(f мероморфна в $\mathbb{C}$) наз. дефектом в смысле Валирона. Множество чисел a, для к-рых $\Delta(a, f)>0$, может иметь мощность континуума, но всегда имеет нулевую логарифмич. емкость.

См. также *Исключительное значение*, *Распределения значений теория*.

Лит.: [1] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [2] Хейман У., Мероморфные функции, пер. с англ., М., 1966; [3] Гольдберг А. А., Островский И. В., Распределение значений мероморфных функций, М., 1970. *Е. М. Чирка.*

ДЕФЕКТНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО оператора — ортогональное дополнение D_λ области значений $T_\lambda=\{y=(A-\lambda I)x,\ x\in D_A\}$ оператора $A_\lambda=A-\lambda I$, где A — линейный оператор, определенный на линейном многообразии D_A гильбертова пространства H, а λ — регулярное значение (регулярная точка) оператора A. При этом под регулярным значением оператора A понимается такое значение параметра λ, при к-ром уравнение $(A-\lambda I)x=y$ имеет единственное решение для любого y, а оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ ограничен, т. е. *резольвента* оператора A ограничена. При изменении λ Д. п. D_λ меняется, но его размерность остается одна и та же для всех λ, принадлежащих связной компоненте открытого множества всех регулярных значений оператора A.

Если A — симметрич. оператор с плотной областью определения D_A, то его связными компонентами регулярности будут верхняя и нижняя полуплоскости. В этом случае $D_\lambda=\{x\in D_{A^*},\ A^*x=\bar{\lambda}x\}$, а дефектные числа $n_+=\dim D_i$ и $n_-=\dim D_{-i}$, где A^* — сопряженный оператор, наз. (положительным и отрицательным) **индексами дефекта оператора** A. Кроме того,

$$D_{A^*}=D_A\ominus D_i\oplus D_{-i},$$

т. е. D_{A^*} есть прямая сумма D_A, D_i и D_{-i}. Таким образом, если $n_+=n_-=0$, то оператор A является самосопряженным; в противном случае Д. п. симметрич. оператора характеризуют степень его отклонения от самосопряженного оператора.

Д. п. играют важную роль в построении расширений симметрич. оператора до максимального оператора или до самосопряженного (гипермаксимального) оператора.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [3] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1—2, М., 1962—66; [4] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1954.

В. И. Соболев.

ДЕФИНИЗИРУЮЩИЙ ОПЕРАТОР для последовательности $x=\{\zeta_p\}$ — оператор M в пространстве последовательностей, имеющий вид

$$(Mx)_p=\sum_{-l}^{+l} m_j x_{p+j};\quad m_j=\overline{m}_{-j},$$

$$\sum_{-l}^{+l} m_j\lambda^j\leqslant 0,\quad |\lambda|=1;$$

и переводящий последовательность x в нек-рую *позитивную последовательность.*

Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.

ДЕФИНИТНОЕ ЯДРО, определенное ядро,— ядро $K(P, Q)$ линейного интегрального *Фредгольма оператора,* удовлетворяющее соотношению

$$\int_P\int_Q K(P, Q)\,\varphi(P)\,\overline{\varphi(Q)}\,dP\,dQ\geqslant 0\ \ (\leqslant 0),$$

где P, Q — точки евклидова пространства, φ — произвольная суммируемая с квадратом функция, $\overline{\varphi}$ — комплексно сопряженная функция. В зависимости от знака неравенства ядро наз. соответственно **неотрицательным** (или, иногда, **неотрицательно определенным**) или **неположительным** (соответственно **неположительно определенным**).

Иногда неотрицательным (неположительным) наз. (непрерывное) ядро, удовлетворяющее в области интегрирования неравенству $K(P, Q)\geqslant 0\ (\leqslant 0)$.

А. Б. Бакушинский.

ДЕФОРМАЦИЙ ТЕНЗОР — тензор, определяющий положение точек тела после деформации по отношению к их положению до деформации. Д. т. представляет собой симметричный тензор второго ранга

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right),\qquad (*)$$

где x_i — декартовы прямоугольные координаты точки тела до деформации, u_i — координаты вектора перемещения $\boldsymbol{u}$. В теории пластичности Д. т. разлагают на два составляющих тензора:

$$u_{ik}=u'_{ik}+u''_{ik}.$$

Тензор u'_{ik} описывает объемную деформацию и наз. **сферическим тензором деформации**:

$$u'_{ik}=\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}.$$

Тензор u''_{ik} описывает только изменение формы и сумма его диагональных элементов равна нулю:

$$u''_{ik}=u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}.$$

Тензор u''_{ik} наз. **девиатором тензора деформации**.

В случае малой деформации пренебрегают величинами 2-го порядка и Д. т. (*) определяется выражением:

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

В сферич. координатах r, θ, φ Д. т. (*) имеет вид:

$$u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad u_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{\partial r},$$

$$u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta+\frac{u_r}{r},$$

$$2u_{\theta\varphi}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\operatorname{ctg}\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi},$$

$$2u_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta},$$

$$2u_{\varphi r}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}.$$

В цилиндрич. координатах r, φ, z Д. т. (*) имеет вид:

$$u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi},\quad u_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$2u_{\varphi z}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z},\quad 2u_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r},$$

$$2u_{r\varphi}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}.$$

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория упругости, 3 изд., М., 1965; [2] Физический энциклопедический словарь, т. 1, М., 1960, с. 553.

ДЕФОРМАЦИОННЫЙ РЕТРАКТ топологического пространства X — подмножество $A\subset X$, обладающее тем свойством, что существует гомотопия тождественного отображения пространства X в нек-рое отображение $X\to A$, при к-рой все точки множества A остаются неподвижными. Если при гомотопии точки из $X\setminus A$ перемещаются по $X\setminus A$, то A наз. **строгим деформационным ретрактом**. Д. р. пространства X имеет одинаковый с X *гомотопический тип*. См. также *Ретракт*. *Е. Г. Скляренко.*

ДЕФОРМАЦИЯ — 1) Д. **аналитической структуры** — семейство аналитич. пространств (или связанных с ними аналитич. объектов), зависящее от параметров. Теория Д. возникла из задачи классификации всевозможных попарно не изоморфных комплексных структур на данном вещественном дифференцируемом многообразии. Основная идея, восходящая к Б. Риману (B. Riemann), состояла здесь в том, чтобы ввести аналитич. структуру на множестве всех таких структур. Уточнением этой идеи являются следующие понятия. **Аналитическим семейством** комплексных многообразий, параметризованным комплексным пространством S, наз. любое **гладкое** (т. е. локально устроенное как проекция прямого произведения с гладким слоем) аналитич. отображение $\pi: X\to S$. Если S связно, то все слои X_s, $s\in S$, отображения π диффеоморфны фиксированному слою X_o, где $o\in S$, и могут рассматриваться как семейство комплексных структур на X_o, аналитически зависящее от параметра $s \in S$. Если семейство X содержит в качестве слоев все комплексные многообразия, диффеоморфные X_o, причем все слои попарно не изоморфны, то S наз. пространством модулей вещественного многообразия X_o. Можно определить также пространство модулей для многообразий, принадлежащих определенному классу. Проблема построения пространства модулей (или проблема модулей) была решена вначале для компактных римановых поверхностей (см. *Римановых поверхностей конформные классы*). Результаты такого рода, хотя и неполные, получены и для компактных многообразий комплексной размерности 2 (см. *Аналитическая поверхность*).

Для многообразий бо́льших размерностей исследование проблемы модулей встречает значительные трудности. В связи с этим К. Кодаира и Д. Спенсер [6], [7], [8] предприняли локальное изучение проблемы модулей, заложив тем самым основы теории Д. комплексных многообразий и аналитич. расслоений. Аналитической деформацией комплексного многообразия X_o наз. аналитич. семейство $\pi : X \to S$, причем S — комплексное пространство с отмеченной точкой o, слой над к-рой совпадает с X_o. Деформация $X = X_o \times S$ наз. тривиальной. Д. $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to S$ многообразия X_o наз. изоморфной Д. $\pi : X \to S$, если существует аналитич. изоморфизм $\varphi : \tilde{X} \to X$, тождественный на X_o и такой, что $\pi \circ \varphi = \tilde{\pi}$. Если $\pi : X \to S$ — аналитич. Д., то всякое аналитич. отображение $f : S' \to S$, где o' — пространство с отмеченной точкой o' и $f(o') = o$, определяет при помощи *замены базы* Д. $X \times_S S' \to S'$ — обратный образ данной Д. при отображении f. Деформация $\pi : X \to S$ наз. локально полной (в точке o), если любая аналитич. Д. $\pi' : X' \to S'$ многообразия X_o изоморфна в нек-рой окрестности отмеченной точки ее обратному образу при нек-ром локальном аналитич. отображении $f : S' \to S$. Если при этом $df_{o'}$ определено однозначно, то Д. наз. версальной в точке o, а если однозначно определен росток отображения f,— то универсальной. Важную роль в теории играет линейное отображение $T_o(S) \to H^1(X_o, \Theta)$, где $\Theta = \Theta_{X_o}$ — пучок ростков голоморфных векторных полей на X_o, к-рое сопоставляется аналитич. Д. и наз. соответствующей инфинитезимальной деформацией.

Основная теорема локальной теории Д., доказанная М. Куранnetworkи [9], утверждает, что для каждого компактного комплексного многообразия X_o существует версальная в точке o Д., параметризованная (не обязательно гладким) аналитич. подпространством S в окрестности нуля пространства $H^1(X_o, \Theta)$. При этом S — слой в точке o нек-рого локального аналитич. отображения $\gamma : H^1(X_o, \Theta) \to H^2(X_o, \Theta)$, имеющего вид $\gamma(\xi) = [\xi, \xi] + \ldots$, где $[,]$ — операция в градуированной алгебре Ли $H^*(X_o, \Theta)$, индуцированная скобкой Ли в пучке Θ, а точки означают члены порядка $\geqslant 3$. Если $H^1(X_o, \Theta) = 0$, то многообразие X_o является жестким, т. е. любая его Д. локально тривиальна (теорема жесткости Фрёлихера — Нейенхёйса). Если $H^2(X, \Theta) = 0$, то S — окрестность нуля в $H^1(X_o, \Theta)$. Касательное пространство $T_o(S)$ всегда совпадает с $H^1(X_o, \Theta)$. Д. является полной в точке o тогда и только тогда, когда соответствующая инфинитезимальная Д. сюръективна, а версальность равносильна биективности инфинитезимальной Д. Если $\dim H^0(X_s, \Theta_{X_s})$, $s \in S$, постоянна в окрестности нуля, то деформация Кураниси является универсальной.

Локальная теория Д. компактных комплексных многообразий обобщается на случай компактных комплексных пространств. При этом вместо гладкости отображения $\pi : X \to S$ и компактности слоя требуют, чтобы π было плоским и собственным отображением. Здесь также можно доказать существование версальной в точке o Д. (см. [3], [5], [11]).

Изучаются также Д. ростков аналитич. пространств (или, что равносильно, аналитич. алгебр). Справедлива теорема о существовании версальной Д. для изолированной особой точки комплексного пространства [4].

Наряду с теорией Д. комплексных пространств существуют теории Д. различных «аналитических объектов» — аналитич. расслоений, подпространств, отображений, классов когомологий, аналитич. пространств с дополнительной структурой (напр., с поляризацией) и др. Основные определения и проблематика этих теорий аналогичны описанным выше. Результаты, полученные для главных аналитич. расслоений, также аналогичны перечисленным выше. В частности, для любого *главного аналитического расслоения* E с компактной базой X и комплексной группой Ли G в качестве структурной группы существует версальная в точке o Д. расслоения E, параметризованная аналитич. подпространством в окрестности нуля пространства $H^1(X, \mathcal{O}_{\mathrm{Ad}\,E})$, где $\mathcal{O}_{\mathrm{Ad}\,E}$ — пучок ростков голоморфных сечений векторного расслоения над X, ассоциированного с E при помощи присоединенного представления [1]. Если X — компактная риманова поверхность, а G — редуктивная алгебраич. группа, то можно построить пространство модулей для стабильных главных аналитич. расслоений. В теории Д. подпространств, напротив, получены весьма общие результаты глобального характера. А именно, если X — произвольное комплексное пространство ограниченной размерности, то построено [2] плоское аналитич. семейство компактных аналитич. подпространств в X (т. е. аналитич. подпространство $Y \subset X \times S$, где S — комплексное пространство и проекция $Y \to S$ есть собственное плоское отображение), являющееся *универсальной* (*в глобальном смысле*) Д. для любого компактного аналитич. подпространства в X. В частности, S является пространством модулей для рассматриваемой задачи. Аналогичная проблема модулей решена в относительном случае, а также для компактных аналитич. циклов заданного комплексного пространства. Из решения проблемы модулей для компактных подпространств следует решение проблемы модулей и для аналитич. отображений заданного компактного комплексного пространства в другое заданное комплексное пространство.

Существуют попытки унификации упомянутых выше теорий Д. С каждой из этих теорий можно связать контравариантный функтор D из категории аналитич. пространств (или ростков аналитич. пространств) в категорию множеств. Напр., в теории локальных Д. комплексного пространства X_0 множество $D(S)$ состоит из классов локально изоморфных Д. пространства X_0, параметризованных ростком аналитич. пространства S. Если фиксировать S и элемент $\delta \in D(S)$, то возникает морфизм функторов $\mathrm{Mor}(\cdot, S) \to D$. Сюръективность этого морфизма (пара (S, δ) наз. в этом случае п о л н о й) соответствует свойству полноты Д. δ, а биективность — свойству ее универсальности. Проблема модулей связана, таким образом, с вопросом о представимости функтора D. В связи с этим было предпринято изучение ковариантных функторов из категории артиновых колец в категорию множеств, удовлетворяющих нек-рым естественным условиям [12]. Существование полной пары доказывается, однако, лишь в категории формальных алгебр, что соответствует существованию формальной полной Д. (см. *Деформация* алгебраического многообразия).

Обобщением теории Д. комплексных структур на многообразии является теория Д. *псевдогрупповых структур*, в к-рой рассматриваются семейства псевдогрупповых структур, гладко зависящие от параметра, принимающего значения в вещественном аналитич. пространстве. В частности, для псевдогрупповой структуры на компактном гладком многообразии, соответствующей эллиптич. транзитивной псевдогруппе преобразований, доказано существование версального ростка деформации [10].

Лит.: [1] Донин И. Ф., «Матем. сб.», 1974, т. 94, № 3, с. 430—43; [2] Douady A., «Ann. Inst. Fourier», 1966, t. 16, p. 1—95; [3] его же, «Ann. sci. Ecole norm. sup.», 1974, t. 7, № 4, p. 569—602; [4] Grauert H., «Invent. math.», 1972, Bd 15, № 3, S. 171—98; [5] его же, там же, 1974, Bd 25, № 2, S. 107—42; [6] Kodaira K., Spencer D. C., «Ann. Math.», 1958, v. 67, № 2, p. 328—401; [7] их же, там же, 1958, v. 67, № 3, p. 403—66; [8] их же, там же, 1960, v. 71, № 1, p. 43—76; [9] Kuranishi M., в кн.: Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Minneapolis. 1964, N. Y.— B., 1965, p. 142—54; [10] Moolgavkar S. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1975, v. 212, № 485, p. 173—97; [11] Паламодов В. П., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, № 3, с. 129—194; [12] Шлезингер М., «Математика», 1971, т. 15, № 4, с. 115—29. *А. Л. Онищик, Д. А. Пономарев.*

2) Д. алгебраического многообразия — включение алгебраич. многообразия в семейство алгебраич. многообразий. Теория Д. алгебраич. многообразий и схем представляет собой алгебраич. аналог теории Д. аналитич. структур. Ее основными вопросами являются следующие:

Существование подъема. Дана схема X_0 над полем k, схема S, точка $s_0 \in S$ с полем вычетов $k(s_0)=k$. Существует ли плоская S-схема X, для к-рой слой X_{s_0} над точкой s_0 изоморфен X_0? (S-схема X наз. деформацией, или подъемом, схемы X_0 над S).

Проблема универсальности. Существует ли версальная (соответственно универсальная) Д. схемы X_0, т. е. такая Д. M над схемой X_0, что для любой другой Д. $X \to S$ найдется (соответственно единственный) морфизм $S \to M$, для которого $X \cong M \underset{M}{\times} S$?

Каждая Д. $X \to S$ схемы X_0 с помощью операции формального пополнения вдоль слоя X_{s_0} определяет формальную деформацию $\varkappa$ над пополнением локального кольца $\hat{\mathcal{O}}_{S, s_0}$ схемы S в точке s_0, т. е. плоскую формальную схему над $\hat{\mathcal{O}}_{S, s_0}$ с топологич. пространством X_0. Формальные аналоги перечисленных выше вопросов формулируются следующим образом:

Существование формальной Д. Дано полное локальное кольцо Λ с полем вычетов k. Существует ли плоская формальная схема над Λ с топологическим пространством X_0?

Существование формальной схемы модулей. Существует ли формальная версальная (соответственно универсальная) Д., т. е. плоская формальная схема $p: \varkappa \to \mathcal{O}$ над полным локальным кольцом $\mathcal{O}$ с полем вычетов k такая, что для любой формальной Д. $\varkappa' \to \mathrm{Spec}\Lambda$ имеется (соответственно единственный) гомоморфизм колец $\mathcal{O} \to \Lambda$, для которого $\varkappa' \simeq \varkappa \otimes \mathcal{O} \Lambda$?

Универсальная формальная Д. гладкого многообразия представляет собой алгебраич. аналог локального пространства модулей в теории Д. аналитич. структур.

Если $S = \mathrm{Spec} R$, где R — локальное артиново (соответственно полное) кольцо с полем вычетов k, то Д. X_0 над S наз. инфинитезимальной (соответственно эффективной формальной). В случае, когда R — полное локальное кольцо характеристики нуль (напр., кольцо *Витта векторов*), эффективная формальная Д. X_0 наз. подъемом X_0 в характеристику нуль.

Если X_0 — гладкая k-схема и $H^2(X_0, T_{X_0})=0$, где T_{X_0} — касательный пучок на X_0, то для любого артинова (соответственно полного) локального кольца существует инфинитезимальная (соответственно формальная) Д. X_0. При этом, если $H^1(X_0, T_{X_0})=0$, то такая Д. единственна с точностью до изоморфизма (см. [4]). Аналогичные утверждения для необязательно гладких схем даются в терминах кокасательного комплекса (см. [5], [6]). Вопрос о существовании эффективной формальной Д. изучается с помощью рассмотрения функтора D_{X_0} из категории C_k артиновых локальных колец с полем вычетов k в категорию множеств, к-рый сопоставляет каждому объекту R из C_k множество всех инфинитезимальных Д. X_0 над R. Универсальная формальная Д. X_0 существует в том и только в том случае, когда функтор является пропредставимым функтором. При этом пропредставляющий объект — полное локальное кольцо M_{X_0} с полем вычетов k — наз. формальной схемой модулей k-схемы X_0. Формальная версальная Д. $\tilde{\rho}: \varkappa \to \tilde{M}_{X_0}$ существует, если X_0 собственна над k или X_0 есть аффинная схема конечного типа над k с изолированными особыми точками (см. [2], [6]). Версальная формальная Д. является универсальной, если для любого сюръективного гомоморфизма $R' \to R$ локальных артиновых колец и Д. $X' \to R'$ из $D_{X_0}(R')$ естественное отображение групп автоморфизмов

$$\mathrm{Aut}_{R'}(X' \mid X_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}_R(X'_{R'} \otimes R \mid X_0)$$

является сюръективным. Это условие выполняется, напр., если X_0 — гладкая схема и $H^0(X_0, T_{X_0})=0$. При этом, если $H^2(X_0, T_{X_0})=0$, то формальная схема модулей M_{X_0} является полным регулярным локальным кольцом, изоморфным кольцу $k[[t_1, \ldots, t_m]]$ формальных степенных рядов от m переменных. Число m равно в этом случае $\dim_k H^1(X_0, T_{X_0})$ и наз. числом локальных модулей схемы X_0. В общем случае $\dim_k H^1(X_0, T_{X_0})$ равна размерности касательного пространства к M_{X_0} и $\tilde{M}_{X_0}$, т. е. размерности $\dim_k m/m^2$, где m — максимальный идеал соответствующего локального кольца, а

$$\dim_k H^1(X_0, T_{X_0}) - \dim M_{X_0} \leqslant \dim_k H^2(X_0, T_{X_0}).$$

Наличие нильпотентных элементов в формальной схеме модулей представляет довольно частое явление.

Если версальная (соответственно универсальная) формальная Д. $\varkappa \to M_{X_0}$ алгебраизуема, т. е. существует плоская схема над M_{X_0}, формальное пополнение которой вдоль замкнутого слоя изоморфно $\varkappa$, то соответствующая алгебраизация наз. локальной версальной (соответственно универсальной) Д. k-схемы X_0. Если X_0 проективна и $H^2(X_0, T_{X_0})=0$,то алгебраизация существует. Напр., для полной гладкой кривой рода $g>1$ существует локальная универсальная Д. над кольцом $k[[t_1, \ldots, t_{3g-3}]]$. В общем случае, для каждой поляризации α многообразия X_0 существует максимальная замкнутая подсхема в формальной схеме модулей $M_{X_0, \alpha} \subset M_{X_0}$ такая, что $p^{-1}(M_{X_0, \alpha})$ алгебраизуема. Коразмерность $M_{X_0, \alpha}$ в M_{X_0} не превышает $\dim_k H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$. Напр., если X_0 — алгебраическая *К3-поверхность*, M_{X_0} регулярна размерности 20, а для любой поляризации α подсхема $M_{X_0, \alpha}$ регулярна размерности 19.

Теорема Артина об аппроксимации применяется для алгебраизации формальной схемы модулей. Существует схема S конечного типа над k и точка $s_0 \in S$ с полем вычетов k такая, что пополнение $\hat{\mathcal{O}}_{S, s_0} \simeq \tilde{M}_{X_0}$, и существует Д. X_0 над S, индуцирующая версальную локальную Д. $\tilde{p}: \varkappa \to \tilde{M}_{X_0}$. Схема S определена однозначно с точностью до локального изоморфизма в этальной топологии [1]. Относительно Д. особых многообразий и особых точек см. *Особая точка* алгебраического многообразия. Относительно Д. групповых схем см. *Групповая схема*.

Лит.: [1] Артин М., «Математика», 1970, т. 14, № 4, с. 3—47; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 77—170; [3] Шлезингер М., «Математика», 1971, т. 15, № 4, с. 115—29; [4] Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1), B.— Hdlb.—N. Y., 1971; [5] Rim D. S., в кн.: Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA71), B.—Hdlb.—N. Y., 1972, p. 32—132; [6] Mumford D., в кн.: Zariski O., Algebraic surfaces, 2 ed., B.—Hdlb.—N. Y., 1971, p. 118—28. *И. В. Долгачев.*

3) Д. алгебры — семейство алгебр, зависящее от параметров. Всевозможные билинейные операции или алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве V над полем k образуют векторное пространство $A(V)$. Два элемента этого пространства представляют *изоморфные алгебры* тогда и только тогда, когда они лежат на одной орбите линейной группы $\mathrm{GL}(V)$, естественным образом действующей в $A(V)$. Теория Д. алгебр позволяет исследовать локальное строение фактормножества $A(V)/\mathrm{GL}(V)$, т. е. множества классов изоморфных алгебр в пространстве V, прямое описание к-рого связано с большими трудностями. Если выделен нек-рый класс алгебр $K \subseteq A(V)$, то можно рассматривать Д. алгебр из класса K, не выводящие за пределы этого класса. В частности, рассматриваются Д. ассоциативных, ассоциативно-коммутативных алгебр и алгебр Ли, образующие классы $K = \mathrm{Ass}(V)$, $K = \mathrm{Comm}(V)$, $K = \mathrm{Lie}(V)$, соответственно, инвариантные относительно действия группы $\mathrm{GL}(V)$. Если $\dim V = n$, то эти классы являются алгебраич. многообразиями в n^3-мерном пространстве $A(V)$.

Теория Д. алгебр в конечномерном пространстве V над полем $k = \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ действительных или комплексных чисел во многом аналогична теории *деформаций* аналитич. структур. Каждая конечномерная алгебра $\mathfrak{A}$ над $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ обладает полной Д., параметризованной ростком аналитич. подпространства в нуле пространства $H^2(\mathfrak{A}, V)$ [если $H^3(\mathfrak{A}, V) = 0$, то это подпространство совпадает с $H^2(\mathfrak{A}, V)$]. Из этого основного результата непосредственно следует теорема жесткости: если $H^2(\mathfrak{A}, V) = 0$, то алгебра $\mathfrak{A}$ является жесткой в K, т. е. орбита элемента $\mathfrak{A}$ относительно $\mathrm{GL}(V)$ открыта в K. Напр., жесткими в классе алгебр Ли являются полупростые алгебры Ли, а также их подалгебры Бореля. Утверждение, обратное к теореме жесткости, неверно. Аналогичные утверждения справедливы для конечномерных алгебр над произвольным алгебраически замкнутым полем k. Например, если $H^2(G, V) = 0$, то орбита алгебры $\mathfrak{A}$ в $\tilde{K}$ открыта по Зарискому.

Аналогично может быть развита теория Д. гомоморфизмов одной конечномерной алгебры в другую. На самом деле, описанные выше теории включаются в общую схему, использующую аппарат градуированных алгебр Ли. Сходные результаты получены также для Д. подалгебр.

Наряду с указанной выше теорией существует теория формальных Д. алгебр и их гомоморфизмов над произвольным полем k. Формальной Д. алгебры, заданной в векторном пространстве V над k, наз. алгебра на пространстве $V \otimes k((t))$ над полем $k((t))$ формальных степенных рядов над k с операцией $\circ$, к-рая полностью определяется условием

$$a \circ b = ab + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(a, b)\, t^i, \quad a, b \in V,$$

где $\varphi_i \in A(V)$. Требуя, чтобы Д. принадлежала данному классу алгебр, можно говорить о формальных Д. ассоциативных, ассоциативно-коммутативных, лиевых и других алгебр.

Две формальные Д. алгебры $\mathfrak{A}$ с умножениями $\times$ и $\circ$ соответственно наз. эквивалентными, если существует линейный автоморфизм Φ пространства $V \otimes k((t))$ со свойством

$$\Phi(a) = a + \sum_{i=1}^{\infty} t^i \varphi_i(a), \quad a \in V,$$

где $\varphi_i : V \to V$ — линейное отображение такое, что
$$a \circ b = \Phi^{-1}(\Phi(a) \times \Phi(b)).$$

Д., эквивалентная алгебре $\mathfrak{A}$ с исходным умножением, наз. **тривиальной**. Алгебра, не имеющая нетривиальных формальных Д. в данном классе алгебр, наз. **формально жесткой** в этом классе. Напр., свободная алгебра в классе всех алгебр будет формально жесткой. В классах $\mathrm{Ass}(V)$, $\mathrm{Comm}(V)$, $\mathrm{Lie}(V)$ достаточным условием формальной жесткости алгебры $\mathfrak{A}$ является равенство $H^2(\mathfrak{A}, V)=0$. В классе $\mathrm{Ass}(V)$ это условие является также и необходимым [3].

В случаях $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ формальные Д. алгебр служат аппаратом для изучения аналитич. Д.

Важной областью приложений и источником примеров Д. алгебр является теоретич. физика, где, в частности, возник следующий класс Д. алгебр (см. [4], [5]). **Стягиванием** конечномерной алгебры $\mathfrak{A}$ над $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ наз. непрерывная кривая $\mathfrak{A}_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, в пространстве $A(V)$ такая, что $\mathfrak{A}_t = \mathfrak{A}$ при $0 \leqslant t < 1$. Алгебра $\mathfrak{A}_1$, полученная из $\mathfrak{A}$ в результате стягивания, наз. **предельной** и может не быть изоморфной алгебре $\mathfrak{A}$. Напр., любую алгебру можно стянуть в алгебру с нулевым умножением; любую полупростую алгебру Ли можно стянуть в неабелеву неполупростую.

Лит.: [1] Nijenhuis A., Richardson R. W. Jr., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1966, v. 72, № 1, p. 1—29, 1967, v. 73, № 1, p. 175—79; [2] Gerstenhaber M., «Ann. Math.», 1964, v. 79, p. 59—103; [3] Knudson D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 140, p. 55—70; [4] Inönü E., Wigner E. P., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1953, v. 39, № 6, p. 510—24; [5] Hermann R., Lie groups for physicists, N. Y.— Amsterd., 1966. *А. А. Бояркин, А. В. Михалев, А. Л. Онищик.*

4) Д. **подмножества** A **пространства** X — *гомотопия*:
$$D: A \times I \longrightarrow X,$$
для к-рой $D(a, 0)=a$ при $a \in A$. Если, более того, множество $D(A \times I)$ принадлежит нек-рому подпространству X' пространства X, то D наз. Д. A в X', а A наз. деформируемым в X' в пространстве X. Пространство X наз. деформируемым в подпространство X', если оно деформируемо по себе в X'. В частности, X стягиваемо тогда и только тогда, когда оно деформируемо в одну из своих точек. Пространство X деформируемо в подпространство X' тогда и только тогда, когда для вложения $i : X' \to X$ существует правое гомотопически обратное отображение $r : X \to X'$, т. е. $i \circ r \sim 1$. Понятие Д. всего пространства по себе на подпространство родственно понятию слабой *ретракции*.

М. И. Войцеховский.

ДЕЦИЛЬ — значение x, при котором непрерывная строго монотонная функция распределения $F(x)$ принимает для $j=1, 2, \ldots, 9$ значения, равные $j/10$. Когда Д. существуют, они дают хорошее представление о форме кривой распределения. Расстояние между девятой и первой Д. наз. **интердецильной широтой**, она дает представление о рассеянии распределения. Д.— частный случай *квантили*. *Н. М. Халфина.*

ДЖЕКОБСОНА КОЛЬЦО — коммутативное кольцо с единицей, любой простой идеал к-рого является пересечением максимальных идеалов, его содержащих, т. е. кольцо, любое целостное факторкольцо к-рого имеет нулевой *Джекобсона радикал*. Напр., любое артиново кольцо, кольцо целых чисел (вообще, любое дедекиндово кольцо, не являющееся полулокальным) или абсолютно плоское кольцо являются Д. к. Напротив, локальное не артиново кольцо не будет Д. к.

Если A есть Д. к., а B — целая A-алгебра или A-алгебра конечного типа, то B есть Д. к.; в частности, факторкольцо Д. к. есть Д. к. Кольцо многочленов от конечного числа переменных над полем K является Д. к.; в случае бесконечного числа переменных ответ зависит от соотношения числа переменных и мощности поля K. Кольцо A является Д. к., когда пространство максимальных идеалов кольца A квазигомеоморфно спектру $\mathrm{Spec}(A)$; это определение приводит к понятию схемы Джекобсона.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *В. И. Данилов.*

ДЖЕКОБСОНА РАДИКАЛ кольца A — идеал $J(A)$ ассоциативного кольца A, удовлетворяющий следующим двум условиям: 1) $J(A)$ — наибольший квазирегулярный идеал в A (кольцо R наз. квазирегулярным, если для любого его элемента a разрешимо уравнение $a+x+ax=0$); 2) в факторкольце $\overline{A}=A/J(A)$ нет квазирегулярных идеалов, кроме нулевого. Д. р. был введен и детально исследован Н. Джекобсоном (N. Jacobson) в 1945 (см. [1]).

Д. р. всегда существует и может быть охарактеризован весьма многими способами: $J(A)$ есть пересечение ядер всех неприводимых представлений кольца A, пересечение всех модулярных максимальных правых идеалов, пересечение всех модулярных максимальных левых идеалов; он содержит все квазирегулярные односторонние идеалы, все односторонние нильидеалы и т. д. Если I — идеал A, то $J(I)=I\bigcap J(A)$, если A_n — кольцо всех матриц порядка n над A, то

$$J(A_n)=(J(A))_n.$$

Если на ассоциативном кольце A ввести композицию $\circ$:

$$a\circ b=a+b+ab,$$

то в полугруппе $\langle A, \circ\rangle$ радикал $J(A)$ относительно композиции $\circ$ будет подгруппой.

Над квазирегулярным (т. е. совпадающим со своим Д. р.) ассоциативным кольцом не существует ненулевых неприводимых конечно порожденных модулей; однако простые ассоциативные квазирегулярные кольца существуют. Для того чтобы в ассоциативном кольце A Д. р. был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы A было подпрямой суммой примитивных колец.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961. *К. А. Жевлаков.*

ДЖЕКСОНА НЕРАВЕНСТВО — неравенство, дающее оценку скорости убывания *наилучшего приближения* функции тригонометрич. полиномами или алгебраич. многочленами в зависимости от ее дифференциально-разностных свойств. Пусть $f(x)$ — непрерывная на всей оси 2π-периодич. функция, $E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение $f(x)$ тригонометрич. полиномами $T_n(x)$ порядка n, т. е.

$$E_n(f)=\inf_{T_n}\max_{x}|f(x)-T_n(x)|,$$

и

$$\omega(f;\ \delta)=\max_{|t_1-t_2|\leqslant\delta}|f(t_1)-f(t_2)|$$

— модуль непрерывности функции $f(x)$. Д. Джексон [1] показал, что

$$E_n(f)\leqslant C\omega\left(f;\ \frac{1}{n}\right) \qquad (*)$$

(C — абсолютная константа), а если $f(x)$ имеет r-ю непрерывную производную $f^{(r)}(x)$, $r\geqslant 1$, то

$$E_n(f)\leqslant\frac{C_r}{n^r}\,\omega\left(f^{(r)};\ \frac{1}{n}\right),$$

где постоянная C_r зависит только от r. В случае

$$\omega(f;\ t)\leqslant Kt^{\alpha},\quad 0<\alpha<1,$$

неравенство (*) было независимо получено С. Н. Бернштейном [3].

Если $f(x)$ непрерывна или r раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, $r=1,2\ldots$, и $E_n(f;\ a,\ b)$ —

наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ на $[a, b]$ алгебраич. многочленами степени n, то для $n>r$ имеет место соотношение ($f^0(x)=f(x)$)

$$E_n(f;\ a,\ b)\leqslant\frac{A_r\,(b-a)^r}{n^r}\,\omega\left(f^{(r)};\ \frac{b-a}{n}\right),$$

где постоянная A_r зависит только от r.

Д. н. известны также как теоремы Джексона, или прямые теоремы теории приближения функций. Они обобщались в различных направлениях: приближение в интегральной метрике, приближение целыми функциями конечной степени, оценка приближения через модуль гладкости k-го порядка, функции многих переменных. В ряде случаев в Д. н. найдены точные значения констант.

Лит.: [1] Jackson D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen, Dissertation, Gött., 1911; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969; [3] Бернштейн С. Н., «Сооб. Харьк. матем. общества», сер. 2, 1912, т. 13, с. 49—194; [4] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

ДЖЕКСОНА СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ, Джексона оператор,— интеграл вида

$$U_n(f,\ x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x+u)\,K_n(u)\,du,$$

в к-ром выражение

$$K_n(u)=\frac{3}{2n\,(2n^2+1)}\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^n,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

называют ядром Джексона; впервые был применен Д. Джексоном [1] для оценки наилучших приближений функции $f(x)$ через ее модуль непрерывности $\omega\left(f,\ \frac{1}{n}\right)$ или через модуль непрерывности ее производной порядка $k\geqslant1$. Д. с. и.— положительный оператор, являющийся тригонометрич. полиномом порядка $2n-2$, его ядро $K_n\ (u)$ представляется в форме

$$K_n(u)=A+\rho_1^{2n-2}\cos t+\ldots+\rho_{2n-2}^{2n-2}\cos(2n-2)\,t,$$

где $A=\frac{1}{2}$ и $\rho_1^{2n-2}=1-\frac{3}{2n^2}$, $n=1,\ 2,\ldots$ Имеет место оценка

$$|U_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant6\omega\left(f,\ \frac{1}{n}\right).$$

Лит.: [1] Jackson D., The theory of approximation, N. Y., 1930; [2] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М., 1949, с. 116—22.

А. В. Ефимов.

ДЖЕКСОНА ТЕОРЕМА — теорема теории приближения функций, дающая оценку сверху для наилучшего приближения функции многочленами (или периодической функции тригонометрич. полиномами). Д. т. дает возможность исследовать свойства наилучших приближений в зависимости от дифференциальных свойств функции. См. *Джексона неравенство.*

В. И. Бердышев.

ДЖЕНКИНСА ТЕОРЕМА, общая теорема о коэффициентах,— теорема теории однолистных конформных отображений семейств областей на римановой поверхности, содержащая неравенство для коэффициентов отображающих функций, а также условия на функции, для к-рых это неравенство обращается в равенство. Д. т. является точным выражением и развитием (высказанного без доказательства) принципа Тейхмюллера (см. [1], с. 83), согласно к-рому решение нек-рого класса экстремальных проблем для однолистных функций определяется *квадратичными дифференциалами* соответствующего вида. Получена Дж. Дженкинсом (1954, см. [1] — [4]).

Условия Д. т. Пусть $\mathscr{R}$ — конечная ориентированная риманова поверхность, $Q(z)dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на $\mathscr{R}$, имеющий хотя бы один полюс порядка $\geqslant 2$, и пусть $P_1, \ldots, P_r$ — все полюсы порядка 2, а $P_{r+1}, \ldots, P_p$ — все полюсы порядка >2. Пусть открытое всюду плотное на $\mathscr{R}$ множество Δ представляет собой дополнение к объединению конечного числа замыканий траекторий и замыканий дуг траекторий, причем $P_j \in \Delta$, $j=1, \ldots, p$. Пусть функция $f_0(P)$ отображает Δ конформно и однолистно в $\mathscr{R}$ и пусть существует гомотопия

$$f_t(P) : (\Delta \times [0,1]) \to \mathscr{R}$$

отображения $f_0(P)$ в тождественное отображение $f_1(P) \equiv \equiv P$, оставляющая неподвижными все полюсы из Δ и удовлетворяющая условию $f_t(P) \neq R$ для каждого полюса $R \in \mathscr{R}$, $t \in [0, 1]$, и всякой точки $P \neq R$. Пусть $z_j = z_j(P)$ — такой локальный параметр для полюса P_j, что $z_j(P_j) = \infty$, $j=1, \ldots, p$. Пусть, при $j=1, \ldots, p$ в окрестности полюса P_j,

$$Q(z_j) = \begin{cases} \alpha^{(j)} z_j^{-2} + \text{более высокие степени } z_j^{-1}, & \text{если } j \leqslant r; \\ \alpha^{(j)} \left[z_j^{m_j - 4} + \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s^{(j)} z_j^{m_j - s - 4} \right], & \text{если } j > r; \end{cases}$$

$$f_0(z_j) = \begin{cases} a^{(j)} z_j + \text{неположительные степени } z_j, & \text{если } j \leqslant r; \\ z_j + \sum_{s=n_j}^{\infty} a_s^{(j)} z_j^{-s}, & \text{если } j > r, \end{cases}$$

где n_j — целая часть числа $\frac{1}{2}(m_j - 3)$. Пусть

$$d(P_j) = \lim_{P \to P_j} \left(\operatorname{Arg} z_j [f_t(P)] \Big|_{t=0}^{t=1} \right), \quad j=1, \ldots, p,$$

и пусть $d(P_j) = 0$ для всех $j > r$, для которых P_j лежит на границе полосообразной области относительно $Q(z)dz^2$. Пусть, наконец,

$$T_j = \alpha^{(j)} \left[a_{m_j - 3}^{(j)} + \sum_{s=1}^{n_j} \beta_s^{(j)} a_{m_j - s - 3}^{(j)} \right] + \\ + \begin{cases} 0, & \text{если } m_j \text{ нечетно;} \\ \alpha^{(j)} \left(\frac{1}{4} m_j - 1 \right) \left(a_{n_j}^{(j)} \right)^2, & \text{если } m_j \text{ четно.} \end{cases}$$

Утверждение Д. т. При этих условиях

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{r} \alpha^{(j)} \ln a^{(j)} + \sum_{j=r+1}^{p} \alpha^{(j)} T_j \right\} \leqslant 0, \qquad (*)$$

где $\ln a^{(j)} = \ln |a^{(j)}| - i d(P_j)$, $j \leqslant r$.

Д. т. для случая равенства. Если в (*) имеет место знак равенства, то: а) в каждой области $\Delta_l \subset \Delta$ отображение f_0 является изометрией в Q-метрике $|d\zeta| = |Q(z)|^{1/2} |dz|$, каждая траектория $Q(z)dz^2$ в Δ переходит в траекторию, и множество $f_0(\Delta)$ всюду плотно в $\mathscr{R}$; б) для того чтобы f_0 было тождественным отображением в нек-рой области $\Delta_l \subset \Delta$, достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих дополнительных условий:

1) в Δ_l имеется такой полюс P_j, $j > r$, порядка m_j, что $a_s^{(j)} = 0$ для $s < \min\{n_j + 1, \ m_j - 3\}$;

2) в Δ_l имеется полюс P_j, для к-рого $j \leqslant r$ и $a^{(j)} = 1$;

3) в Δ_l имеется точка траектории, оканчивающейся в простом полюсе.

Если в (*) имеет место равенство и если $|a^{(j)}| \neq 1$ при нек-ром $j \leqslant r$, то $\mathscr{R}$ конформно эквивалентно сфере, а $Q(z)dz^2$ не имеет нулей и простых полюсов, и $r = p = 2$. Если, к тому же, Δ есть область, то отображение f_0 конформно эквивалентно линейному преобразованию, неподвижными точками к-рого служат образы обоих полюсов.

Экстремальной метрики метод, лежащий в основе доказательства Д. т., был с надлежащими модификациями использован Дж. Дженкинсом также для получения ряда других результатов, в частности так наз. **специальной теоремы о коэффициентах** (см. [4]). Дополнение и развитие Д. т. см. в [5].

Лит.: [1] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [2] Jenkins J. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1960, v. 95, № 3, p. 387—407; [3] его же, «Bull. Amer. Math. Soc.», 1962, v. 68, № 1, p. 1—9; [4] его же, «Ill. J. Math.», 1964, v. 8, № 1, p. 80—99; [5] Тамразов П. М., «Матем. сб.», 1967, т. 72, № 1, с. 59—71.

П. М. Тамразов.

ДЖЕТ — см. *Струя.*

ДЖИНИ СРЕДНЯЯ РАЗНОСТЬ — величина, характеризующая разброс значений случайной величины X. Введена К. Джини (C. Gini, 1912). Д. с. р. определяется по формуле

$$\Delta=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|\,dF(x)\,dF(y),$$

где $F(\cdot)$ — функция распределения случайной величины. Рассматривают также **коэффициент рассеяния Джини**

$$G=\frac{\Delta}{2\mu},$$

где μ — математич. ожидание случайной величины X.

Лит.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

К. П. Латышев.

ДЖОЙН — см. *Соединение.*

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ, ζ-**функция**, — 1) Д.-ф. в **теории чисел** — класс аналитич. функций комплексного переменного, состоящий из ζ-функции Римана, ее обобщений и аналогов. Д.-ф. и их обобщения в виде L-функций (см. *Дирихле L-функции*) лежат в основе современной аналитич. теории чисел. Кроме ζ-функции Римана выделяются обобщенная Д.-ф. $\zeta(s, a)$, дзета-функция Дедекинда, конгруэнц Д.-ф. и др.

Дзета-функция Римана определяется рядом Дирихле

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad s=\sigma+it, \tag{1}$$

абсолютно и равномерно сходящимся в любой конечной области комплексной s-плоскости, для к-рой $\sigma\geqslant 1+\delta$, $\delta>0$. При $\sigma>1$ справедливо представление в виде произведения Эйлера

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{2}$$

где p пробегает все простые числа.

Тождественность ряда (1) и произведения (2) представляет собой одно из основных свойств функции $\zeta(s)$. Оно позволяет получить многочисленные соотношения, связывающие $\xi(s)$ с важнейшими теоретико-числовыми функциями. Так, при $\sigma>1$

$$\ln\zeta(s)=s\int_2^{\infty}\frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\,dx,$$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},\quad \zeta^2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s},$$

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\nu(n)}}{n^s},\quad \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s},$$

где $\pi(x)$ — число простых чисел $\leqslant x$, $\Lambda(n)$ — *Мангольдта функция*, $\mu(n)$ — *Мёбиуса функция*, $\tau(n)$ — число делителей числа n, $\nu(n)$ — число простых делителей числа n, $\lambda(n)$ — *Лиувилля функция*. Отсюда та исключительная роль, к-рую играет $\zeta(s)$ в теории чисел. Как функция действительного переменного, $\zeta(s)$ была введена в 1737 Л. Эйлером (L. Euler, см. [1]), к-рый указал и ее разложение в произведение (2). Затем эта функция рассматривалась П. Дирихле (P. Dirichlet) и, особенно успешно. П. Л. Чебышевым (см. [2]) в связи с изучением закона распределения простых чисел. Однако наиболее глубокие свойства функции $\zeta(s)$ были обнаружены позднее, когда ее стали рассматривать как функцию комплексного переменного. Первым это сделал в 1876 Б. Риман (B. Riemann, см. [3]), к-рый показал следующее.

а) $\zeta(s)$ допускает аналитич. продолжение на всю комплексную s-плоскость в виде

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}+$$

$$+\int_1^\infty\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{\frac{1-s}{2}-1}\right)\theta(x)\,dx, \tag{3}$$

где $\Gamma(\omega)$ — гамма-функция,

$$\theta(x)=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi n^2x).$$

б) $\zeta(s)$ является регулярной функцией для всех значений s, кроме $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным 1, и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{4}$$

Это уравнение наз. функциональным уравнением Римана. Для функции

$$\xi(s)=\frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

введенной Б. Риманом для исследования Д.-ф. и называемой кси-функцией Римана, это уравнение принимает вид

$$\xi(s)=\xi(1-s),$$

а если положить

$$\Xi(t)=\xi\left(\frac{1}{2}+it\right),$$

то оно принимает вид

$$\Xi(t)=\Xi(-t).$$

Последняя функция Ξ замечательна тем, что она является четной целой функцией, действительной для действительных t, и ее нули на действительной оси соответствуют нулям функции $\zeta(s)$ на прямой $\sigma=1/2$.

в) Поскольку $\zeta(s)\neq0$ для $\sigma>1$, то в силу (4) в полуплоскости $\sigma>0$ эта функция имеет лишь простые нули в точках $s=2\nu$, $\nu=1, 2, \ldots$ Эти нули наз. тривиальными нулями Д.-ф. $\zeta(s)$. Далее $\zeta(s)\neq0$ для $0<s<1$. Таким образом, все нетривиальные нули Д.-ф. $\zeta(s)$ являются комплексными числами, обладают свойством симметрии относительно действительной оси $t=0$ и относительно вертикали $\sigma=1/2$ и лежат в полосе $0\leqslant\sigma\leqslant1$, к-рая наз. критической полосой.

Б. Риман высказал также следующие гипотезы.

1. Число $N(T)$ нулей функции $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0\leqslant\sigma\leqslant1$, $0<t<T$, выражается формулой

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\ln T+\frac{1+\ln 2\pi}{2\pi}T+O(\ln T).$$

2. Пусть ρ пробегает нетривиальные нули $\zeta(s)$. Тогда ряд $\sum|\rho|^{-2}$ сходится, а ряд $\sum|\rho|^{-1}$ расходится.

3. Функция $\xi(s)$ представима в виде

$$ae^{bs}\prod\nolimits_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}.$$

4. Пусть

$$P(x)=\sum\nolimits_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{\ln n},\quad P_0(x)=\frac{1}{2}\left[P(x+0)+P(x-0)\right].$$

Тогда при $x \geqslant 1$

$$P_0(x) = \operatorname{li} x - \sum\nolimits_{\rho} \operatorname{li} x^{\rho} + \int_x^{\infty} \frac{du}{(u^2-1)\ln u} - \ln 2, \qquad (5)$$

где $\operatorname{li} x$ — интегральный логарифм,

$$\operatorname{li} e^{w} = \int_{-\infty+iv}^{u+iv} \frac{e^z}{z}\, dz, \quad w = u + iv, \quad v \gtrless 0.$$

5. Все нетривиальные нули Д.-ф. $\zeta(s)$ лежат на прямой $\sigma = 1/2$.

После Б. Римана проблема значений и, в частности, нулей Д.-ф. приобрела широкую известность и ей посвящено большое число исследований. Гипотезы Римана 2 и 3 были доказаны Ж. Адамаром (J. Hadamard, 1893), причем оказалось, что в гипотезе 3 $a = 1/2$, $b = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln \pi - 1 - \frac{C}{2}$, где C — *Эйлера постоянная;* гипотезы 1 и 4 доказаны X. Мангольдтом (H. Mangoldt, 1894), к-рый, кроме того, получил, для простых чисел, следующий важный аналог формулы 5. Если

$$\Psi(x) = \sum\nolimits_{n \leqslant x} \Lambda(n), \quad \Psi_0(x) = \frac{1}{2}\left[\Psi(x+0) + \Psi(x-0)\right],$$

то при $x \geqslant 1$

$$\Psi_0(x) = x - \sum\nolimits_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ пробегает нетривиальные нули $\zeta(s)$, а символ $\sum_{\rho} x^{\rho}/\rho$ означает предел суммы $\sum_{|\gamma| \leqslant T} x^{\rho}/\rho$ при $T \to \infty$. Эта формула, как и формула (5), показывает, что проблема распределения простых чисел в натуральном ряду тесно связана с расположением нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$.

Последняя гипотеза 5 не доказана и не опровергнута. Это — знаменитая *Римана гипотеза* о нулях Д.-ф.

Функция $\zeta(s)$ однозначно определяется своим функциональным уравнением. Точнее (см. [4]), любая функция, представимая обыкновенным рядом Дирихле и удовлетворяющая уравнению (4), при довольно широких условиях относительно ее регулярности, совпадает с $\zeta(s)$ с точностью до постоянного множителя.

При

$$\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

и постоянном $h > 0$ для $0 < \sigma < 1$, $x > h$, $y > h$, $2\pi xy = |t|$ имеет место приближенное функциональное уравнение

$$\zeta(s) = \sum\nolimits_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum\nolimits_{n \leqslant y} \frac{1}{n^{1-s}} +$$

$$+ O(x^{-\sigma}) + O(|t|^{1/2-\sigma} y^{\sigma-1}), \qquad (6)$$

полученное X. Харди (H. Hardy) и Дж. Литлвудом (J. Littlewood) в 1920 (см. [4]). Это уравнение играет значительную роль в современной теории Д.-ф. и ее приложениях. Существуют общие методы получения такого рода результатов не только для класса Д.-ф., но и вообще функций Дирихле, обладающих функциональным уравнением риманова типа (3). Наиболее совершенный из них указан в [5]; в случае $\zeta(s)$ он приводит, при любом τ с $|\arg \tau| < \pi/2$, к соотношению

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}, \pi n^2 \tau\right)}{n^s} +$$

$$+ \pi^{-\frac{1-s}{2}} \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}, \frac{\pi n^2}{\tau}\right)}{n^{1-s}} - \frac{\tau^{\frac{s-1}{2}}}{1-s} - \frac{\tau^{\frac{s}{2}}}{s},$$

где $\Gamma(z, x)$ — *неполная гамма-функция*; при

$$\tau = \Delta^2 \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{|t|}\right)\operatorname{sign} t\right], \ \Delta > 0,$$

получается приближенное уравнение (6); при $\tau=1$ это соотношение совпадает с исходной формулой (3).

Главной проблемой в теории Д.-ф. является проблема расположения ее нетривиальных нулей и вообще значений в области $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$. К числу основных направлений в исследованиях Д.-ф. относятся: определение возможно более широкой области слева от прямой $\sigma=1$, где $\zeta(s) \neq 0$; проблема порядка и средних значений Д.-ф. в критич. полосе; оценки числа нулей Д.-ф. на прямой $\sigma = 1/2$ и вне этой прямой и т. д.

Первый нетривиальный результат о границе нулей Д.-ф. был получен Ш. Ж. Валле Пуссеном (Ch. J. La Vallée-Poussin) в 1896; он показал, что существует такая постоянная $A > 0$, что

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ при } \sigma \geqslant 1 - \frac{A}{\ln^{\alpha}(|t|+2)} \quad \text{с } \alpha \geqslant 1. \qquad (7)$$

Дальнейшие продвижения в этом направлении связаны с приближенным уравнением (6) и развитием методов оценок тригонометрич. сумм.

Самый мощный метод оценок такого рода принадлежит И. М. Виноградову (см. *Виноградова метод*). Последняя (к 1978) граница области, свободной от нулей Д.-ф., получена И. М. Виноградовым в 1958 (см. [7]). Она имеет вид (7) с $\alpha > 2/3$. Для простых чисел ей соответствует формула

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(x e^{-B \ln^{3/5} x}\right).$$

Существует определенная связь между ростом модуля функции $\zeta(s)$ и отсутствием нулей в окрестности прямой $\sigma=1$. Так, результат (7) с $\alpha > 2/3$ является следствием оценок

$$\zeta(1+it) = O(\ln^{2/3}|t|), \quad \frac{1}{\zeta(1+it)} = O(\ln^{2/3}|t|), \quad |t| > 2.$$

С другой стороны, известно (см. [4]), что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|\zeta(1+it)|}{\ln\ln t} \geqslant e^C, \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|\zeta(1+it)|^{-1}}{\ln\ln t} \geqslant \frac{6}{\pi^2} e^C,$$

и, если верна гипотеза Римана, то эти пределы, соответственно, не больше, чем $2e^C$ и $\frac{12}{\pi^2} e^C$.

Порядок дзета-функции в критической полосе есть число $\eta(\sigma)$, означающее нижнюю границу таких чисел ν, что $\zeta(\sigma+it) = O(|t|^{\nu})$. При $\sigma > 1$, $\eta(\sigma) = 0$, а при $\sigma < 0$ имеет место $\eta(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$. Точные значения функции $\eta(\sigma)$ для $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ неизвестны. Простейшее предположение — *Линделёфа гипотеза* — состоит в том, что

$$\eta(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma \text{ при } \sigma \leqslant \frac{1}{2} \text{ и } \eta(\sigma) = 0 \text{ при } \sigma > \frac{1}{2}.$$

Это эквивалентно утверждению, что

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(|t|^{\varepsilon}) \text{ для любого } \varepsilon > 0. \qquad (8)$$

При $\sigma > 1/2$ справедлива оценка $\zeta(\sigma+it) = O(|t|^{(1-\sigma)/2})$.

Последняя известная (к 1978) оценка $\zeta(s)$ на прямой $\sigma = 1/2$ (см. [4]) далека от ожидаемой оценки (8); она имеет вид

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O\left(|t|^{\frac{15}{32}+\varepsilon}\right).$$

Проблема среднего значения дзета-функции состоит в определении свойств функции

$$\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\,dt$$

при $T\to\infty$ для любого заданного σ и $k=1, 2, \ldots$ Результаты имеют приложения при изучении проблемы нулей Д.-ф. и непосредственно в теории чисел.

Доказано, что (см. [4])

$$\frac{1}{T}\int_1^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt=\ln T+2C-1-\ln 2\pi+O\left(\frac{\ln T}{\sqrt{T}}\right),$$

$$\frac{1}{T}\int_1^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4 dt=\frac{\ln^4 T}{2\pi^2}+O(\ln^3 T).$$

При $\sigma>1/2$ (см. [4])

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^2\,dt=\zeta(2\sigma),$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^4\,dt=\frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}.$$

В случаях $k>2$ известно только, что при $\sigma>1-\frac{1}{k}$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}},$$

где $\tau_k(n)$ — число представлений n в виде k целых положительных сомножителей, и что асимптотич. соотношение

$$\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\,dt\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}}$$

для $\sigma>1/2$ является эквивалентом гипотезы Линделёфа.

Важное место в теории Д.-ф. занимает проблема оценки функции $N(\sigma, T)$, означающей число нулей $\beta+i\gamma$ функции $\zeta(s)$ при $\beta>\sigma$, $0<\gamma\leqslant T$. В основе современных оценок $N(\sigma, T)$ лежат теоремы о выпуклости средних значений аналитич. функций, применяемые к функции

$$f_X(s)=\zeta(s)\sum_{n\leqslant X}\frac{\mu(n)}{n^s}-1.$$

Если для нек-рого $X=X(\sigma, T)$, $T^{1-l(\sigma)}\leqslant X\leqslant T^A$,

$$\int_T^{2T}|f_X(s)|^2\,dt=O(T^{l(\sigma)}\ln^m T)$$

при $T\to\infty$ равномерно для $\sigma\geqslant\alpha$, где $l(\sigma)$ — положительная невозрастающая функция с ограниченной производной, а $m\geqslant 0$ — постоянная, то

$$N(\sigma, T)=O(T^{l(\sigma)}\ln^{m+1}T)$$

равномерно для $\sigma\geqslant\alpha+1/\ln T$.

Известно также, что если при $r_1\leqslant 3/2$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(t^r\ln^{r_1}t),$$

то равномерно для $1/2\leqslant\sigma\leqslant 1$,

$$N(\sigma, T)=O(T^{2(1+2r)(1-\sigma)}\ln^5 T).$$

Эти два предложения позволили получить (см. [4]) следующие плотностные теоремы о нулях дзета-функции:

равномерно для $\sigma\geqslant 1/2$

$$N(\sigma, T)=O(T^{3(1-\sigma)(2-\sigma)}\ln^5 T),$$

$$N(\sigma, T)=O\left(T^{1-\frac{1}{4}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)}\right),$$

с привлечением иных соображений в [8] получена плотностная теорема:

$$N(\sigma, T)=O\left(T^{\frac{5}{2}(1-\sigma)}\ln^{13}T\right);$$

если справедлива гипотеза Линделёфа, то

$$N(\sigma,\ T)=O\left(T^{2(1-\sigma)+\varepsilon}\right).$$

О нулях дзета-функции на прямой $\sigma=1/2$. По гипотезе Римана, все нетривиальные нули Д.-ф. лежат на прямой $\sigma=1/2$. Тот факт, что на этой прямой Д.-ф. имеет бесконечно много нулей, впервые был доказан Х. Харди в 1914 (см. [4]) на основе формулы Рамануджана

$$\int_0^{\infty}\frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{2}}\cos xt\,dt=\frac{\pi}{2}\left[e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\,\theta\left(e^{-2x}\right)\right].$$

Последний результат принадлежит А. Сельбергу (A. Selberg, 1942; см. [4]): число $N_0(T)$ нулей $\zeta(s)$, имеющих вид $1/2+it$, удовлетворяет неравенству

$$N_0(T)>AT\ln T,\ A>0.$$

Это означает, что число нулей Д.-ф. на прямой $\sigma=1/2$ имеет тот же порядок роста, что и число всех ее нетривиальных нулей:

$$N(T)\sim\frac{1}{2\pi}T\ln T.$$

Относительно нулей Д.-ф. на этой прямой известны и другого рода результаты. Приближенное функциональное уравнение позволяет фактически вычислить (с нек-рой степенью точности) значения ближайших к действительной оси нулей $\zeta(s)$. На основе этого метода на ЭВМ вычислены нули $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0\leqslant\sigma\leqslant1$, $0\leqslant t\leqslant1{,}6\cdot10^6$. Их число равно $3{,}5\cdot10^6$, и все они лежат на прямой $\sigma=1/2$. Ординаты первых шести нулей с точностью до второго десятичного знака равны 14,13; 21,02; 25,01; 30,42; 32,93; 37,58.

Вообще, расстояние между соседними нулями $\zeta(s)$ оценивается теоремой Литлвуда (1924): для любого достаточно большого T функция $\zeta(s)$ имеет такой нуль $\beta+i\gamma$, что

$$|\gamma-T|<A/\ln\ln\ln T.$$

Обобщенная дзета-функция определяется для $0<a<1$ рядом

$$\zeta(s,\ a)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+a)^{-s}.$$

При $a=1$ она обращается в дзета-функцию Римана. Аналитическое продолжение на всю плоскость осуществляется формулой

$$\zeta(s,\ a)=\frac{e^{-\pi i s}\,\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_L\frac{z^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}\,dz,$$

где интеграл берется по контуру L, представляющему собой путь из бесконечности по верхнему краю разреза положительной действительной оси до нек-рого фиксированного $0<r<2\pi$, затем вдоль окружности радиуса r против часовой стрелки и снова в бесконечность по нижнему краю разреза. Функция $\zeta(s,\ a)$ регулярна всюду, кроме точки $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным 1. Она играет важную роль в теории L-функций Дирихле (см. [9], [10]).

Дзета-функция Дедекинда — аналог дзета-функции Римана для полей алгебраич. чисел, введенный Р. Дедекиндом (см. [11]).

Пусть K — поле алгебраических чисел степени $n=r_1+2r_2>1$, где r_1— число действительных, r_2— число пар комплексно сопряженных полей в k; пусть далее Δ — дискриминант, h — число классов дивизоров, R—регулятор поля k, g — число содержащихся в k корней из 1.

Дзета-функция Дедекинда $\zeta_k(s)$ поля k определяется рядом

$$\zeta_k(s)=\sum_{\mathfrak{A}}\frac{1}{N\mathfrak{A}^s},$$

где $\mathfrak{A}$ пробегает все целые отличные от нуля дивизоры поля k, $N\mathfrak{A}$ — норма дивизора $\mathfrak{A}$. Этот ряд абсолютно и равномерно сходится при $\sigma\geqslant 1+\delta$, $\delta>0$, определяя аналитич. функцию, регулярную в полуплоскости $\sigma>1$.

При $\sigma>1$ будет

$$\zeta_k(s)=\sum\nolimits_{m=1}^{\infty}\frac{f(m)}{m^s},$$

где $f(m)$ — число целых дивизоров поля k с нормой m, $f(m)\leqslant\tau_n(m)$, $\tau_n(m)$ — число представлений m в виде n натуральных сомножителей.

При $\sigma>1$ имеет место тождество Эйлера

$$\zeta_k(s)=\prod\nolimits_{\mathfrak{P}}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{P}^s}\right)^{-1},$$

где $\mathfrak{P}$ пробегает все простые дивизоры поля k.

Основные свойства дзета-функции Дедекинда (см. [11]).

1) $\zeta_k(s)$ регулярна на всей комплексной плоскости, кроме точки $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом

$$2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}hR/g\sqrt{\Delta}.$$

2) $\zeta_k(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\xi_k(s)=\xi_k(1-s),$$

где

$$\xi_k(s)=\left(\frac{|\Delta|}{4^{r_2}\pi^n}\right)^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\,\zeta_k(s).$$

3) При $r=r_1+r_2-1>0$ в точке $s=0$ функция $\zeta_k(s)$ имеет нуль порядка r; $\zeta_k(0)\neq 0$ при $r=0$; в точках $s=-2\nu$, $\nu=1, 2, \ldots$, дзета-функция Дедекинда $\zeta_k(s)$ имеет нули порядка $r+1$, в точках $s=-2\nu-1$ при $r_2>0$ — нули порядка r_2, а при $r_2=0$ не равна нулю. Это — тривиальные нули функции $\zeta_k(s)$.

4) Все остальные нули функции $\zeta_k(s)$ лежат в критич. полосе $0\leqslant\sigma\leqslant 1$.

Основная гипотеза состоит в том, что все нетривиальные нули функции $\zeta_k(s)$ находятся на прямой $\sigma=1/2$. Установлено, что $\zeta_k(s)$ не имеет нулей на прямой $\sigma=1$. Более того, существует абсолютная положительная постоянная A и зависящая от параметров поля k постоянная λ, обладающие тем свойством, что

$$\zeta_k(s)\neq 0 \text{ при } \sigma\geqslant 1-\frac{A}{n\ln|t|},\quad |t|>\lambda.$$

Вообще, в случае фиксированных параметров поля k для $\zeta_k(s)$ имеют место многие результаты, аналогичные результатам для дзета-функции Римана. Однако в общем случае теория дзета-функции Дедекинда сложнее, поскольку она включает в себя и теорию Дирихле L-функций. Так, неизвестно (1978), имеют ли дзета-функции Дедекинда действительные нули между 0 и 1. Точная зависимость между дзета-функцией Дедекинда и L-рядами рационального поля имеет следующий вид. Пусть k^* — минимальное поле Галуа, к-рому принадлежит k, Q — группа Галуа поля k^*, h — число классов группы Q, χ_i — простые характеры группы Q, $1\leqslant i\leqslant h$. Тогда

$$\zeta_k(s)=\zeta(s)\prod\nolimits_{i=2}^{h}L^{c_i}(s;\ \chi_i,\ k^*),$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, L суть L-ряды Артина, $c_i=c_i(k)$ — целые положительные числа, к-рые определяются свойствами относительной группы Галуа поля k^*. В частности, если k — круговое расширение, то $k^*=k$, $h=\varphi(n)$, $c_i=1$, и L-ряды Артина становятся обычными L-рядами Дирихле.

Наряду с дзета-функцией Дедекинда $\zeta_k(s)$ рассматриваются и $\zeta_k(s;\ H_j)$ — дзета-функции Дедекинда класса дивизоров H_j поля k. Эти функции определяются теми же рядами, что и $\zeta_k(s)$, но только $\mathfrak{A}$ пробегает не все, а лишь целые дивизоры, к-рые принадлежат заданному классу H_j. Функции $\zeta_k(s; H_j)$ обладают свойствами, близкими свойствам $\zeta_k(s)$. Справедлива формула

$$\zeta_k(s)=\sum\nolimits_{j=1}^{h}\zeta_k(s;\ H_j).$$

Дзета-функции Дедекинда лежат в основе современной аналитич. теории дивизоров полей алгебраич. чисел. Здесь они играют такую же роль, какую играет дзета-функция Римана в теории чисел рационального поля.

Аналогом дзета-функции Дедекинда для полей алгебраич. функций от одного переменного с конечным полем констант является конгруэнц дзета-функция, или дзета-функция Артина—Шмидта (см. ниже Дзета-функция в алгебраической геометрии).

Лит.: [1] Эйлер Л., Введение в анализ бесконечно малых, 2 изд., т. 1, пер. с латин., М., 1961; [2] Чебышев П. Л., Избр. математические труды, М.—Л., 1946; [3] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.—Л., 1948; [4] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [5] Лаврик А. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, № 1, с. 134—85; [6] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [7] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1958, т. 22, с. 161—64; [8] Монтгомери Х. Л., «Математика», 1970, т. 14, № 5, с. 133—40; [9] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [10] Чудаков Н. Г., Введение в теорию L-функций Дирихле, М.—Л., 1947; [11] Hecke E., Mathematische Werke, Gött., 1959.

А. Ф. Лаврик.

2) Д.-ф. в алгебраической геометрии — аналитическая функция комплексного переменного s, описывающая арифметику алгебраич. многообразий над конечными полями и схем конечного типа над Spec $\mathbb{Z}$. Если X — такая схема, $\overline{X}$ — множество ее замкнутых точек, а $N(x)$ — число элементов поля вычетов $k(x)$ точки $x\in\overline{X}$, то Д.-ф. $\zeta_X(s)$ задается эйлеровым произведением

$$\zeta_X(s)=\prod\nolimits_{x\in\overline{X}}(1-N(x)^{-s})^{-1}.$$

Это произведение абсолютно сходится при Re $s>\dim X$, допускает мероморфное продолжение в полуплоскости Re $s>\dim X-\frac{1}{2}$ и имеет полюс в точке $s=\dim X$ (см. [10]). В случае если $X=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, то $\zeta_X(s)$ есть *дзета-функция* Римана, а если X конечна над Spec $\mathbb{Z}$, то $\zeta_X(s)$ есть дзета-функция Дедекинда числового поля.

Наиболее изучена ситуация, когда X является алгебраич. многообразием, определенным над конечным полем F_q. В этом случае

$$N(x)=q^{\deg x},$$

где $\deg x$ — степень поля $k(x)$ над полем F_q и вместо функции $\zeta_X(s)$ обычно рассматривают функцию $Z_X(t)$ такую, что

$$Z_X(q^s)=\zeta_X(s).$$

Если ν_n — число рациональных точек многообразия X в поле F_{q^n}, то оказывается (см. [14]), что

$$\ln Z_X(t)=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\nu_n\frac{t^n}{n}.$$

Такие Д.-ф. были введены впервые для случая алгебраич. кривых (по аналогии с полями алгебраич. чисел) в 1924 Э. Артином [1], к-рый заметил, что они являются рациональными функциями от t и для них в нек-рых случаях верен аналог гипотезы Римана о нулях. Этот аналог получил название гипотезы Артина. Для кривых рода 1 она была доказана

Х. Хассе (H. Hasse) в 1933 (в случае рода 0 ситуация тривиальна), а для кривых произвольного рода — А. Вейлем (A. Weil) в 1940 при помощи результатов теории *абелевых многообразий*, созданной им в значительной мере для этой цели (см. [2], [14]).

А. Вейль [2] рассмотрел Д.-ф. произвольных алгебраич. многообразий и высказал гипотезы, обобщающие результаты, полученные к тому времени для кривых. Его исследования основаны на следующем замечании — множество точек многообразия X, рациональных над F_{q^a}, является множеством неподвижных точек a-й степени *Фробениуса эндоморфизма* этого многообразия. Первая гипотеза Вейля состоит в том, что в категории алгебраич. многообразий над конечными полями существует теория когомологий, удовлетворяющая всем формальным свойствам, необходимым для получения *Лефшеца формулы*. Если $\{H^i(X)\}$ — группы когомологий такой теории, то из формулы Лефшеца следует, что

$$\zeta_X(t)=\frac{P_1(t)\ldots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\ldots P_{2n}(t)},$$

где $n=\dim X$, а $P_i(t)$ — характеристич. многочлены отображений, индуцированных эндоморфизмом Фробениуса на *Вейля когомологиях* $H^i(X)$. В частности, функция $\zeta_X(t)$ рациональна.

Вторая гипотеза Вейля состоит в том, что функция $\zeta_X(t)$ должна удовлетворять функциональному уравнению, имеющему в случае гладкого проективного многообразия X вид

$$\zeta_X(q^{-n}t^{-1})=(-1)^{\chi}q^{n\chi/2}t^{\chi}\zeta_X(t),$$

где χ — эйлерова характеристика, равная $\Sigma(-1)^i\dim H^i(X)$. (Эта гипотеза является формальным следствием существования теории когомологий.) Рациональность ζ-функции для любых X доказана Б. Дворком [6] методом, не использующим когомологии. Теория когомологий, предсказанная А. Вейлем, была создана А. Гротендиком (A. Grothendieck) в 1958 (см. *Вейля когомологии*, *Топологизированная категория*, *l-адические когомологии*). А. Гротендик вместе с М. Артином (M. Artin) доказал обе гипотезы Вейля для гладких проективных многообразий, причем многочлены $P_i(t)$ имели, вообще говоря, целые l-адические коэффициенты, зависящие от выбора простого l, положенного в основу теории. Предполагается, что на самом деле коэффициенты являются целыми числами, не зависящими от l и вообще от выбора теории когомологий. Это высказывание обычно наз. третьей гипотезой Вейля. Наконец, последняя — четвертая гипотеза Вейля относится к нулям α_i многочленов $P_i(t)$, рассматриваемым как целые алгебраич. числа (гипотеза Римана):

$$|\alpha_i|=q^{i/2}.$$

Все эти гипотезы доказаны П. Делинем [4].

Основные применения гипотез Вейля в теории чисел относятся к изучению сравнений. Уже в случае кривых из теоремы Вейля вытекала наилучшая оценка для рациональной тригонометрич. суммы от одной переменной (см. [14]). Эти оценки были обобщены на суммы от любого числа переменных. Другим важным приложением этой теории являются оценки коэффициентов Фурье *модулярных форм* (проблема Рамануджана — Петерсона, см. [4], [15]).

Приведенные результаты являются на самом деле частными случаями гораздо более общих теорем, относящихся к произвольным L-функциям, к-рые связаны с представлениями групп Галуа накрытий многообразия X или, более общо, с нек-рым l-адическим пучком на X (см. [5], [10]). Эти функции служат на произвольных схемах аналогом известных в теории алгебраич. чисел L-функций.

Пусть теперь X — схема конечного типа над $\mathrm{Spec}\, Z$ такая, что ее общий слой $X\bigotimes_Z Q$ является непустым алгебраич. многообразием над полем рациональных чисел Q. Существует предположение, что Д.-ф. $\zeta_X(s)$ имеют мероморфные продолжения на всю s-плоскость и удовлетворяют функциональному уравнению. Гипотетич. вид этого уравнения предложен в [11]. Доказать эту гипотезу удалось пока (1978) лишь в очень специальных случаях (рациональные поверхности, алгебраич. кривые, униформизуемые модулярными функциями, абелевы многообразия с комплексным умножением, см. [15]). Что касается аналога гипотезы Римана, то он в этой ситуации даже не сформулирован.

Новый круг идей в изучении Д.-ф. принесли работы Дж. Берча (J. Birch), П. Суиннертон-Дайера [12] и Дж. Тейта [13]. Чтобы сформулировать принадлежащие им гипотезы, следует заметить, что функция $\zeta_X(s)$ является произведением Д.-ф. $\zeta_{X_p}(s)$ слоев X_p отображения $X \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$. Для последних, являющихся многообразиями над конечными полями, имеется, согласно первой гипотезе Вейля, разложение на многочлены. После перемножения этих разложений получается аналогичное представление для Д.-ф.

$$\zeta_X(s) = \prod_i \zeta_X^{(i)}(s)^{(-1)^{i+1}}.$$

Гипотеза Берча и Суиннертон-Дайера предполагает, что порядок нуля функции $\zeta_X^{(i)}(s)$ в точке $s = \dim X - 1$ равен рангу группы рациональных точек многообразия Пикара $\mathrm{Pic}\, X$ (конечному, в силу теоремы Морделла — Вейля). Эта гипотеза, тем самым, предполагает справедливость гипотезы о мероморфном продолжении Д.-ф.

В первоначальной форме гипотеза Берча и Суиннертон-Дайера была высказана для эллиптич. кривых над полем Q в результате изучения обширных таблиц для кривых с комплексным умножением [12]. В дальнейшем было высказано предположение о значении коэффициента при соответствующей степени переменной s в разложении функции $\zeta_X^{(1)}(s)$ в окрестности точки $s = \dim X - 1$. Предполагается, что он равен

$$\frac{[\text{Ш}]\,|\det(a_i', a_j)|}{[\mathrm{Pic}\, X_{\mathrm{tors}}]\,[\mathrm{Pic}'\, X_{\mathrm{tors}}]},$$

где [Ш] — предполагаемый конечным порядок группы Шафаревича — Тейта локально тривиальных *главных однородных пространств* многообразия $\mathrm{Pic}\, X$, $|\det(a_i', a_j)|$ — определитель билинейной формы на группе рациональных точек многообразия $\mathrm{Pic}\, X$, получающийся из *высоты* точки, $[\mathrm{Pic}\, X_{\mathrm{tors}}]$ и $[\mathrm{Pic}' X_{\mathrm{tors}}]$ — порядки подгрупп кручения в группе рациональных точек на $\mathrm{Pic}\, X$ и двойственном абелевом многообразии. Это выражение обобщает хорошо известное в теории алгебраич. чисел выражение для вычета дзета-функции Дедекинда в точке $s=1$. Одной из трудностей на пути к доказательству гипотезы Берча и Суиннертон-Дайера является тот факт, что группа Ш полностью не вычислена (1978) ни для одной кривой. Доказан аналог этой гипотезы для кривых, определенных над полем функций, однако и в этом случае пришлось предположить конечность *Брауэра группы*, играющей здесь роль группы Ш (см. [5]).

Дж. Тейт [13], изучая действие группы Галуа на алгебраич. циклы многообразий, выдвинул гипотезы о полюсах функций $\zeta_X^{(i)}(s)$ при четных значениях i, а именно, что функция $\zeta_X^{(2i)}(s)$ имеет в точке $s = i+1$ полюс порядка, равного рангу группы алгебраич. циклов коразмерности i. Это утверждение тесно связано с гипотезой Тейта об алгебраич. циклах. По поводу имеющихся подходов к доказательству этих гипотез, а также различных аргументов в их пользу см. [5], [7], [12], [13], [17].

Независимо от описываемого здесь понятия Д.-ф. в теории алгебраич. групп и автоморфных функций возникли и изучались Д.-ф., являющиеся преобразованиями Меллина модулярных форм. В 1967 А. Вейль заметил, что из общих гипотез о функции $\zeta_X^{(1)}(s)$ для эллиптич. кривой X над Q вытекает, что кривая X униформизуется модулярными функциями, а функция $\zeta_X^{(1)}(s)$ есть преобразование Меллина модулярной формы, отвечающей дифференциалу рода 1 на X. Это замечание привело к предположению о том, что функции $\zeta_X^{(i)}(s)$ любой схемы X являются преобразованиями Меллина подходящих модулярных форм. Основные результаты в этом направлении были получены Э. Жаке и Р. Ленглендсом (см. [7], [9]). В частности, они построили широкий класс рядов Дирихле, удовлетворяющих нек-рому функциональному уравнению и разлагающихся в эйлерово произведение, к-рые можно представить в виде преобразования Меллина модулярных форм на группе $GL(2)$. Выполнимость условий их теоремы непосредственно связана с приведенными выше гипотезами об общих свойствах Д.-ф. Пока их удается проверить лишь для кривых, определенных над полем функций.

Начиная с 1970 под влиянием работ о p-адических Д.-ф. полей алгебраич. чисел (см. [14]) возникает аналогичный подход и к Д.-ф. схем, главным образом эллиптич. кривых. Имеющиеся здесь проблемы, во многом похожие на рассмотренные выше, отражены в [9]. Д.-ф. эллиптич. кривой над Q тесно связана с одномерной формальной группой кривой и они полностью друг друга определяют [16].

Лит.: [1] Artin E., «Math. Z.», 1924, Bd 19, S. 153—246; [2] Weil A., Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, P., 1948; [3] его же, «Bull. Amer. Math. Soc.», 1949, v. 55, № 5, p. 497—508; [4] Deligne P., «Publ. Math. IHES», 1974, t. 43, p. 273—307; [5] Dix exposès sur la cohomologie des schémas, Amst.—P., 1968; [6] Dwork B., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Djursholm, 1963, p. 247—59; [7] Жаке Э., Ленглендс Р., Автоморфные формы на GL (2), пер. с англ., М., 1973; [8] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 6, с. 7—71; [9] Modular functions of one variable, В., 1973; [10] Серр Ж.-П., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, № 6, с. 19—26; [11] его же, «Математика», 1971, т. 15, № 1, с. 3—13; [12] Свиннертон-Дайер П., «Математика», 1969, т. 13, № 5, с. 3—25; [13] Тэйт Д., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, № 6, с. 27—40; [14] Шафаревич И. Р., Дзета-функция, М., 1969; [15] Шимура Г., Введение в арифметическую теорию автоморфных функций, пер. с англ., М., 1973; [16] Хонда Т., «Математика», 1969, т. 13, № 6, с. 3—17; [17] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1971, с. 111—51.

А. Н. Паршин.

ДИАГОНАЛИЗИРУЕМАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГРУППА — аффинная алгебраич. группа G, изоморфная замкнутой подгруппе *алгебраического тора*. Таким образом, G изоморфна замкнутой подгруппе мультипликативной группы всех диагональных матриц нек-рого фиксированного порядка. Если G определена над полем k и указанный изоморфизм определен над k, то Д. а. г. G наз. разложимой (или расщепимой) над k.

Всякая замкнутая подгруппа H в Д. а. г. G, а также образ G при любом рациональном гомоморфизме φ являются Д. а. г. Если к тому же группа G определена и разложима над полем k, а φ определен над k, то и H и $\varphi(G)$ определены и разложимы над k.

Д. а. г. G разложима над k тогда и только тогда, когда каждый элемент из группы $\hat{G}$ всех ее рациональных характеров является рациональным над k. В случае, если в $\hat{G}$ нет неединичных рациональных над k элементов, Д. а. г. G наз. анизотропной над k. Всякая Д. а. г. G, определенная над полем k, разложима над нек-рым конечным сепарабельным расширением поля k.

Д. а. г. G связна тогда и только тогда, когда она является алгебраич. тором. Связность G эквивалентна также отсутствию кручения в группе $\hat{G}$. Для произвольной Д. а. г. G, определенной над k, группа $\hat{G}$ является конечно порожденной абелевой группой, не имеющей p-кручения, где p — характеристика поля k.

Произвольная определенная и разложимая над полем k Д. а. г. G является прямым произведением конечной абелевой группы и алгебраич. тора, определенного и разложимого над k. В любой связной определенной над полем k Д. а. г. G имеется наибольший анизотропный подтор G_a и наибольший разложимый над k подтор G_d, для которых $G=G_aG_d$ и $G_a \cap G_d$ — конечное множество.

Если Д. а. г. G определена над полем k и Γ — группа Галуа сепарабельного замыкания поля k, то $\widehat{G}$ снабжается непрерывным действием группы Γ. Если при этом $\varphi: G \to H$ — рациональный гомоморфизм двух Д. а. г., причем G, H и φ определены над полем k, то индуцированный φ гомоморфизм $\widehat{\varphi}: \widehat{H} \to \widehat{G}$ является Γ-эквивариантным (т. е. является гомоморфизмом Γ-модулей). Возникающий таким образом контравариантный функтор из категории диагонализируемых k-групп и их k-морфизмов в категорию конечно порожденных абелевых групп без p-кручения с непрерывным действием группы Γ и их Γ-эквивариантных гомоморфизмов оказывается эквивалентностью указанных категорий.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Оnо Т., «Ann. Math.», 1961, v. 74, № 1, p. 101—39. *В. Л. Попов.*

ДИАГОНАЛЬ — отрезок прямой, соединяющий две вершины многоугольника (многогранника), не лежащие на одной стороне (на одной грани). Если число вершин многоугольника равно n, то число его Д. равно $n(n-3)/2$. *Е. В. Шикин.*

ДИАГОНАЛЬНАЯ ГРУППА — группа невырожденных диагональных матриц. Группа матриц, сопряженная с Д. г., наз. **диагонализируемой линейной группой**.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977. *Ю. И. Мерзляков.*

ДИАГОНАЛЬНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица, у к-рой все элементы, кроме, быть может, элементов главной диагонали, равны нулю. *О. А. Иванова.*

ДИАГОНАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — подгруппа декартовой степени данной группы G, состоящая из всех элементов с одинаковыми компонентами. Напр., Д. п. произведения $G \times G$ — это группа пар (g, g), $g \in G$. *Ю. И. Мерзляков.*

ДИАГОНАЛЬНАЯ ЦЕПНАЯ ДРОБЬ — цепная дробь

$$a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \ldots + \frac{b_n|}{|a_n} + \ldots,$$

у к-рой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\omega}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\omega}$ должны удовлетворять следующим условиям:

1) числа a_n и b_n целые; $|b_n|=1$; $a_n \geqslant 1$, если $n \geqslant 1$; $a_\omega \geqslant 2$, если $0<\omega<\infty$;

2) $b_n+a_n \geqslant 1$ для всех n; если $\omega=\infty$, то $b_n+a_n \geqslant 2$ для бесконечного множества n;

3) $Q_n<Q_{n+1}$ для всех n;

4) все подходящие дроби цепной дроби суть все несократимые дроби $\frac{A}{B}$ такие, что $|r-\frac{A}{B}|<\frac{1}{2B^2}$ и $B>0$, где r — значение цепной дроби.

Для каждого действительного числа r существует одна и только одна Д. ц. д., значение к-рой равно r; эта дробь периодична, если r — квадратическая иррациональность. *В. И. Нечаев.*

ДИАГОНАЛЬНО КЛЕТОЧНЫЙ ОПЕРАТОР относительно данного ортогонального разложения $H=\sum_{k \geqslant 1} \oplus H_k$ гильбертова пространства H — линейный оператор A в H, оставляющий инвариантными каждое из подпространств H_k, $k \geqslant 1$. Спектр оператора A есть замыкание объединения спектров «клеток» $A|H_k=A_k$, $k \geqslant 1$, $\|A\|=\sup_{k \geqslant 1}\|A_k\|$. Д. к. о. в широком смысле — это оператор A умножения на функцию λ в прямом интеграле гильбертовых пространств

$$H=\int_M \oplus H(t)\,d\mu(t),\quad (Af)(t)=\lambda(t)f(t),\quad t\in M.$$

При этом $\lambda(t)$ — линейный оператор, действующий в пространстве $H(t)$. Каждый оператор, перестановочный с нормальным оператором, есть Д. к. о. относительно спектрального разложения этого оператора. См. также *Диагональный оператор*.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968, § 41. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.*

ДИАГОНАЛЬНОЕ КОЛЬЦО замкнутого симметричного кольца R ограниченных линейных операторов гильбертова пространства H — коммутативное банахово симметричное кольцо E операторов в H такое, что $(R\cup E)'=E$. Д. к. используется для разложения кольца операторов на неприводимые.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968. *М. И. Войцеховский.*

ДИАГОНАЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ $f_\alpha: X\to Y_\alpha$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, — отображение $f: X\to Y=\pi\{Y_\alpha,\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$, определяемое равенством $f(x)=\{f_\alpha(x)\}\in Y$. Д. п. о. f_α удовлетворяет для любого α соотношению $f_\alpha=\pi_\alpha f$, где π_α обозначает проектирование произведения Y на сомножитель Y_α. Диагональное произведение непрерывных отображений непрерывно. Семейство отображений f_α: $X\to Y_\alpha$ наз. расчленяющим, если для любой точки $x\in X$ и всякой ее окрестности Ox существует такой индекс α и такое открытое подмножество $U_\alpha\subset Y_\alpha$, что $x\in f_\alpha^{-1}U_\alpha\subset Ox$. Если $\{f_\alpha: X\to Y_\alpha\}$ — расчленяющее семейство отображений и f есть Д. п. о. f_α, то f является вложением пространства X в произведение πY_α, т. е. $f: X\to fX$ — гомеоморфизм. Д. п. о. было применено А. Н. Тихоновым для вложения вполне регулярного пространства веса τ в куб I^τ. *В. В. Федорчук.*

ДИАГОНАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — оператор D, определенный на линейной оболочке базиса $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ в нормированном (или только локально выпуклом) пространстве X равенствами $De_k=\lambda_k e_k$, $k\geqslant 1$, λ_k — комплексные числа. Если D — непрерывный оператор, то

$$\sup_{k\geqslant 1}|\lambda_k|<+\infty;$$

если X — банахово пространство, то это условие в том и только в том случае равносильно непрерывности D, когда $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ — безусловный базис в X. Если $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H, то D — нормальный оператор, причем $\|D\|=\sup_{k\geqslant 1}|\lambda_k|$, а спектр D совпадает с замыканием множества $\{\lambda_k: k=1, 2, \ldots\}$. Нормальный и вполне непрерывный оператор N является Д. о. в базисе своих собственных векторов; сужение (даже нормального) Д. о. на его инвариантное подпространство не обязательно, вообще говоря, будет Д. о.; любой нормальный оператор N в сепарабельном пространстве H при любом $\varepsilon>0$ может быть представлен в виде $N=D+C$, где D — Д. о., C — вполне непрерывный оператор и $\|C\|<\varepsilon$.

Д. о. в широком смысле слова — это оператор D умножения на комплексную функцию λ в прямом интеграле гильбертовых пространств

$$H=\int_M \oplus H(t)\,d\mu(t),$$

т. е.

$$(Df)(t)=\lambda(t)f(t),\quad t\in M;\quad f\in H.$$

См. *Диагонально клеточный оператор*.

Лит.: [1] Singer I., Bases in Banach spaces, v. I, B., 1970; [2] Wermer J., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1952, v. 3, № 2, p. 270—77; [3] Berg I. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1971, v. 160, p. 365—71. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.*

ДИАГОНАЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС — метод построения по последовательности, состоящей из последовательностей

$$\alpha_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3},\ \ldots),\quad i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

последовательности $\alpha=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)$, где $a_i \neq a_{ii}$ для любых $i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, либо $a_i=a_{ii}$ для всех i. Д. п. в первой форме в 1874 применил Г. Кантор (см. [1]) при доказательстве несчетности множества действительных чисел из отрезка $[0,\ 1]$, поэтому его часто наз. *канторовым* Д. п. Вторая форма Д. п. применяется в теории функций действительного и комплексного переменного для выделения из ограниченного на множестве E семейства функций последовательности функций, сходящейся на счетном подмножестве из E.

Д. п. перенумерации ставит в соответствие кратной последовательности $\{a_{ik}\}$, $i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$; $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, последовательность $a_{11},\ a_{12},\ a_{21};\ \ldots;\ a_{k1},\ a_{k-1,2},\ \ldots,\ a_{k-i,i+1},\ \ldots,\ a_{1k};\ \ldots$ и применяется, напр., для доказательства счетности счетного множества счетных множеств (см. [2]).

Лит.: [1] Cantor G., Gesammelte Abhandlungen, B., 1932 («J. reine und angew. Math.», 1874, Bd 77, S. 258—62); [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976; [3] Петер Р., Рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1954, §§ 11, 19; [4] Клини С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973, §§ 33, 34; [5] Шёнфилд Дж. Р., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975, §§ 6.8, 7.5—7.9, 9.2—9.4.

Ю. Н. Субботин.

ДИАГРАММА в *категории* C — отображение D ориентированного графа Γ с множеством вершин I и с множеством дуг U в категорию C, при котором

$$D(I)\subset \mathrm{Ob}(b),\quad D(U)\subset \mathrm{Mor}(b),$$

причем $D(u)\in \mathrm{Hom}(D(i),\ D(j))$, если дуга $u\in U$ имеет начало i и конец j. Иногда под диаграммой в C понимается образ отображения D, что позволяет использовать наглядное изображение диаграммы.

Пусть $\varphi=(u_1,\ \ldots,\ u_n)$ — ориентированная цепь графа Γ с началом i и концом j, т. е. непустая конечная последовательность дуг, в к-рой началом каждой дуги служит конец предыдущей; и пусть $D(\varphi)$: $D(i)\to D(j)$ означает композицию морфизмов:

$$D(u_n)\circ\ldots\circ D(u_1).$$

Диаграмма D называется *коммутативной*, если $D(\varphi)=D(\varphi')$ всякий раз, как φ и φ', являются ориентированными цепями с одним и тем же началом и концом.

Наиболее часто встречаемые виды Д.— это *последовательности*, *треугольные диаграммы* и *квадратные диаграммы*. Для определения *последовательности* за определяющий граф берется граф вида

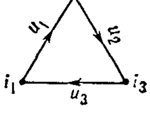
$$\underset{i_1}{\bullet}\xrightarrow{u_1}\underset{i_2}{\bullet}\longrightarrow\bullet\ \bullet\bullet\bullet\longrightarrow\underset{i_{n-1}}{\bullet}\xrightarrow{u_{n-1}}\underset{i_n}{\bullet}$$

Соответствующая Д. изображается следующим образом:

$$A_1\xrightarrow{f_1}A_2\longrightarrow\bullet\bullet\bullet\longrightarrow A_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}A_n\ ;$$

здесь $A_k=D(i_k)$ — объекты категории C, а $f_k=D(u_k)$ — морфизмы этой категории.

Треугольная Д. в категории C соответствует графу



и изображается:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[rr, "f_1"] & & A_2 \arrow[dl, "f_2"] \\
& A_3 \arrow[ul, "f_3"] &
\end{tikzcd}$$

Коммутативность этой Д. означает, что $f_3 = f_2 \circ f_1$.

Квадратная Д. соответствует графу

$$\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_4"'] & i_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\
i_4 \arrow[r, "\varphi_3"] & i_3
\end{tikzcd}$$

и изображается:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_4"'] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\
A_4 \arrow[r, "f_3"] & A_3
\end{tikzcd}$$

Коммутативность этой Д. означает, что $f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_4$.

Класс Д. с одним и тем же графом Г образует категорию. За морфизм диаграммы D в диаграмму D' принимается семейство морфизмов $\nu_i : D(i) \to D'(i)$, где i пробегает множество вершин графа Г, что для любой дуги u с началом i и концом j выполняется условие $D'(u) \circ \nu_i = \nu_j \circ D(u)$. В частности, можно говорить об изоморфных Д. Любую категорию можно представить как категорию диаграмм с нек-рым графом. Иногда граф Г наз. схемой диаграмм в C.

Лит.: [1] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961. *И. В. Долгачев.*

ДИАДА — *аффинор* в гильбертовом пространстве

$$x \to (a, x)b,$$

где a, b — некоторые постоянные векторы, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение. Значение Д. состоит в том, что, напр., в n-мерном пространстве всякий аффинор A представляется в виде суммы не более чем n Д.:

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} (a_i, x)\, b^i$$

(в произвольном гильбертовом пространстве подобное разложение имеет место для частных классов линейных операторов, напр. для самосопряженных операторов, причем a_i и b^i образуют *биортогональную систему*). В 19 в. делались попытки положить понятие Д. в основу теории аффиноров — так называемое «диадное исчисление», в настоящее время термин Д. малоупотребителен.

Лит.: [1] Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, 4 изд., ч. 1,2, М.—Л., 1950—52; [2] Лагалли М., Векторное исчисление, пер. с нем., М.—Л., 1936; [3] Чепмен С., Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов, пер. с англ., М., 1960. *М. И. Войцеховский.*

ДИАДИЧЕСКИЙ БИКОМПАКТ — бикомпакт, являющийся непрерывным образом обобщенного канторова дисконтинуума. Д. б. были введены П. С. Александровым в связи с естественной попыткой обобщить на произвольные бикомпакты теорему о том, что каждый компакт является непрерывным образом канторова множества. Класс Д. б. — наименьший класс бикомпактов, содержащий все метрич. компакты и замкнутый относительно тихоновского произведения и непрерывного отображения. Свойства Д. б. Всякая бикомпактная топологич. группа диадична. Д. б. удовлетворяет *Суслина условию* и, более того, всякое регулярное *кардинальное число* $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ является калибром Д. б. (см. *Ка-*

либр пространства). Отсюда вытекает существование недиадич. бикомпактов. Таковы, напр., все бикомпакты Александрова несчетной мощности (бикомпактификация одной точкой бесконечных дискретных пространств). В Д. б. всякое канонич. замкнутое множество и всякое замкнутое множество типа G_δ являются Д. б. Всякая неизолированная точка Д. б. есть x-точка. Более того, если характер точки $x \in X$ равен $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, то в X содержится бикомпакт Александрова мощности $\mathfrak{m}$, вершина к-рого совпадает с x. Вес бесконечного Д. б. равен верхней грани характеров его точек, а π-вес Д. б. равен его весу. Всякий экстремально несвязный Д. б. состоит из конечного множества точек. Существуют разнообразные критерии метризуемости Д. б. В частности, Д. б. X метризуем, если выполнено одно из следующих условий: X удовлетворяет первой аксиоме счетности; X является непрерывным образом упорядоченного бикомпакта; X наследственно нормален; X наследственно диадичен; X является пространством Фреше — Урысона; X наследственно сепарабелен; X является факторпространством метрич. пространства.

Лит.: [1] Engelking R., An Outline of General Topology, Amst., 1968; [2] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [3] Ефимов Б. А., «Тр. Моск. матем. о-ва», 1965, т. 14, с. 211—47.

А. В. Архангельский, Б. А. Ефимов.

ДИАДИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — тихоновское пространство, для к-рого существует бикомпактное расширение, являющееся *диадическим бикомпактом.* Класс Д. п. содержит все сепарабельные метрич. пространства и замкнут относительно тихоновских произведений. На Д. п. переносится ряд свойств диадич. бикомпактов. Напр., всякая псевдокомпактная группа диадична, но существуют недиадические финально компактные группы. Д. п. удовлетворяет *Суслина условию,* но не всякое регулярное кардинальное число $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$ является калибром Д. п. В Д. п. диадично всякое канонич. замкнутое множество, но не всякое замкнутое G_δ. Д. п., удовлетворяющее первой аксиоме счетности, метризуемо, но существуют неметризуемые наследственно нормальные Д. п., наследственно сепарабельные Д. п.

Лит.: [1] Пономарев В. И., «Fundam. math.», 1963, t. 52, № 3, p. 351—54; [2] Ефимов Б. А., «Докл. АН СССР», 1963, т. 151, № 5, с. 1021—4.

Б. А. Ефимов.

ДИАМЕТР — 1) Д. линии второго порядка — прямая, проходящая через середины параллельных хорд. Д. наз. сопряженным относительно хорд (а также направлений хорд), к-рые он делит пополам. Д. центральных линий второго порядка пересекаются в центре линии; у нецентральных линий второго порядка Д. параллельны или совпадают. Д. эллипса и гиперболы — прямые, проходящие через их центр, Д. параболы — ось параболы и прямые, параллельные оси.

2) Д. множества в метрич. пространстве — точная верхняя грань расстояний между парами точек множества.

А. Б. Иванов.

ДИВЕРГЕНЦИЯ, расхождение, векторного поля $a(x)$ в точке $(x^1, \ldots, x^n)$ — скалярная величина

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} a^i(x),$$

где $a^i(x)$ — компоненты вектора $a(x)$.

Д. обозначается $\operatorname{div} a(x)$ или в виде скалярного произведения (∇, a) *Гамильтона оператора* $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ на вектор $a(x)$.

Если векторное поле $a(x)$ есть поле скоростей установившегося течения несжимаемой жидкости, то $\operatorname{div} a(x)$ совпадает с интенсивностью источников ($\operatorname{div} a > 0$) или стоков ($\operatorname{div} a < 0$) в точке x.

Интеграл

$$\int_E \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{a})\, dx,$$

где ρ — плотность жидкости, вычисленный для n-мерной области E, равен количеству жидкости, «расходящейся» в единицу времени из E. Это количество (см. *Остроградского формула*) совпадает с величиной

$$\int_{y \in \partial E} \left(\boldsymbol{N}(y),\ \rho \boldsymbol{a}(y) \right) ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial E} N_i(y)\, \rho a^i(y)\, ds,$$

где $\boldsymbol{N}=(N_1, \ldots, N_n)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂E, ds — элемент площади ∂E. Д. $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(x)$ является производной по объему потока поля $\boldsymbol{a}(x)$ через замкнутую поверхность:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(x) = \lim \frac{1}{\text{объем } E} \int_{\partial E} (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{a})\, ds \text{ при } E \longrightarrow x.$$

Таким образом, Д. носит инвариантный относительно выбора системы координат характер.

В криволинейных координатах $y=(y^1, \ldots, y^n)$, $y^j=y^j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}(y)) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sqrt{g}\, a^i \right),$$

где

$$g = \det(g_{ij}), \quad g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j},$$

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a^i(y)\, \boldsymbol{s}_i(y),$$

а $\boldsymbol{s}_i(y)$ — орт, касающийся i-й координатной линии в точке y:

$$\boldsymbol{s}_i(y) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial y}{\partial x^i}.$$

Д. тензорного поля

$$a(x) = \left\{ a_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}(x), \quad 1 \leqslant i_\alpha,\ j_\beta \leqslant n \right\}$$

типа (p, q), заданного в области n-мерного аффинного пространства связности, определяется с помощью абсолютных (ковариантных) производных компонент $a(x)$ с последующей сверткой и является тензором типа $(p-1, q)$ с компонентами

$$b_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_{s-1}\, i_{s+1} \ldots i_p} = \sum_{k=1}^{n} \nabla_k a_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_{s-1} k i_{s+1} \ldots i_p},$$

$$1 \leqslant k,\ i_\alpha,\ j_\beta \leqslant n.$$

В тензорном анализе и дифференциальной геометрии Д. называется также дифференциальный оператор, действующий в пространстве дифференциальных форм и связанный с оператором внешнего дифференцирования.

Лит.: [1] Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

Л. П. Купцов.

ДИВИЗОР — обобщение понятия делителя элемента коммутативного кольца. Впервые (под назв. «идеальный делитель») это понятие возникло в работах Э. Куммера [1] об арифметике круговых полей.

Теория Д. для коммутативного кольца A с единицей без делителей нуля состоит в построении гомоморфизма φ из мультипликативной полугруппы A^* ненулевых элементов A в нек-рую полугруппу D_0 с однозначным разложением на множители, элементы к-рой наз. (целыми) дивизорами кольца A. Теория Д. позволяет свести ряд вопросов, связанных с разложением на простые множители в кольце A, где это разложение может быть неоднозначно, к рассмотрению разложения на простые множители в D_0. Образ $\varphi(a)\in D_0$ элемента $a\in A^*$ обозначается (a) и наз. главным дивизором элемента a. Говорят, что $a\in A^*$ делится на Д. $\mathfrak{a}\in D_0$, если $\mathfrak{a}$ делит (a) в D_0.

Точнее, пусть D_0 — свободная абелева полугруппа с единицей, свободные образующие к-рой наз. простыми дивизорами, и пусть задан гомоморфизм φ: $A^*\to D_0$. Гомоморфизм φ определяет теорию Д. кольца A, если он удовлетворяет следующим условиям.

1) Для a, $b\in A^*$ элемент a делит b в кольце A тогда и только тогда, когда (a) делит (b) в D_0.

2) Для любого $\mathfrak{a}\in D_0$

$$\{0,\ a\in A \mid \mathfrak{a} \text{ делит } (a)\}$$

является идеалом кольца A.

3) Если $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'\in D_0$ и для любого $a\in A^*$ (a) делится на $\mathfrak{a}$ тогда и только тогда, когда (a) делится на $\mathfrak{a}'$, то $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'$.

Этими условиями гомоморфизм φ, если он существует, определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Ядро $\ker\varphi$ совпадает с группой единиц кольца A. Элементы из D_0 наз. положительными Д. кольца A. Пусть K — поле частных кольца A и $D\supset D_0$ — свободная абелева группа, порожденная множеством простых Д. Тогда для любого $c\in K^*$, $K^*=K\setminus 0$, можно определить главный дивизор $(c)\in D$. Если $c=$ $=a/b$, где a, $b\in A^*$, то $(c)=(a)/(b)$. Элементы группы D наз. дробными дивизорами (или просто дивизорами) кольца A (или поля K). Каждый Д. $\mathfrak{a}\in D$ может быть записан в виде

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{n_1}\ldots\mathfrak{p}_r^{n_r},$$

где $\mathfrak{p}_i$ — простые Д. Либо (в аддитивной записи):

$$\mathfrak{a}=n_1\mathfrak{p}_1+\ldots+n_r\mathfrak{p}_r.$$

Если $a\in K^*$ и $(a)=\Sigma n_i\mathfrak{p}_i$, то отображение $a\to\Sigma n_i$ является дискретным нормированием на поле K, наз. существенным нормированием поля K. Гомоморфизм φ продолжается до гомоморфизма ψ: $K^*\to D$, где $\psi(c)=(c)$, содержащегося в точной последовательности

$$1\longrightarrow U(A)\longrightarrow K^*\xrightarrow{\psi} D\longrightarrow \mathrm{C(A)}\longrightarrow 1.$$

Здесь $U(A)$ — группа единиц кольца A, а группа $\mathrm{C(A)}$ наз. группой классов дивизоров кольца A (или поля K). Два Д., принадлежащие одному смежному классу по подгруппе главных Д., наз. эквивалентными (в алгебраической геометрии, где рассматривается целый ряд других эквивалентностей для Д., эта эквивалентность называется линейной).

Теория Д. существует для всякого дедекиндова кольца, в частности, для колец целых элементов в полях алгебраич. чисел, причем в этом случае элементы D_0 находятся во взаимно однозначном соответствии с ненулевыми идеалами кольца A (Д. $\mathfrak{a}$ при этом соответствует идеал всех элементов A, делящихся на $\mathfrak{a}$). По этой причине в дедекиндовых кольцах группу Д. наз. также группой идеалов, а группу классов Д.— группой классов идеалов.

Группа классов Д. поля алгебраич. чисел конечна, и с вычислением ее порядка (числа классов) и структуры связаны многие задачи алгебраической теории чисел (см. [2]).

Более общо, теория Д. существует для *Крулля колец* (см. [11]). В этом случае роль D_0 играет полугруппа *дивизориальных идеалов* кольца, а роль D играет группа дробных дивизориальных идеалов.

Обобщением понятия дробного дивизориального идеала коммутативного кольца на случай алгебраич. многообразия или аналитич. пространства служит понятие дивизора Вейля. Так называется целочисленная формальная конечная линейная комбинация $\Sigma n_W W$ неприводимых замкнутых подпространств W в X коразмерности 1. Дивизор Вейля наз. положительным, или эффективным, если все $n_W \geqslant 0$. Все дивизоры Вейля образуют группу $Z^1(X)$ (группа дивизоров Вейля). В случае, когда X — гладкое алгебраич. многообразие, понятие дивизора Вейля совпадает с понятием *алгебраического цикла* коразмерности 1.

Если A — нётерово кольцо Крулля, то каждый простой дивизориальный идеал $\mathfrak{p}$ в A определяет подпространство $V(\mathfrak{p})$ коразмерности 1 в схеме $X = \mathrm{Spec}(A)$, а каждый Д. $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{n_1}, \ldots, \mathfrak{p}_k^{n_k}$ может быть отождествлен тем самым с дивизором Вейля $\Sigma n_i V(\mathfrak{p})$.

Пусть X — нормальная схема, а f — мероморфная функция на X. Каноническим образом определяется главный дивизор Вейля:

$$(f) = \sum n_W W .$$

Здесь n_W есть значение дискретного нормирования кольца $O_{X, W}$ общей точки подмногообразия W на представителе f в $O_{X, W}$. Если

$$(f) = \sum n_W^+ W + \sum n_W^- W ,$$

где $n_W^+ > 0$, а $n_W^- < 0$, то дивизор Вейля $(f)_0 = \Sigma n_W^+ W$ наз. дивизором нулей, а $\Sigma n_W^- W$ — дивизором полюсов функции f. Множество главных дивизоров Вейля является подгруппой $Z_p^1(X)$ группы $Z^1(X)$. Факторгруппа $Z^1(X)/Z_p^1(X)$ обозначается $C(X)$ и наз. группой классов дивизоров схемы X. Если $X = \mathrm{Spec}\, A$, где A — нётерово кольцо Крулля, то $C(X)$ совпадает с группой классов Д. кольца A.

Пусть K — поле алгебраич. функций. Д. поля K наз. иногда формальные конечные целочисленные комбинации дискретных нормирований ранга 1 поля K. Если K есть поле алгебраич. функций от одной переменной, то каждый такой Д. может быть отождествлен с дивизором Вейля его полной неособой модели.

Пусть X — регулярная схема или комплексное многообразие и $D = \Sigma n_W W$ — дивизор Вейля. Для любой точки $x \in X$ существует такая открытая окрестность U, что ограничение D на U

$$D|_U = \sum n_W (W \cap U)$$

является главным Д. (f_U) для нек-рой мероморфной функции f_U на U. Функция f_U определена однозначно с точностью до обратимой функции на U и наз. локальным уравнением Д. D в окрестности U, а соответствие $U \to f_U$ определяет сечение пучка $M_X^*/\mathcal{O}_X^*$. Вообще, дивизором Картье на окольцованном пространстве $(X, \mathcal{O}_X)$ называется глобальное сечение пучка $M_X^*/\mathcal{O}_X^*$ (пучка ростков дивизоров). Здесь M_X обозначает пучок ростков мероморфных (или рациональных) функций на X, т. е. пучок, сопоставляющий каждому открытому $U \subset X$ полное кольцо частных кольца $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, а M_X^* и $\mathcal{O}_X^*$ — пучки обратимых элементов в M_X и $\mathcal{O}_X$ соответственно. Дивизор Картье можно задавать набором локальных уравнений

$$f_i \in \Gamma\left(U_i, M_X^*\right),$$

где $\{U_i\}$ — открытое покрытие X, причем на $U_i \cap U_j$ функция f_i/f_j должна быть сечением пучка $\mathcal{O}_X^*$. В частности, мероморфная функция f определяет Д. $\mathrm{div}(f)$, наз. главным. Множество $x \in M$ таких, что $(f_i)_x \notin \mathcal{O}_{X,x}^*$, наз. носителем дивизора. Дивизоры Картье образуют абелеву группу $\mathrm{Div}(X)$, а главные Д.— ее подгруппу $\mathrm{Div}_l(X)$. Каждый Д. $D \in \mathrm{Div}(X)$ определяет обратимый пучок $\mathcal{O}_X(D)$, содержащийся в

M_X: если D представлен локальными уравнениями f_i на покрытии $\{U_i\}$, то

$$\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = f_i^{-1}\mathcal{O}|_{U_i} \subset M_X|_{U_i}.$$

Сопоставление $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ является гомоморфизмом группы $\mathrm{Div}(X)$ в *Пикара группу* $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Этот гомоморфизм включается в точную последовательность

$$\Gamma\left(X,\ M_X^*\right) \longrightarrow \mathrm{Div}(X) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^1\left(X,\ M_X^*\right),$$

получающуюся из точной последовательности пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow M_X^* \longrightarrow M_X^*/\mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0.$$

Таким образом, $\ker\delta = \mathrm{Div}_l(X)$. Если $D-D'$ есть главный Д., то D и D' наз. линейно эквивалентными. Если X — квазипроективное алгебраич. многообразие или комплексное пространство Штейна, то гомоморфизм δ: $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ сюръективен и индуцирует изоморфизм группы классов линейно эквивалентных Д. $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}_l(X)$ на группу Пикара $\mathrm{Pic}(X)$.

Если X — комплексное пространство, то вопрос о том, когда данный Д. является главным, есть вторая *Кузена проблема*. Напр., на комплексном пространстве Штейна $(X, \mathcal{O})$ группа классов Д. тривиальна тогда и только тогда, когда $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$.

Д. D наз. эффективным (или положительным), если $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_X(D)$. В этом случае $\mathcal{O}_X(-D)$ является пучком идеалов в $\mathcal{O}_X$; носитель Д. D со структурным пучком $\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-D)$ образует подпространство в X, обозначаемое также D.

Для нормальной нётеровой схемы или нормального аналитич. пространства X имеется естественный гомоморфизм

$$\mathrm{cyc}\colon \mathrm{Div}(X) \longrightarrow Z^1(X),$$

переводящий $D \in \mathrm{Div}(X)$ в $\sum n_W W$, где $n_W = v_W(f)$, f — локальное уравнение D в окрестности W, а v_W — соответствующее W дискретное нормирование (см. [3]). Гомоморфизм cyc инъективен и переводит эффективные Д. в эффективные; cyc биективен тогда и только тогда, когда X локально факториально (напр., когда X — неособая схема или аналитич. многообразие). В случае, когда cyc биективен, дивизоры Вейля и Картье отождествляются.

Пусть $f: X' \to X$ — морфизм схем, плоский в коразмерности 1. Тогда для любого дивизора Картье или Вейля D на X определен его обратный образ $f^*(D)$. При этом $\mathrm{cyc}(f^*(D)) = f^*(\mathrm{cyc}(D))$. Отображение $D \to f^*(D)$ является гомоморфизмом групп, переводит главные Д. в главные и тем самым определяет гомоморфизм групп

$$f^*\colon \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X')$$

$$(\text{соответственно } f^*\colon C(X) \longrightarrow C(X')).$$

Если X' — открытое множество в X, дополнение к к-рому имеет коразмерность $\geqslant 2$ и f — вложение X' в X, то f^*: $C(X) \to C(X')$ — изоморфизм, а $f: \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X')$ является изоморфизмом при условии, что схема X локально факториальна.

Пусть X — гладкое проективное многообразие над $\mathbb{C}$ Каждый Д. D на X определяет класс гомологий

$$[D] \in H_{2\dim X-2}(X, \mathbb{Z});$$

двойственный по Пуанкаре к $[D]$ класс когомологий совпадает с *Чжэня классом* $c_1(\mathcal{O}_X(D)) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ обратимого пучка $\mathcal{O}_X(D)$. Так на $\mathrm{Div}(X)$ возникает гомологич. эквивалентность. Имеется теория пересечения Д. (см. [7]), приводящая к понятию численной эквивалентности, тесно связанной с понятием алгебраич. эквивалентности Д. (см. *Алгебраический цикл*). Группа

$$\mathrm{Pic}^0(X) = \mathrm{Div}_a(X)/\mathrm{Div}_l(X),$$

где $\mathrm{Div}_a(X)$ обозначает группу Д., алгебраически эквивалентных нулю, естественным образом снабжается структурой абелева многообразия (*Пикара многообразие*; если X — кривая, то оно также наз. *Якоби многообразием* кривой X). Группа $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}_a(X)$, наз. группой Нерона — Севери, имеет конечное число образующих. Последние два факта верны и для алгебраич. многообразий над произвольным полем.

Если X — одномерное комплексное многообразие (риманова поверхность), то Д. на X можно понимать как конечные линейные комбинации

$$D=\sum_i k_i x_i,$$

где $k_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in X$. Число $\sum k_i$ наз. степенью Д. D. Для компактной римановой поверхности X рода g группа классов Д. степени 0 есть g-мерное абелево многообразие и совпадает с многообразием Пикара (или с многообразием Якоби). Если f — мероморфная функция на X, то главный Д.

$$\mathrm{div}(f)=\sum_i m_i x_i-\sum_j n_j y_j,$$

где x_i — нули, y_j — полюсы функции f, а m_i, n_j — их кратности. Тогда $\sum_i m_i=\sum_j n_j$, т. е. главный Д. имеет степень 0. Д. D степени 0 на X является главным тогда и только тогда, когда существует такая сингулярная одномерная цепь C, что

$$\partial C=D \quad \text{и} \quad \int_C \omega=0$$

для всех голоморфных форм ω степени 1 на X (теорема Абеля). См. также *Абелев дифференциал*.

Лит.: [1] Kummer E. E., «J. reine und angew. Math.», 1847, Bd 35, S. 327—67; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [3] Вейль А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [4] Cartier P., «Bull. Soc. math. France», 1958, t. 86, p. 177—251; [5] Grothendieck A., «Publ. Math. IHES», 1967, № 32, ch. 4, pt. 4; [6] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [7] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [8] Шевалле К., Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной, пер. с англ., М., 1959; [9] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [10] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [11] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [12] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960.

В. И. Данилов, Л. В. Кузьмин, А. Л. Онищик.

ДИВИЗОРИАЛЬНЫЙ ИДЕАЛ — дробный идеал $\mathfrak{a}$ целостного коммутативного кольца A такой, что $\mathfrak{a}=A:(A:\mathfrak{a})$ (здесь $A:\mathfrak{a}$ обозначает множество элементов x из поля частных кольца A, для к-рых $x\mathfrak{a}\subset A$). Иногда Д. и. наз. дивизором кольца. Для любого дробного идеала $\mathfrak{a}$ идеал $\tilde{\mathfrak{a}}=A:(A:\mathfrak{a})$ дивизориален. Множество $D(A)$ Д. и. кольца A является решеточно упорядоченным коммутативным моноидом (полугруппой), если произведением двух Д. и. $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ считать $\widetilde{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}$, а положительными (или эффективными) считать целые Д. и. $\mathfrak{a}\subset A$. Моноид $D(A)$ является группой тогда и только тогда, когда кольцо A вполне целозамкнуто; при этом обратным к дивизору $\mathfrak{a}$ будет $A:\mathfrak{a}$.

Обычно Д. и. рассматривают в кольце Крулля (напр., в нётеровом целозамкнутом кольце); в этом случае простые идеалы высоты 1 дивизориальны и образуют базис абелевой группы дивизоров $D(A)$. Этот результат, по существу, был установлен Э. Артином (E. Artin) и Б. Л. Ван дер Варденом (B. L. Van der Waerden) (см. [1]) в их теории квазиравенства идеалов (идеалы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ квазиравны, если $\tilde{\mathfrak{a}}=\tilde{\mathfrak{b}}$) и завершил одну из центральных тем алгебры того времени — изучение разложения идеалов.

Главные дробные идеалы, а также обратимые дробные идеалы являются дивизориальными и образуют соответственно подгруппы $F(A)$ и $J(A)$ в $D(A)$. Факторгруппы $D(A)/F(A)=C(A)$ и $J(A)/F(A)=\mathrm{Pic}(A)$ наз. соответственно *классов дивизоров группой* и *Пикара группой* кольца A.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *В. И. Данилов.*

ДИЕЗНАЯ НОРМА в пространстве r-мерных полиэдральных цепей $C_r(E^n)$ — наибольшая из полунорм $|\cdot|'$, удовлетворяющих для любой клетки σ^r объема $|\sigma^r|$ неравенствам:

$$|\sigma^r|'\leqslant|\sigma^r|,$$
$$|\partial\sigma^{r+1}|'\leqslant|\sigma^{r+1}|,$$
$$|T_v\sigma^r-\sigma^r|'\leqslant\frac{|\sigma|^r|v|}{r+1},$$

где $T_v\sigma^r$ — клетка, полученная сдвигом на вектор v длины $|v|$.

Если $A=\Sigma a_i\sigma_i^r$, то Д. н. $|A|^*$ выражается так:

$$|A|^{\#}=\inf\left\{\frac{\sum|a_i||\sigma_i^r||v_i|}{r+1}+\left|\sum a_iTv_i\sigma_i^r\right|^{\flat}\right\},$$

где $|C|^{\flat}$ — *бемольная норма* цепи C.

Имеет место:

$$|aA|^{\#}=|a||A|^{\#},$$
$$|A+B|^{\#}\leqslant|A|^{\#}+|B|^{\#},$$
$$|A|^{\#}=0\Leftrightarrow A=0,$$
$$|A|^{\#}\leqslant|A|^{\flat};$$

если $r=0$, то $|A|^{\#}=|A|^{\flat}$.

Пополнение пространства $C_r(E^n)$ является сепарабельным банаховым пространством $C_r^{\#}(E^n)$, элементы к-рого наз. r-мерными диезными цепями. Для любой r-мерной полиэдральной цепи A и любого вектора v имеет место

$$|T_vA-A|^{\#}\leqslant\frac{|A||v|}{r+1},$$

где T_vA — цепь, полученная сдвигом A на вектор v длины $|v|$. Бемольная цепь конечной массы является диезной цепью; вообще любую бемольную цепь можно рассматривать и как диезную цепь в таком смысле: если $A=\lim^{\flat}A_i$, где A_i — полиэдральные цепи, и $\psi A=\lim^{\#}A_i$, где ψ — линейное биективное отображение пространства $C_r^{\flat}(E^n)$ в пространство $C_r^{\#}(E^n)$, и $\psi C_r^{\flat}$ плотно в $C_r^{\#}$ при Д. н.

Дать корректное определение границы ∂A диезной цепи невозможно (см. [1], с. 242, пример (c)); r-мерная диезная коцепь $X=XA$ есть элемент пространства $C^{\#r}(E^n)$, сопряженного к $C_r^{\#}(E^n)$, она является бемольной коцепью, причем

$$|X|\leqslant|X|^{\flat}\leqslant|X|^{\#},$$

где $|X|$ — комасса X, а диезная конорма $|X|^{\#}$ определяется аналогично бемольной норме $|X|^{\flat}$. Кограница dX диезной коцепи не обязана быть диезной ([1], с. 241, пример (a)), однако

$$|dX|\leqslant|X|^{\flat}\leqslant|X|^{\#}.$$

Константа Липшица $\mathscr{L}(X)$ коцепи X определяется следующим образом:

$$\mathscr{L}(X)=\sup\left\{\frac{|X\cdot(T_vA-A)|}{|A||v|}\right\},$$

где A — полиэдральные цепи. Для диезных коцепей эта верхняя грань конечна и

$$(r+1)\,\mathscr{L}(X) \leqslant |X|^{\#}.$$

Любая бемольная коцепь с конечной константой Липшица является диезной, причем

$$|X|^{\#} = \sup\{|X|^{\flat},\ (r+1)\,\mathscr{L}(X)\},$$

и, кроме того,

$$|dX| \leqslant (r+1)\,\mathscr{L}(X).$$

Аналогичные понятия вводятся для r-мерных полиэдральных цепей в открытых подмножествах $R \subset E^n$. См. также *Диезная форма.*

Диезная норма в пространстве аддитивных функций γ, значениями к-рых являются r-векторы,— наибольшая из полунорм $|\cdot|'$, удовлетворяющих условиям:

$|\gamma|' \leqslant |\gamma|$, где $|\gamma|$ — полная вариация γ;

$$|T_v\gamma - \gamma|' \leqslant \frac{|v|\,|\gamma|}{r+1},$$

где $T_v\gamma(Q) = \gamma T_{-v}(Q)$ — сдвиг функции γ на вектор v длины $|v|$:

$$T_{-v}(Q) = \{q - v,\ q \in Q \subset E^n\};$$

для каждой точки p и любого ε существует $\eta > 0$ такое, что $|\gamma|' \leqslant \varepsilon|\gamma|$, если носитель $\operatorname{sp} t\gamma \subset U_\eta(p)$ и $\gamma(E^n) = 0$.

Д. н. $|\gamma|^{\#}$ имеет представление

$$|\gamma|^{\#} = \sup_{\omega} \int_{E^n} \omega\, d\gamma,$$

где ω — r-мерные диезные формы, для к-рых $|\omega|^{\#} \leqslant 1$.

Лит. см. при статье *Бемольная норма.*

М. И. Войцеховский.

ДИЕЗНАЯ ФОРМА — r-мерная *дифференциальная форма* ω в открытом подмножестве $R \subset E^n$ такая, что конечны комасса $|\omega|_0$ и комассовая константа Липшица

$$\mathscr{L}_0(\omega) = \sup \frac{|\omega(p) - \omega(q)|}{|p-q|},$$

где $p, q \in R$ и $|p-q|$ — длина вектора $p-q$. Диезной нормой формы ω наз. число

$$|\omega|^{\#} = \sup\{|\omega|_0,\ (r+1)\,\mathscr{L}_0(\omega)\}.$$

Теорема Уитни. Каждой r-мерной диезной коцепи X в R соответствует единственная r-мерная Д. ф. ω_X, для которой

$$X\sigma^r = \int_{\sigma^r} \omega_X$$

для всех r-мерных ориентированных симплексов σ^r; $\omega_X(p)$ определяется формулой

$$\omega_X(p) = \lim \frac{X\sigma_i}{|\sigma_i|},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ — последовательность расположенных в одной и той же плоскости симплексов, содержащих точку p, диаметры к-рых $\to 0$. Это соответствие является взаимно однозначным линейным отображением пространства коцепей $C^{\#r}(R)$ в пространство $\Omega^{\#r}$ Д. ф., причем:

$|\omega_X|_0 = |X|$, т. е. комассе X;

$\mathscr{L}_0(\omega_X) = \mathscr{L}(X)$, т. е. константе Липшица X;

$|\omega_X|^{\#} = |X|^{\#}$, т. е. *диезной норме* X;

$\Omega^{\#r}$ является банаховым пространством.

В частности, нульмерным диезным коцепям соответствуют **д и е з н ы е ф у н к ц и и** — ограниченные функции, удовлетворяющие условию Липшица.

Пространство $C_r^{\#}(R)$ r-мерных диезных цепей A конечной *массы* $|A|$ с диезной нормой $|A|^{\#}$ изоморфно пространству $\Gamma_r^{\#}(E^n)$ аддитивных функций множества, значениями к-рых являются **r - в е к т о р ы** γ, наделенному диезной нормой $|\gamma|^{\#}$; это соответствие определяется формулой:

$$XA=\int_{E^n}\omega_X\, d\gamma_A=[\omega\cdot\gamma]\,(E^n) \qquad (*)$$

для любой коцепи X, где ω_X есть r-мерная Д. ф., соответствующая коцепи X, и имеет место:

$\gamma_A(E^n)=\{A\}$, т. е. **к о в е к т о р у   ц е п и** A,

$|A|=|\gamma A|$, т. е. полной **в а р и а ц и и** γ_A,

$|\gamma_A|^{\#}=|A|^{\#}$, т. е. диезной норме цепи A.

Таким образом, (*) является обобщением обычного интеграла Лебега — Стилтьеса. В частности, для A тогда и только тогда существует измеримая по Лебегу суммируемая функция $\alpha(p)$, ассоциированная с A (см. *Бемольная форма*), то есть

$$X\cdot A=\int_{E^n}\omega_X\cdot\alpha\,(p)\,dp$$

для любой коцепи X, если γ_A абсолютно непрерывна.

Если ω_A — **р е г у л я р н а я   ф о р м а**, X — диезная коцепь, то существует форма $\omega_{dX}=d\omega_X$ и имеет место формула Стокса

$$\int_{\partial\sigma}\omega_X=\int_{\sigma}d\omega.$$

Аналогично обобщаются и другие результаты, установленные для регулярных форм.

Лит. см. при статье *Бемольная форма*.

М. И. Войцеховский.

ДИЗЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — пропозициональная формула, имеющая вид

$$\bigvee\nolimits_{i=1}^{n}\bigwedge\nolimits_{j=1}^{m_i}C_{ij}, \qquad (*)$$

где каждое $C_{ij}(i=1,\ \ldots\ ,n;\ j=1,\ \ldots\ ,m_i)$ есть либо переменная, либо отрицание переменной. Д. н. ф. (*) выполнима тогда и только тогда, когда при нек-ром i среди $C_{i1},\ \ldots,\ C_{im_i}$ не встречаются одновременно формулы вида p и $\neg p$, где p — переменная. Для всякой пропозициональной формулы A можно построить эквивалентную ей Д. н. ф. B, содержащую те же переменные, что и A. Такая формула B наз. Д. н. ф. формулы A.

С. К. Соболев.

ДИЗЪЮНКТНАЯ СУММА **т о п о л о г и ч е с к и х   п р о с т р а н с т в** X_α, $\alpha\in A$,— пространство $Y=U_{\alpha\in A}Y_\alpha$, где каждое Y_α есть копия X_α, и $Y_{\alpha_1}\cap Y_{\alpha_2}=\phi$ при $\alpha_1\neq\alpha_2$, а топология на Y определяется условием, что множество U открыто в Y тогда и только тогда, когда открыто его пересечение с каждым Y_α. Иначе говоря, каждое Y_α открыто и замкнуто в Y.

А. А. Мальцев.

ДИЗЪЮНКТНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ **м н о ж е с т в а** A — множество $A^d=\{x\in X;\ x\perp A\}$ всех элементов x *векторной решетки* (векторной структуры) X, дизъюнктных множеству $A\subset X$ (см. *Дизъюнктные элементы*). $A\subset A^{dd}=(A^d)^d$; кроме того, если X — векторная *условно полная решетка*, то A^{dd} является наименьшей компонентой пространства X, содержащей A.

В. И. Соболев.

ДИЗЪЮНКТНОЕ СЕМЕЙСТВО МНОЖЕСТВ — семейство, состоящее из попарно не пересекающихся множеств.

Б. А. Ефимов.

ДИЗЪЮНКТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ — унитарные представления π_1, π_2 нек-рой группы или, соответственно, симметричные представления нек-рой алгебры с инволюцией, удовлетворяющие следующим эквивалентным условиям: 1) единственный ограниченный линейный оператор из пространства представления π_1 в пространство представления π_2 равен нулю; 2) любые ненулевые подпредставления представлений π_1 и π_2 не эквивалентны. Понятие Д. п. плодотворно при изучении факторпредставлений; в частности, представление π является факторпредставлением тогда и только тогда, когда π нельзя представить в виде прямой суммы двух ненулевых Д. п. Любые два факторпредставления либо дизъюнктны, либо одно из них эквивалентно подпредставлению другого (и в последнем случае представления квазиэквивалентны). Понятие Д. п. играет важную роль в разложении представлений в прямой интеграл: если π — представление в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\mathfrak{A}$ — *Неймана алгебра* в H, порожденная операторами представления, Z — центр $\mathfrak{A}$,

$$H=\int^{\oplus} H(l)d\mu(l)$$

— разложение пространства H в прямой интеграл гильбертовых пространств, соответствующее разложению

$$\pi=\int^{\oplus} \pi(l)d\mu(l),$$

и если при этом алгебра Z соответствует алгебре диагонализуемых операторов, то $\pi(l)$ является факторпредставлением для почти всех l, и представления $\pi(l)$ попарно дизъюнктны для почти всех l. Существует простая связь между дизъюнктностью представлений сепарабельной локально компактной группы (соответственно сепарабельной алгебры с инволюцией) и взаимной сингулярностью представителей канонических классов мер на квазиспектре группы (алгебры), соответствующих этим представлениям.

Лит.: [1] Диксмье Ж., С*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974. *А. И. Штерн.*

ДИЗЪЮНКТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ, независимые элементы,—элементы $x\in X$ и $y\in X$ векторной решетки X, обладающие тем свойством, что

$$|x|\wedge|y|=0,$$

где

$$|z|=x\vee(-x),$$

что равносильно

$$|z|=\sup(x,\ -x).$$

Соответственно,

$$|x|=x\wedge(y),$$

что равносильно

$$|x|=\inf(x,\ y).$$

Символы $\wedge$ и $\vee$ являются, соответственно, *дизъюнкцией* и *конъюнкцией*. Множества $A\subset X$ и $B\subset X$ наз. дизъюнктными, если дизъюнктна любая пара элементов $x\in A$, $y\in B$. Элемент $x\in X$ наз. дизъюнктным множеству $A\subset X$, если дизъюнктны множества $\{x\}$ и A. Дизъюнктная пара элементов обозначается $x\perp y$ или xdy, а дизъюнктная пара множеств — соответственно $A\perp B$ или AdB.

Пример Д. э.: положительная $x_+=x\vee 0$ и отрицательная $x_-=(-x)\vee 0$ части элемента x.

Если элементы x_i, $i=1, 2, \ldots, n$ попарно дизъюнктны, то они линейно независимы; если A и B — Д. э., то порождаемые ими линейные многообразия тоже дизъюнктны; если $x_\alpha\perp y$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, причем

$$\sup_\alpha x_\alpha=x$$

существует, то $x \perp y$. Для Д. э. упрощается ряд структурных соотношений; напр., если $x \perp y$, то

$$|x+y|=|x|+|y|,$$

$$(x+y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$$

для $z>0$, и т. д.

Понятие Д. э. может быть введено и в более общих частично упорядоченных множествах, напр. в булевых алгебрах.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950; [2] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961; [3] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер, пер. с франц., М., 1967. *В. И. Соболев.*

ДИЗЪЮНКЦИЯ — логическая операция, служащая для образования высказывания «A или B» из высказываний A и B. В формализованных языках Д. высказываний A и B обозначается посредством $A \vee B$. Высказывания A и B наз. дизъюнктивными членами высказывания $A \vee B$. Употреблению Д. в математич. логике соответствует следующая *истинностная таблица*:

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

В. Е. Плиско.

ДИКАЯ СФЕРА — замкнутое многообразие в евклидовом пространстве E^3, получающееся *диким вложением* сферы S^2 в E^3. Так, Д. с. является сумма двух дисков с общим краем, являющимся *диким узлом*. Первый пример Д. с.— так наз. «рогатая сфера», или сфера Александера (рис. 1),— ограничивает область, не гомеоморфную E^3 (на рис. это — внутренность цилиндра без всех зацепленных ручек и предельных точек к ним). На рис. 2 изображена Д. с., у к-рой только внешняя область не гомеоморфна E^3.

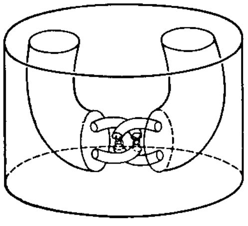


Рис. 1.

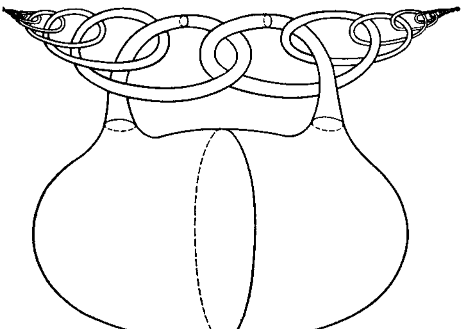


Рис. 2.

Лит.: [1] Келдыш Л. В., Топологические вложения в евклидово пространство, М., 1966 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 81). *М. И. Войцеховский.*

ДИКИЙ УЗЕЛ — узел L в евклидовом пространстве E^3 такой, что не существует гомеоморфизма E^3 на себя, при к-ром L переходит в замкнутую ломаную линию, состоящую из конечного числа отрезков.

Рис. 1.

Так, дикими являются узлы, содержащие так наз. дуги Фокса — Артина — некоторые простые дуги, полученные *диким вложением* в E^3. Напр., для дуги L_1 (рис. 1) фундаментальная группа $\pi_1(E^3\setminus L)$ не-

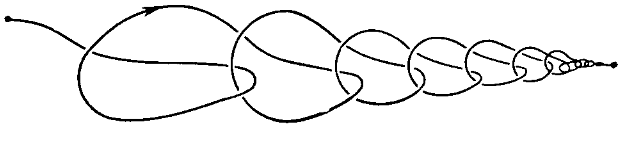


Рис. 2.

тривиальна, для дуги L_2 (рис. 2) группа $\pi_1(E^3\setminus L)$ тривиальна, но само $E^3\setminus L$ не гомеоморфно дополнению в E^3 к точке.

Лит. см. при ст. *Дикая сфера*. *М. И. Войцеховский.*

ДИКОЕ ВЛОЖЕНИЕ топологического пространства X в топологическое пространство Y — вложение, к-рое топологически не эквивалентно вложению из нек-рого класса выделенных вложений, наз. правильными, или ручными, вложениями. Наиболее употребительными являются следующие случаи; в качестве Y в них берется n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

1) Пусть M есть k-мерное топологич. многообразие. Топологич. вложение $g: M \to \mathbb{R}^n$ наз. диким, если не существует гомеоморфизма $\mathbb{R}^n$ на себя, переводящего $g(M)$ в локально плоское подмногообразие $\mathbb{R}^n$.

2) Пусть P есть k-мерный полиэдр. Топологич. вложение $g: P \to \mathbb{R}^n$ наз. диким, если не существует гомеоморфизма $\mathbb{R}^n$ на себя, переводящего $g(P)$ в полиэдр (т. е. в тело нек-рой триангуляции) $\mathbb{R}^n$.

3) Пусть K есть k-мерное локально компактное пространство. Топологич. вложение $g: K \to \mathbb{R}^n$ наз. диким, если не существует гомеоморфизма $\mathbb{R}^n$ на себя, переводящего $g(K)$ в подмножество k-мерного Менгера компакта M_n^k.

Если размерность $k \leqslant n-3$ и $n \geqslant 5$, то введенные свойства во всех трех случаях характеризуются локально гомотопич. свойством: вложение является диким тогда и только тогда, когда $g(X)$ не удовлетворяет свойству $1-ULC$ (см. *Топология вложений*). Положение вещей для коразмерностей $n-k=1$ и 2 значительно сложнее: вопрос решен здесь для многообразий коразмерности 1 при $n \geqslant 6$ и не решен полностью для вложений коразмерности 2 как для многообразий, так и для полиэдров. Все сказанное имеет смысл и тогда, когда в качестве Y берется n-мерное многообразие, топологическое или кусочно линейное. *М. А. Штанько.*

ДИКСОНА ГРУППА — группа экспоненциальных автоморфизмов классической простой алгебры Ли типа G_2 над конечным полем F. Если порядок F равен q, то порядок Д. г. равен $q^6(q^2-1)(q^6-1)$. При $q>2$ Д. г. является простой группой. Д. г. были открыты Л. Диксоном [1]. После этого в течение 50 лет не было найдено ни одной новой конечной простой группы, пока в 1955 К. Шевалле (C. Chevalley) не указал общий способ получения простых групп как групп автоморфизмов простых алгебр Ли (см. [2]). Метод Шевалле позволяет получить, в частности, и Д. г. (см. [3]).

Лит.: [1] Dickson L. E., «Math. Ann.», 1905, Bd 60, S. 137—50; [2] Шевалле К., «Математика», 1958, т. 2, № 1, с. 3—53; [3] Картер Р., там же, 1966, т. 10, № 5, с. 3—47. *В. Д. Мазуров.*

ДИКСОНА ИНВАРИАНТ — конструкция, используемая при изучении квадратичных форм над полями характеристики 2, позволяющая, в частности, вводить аналоги специальной ортогональной группы над такими полями. А именно, Д. и. есть элемент $D(u)$ произвольного поля k характеристики 2, сопоставляемый всякому *подобию* u четномерного векторного пространства E над k относительно симметрической билинейной формы f, ассоциированной с невырожденной квадратичной формой Q на E. Д. и. введен Л. Диксоном [1].

В силу условия на характеристику поля форма f является знакопеременной, и в E существует базис $e_1, \ldots, e_{2s}$, для к-рого

$$f(e_i, e_j) = f(e_{s+i}, e_{s+j}) = 0,$$

$$f(e_i, e_{s+j}) = \delta_{ij}$$

при $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant s$ (см. *Витта разложение*). Пусть

$$f(u(x), u(y)) = \alpha(u) f(x, y)$$

для любых векторов x и y из E, и пусть для каждого $i = 1, \ldots, s$

$$u(e_i) = \sum\nolimits_{j=1}^{s} a_{ij} e_j + \sum\nolimits_{j=1}^{s} b_{ij} e_{s+j},$$

$$u(e_{s+i}) = \sum\nolimits_{j=1}^{s} c_{ij} e_j + \sum\nolimits_{j=1}^{s} d_{ij} e_{s+j}.$$

Тогда элемент из k вида

$$D(u) = \sum\nolimits_{i,j} (Q(e_i) a_{ij} c_{ij} + Q(e_{s+i}) b_{ij} d_{ij} + b_{ij} c_{ij})$$

наз. инвариантом Диксона подобия u относительно базиса $e_1, \ldots, e_{2s}$. Для того чтобы u было подобием относительно Q с коэффициентом подобия $\alpha(u)$ [т. е. $Q(u(x)) = \alpha(u) Q(x)$ для любого вектора $x \in E$], необходимо и достаточно, чтобы $D(u) = 0$ или $D(u) = \alpha(u)$. Подобия u относительно Q, для к-рых $D(u) = 0$, наз. прямыми подобиями. Прямые подобия образуют в группе всех подобий относительно Q нормальный делитель индекса 2.

Если Q_1 — форма, определяемая равенством $Q_1(x) = Q(u(x))$ для любого вектора $x \in E$, а $\Delta(Q)$ и $\Delta(Q_1)$ — псевдодискриминанты этих форм относительно базиса $e_1, \ldots, e_{2s}$, т. е.

$$\Delta(Q) = Q(e_1) Q(e_{s+1}) + \ldots + Q(e_s) Q(e_{2s}),$$

$$\Delta(Q_1) = Q_1(e_1) Q_1(e_{s+1}) + \ldots + Q_1(e_s) Q_1(e_{2s}),$$

то

$$\Delta(Q_1) = (\alpha(u))^2 \Delta(Q) + (D(u))^2 + \alpha(u) D(u).$$

Лит.: [1] Dickson L. E., Linear Groups..., Lpz., 1901; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [3] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974. *В. Л. Попов.*

ДИЛАТАЦИЯ — устаревший термин для обозначения специальных бирациональных преобразований, называемых теперь *моноидальными преобразованиями*.

В. А. Исковских.

ДИНАМИКА — раздел механики, в к-ром изучается движение материальных тел, происходящее под действием приложенных к ним сил, вызывающих или изменяющих это движение,— так называемых ускоряющих сил.

Основы Д. заложены в нач. 17 в. Г. Галилеем (G. Galilei), к-рый первый рассмотрел движение тел под действием силы тяжести и установил закон инерции. Основные принципы Д. были четко сформулированы И. Ньютоном (I. Newton) в виде трех основных законов механики и следствий из них. Дальнейшее развитие и совершенствование законов Д. содержится в трудах Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Д'Аламбера (J. D'Alembert), Ж. Лагранжа (J. Lagrange), где были даны общие методы составления уравнений Д. Начало аналитич. методам исследования уравнений Д. положили Ж. Лагранж, У. Гамильтон (W. Hamilton) и К. Якоби (C. Jacobi). Позднейшим развитием этих методов занимались К. Гаусс (C. Gauss), М. В. Остроградский, А. Пуанкаре (H. Poincaré), С. А. Чаплыгин, Н. Г. Четаев и др.

Д., основывающаяся на принципах Г. Галилея и И. Ньютона, наз. классической или ньютоновской Д., в отличие от направлений, исходящих из иных принципов (квантовая механика, релятивистская Д. и др.). Классич. Д. состоит из совокупности математич. выводов и заключений, являющихся следствиями основных законов Галилея и Ньютона. В ней аксиоматически вводятся понятия неподвижного пространства (абсолютной неподвижной системы отсчета или инерциальной системы отсчета) и абсолютного времени, одинакового для всех точек пространства. Абсолютному пространству приписываются геометрич. свойства евклидова пространства. Законы Ньютона формулируются по отношению к абсолютному пространству и абсолютному времени. Они остаются справедливыми по отношению к инерциальным системам отсчета. Заключения о движении материальных тел Д. получает с помощью построения моделей (материальной точки, абсолютно твердого тела, континуума и др.).

По характеру решаемых задач Д. может быть разделена на Д. материальной точки и Д. системы материальных точек. Понятие материальной точки является основным понятием классической Д. Материальной точкой наз. такое тело, геометрич. размерами к-рого можно пренебрегать при изучении его движения, но к-рое обладает конечной массой. Первый и второй законы Ньютона формулируются в Д. только для одной материальной точки. Кроме материальной точки в Д. рассматривают еще модель абсолютно твердого тела, расстояния между точками к-рого не изменяются во время движения. Эти основные модели Д. позволяют успешно решать ряд конкретных задач о движении реальных тел.

В Д. системы материальных точек рассматриваются движения таких тел, к-рые находятся во взаимосвязи друг с другом. Д. системы включает в себя Д. твердого тела, Д. систем с переменной массой, Д. упругого и пластически деформируемого тела, Д. жидкости и газа и др.

Характер движения материальной системы определяется действующими на нее силами (активными силами), а также связями, наложенными на точки системы, действие к-рых может быть заменено действием сил реакций связи (пассивными силами). Действующие на систему материальных точек силы являются результатом взаимодействия отдельных материальных точек, как входящих, так и не входящих в рассматриваемую систему. В соответствии с этим различают силы внутренние и внешние. Силы могут быть представлены как функции положений материальных точек, их скоростей и времени.

В Д. решаются две основные задачи: 1) определение силы, производящей данное движение материальной точки или системы; 2) определение движения материальной точки или системы, происходящее под действием заданных сил. Задачи Д. решаются при помощи дифференциальных уравнений движения. Для одной материальной точки эти уравнения выражают второй закон Ньютона и могут быть записаны в виде

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N},$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор материальной точки в рассматриваемой системе отсчета, $d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ — ее ускорение, $\boldsymbol{F}$ — действующая на точку активная сила, $\boldsymbol{N}$ — сила реакций связи. Для определения закона движения материальной точки нужно найти значение $\boldsymbol{r}$ для каждого момента времени. Задача интегрирования уравнений Д. решается с помощью общих теорем Д. (теорем об изменении количества движения, момента количества движения и живых сил). Эти теоремы обусловливают важные физич. зависимости между основными динамич. характеристиками движения и взаимодействия материальных тел; в ряде случаев они значительно упрощают процесс интегрирования уравнений Д. Кроме того, общие теоремы дают возможность изучать отдельные стороны рассматриваемого движения. Общие теоремы для системы материальных точек могут быть получены непосредственным обобщением общих теорем для одной материальной точки. При выводе из *Д'Аламбера — Лагранжа принципа* они становятся более совершенными и не содержат реакций связи, а устанавливают непосредственную зависимость между динамич. величинами, характеризующими движение системы, и действующими на систему активными силами. Наиболее распространенными являются системы с голономными идеальными связями. Движение таких систем полностью описывается *Лагранжа уравнениями* 2-го рода, получающимися из принципа Д'Аламбера — Лагранжа. Эти уравнения наиболее удобны при исследовании движения системы материальных точек. Для материальных систем с неголономными идеальными связями наиболее общими уравнениями движения, не содержащими реакций связей, являются *Аппеля уравнения*.

Изучением свойств уравнений движения механич. систем, обусловленных специфич. формой этих уравнений, занимается аналитич. Д. Она рассматривает общие принципы Д., вывод из этих принципов дифференциальных уравнений движения и методов их интегрирования. Методы аналитич. Д. широко применяются как для решения различных задач Д., так и в различных областях физики. Большое значение для исследования свойств движения механич. систем получили канонические *Гамильтона уравнения*, к-рые дают возможность сформулировать ряд эффективных методов решения задач Д.

Помимо установления общих методов составления и интегрирования уравнений движения материальных тел, движущихся под действием ускоряющих сил, в Д. рассматривается ряд специальных задач: Д. твердого тела, Д. гироскопич. систем, теория колебаний механич. систем, теория устойчивости движения, теория удара и др.

Лит.: [1] Галилей Г., Соч., т. 1 — Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению..., пер. с итал., М.—Л., 1934; [2] его же, Диалог о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой, пер. с итал., М.—Л., 1948; [3] Ньютон И., Математические начала натуральной философии, пер. с латин., в кн.: Крылов А. Н., Собр. трудов, т. 7, М.—Л., 1936; [4] Эйлер Л., Основы динамики точки, пер. с латин., М.—Л., 1938; [5] Д'Аламбер Ж., Динамика, пер. с франц., М.—Л., 1950; [6] Лагранж Ж., Аналитическая механика, пер. с франц., т. 1—2, М.—Л., 1950; [7] Якоби К., Лекции по динамике, пер. с нем., М.—Л., 1936; [8] Гамильтон У., Об общем методе в динамике ..., пер. с англ., в кн.: Вариационные принципы механики, М., 1959; [9] Герц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи, пер. с нем., М., 1959; [10] Остроградский М. В., Лекции по аналитической механике, в кн.: Остроградский М. В., Полн. собр. трудов, т. 2, К., 1961; [11] Жуковский Н. Е., Теоретическая механика, 2 изд., М.—Л., 1952; [12] Чаплыгин С. А., Курсы лекций по теоретической механике, Собр. соч., т. 4, М.—Л., 1949; [13] Четаев Н. Г., Устойчивость движения.—Работы по аналитической механике, М., 1962.

Е. Н. Березкин.

ДИНАМИКА СОРБЦИИ — процесс поглощения адсорбата (паров, газов или растворенного вещества) твердым телом, сопровождающийся адсорбцией и абсорбцией, т. е. соответственно поверхностным и объемным поглощением. Д. с. определяется скоростями адсорбции, внешней и внутренней диффузией адсорбата, и описывается системой дифференциальных уравнений диффузионного переноса вещества с учетом кинетики адсорбции. В большинстве случаев процесс сорбции происходит в неизотермических условиях — при выделении теплоты адсорбции и при капиллярной конденсации —так что процессы переноса массы вещества (диффузия) сопровождаются переносом тепла (теплообменом), т. е. описываются системой дифференциальных уравнений массо- и теплопереноса. Если адсорбентом является смесь газов и паров или смесь растворенных веществ, то молекулярный перенос массы вещества и тепла описывается системой уравнений Онсагера (см. [2]).

В случае бинарной смеси система дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса, решение к-рой, при соответствующих краевых условиях, определяет Д. с., имеет вид

$$\rho \frac{d\rho_{10}}{d\tau} = \operatorname{div}\left[D\rho\nabla\rho_{10} + \frac{k_T}{T}\nabla T\right] + I_1(\rho_{10}, T) \qquad (1)$$

$$c_p\rho\frac{dT}{d\tau} = \operatorname{div}(\lambda\nabla T) + \operatorname{div}(D\rho Q^*\nabla\rho_{10}) + \\ + (h_1 - h_2) I_1 + (c_{p_1} + c_{p_2}) j_1 \nabla T, \qquad (2)$$

где ρ_{10} — относительная плотность компоненты «1», $\rho_{10} = \rho_1/\rho$; $\rho = \rho_1 + \rho_2$, D — коэффициент диффузии, T — температура, τ — время, c_p — удельная изобарная теплоемкость, λ — коэффициент теплопроводности, Q^* — изотермич. теплота переноса, k_T — термодиффузионная постоянная, h — удельная энтальпия, j_1 — диффузионный поток массы компоненты «1», $d/d\tau$ — полная или субстанциональная производная, равная

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} + v\nabla\rho$$

(где v — скорость движения центра тяжести потока адсорбата), $I_1(\rho_{10}, T)$ — мощность источника массы вещества, обусловленная кинетикой адсорбции и фазовыми превращениями, к-рые в общем случае являются функциями концентрации ρ_{10} и температуры T.

Скорость v движения потока адсорбата получается из решений *Навье — Стокса уравнений.* Краевые условия определяются характером и физич. механизмом взаимодействия поверхности твердого тела с окружающей средой (адсорбатом). При этом скорость массообмена определяется внешней диффузией адсорбата к поверхности тела и кинетикой адсорбции. Обычно рассматривают два крайних случая:

1) массообмен определяется диффузией;

2) концентрация на поверхности тела зависит только от скорости адсорбции.

Для случая сорбции пара капиллярнопористыми телами получены решения системы дифференциальных уравнений (1), (2) применительно к телам простейшей формы (см. [1]).

Процесс десорбции водяного пара пористыми телами составляет часть процесса сушки. Д. с. в этом случае рассчитывается приближенно по следующим уравнениям массо- и теплообмена

$$q(\tau) = \rho_0 R_v r \frac{d\bar{u}}{d\tau}(1 + \mathrm{Rb}),$$

$$-\frac{d\bar{u}}{d\tau} = \varkappa N(\bar{u} - \bar{u}_p),$$

где $d\bar{u}/d\tau$ — скорость десорбции, r — удельная теплота сорбции, ρ_0 — плотность сухого тела, $q(\tau)$ — удельный поток тепла на поверхности тела, R_v — гидравлич. радиус тела, $\bar{u}$ — среднее влагосодержание (относительная концентрация) тела, $\bar{u}_p$ — равновесное влагосодержание, $\varkappa$ — относительный коэффициент сушки, N — скорость сушки в первом периоде — периоде постоянной скорости, Rb — число Ребиндера.

Лит.: [1] Лыков А. В., Михайлов Ю. А., Теория тепло- и массопереноса, М.—Л., 1963; [2] Де Гроот С., Мазур П., Неравновесная термодинамика, пер. с англ., М., 1964; [3] Лыков А. В., Теория сушки, 2 изд., М., 1968; [4] Франк-Каменецкий Д. А., Диффузия и теплопередача в химической кинематике, 2 изд., М., 1967; [5] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966.

А. В. Лыков.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ИГРА — разновидность *позиционных игр*, характеризующаяся тем, что в такой игре игроки управляют «движением точки» в пространстве состояний X. Пусть $I=\{i\}$ — множество игроков. Каждой точке $x\in X$ соответствует множество $S_i^{(x)}$ элементарных стратегий игрока $i\in I$ в этой точке и тем самым — множество $S^{(x)}=\prod_i S_i^{(x)}$ элементарных ситуаций в x. На X заданы переходные функции распределения $F(x_k\,|\,x_1, s^{(x_1)}, \ldots, x_{k-1}, s^{(x_{k-1})})$, $x_i\in X, s^{(x_i)}\in S^{(x_i)}$, представляющие собой закон движения управляемой точки, известный каждому из игроков. Функция F при фиксированном x_k измерима по всем остальным аргументам. Последовательность P чередующихся состояний и элементарных ситуаций $x_1, s^{(x_1)}, \ldots, x_k, s^{(x_k)}, \ldots$ наз. партией общей Д. и.; она определяется индуктивно по следующей схеме: пусть уже определен отрезок партии (дебют) $x_1, s^{(x_1)}, \ldots, x_{k-1}$ $(k\geqslant 2)$, и каждый игрок i выбирает свою элементарную стратегию $s_i^{(x_{k-1})}\in S_i^{(x_{k-1})}$, так что складывается элементарная ситуация $s^{(x_{k-1})}$; тогда игра переходит случайно, в соответствии с распределением $F(\cdot\,|x_1, s^{(x_1)}, \ldots, x_{k-1}, s^{(x_{k-1})})$, в состояние x_k. На каждой партии P определен выигрыш $h_i(P)$ игрока i. Если множество всех партий обозначить $\mathfrak{P}$, то Д. и. задается системой

$$\Gamma=\langle I,\ X,\ \{S_i^{(x)}\}_{i\in I,\ x\in X},\ F,\ \{h_i,\ (P)\}_{i\in I,\ P\in\mathfrak{P}}\rangle.$$

Обычно в Д. и. считается, что к очередному моменту выбора элементарной стратегии игроки знают предшествующий дебют. В этом случае чистая стратегия s_i игрока i есть набор функций $s_i^{(x)}(x_1, s^{(x_1)}, \ldots, s^{(x_{k-1})}, x)$, ставящих в соответствие заканчивающемуся в x дебюту элементарную стратегию $s_i^{(x)}\in S_i^{(x)}$. Рассматривались также Д. и., в к-рых игрокам известен не весь предшествующий дебют, напр. игры с «запаздыванием информации».

Для того чтобы игра была определена, необходимо, чтобы каждая ситуация $s=\{s_i\}$ индуцировала вероятностную меру μ_s на множестве всех партий и чтобы для каждого i существовало математич. ожидание $\mathsf{E}h_i(P)$ по мере μ_s. Это математич. ожидание и представляет собой выигрыш игрока i в ситуации s.

Функции $h_i(P)$, вообще говоря, произвольны; однако более других изучались Д. и. либо с терминальным выигрышем (игра заканчивается, как только x_k оказывается в терминальном множестве $X^T\subset X$ и $h_i(P)=h_i(x_k)$, где x_k — последнее состояние в игре), либо с интегральным выигрышем $(h_i(P)=\sum_{k=1}^{\infty}h_i(x_k, s^{(x_k)}))$.

Д. и. могут рассматриваться как игровой вариант задачи оптимального управления с дискретным временем, к каковой они и сводятся, если число игроков равно одному. Если в Д. и. $X\subset\mathbb{R}^n$, дискретное время заменяется на непрерывное, а случайные факторы устраняются, то получают *дифференциальную игру*, к-рая, таким образом, может рассматриваться как разновидность Д. и.

Частными классами Д. и. являются *стохастические игры, рекурсивные игры* и игры на выживание.

Лит.: [1] Воробьев Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 2, с. 81—140. *В. К. Доманский.*

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — в первоначальном значении термина механич. система с конечным числом степеней свободы. Состояние такой системы обычно характеризуется ее расположением (конфигурацией) и скоростью изменения последнего, а закон движения указывает, с какой скоростью изменяется состояние системы.

В простейших случаях состояние можно охарактеризовать посредством величин $w_1, \ldots, w_m$, к-рые могут принимать произвольные (действительные) значения, причем двум различным наборам величин $w_1, \ldots, w_m$ и и $w'_1, \ldots, w'_m$ отвечают различные состояния, и обратно, а близость всех w'_i к w_i означает близость соответствующих состояний системы. Закон движения тогда записывается в виде *автономной системы* обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{w}_i = f_i(w_1, \ \ldots, \ w_m), \quad i = 1, \ \ldots, \ m. \qquad (1)$$

Рассматривая значения $w_1, \ldots, w_m$ как координаты точки w в m-мерном пространстве, можно геометрически представить соответствующее состояние Д. с. посредством этой точки w. Последнюю наз. ф а з о в о й (иногда также и з о б р а ж а ю щ е й, или п р е д с т а в л я ю щ е й) т о ч к о й, а пространство — ф а з о в ы м п р о с т р а н с т в о м системы. (Прилагательное «фазовый» связано с тем, что в прошлом состояния системы нередко называли ее фазами.) Изменение состояния со временем изображается как движение фазовой точки по нек-рой линии (так наз. ф а з о в о й т р а е к т о р и и; часто, впрочем, ее наз. просто траекторией) в фазовом пространстве. В последнем определено векторное поле, сопоставляющее каждой точке w выходящий из нее вектор $f(w)$ с компонентами

$$(f_1(w_1, \ \ldots, \ w_m), \ \ldots, \ f_m(w_1, \ \ldots, \ w_m)). \qquad (2)$$

Дифференциальные уравнения (1), к-рые с помощью введенных обозначений можно сокращенно записать в виде

$$\dot{w} = f(w), \qquad (3)$$

означают, что в каждый момент времени векторная скорость движения фазовой точки (или, как часто говорят, в е к т о р ф а з о в о й с к о р о с т и; не путать с употреблением того же термина в оптике и вообще при рассмотрении различных волновых процессов) равна вектору $f(w)$, исходящему из той точки w фазового пространства, где в данный момент находится движущаяся фазовая точка. В этом состоит так наз. к и н е м а т и ч е с к а я и н т е р п р е т а ц и я системы дифференциальных уравнений (1).

Напр., состояние частицы без внутренних степеней свободы (как говорят в механике, материальной точки), движущейся в потенциальном поле с потенциалом $U(x_1, x_2, x_3)$, характеризуется ее положением $x = (x_1, x_2, x_3)$ и скоростью $\dot{x}$; вместо последней можно использовать импульс $p = m\dot{x}$, где m — масса частицы. Закон движения можно записать в виде

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p, \quad \dot{p} = -\operatorname{grad} U(x). \qquad (4)$$

Формулы (4) представляют собой сокращенную запись системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Фазовым пространством здесь служит 6-мерное евклидово пространство, шесть компонент вектора фазовой скорости суть компоненты обычной скорости и силы, а проекция фазовой траектории на пространство x_i (параллельно пространству импульсов) есть траектория частицы в обычном смысле слова.

В ряде случаев оказывается, что невозможно установить такое соответствие между всеми состояниями Д. с. и точками евклидова пространства, к-рое обладало бы желаемыми свойствами, однако такое соответствие можно установить локально, т. е. для состояний, к-рые достаточно близки друг к другу. Сохраняя термин «фазовое пространство» для совокупности всех состояний Д. с., можно сказать, что в общем случае фазовое пространство является не евклидовым пространством, а нек-рым *дифференцируемым многообразием* W^m. Локально, т. е. в любой карте (локальной системе координат) многообразия W^m, движение Д. с. описывается системой дифференциальных уравнений вида (1). Глобальное же (т. е. пригодное для всех состояний Д. с.) и инвариантное (т. е. не зависящее от выбора карты) описание движения дается уравнением (3), в к-ром f является заданным на W^m векторным полем, сопоставляющим каждой точке w вектор $f(w)$, лежащий в касательном пространстве к многообразию в этой точке; уравнение (3) означает, что в процессе движения фазовая точка, совпадающая в данный момент времени с точкой $w \in W^m$, имеет в этот момент скорость $f(w)$. В локальных координатах вектор $f(w)$ представляется посредством своих компонент (2), и (3) сводится к (1).

Даже во многих случаях, когда фазовое пространство является евклидовым, часть движений рассматриваемой Д. с. может описываться посредством векторного поля на нек-ром **инвариантном многообразии** W, т. е. подмногообразии фазового пространства, обладающем тем свойством, что траектория, проходящая через к.-н. точку $w \in W$, целиком лежит в W. Так, уже в предыдущем примере, если ограничиться движениями с определенным значением энергии E, нужно рассматривать систему (4) не во всем 6-мерном евклидовом пространстве переменных (x, p), а на его 5-мерном подмногообразии, выделяемом уравнением

$$\frac{p^2}{2m}+U(x)=E,$$

где $p^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2$. Инвариантность этого многообразия отражает тот факт, что при движении частицы в потенциальном поле ее энергия сохраняется, т. е. $p^2/2m+U(x)$ является первым интегралом системы (4) (так наз. **интеграл энергии**). Много аналогичных примеров связано с *циклическими координатами.*

Примером Д. с. с неевклидовым фазовым пространством является твердое тело с неподвижной точкой O. Если ввести две ортогональные системы координат с началом в O — одну неподвижную, а другую жестко связанную с телом, то очевидно, что положение твердого тела будет характеризоваться расположением второй системы координат относительно первой, т. е. ортогональной матрицей 3-го порядка с определителем 1 (или к.-н. эквивалентным способом, см. *Эйлеровы углы, Кэли — Клейна параметры*). Поэтому совокупность всевозможных положений данной механич. системы (или, как говорят, ее **конфигурационное пространство**) есть специальная ортогональная группа 3-го порядка $SO(3)$. Фазовым же пространством W^6 является *касательное расслоение* группы $SO(3)$, ибо скорость изменения положения характеризуется касательным вектором к $SO(3)$. В качестве локальных координат в $SO(3)$ (выбор таковых автоматически определяет и нек-рые локальные координаты в W^6) обычно принимают углы Эйлера; тогда уравнения движения записываются как *Эйлера уравнения* (движения твердого тела).

Изложенная выше кинематич. интерпретация автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) [или картина движения фазовых точек в фазовом многообразии согласно уравнению (3)] никак не связана с тем, описывают ли эти уравнения к.-л. механич. систему. Поэтому термин «Д. с.» стал применяться в более широком смысле, означая произвольную физич. (скажем, радиотехнич.) систему, описываемую дифференциальными уравнениями вида (1) или (3), а затем — и просто систему дифференциальных уравнений такого вида, безотносительно к ее происхождению. Среди всех Д. с. в этом расширенном смысле слова Д. с. механики выделяются нек-рыми специфич. свойствами; большинство из них относится к специальному классу *гамильтоновых систем.* (Однако в механике рассматриваются и системы, не входящие в этот класс,— таково, напр., большинство *неголономных систем.* В то же время гамильтоновы системы встречаются и в ряде вопросов физики.)

В этом смысле понятие Д. с. эквивалентно понятию автономной системы дифференциальных уравнений вида (1) или (3). Однако практически о Д. с. говорят тогда, когда речь идет о качественной картине поведения всех траекторий во всем фазовом пространстве (глобальная теория) или по крайней мере в нек-рой его части (локальная теория); в теории Д. с. особенно большое внимание уделяется поведению фазовых траекторий при неограниченном возрастании времени. Из отдельных же траекторий в теории Д. с. интересуются обычно теми, свойства к-рых могут в значительной степени влиять на качественную картину, хотя бы локальную. Сюда относятся *равновесия положения* (или особые точки), *периодические траектории* (см. также *Предельный цикл*), *сепаратрисы.*

Для системы двух уравнений вида (1) ($m=2$) кинематич. интерпретация дает весьма наглядный и эффективный способ исследования, поскольку векторное поле $f(w)$ и фазовые траектории могут быть практически изображены на фазовой плоскости. Уже в случае трех уравнений ($m=3$) пришлось бы производить соответствующие построения в 3-мерном пространстве, что довольно затруднительно, а при $m>3$ подобные практич. возможности вообще отпадают. Поэтому при $m\geqslant 3$ (а в ряде случаев и при $m=2$) роль кинематич. интерпретации состоит в использовании при исследовании дифференциальных уравнений геометрич. понятий, методов и языка, в той или иной степени обобщающих привычные из повседневной жизни геометрич. представления.

Уже сравнительно слабые предположения о векторном поле $f(w)$ (напр., его дифференцируемость) гарантируют то, что для каждой точки $w_0 \in W^m$ существует ровно одно решение $w(t)$ уравнения (3), имеющее w_0 своим начальным значением: $w(0)=w_0$. Физически это соответствует тому, что при заданном законе движения (3) состояние системы в любой момент времени полностью определяется ее начальным состоянием. Вообще говоря, это решение может быть определено не для всех t, а лишь на нек-ром отрезке времени. В глобальной теории Д. с. делается дополнительное предположение, что при любом начальном значении соответствующее решение определено при всех t, тогда как в локальных вопросах обычно нецелесообразно делать к.-л. предположения о дальнейшем поведении тех траекторий, к-рые покидают рассматриваемую область фазового пространства.

При выполнении указанного предположения, если каждому $w_0 \in W^m$ сопоставить то состояние, куда перейдет за время t фазовая точка, движущаяся согласно (3) и вышедшая при $t=0$ из w_0, то получится нек-рое отображение S_t фазового пространства W^m в себя:

$$S_t w_0 = w(t),$$

где $w(t)$ — решение (3) и $w(0)=w_0$. Отображения S_t образуют непрерывную однопараметрич. группу *диффеоморфизмов* фазового многообразия W^m [групповое свойство $S_t S_s = S_{t+s}$ является следствием автономности системы (3)]. В порядке иллюстрации в литературе нередко проводят аналогию с известным из повседневной жизни и ранее всего изученным в науке примером, где возникает подобное семейство преобразований пространства,— стационарным течением жидкости или газа: за время t частица жидкости перетекает из точки w_0 в $S_t w_0$. (Впрочем, эта аналогия довольно поверхностна, ибо воображаемая «фазовая жидкость», «текущая» в фазовом пространстве, отличается от реальных сплошных сред отсутствием взаимодействия между соседними частицами.) В связи с этим в качестве синонима термина «Д. с.» употребляется термин *поток.*

В физич. литературе принято говорить об ансамбле динамических систем. Это означает, что каждому из возможных состояний данной физич. системы (т. е. каждой точке фазового пространства) мысленно сопоставляется нек-рая физич. система, описываемая уравнением (3) и находящаяся в этом состоянии; полученную совокупность однотипных систем (никак не взаимодействующих друг с другом), различающихся только состояниями, к-рыми они обладают в данный момент, и называют «ансамблем». На этом языке преобразованиям S_t фазового пространства соответствует эволюция «ансамбля», заключающаяся в изменении состояния входящих в него систем.

При разработке глобальных аспектов теории Д. с. понятие Д. с. подверглось дальнейшему обобщению. В наиболее широком смысле под динамической системой понимают произвольное действие группы (или даже полугруппы) G на нек-ром множестве W, именуемом фазовым пространством. Это значит, что для любого $g \in G$ определено отображение $S_g: W \to W$, причем $S_{g_1} S_{g_2} = S_{g_1 g_2}$, и если e — единица G, то S_e — тождественное преобразование (т. е. $S_e(w) = w$ для всех w). Совокупность точек $S_g(w_0)$, где w_0 фиксировано, а g пробегает G, наз. траекторией (или орбитой), проходящей через точку w_0, или, короче, траекторией этой точки. Группа G обычно считается топологической группой, фазовое пространство — топологическим пространством, или пространством с мерой, а отображение

$$G \times W \longrightarrow W, \quad (g, w) \longrightarrow S_g(w) \tag{5}$$

предполагается, соответственно, непрерывным или измеримым, причем в последнем случае обычно предполагается, что отображения S_g сохраняют меру (т. е. прообраз измеримого подмножества фазового пространства измерим и имеет ту же меру). Соответствующие направления в теории Д. с. наз. *топологической динамикой* (см. [6], [11]) и *эргодической теорией* (см. [4], [5], [7], [12]). Если G—группа Ли, W — гладкое многообразие, а отображение (5) гладкое, то говорят о гладкой динамической системе.

Впрочем, во всех трех направлениях основными являются случаи, когда G — либо группа $\mathbb{R}$ действительных чисел, и тогда Д. с. наз. потоком (хотя иногда этот термин употребляют как синоним термина «Д. с.» в наиболее общем его значении), либо G — группа $\mathbb{Z}$ целых чисел (вариант: аддитивная полугруппа неотрицательных целых чисел), и тогда для таких Д. с. был предложен термин каскад (говорят также о динамической системе с дискретным временем, но этот термин может означать также и только то, что в G берется дискретная топология). Гладкий поток, для к-рого отображение (5) — класса C^2, определяется гладким векторным полем

$$f(w) = \frac{d}{dt} S_t(w) \Big|_{t=0}$$

— при изменении t точка $w = S_t(w_0)$ движется согласно (3). В случае каскада отображения S_n получаются итерированием преобразования S_1 и обратного к нему (вариант: итерированием одного только отображения S_1); для гладкого каскада все S_h суть диффеоморфизмы (вариант: непрерывно дифференцируемые отображения).

Среди названных трех направлений в теории Д. с. топологич. динамика имеет ярко выраженный теоретико-множественный характер, а ее роль вначале была как бы вспомогательной. Дело в том, что обсуждение ряда понятий (*неблуждающая точка*, *предельное множество* траекторий, *минимальное множество*, почти периодичность, дистальность, *устойчивость по Лагранжу*, *устойчивость по Пуассону* и др.) и связей между ними, важных для трактовки более конкретных объектов — гладких Д. с.,— целесообразно провести в более абстрактной обстановке, отвлекаясь от задания Д. с. при помощи диффеоморфизма или уравнения (3). Это и делается в топологич. динамике. Позднее она получила значительное развитие, главным образом, в направлении изучения нек-рых минимальных множеств и их расширений (см. [13] — [15]; а также *Дистальная динамическая система*).

Зарождение эргодич. теории связано с классич. (доквантовой) статистич. физикой. При обосновании последней возник вопрос, можно ли, не решая гамильтонову систему дифференциальных уравнений, к-рая описывает движение частиц, образующих рассматриваемое макроскопич. тело, и даже не зная начальные значения для ее решения (что означало бы задание мгновенных положений и скоростей всех этих частиц), указать свойства статистич. характера, проявляющиеся в поведении при $t \to \infty$ всех или почти всех ее фазовых траекторий. Напр., существует ли при почти всех w предел переменного среднего

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(S_t w)\, dt, \tag{6}$$

где $g(w)$ есть функция, заданная на фазовом пространстве, и зависит ли этот предел от w? Приведенное выше определение Д. с., принятое в эргодич. теории, является результатом абстрагирования от конкретного происхождения систем статистич. физики, в частности от их гамильтоновой структуры; от последней удерживается лишь одно из ее следствий — сохранение меры при преобразованиях S_t. В данном случае такое абстрагирование служит не только для логич. анализа понятий, но и приводит к значительному увеличению общности теории, позволяя включить в нее разнообразный материал, связанный с теорией вероятностей, функциональным анализом, теорией чисел, топологич. алгеброй. Наличие связей с рядом разделов математики делает содержание эргодич. теории достаточно богатым, чтобы обеспечить ее успешное развитие в качестве самостоятельной научной дисциплины. Наряду с изучением статистики решений при $t \to \infty$, включающим как доказательство существования предела (6) при почти всех w и вывод условий, необходимых при его независимости от w, так и ряд других свойств (например, *перемешивание*), большую роль в эргодической теории играет проблема изоморфизма Д. с., исследование которой привело к построению ряда инвариантов Д. с. и выделению некоторых классов Д. с. с интересными свойствами.

Теория гладких Д. с. (см. [7], [8], [10]) в значительной степени сливается с *качественной теорией дифференциальных уравнений*, в особенности когда речь идет о конкретно заданной системе (1) или когда (независимо от способа задания изучаемой Д. с.) существенно используются соображения, относящиеся к выписанным в более или менее явном виде дифференциальным уравнениям. Гладкие Д. с. исследуются и локально, и глобально. К числу локальных свойств относятся: исследование положений равновесия и других упомянутых выше специальных типов траекторий для потоков и их аналогов для каскадов, *квазипериодических движений* и инвариантных многообразий для тех и других, а также и нек-рых классов *инвариантных множеств*. Исследование этих объектов включает в себя их обнаружение и локализацию, а также изучение в их окрестности поведения других траекторий Д. с. При исследовании неподвижных точек каскадов, положений равновесия и периодич. решений потоков применяются как аналитические, так и топологич. методы (см. [2], [3], [9]); для других объектов — только аналитические. Многие из этих методов связаны со следующей постановкой вопроса (или в равной степени применимы при ней): что происходит с потоком или каскадом, имеющим определенные свойства (локальные или глобальные) при малом изменении определяющего его векторного поля или диффеоморфизма? К такому подходу примыкают также и нек-рые из результатов и понятий глобальной теории, в особенности связанные со стремлением выделить такие свойства или классы Д. с., к-рые были бы в нек-ром смысле «типичными» (см., напр., *Грубая система*). Другие результаты глобального характера относятся к определенным классам Д. с., зачастую возникшим из смежных дисциплин.

В специальном случае потоков на двумерных поверхностях можно получить более или менее удовлетворительную информацию о могущих здесь представиться различных вариантах поведения фазовых траекторий; это особенно относится к системам (1) с $m=2$ (два уравнения) (теория Пуанкаре — Бендиксона, см. [1]—[3], [9]) и потокам без неподвижных точек на торе (см. [2], [9], [10]). Однако при этом остается открытым вопрос, как именно ведут себя траектории той или иной конкретной системы. Большое число работ посвящено исследованию последнего вопроса для различных классов уравнений. Особое положение потоков на двумерных поверхностях связано с тем, что в этом случае траектория локально разбивает фазовое пространство. Поэтому естественное многомерное обобщение соответствующей теории относится не к Д. с., а к слоениям коразмерности 1.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [2] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958, гл. 13—17; [3] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; [4] Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [5] «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3—172; [6] Gottschalk W. H., Hedlund G. A., Topological dynamics, Providence, 1955; [7] Arnold V. I., Avez A., Problèmes ergodiques de la mécanique classique, P., 1967; [8] Смейл С., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 1, с. 113—85; [9] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [10] Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975; [11] Сибирский К. С., Введение в топологическую динамику, Киш., 1970; [12] Синай Я. Г., Введение в эргодическую теорию, Ер., 1973; [13] Бронштейн И. У., Расширения минимальных групп преобразований, Киш., 1975; [14] Ellis R., Lectures on topological dynamics, N. Y., 1969; [15] Veech W. A., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 83, № 5, p. 775—830.

Д. В. Аносов.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ — круг вопросов теории упругости, относящихся к изучению распространения колебаний или состояния установившихся колебаний в упругих средах. В простейшем и наиболее важном для приложений случае линейной теории однородных изотропных упругих тел Д. з. т. у. сводятся к разысканию решений **уравнения Ламе**:

$$\mu\Delta u(x,\ t)+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}u(x,\ t)+F(x,\ t)=$$
$$=\rho\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

удовлетворяющих в нек-рой области заданным начальным и граничным условиям, здесь $u(x,\ t)\equiv(u_1,\ u_2,\ u_3)$ — вектор смещения в точке $x\equiv(x_1,\ x_2,\ x_3)$ в момент t, $F(x,\ t)$ — объемные силы, λ, μ — *Ламе постоянные*, ρ — плотность.

Как уравнение гиперболич. типа уравнение (1) допускает действительные характеристич. поверхности $\omega(x_1,\ x_2,\ x_3;\ t)=0$, вдоль к-рых производные решения, вообще говоря, выше 1-го порядка терпят разрывы (слабый разрыв). Поверхность разрыва распространяется в пространстве со скоростью

$$v=-\frac{\partial\omega}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2\right]^{-1/2},$$

разделяя в каждый момент времени два решения. Уравнение этой поверхности получается из условия невозможности однозначного определения в ее точках всех производных, исходя из знания первых производных и пользуясь уравнением (1). Из уравнения поверхности разрыва:

$$\left[\mu \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2\right] \times$$
$$\times \left[(\lambda+2\mu) \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2\right] = 0$$

следует существование двух скоростей перемещения этой поверхности

$$a = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \quad \text{и} \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Эти скорости являются скоростями перемещения двух видов деформации в линейном упругом изотропном теле: a — скорость распространения продольных возмущений, b — поперечных возмущений. Можно также показать, что в нек-рых случаях вдоль границ раздела могут распространяться поверхностные волны, имеющие свои характерные скорости распространения (волны Рэлея на свободной поверхности, волны Стоунли на границе упругих сред).

Изучаются случаи, когда вдоль характеристик терпят разрывы первые производные смещения (с и л ь н ы й р а з р ы в). Если скачки вдоль характеристик терпит лишь нормальная составляющая вектора grad u, а касательные составляющие этого вектора и сами смещения остаются непрерывными, разрыв наз. п р а в и л ь н ы м с и л ь н ы м р а з р ы в о м. В этом случае на поверхности характеристик соблюдаются условия кинематич. и динамич. совместности, играющие большую роль при решении динамич. задач методом характеристик.

Явление динамич. деформаций упругого тела усложняется, если тело имеет конечную границу. Каждая точка границы, как только ее коснется любой из фронтов распространяющихся возмущений, к-рые сами являются сложными, изменяющимися во времени образованиями, начинает генерировать, по крайней мере, два типа новых деформаций.

Важными частными случаями уравнения (1) являются случаи, когда поле не зависит от времени (статика) и, когда поле зависит от времени по закону

$$u(x, t) = \mathrm{Re}\,[u(x)\, e^{-i\omega t}],$$

где $u(x)$ — комплексный вектор (амплитуда колебаний), не зависящий от времени, ω — частота установившихся колебаний. В последнем случае уравнение (1) приводится к эллиптич. системе уравнений относительно амплитуды

$$\left.\begin{array}{c} \mu \Delta u(x) + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\, u(x) + \omega^2 u(x) = F(x), \\ F(x, t) = \mathrm{Re}\,[F(x)\, e^{-i\omega t}]. \end{array}\right\} \quad (1')$$

Если область D, в к-рой исследуется распространение колебаний, занимает все бесконечное пространство E_3, для уравнения (1) корректна задача Коши с начальными условиями:

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = \varphi^0(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi^{(1)}(x). \qquad (2)$$

Основную роль играют специальные решения уравнения (1), представляющие смещения бесконечного упругого пространства под влиянием силы, сосредоточенной в единственной точке $x^0 \equiv (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ и равной по величине $\delta(t)$ (где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака) (ф у н д а м е н т а л ь н ы е р е ш е н и я).

Если сила действует в направлении оси x_k, $k=1, 2, 3$, то составляющие смещения $u_j^{(k)}(x, t) = \Gamma_{kj}$, $k, j = 1, 2, 3$ имеют следующие значения:

$$\Gamma_{kj}(x-x^0, t) = \frac{1}{4\pi\rho}\left[\frac{1}{a^2 r}\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_j}\delta(\gamma_a) + \left(\frac{r}{a}\varepsilon(\gamma_a) - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{r}{b}\varepsilon(\gamma_b) + \gamma_a \varepsilon(\gamma_a) - \gamma_b \varepsilon(\gamma_b)\right) +$$
$$\left. + \left(\delta_{kj} - \frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right)\frac{\delta(\gamma_b)}{b^2 r}\right],$$

где

$$r = |x - x_0|, \quad \gamma_a = t - \frac{r}{a}, \quad \gamma_b = t - \frac{r}{b},$$

$$\varepsilon(c) = \begin{cases} 1, & c \geq 0, \\ 0, & c < 0, \end{cases} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Матрица фундаментальных решений $\Gamma(x - x^0, t) = \|\Gamma_{kj}(x - x^0, t)\|$ размера 3×3, представляет симметричный тензор; решение задачи Коши для уравнения (1) выражается формулой Вольтерра:

$$u(x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial t_0} \int_{r \leqslant at_0} \Gamma(x^0 - x, t_0)\, \varphi^{(0)}(x)\, dx + $$

$$+ \int_{r \leqslant at_0} \Gamma(x^0 - x, t_0)\, \varphi^{(1)}(x)\, dx +$$

$$+ \int_0^{t_0} \int_{r \leqslant a(t_0 - t)} \Gamma(x^0 - x, t - t_0)\, F(x, t)\, dx\, dt. \quad (3)$$

Для однородной системы (1′), Γ_{kj} принимает следующий вид:

$$\Gamma_{kj}(x - x^0) = \frac{1}{2\pi\mu} \delta_{kj} \frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{e^{ik_1 r} - e^{ik_2 r}}{r};$$

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}. \quad (4)$$

Кроме задачи Коши для уравнения (1) корректны смешанные задачи, к-рые приходится рассматривать, когда область D имеет границу S в конечной части пространства. При этом существенную роль играют граничные условия на S, к-рые должны быть удовлетворены вместе с условиями (2).

Основными считаются следующие типы граничных задач: первая — заданы смещения, вторая — заданы напряжения, третья — задана линейная комбинация смещений и напряжений, четвертая — заданы нормальная составляющая смещения и касательные составляющие напряжения, пятая — заданы касательные составляющие смещения и нормальная составляющая напряжения, шестая — на одной части S заданы смещения и на дополнении — напряжения.

В отличие от задачи Коши, к-рая формулой (3) решается до конца в общем виде, решения смешанных задач были получены только в частных случаях. Важнейшими являются: решения в замкнутом виде первой и второй основных смешанных задач для полуплоскости и полупространства, полученные методом комплексных волн и развитием метода характеристик; решения для волнового уравнения в случае шара, полученные методом функционально-инвариантных интегралов; решения нек-рых задач теории упругости развитием этого же метода, решения ряда задач дифракции. В общем случае получить решения в замкнутом виде не удается; если, однако, от этого требования отказаться, весьма общие результаты устанавливаются методами теории потенциалов и теории сингулярных интегральных уравнений.

С помощью фундаментальных решений (4), по аналогии с теорией гармонич. потенциалов, вводятся понятия эластопотенциалов простого и двойного слоев и объемных масс, к-рые позволяют выразить регулярные решения уравнения (1′) формулой:

$$\varepsilon(x)\, u(x) = \int_S (T\Gamma(x - y))^* u(y)\, d_y S -$$

$$- \int_S \Gamma(x - y)\, Tu(y)\, d_y S - \int_D \Gamma(x - y)\, F(y)\, dy, \quad (5)$$

где T — оператор напряжения, $*$ — знак транспонирования матрицы, $\varepsilon(x) = 1$, если $x \in D$, и $\varepsilon(x) = 0$, если $x \notin \overline{D}$. Первые пять граничных условий, указанных выше, позволяют записать с помощью потенциалов соответствующие задачи в виде двумерных сингулярных интегральных уравнений на замкнутой поверхности S. Доказана разрешимость всех задач для произвольной частоты колебаний ω в случае внешней области и существование дискретного действительного неотрицательного спектра собственных частот для внутренних задач. Решения выражаются рядами Фурье по нек-рой полной системе векторов, к-рые строятся с помощью (4), и коэффициенты Фурье определяются явно.

Пусть на границе S в области D задано смещение $u|_S = f(y)$, S_1 — произвольная гладкая замкнутая поверхность, окружающая S и не имеющая с ней общих точек, и $\{x^k\}_1^\infty$ — счетное множество точек на S_1, распределенное всюду плотно. Через $\Gamma^i(x-x_0)$, $i=1, 2, 3$, обозначены столбцы матрицы $\Gamma(x-x^0)$. Доказывается, что совокупность векторов $\{\Gamma^i(x^k-y)\}_1^\infty$, $i=1, 2, 3$; $y \in S$ линейно независима и полна в $L_2(S)$.

Элементы этой совокупности пронумерованы следующим образом:

$$\overset{k}{\psi}(y) = \Gamma^{e_k}\left(x^{\left[\frac{k+2}{3}\right]} - y\right), \quad e_k = k - 3\left[\frac{k-1}{3}\right], \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $[n]$ — наибольшая целая часть числа n, и введена ортонормированная совокупность

$$\overset{k}{\varphi}(y) = \sum\nolimits_{s=1}^{k} a_{ks} \overset{s}{\psi}(y),$$

где a_{ks} — известные числа. Тогда решение задачи во всякой внутренней точке выражается равномерно сходящимся рядом:

$$u(x) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \sum\nolimits_{s=1}^{k} h_k a_{ks} \Gamma^{e_s}\left(x^{\left[\frac{s+2}{s}\right]} - x\right), \qquad (6)$$

где
$$h(y) = f(y) - \int_D \Gamma(y-x)\, F(x)\, dx,$$
$$h_k = \int_S h(y) \overset{k}{\varphi}(y)\, dS.$$

Конечный отрезок ряда может служить для вычисления приближенных значений решения.

Результаты, установленные для уравнения (1′), позволяют получить решения смешанных задач для уравнения (1) с помощью преобразования Лапласа.

При исследовании решений уравнения Ламе для слоистых сред рассматривают распространение отдельных волн или интерференцию всех образующихся волн. При первом подходе используется конечность скорости распространения упругих волн и последовательно изучаются распространение волн внутри слоев и процессы отражения и преломления на границах. Для построения интерференционных решений уравнения Ламе краевые условия на границах должны удовлетворяться совместно, что приводит к алгебраич. системе уравнений. Для определения собственных процессов в слоистой системе необходимо найти корни определителя этой системы, при этом нахождение корней может быть сведено к определению собственных значений нек-рых операторов. Собственные числа (корни) могут быть как действительными, так и комплексными в зависимости от характера оператора. Действительным собственным числам соответствуют интерференционные волны Рэлея и Лява, распространяющиеся вдоль слоя без экспоненциального затухания. Расчет различных характеристик этих волн в случае кусочно непрерывной скорости проводится с помощью ЭВМ. Результаты этих вычислений используются для построения теоретич. сейсмограмм.

Затухающие интерференционные волны связаны с комплексными собственными числами несамосопряженных операторов. Оба вида интерференционных волн рассматриваются в сейсмике для объяснения наблюдаемых на практике сейсмич. волн.

Для решения ряда задач о колебаниях однородной среды применялся метод функционально-инвариантных решений. В частности, исследовано волновое поле, порожденное точечным источником, в двух упругих полупространствах с плоской границей раздела; из точных решений получены асимптотич. формулы, описывающие волновое поле в прифронтовых зонах.

В теории упругих волн большое значение имеет геометрич. приближение, применяемое как в стационарном, так и в нестационарном вариантах. Вектор смещения u ищется в виде ряда:

$$u(M,\ t)=\sum_{j=0}^{\infty} u_j(M)\, f_j(t-\tau(M)),\qquad f_j'=f_{j-1},\quad (7)$$

где f_j — в нестационарном случае функции, имеющие особенность в нуле, в стационарном случае

$$f_j(s)=\frac{e^{-i\omega s}}{(-i\omega)^{j+\gamma}},\quad \gamma=\text{const}.$$

В отличие от скалярного случая, возможны два типа рядов вида (7), формально удовлетворяющих уравнениям теории упругости. Случай продольных волн, когда

$$(\nabla\tau)^2=\frac{1}{a^2},\quad a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\quad u_0 \parallel \nabla\tau,$$

где a — скорость продольных волн, и случай поперечных волн, когда

$$(\nabla\tau)^2=\frac{1}{b^2},\quad b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},\quad u_0 \perp \nabla\tau,$$

где b — скорость поперечных волн.

Векторы u_j удовлетворяют рекуррентным соотношениям. Решения многих физически интересных задач допускают разложения вида (7), и «волны» такого вида можно отражать и преломлять, в результате опять получаются «волны», представимые рядами вида (7).

Геометрооптич. методы приложимы и в случае поверхностных волн. Наложением продольной и поперечной волн вида (7) с комплексными эйконалами можно удовлетворить краевым условиям отсутствия напряжений на поверхности. Такого рода построения приводят к широкому классу поверхностных волн, частным случаем к-рых являются волны Рэлея.

Геометрооптич. теорию можно также развить для поверхностных волн иного типа: для волн, аналогичных волнам Лява, и для так наз. волн, удерживаемых поверхностью. Аналог волн Лява, о к-рых идет речь,— это стационарные высокочастотные волны, фазовая скорость к-рых близка к скорости поперечных волн, а направление вектора смещения в первом приближении по частоте перпендикулярно нормали к поверхности и направлению распространения волны. Волны, удерживаемые поверхностью, тоже имеют поверхностную скорость, близкую к скорости поперечных волн. Однако их поляризация другая — вектор смещений лежит в плоскости, образованной нормалью к поверхности и направлением распространения волны.

Лит.: [1] Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, пер. с нем., ч. 2, Л.—М., 1937, гл. 12; [2] Огурцов К. И., Петрашень Г. И., «Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем. наук», 1951, № 149, в. 24, с. 3—249; [3] Бабич В. М. и др., Линейные уравнения математической физики, М., 1964, гл. 1, 2; [4] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953; [5] Ильин В. А., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 2, с. 97—154; [6] Купрадзе В. Д. и др., Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, М., 1976; [7] Петрашень Г. И., «Уч. зап. ЛГУ», 1956, № 208, в. 30, с. 5—57; [8] Алексеев А. С., Бабич В. М., Гельчинский Б. Я., в кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, сб. 5, Л., 1961, с. 3—24; [9] Бабич В. М., «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 6, с. 1263—66; [10] Бабич В. М., Молотков И. А., «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1966, № 6, с. 34—38; [11] Мухина И. В., Молотков И. А., там же, 1967, № 4, с. 3—8; [12] Зволинский Н. В., «Изв. АН

СССР. Сер. геофиз.», 1957, № 10, с. 1201—18; 1958, № 1, с. 3—16; № 2, с. 165—74; [13] Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел, т. 10, М., 1977, с. 5—62.

В. Д. Купрадзе, В. М. Бабич, И. А. Молотков.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел математики, посвященный теории и методам решения многошаговых задач оптимального управления.

В Д. п. для управляемых процессов среди всевозможных управлений ищется то, к-рое доставляет экстремальное (наименьшее или наибольшее) значение целевой функции — нек-рой числовой характеристики процесса. Под многошаговостью понимают либо многоступенчатую структуру процесса, либо что управление разбивается на ряд последовательных этапов (шагов), соответствующих, как правило, различным моментам времени. В ряде задач многошаговость проистекает из существа процесса (напр., в задаче определения оптимальных размеров ступеней многоступенчатой ракеты или при нахождении наиболее экономичного режима полета самолетов), но она может вводиться искусственно для того, чтобы обеспечить возможность применения метода Д. п. Таким образом, в названии Д. п. под программированием понимают принятие решений, планирование, а слово динамическое указывает на существенную роль времени и порядка выполнения операций в рассматриваемых процессах и методах.

Методы Д. п. являются составной частью методов, используемых в исследовании операций, и применяются в задачах оптимального планирования (напр., в задачах об оптимальных распределениях ресурсов, в теории управления запасами, в задачах замены оборудования и т. д.) и при решении многих технических проблем (напр., в задачах управления последовательными химическими процессами, в задачах оптимального проектирования прокладки дорог и др.).

Проиллюстрируем основную идею. Пусть процесс управления нек-рой системой X состоит из m шагов (этапов); на i-м шаге управление y_i переводит систему из состояния x_{i-1}, достигнутого в результате $(i-1)$-го шага, в новое состояние x_i. Этот процесс перехода осуществляет заданная функция $f_i(x, y)$, и новое состояние определяется значениями x_{i-1}, y_i:

$$x_i = f_i(x_{i-1}, y_i).$$

Таким образом, управления $y_1, y_2, \ldots, y_m$ переводят систему из начального состояния $x_0 \in X_0$ в конечное — $x_m \in X_m$, где X_0 и X_m — совокупности допустимых начальных и конечных состояний системы X. Опишем одну из возможных постановок экстремальной задачи. Начальное состояние x_0 задано. Требуется выбрать управления $y_1, y_2, \ldots, y_m$ таким образом, чтобы система X перешла в допустимое конечное состояние и при этом заданная целевая функция $F(x_0, y_1, x_1, y_2, \ldots, y_m, x_m)$ достигла максимального значения F^*, т. е.

$$F^* = \max_{y_1, y_2, \ldots, y_m} F(x_0, y_1, x_1, y_2, \ldots, y_m, x_m).$$

Важной особенностью метода Д. п. является то, что он применим лишь для аддитивной целевой функции. В рассмотренном примере это означает, что

$$F = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_{i-1}, y_i).$$

Кроме того, в методе Д. п. требуется, чтобы задача характеризовалась отсутствием «последействия»: решения (управления), принимаемые на шаге, оказывают влияние только на состояние x_i системы в момент i. Другими словами, процессы, описываемые функциями вида

$$x_i = f_i(x_{i-1}, y_i, x_{i-2}, y_{i-1}, \ldots, y_1, x_0),$$

не рассматриваются. Оба упомянутых ограничительных условия можно ослабить, но только за счет существенного усложнения метода.

Для решения задач Д. п. обычные методы математического анализа либо вообще неприменимы, либо приводят к огромному числу вычислений. В основе метода Д. п. лежит принцип оптимальности, сформулированный Р. Беллманом (R. Bellman): предположим, что осуществляя управление дискретной системой X, мы уже выбрали некоторые управления дискретной системой $y_1, y_2, \ldots, y_k$ и тем самым траекторию состояний $x_0, x_1, \ldots, x_k$, и хотим завершить процесс, т. е. выбрать $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_m$ (а значит и $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_m$); тогда, если завершающая часть процесса не будет оптимальной в смысле достижения максимума функции

$$F_k = \sum_{i=k+1}^{m} \varphi_i(x_{i-1}, y_i),$$

то и весь процесс не будет оптимальным.

Пользуясь принципом оптимальности, легко получить основное функциональное соотношение. Определим последовательность функций переменной x:

$$\omega_m(x) = 0, \quad \omega_{k-1}(x) = \max_y [\varphi_k(x, y) + \omega_k(f_k(x, y))],$$

$k = 1, 2, \ldots, m$. Здесь максимум берется по всем управлениям, допустимым на шаге k. Соотношение, определяющее зависимость ω_{k-1} от ω_k, принято называть *Беллмана уравнением*. Смысл функций $\omega_{k-1}(x)$ нагляден: если система на шаге $k-1$ оказалась в состоянии x, то $\omega_{k-1}(x)$ есть максимально возможное значение функции F. Одновременно с построением функций $\omega_{k-1}(x)$ находятся условные оптимальные управления $y_k(x)$ на каждом шаге (т. е. значения оптимального управления при всевозможных предположениях о состоянии x системы на шаге $k-1$). Окончательно оптимальные управления находятся последовательным вычислением величин

$$\omega_0(x_0) = F^*, \; y_1, \; x_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_m, \; x_m.$$

Из сказанного очевидна следующая особенность метода Д. п.— с его помощью решается не одна конкретная задача при определенном x_0, а сразу все подобные однотипные задачи при любом начальном состоянии. Поскольку численная реализация метода Д. п. весьма сложна, т. к. требует большого объема памяти ЭВМ, то его целесообразно применять в тех случаях, когда необходимо многократно решать типовые задачи (скажем, определение оптимального режима полета самолета при меняющихся погодных условиях). Несмотря на то, что задача Д. п. формулируется для дискретных процессов, в ряде случаев метод Д. п. с успехом применяется для решения динамических задач с непрерывными параметрами.

Д. п. дало новый подход ко многим задачам *вариационного исчисления*.

Важным разделом Д. п. являются стохастические задачи Д. п.— задачи, в к-рых на состояние системы и на целевую функцию влияют случайные факторы. К таким задачам относятся, напр., задачи оптимального регулирования запасов с учетом возможностей случайного пополнения запасов. Здесь наиболее естественной областью применения Д. п. являются управляемые марковские процессы.

Метод Д. п. был предложен Р. Беллманом. Строгое обоснование метода Д. п. было получено в результате работ Л. С. Понтрягина и его учеников по математической теории управляемых процессов (см. *Оптимального управления математическая теория*).

Хотя метод Д. п. существенно упрощает исходные задачи, однако явное его применение, как правило, весьма громоздко. Для преодоления этих трудностей разрабатываются приближенные методы Д. п.

Лит.: [1] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [2] Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966; [3] Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование, пер. с англ., М., 1967; [4] Хедли Дж., Уайтин Т., Анализ систем управления запасами, пер. с англ., М., 1969; [5] Ховард Р. А., Динамическое программироваиие и марковские процессы, пер. с англ., М., 1964.

С. А. Ашманов, В. Г. Карманов.

ДИНИ ПРИЗНАК: если 2π-периодическая интегрируемая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ в точке x_0 удовлетворяет условию

$$\int_0^\delta \frac{1}{x} \left| f(x_0+x)+f(x_0-x)-2S \right| dx < \infty$$

при фиксированном числе S, $-\infty<S<+\infty$, и каком-либо $\delta>0$, то ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к числу S. Д. п. доказан У. Дини [1]. Его утверждение окончательно в следующем смысле. Если $\mu(t)\geqslant 0$ — такая непрерывная функция, что функция $\mu(t)/t$ не интегрируема в окрестности точки $t=0$, то можно найти непрерывную функцию $f(t)$, ряд Фурье к-рой расходится в точке $t=0$, причем

$$|f(t)-f(0)| \leqslant \mu(t)$$

для малых t.

Лит.: [1] Dini U., Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzione di una variable reale, Pisa, 1880; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965.

Б. И. Голубов.

ДИНИ ТЕОРЕМА о равномерной сходимости ряда: *если функции* $u_n(x)$, $n=1,2, \ldots$, непрерывны и неотрицательны на отрезке $[a, b]$ и сумма ряда $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ является непрерывной на этом отрезке функцией, то указанный ряд сходится на $[a, b]$ равномерно. Д. т. обобщается на случай, когда областью определения функций $u_n(x)$ является произвольный *компакт*.

Л. Д. Кудрявцев.

ДИНИ — ЛИПШИЦА ПРИЗНАК: если непрерывная 2π-периодич. функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta, f) \ln \frac{1}{\delta} = 0,$$

где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$, то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней на всей числовой оси. Д.— Л. п. доказан У. Дини [1], а в частном случае, когда $\omega(\delta, f)=O(\delta^\alpha)$, $\delta\to+0$, при каком-либо $0<\alpha\leqslant 1$, он установлен Р. Липшицем [2]. Утверждение Д.— Л. п. окончательно в следующем смысле. Если $\omega(\delta)$ — произвольный модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\overline{\lim_{\delta \to +0}}\, \omega(\delta) \ln \frac{1}{\delta} > 0,$$

то существует непрерывная 2π-периодич. функция $f_0(x)$, ряд Фурье которой расходится в некоторой точке, а модуль непрерывности $\omega(\delta, f_0)$ удовлетворяет условию $\omega(\delta, f_0)=O(\omega(\delta))$.

Лит.: [1] Dini U., Sopra la serie di Fourier, Pisa, 1872; [2] Lipschitz R., «J. reine und angew. Math.», 1864, Bd 63, № 2, S. 296—308; [3] Lebesgue H., «Bull. Soc. math. France» 1910, t. 38, p. 184—210; [4] Никольский С. М., «Докл. АН СССР», 1950, т. 73, № 3, с. 457—60; [5] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.

Б. И. Голубов.

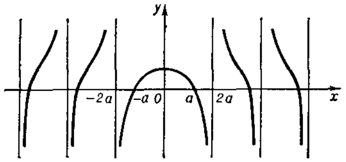
ДИНОСТРАТА КВАДРАТРИСА — трансцендентная плоская кривая, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид:

$$y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}.$$

В полярных координатах:

$$\rho = \frac{a(\pi - 2\varphi)}{\pi \cos \varphi}.$$

У Д. к. бесконечное число ветвей (рис.), пересекающих ось абсцисс в точках $x=\pm a, \pm 3a, \pm 5a, \ldots$ и имеющих асимптоты $x=\pm 2a, \pm 4a, \pm 6a, \ldots$. Точки пересечения с прямой $y=2a/\pi$ — точки перегиба.



Открытие Д. к. приписывают Гиппию из Элиды (420 до н. э.). Возможность графич. решения задачи о *квадратуре круга* при помощи квадратрисы показал Динострат (2-я пол. 4 в. до н. э.).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ДИОФАНТОВ АНАЛИЗ — см. *Диофантова геометрия.*

ДИОФАНТОВ ПРЕДИКАТ — всякий предикат $\mathcal{P}$, определенный на множестве упорядоченных наборов из n целых (или целых неотрицательных, или целых положительных) чисел, для к-рого можно указать многочлен $P(a_1, \ldots, a_n, z_1, \ldots, z_k)$ с целыми коэффициентами такой, что набор $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ удовлетворяет предикату $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда *диофантово уравнение*

$$P(a_1, \ldots, a_n, z_1, \ldots, z_k)=0$$

разрешимо относительно $z_1, \ldots, z_k$. Область истинности Д. п. является *диофантовым множеством.* Класс Д. п. совпадает с классом перечислимых предикатов (см. *Диофантовых уравнений проблема разрешимости*).

Ю. В. Матиясевич.

ДИОФАНТОВА ГЕОМЕТРИЯ, диофантов анализ,— область математики, посвященная изучению целочисленных и рациональных решений систем алгебраич. уравнений, или, иначе, изучению *диофантовых уравнений*, методами алгебраич. геометрии. Появление во 2-й пол. 19 в. теории алгебраич. чисел сделало естественным изучение диофантовых уравнений с коэффициентами из произвольного поля алгебраич. чисел, причем решения ищутся или в этом поле, или же в его кольце целых элементов. Параллельно с теорией алгебраич. чисел развивалась и теория алгебраических функций. Глубокая аналогия между ними, подчеркивавшаяся Д. Гильбертом (D. Hilbert) и особенно Л. Кронекером (L. Kronecker), привела к единообразному построению различных арифметич. теорий для этих двух типов полей (см. [3]), называемых обычно глобальными полями. Особенно отчетливо эта аналогия проступает в том случае, когда в качестве алгебраич. функций рассматриваются функции одного переменного и с конечным полем констант. Хорошей иллюстрацией тому служат такие понятия как *дивизоры*, ветвление и такие результаты как теория полей классов. Проникновение этой точки зрения в теорию диофантовых уравнений произошло позднее, и систематич. рассмотрение диофантовых уравнений не только с числовыми, но и с функциональными коэффициентами началось только в 50-х гг. 20 в. Решающее влияние оказало на это развитие алгебраич. геометрии. Одновременное рассмотрение числовых и функциональных полей, выступающих как две равноправные стороны одного и того же предмета, не только приводит к красоте и законченности результатов, но и взаимно обогащает оба аспекта (см. [3]).

В алгебраич. геометрии неинвариантное понятие системы уравнений заменяется понятием *алгебраического многообразия* над заданным полем K, а место решений занимают рациональные точки со значениями в поле K или его конечном расширении. Поэтому можно сказать, что основная задача диофантовой геометрии состоит в изучении множества $X(K)$ рациональных точек алгебраич. многообразия X, определенного над полем K указанного выше вида. Целочисленные решения диофантовых уравнений также имеют геометрич. смысл.

При изучении рациональных (или целых) точек на алгебраич. многообразиях прежде всего возникает вопрос о существовании хотя бы одной такой точки. Десятая проблема Гильберта сформулирована как задача нахождения общего метода, позволяющего решать этот вопрос для любого алгебраич. многообразия. После появления точного понятия алгоритма и доказательства алгоритмич. неразрешимости целого ряда задач стало ясно, что проблема Гильберта может иметь и отрицательное решение (см. *Диофантовых уравнений проблема разрешимости*), и наиболее интересным является вопрос о том, для каких классов диофантовых уравнений такой алгоритм существует. Известно несколько общих подходов к этой задаче. Наиболее естественным с алгебраич. точки зрения является так наз. принцип Хассе. Он состоит в рассмотрении наряду с исходным полем K его пополнений K_v по всевозможным нормированиям. Поскольку $X(K) \subset \subset X(K_v)$, то необходимым условием существования K-рациональной точки является непустота множеств $X(K_v)$ для всех v. Значение принципа Хассе состоит в том, что он сводит вопрос о существовании точки к аналогичному вопросу над локальным полем. Последняя задача существенно проще — для нее известен алгоритм, а в частном важном случае, когда многообразие X проективно и неособо, *Гензеля лемма* и ее обобщения позволяют произвести дальнейшую редукцию и свести все к изучению рациональных точек над конечным полем, где задача решается или последовательным перебором, или более совершенными средствами (см. *Алгебраических многообразий арифметика*; см. также [2], [12]). Последнее существенное обстоятельство, связанное с принципом Хассе, состоит в том, что для всех v, кроме конечного числа, множества $X(K_v)$ непусты, так что число условий всегда конечно, и они могут быть эффективно проверены (см. [2]). Но уже для кривых 3-й степени принцип Хассе неприменим. Так, кривая $3x^3 + +4y^3 = 5$ имеет точки во всех полях *p-адических чисел* и в поле действительных чисел, но не имеет рациональной точки (см. [2], [7]). Этот пример послужил отправным пунктом для создания теории, описывающей «отклонение» от принципа Хассе в классе главных однородных пространств абелевых многообразий (см. [7], [10]). Это отклонение описывается в терминах специальной группы Ш, сопоставляемой каждому абелеву многообразию (группа Тейта — Шафаревича). Основную трудность теории составляет отсутствие способов вычисления группы Ш, к-рая (к 1978) не вычислена ни для одного многообразия. Эта теория распространена и на другие классы алгебраич. многообразий (см. [11]).

Другое эвристическое соображение, используемое при изучении диофантовых уравнений, состоит в том, что если число переменных, входящих в систему уравнений, велико по сравнению со степенью, то система, как правило, имеет решение. Однако доказать это в тех или иных случаях бывает очень трудно. Единственный общий подход к задачам такого типа принадлежит аналитич. теории чисел и основан на применении оценок тригонометрич. сумм (см. *Тригонометрических сумм метод*, *Виноградова метод*; см. также [4]). Первоначально этот метод применялся к уравнениям довольно частного вида (напр., к *Варинга проблеме*). Но в дальнейшем с его помощью было доказано, что если F — форма нечетной степени d от n переменных и с рациональными коэффициентами, то при n, достаточно большом по сравнению с d, проективная гиперповерхность $F=0$ имеет рациональную точку (см. [2]). Имеется гипотеза Артина, утверждающая, что этот результат справедлив уже при $n > d^2$ (см. [2], [10]). Она доказана (к 1978) только для квадратичных форм. Аналогичные вопросы можно ставить и для других полей. В частности, о результатах, полученных для локальных полей, см. *Алгебраических многообразий арифметика*; см. также [5]. Центральной проблемой Д. г. является изучение структуры множества рациональных или целых точек и прежде всего выяснение вопроса о том, конечно оно или нет. В этой последней задаче основное эвристическое предположение состоит в том, что если степень системы намного больше числа переменных, то система имеет, как правило, конечное число решений (см. [10]). В отличие от рассмотренной выше задачи о разрешимости, никаких общих результатов (к 1978) в этом направлении нет. Наибольшее число исследований посвящено случаю алгебраич. кривых. Оказалось, что строение множества рациональных точек $X(K)$ кривой X, определенной над полем K, сильно зависит от ее рода g. Если $g=0$, то либо множество $X(K)$ пусто, либо кривая X бирационально эквивалентна над полем K проективной прямой. Последнее означает, что множество $X(K)$ бесконечно, и существует параметризация его рациональными функциями нек-рой переменной со значениями из поля K (см. [7], [13], [1]). Кривые рода $g=1$ с непустым множеством $X(K)$ рассматривались в 1901 А. Пуанкаре (H. Poincaré), к-рый показал, что они бирационально эквивалентны плоским кубич. кривым, и ввел на множестве $X(K)$ структуру абелевой группы (см. *Эллиптическая кривая*; см. также [1], [7]). Гипотеза Пуанкаре о том, что при $K=Q$ группа имеет конечное число образующих, доказана К. Морделлом (K. Mordell, 1922) (см. [15]). Это было обобщено А. Вейлем (A. Weil, 1928) на произвольные поля алгебраических чисел и А. Нероном (A. Neron, 1952) на любые глобальные поля (см. [8]).

Группу $X(K)$ можно представить в виде прямой суммы свободной группы ранга r и конечной группы порядка n. Вопрос о том, ограничены ли эти числа на множестве всех эллиптич. кривых над данным полем K, привлекал внимание начиная с 30-х гг. (см. [7]). Ограниченность кручения n доказана в 1971. В функциональном случае существуют кривые сколь угодно большого ранга (см. [12]). В числовом случае ответ (к 1978) неизвестен.

Наконец, в случае кривой рода $g>1$ имеется гипотеза Морделла о конечности числа рациональных точек (высказанная для $K=Q$; точную формулировку см. в [9]). В функциональном случае эта гипотеза доказана Ю. И. Маниным в 1963 (см. [12]). Если же основное поле — числовое, то гипотеза доказана для *модулярных кривых*. Все имеющиеся результаты дают конечность числа точек в не слишком больших расширениях основного поля (см. [12]).

Гораздо большие успехи достигнуты в изучении целых точек. Здесь имеется весьма общий метод *диофантовых приближений*, предложенный в 1909 А. Туэ (A. Thue) (см. [6], [8], [9], [13]). Он основан на следующем. Пусть $F(x, y)=\prod_i(x-a_iy)$ — форма с рациональными коэффициентами и пусть имеется целочисленное решение (x_0, y_0) уравнения $F(x, y)=c$, $c\neq0$. Тогда для нек-рого i

$$\left| a_i-\frac{x_0}{y_0} \right| < \frac{b}{y_0^n}, \quad b=\mathrm{const}.$$

Если α — алгебраич. число степени $n\geqslant3$, то неравенство $|\alpha-p/q|<1/q^{\varepsilon}$ имеет конечное число решений в целых p и q при $\varepsilon\geqslant n/2+1$. Отсюда следует конечность числа целых точек на кривых вида $F(x, y)=c$. С тех пор каждое продвижение в проблеме диофантовых приближений алгебраич. чисел давало соответствующие результаты для целых точек. Так была доказана в 1929 К. Зигелем (C. Siegel) теорема о конечности числа целых точек на любой кривой рода $g>0$. О дальнейших обобщениях этой теоремы на случай целых точек в произвольных глобальных полях см. также [9].

Основным технич. средством, используемым в доказательстве этих и других теорем конечности в Д. г., является высота (см. *Высота* в диофантовой геометрии).

Среди алгебраич. многообразий размерности >1 наиболее изучены *абелевы многообразия*, представляющие собой многомерный аналог эллиптических кривых. Обобщая теорему Морделла, А. Вейль перенес ее утверждение о конечности числа образующих группы рациональных точек на абелевы многообразия любой размерности (теорема Морделла — Вейля). В 60-х гг. появилась гипотеза Берча и Суиннертон-Дайера, связывающая ранг этой группы с порядком полюса *дзета-функции* многообразия X в точке $\dim X$ (см. [7], [12]). Несмотря на многочисленные аргументы в пользу этой гипотезы, никаких подходов к ее доказательству (к 1978) пока нет. Нет никакого продвижения (к 1978) и в гипотезах конечности для рациональных точек замкнутых подмногообразий и целых точек аффинных открытых подмножеств абелевых многообразий (см. [9], [10]).

Другой класс алгебраич. многообразий, для изучения к-рого имеются общие методы и подходы, состоит из многообразий вида

$$F(x_1, \ldots, x_n)=c, \quad c \neq 0, \quad \deg F=m, \qquad (*)$$

где F — форма, разложимая в нек-ром расширении основного поля на линейные множители. Для изучения целых точек на таких многообразиях имеются два метода. Первый — это отмеченный выше метод диофантовых приближений, созданный А. Туэ именно для уравнений такого вида, но с двумя переменными. Только в 1970 этот метод получил новое развитие: при помощи теоремы Шмидта о совместных приближениях было доказано, что число целых точек на многообразии (*) всегда конечно, если выполняется нек-рое легко проверяемое условие на форму F (его необходимость была известна ранее, см. [2]). Совсем другой метод, основанный на рассмотрении уравнения (*) в области целых p-адических чисел, был предложен в 1935 Т. Сколемом (см. [13]). Этим методом была доказана теорема конечности для уравнения (*) для небольших значений n или m (см. [2]).

Интенсивно исследуется еще один класс алгебраич. многообразий — рациональные и близкие к ним многообразия, являющиеся аналогом кривых рода 0. Получены многочисленные результаты об их классификации и о строении множества рациональных точек (см. [12]). В отличие от рассмотренных выше примеров, здесь все обстоит сложнее, и никаких общих теорем типа теорем Шмидта, Зигеля или Морделла — Вейля не найдено (к 1978).

Отличительной чертой почти всех отмеченных выше результатов является то, что они, раскрывая качественную картину множества рациональных или целых точек, не дают никаких количественных оценок, с помощью к-рых можно явно описать это множество. Получение подобных результатов, или, как говорят, эффективизация качественных теорем, принадлежит к труднейшим задачам Д. г. и вообще теории чисел. Для случая теоремы Туэ такая эффективизация, полученная А. Бейкером (A. Baker) в 1968, состоит в явных оценках высот целых точек в зависимости от коэффициентов уравнения кривой (см. *Диофантовых приближений проблемы эффективизации*). Затем такая оценка была получена для широкого класса гиперэллиптич. кривых и, в частности, всех кривых рода 1 (см. [12]). Это дает для таких кривых алгоритм, позволяющий найти все целые точки, и тем самым выяснить, есть ли такая точка вообще. Как уже было отмечено, для любого диофантова уравнения такого алгоритма не существует.

Другим чрезвычайно интересным подходом к количественному описанию множества целых точек является развитие *кругового метода* Харди — Литлвуда. Распространение этого подхода на абелевы многообразия привело к появлению гипотез Берча и Суиннертон-Дайера (см. [15]), использование к-рых привело к построению алгоритма, дающего эффективизацию теоремы Морделла — Вейля. Есть все основания полагать, что дальнейшее развитие этого метода, а также установление его связи с теорией высоты будет иметь большое значение для решения основных проблем диофантовой геометрии.

Лит.: [1] Башмакова И. Г., Диофант и диофантовы уравнения, М., 1972; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [3] Вейль А., «Математика», 1958, т. 2, № 4, с. 49—58; [4] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [5] Greenberg M., Lectures on forms in many variables, N. Y.—Amst., 1969; [6] Дэвенпорт Г., Высшая арифметика, пер. с англ., М., 1965; [7] Касселс Дж., «Математика», 1968, т. 12, № 1, с. 113—60; № 2, с. 1—48; [8] Koksma J. F., Diophantische Approximationen, B., 1936; [9] Lang S., Diophantine geometry, N. Y.—L., 1962; [10] Ленг С., «Математика», 1961, т. 5, № 6, с. 3—12; [11] Манин Ю. И., Кубические формы, М., 1972; [12] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1971, с. 111—51; [13] Skolem Th., Diophantische Gleichungen, B., 1938; [14] Swinnerton-Dyer H. P. F., в кн.: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, v. 20. 1969. Number theory institute, Providence, 1971, p. 1—52; [15] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969, гл. XII. *А. Н. Паршин.*

ДИОФАНТОВО МНОЖЕСТВО — множество $\mathfrak{M}$, состоящее из упорядоченных наборов из n целых (целых неотрицательных, целых положительных) чисел, для к-рого можно указать *диофантово уравнение*

$$P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_l) = 0, \qquad (*)$$

зависящее от n параметров $a_1, \ldots, a_n$, допустимыми значениями к-рых являются целые (соответственно целые неотрицательные или целые положительные) числа, и разрешимое относительно $x_1, \ldots, x_l$ тогда и только тогда, когда $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathfrak{M}$. Здесь несущественно, понимается ли под разрешимостью существование решения в целых, целых неотрицательных или целых положительных числах, поскольку уравнение (*) разрешимо в целых (целых неотрицательных, целых положительных) числах тогда и только тогда, когда уравнение

$$P(a_1, \ldots, a_n, y_1 - z_1, \ldots, y_l - z_l) = 0$$

разрешимо в целых положительных числах (соответственно тогда и только тогда, когда уравнение

$$P(a_1, \ldots, a_n, z_1 + 1, \ldots, z_l + 1) = 0$$

разрешимо в целых неотрицательных числах, или соответственно тогда и только тогда, когда уравнение

$$P(a_1, \ldots, a_n, p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 + s_1^2, \ldots, p_l^2 + q_l^2 + r_l^2 + s_l^2) = 0$$

разрешимо в целых числах, ибо по теореме Лагранжа каждое целое неотрицательное число представимо в виде суммы четырех квадратов).

Для любого Д. м. можно указать соответствующее уравнение (*), в к-ром степень многочлена P не больше 4 (это достигается ценой увеличения числа неизвестных). Для каждого Д. м. целых неотрицательных чисел, помимо уравнения общего вида (*), можно указать уравнение вида $P(x_1, \ldots, x_l) = a_1$; иными словами, каждое Д. м. целых неотрицательных чисел является множеством всех неотрицательных значений, принимаемых некоторым многочленом с целочисленными коэффициентами при произвольных значениях переменных. В качестве P всегда можно взять многочлен степени не выше 5, если допустимыми значениями переменных являются целые неотрицательные или целые положительные числа, и многочлен степени не выше 6, если переменные принимают произвольные целочисленные значения.

Класс Д. м. замкнут относительно операций перестановки и отождествления аргументов, объединения, пересечения, прямого произведения и проектирования (проекцией множества $\mathfrak{M}$, состоящего из упорядоченных наборов из n чисел, наз. множество $\{\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle : \exists b\, [\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, b\rangle \in \mathfrak{M}]\}$), а также относительно операции, ставящей множеству $\mathfrak{M}$ в соответствие множество

$$\{\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, b\rangle : \forall c\, [c \leqslant b \Longrightarrow \langle a_1, \ldots, a_{n-1}, c\rangle \in \mathfrak{M}]\}.$$

Класс Д. м. совпадает с классом *перечислимых множеств* (см. *Диофантовых уравнений проблема разрешимости*), и все результаты о перечислимых множествах переносятся на Д. м. В частности, из теоремы о существовании универсального перечислимого множества следует, что существует такое число l, что для каждого n существует многочлен $U_n(a_1, \ldots, a_n, m, x_1, \ldots, x_l)$ с целочисленными коэффициентами, универсальный в следующем смысле: для каждого диофантова (перечислимого) множества $\mathfrak{M}$, состоящего из упорядоченных наборов из n чисел, можно указать такое значение параметра m (номер множества $\mathfrak{M}$), что уравнение

$$U_n(a_1, \ldots, a_n, m, x_1, \ldots, x_l) = 0$$

разрешимо относительно $x_1, \ldots, x_l$ тогда и только тогда, когда $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \mathfrak{M}$. Существуют многочлены, универсальные в других смыслах (см., напр., [1]).

Диофантовыми являются многие интересные с теоретико-числовой точки зрения множества, напр. множество всех простых чисел, множество всех совершенных чисел, множество всех тех n, для к-рых разрешимо уравнение Ферма

$$x^n + y^n = z^n.$$

Доказательство теоремы о том, что перечислимые множества диофантовы, является эффективным, т. е. для стандартно заданного перечислимого множества можно явно указать соответствующее диофантово уравнение. Этот универсальный метод, не использующий специфики рассматриваемых множеств, приводит к довольно громоздким многочленам, однако для нек-рых конкретных множеств удается найти их сравнительно простые диофантовы представления, опираясь, кроме перечислимости, на другие свойства этих множеств.

Можно рассматривать и называть диофантовыми множества, представимые как множества всех тех упорядоченных наборов из n элементов нек-рого кольца K, для к-рых в этом кольце разрешимо относительно $x_1, \ldots, x_l$ уравнение вида (*), где P — многочлен либо с целочисленными коэффициентами, либо с коэффициентами из K.

Лит.: [1] Матиясевич Ю. В., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, с. 185—222. *Ю. В. Матиясевич.*

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ — раздел теории чисел, в к-ром изучаются приближения нуля значениями функций от конечного числа целочисленных аргументов. Первоначальные задачи Д. п. касались рациональных приближений к действительным числам, но развитие теории привело к задачам, в к-рых некоторым действительным функциям необходимо придать «малые» значения при целочисленных значениях аргументов. В силу этого Д. п. тесно связаны с решением неравенств в целых числах — диофантовых неравенств, а также с решением уравнений в целых числах (см. *Диофантовы уравнения*).

Если рассматриваемая (аппроксимирующая) функция

$$F = F(x_1, \ldots, x_n)$$

линейна относительно целочисленных аргументов $x_1, \ldots, x_n$, то Д. п. с функцией F наз. линейными, в противном случае — нелинейными. Если F — однородный многочлен от $x_1, \ldots, x_n$, то Д. п. с функцией F наз. однородными, а если F — неоднородный многочлен, то — неоднородными. Иногда рассматривается одновременно несколько функций F, имеющих хотя бы один общий целочисленный аргумент. В этом случае Д. п. наз. **совместными**. Совместные Д. п. могут быть линейными или нелинейными, однородными или неоднородными в указанном выше смысле.

Численные значения F могут считаться близкими к нулю не обязательно при

$$|F(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon$$

с некоторым $\varepsilon > 0$, но и при

$$0 \leqslant F(x_1, \ldots, x_n) < \varepsilon$$

(односторонние приближения). Функции F могут зависеть от параметров, непрерывно меняющихся в некоторой области,— это параметрич. Д. п. Наконец, область определения и область значений аппроксимирующих функций могут быть не только подмножествами евклидова пространства, а существенно иных топологич. пространств (см. ниже Д. п. в поле p-адических чисел и Д. п. в поле степенных рядов).

Наиболее старая («простейшая») задача Д. п. — приближения нуля линейной формой $\alpha x - y$, где $\alpha > 0$ — фиксированное действительное число, x, y — переменные целые (линейные однородные Д. п.), т. е. задача о рациональных приближениях к α. Для специальных α ($\alpha = \sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, π) эта задача рассматривалась еще в древности (Архимед, Диофант, Евклид), а ее тесная связь с теорией цепных дробей была вполне выяснена Л. Эйлером (L. Euler) и Ж. Лагранжем (J. Lagrange). В частности, если $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ таковы, что

$$|\alpha x_1 - y_1| = \min |\alpha x - y|,$$

где минимум берется по всем целым x в к.-л. интервале $0 < x \leqslant X$ и по всем целым y, то дробь y_1/x_1 является подходящей дробью разложения α в цепную дробь. Если неполные частные разложения α в цепную дробь ограничены, то существует $C = C(\alpha) > 0$ с условием $x|\alpha x - y| > C$ для всех целых $x > 0$, $y > 0$. Это верно, напр., для квадратичных иррациональностей α, так как тогда разложение в цепную дробь периодично. С другой стороны, при любом иррациональном α неравенство $x|\alpha x - y| < 1/\sqrt{5}$ имеет бесконечное число целых решений $x > 0$, $y > 0$, а если $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$, то постоянную $1/\sqrt{5}$ нельзя заменить меньшим числом. Исследование А. А. Маркова о минимумах неопределенных бинарных квадратичных форм позволило продолжить последнее утверждение: если α не эквивалентно (в смысле теории цепных дробей) $(\sqrt{5} - 1)/2$, то неравенство $x|\alpha x - y| < 2^{-3/2}$ имеет бесконечное число решений; постоянная $2^{-3/2}$ не может быть улучшена, если α эквивалентно $\sqrt{2}$; если α не эквивалентно ни $(\sqrt{5} - 1)/2$, ни $\sqrt{2}$, то неравенство $x|\alpha x - y| < 5\,(221)^{-1/2}$ имеет бесконечное число решений, и т. д. (см. [1]). Постоянные $5^{-1/2}$, $2^{-3/2}$, $5\,(221)^{-1/2}$, $\ldots$ монотонно убывают и имеют предел $1/3$.

Приближения нуля линейным неоднородным многочленом $\alpha x + y + \beta$ (α, β — действительные числа, x, y — переменные целые) — простейший пример линейных неоднородных диофантовых приближений. П. Л. Чебышев доказал, что при любом иррациональном α и любом β неравенство $x|\alpha x + y + \beta| < 2$ имеет бесконечное число решений в целых $x > 0$, y. Постоянная 2 здесь не является наилучшей: Г. Минковский (H. Minkowski) доказал, что если $\beta \neq a\alpha + b$ (a, b — целые), то 2 можно заменить на $1/4$, что является наилучшей постоянной. Это утверждение есть следствие доказанного самим Г. Минковским простейшего случая гипотезы о произведении неоднородных линейных форм (см. *Минковского гипотеза*).

Более сложные задачи общей теории Д. п. касаются аппроксимирующих функций от большего числа целочисленных аргументов (см. *Дирихле теорема*, *Минковского теорема*, *Кронекера теорема*). Удобно ввести функцию $\|\alpha\| = \min|\alpha - n|$, где минимум берется по всем целым n (расстояние от α до ближайшего целого). Напр., вместо рассмотренных выше линейных многочленов $\alpha x - y$ и $\alpha x + y + \beta$ можно брать $\|\alpha x\|$ и $\|\alpha x + \beta\|$ для целых $x > 0$. Из теоремы Дирихле следует, что для любых действительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ существует бесконечное число решений системы неравенств

$$x^{1/n} \max(\|\alpha_1 x\|, \ldots, \|\alpha_n x\|) < 1$$

в целых $x > 0$. Единицу можно заменить меньшим числом (напр., $n/(n+1)$), но ни для какого $n \geqslant 2$ наилучшая постоянная неизвестна. Она не может быть сколь угодно малым числом, как показывает пример $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, являющийся базисом действительного алгебраич. поля (см. [1]). Если $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ линейно независимы над полем рациональных чисел, то при любых $\beta_1, \ldots, \beta_n$ и любом $\varepsilon > 0$ существует бесконечное число решений системы неравенств

$$\max(\|\alpha_1 x + \beta_1\|, \ldots, \|\alpha_n x + \beta_n\|) < \varepsilon$$

в целых $x > 0$ (теорема Кронекера). Существенная особенность этой теоремы о совместных неоднородных Д. п. состоит в том, что в принципе невозможно (без специальной информации об однородных приближениях к $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$) указать скорость убывания ε при возрастании x: для того чтобы линейные формы $\alpha_1 x + y_1, \ldots, \alpha_n x + y_n$ «хорошо» аппроксимировали любые числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$, необходимо и достаточно, чтобы эти формы не могли «хорошо» аппроксимировать специальный набор чисел $\beta_1 = 0, \ldots, \beta_n = 0$.

Различные на первый взгляд задачи Д. п. иногда оказываются тесно связанными. Напр., принцип переноса Хинчина (см. [1]) связывает разрешимость неравенства

$$\|\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\| < X^{-n-\lambda}, \quad X = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \neq 0 \tag{1}$$

в целых числах $x_1, \ldots, x_n$ с разрешимостью системы

$$\max(\|\alpha_1 x\|, \ldots, \|\alpha_n x\|) < x^{-(1+\mu)/n} \tag{2}$$

в целых $x > 0$, и обратно: если λ_1 и μ_1 соответственно точные верхние грани тех $\lambda > 0$ и $\mu > 0$, для к-рых (1) и (2) имеют бесконечное число решений, то

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant [n^2 + (n-1)\lambda_1]^{-1} \lambda_1 .$$

В частности, равенства $\lambda_1 = 0$ и $\mu_1 = 0$ равносильны (тогда $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ соответствуют «наихудшей» аппроксимации, так как (1) при $\lambda = 0$ и (2) при $\mu = 0$ имеют бесконечное число решений какими бы ни были $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$). Подобные связи существуют между однородной и неоднородной задачами (см. [1], [5]) и не только в случае линейных Д. п. Если, напр., $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таковы, что при любом $\varepsilon > 0$ для всех целых $x > 0$

$$\|\alpha_1 x\| \ldots \|\alpha_n x\| > C_1 x^{-1-\varepsilon}, \tag{3}$$

где $C_1 > 0$ зависит только от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и ε, то каковы бы ни были действительные числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$, при любом $\varepsilon_1 > 0$ система неравенств

$$\max(\|\alpha_1 x + \beta_1\|, \ldots, \|\alpha_n x + \beta_n\|) < X^{-1/n + \varepsilon_1}$$

имеет целое решение x с условием $0 < x \leqslant X$, если $X > X_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varepsilon_1)$. Более того, неравенство (3) обеспечивает «сильную» равномерную распределенность дробных долей $(\{\alpha_1 q\}, \ldots, \{\alpha_n q\})$, где $q = 1, 2, \ldots, Q$; число этих дробей, попадающих в систему интервалов $I_1 \times \ldots \times I_n$, каждый из к-рых лежит внутри единичного интервала, равно $|I_1| \ldots |I_n| Q + O(Q^{\varepsilon_2})$, $|I|$ —

длина интервала I, $\varepsilon_2>0$ — произвольно. Выполнение неравенства (3) для всех целых $x>0$ равносильно выполнению неравенства

$$\|\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n\|>C_2\prod_{i=1}^{n}(1+|x_i|)^{-1-\varepsilon_3} \quad (4)$$

для всех целых $x_1, \ldots, x_n \neq (0)$ при любом $\varepsilon_3>0$, где $C_2>0$ зависит только от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и ε_3.

Доказательство разрешимости или неразрешимости диофантовых неравенств, параметры к-рых определены арифметич. или аналитич. условиями, часто является весьма сложной задачей. Так, задача о приближениях алгебраич. чисел рациональными, систематически изучаемая со времени доказательства неравенства Лиувилля (1844) (см. *Лиувилля число*), до сих пор не получила полного решения (см. *Туэ — Зигеля — Рота теорема*, *Диофантовых приближений проблемы эффективизации*). Доказано [11], что для алгебраич. чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, вместе с 1 линейно независимых над полем рациональных чисел, выполняются неравенства (3), (4) при любых $\varepsilon>0$, $\varepsilon_3>0$. Из этого следует, что система неравенств (1) при любом $\lambda>0$ и система неравенств (2) при любом $\mu>0$ имеют лишь конечное число решений. Существует тесная связь между подобными теоремами о Д. п. к алгебраич. числам и представлением целых чисел неполными разложимыми формами. В частности, задача о границах для решений x, y диофантова уравнения Туэ $f(x, y)=A$ при фиксированной целочисленной неприводимой бинарной форме $f(x, y)$ не менее чем 3-й степени и переменном целом A равносильна изучению рациональных приближений к корню α многочлена $f(x, 1)$. Таким путем А. Туэ (A. Thue) доказал конечность числа решений уравнения $f(x, y)=A$, предварительно получив нетривиальную оценку рациональных приближений к α. Этот подход, обобщенный и развитый К. Зигелем (C. Siegel), привел его к теореме о конечности числа целых точек на алгебраич. кривых рода больше нуля (см. *Диофантова геометрия*). В. Шмидт [11] использовал подобные идеи для полного решения задачи о представлении чисел разложимыми формами, основываясь на своих аппроксимационных теоремах. В нек-рых случаях связи между теорией Д. п. и теорией диофантовых уравнений не столь непосредственны, хотя законы аппроксимации чисел могут играть главную роль в доказательствах существования решений, асимптотики числа решений и т. п. (задачи типа *Варинга проблемы* и метод Харди — Литлвуда — Виноградова).

Д. п. к специальным числам, заданным как значения трансцендентных функций в рациональных или алгебраич. точках, изучаются методами теории *трансцендентных чисел*. Как правило, доказательство иррациональности или трансцендентности к.-л. числа позволяет дать оценку аппроксимации его рациональными или алгебраич. числами. Для трансцендентного α величину $w_n(\alpha, H)=\min|P(\alpha)|$, где минимум берется по всем ненулевым целочисленным многочленам степени не более n и высоты не более H, наз. **мерой трансцендентности числа** α. Оценка снизу величины $w_n(\alpha, H)$, главным образом при фиксированном n и переменном H, составляет содержание многих теорем теории трансцендентных чисел (см. [12]). Напр., К. Малер ([7], [12]) доказал, что

$$w_n(e, H)>H^{-n-\frac{C_3 n^2 \ln(n+1)}{\ln\ln H}},$$

где $C_3>0$ — абсолютная постоянная, $H>H_0(n)$. Другим методом А. Бейкер [3] доказал (4) для различных не равных нулю рациональных степеней e с $\varepsilon_3=C_4(\ln\ln x)^{-1/2}$, где

$$x=\max|x_i|, \quad i=1, 2, \ldots, n; \; C_4>0$$

зависит только от $n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Так как величина $w_n(\alpha, H)$ будет «малой» лишь тогда, когда хотя бы одно алгебраич. число степени не более n и высоты не более H «близко» к α, то существует связь между оценкой величины $w_n(\alpha, H)$ и оценкой аппроксимации α алгебраич. числами степени не более n. Пусть $w_n^*(\alpha, H) = \min|\alpha - x|$, где минимум берется по всем алгебраич. числам $\varkappa$ степени не более n и высоты не более H, и пусть

$$w_n(\alpha) = \overline{\lim_{H \to \infty}} \frac{-\ln w_n(\alpha, H)}{\ln H},$$

$$w_n^*(\alpha) + 1 = \lim_{H \to \infty} \frac{-\ln w_n^*(\alpha, H)}{\ln H}.$$

Э. Вирзинг [13] нашел соотношения между величинами $w_n(\alpha, H)$ и $w^*(\alpha, H)$ (α — действительное)

$$w_n^*(\alpha) \geqslant \max\left(\frac{w_n(\alpha)+1}{2}, \frac{w_n(\alpha)}{w_n(\alpha)-n+1}\right), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

В частности, если $w_n(\alpha) = n$, то $w_n^*(\alpha) = n$, и так как $w_n(\alpha) \geqslant n$ для всех трансцендентных α, то $w_n^*(\alpha) \geqslant (n+1)/2$. Из последнего следует, что для всякого трансцендентного α существует бесконечное число алгебраич. $\varkappa$ степени не более n, удовлетворяющих неравенству

$$|\alpha - \varkappa| < h_\varkappa^{-(n+3)/2+\varepsilon_1},$$

где $h_\varkappa$ — высота $\varkappa$, $\varepsilon_1 > 0$ — произвольно. Э. Вирзинг высказал предположение, что $w_n^*(\alpha) \geqslant n$ для всех трансцендентных α и всех $n = 1, 2, \ldots$. Кроме очевидного случая $n = 1$ эта гипотеза доказана для $n = 2$ (см. [4]). Известно также, что для почти всех (в смысле меры Лебега) действительных α верны равенства

$$w_n(\alpha) = w_n^*(\alpha) = n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(см. [2], *Метрическая теория чисел*, *Диофантовых приближений метрическая теория*).

Изучение диофантовых уравнений методами p-адического анализа стимулировало развитие теории Д. п. в поле *р-адических чисел* Q_p, к-рая строится во многом параллельно теории Д. п. в поле действительных чисел, но с учетом неархимедовой топологии поля Q_p. Напр., пусть $\omega \neq 0$ — p-адическое число. Рассматривая приближения нуля (в p-адической метрике) значениями целочисленной линейной формы $\omega x + y$, приходят к рациональным приближениям ω, к-рые, подобно случаю действительных чисел, тесно связаны с разложением ω в цепную (p-адическую) дробь [10]. Справедливы аналоги теорем Дирихле, Кронекера, Минковского и т. п., метрич. теорем, теорем о приближениях алгебраич. числами и т. д. [2], [6], [8]. Диофантовы неравенства в Q_p можно интерпретировать как сравнения по «высокой» степени p, что дает иногда возможность получать чисто арифметич теоремы аналитич. методом. Глубокое развитие Д. п. в поле Q_p и его конечных расширениях позволяет использовать метод Туэ — Зигеля — Рота для доказательства теорем об арифметич. структуре чисел, представимых бинарными формами, об оценке дробных долей степеней рациональных чисел и т. п. (см. [10]).

Так как разложение функций в непрерывные дроби осуществляется аналогично разложению чисел в цепные дроби, то естественно возникает дальнейшая аналогия: приближение функций рациональными функциями в метрике поля степенных рядов. Этот подход имеет далекое развитие и приводит к теории Д. п. в поле степенных рядов. Пусть K — произвольное алгебраич. поле, $K[x]$ — кольцо многочленов от x над K, $K\langle x^{-1}\rangle$ — поле степенных рядов вида

$$\omega = \alpha_{-m}x^m + \alpha_{-m+1}x^{m-1} + \ldots + \alpha_0 + \alpha_1 x^{-1} + \ldots,$$

$$\alpha_i \in K, \quad i = -m, -m+1, \ldots.$$

В поле $K\langle x^{-1}\rangle$ вводится неархимедово нормирование

$$|\omega| = \begin{cases} l^m, \text{ если } \omega \neq 0, \quad \alpha_{-m} \neq 0, \\ 0, \text{ если } \omega = 0, \end{cases}$$

где $l>1$ — произвольное фиксированное число. Поле $K\langle x^{-1}\rangle$ с нормированием $|\omega|$ становится метрич. пространством. Изучение «диофантовых» приближений осуществляется по обычной схеме, где $K[x]$ играет роль кольца целых чисел: рассматриваются аппроксимирующие функции со значениями в $K\langle x^{-1}\rangle$ от конечного числа переменных со значениями в $K[x]$, а близость к нулю оценивается с помощью введенного нормирования. Есть определенное сходство получаемых таким путем результатов со случаем Д. п. в поле действительных чисел, но если $K\langle x^{-1}\rangle$ заменить полем $K\langle x\rangle$ рядов вида

$$\alpha_{-m}x^{-m}+\alpha_{-m+1}x^{-m+1}+\ldots+\alpha_0+\alpha_1x+\ldots,$$

$$\alpha_i \in K, \quad i=-m, \ -m+1, \ \ldots,$$

то результаты будут аналогичны приближениям в поле p-адических чисел (см. [2], [9]).

Д. п. в поле степенных рядов в несколько более конкретной форме (специализации K, явная оценка точности приближения и т. п.) составляют основу нек-рых аналитич. методов теории трансцендентных чисел.

В развитии теории Д. п. выделяются три подхода: глобальный, метрический и индивидуальный. При глобальном подходе изучаются общие законы аппроксимации, справедливые для всех чисел или для всех за «редким» исключением. Сюда относятся теорема Дирихле об однородных приближениях, теорема Кронекера о неоднородных приближениях, общие теоремы о приближении чисел алгебраическими, классификации чисел по аппроксимационным свойствам и т. п. Соответственно применяемые методы носят «глобальный» характер (непрерывные дроби, применения теоремы Минковского и методы геометрии чисел и т. п.). Метрич. подход требует описания аппроксимационных свойств чисел на основе понятий теории меры (см. *Диофантовых приближений метрическая теория*, *Метрическая теория чисел*). Получаемые результаты касаются не всех, а почти всех (в смысле определенной меры) чисел из рассматриваемых множеств или описываются с помощью нек-рой метрич. характеристики (размерность Хаусдорфа, емкость и т. п.). Применяемые методы тесно связаны с теорией меры, теорией вероятностей и смежными дисциплинами. Индивидуальный подход касается аппроксимационных свойств специальных чисел (алгебраич. числа, e, π, $\ln 2$ и т. п.) или требует построения чисел с определенными аппроксимационными свойствами (числа Лиувилля, T-числа Малера и т. п.). Методы решения таких задач специфичны и часто создаются специально для анализа конкретной задачи.

Лит.: [1] Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961; [2] Спринджук В. Г., Проблема Малера в метрической теории чисел, Минск, 1967; [3] Baker A., «Canad. J. Math.», 1965, v. 17, p. 616—26; [4] Davenport H., Schmidt W., «Acta Arithm.», 1967, v. 13, p. 169—76; [5] Koksma J. F., Diophantische Approximationen, B., 1936; [6] Lutz E., Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques, P., 1955; [7] Mahler K., «Math. Z.», 1930, Bd 31, S. 729—32; [8] его же, «Jahresber. DMV», 1934, Bd 44, S. 250—55; [9] его же, «Ann. Math.», 1941, v. 42, p. 488—522; [10] его же, Lectures on Diophantine approximations [s. l.], pt 1, 1961; [11] Schmidt W., «L'enseignment Math. Revue intern., ser. 2», 1971, v. 17, № 3—4, p. 187—253; [12] Schneider Th., Einführung in die transzendenten Zahlen, B., 1957; [13] Wirsing E., «J. reine und angew. Math.», 1961, Bd 206, № 1—2, S. 67—77.

В. Г. Спринджук.

ДИОФАНТОВЫ ПРОБЛЕМЫ АДДИТИВНОГО ТИПА — *диофантовы уравнения*, для к-рых ставится задача нахождения целочисленных решений и к-рые могут одновременно рассматриваться как *аддитивные* *проблемы*, т. е. как задачи о разбиении целого числа n (произвольного или подчиненного дополнительным условиям) на слагаемые заданного типа. К Д. п. а. т. можно отнести, напр., решение в целых числах следующих уравнений:

$n = x^2 + y^2$ (см. *Гауссово число*),

$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ (см. *Лагранжа теорема* о сумме четырех квадратов),

$n = x^2 + y^2 + z^2$ (см. *Целая точка*),

а также *Варинга проблему* и др. Д. п. а. т. можно трактовать и как задачу нахождения пересечения арифметич. сумм множеств. Напр., множество M целочисленных решений уравнения $x^2+4y^2=z^2$ представляется в виде $M=A\bigcap B$, где

$$A = \left\{x_1 \,\middle|\, x_1 = x^2\right\} + \left\{y_1 \,\middle|\, y_1 = 4y^2\right\}, \quad B = \left\{z_1 \,\middle|\, z_1 = z^2\right\}.$$

Лит.: [1] Виноградов И. М., Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976; [2] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962; [3] Ostmann H. H., Additive Zahlentheorie, Bd 1, B., 1956. *Б. М. Бредихин.*

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ — алгебраич. уравнения или системы алгебраич. уравнений с рациональными коэффициентами, решения к-рых отыскиваются в целых или рациональных числах. Обычно предполагается, что Д. у. имеют число неизвестных, превосходящее число уравнений, в связи с чем они наз. также неопределенными уравнениями. Понятие Д. у. в современной математике часто относят также к алгебраич. уравнениям, решения к-рых отыскиваются среди целых алгебраич. чисел какого-либо алгебраич. расширения поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, среди p-адических чисел и т. п.

Исследование Д. у. относится к области пограничной между теорией чисел и алгебраич. геометрией (см. *Диофантова геометрия*).

Решение уравнений в целых числах является одной из древнейших математич. задач. Уже в начале 2-го тысячелетия до н. э. вавилоняне умели решать системы таких уравнений с двумя неизвестными. Наибольшего расцвета эта область математики достигла в Древней Греции. Основным источником для нас является «Арифметика» Диофанта (вероятно, 3 в. н. э.), содержащая различные типы уравнений и систем. В ней Диофант (по его имени — название «Д. у.») предвосхищает ряд методов исследования уравнений 2-й и 3-й степеней, развившихся только в 19 в. (см. [1]). Создание древнегреческими учеными теории рациональных чисел привело к рассмотрению рациональных решений неопределенных уравнений. Эта точка зрения последовательно проводится в книге Диофанта. Хотя сочинение Диофанта содержит лишь решения конкретных Д. у., однако есть основания считать, что он владел некоторыми общими приемами.

Исследование Д. у. обычно связано с большими трудностями. Более того, можно явно указать многочлен

$$F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

с целыми коэффициентами такой, что не существует алгоритма, позволяющего по любому целому x узнавать, разрешимо ли уравнение

$$F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

относительно $y_1, \ldots, y$ (см. *Диофантовых уравнений проблема разрешимости*). Примеры таких многочленов можно выписать явно. Для них невозможно дать исчерпывающего описания решений (если принимать *Чёрча тезис*).

Простейшее Д. у.

$$ax + by = 1,$$

где a и b — целые взаимно простые числа, имеет бесконечно много решений (если x_0 и y_0 — решение, то числа $x=x_0+bn$, $y=y_0-an$, где n — любое целое, тоже будут решениями). Другим примером Д. у. является

$$x^2+y^2=z^2.$$

Целые положительные решения этого уравнения представляют длины катетов x, y и гипотенузы z прямоугольных треугольников с целочисленными длинами сторон и наз. пифагоровыми числами. Все тройки взаимно простых пифагоровых чисел можно получить по формулам:

$$x=m^2-n^2,\quad y=2mn,\quad z=m^2+n^2,$$

где m и n — целые взаимно простые числа ($m>n>0$).

Диофант в соч. «Арифметика» занимался разысканием рациональных (не обязательно целых) решений специальных видов Д. у. Общая теория решения Д. у. 1-й степени была создана в 17 в. К. Г. Баше (C. G. Bachet); о решении систем Д. у. 1-й степени подробнее см. в статье *Линейное уравнение.* К началу 19 в. трудами П. Ферма (P. Fermat), Дж. Валлиса (J. Wallis), Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Лагранжа (J. Lagrange) и К. Гаусса (C. Gauss) в основном было исследовано Д. у. вида

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$

где a, b, c, d, e, f — целые числа, т. е. общее неоднородное уравнение 2-й степени с двумя неизвестными. С помощью цепных дробей Ж. Лагранж исследовал общее неоднородное Д. у. 2-й степени с двумя неизвестными. К. Гаусс построил общую теорию квадратичных форм, являющуюся основой решения нек-рых типов Д. у.

В исследованиях Д. у. выше 2-й степени с двумя неизвестными серьезные успехи достигнуты лишь в 20 в. А. Туэ (A. Thue) установил, что Д. у.

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n=c,$$

где $n\geqslant3$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, c — целые, а многочлен $a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_n$ неприводим в поле рациональных чисел, не может иметь бесконечного числа целых решений. Однако метод Туэ не дает возможности вычислять ни границы решений, ни число решений. А. Бейкером (A. Baker) получены эффективные теоремы о границах решений нек-рых таких уравнений. Б. Н. Делоне создал другой метод исследования, охватывающий более узкий класс Д. у., но позволяющий определять границы числа решений. В частности, его методом полностью решается Д. у. вида

$$ax^3+y^3=1.$$

Существует много направлений теории Д. у. Так, известной задачей теории Д. у. является проблема Ферма — гипотеза об отсутствии при $n\geqslant3$ нетривиальных решений Д. у.

$$x^n+y^n=z^n. \qquad (1)$$

Исследование целых решений уравнения (1) является естественным обобщением задачи о пифагоровых тройках. Положительное решение проблемы Ферма для $n=4$ получено Л. Эйлером. Благодаря этому результату проблема Ферма сводится к доказательству отсутствия ненулевых целых решений уравнения (1) при нечетном простом n. Полное исследование решений уравнения (1) не завершено (1978). Трудности, возникающие при его решении, связаны с отсутствием единственности разложения на простые множители в кольце целых алгебраич. чисел. Теория дивизоров в кольцах целых алгебраич. чисел дает возможность установить справедливость теоремы Ферма для многих классов простых показателей n.

Арифметика колец целых алгебраич. чисел используется также в ряде других задач Д. у. Так, напр., ее методами подробно исследованы уравнения вида

$$N(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = m, \qquad (2)$$

где $N(\alpha)$ — норма алгебраич. числа α, и отыскиваются целые рациональные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие уравнению (2). К уравнениям этого класса относится, в частности, *Пелля уравнение* $x^2 - dy^2 = 1$. В зависимости от значений $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, входящих в (2), эти уравнения делятся на два типа. К первому типу — так наз. полных форм — относятся те уравнения, у к-рых среди α_i найдется m линейно независимых чисел над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, где $m = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n):\mathbb{Q}]$ — степень поля алгебраич. чисел $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ над $\mathbb{Q}$. К неполным формам относятся формы, у к-рых максимальное число линейно независимых α_i меньше m. Случай полных форм проще и в основном его исследование доведено до конца. Можно, напр., для всякой полной формы описать все ее решения (см. [2], гл. 2).

Второй тип — так наз. неполных форм, сложнее и теория его далека от завершенности (1978). При изучении таких уравнений применяются *диофантовы приближения*. К уравнениям этого типа относится уравнение

$$F(x, y) = C,$$

где $F(x, y)$ — неприводимый однородный многочлен степени $n \geqslant 3$. Это уравнение может быть записано в виде

$$\prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j y) = C, \qquad (3)$$

где α_i — все корни многочлена $F(z, 1) = 0$. Существование бесконечной последовательности целых решений уравнения (3) привело бы к соотношениям вида

$$\left| \frac{x_i}{y_i} - \alpha_j \right| \leqslant \frac{C_1(F)}{y_i^n} \qquad (4)$$

для какого-либо α_j. Без ограничения общности можно считать, что $y_j \to \infty$. Поэтому при достаточно большом i неравенство (4) будет противоречить *Туэ — Зигеля — Рота теореме*, откуда следует, что уравнение $F(x, y) = C$, где F — неприводимая форма степени, большей или равной 3, не может иметь бесконечного числа решений.

Уравнения вида (2) представляют собой достаточно узкий класс среди всех Д. у. Напр., несмотря на простой вид, уравнения

$$x^3 + y^3 + z^3 = N \qquad (5)$$

и

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = N \qquad (6)$$

не входят в этот класс. Исследование решений второго из приведенных уравнений относится к сравнительно хорошо изученному разделу Д. у. — представлению чисел квадратичными формами. Теорема Лагранжа утверждает разрешимость уравнения (6) при всяком натуральном N. Суммой трех квадратов представляется любое натуральное число, отличное от чисел вида $4^a(8k-1)$, где a и k — целые неотрицательные (теорема Гаусса). Известны критерии существования рациональных или целых решений уравнений вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a,$$

где $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма с целыми коэффициентами. Так, теорема Минковского — Хассе утверждает, что уравнение

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = b,$$

где a_{ij} и b рациональны, допускает рациональное решение тогда и только тогда, когда оно разрешимо в действительных числах, а также в p-адических числах для каждого простого числа p.

Представление чисел произвольными формами 3-й степени и формами более высоких степеней изучено меньше из-за возникающих здесь часто принципиальных трудностей. Одним из основных методов исследования представления чисел формами высших степеней является *тригонометрических сумм метод*. Этот метод состоит в явной записи через интеграл Фурье числа решений уравнения, затем с помощью *кругового метода* осуществляется, в сущности, выражение числа решений уравнения через число решений соответствующих сравнений. Метод тригонометрических сумм меньше, чем другие методы, зависит от алгебраической специфики уравнения.

Существует большое число конкретных Д. у., решаемых элементарными методами (см. [5]).

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [3] Dickson L. E., History of the theory of numbers, v. 1, N. Y., 1934; [4] Башмакова И. Г., Диофант и диофантовы уравнения, М., 1972; [5] Серпинский В., О решении уравнений в целых числах, пер. с польск., М., 1961. *С. М. Воронин.*

ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — раздел теории чисел, изучающий метрич. свойства чисел, обладающих определенными свойствами аппроксимации (см. *Диофантовы приближения, Метрическая теория чисел*). Одной из первых теорем Д. п. м. т. является теорема Хинчина (см. [1], [2]), в современной форме утверждающая (см. [3]): пусть $\varphi(q)>0$ — монотонно убывающая функция, определенная для целых $q>0$. Тогда неравенства $\|\alpha q\|<<\varphi(q)$ для почти всех действительных α имеют бесконечное число решений в целых $q>0$, если расходится ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \varphi(q), \tag{1}$$

и имеют лишь конечное число решений, если этот ряд сходится (здесь и в дальнейшем $\|x\|$ есть расстояние от x до ближайшего целого, т. е.

$$\|x\|=\min |x-a|,$$

где min берется по всем целым a; выражение «почти все» относится к мере Лебега в соответствующем пространстве). Эта теорема характеризует точность приближения почти всех действительных чисел рациональными дробями. Напр., для почти всех α существует бесконечное число рациональных приближений a/q, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|<q^{-2}(\ln q)^{-1},$$

в то время как неравенство

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|<q^{-2}(\ln q)^{-1-\varepsilon}$$

при любом $\varepsilon>0$ имеет бесконечное число решений лишь для множества чисел α нулевой меры.

Обобщение этой теоремы на случай совместных приближений (см. [3]): система неравенств

$$\max(\|\alpha_1 q\|, \ldots, \|\alpha_n q\|)<\varphi(q) \tag{2}$$

имеет конечное или бесконечное число решений для почти всех $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\in R^n$ в зависимости от того, сходится или расходится ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \varphi^n(q). \tag{3}$$

Более далекие обобщения относятся к системам неравенств от многих целочисленных переменных (см. [5]).

Характерной особенностью теоремы Хинчина и различных ее обобщений является то, что свойство «сходимости — расходимости» рядов типа (1), (3) разграничивает те случаи, когда соответствующий порядок аппроксимации имеет место для множества чисел нулевой меры или для почти всех чисел. Это своего рода закон «нуля — единицы» Д. п. м. т. Еще одной особенностью указанных обобщений является то, что утверждаемое в них метрич. свойство чисел относится к мере, определенной во всем пространстве, к-рому принадлежат числа, участвующие в аппроксимации, а мера пространства определяется как произведение мер в координатных пространствах. Напр., в случае системы (2) речь идет о приближении n «независимых» чисел и о мере Лебега в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (n раз). В связи с этим рассмотренная часть Д. п. м. т. стала наз. Д. п. м. т. независимых величин. Эта часть Д. п. м. т. разработана достаточно хорошо, хотя остается ряд нерешеных (к 1978) вопросов. Одним из них является вопрос о том, какие условия нужно наложить на последовательность измеримых множеств $A(q)$, $q=1, 2, \ldots$, интервала $[0,1]$, чтобы сходимость или расходимость ряда $\sum_q |A(q)|$ соответствовала конечному или бесконечному числу выполнений условия $\alpha q \in A(q) \bmod 1$ для почти всех α. Аналогичная задача возникает в случае системы чисел $(\alpha_1 q, \alpha_2 q, \ldots, \alpha_n q)$ (см. [4]).

Д. п. м. т. зависимых величин, возникшая позднее, сразу выдвинула ряд глубоких и своеобразных проблем (см. [5]). Первая из них происходила из теории трансцендентных чисел (гипотеза Малера) и касалась совместных рациональных приближений к системе чисел $t, t^2, \ldots, t^n$ для почти всех t при любом фиксированном натуральном n. Один из последних результатов, полученных в этом направлении, состоит в следующем: пусть $\varphi(q)>0$ — монотонно убывающая функция, для к-рой ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} q^{-1}\varphi(q)$$

сходится. Тогда система неравенств

$$\max(\| tq \|, \| t^2 q \|, \ldots, \| t^n q \|) < q^{1/n} \varphi^n(q)$$

для почти всех t имеет лишь конечное число решений в целых $q>0$ (см. [7]).

Эта теорема утверждает определенное свойство аппроксимации рациональными числами почти всех точек кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. Можно рассматривать более общие многообразия в $\mathbb{R}^n$ и получать подобные результаты.

Если почти все (в смысле меры на Γ) точки $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ многообразия Γ таковы, что система (2) с $\varphi(q)=q^{-1/n-\varepsilon}$ имеет конечное число решений в целых $q>0$ при любом $\varepsilon>0$, то Γ наз. экстремальным, т. е. почти все точки допускают лишь наихудшую совместную аппроксимацию рациональными числами. Известна теорема Шмидта: если Γ — кривая в $\mathbb{R}^2$, имеющая почти во всех своих точках отличную от нуля кривизну, то она экстремальна [8].

Тригонометрических сумм метод (см. также *Виноградова метод*) позволяет обнаружить свойство экстремальности у многообразий Γ весьма широкого класса в $\mathbb{R}^n$, но при условии, что топологическая размерность $\dim \Gamma \geqslant n/2$. Если же $\dim \Gamma < n/2$, то экстремальное многообразие не может быть слишком общим, и его структура должна указываться достаточно определенно [9].

Лит.: [1] Хинчин А. Я., «Math. Z.», 1926, Bd 24, S. 706—14; [2] его же, Цепные дроби, 4 изд., М., 1978; [3] Касселс Дж., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961; [4] Cassels J. W. S., «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1950, v. 46, № 2, p. 209—18; [5] Спринджук В. Г., Проблема Малера в метрической теории чисел, Минск, 1967; [6] его же, в кн.: Международный конгресс математиков в Ницце. 1970, М., 1972, с. 301—06; [7] Baker A., «Proc. Roy. Soc.», Ser. A, 1966, v. 292, № 1428, p. 92—104; [8] Schmidt W., «Monatsh. Math.», 1964, Bd 68, № 2, S. 154—66; [9] Спринджук В. Г., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1972, т. 128, в. 2, с. 212—28; [10] его же, в сб.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, с. 178—98. *В. Г. Спринджук.*

ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПРОБЛЕМЫ ЭФФЕКТИВИЗАЦИИ — получение эффективных решений задач диофантовых приближений, для к-рых известно решение, полученное неэффективными методами, т. е. методами, не допускающими принципиальной возможности численного выражения результата. Таковы, например, теоремы А. Туэ (A. Thue), К. Зигеля (C. Siegel), К. Рота (K. Roth), В. Шмидта (W. Schmidt), их обобщения, аналоги и следствия (см. *Туэ — Зигеля — Рота теорема*, *Диофантовы приближения*). Неэффективность этих теорем объясняется логич. структурой метода, основанного на предположении о существовании объектов, не определяемых конструктивно. Так, в случае рациональных приближений к алгебраич. числам граница для знаменателей «хороших» приближений, устанавливаемая в процессе рассуждений, зависит от одного из этих «хороших» приближений, существование к-рого не доказывается.

Эффективное решение задачи часто представляет большие трудности. Лишь недавно удалось получить эффективное усиление неравенства Лиувилля (см. *Лиувилля число*). Метод доказательства существенно отличается от метода Туэ — Зигеля — Рота и связан с привлечением эффективных методов теории трансцендентных чисел (см. *Линейная форма от логарифмов алгебраич. чисел*). Наилучший известный результат (1978) имеет вид

$$|\alpha x - y| > c x^{-n+1+\delta},$$

где α — алгебраич. число степени $n \geqslant 3$, $x > 0$, y — целые рациональные, $c > 0$ и $\delta > 0$ определяются в явном виде через α (см. [3]). Это неравенство далеко от своего неэффективного аналога: вместо показателя $-n+1+\delta$ неэффективные методы дают $-1-\varepsilon$ с любым $\varepsilon > 0$, но с неизвестной функцией c от α и ε. Доказательство эффективного неравенства

$$|\alpha x - y| > C x^{-\varphi(n)}$$

с функцией $\varphi(n)$, растущей, напр., как n^{ε}, представляет большой интерес в связи с нахождением границ решений диофантова уравнения

$$f(x, y) = 0,$$

где многочлен $f(x, y)$ определяет кривую рода $\geqslant 1$ (конечность числа решений доказана в 1929 К. Зигелем, использовавшим неэффективные оценки, см. *Диофантова геометрия*).

Несмотря на то, что эффективные оценки получаются значительно хуже неэффективных, знание их зависимости от параметров задачи позволяет устанавливать новые результаты, недоступные неэффективным методам. Так, эффективные оценки линейных форм от логарифмов алгебраических чисел позволили Туэ найти оценки решений многих диофантовых уравнений, в частности уравнения Туэ и уравнений, задающих кривые рода 1, а также дать еще одно решение проблемы десятого дискриминанта, установить границу для дискриминантов двухклассных мнимых квадратичных полей, оценить снизу наибольший простой делитель значений бинарной формы степени $\geqslant 3$ и величину свободного от квадратов ядра целочисленного многочлена (см. [2]).

Лит.: [1] Спринджук В. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 5, с. 991—1007; 1972, т. 36, № 4, с. 712—741; [2] его же, в сб.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, с. 178—98; [3] Фельдман Н. И., там же, с. 244—68; [4] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 5, с. 973—90; [5] Baker A., «Phil. Trans. Royal Soc. London», Ser. A., 1968, v. 263, p. 173—91, 193—208; [6] его же, в кн.: Actes du Congrés International des Mathématiciens. 1970, t. 1, P., 1971, p. 19—26. *В. Г. Спринджук.*

ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОБЛЕМА РАЗРЕШИМОСТИ — проблема отыскания алгоритма для распознавания по любому *диофантову уравнению*, имеет ли оно решение.

Существенным в постановке проблемы является требование найти универсальный метод, к-рый должен быть пригоден для любого уравнения (все известные способы для распознавания наличия решений у диофантовых уравнений применимы лишь к уравнениям из отдельных более или менее широких классов). Такой метод позволял бы решать и системы диофантовых уравнений, ибо система $P_1=0, \ldots, P_k=0$ эквивалентна уравнению

$$P_1^2+\ldots+P_k^2=0.$$

Задача нахождения такого универсального метода для распознавания наличия решений в целых числах была поставлена Д. Гильбертом (D. Hilbert, см. [1]). В начале 50-х гг. 20 в. появились первые работы, нацеленные на доказательство невозможности алгоритма, требуемого в Д. у. п. р. В это время была высказана гипотеза (гипотеза Дейвиса, см. [2]) о том, что каждое *перечислимое множество* является *диофантовым множеством*. Поскольку известны примеры перечислимых, но алгоритмически неразрешимых множеств, то из справедливости этой гипотезы немедленно следует отрицательное решение Д. у. п. р.

В 1961 было доказано (см. [3]) более слабое утверждение: каждое перечислимое множество является показательно-диофантовым множеством, т. е. для каждого перечислимого множества $\mathfrak{M}$ существуют такие выражения K и L, построенные из натуральных чисел и переменных $a, z_1, \ldots, z_n$ с помощью сложения, умножения и возведения в степень, что $a\in\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда показательно-диофантово уравнение $K=L$ разрешимо относительно $z_1, \ldots, z_n$. После этого для доказательства гипотезы Дейвиса осталось указать способ, позволяющий преобразовать произвольное показательно-диофантово уравнение в нек-рое диофантово уравнение, имеющее или не имеющее решения одновременно с ним. Было доказано [4], что такое преобразование возможно, если существует диофантово уравнение

$$G(u, v, z_1, \ldots, z_k)=0,$$

обладающее следующими двумя свойствами: 1) в любом решении этого уравнения $v\leqslant u^n$; 2) для любого k существует решение, в к-ром $v>u^k$ (про такое уравнение говорят, что оно имеет экспоненциальный рост). Пример диофантова уравнения, имеющего экспоненциальный рост, к-рый впервые был построен в [5], завершил доказательство гипотезы о диофантовости перечислимых множеств (полностью доказательство гипотезы Дейвиса изложено в [6], [7]). Обратное утверждение о перечислимости диофантовых множеств доказывается легко. Таким образом, класс перечислимых множеств совпадает с классом диофантовых множеств.

Из этого результата следует возможность указать конкретный многочлен $W(a, z_1, \ldots, z_n)$ с целыми коэффициентами такой, что не существует алгоритма, позволяющего по значению параметра a узнавать, разрешимо ли уравнение $W(a, z_1, \ldots, z_n)=0$ относительно $z_1, \ldots, z_n$, и, тем более, не существует требуемого в Д. у. п. р. алгоритма для распознавания наличия решений у произвольного диофантова уравнения.

Вопрос о существовании алгоритма, позволяющего распознавать разрешимость диофантовых уравнений в рациональных числах, эквивалентен вопросу о существовании алгоритма, позволяющего распознавать разрешимость однородных диофантовых уравнений в целых числах. Эта важная проблема пока (1978) остается открытой и малоисследованной.

Лит.: [1] Гильберт Д., в кн.: Проблемы Гильберта, М., 1969, с. 11—64; [2] Дэвис М., «Математика», 1964, т. 8, № 5, с. 15—22; [3] Дэвис М., Путнам Х., Робинсон Дж., там же, с. 69—79; [4] Робинсон Дж., там же, с. 3—14; [5] Матиясевич Ю. В., «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 2, с. 279—82; [6] его же, «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, с. 185—222; [7] Манин Ю. И., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, 1973, т. 1, с. 5—37; [8] Davis M., Матиясевич Ю. В., Robinson J., «Proc. Symp. Pure Math.», 1976, v. 28, p. 323—75.
Ю. В. Матиясевич.

ДИРАКА ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ — см. *Дельта-функция.*

ДИРАКА МАТРИЦЫ — четыре эрмитовы матрицы α_k, $k=1, 2, 3$, и β размера 4×4, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_k\alpha_j+\alpha_j\alpha_k=2\delta_{kj}E,$$
$$\alpha_k\beta+\beta\alpha_k=0,\quad \alpha_k\alpha_k=\beta^2=E,$$

где E — единичная матрица размера 4×4. Вместо матриц α_k, β используются также эрмитовы матрицы $\gamma^k=-i\beta\alpha_k$, $k=1, 2, 3$, и антиэрмитова матрица $\gamma^0=i\beta$, удовлетворяющие условиям

$$\gamma^\varkappa\gamma^\lambda+\gamma^\lambda\gamma^\varkappa=-2g_{\varkappa\lambda}E,\quad \varkappa,\ \lambda=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

где $g_{00}=-g_{kk}=1$, $g^{\varkappa\lambda}=0$ при $\varkappa\neq\lambda$, что позволяет записать *Дирака уравнение* в форме, ковариантной относительно группы преобразований Лоренца. Матрицы α_k, β и $\gamma^\varkappa$ определены с точностью до произвольного унитарного преобразования и представление этих матриц может быть выбрано различными способами. Напр.,

$$\gamma^0=-i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};\quad \gamma^k=-i\begin{pmatrix}0 & \sigma_k\\ -\sigma_k & 0\end{pmatrix},$$

где σ_k— двухрядные *Паули матрицы*, а 1 и 0 — двухрядные единичная и нулевая матрицы соответственно. С помощью Д. м. можно факторизовать *Клейна— Гордона уравнение:*

$$(\Box-m^2)E\psi=$$
$$=\left(\sum\nolimits_{\varkappa=0}^3\gamma^\varkappa\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}-mE\right)\left(\sum\nolimits_{\lambda=0}^3\gamma^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+mE\right)\psi=0,$$

где $\Box$ — оператор Д'Аламбера.

Д. м. введены П. Дираком (P. Dirac) в 1928 при выводе уравнения Дирака. *В. Д. Кукин.*

ДИРАКА СПИНОР — четырехкомпонентная комплексная функция в четырехмерном пространстве-времени, удовлетворяющая *Дирака уравнению.* В спинорном анализе Д. с. определяется как биспинор 1-го ранга, реализующий неприводимое линейное представление общей группы Лоренца на $\mathbb{R}^4$ с псевдоевклидовой метрикой

$$(x,\ y)\equiv\sum\nolimits_{\varkappa,\ \lambda=0}^3 g_{\varkappa\lambda}x^\varkappa y^\lambda\equiv x^0y^0-\sum\nolimits_{k=1}^3 x^ky^k,$$
$$x=(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3).$$

Дирака матрицы, входящие в уравнение Дирака, определены с точностью до произвольного унитарного преобразования, поэтому Д. с. определен с точностью до того же унитарного преобразования. Это свойство позволяет выбирать наиболее удобное из физических соображений представление матриц Дирака и, соответственно, Д. с. *В. Д. Кукин.*

ДИРАКА УРАВНЕНИЕ — релятивистское волновое уравнение, играющее фундаментальную роль в релятивистской квантовой механике и квантовой теории поля. Д. у. применяется для описания частиц со спином $^1/_2$ (в единицах $\hbar$), то есть электронов, нейтрино, мюонов, протонов, нейтронов и др., а также позитронов и всех др. античастиц и гипотетических субчастиц — кварков. Д. у. является основой теории частиц полуцелого спина ($^1/_2$, $^3/_2$, $^5/_2$ и т. д.), то есть фермионов, к-рые подчиняются Ферми статистике. Напр., обобщением Д. у. для частиц спина $^3/_2$ является Рарита — Швингера уравнение.

Д. у. есть система четырех линейных однородных дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка с постоянными комплексными коэффициентами, инвариантная относительно общей группы преобразований Лоренца:

$$\gamma^\alpha \frac{\partial x}{\partial x^\alpha} - \mu\psi = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

где $\mu = mc/\hbar$, m — масса покоя, $x^\alpha = x^0, x^1, x^2, x^3 \in R^4$ с псевдоевклидовой метрикой $(x, y) = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dy^\beta$, а

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

— метрический тензор пространства Минковского с сигнатурой $+2$; ψ — *Дирака спинор* (биспинор):

$$\psi = \begin{Vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{Vmatrix},$$

$\gamma^\alpha = \gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ — *Дирака матрицы*.

При преобразованиях переменных из общей группы Лоренца — Пуанкаре $x'^\alpha = L(x^\alpha)$ (см. [2]) биспинор ψ преобразуется по формуле $\psi'(x') = S(L)\psi(x)$, где $S(L)$ — неособенная комплексная матрица размерности 4×4. S-матрицы образуют специальное двузначное представление группы L. Д. у. относительно новых переменных $\psi'(x'^\alpha)$ не изменяет своего вида (релятивистская инвариантность):

$$\gamma^\alpha \frac{\partial \psi'}{\partial x'^\alpha} - \mu\psi' = 0.$$

Случай $\mu = 0$ дает уравнение Вейля, описывающее нейтрино. При этом Д. у. разбивается на два независимых уравнения для спинорных функций (спиноров Ван дер Вардена) $\varphi = (\psi_1, \psi_2)$ и $\chi = (\psi_3, \psi_4)$. Каждое из них будет не инвариантным относительно отражений (теория с несохранением четности).

Любое решение Д. у. удовлетворяет *Клейна — Гордона уравнению*, описывающему бесспиновые скалярные частицы

$$\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \mu^2 \psi = 0, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3,$$

но не всякое решение этого уравнения удовлетворяет Д. у., к-рое получается факторизацией уравнения Клейна — Гордона.

Из Д. у. следует факт наличия у электрона собственного механического спинового момента $\hbar/2$. Д. у. полностью описывает движение атомных электронов в поле ядра и в других электромагнитных полях, а также взаимодействие электрона с известными элементарными частицами.

Любое релятивистски инвариантное уравнение можно представить в форме Д. у.:

$$\Gamma^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} - \mu\psi = 0,$$

где Γ^α — обобщение γ^α. Для уравнения Клейна — Гордона функция ψ имеет 5 компонент, а Γ^α — 4 пятирядные матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho + \Gamma_\rho \Gamma_\nu \Gamma_\mu = \eta_{\mu\nu} \Gamma_\rho + \eta_{\rho\nu} \Gamma_\mu, \quad \Gamma_\alpha = \eta_{\alpha\beta} \Gamma^\beta$$

(Дуффина — Кеммера матрицы).

Подобно тому как взаимодействие фермионов с электромагнитным полем учитывается в Д. у. заменой производной $\partial/\partial x^\alpha$ на компенсирующую производную $\partial/\partial x^\alpha - iA_\alpha$ (A_α — 4-потенциал электромагнитного поля), учет взаимодействия фермионов с гравитационным полем в соответствии с общей теорией относительности приводит к обобщению Д. у. на риманово пространство введением соответствующей компенсирующей (ковариантной) производной (см. [3]):

$$\gamma^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - C_\alpha\right)\psi - \mu\psi = 0,$$

где C_α — спинорные коэффициенты связности, определенные сначала с помощью тетрадного формализма, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{\partial \gamma_\beta}{\partial x_\alpha} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\gamma_\rho + \gamma_\beta C_\alpha - C_\alpha \gamma_\beta = 0,$$

$\Gamma^\rho_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля. Общерелятивистское обобщение Д. у. необходимо при исследовании гравитационного коллапса, при описании предсказываемого эффекта рождения частиц в сильных гравитационных полях и др.

В пространстве с кручением в Д. у. возникает нелинейный добавок кубического типа (см. [4]) и оно переходит в нелинейное уравнение

$$\gamma^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - C_\alpha\right)\psi - l^2 (\bar{\psi}\gamma\gamma^\beta\psi)\gamma\gamma_\beta\psi - \mu\psi = 0,$$

где $\gamma = i\gamma_5$, $l^2 = 3\pi G h/c^3$, G — гравитационная постоянная.

Уравнение установлено П. Дираком (P. Dirac, 1928).

Лит.: [1] Дирак П. А. М., Принципы квантовой механики, пер. с англ., М., 1960; [2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 2 изд., М., 1976; [3] Новейшие проблемы гравитации, пер. с англ., М., 1961; [4] Родичев В. И., «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, т. 40. *В. Г. Кречет.*

ДИРЕКТРИСА — прямая, лежащая в плоскости *конического сечения* (эллипса, гиперболы или параболы) и обладающая тем свойством, что отношение расстояния от любой точки кривой до фокуса кривой к расстоянию от той же точки до этой прямой есть величина постоянная, равная *эксцентриситету*. *Е. В. Шикин.*

ДИРИХЛЕ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА — задача отыскания минимума *Дирихле интеграла*

$$D(u) = \int \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dG, \quad u = u(x_1, \ldots, x_n),$$

при заданных граничных условиях $u|_{\partial G} = \varphi$, где функция φ задана на границе ∂G n-мерной области G. Решение этой задачи является и решением первой краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad u\Big|_{\partial G} = \varphi.$$

Д. в. з. — первая задача на минимизацию функционала, к к-рой было сведено решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными.

Д. в. з. естественно рассматривать в классе функций, имеющих первые обобщенные производные, суммируемые с квадратом. В случае ограниченной области это множество функций совпадает с *Соболева пространством* $W_2^1(G)$, и потому обладает свойством полноты в соответствующей метрике. Кроме того, каждая функция этого пространства имеет на ∂G граничные значения в смысле сходимости почти всюду, к-рые в случае достаточной гладкости границы совпадают с граничными значениями в смысле сходимости в среднем или в смысле предела граничных значений непрерывных в замкнутой области функций, аппроксимирующих в метрике пространства $W_2^1(G)$ заданную функцию. Если

G — ограниченная область и если существует хоть одна функция u, для к-рой $|D(u)|<\infty$ и $u|_{\partial G}=\varphi$ (такие функции наз. допустимыми), то решение u_0 Д. в. з. существует и единственно. Это решение u_0 является гармонической в G функцией (см. *Дирихле принцип*). Если граница ∂G области G гладкая, то для того чтобы класс допустимых функций был не пуст, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \in B_2^{1/2}(\partial G)$. Решение u_0 Д. в. з. может быть найдено прямым вариационным методом. Эти результаты обобщаются как на случай квадратичных эллиптич. функционалов, содержащих производные высших порядков, так и на случай неограниченных областей.

Лит.: [1] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., т. 2, 2 изд., М.— Л., 1951; [2] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа к математической физике, Новосиб., 1962; [3] Никольский С. М., «Матем. сб.», 1954, т. 35, № 2, с. 247—66; [4] Кудрявцев Л. Д., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1959, т. 55, с. 1—181.
Л. Д. Кудрявцев.

ДИРИХЛЕ ЗАДАЧА — задача отыскания регулярной в области D гармонич. функции u, к-рая на границе Γ области D совпадает с наперед заданной непрерывной функцией φ. Задачу отыскания регулярного в области решения эллиптич. уравнения 2-го порядка, принимающего наперед заданные значения на границе области, также наз. Д. з., или первой краевой задачей. Вопросы, связанные с этой задачей, рассматривались еще К. Гауссом (С. Gauss, 1840), а затем П. Дирихле [1].

Для областей D с достаточно гладкой границей Γ решение $u(x)$ Д. з. можно представить интегральной формулой

$$u(x)=\int_{\Gamma} \varphi(x_0) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial n_0} d\sigma, \qquad (1)$$

где $\partial G(x, x_0)/\partial n_0$ — производная по направлению внутренней нормали в точке $x_0 \in \Gamma$ *Грина функции* $G(x, x_0)$, характеризуемой следующими свойствами:

1) $G(x, x_0)=s_n^{-1} r^{2-n}+\gamma(x, x_0)$ при $n \geqslant 3$

или

$$G(x, x_0)=\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}+\gamma(x, x_0) \quad \text{при } n=2,$$

где $r=|x-x_0|$ — расстояние между точками x и x_0, s_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $\gamma(x, x_0)$ — регулярная в D гармонич. функция как относительно координат x, так и относительно координат x_0;

2) $G(x, x_0)=0$, когда $x_0 \in D$, $x \in \Gamma$.

Для шара, полупространства и нек-рых других простейших областей функция Грина строится явно и формула (1) дает эффективное решение Д. з. Получаемые при этом для шара и полупространства формулы носят название *Пуассона формул*.

Д. з. является одной из основных проблем *потенциала теории*. Она служила и служит как бы пробным камнем для разрабатываемых новых методов, к-рые затем, в той или иной мере, становятся достоянием общей теории уравнений с частными производными.

Для исследования Д. з. применяются следующие методы.

Вариационный метод основан на том, что среди всех функций u, заданных в D и принимающих наперед заданные значения на Γ, минимизирует *Дирихле интеграл*

$$D(u)=\int_D \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\omega$$

— гармоническая функция. Для $D(u)$ строится специальная минимизирующая последовательность и доказывается сходимость этой последовательности. Поскольку от искомого решения u Д. з. требуется, чтобы существовал интеграл $D(u)$, то вариационный метод применим лишь для таких функций φ, к-рые являются следами на Γ функций F, заданных в $\overline{D}$, и таких, что $D(F)$ существует и ограничен.

В методе потенциалов решение Д. з. ищется в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью, определенной на Г. При помощи формул скачка относительно этой плотности получается интегральное уравнение Фредгольма, из к-рого следует существование решения Д. з. с учетом того, что единственность этого решения следует из принципа максимума. Предполагается, что $\Gamma \in A^{(1, \lambda)}$.

В альтернирующем методе Шварца рассматриваются две области D_1 и D_2 с непустым пересечением D_0 такие, что для D_1 и D_2 в отдельности известен способ решения Д. з. Затем строится процесс, позволяющий найти решение Д. з. для области $D = D_1 \cup D_2$. Границы Γ_1 и Γ_2 областей D_1 и D_2 предполагаются кусочно гладкими, причем во всех точках пересечения Γ_1 с Γ_2 как Γ_1, так и Γ_2 являются гладкими и пересекаются под ненулевым углом. Строятся последовательности регулярных в областях D_1 и D_2 гармонич. функций, удовлетворяющих специальным граничным условиям. Затем доказывается, что эти последовательности равномерно сходятся и в D_0 их пределы совпадают. Предельная гармонич. функция регулярна в D и является искомым решением Д. з. Метод Шварца можно применять для объединения или пересечения любого конечного числа областей.

Метод выметания в той форме, в к-рой он первоначально был введен А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1890), применяется к таким областям, к-рые допускают исчерпание счетным множеством шаров. Исходным в этом методе является построение ньютонова потенциала, принимающего на границе Г заданные значения φ, а задача затем сводится к замене этого потенциала потенциалом масс, расположенных на Г, без изменения значений φ на Г, т. е. к выметанию масс. При помощи формулы Пуассона такой процесс выметания для шара D легко осуществить в явном виде. Счетное число выметаний из шаров, объединение к-рых исчерпывает область D общего вида, приводит к нек-рому потенциалу масс, расположенных на границе Г, к-рый и дает решение Д. з.

Близким к методу выметания является *Перрона метод* (или метод верхних и нижних функций), применимый к областям D весьма общего вида. В этом методе строятся последовательности верхних (супергармонических) и нижних (субгармонических) функций, общим пределом к-рых является искомое решение Д. з. Для того чтобы это решение принимало заданное значение в точке $Q \in \Gamma$, необходимо и достаточно существование локального барьера ω_Q. Функция ω_Q непрерывна, супергармонична в пересечении $\overline{D} \cap \Sigma$ (Σ — шар с центром в точке Q); $\omega_Q > 0$ всюду в $\overline{D} \cap \Sigma$, кроме точки Q, где она обращается в нуль.

Точки Г, для к-рых существует локальный барьер, наз. регулярными точками. Если Г состоит только из регулярных точек, то полученное решение Д. з. непрерывно в $\overline{D}$ и принимает заданные значения на Г. Однако на Г могут существовать и иррегулярные точки. Напр., в $\mathbb{R}^2$ иррегулярными являются изолированные точки Г, а в $\mathbb{R}^3$ иррегулярной будет вершина достаточно тонкого острия, входящего внутрь D. Наличие иррегулярных точек приводит к тому, что Д. з. не является разрешимой для всех непрерывных на Г функций φ, либо же решение является неустойчивым по отношению к изменению граничных данных (см. [6]).

Обобщенное решение Д. з., введенное Н. Винером (N. Wiener, 1924), удовлетворяет условиям: а) оно применимо для любых областей; б) оно приводит к классич. решению Д. з., если таковое существует. Пусть область D — предел монотонно возрастающей последовательности регулярных областей $\{D_n\}$ такой, что $D_n \subset D_{n+1} \subset D$, и любой компакт $K \subset D$ содержится в D_n при $n > n(K)$. Обобщенное решение Д. з. u получается как предел последовательности $\{u_n\}$ решений Д. з. для областей D_n и непрерывно продолженной граничной функции φ внутрь D. Решение u не зависит ни от выбора исчерпывающей последовательности $\{D_n\}$, ни от способа непрерывного продолжения φ внутрь D.

Имеется трактовка обобщенного решения Д. з. на основе метода Перрона. Пусть $\overline{H}_\varphi$ — нижняя огибающая семейства всех верхних супергармонич. функций v, удовлетворяющих на Γ условию

$$\liminf v(x) \geqslant \varphi(x_0), \quad x \in D, \ x \longrightarrow x_0; \quad \underline{H}_\varphi = \overline{H}_{-\varphi}.$$

Для любых области D и функции φ имеет место неравенство $\underline{H}_\varphi \leqslant \overline{H}_\varphi$. В случае равенства $\underline{H}_\varphi = \overline{H} = u$ эта функция u является гармонической. Она наз. обобщенным решением Д. з., а граничная функция φ — разрешимой. Любая непрерывная функция φ разрешима, поведение же обобщенного решения u в точке $x_0 \in \Gamma$ определяется регулярностью или иррегулярностью x_0.

Для обобщенного по Винеру решения Д. з. справедливо интегральное представление в виде формулы Валле Пуссена

$$u(x) = \int_\Gamma \varphi(x_0)\, d\omega\left(x, D \,\middle|\, x_0\right), \tag{2}$$

являющейся обобщением формулы (1). Здесь $d\omega(x, E)$ — гармонич. мера множества $E \subset \Gamma$ в точке x_0 (см. [5]).

Отсюда возникает возможность рассмотрения обобщенной Д. з. для произвольных граничных функций φ, при этом можно требовать удовлетворения граничного условия лишь в нек-рой ослабленной форме. Напр., если D — область $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей Γ, а граничная функция φ имеет только точки разрыва 1-го рода, то можно требовать удовлетворения граничного условия лишь в точках непрерывности φ, для обеспечения единственности решения в точках разрыва требуется ограниченность решения. В постановке Н. Н. Лузина обобщенная Д. з. ставится для произвольной измеримой и конечной почти всюду на Γ граничной функции φ. Граничное условие может состоять в том, чтобы граничные значения решения по нормали к Γ существовали и совпадали с φ почти всюду на Γ.

Для общего эллиптич. уравнения 2-го порядка

$$\sum_{i,\,j=0}^{n} a_{ij}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=0}^{n} b_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(X)u = f(X) \tag{3}$$

Д. з. фредгольмова. При этом ищется регулярное в области решение, принимающее на границе наперед заданные значения. Приведенные выше методы исследования Д. з. для гармонич. функций обобщаются и на уравнение (3).

Для равномерно эллиптич. систем Д. з. может оказаться не только нефредгольмовой, но даже иметь бесконечно много линейно независимых решений (см. [8]).

Д. з. рассматривается и для нек-рых неэллиптич. уравнений или вырождающихся уравнений. В этих случаях Д. з. иногда оказывается некорректной.

Лит.: [1] Dirichlet P. G. L., «Abh. der Königlich. Preus. Acad. der Wiss.», 1850, S. 99—116; [2] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [3] Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, пер. с англ., М., 1953; [4] его же, Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [6] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1941, в. 8, с. 171—292; [7] его же, «Докл. АН СССР», 1951, т. 77, с. 181—83; [8] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966.

А. Янушаускас.

ДИРИХЛЕ ИНТЕГРАЛ — функционал, связанный с решением *Дирихле задачи* для уравнения Лапласа вариационным методом. Пусть Ω — ограниченная область в R_n с границей Γ класса C^1, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, а функция $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ (см. *Соболева пространство*). Д. и. для функции $u(x)$ наз. выражение

$$D[u]=\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx.$$

Для некоторой заданной на Γ функции $\varphi(x)$ рассматривается множество π_φ функций из $W_2^1(\Omega)$, к-рые удовлетворяют граничному условию $u|_{x \in \Gamma}=\varphi$. Если множество π_φ не пусто, то существует единственная функция $u_0(x) \in \pi_\varphi$, для которой

$$D[u_0]=\inf_{u \in \pi_\varphi} D[u],$$

и эта функция является гармонической в области Ω. Верно и обратное утверждение: если гармонич. функция $u_0(x)$ принадлежит множеству π_φ, то на ней достигается $\inf D[u]$. Таким образом, $u_0(x)$ является обобщенным из $W_2^1(\Omega)$ решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Однако не для всякой функции φ можно найти такую функцию $u_0(x)$. Существуют даже непрерывные на Γ функции, для к-рых множество π_φ пусто, т. е. в пространстве $W_2^1(\Omega)$ не существует ни одной функции $u(x)$, удовлетворяющей условию $u|_{x \in \Gamma}=\varphi$. Классич. решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с такой граничной функцией φ не может иметь конечного Д. и. и не является обобщенным решением из пространства $W_2^1(\Omega)$.

Лит.: [1] Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, М., 1976. *А. К. Гущин.*

ДИРИХЛЕ ПРИЗНАК сходимости числовых рядов: если последовательность действительных чисел d_n монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^\infty b_n$ ограничена (члены этого ряда могут быть комплексными), то ряд $\sum_{n=1}^\infty d_n b_n$ сходится. Установлен П. Дирихле [1].

Лит.: [1] Dirichlet P., «J. de math.», (2) 1862, t. 7, p. 253—55. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДИРИХЛЕ ПРИНЦИП — метод решения краевых задач для эллиптич. уравнений с частными производными сведением их к вариационным задачам отыскания минимумов нек-рых функционалов в определенных классах функций. В узком смысле Д. п. означает решение 1-й краевой задачи

$$u\Big|_{\partial G}=\varphi \tag{1}$$

в области G с границей ∂G для уравнения Лапласа

$$\Delta u=0 \tag{2}$$

сведением ее к отысканию минимума *Дирихле интеграла*

$$D(u)=\int \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dG, \quad u=u(x_1, \ldots, x_n)$$

в классе функций, удовлетворяющих условию

$$D(u)<+\infty \tag{3}$$

и условию (1) (см. *Дирихле вариационная задача*).

Д. п. возник и получил широкое распространение в нач. 19 в. Он применялся как с чисто теоретическими целями для доказательства существования и единственности решений краевых задач, так и при решении практически важных задач. Наиболее четкая и полная формулировка Д. п. для класса функций непрерывных вместе со своими частными производными, по-видимому, была дана в лекциях П. Дирихле (P. Dirichlet), опубликованных в 1876 одним из его учеников. Доказательства, данные Дирихле, были неполны, в частности, у него даже не ставился вопрос о необходимости доказательства существования минимума рассматриваемого функционала в классе допустимых функций, т. е. функций, удовлетворяющих условиям (1) и (3). В конце 60-х гг. 19 в. Д. п. был подвергнут критике К. Вейерштрассом (K. Weierstrass), показавшим на примере, что дифференциальная краевая задача (1), (2) при некрой граничной непрерывной функции φ может иметь решение, а соответствующая вариационная задача — нет, за счет того, что в этом случае интеграл Дирихле для решения задачи (1), (2) обращается в бесконечность. Обосновать Д. п. в предположении, что существует хоть одна допустимая функция, удалось лишь Д. Гильберту (D. Hilbert) на рубеже 19 и 20 вв. Дальнейшее существенное развитие Д. п. содержится в работах С. Л. Соболева, показавшего, что всякая функция, определенная на n-мерной области и имеющая в ней обобщенные частные производные достаточно высокого порядка, принадлежащие пространству L_p, $p \geqslant 1$, принимает на всяком достаточно гладком m-мерном многообразии, $0 \leqslant m < n$, естественные устойчивые граничные значения. Это позволило С. Л. Соболеву сформулировать и обосновать Д. п. для полигармонич. уравнения, причем и в случае, когда граница области состояла из многообразий различной размерности.

Возникновение Д. п. явилось существенным этапом в развитии теории краевых задач уравнений с частными производными, так как оно означало создание принципиально новой точки зрения на эту теорию. Д. п. и его всевозможные модификации, основанные, в конце концов, на сведении рассматриваемой задачи к той или иной вариационной задаче, получили широкое распространение как в различных разделах самой математики, так и в ее приложениях. Это связано с тем, что этот метод позволяет как доказывать общие теоремы о решениях уравнений, так и получать их конкретные решения в виде пределов так наз. минимизирующих последовательностей (т. е. последовательностей допустимых функций, значения минимизирующего функционала на к-рых стремятся к его минимуму), при этом численные методы, основанные на построении минимизирующих последовательностей, удобны для отыскания приближенных решений на ЭВМ. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДИРИХЛЕ ПРИНЦИП «я щ и к о в» — утверждение, согласно к-рому в любой совокупности из n множеств, содержащих в общей сложности более n элементов, есть хотя бы одно множество, содержащее не менее двух элементов. Наиболее популярная форма Д. п.: если в n «ящиках» лежит $n+1$ «предмет», то хотя бы в одном из «ящиков» лежит не меньше двух «предметов». Д. п. часто применяется в теории диофантовых приближений и в теории трансцендентных чисел для доказательства разрешимости в целых числах систем линейных неравенств (см. *Дирихле теорема* в теории диофантовых приближений). *В. Г. Спринджук.*

ДИРИХЛЕ РАЗРЫВНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ — интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x \, dx = \begin{cases} \pi/2 \text{ при } \beta < \alpha, \\ \pi/4 \text{ при } \beta = \alpha, \\ 0 \text{ при } \beta > \alpha, \end{cases}$$

являющийся разрывной функцией от параметров $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. П. Дирихле использовал его в своих исследованиях о притяжении эллипсоидов (см. [1]). Д. р. м. встречался ранее у Ж. Фурье (J. Fourier), С. Пуассона (S. Poisson) и А. Лежандра (A. Legendre).

Лит.: [1] Dirichlet P., Werke, Bd 1, B., 1889; [2] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, 7 изд., М., 1969, т. 3, 5 изд., М., 1970. *Т. П. Лукашенко.*

ДИРИХЛЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей в симплексе

$S_k = \{(x_1, \ldots, x_k): x_1 \geqslant 0, \ldots, x_k \geqslant 0, x_1 + \ldots + x_k = 1\}$, $k=2, 3, \ldots$, определяемое плотностью вероятности

$$p(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} C_k \prod_{i=1}^{k} x_i^{\nu_i - 1}, & \text{если } (x_1, \ldots, x_k) \in S_k, \\ 0, & \text{если } (x_1, \ldots, x_k) \notin S_k, \end{cases}$$

причем $\nu_1 > 0, \ldots, \nu_k > 0$ и

$$C_k = \Gamma(\nu_1 + \ldots + \nu_k) \prod_{i=1}^{k} [1/\Gamma(\nu_i)],$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Частный случай Д. р.— *бета-распределение* — возникает при $k=2$. Д. р. играет важную роль в теории порядковых статистик. Напр., если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся равномерному распределению на отрезке [0, 1], и $X^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant X^{(n)}$ — соответствующий *вариационный ряд*, то совместное распределение k разностей вида

$$X^{(m_1)}, X^{(m_2)} - X^{(m_1)}, \ldots, X^{(m_{k-1})} - X^{(m_{k-2})}, 1 - X^{(m_k)}$$

(предполагается, что $1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_{k-1}$) подчиняется Д. р., причем $\nu_1 = m_1$, $\nu_2 = m_2 - m_1$, $\ldots$, $\nu_{k-1} = m_{k-1} - m_{k-2}$, $\nu_k = n - m_{k-1}$.

Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967, с. 192—96. *Л. Н. Большев.*

ДИРИХЛЕ РЯД — функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{1}$$

где a_n — комплексные коэффициенты; λ_n, $0 < |\lambda_n| \uparrow \infty$, — показатели Д. р., $s = \sigma + it$ — комплексное переменное. При $\lambda_n = \ln n$ получается так наз. обыкновенный ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

представляет для $\sigma > 1$ *дзета-функцию* Римана. Ряды

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

где $\chi(n)$ — функция, наз. *Дирихле характером*, изучались П. Дирихле (см. *Дирихле L-функция*). Ряды (1) с произвольными показателями λ_n наз. общими рядами Дирихле.

Общие ряды Дирихле с положительными показателями. Пусть сначала λ_n — положительные числа. Имеет место аналог *Абеля теоремы* для степенных рядов: если ряд (1) сходится в точке $s_0 = \sigma_0 + it_0$, то он сходится в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$, причем внутри любого угла $|\arg(s - s_0)| < \varphi_0 < \pi/2$ сходится равномерно. Открытая область сходимости ряда есть нек-рая полуплоскость $\sigma > c$. Число c наз. абсциссой сходимости Д. р., прямая $\sigma = c$ — прямой сходимости Д. р., полуплоскость $\sigma > c$ — полуплоскостью сходимости Д. р. Наряду с полуплоскостью сходимости рассматривается полуплоскость абсолютной сходимости Д. р.: $\sigma > a$ — открытая область, в к-рой ряд сходится абсолютно (при этом a — абсцисса абсолютной сходимости). Абсциссы сходимости и абсолютной сходимости, вообще говоря, различны; всегда

$$0 \leqslant a - c \leqslant d, \quad \text{где } d = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n},$$

причем имеются Д. р., для к-рых $a-c=d$. В случае $d=0$ для вычисления абсциссы сходимости (абсциссы абсолютной сходимости) имеется формула

$$a=c=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n},$$

представляющая собой аналог формулы Коши — Адамара. Случай $d>0$ сложнее: если величина

$$\beta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n}\ln\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|$$

положительна, то $c=\beta$; если $\beta\leqslant 0$ и ряд (1) в точке $s=0$ расходится, то $c=0$; если $\beta<0$ и ряд (1) в точке $s=0$ сходится, то

$$c=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n}\ln\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right|.$$

Сумма ряда $F(s)$ в полуплоскости сходимости есть аналитич. функция. При $\sigma\to+\infty$ функция $F(\sigma)$ ведет себя асимптотически как первый член ряда: $a_1e^{-\lambda_1\sigma}$ (если $a_1\neq 0$). Если сумма ряда равна нулю, то и все коэффициенты ряда равны нулю. Максимальная полуплоскость $\sigma>h$, в к-рой $F(s)$ является аналитич. функцией, наз. полуплоскостью голоморфности функции $F(s)$, прямая $\sigma=h$ наз. прямой голоморфности. Справедливо неравенство $h\leqslant c$, причем возможны случаи, когда $h<c$. Пусть q — нижняя грань таких чисел β, что в полуплоскости $\sigma>\beta$ функция $F(s)$ по модулю ограничена ($q\leqslant a$). Имеет место формула

$$a_n=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{p-iT}^{p+iT}F(s)\,e^{\lambda_n s}\,ds,\ n=1,2,\ldots;\ p>q,$$

из к-рой вытекают неравенства

$$|a_n|\leqslant\frac{M(\sigma)}{e^{-\lambda_n\sigma}},\ M(\sigma)=\sup_{-\infty<t<\infty}|F(\sigma+it)|,$$

представляющие собой аналог неравенств Коши для коэффициентов степенного ряда.

Сумма Д. р. не может быть произвольной функцией, аналитической в какой-либо полуплоскости $\sigma>h$: она, напр., должна стремиться к нулю при $\sigma\to+\infty$. Однако имеет место следующий факт: какова бы ни была функция $\varphi(s)$, аналитическая в полуплоскости $\sigma>h$, найдется такой Д. р. (1), что его сумма $F(s)$ будет отличаться от $\varphi(s)$ на целую функцию.

Если последовательность показателей имеет плотность

$$\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}<\infty,$$

то разность между абсциссой сходимости (абсциссы сходимости и абсолютной сходимости совпадают) и абсциссой голоморфности не превосходит величины

$$\delta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n}\ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_n)}\right|,\ L(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),$$

причем имеются ряды, для к-рых эта разность равна δ. Величина δ может быть любой из $[0,\infty]$; в частности, если $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant q>0$, $n=1,2,\ldots$, то $\delta=0$. Прямая голоморфности обладает тем свойством, что на ней в любом отрезке длины $2\pi\tau$ у суммы ряда имеется хотя бы одна особенность.

Если Д. р. (1) сходится во всей плоскости, то его сумма $F(s)$ есть целая функция. Пусть

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n}<\infty;$$

R-порядком целой функции $F(s)$ (порядком по Ритту) наз. величина

$$\rho = \overline{\lim_{\sigma \to -\infty}} \frac{\ln \ln M(\sigma)}{-\sigma}.$$

Через коэффициенты ряда она выражается по формуле

$$-\frac{1}{\rho} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n \ln \lambda_n}.$$

Можно также ввести понятие R-типа функции $F(s)$. Если

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{n}{\lambda_n} = \tau < \infty$$

и если в горизонтальной полосе ширины, большей $2\pi\tau$, функция $F(s)$ по модулю ограничена, то $F(s) \equiv 0$ (аналог *Лиувилля теоремы*).

Ряды Дирихле с комплексными показателями. У Д. р.

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (2)$$

с комплексными показателями $0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$, открытая область абсолютной сходимости выпукла. Если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0,$$

то открытые области сходимости и абсолютной сходимости совпадают. Сумма $F(s)$ ряда (2) в области сходимости есть аналитич. функция. Область регулярности функции $F(s)$, вообще говоря, шире области сходимости Д. р. (2). При условии

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$$

область регулярности выпукла.

Пусть

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} = \tau < \infty,$$

$L(\lambda)$ — какая-нибудь целая функция экспоненциального типа, к-рая в точках λ_n, $n \geqslant 1$, имеет простые нули, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$ (см. *Бореля преобразование*), $\overline{D}$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$, и

$$\psi_n(t) = \frac{1}{L'(\lambda_n)} \int_0^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t} \, d\lambda, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда функции $\psi_n(t)$ регулярны вне $\overline{D}$, $\psi_n(\infty) = 0$, и они обладают свойством биортогональности к системе $\{e^{\lambda_n s}\}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda_m t} \psi_n(t) \, dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

где C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$. В том случае, когда $\psi_n(t)$ непрерывны вплоть до границы области $\overline{D}$, в качестве C можно взять границу $\partial \overline{D}$. Произвольной функции $F(s)$, аналитической в D (открытой части области $\overline{D}$) и непрерывной в $\overline{D}$, отнесем ряд

$$F(s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \qquad (3)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}} F(t) \, \psi_n(t) \, dt, \ n \geqslant 1.$$

Для данной конечной выпуклой области $\overline{D}$ можно построить такую целую функцию $L(\lambda)$ с простыми нулями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, что для любой функции $F(s)$, аналитической в D и непрерывной в $\bar{D}$, ряд (3) равномерно сходится внутри D и сходится к $F(s)$. Для функции $\varphi(s)$, аналитической в D (не обязательно непрерывной в $\bar{D}$), можно найти целую функцию нулевого экспоненциального типа

$$M(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$$

и функцию $F(s)$, аналитическую в D и непрерывную в $\bar{D}$, такие, что

$$\varphi(s)=M(D)F(s)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{(n)}(s).$$

Тогда

$$\varphi(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n M(\lambda_n) e^{\lambda_n s}, \quad s \in D.$$

Представление произвольных аналитич. функций Д. р. в области D установлено также в случаях, когда D — вся плоскость или D — выпуклая бесконечная многоугольная область (ограниченная конечным числом прямолинейных отрезков).

Лит.: [1] Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент, М., 1976; [2] Мандельбройт С., Ряды Дирихле, принципы и методы, пер. с англ., М., 1973. *А. Ф. Леонтьев.*

ДИРИХЛЕ РЯД для аналитической почти периодической функции — ряд вида

$$f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n \tau} e^{i\Lambda_n t}=\sum_n A_n e^{\Lambda_n s}, \quad \alpha<\tau<\beta, \qquad (*)$$

представляющий собой все ряды Фурье аналитической регулярной почти периодической в полосе (α, β), $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, функции $f(s)=f(\tau+it)$ на континуальной совокупности прямых $R(s)=\tau$ (см. *Почти периодическая функция аналитическая*).

Двум различным почти периодическим в одной и той же полосе функциям соответствуют два различных Д. р. В случае 2π-периодич. функции ряд (*) переходит в ряд Лорана. Числа A_n и Λ_n наз., соответственно, коэффициентами и показателями Дирихле. В отличие от классического Д. р. множество действительных показателей Λ_n в (*) может иметь конечные предельные точки, и, даже, быть всюду плотным. Если все показатели Дирихле имеют один и тот же знак, напр., если $f(s)$ — почти периодич. функция в полосе (α, β) и в (*) $\Lambda_n<0$, то $f(s)$ — почти периодич. функция в полосе $(\alpha, +\infty)$, и $\lim\limits_{\tau \to +\infty} f(s)=0$ равномерно по t. Аналогичная теорема имеет место для положительных показателей Дирихле (см. [2]). Если $f(s)$ — почти периодич. функция в полосе $[\alpha, \beta]$ и неопределенный интеграл функции $f(s)$ в полосе $[\alpha, \beta]$ ограничен, то ряды

$$\sum_{\Lambda_n<0} A_n e^{\Lambda_n s}, \quad \sum_{\Lambda_n \geqslant 0} A_n e^{\Lambda_n s}$$

являются рядами Дирихле двух функций $f_1(s)$ и $f_2(s)$, почти периодических в любой полосе $[\alpha_1, +\infty)$, $\alpha_1>\alpha$, соответственно $(-\infty, \beta_1]$, $\beta_1<\beta$.

Лит.: [1] Бор Г., Почти периодические функции, пер. с нем., М.—Л., 1934; [2] Левитан Б. М., Почти периодические функции, М., 1953. *Е. А. Бредихина.*

ДИРИХЛЕ ТЕОРЕМА — 1) Д. т. в теории диофантовых приближений: для любого действительного числа α и натурального Q существуют целые a и q, удовлетворяющие условию

$$|\alpha q-a|<Q^{-1}, \quad 0<q \leqslant Q.$$

Дирихле принцип «ящиков» позволяет доказать и более общую теорему: для любых действительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и натурального $Q>1$ существуют такие целые $q>0$, $a_1, \ldots, a_n$, что

$$\max(|\alpha_1 q-a_1|, \ldots, |\alpha_n q-a_n|)<Q^{-1/n}, \quad 0<q \leqslant Q.$$

Лит.: [1] Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961.

В. И. Берник.

2) Д. т. о единицах — теорема, описывающая структуру мультипликативной группы единиц в порядках полей алгебраич. чисел; получена П. Г. Л. Дирихле (см. [1]).

Каждое поле алгебраич. чисел K степени n над полем рациональных чисел Q имеет n различных изоморфизмов в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если при изоморфизме $\sigma: K \to \mathbb{C}$ образ поля содержится в поле действительных чисел, то этот изоморфизм наз. вещественным; в противном случае он наз. комплексным. Наряду с каждым комплексным изоморфизмом σ имеется сопряженный к нему комплексный изоморфизм $\bar{\sigma}: K \to \mathbb{C}$, определяемый равенством $\bar{\sigma}(\alpha) = \overline{\sigma(\alpha)}$, $\alpha \in K$. Таким образом число n можно представить в виде $n = s + 2t$, где s — число вещественных, а $2t$ — число комплексных изоморфизмов поля K в поле $\mathbb{C}$.

Теорема Дирихле: в произвольном порядке A поля алгебраич. чисел K степени $n = s + 2t$ существует $r = s + t - 1$ единиц $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ таких, что всякая единица $\varepsilon \in A$ однозначно представима в виде произведения

$$\varepsilon = \zeta \varepsilon_1^{s_1} \ldots \varepsilon_r^{s_r},$$

где $s_1, \ldots, s_r$ — целые числа, а ζ — некоторый корень из 1, содержащийся в A. Единицы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$, существование к-рых устанавливается Д. т. наз. основными единицами порядка A. В частности, основные единицы максимального порядка D поля K, совпадающего с кольцом всех целых чисел поля K, наз. обычно основными единицами поля алгебраических чисел K.

Лит.: [1] Dirichlet P. G. L., Werke, Bd 1, B., 1889; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972.

С. А. Степанов.

3) Д. т. о простых числах в арифметической прогрессии: каждая арифметич. прогрессия, первый член и разность которой — натуральные взаимно простые числа, содержит бесконечное число простых чисел. Фактически П. Дирихле доказал (см. [1]), что при любых фиксированных натуральных взаимно простых числах l, k

$$\lim_{s \to 1+0} \sum_p \frac{1}{p^s} : \ln \frac{1}{s-1} = \frac{1}{\varphi(k)},$$

где суммирование ведется по всем простым числам p с условием $p \equiv l \pmod{k}$, а $\varphi(k)$ — функция Эйлера. Это соотношение можно интерпретировать как закон равномерного распределения простых чисел по классам вычетов $l \pmod{k}$, поскольку

$$\lim_{s \to 1+0} \sum_p \frac{1}{p^s} : \ln \frac{1}{s-1} = 1,$$

где суммирование ведется по всем простым числам.

Пусть $x > 1$ — целое, $\pi(x; l, k)$ — число простых $p \leqslant x$ с условием $p \equiv l \pmod{k}$, где $0 < l < k$, l и k — взаимно просты. Тогда

$$\pi(x; l, k) = \frac{\int_2^x \frac{d\varphi}{\ln u}}{\varphi(k)} + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right),$$

где оценка остаточного члена равномерна по всем $k \leqslant (\ln x)^A$ при любом фиксированном $A > 0$, $c = c(A) > 0$ — величина, зависящая только от A (неэффективно). Это современная форма Д. т., непосредственно показывающая характер распределения простых чисел $p \equiv l \pmod{k}$ в натуральном ряде чисел. Существует предположение (расширенная гипотеза Римана), что при фиксированных взаимно простых

l и k и любых целых $x > 1$

$$\pi(x;\ l,\ k) = \frac{\int_2^x \frac{du}{\ln u}}{\varphi(k)} + O(x^{1/2+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно, а O — величина, зависящая от k и ε.

Лит.: [1] Дирихле П. Г. Л., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М.—Л., 1936; [2] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [3] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975.

В. Г. Спринджук.

4) Д. т. о рядах Фурье: если функция $f(x)$ периода 2π кусочно монотонна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет на нем не более, чем конечное число точек разрыва, т. е. выполнены так называемые условия Дирихле, то ее тригонометрич. ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности и к $[f(x+0)+$ $+f(x-0)]/2$ в каждой точке разрыва. Доказана впервые П. Дирихле [1]. На функции ограниченной вариации Д. т. обобщил К. Жордан [3].

Лит.: [1] Dirichlet P. G. L., «J. Math.», 1829, Bd 4, S. 157—69; [2] его же, Werke, Bd 1, B., 1889; [3] Jordan C., «C. r. Acad. sci.», 1881, t. 92, № 5, p. 228—30; [4] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [5] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 2 изд., М., 1965.

Т. П. Лукашенко.

ДИРИХЛЕ ФОРМУЛА числа делителей — асимптотическая формула

$$\sum_{n \leqslant N} \tau(n) = N \ln N + (2C-1) N + O\left(\sqrt{N}\right),$$

где $\tau(n)$ — число делителей n, C — *Эйлера постоянная*. Д. ф. получил П. Дирихле (P. Dirichlet) в 1849, заметив, что указанная сумма равна числу точек (x, y) с целыми положительными координатами в области, ограниченной гиперболой $y = N/x$ и осями координат, т. е. равна

$$2 \sum_{x \leqslant \sqrt{N}} \left[\frac{N}{x}\right] - [\sqrt{N}]^2,$$

где $[\alpha]$ — целая часть α.

Лит.: [1] Титчмарш Е., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953.

А. Ф. Лаврик.

ДИРИХЛЕ ФУНКЦИЯ — функция, равная единице в рациональных точках и нулю в иррациональных точках. Д. ф. задается формулой:

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} (\cos m! \pi x)^{2n};$$

она принадлежит второму *Бэра классу*. Д. ф. не интегрируема по Риману на любом отрезке, но, будучи почти всюду равной нулю, интегрируема по Лебегу.

Лит.: [1] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974.

Л. Д. Кудрявцев.

ДИРИХЛЕ L-ФУНКЦИЯ, Дирихле L-ряд, L-ряд, — функция комплексного переменного $s =$ $= \sigma + it$, определяемая для всех *Дирихле характеров* χ mod d рядом

$$L(s,\ \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}. \tag{1}$$

Д. L-ф. mod d как функции действительного переменного s введены в 1837 П. Дирихле (P. Dirichlet, см. [1]) в связи с доказательством бесконечности простых чисел в арифметич. прогрессии $dm + l$, разность d и первый член l к-рой взаимно простые числа. Они представляют собой естественное обобщение — *дзета-функции* Римана $\zeta(s)$ на арифметич. прогрессии и служат мощным средством исследований в аналитич. теории чисел (см. [2] — [4]).

Ряды (1), наз. *Дирихле рядами*, абсолютно и равномерно сходятся в любой конечной области комплексной s — плоскости, для к-рой $\sigma \geqslant 1 + \gamma$, $\gamma > 0$. Если χ — неглавный характер, то

$$L(s,\ \chi) = s \int_1^{\infty} \sum_{n \leqslant u} \chi(n)\, u^{-s-1}\, du. \tag{2}$$

В силу ограниченности суммы под знаком интеграла эта формула осуществляет аналитическое продолжение $L(s, \chi)$ как регулярной функции в полуплоскость $\sigma > 0$.

Для любого $\chi \bmod d$ справедливо представление $L(s, \chi)$ в виде произведения Эйлера по простым числам p:

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \sigma > 1. \tag{3}$$

Отсюда, если $\chi = \chi_0$ — главный характер $\bmod d$, то при $d = 1$

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s),$$

а для $d > 1$

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p \setminus d} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Поэтому свойства $L(s, \chi_0)$ на всей комплексной плоскости в основном определяются свойствами $\zeta(s)$. В частности, функция $L(s, \chi_0)$ регулярна для всех s, кроме $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом $d^{-1}\varphi(d)$, φ — функция Эйлера. Если же $\chi \neq \chi_0$ и χ^* — примитивный характер, к-рый индуцирует характер $\chi \bmod d$, то

$$L(s, \chi) = L(s, \chi^*) \prod_{p \setminus d} \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s}\right). \tag{4}$$

Тем самым в главном Д. L-ф. с характерами $\chi \neq \chi_0$ сводятся к таковым для примитивных характеров. Это свойство Д. L=ф. играет существенную роль, так как многие результаты, касающиеся $L(s, \chi)$, имеют простой вид лишь для примитивных характеров. В случае примитивного характера $\chi \bmod d$ аналитич. продолжение на всю плоскость и функциональное уравнение функции $L(s, \chi)$ получаются прямым обобщением метода Римана для $\zeta(s)$. Результат, если положить

$$\xi(s, \chi) = \left(\frac{d}{\pi}\right)^{\frac{s+\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s, \chi), \quad \delta = \frac{1-\chi(-1)}{2},$$

имеет вид

$$\xi(1-s, \overline{\chi}) = \varepsilon(\chi)\, \xi(s, \chi), \tag{5}$$

где Γ — гамма-функция, $\varepsilon(\chi) = i^{\delta} d^{1/2}/\tau(\chi)$, $|\varepsilon(\chi)| = 1$, $\tau(\chi)$ — *Гаусса сумма*, $\overline{\chi}$ — характер, комплексно сопряженный с χ. Это равенство наз. **функциональным уравнением функции** $L(s, \chi)$. Из него и формул (2) и (4) следует, что функции $L(s, \chi)$, $\xi(s, \chi)$ являются целыми функциями для всех $\chi \neq \chi_0$. Причем, при $\sigma \leqslant 0$ $L(s, \chi) = 0$ лишь в точках $s = -2\nu - \delta$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, и в точках s, где произведение из (4) обращается в нуль; эти точки наз. **тривиальными нулями** $L(s, \chi)$. Остальные нули $L(s, \chi)$ наз. **нетривиальными нулями**. Для $\sigma > 1$ функция $L(s, \chi) \neq 0$; Ш. Ж. Валле Пуссен (Ch. J. Vallée-Poussin) показал, что $L(1+it, \chi) \neq 0$; так что все нетривиальные нули Д. L-ф. лежат в области $0 < \sigma < 1$, к-рая наз. **критической полосой**.

Распределение нетривиальных нулей, вообще значений $L(s, \chi)$ в критич. полосе, является важнейшей проблемой теории Д. L-ф., имеющей фундаментальное значение для теории чисел.

То, что каждая из функций $L(s, \chi)$ имеет бесконечно много нетривиальных нулей и что законы распределения простых чисел в арифметич. прогрессиях находятся в прямой зависимости от расположения этих нулей, показывают соответствующие аналоги формул Римана. Именно, пусть $N(T, \chi)$ — число нулей функции $L(s, \chi)$ с примитивным $\chi \bmod d$ в прямоугольнике $0 < \sigma < 1$ $|t| < T$, $T \geqslant 2$. Тогда

$$\frac{1}{2} N(T, \chi) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{Td}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln Td).$$

Пусть $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, $1 \leqslant l \leqslant d$, $(l, d)=1$,

$$\psi(x; d, l)=\sum_{n \leqslant x,\, n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, d)} \Lambda(n),$$

$$\psi(x; \chi)=\sum_{n \leqslant x} \chi(n) \Lambda(n).$$

Тогда по свойству ортогональности характеров

$$\psi(x; d, l)=\frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\chi \bmod d} \bar{\chi}(l) \psi(x; \chi), \qquad (6)$$

где суммирование производится по всем характерам $\chi \bmod d$, и для χ-примитивного характера χ, $\alpha=1-\delta$:

$$\psi(x; \chi)=-\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho}+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{\delta-2m}}{2m-\delta}-$$

$$-\lim_{s \to 0}\left\{\frac{L'(\alpha s, \chi)}{L(\alpha s, \chi)}-\frac{\alpha}{s}\right\}-\alpha \ln x,$$

где $\rho=\beta+i\gamma$ пробегает нетривиальные нули $L(s, \chi)$, L' — производная L по s.

Практически более полезны приближенные формулы для $\psi(x; \alpha)$: для произвольного $\chi \neq \chi_0$, $2 \leqslant T \leqslant x$,

$$\psi(x; \chi)=-\sum_{|\gamma|<T} \frac{x^{\rho}}{\rho}+\sum_{|\gamma|<1} \frac{1}{\rho}+O\left(\frac{x}{T} \ln^2 xd\right), \qquad (7)$$

а для $\chi=\chi_0$

$$\psi(x; \chi_0)=\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)+O(\ln x \ln d). \qquad (8)$$

Последняя функция вносит в сумму (6) величину, представляющую главный член.

Существует гипотеза, наз. расширенной гипотезой Римана, о том, что все нетривиальные нули Д. L-ф. лежат на прямой $\sigma=1/2$. Если эта гипотеза справедлива, то для $d \leqslant x$

$$\psi(x; d, l)=\frac{x}{\varphi(d)}+O\left(\sqrt{x} \ln^2 x\right),$$

и многие другие важные проблемы теории чисел получили бы свое окончательное решение. Однако вопросы, касающиеся расположения нетривиальных нулей Д. L-ф. исключительно трудны и в настоящее время (1978) в этом отношении известно сравнительно немного, причем для комплексных характеров получены более сильные результаты, чем для действительных.

Обобщением метода, указанного в 1899 Ш. Ж. Валле Пуссеном для функции $\zeta(s)$, получена граница нетривиальных нулей $L(s, \chi)$: для комплексного характера $\chi \bmod d$ существует абсолютная постоянная C такая, что $L(s, \chi)$ не имеет нулей в области

$$\sigma>1-C/\ln d\,(|t|+2);$$

если же χ — действительный неглавный характер $\mathrm{mod}\, d$, то $L(s, \chi)$ может иметь в этой области самое большое один простой действительный ($t=0$) нуль, к-рый наз. исключительным нулем $L(s, \chi)$. Для исключительного нуля β, из формул числа классов квадратичных полей, выведено неравенство

$$\beta \leqslant 1-C/d^{1/2} \ln^2 d.$$

Последняя известная граница для β указана в 1935 К. Зигелем (C. Siegel): при любом $\varepsilon>0$ существует положительное число $C(\varepsilon)$ такое, что

$$\beta \leqslant 1-C(\varepsilon)\, d^{-\varepsilon}.$$

Эта оценка имеет однако существенный недостаток, она является неэффективной в том смысле, что по заданному ε нельзя оценить численное значение постоянной $C(\varepsilon)$. Таким же недостатком страдают и теоретико-числовые результаты, вывод к-рых опирается на оценку Зигеля.

Вследствие указанных границ для нетривиальных нулей Д. L-ф. и формул (6) — (8) справедлив асимптотич. закон распределения простых чисел в виде:

$$\psi(x; d, l)=\frac{x}{\varphi(d)}+O\left(x \exp\left[-C_1 \sqrt{\ln x}\right]\right),$$

где C_1— абсолютная постоянная для $d \ll (\ln x)^{1-\gamma}$ при нек-ром фиксировании $\gamma > 0$ и $C_1 = C_1(N)$ — «неэффективная» постоянная для $d \leqslant (\ln d)^N$ при любом фиксированном $N > 1-\gamma$.

Эти результаты являются лучшими в проблеме равномерного распределения простых чисел в арифметич. прогрессиях растущей разности d. Для фиксированных значений d известно несколько больше. В таком случае теория Д. L-ф. при $t \neq 0$ во многом аналогична теории дзета-функции Римана (см. [5]) и последняя граница нулей $L(s, \chi)$, полученная по *Виноградова методу* оценки тригонометрич. сумм, имеет вид:

$$L(s, \chi) \neq 0$$

$$\text{для } \sigma > 1 - C/\ln^{2/3}(|t|+2)\ln^{1/3}\ln(|t|+2),$$

где C — положительная постоянная, зависящая от d.

Этой границе нетривиальных нулей Д. L-ф. фиксированного $\bmod d$ отвечает лучший (1977) остаточный член в асимптотич. формуле для $\psi(x; d, l)$ в виде:

$$\ll x \exp\left[-C \ln^{3/5} x \mid \ln^{1/5} \ln x\right].$$

Все формулы относительно асимптотики функции $\psi(x; d, l)$ имеют аналоги для функции $\pi(x; d, l)$ — числа простых чисел $p \leqslant x$, $p \equiv l \pmod d$, с главным членом $\mathrm{li}\, x/\varphi(d)$ вместо $x/\varphi(d)$ и остаточным членом, меньшим на множитель $\ln x$.

К числу основных направлений исследований в современной теории Д. L-ф. относятся также исследования плотности распределения нетривиальных нулей Д. L-ф., содержание к-рых составляют оценки величин:

$$N(\sigma, T, \chi), \ \sum\nolimits_{\chi \bmod d} N(\sigma, T, \chi),$$

$$\sum\nolimits_{d<D} \sum\nolimits_{\chi^* \bmod d} N(\sigma, T, \chi),$$

где $N(\sigma, T, \chi)$ обозначает число нулей $L(s, \chi)$ в прямоугольнике $0 < \alpha \leqslant \sigma < 1$, $|t| < T$, χ^* — примитивный характер $\bmod d$.

Лит.: [1] Дирихле П. Г. Л., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М.—Л., 1936; [2] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [3] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [4] Чудаков Н. Г., Введение в теории L-функций Дирихле, М.—Л., 1947; [5] Walfisz A., Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, В., 1963; [6] Монтгомери Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., 1974; [7] Лаврик А. Ф., «Матем. заметки», 1975, т. 17, в. 5, с. 809—17.

А. Ф. Лаврик.

ДИРИХЛЕ ХАРАКТЕР (mod k) — функция $\chi(n) = \chi(n; k)$ на множестве целых чисел, удовлетворяющая условиям:

$$\chi(n) \not\equiv 0,$$

$$\chi(n)\,\chi(l) = \chi(nl),$$

$$\chi(n) = \chi(n+k).$$

Иными словами, Д. х. (mod k) — это арифметич. функции, к-рые не равны тождественно нулю, вполне мультипликативны и периодичны с периодом k.

Понятие Д. х. ввел П. Дирихле (P. Dirichlet, см. [1]) в связи с изучением закона распределения простых чисел в арифметич. прогрессиях. Он же разработал основы теории Д. х. (см. [2] — [8]), исходя из прямого конструктивного построения их.

Пусть

$$k = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

— каноннч. разложение k, n — целое взаимно простое с k, $(n, k) = 1$; $C = C_0 = 1$, если $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$; $C = 2$, $C_0 = 2^{\alpha-2}$, если $\alpha \geqslant 2$; $C_1 = \varphi(p_1^{\alpha_1})$, ..., $C_r = \varphi(p_r^{\alpha_r})$, где φ — функция Эйлера. Пусть, далее, $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ — система индексов числа n по $\bmod k$, т. е. система наименьших неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих сравнениям

$$n \equiv (-1)^{\gamma}5^{\gamma_0} \pmod{2^{\alpha}},\ n \equiv g_j^{\gamma_j} \pmod{p_j^{\alpha_j}},\ j=1, \ldots, r,$$

где g_j — наименьший первообразный корень по mod $p_j^{\alpha_j}$; $\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ — система каких-либо корней из 1 соответственно порядков $C, C_0, C_1, \ldots, C_r$. Функция

$$\chi(n) = \begin{cases} \varepsilon^{\gamma}\varepsilon_0^{\gamma_0}\varepsilon_1^{\gamma_1}\ldots\varepsilon_r^{\gamma_r}, & \text{если } (n, k)=1, \\ 0, & \text{если } (n, k) \neq 1, \end{cases}$$

определенная на множестве всех натуральных чисел, наз. характером Дирихле (mod k). Перебирая все возможные значения $\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ получают

$$\varphi(2^{\alpha})\,\varphi(p_1^{\alpha_1})\ldots\varphi(p_r^{\alpha_r}) = \varphi(k)$$

различных функций χ — Д. х. mod k. Характер с $\varepsilon=\varepsilon_0=\varepsilon_1=\ldots=\varepsilon_r=1$ наз. главным характером; он обозначается χ_0:

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (n, k)=1, \\ 0, & \text{если } (n, k) \neq 1. \end{cases}$$

Для любых натуральных чисел n, l и k:

$$\chi(n)\,\chi(l) = \chi(nl);$$
$$\chi(n) = \chi(l), \text{ если } n \equiv l \pmod{k};$$
$$\chi(1)=1,$$
$$\chi(n, k) = \chi(n;\ 2^{\alpha})\,\chi(n,\ p_1^{\alpha_1}) \ldots \chi(n;\ p_r^{\alpha_r});$$

если $\chi(n)$ — Д. х. (mod k), то комплексно сопряженная функция $\bar{\chi}(n)$ — также Д. х. (mod k);

$$\chi^{\varphi(k)}(n) = \chi_0(n).$$

Наименьшее из чисел ν, удовлетворяющее равенству $\chi^{\nu}(n)=\chi_0(n)$ наз. степенью Д. х. Для $\nu=1$ существует один такой характер χ_0. Если $\nu=2$, то $\chi(n)$ может принимать лишь значения 0; ± 1; такие Д. х. наз. действительными, или квадратичными. Если $\nu \geqslant 3$, до Д. х. наз. комплексным. $\chi(n)$ наз. четным или нечетным соответственно тому, будет $\chi(-1)=1$ или $\chi(-1)=-1$. Главные свойства сумм Д. х. выражаются формулами

$$\sum_{n \bmod k} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{если } \chi=\chi_0, \\ 0, & \text{если } \chi \neq \chi_0; \end{cases}$$

$$\sum_{\chi \bmod k} \chi(l) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{если } l \equiv 1 \pmod{k}, \\ 0, & \text{если } l \not\equiv 1 \pmod{k}, \end{cases}$$

где в 1-й формуле n пробегает полную систему вычетов (mod k), а χ во 2-й формуле — все $\varphi(k)$ характеров (mod k).

При $(l, k)=1$ справедлива формула

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \chi(n)\,\chi(l) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv l \pmod{k}, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv l \pmod{k}, \end{cases}$$

наз. свойством ортогональности Д. х. Она является одной из основных формул Д. х., применяемых в разного рода исследованиях арифметич. прогрессий: $k\nu+l$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$. В теории и приложениях Д. х. важны также понятия ведущего модуля характера и примитивного характера. Пусть $\chi(n; k)$ — произвольный неглавный характер (mod k). Если для значений n, удовлетворяющих условию $(n, k)=1$, число k является наименьшим периодом $\chi(n; k)$, то k наз. ведущим, или основным, модулем характера χ, а сам характер χ — примитивным, или первообразным, характером (mod k). В противном случае существуют единственные число

$k_1>1$, делящее k, $k_1<k$ и примитивный характер $\chi_1 (\mathrm{mod}\, k_1)$ такие, что

$$\chi(n;k)=\begin{cases}\chi_1(n;k_1), & \text{если } (n,k)=1,\\ 0, & \text{если } (n,k)\neq 1.\end{cases}$$

В этом случае $\chi(n;k)$ наз. непримитивным, или производным, характером $\chi(\mathrm{mod}\, d)$ и говорят, что χ_1 индуцирует χ. Тем самым многие вопросы о характерах сводятся к таковым для примитивных характеров.

Характер $\chi(n;k)$ является примитивным тогда и только тогда, когда для любого d, делящего k, $d<k$, существует a с условиями:

$$a\equiv 1 \pmod d,\quad \chi(a;k)\neq 0;\ 1.$$

В аналитич. теории широко используются суммы Гаусса, определяемые для $\chi(\mathrm{mod}\, k)$ равенством

$$\tau(\chi)=\sum_{m=1}^{k}\chi(m)\, e^{2\pi i m/k}.$$

Для примитивного характера $\chi \bmod k$

$$|\tau(\chi)|=k^{1/2}.$$

При этом справедливо разложение $\chi(n)$ в виде:

$$\chi(n)=\frac{1}{\tau(\bar{\chi})}\sum_{m=1}^{k}\bar{\chi}(m)\, e^{2\pi i n m/k}.$$

Одной из основных проблем в теории Д. х. является проблема оценки сумм Д. х. $\chi(\mathrm{mod}\, k)$, $\chi\neq\chi_0$:

$$S(N;M)=\sum_{M<n\leqslant N}\chi(n).$$

Имеет место оценка Виноградова:

$$S(N;M)\ll \sqrt{k}\ln k.$$

Установлено [7], что

$$S(N;M)\ll k^{(r+1)/4r^2}(N-M)^{1-(1/r)}\ln k,\ r=1,2,\ldots,$$

k — простое число. При $M=1$, $N=k/2$ существует (см. [8]) бесконечная последовательность чисел k, являющихся модулями примитивного действительного характера χ, для к-рой

$$|S(N;M)|\sim\frac{2e^{\gamma}}{\pi}\sqrt{k}\ln\ln k,$$

γ — *Эйлера постоянная*. Это асимптотич. равенство показывает, что предыдущие оценки, вообще говоря, существенно усилить нельзя. Однако существует гипотеза Виноградова, согласно к-рой для любого $\varepsilon>0$, $1\leqslant M<N$,

$$|S(N;M)|\ll k^{\varepsilon}(N-M)^{1/2}.$$

Доказательство этой гипотезы позволило бы решить ряд крупных проблем теории чисел.

Теория Д. х. лежит в основе теории *Дирихле L-функций* и является частным случаем общей теории *характеров* абелевых групп.

Лит.: [1] Дирихле П. Г. Л., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М.—Л., 1936; [2] Виноградов И. М., Избр. тр., М., 1952; [3] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975; [4] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [5] Чудаков Н. Г., Введение в теорию L-функций Дирихле, М., 1947; [6] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [7] Burgess D. A., «Тр. Матем. ин-та», 1973, т. 132, с. 203—205; [8] Лаврик А. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 6, с. 1189—207. *А. Ф. Лаврик.*

ДИРИХЛЕ ЯДРО — выражение

$$D_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

П. Дирихле [1] доказал, что частная сумма $S_n(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ выражается через Д. я.:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t-x)\,dt;$$

интеграл справа наз. сингулярным интегралом Дирихле.

По аналогии с Д. я. (см. [3]) выражение

$$\overline{D}_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

наз. сопряженным ядром Дирихле. Частная сумма ряда, сопряженного к ряду Фурье функции $f(x)$, выражается через сопряженное Д. я.:

$$\overline{S}_n(x)=\sum_{k=1}^{n} b_k\cos kx-a_k\sin kx=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{D}_n(t-x)\,dt.$$

Лит.: [1] Dirichlet P., «J. für Math.», 1829, Bd 4, S. 157—69; [2] его же, Werke, Bd 1, B., 1889; [3] Tauber A., «Monatsh. Math.», 1891, Bd 2, S. 79—118; [4] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [5] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1—2, пер. с англ., М., 1965.

Т. П. Лукашенко.

ДИСК в топологии — поверхность, гомеоморфная кругу, т. е. ориентируемое *двумерное многообразие* рода 0 с одной компонентой края. Локально связный континуум без локально разбивающих точек в точности тогда гомеоморфен Д., когда любая окружность вне нек-рой точки этого континуума разбивает его и имеется окружность, к-рая его не разбивает. *А. В. Чернавский.*

ДИСКРЕПАНС последовательности точек $\omega=(x_1, \ldots, x_N)$ из единичного s-мерного куба $K_s=\{x:0\leqslant x_\nu\leqslant 1, \nu=\overline{1, s}\}$ — норма функционала

$$\varphi(\alpha, \omega)=v-\frac{N(V)}{N}, \qquad (1)$$

вычисленная в той или иной метрике. Здесь v и $N(V)$ соответственно объем области $V=\{x:0\leqslant x_\nu\leqslant\alpha_\nu\leqslant 1, \nu=\overline{1, s}\}$ и число точек последовательности ω, принадлежащих области V. Если рассматривается распределение точек последовательности ω по областям вида $V=\{x:0\leqslant\alpha_\nu\leqslant x_\nu\leqslant\beta_\nu\leqslant 1, \nu=\overline{1, s}\}$, то в (1) принято вместо $\varphi(\alpha, \omega)$ писать $\varphi(\alpha, \beta, \omega)$.

Наиболее употребительны нормы функционала (1):

$$D_N(\omega)=\sup_{\alpha\in K_s,\,\beta\in K_s}|\varphi(\alpha, \beta, \omega)|,$$

$$D_N^*(\omega)=\sup_{\alpha\in K_s}|\varphi(\alpha, \omega)|,$$

$$D_N(\omega, L_p)=\left(\int_0^1\ldots\int_0^1|\varphi(\alpha, \omega)|^p\,d\alpha_1,\ldots,d\alpha_s\right)^{1/p}.$$

Последовательность точек $\omega=(x_1, \ldots, x_N, \ldots)$ из единичного s-мерного куба K_s равномерно распределена тогда и только тогда, когда (см. [1]):

$$\lim_{N\to\infty} D_N(\omega)=0.$$

Для любой бесконечной последовательности одномерных точек $\omega=\{x_n:0\leqslant x_n\leqslant 1, n=\overline{1, \infty}\}$ справедлива теорема (см. [3]):

$$\overline{\lim}\, ND_N(\omega)=\infty.$$

Какова бы ни была последовательность $\omega=\{x_n: 0 < x_n < 1,\ n=\overline{1, \infty}\}$ можно указать последовательность $N_1, \ldots, N_k \ldots$ такую, что при $N=N_k$ (см. [4]):

$$ND_N(\omega) \geqslant C_1 \sqrt{\ln N}.$$

Окончательный результат для бесконечных последовательностей одномерных точек состоит в том, что при $N=N_k$ (см. [5]):

$$ND_N(\omega) \geqslant C_2 \ln N.$$

Исследовался Д. различных конкретных последовательностей (см. [6]—[8]) и получены оценки сверху

$$ND_N(\omega, L_2) \leqslant C_3(s) \ln^{s+1} N,$$

$$ND_N(\omega) \leqslant C_4(s) \ln^s N,$$

соответственно для конечных и бесконечных последовательностей; и оценки снизу (см. [4]): для любой последовательности из N точек имеет место неравенство

$$ND_N(\omega, L_2) \geqslant C_5(s) \ln^{(s+1)/2} N;$$

какова бы ни была бесконечная последовательность $\omega=\{x_n: x_n \in K_s,\ n=\overline{1, \infty}\}$ можно указать последовательность номеров $N_1, \ldots, N_k, \ldots$, таких, что при $N=N_k$:

$$ND_N(\omega, L_2) \geqslant C_6(s) \ln^{s/2} N.$$

При этом

$$D_N(\omega) \geqslant D_N(\omega, L_2).$$

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Ann.», 1916, Bd 77, S. 313—52; [2] Van der Corput J. G., «Proc. Koninkl. ned. akad. wet. A», 1935, dl 38, № 8, p. 813—21; № 10, p. 1058—66; [3] Van Aordenne-Ehrenfert T., «Indagat. math.», 1949, dl 11, p. 264—69; [4] Roth K. F., «Mathematika», 1954, v. 1, p. 73—79; [5] Schmidt W. M., «Acta arithm.», 1972, t. 21, p. 45—50; [6] Halton J. H., «Numer. Math.», 1960, Bd 2, № 2, S. 84—90; [7] Соболь И. М., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 4, с. 784—802; [8] Коробов Н. М., Теорикочисловые методы в приближенном анализе, М., 1963; [9] Kuipers L., Niederreiter H., Uniform distribution of sequences, N. Y., 1974. *В. М. Солодов.*

ДИСКРЕТНАЯ ГРУППА преобразований — группа Γ гомеоморфизмов хаусдорфова топологич. пространства X, удовлетворяющая следующему условию: для любых точек $x, y \in X$ найдутся такие их окрестности U, V соответственно, что множество

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(U) \cap V \neq \varnothing\}$$

конечно. Стабилизатор

$$\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) = x\}$$

точки $x \in X$ относительно Д. г. преобразований конечен, а орбита любой точки $x \in X$ дискретна. В случае, когда X — метрическое пространство и преобразования из Γ являются изометриями, этих двух условий достаточно для того, чтобы группа Γ была Д. г. преобразований.

Примеры. 1) Группа параллельных переносов действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ на всевозможные целочисленные векторы:

$$(x, y) \longrightarrow (x+n,\ y+m), \quad \text{где } (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad n, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

2) Пусть X — верхняя комплексная полуплоскость

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\},$$

рассматриваемая в обычной хаусдорфовой топологии, а Γ — группа дробно-линейных преобразований вида

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, d — целые числа и $ad-bc=1$ (модулярная группа Клейна).

3) Любая конечная группа Γ гомеоморфизмов хаусдорфова топологич. пространства X. Если X отделимо, то Γ будет собственно разрывной группой преобразований (пример неприводимого алгебраич. многообразия с топологией Зариского показывает, что условие отделимости X является существенным).

4) *Скольжений группа* произвольного регулярного накрытия $p: X \to Y$, где X — связное и локально линейно связное, а Y — хаусдорфово топологич. пространство, является Д. г. преобразований действующей свободно (т. е. $\Gamma_x = \{1\}$ для любой $x \in X$), причем само накрытие p совпадает с отображением факторизации по этой группе. Обратно, если Γ — свободно действующая Д. г. преобразований связного топологич. пространства X, то факторпространство X/Γ хаусдорфово и отображение факторизации $p: X \to X/\Gamma$ — регулярное накрытие пространства X/Γ с группой скольжения Γ. В частности, в силу теоремы униформизации Пуанкаре — Кёбе, всякая риманова поверхность, за несколькими тривиальными исключениями, может быть получена факторизацией верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{C}^+$ по свободно действующей Д. г. дробно-линейных преобразований с действительными коэффициентами (так наз. *фуксовой группе*).

5) В теории модулей римановых поверхностей (и, более общо, модулей комплексных многообразий того или иного типа) Д. г. преобразований появляются как *модулярные группы*. Простейшая из этих групп рассмотрена в примере 2.

6) К числу Д. г. преобразований относятся *кристаллографические группы*. Весьма широкий класс Д. г. преобразований, включающий фуксовы и кристаллографич. группы, составляют *дискретные подгруппы* топологич. групп (в частности, групп Ли), рассматриваемые как группы преобразований однородных пространств.

Замкнутое подмножество D топологич. пространства X с Д. г. Γ преобразований наз. фундаментальной областью группы Γ, если оно является замыканием открытого подмножества и если множества $\gamma(D)$, где $\gamma \in \Gamma$, не имеют попарно общих внутренних точек и образуют локально конечное покрытие пространства X. Так, напр., для группы параллельных переносов из примера 1 в качестве фундаментальной области можно взять квадрат

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\} \qquad (*)$$

или, более общо, любой параллелограмм с вершинами в целых точках, не имеющий целых точек внутри и на сторонах, а для модулярной группы Клейна (пример 2)) — так наз. модулярную фигуру

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C}^+ \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2},\ |z| \geqslant 1 \right\}.$$

Фундаментальная область может быть построена во многих случаях. Напр., если X — полное риманово многообразие, Γ — Д. г. преобразований пространства X, состоящая из изометрий этого пространства, и $x_0 \in X$ — какая-либо точка, для к-рой стабилизатор Γ_{x_0} тривиален, то в качестве фундаментальной области может быть взята область Дирихле

$$D = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leqslant d(x, \gamma(x_0)) \text{ для всех нетождественных преобразований } \gamma \in \Gamma\}.$$

(Здесь через $d(x, y)$ обозначено расстояние между точками x и y из X.) Если X — односвязное полное пространство постоянной кривизны, т. е. сфера, евклидово пространство или пространство Лобачевского, то область Дирихле является выпуклым многогранником.

Построение фундаментальной области и исследование ее свойств доставляют важную информацию о Д. г. преобразований. Так, факторпространство X/Γ получается из фундаментальной области путем «склеивания» нек-рых граничных точек. Напр., для группы параллельных переносов (пример 1)) факторпространство получается из квадрата $(*)$ склеиванием противоположных сторон и гомеоморфно двумерному тору. Понятие фундаментальной области лежит в основе комбинаторно-геометрического метода в теории Д. г. преобразований, восходящего к работам А. Пуанкаре по фуксовым [1] и клейновым [2] группам. Этот метод позволяет, с одной стороны, выяснить строение Д. г. преобразований как абстрактной группы (т. е. найти ее образующие и определяющие соотношения) и, с другой стороны, доказать дискретность и найти фундаментальную область группы преобразований с данными образующими. Суть этого метода состоит в следующем. Пусть Γ — Д. г. изометрий n-мерного односвязного полного пространства X постоянной кривизны и Φ — выпуклый многогранник, являющийся ее фундаментальной областью. Тогда группа Γ порождается множеством

$$M=\{\gamma\in\Gamma \mid \dim(\Phi\cap\gamma(\Phi))=n-1\}.$$

При этом в качестве определяющих соотношений могут быть взяты всевозможные соотношения следующих двух типов: $\gamma_1\gamma_2=1$, где $\gamma_1, \gamma_2\in M$ и $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k=1$, где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\in M$,

$$\dim(\Phi\cap\gamma_1(\Phi)\cap\gamma_1\gamma_2(\Phi)\cap\ldots\cap\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}(\Phi))=n-2,$$

$\gamma_i\gamma_{i+1}\neq 1$ при $i=1, 2, \ldots, k-1$ и $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_l\neq 1$ при $l<k$ (см. [7], [3], [6]). Обратно, пусть Φ — выпуклый многогранник в n-мерном односвязном полном пространстве X постоянной кривизны (не исключается вырожденный случай, когда некоторые двугранные углы многогранника Φ равны π), и для каждой $(n-1)$-мерной грани F многогранника Φ задана изометрия γ_F пространства X такая, что $\Phi\cap\gamma_F(\Phi)=F$. И пусть: (1) для каждой $(n-1)$-мерной грани F многогранника Φ существует такая грань F', что $\gamma_F\gamma_{F'}=1$; (2) для каждой $(n-2)$-мерной грани E многогранника Φ существует такая последовательность $F_1, F_2, \ldots, F_k$ его $(n-1)$-мерных граней, что $\gamma_{F_1}\gamma_{F_2}\ldots\gamma_{F_k}=1$,

$$\Phi\cap\gamma_{F_1}(\Phi)\cap\gamma_{F_1}\gamma_{F_2}(\Phi)\cap\ldots\cap\gamma_{F_1}\gamma_{F_2}\ldots\gamma_{F_{k-1}}(\Phi)=E$$

и многогранники Φ, $\gamma_{F_1}(\Phi)$, $\gamma_{F_1}\gamma_{F_2}(\Phi), \ldots, \gamma_{F_1}\gamma_{F_2}\ldots\gamma_{F_{k-1}}(\Phi)$ не имеют попарно общих внутренних точек.

Тогда группа изометрий пространства X, порожденная преобразованиями γ_F, дискретна и многогранник Φ является ее фундаментальной областью. Это вытекает из более общего результата А. Д. Александрова [4] о заполнении пространства выпуклыми многогранниками (см. также [8]). Следующее описание свободно действующих фуксовых групп с компактным факторпространством, принадлежащее А. Пуанкаре (H. Poincaré), служит примером сказанного выше. При этом считается, что верхняя комплексная полуплоскость $\mathbb{C}^+$ наделена стандартным образом геометрией Лобачевского (модель Пуанкаре плоскости Лобачевского). Фундаментальная область любой из фуксовых групп рассматриваемого типа может быть выбрана в виде выпуклого ограниченного $4g$-угольника Φ, обладающего свойствами: а) сумма его внутренних углов равна 2π; б) если при фиксированном направлении обхода границы $\partial\Phi$ многоугольника Φ обозначить его стороны через b_1, b_2, d_1, d_2, b_3, b_4, d_3, d_4, $\ldots$, b_{2g-1}, b_{2g}, d_{2g-1}, d_{2g}, то длина b_i равна длине d_i при всех $i=1, 2, \ldots, 2g$. На рисунке изображена такая область Дирихле для $g=3$.

Если при этом обозначить через γ_i, $i=1, \ldots, 2g$, изометрию плоскости $\mathbb{C}^+$, сохраняющую ориентацию и переводящую с изменением направления b_i в d_i при i четном и d_i в b_i при i нечетном (считается, что стороны Ф имеют направления, индуцированные выбранным направлением обхода $\partial\Phi$), то набор $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2g}\}$ является системой образующих группы Г. Единственное соотношение между этими образующими имеет вид

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\ldots\gamma_{2g-1}\gamma_{2g}\gamma_{2g-1}^{-1}\gamma_{2g}^{-1}=1.$$

Обратно, если Ф — произвольный выпуклый ограниченный многоугольник, удовлетворяющий условиям а) и б), то группа Г, порожденная изометриями $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2g}$, есть свободно действующая фуксова группа, причем Ф — ее фундаментальная область, а комплексное многообразие $\mathbb{C}^+/\Gamma$ является компактной римановой поверхностью рода g.

Когомологич. теория Д. г. преобразований состоит в изучении связи между когомологиями пространства X, пространства X/Γ и группы Г. В частности (пример 4)) если Г — Д. г. преобразований, являющаяся группой скольжений регулярного накрытия $p: X \to X/\Gamma$, где X — ациклическое топологич. пространство (т. е. $H_n(X)=0$ при $n\geqslant 1$ и $H_0(X)=\mathbb{Z}$), то сингулярные когомологии пространства X/Γ и когомологии Г как абстрактной группы с коэффициентами в абелевой группе A (с тривиальной Г-модульной структурой) связаны некоторыми изоморфизмами

$$H^n(X/\Gamma, A) \cong H^n(\Gamma, A), \qquad n=0, 1, \ldots,$$

естественными по A (см. [10]). В общем случае связь между упомянутыми выше группами когомологий выражается при помощи некоторых спектральных последовательностей (см. [9], [10]).

См. также *Автоморфная форма*, *Автоморфная функция*, *Арифметическая группа*.

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избр. тр., т. 3, М., 1974, с. 9—62; [2] Poincaré H., «Acta math.», 1883, t. 3, p. 49—92; [3] Gerstenhaber M., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1953; v. 4, p. 745—50; [4] Александров А. Д., «Вестник ЛГУ», 1954, № 2, с. 34—43; [5] Coxeter H. S. M., Moser W. O. J., Generators and relations for discrete groups, B.—Hdlb.—N. Y., 1972; [6] Вейль А., «Математика», 1963, т. 7, № 1, с. 3—12; [7] Macbeath A. M., «Ann. Math.», 1964, v. 79, p. 473—88; [8] Abels H., Geometrische Erzeugung von diskontinuierlichen Gruppen, Münster, 1966; [9] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [10] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [11] Lehner J., Discontinuous groups and automorphic functions, Providence, 1964; [12] Серр Ж.-П., «Математика», 1971, т. 15, № 5, с. 3—6. *Э. Б. Винберг, В. Л. Попов.*

ДИСКРЕТНАЯ МЕРА — мера, сосредоточенная на не более чем счетном множестве. Точнее, пусть λ и μ — меры (вообще говоря, знакопеременные), определенные на одном полукольце множеств (со своим σ-кольцом измеримых множеств). Мера λ наз. дискретной мерой относительно меры μ, если λ сосредоточена на не более чем счетном μ-меры нуль множестве, всякое одноточечное подмножество к-рого λ-измеримо. Так, напр., дискретная мера Лебега — Стилтьеса линейных множеств λ равна на полуинтервалах приращению нек-рой функции скачков, имеющей ограниченную вариацию, когда λ ограничена, и неубывающей, когда λ положительна.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976. *А. П. Терехин.*

ДИСКРЕТНАЯ ПОДГРУППА — подгруппа Г топологич. группы G (в частности, подгруппа группы Ли), являющаяся дискретным подмножеством топологич. пространства G. В локально компактных топологич. группах (в частности, в группах Ли) выделяют решетки — Д. п., для к-рых факторпространство $\Gamma\diagdown G$ имеет конечный объем в смысле меры, индуцированной левоинвариантной *Хаара мерой* на группе G. К числу решеток относятся равномерные Д. п., для к-рых факторпространство $\Gamma\diagdown G$ компактно.

Если K — компактная подгруппа локально компактной топологич. группы G, то подгруппа $\Gamma\subset G$ дискретна тогда и только тогда, когда она является *дискретной группой* преобразований пространства $X=G/K$ (в смысле действия, индуцированного естественным действием группы G на X). При этом Γ является решеткой (соответственно равномерной Д. п.) тогда и только тогда, когда факторпространство $\Gamma\diagdown X$ имеет конечный объем в смысле меры, индуцированной G-инвариантной мерой на X (соответственно компактно). Это дает возможность использовать при изучении Д. п. групп Ли геометрич. методы.

Одна из основных задач теории Д. п. групп Ли — классификация таких подгрупп с точностью до соизмеримости. Подгруппы Γ_1, Γ_2 группы G наз. соизмеримыми, если $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ имеет конечный индекс как в Γ_1, так и в Γ_2. Если одна из соизмеримых подгрупп локально компактной топологич. группы является Д. п. (соответственно решеткой, равномерной Д. п.), то и другая обладает этим свойством.

До середины 20 в. рассматривались в основном отдельные классы Д. п. групп Ли, обязанные своим происхождением арифметике, теории функций и физике. Исторически первая нетривиальная Д. п.— подгруппа $SL_2(\mathbb{Z})$ группы $SL_2(\mathbb{R})$, названная впоследствии *модулярной группой* Клейна — фактически рассматривалась Ж. Лагранжем (J. Lagrange) и К. Гауссом (C. Gauss) в их исследованиях по арифметике квадратичных форм от двух переменных. Ее естественным обобщением является подгруппа $SL_n(\mathbb{Z})$ группы $SL_n(\mathbb{R})$. Исследование этой группы как дискретной группы преобразований пространства положительно определенных квадратичных форм от n переменных составило предмет теории приведения, разработанной А. Н. Коркиным, Е. И. Золотаревым, Ш. Эрмитом (Ch. Hermite), Г. Минковским (H. Minkowski) и др. во 2-й пол. 19 — начале 20 вв. Ряд арифметически определяемых Д. п. классич. групп Ли: группы единиц квадратичных форм с рациональными коэффициентами, группы единиц простых алгебр над $\mathbb{Q}$, группу целочисленных симплетич. матриц — исследовал в 40-х гг. 20 в. К. Зигель (C. Siegel). Он, в частности, доказал, что все эти группы являются решетками в соответствующих группах Ли.

В теории функций комплексного переменного интегрирование алгебраич. функций и, более общо, решение дифференциальных уравнений с алгебраич. коэффициентами привело к рассмотрению нек-рых специальных функций (названных впоследствии *автоморфными функциями*), инвариантных относительно различных дискретных групп, состоящих из преобразований вида

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}). \tag{1}$$

Некоторые возникающие таким образом Д. п. группы $SL_2(\mathbb{R})$ были рассмотрены примерно в середине 19 в. в работах Ш. Эрмита, Р. Дедекинда (R. Dedekind) и И. Л. Фукса (I. L. Fuchs). Среди них была и группа $SL_2(\mathbb{Z})$ (но представленная другим образом, чем у Ж. Лагранжа и К. Гаусса). Обширный класс таких групп, в том числе группа $SL_2(\mathbb{Z})$ и нек-рые соизмеримые с ней подгруппы группы $SL_2(\mathbb{R})$, был изучен Ф. Клейном (F. Klein). Почти одновременно, в 1881—82 А. Пуанкаре (H. Poincaré) дал геометрич. описание всех дискретных групп, состоящих из преобразований вида (1). Эти группы были им названы *фуксовыми группами*.

В 1-й половине 20 в. рассматривались отдельные классы автоморфных функций многих переменных. Эти функции были связаны с некоторыми арифметически определяемыми Д. п. групп $(SL_2(\mathbb{R}))^k$ (модулярные функции Гильберта), $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ (модулярные функции Зигеля) и других полупростых групп Ли.

В кристаллографии начиная с конца 19 в. рассматривались группы симметрии кристаллич. структур, являющиеся не чем иным, как равномерными Д. п.

группы движений трехмерного евклидова пространства. Эти и подобные им группы движений n-мерного евклидова пространства — так наз. *кристаллографические группы* — были изучены с алгебраич. точки зрения Л. Бибербахом (L. Bieberbach) в 1911. Он доказал, в частности, теорему о том, что всякая кристаллографич. группа содержит равномерную Д. п. группы параллельных переносов.

Все эти исследования послужили исходным материалом для общей теории Д. п. групп Ли, основы к-рой были заложены в 50—60-е гг. 20 в.

Построена исчерпывающая теория Д. п. нильпотентных групп Ли [9]. Ее основные утверждения: 1) Если H — унипотентная алгебраич. группа, определенная над $\mathbb{Q}$, то группа $H_{\mathbb{Z}}$ ее целых точек является равномерной Д. п. в группе $H_{\mathbb{R}}$ ее действительных точек. (При этом $H_{\mathbb{R}}$ — односвязная нильпотентная группа Ли.) 2) Всякая равномерная Д. п. Г односвязной нильпотентной группы Ли G арифметична в том смысле, что существуют унипотентная алгебраич. группа H, определенная над $\mathbb{Q}$, и изоморфизм φ: $H_{\mathbb{R}} \to G$ такие, что подгруппа Г соизмерима с $\varphi(H_{\mathbb{Z}})$. 3) Если Γ_1, Γ_2 — равномерные Д. п. односвязных нильпотентных групп Ли G_1, G_2 соответственно, то всякий изоморфизм $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ однозначно продолжается до изоморфизма $G_1 \to G_2$. 4) Абстрактная группа Г вкладывается в виде равномерной Д. п. в односвязную нильпотентную группу Ли тогда и только тогда, когда Г — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения.

Д. п. разрешимых групп Ли изучены достаточно хорошо, но результаты здесь не отличаются таким совершенством, как для нильпотентных групп. Всякая решетка в разрешимой группе Ли является равномерной Д. п. Если Г — решетка в односвязной разрешимой группе Ли G, то группа G допускает точное матричное представление, при к-ром элементы группы Г представляются целочисленными матрицами [13]. Это утверждение можно рассматривать как обобщение теоремы 2) Мальцева. Аналогом теоремы 4) является следующее утверждение. Всякая решетка в односвязной разрешимой группе Ли есть строго *полициклическая группа*; и обратно, всякая строго полициклич. группа обладает подгруппой конечного индекса, изоморфной решетке в односвязной разрешимой группе Ли.

Наиболее тонкие результаты теории Д. п. групп Ли относятся к Д. п. неразрешимых и, в частности, полупростых групп Ли. В [4] доказана следующая теорема, включающая в себя в виде частных случаев теорему 1) Мальцева, *Дирихле теорему* о единицах поля алгебраич. чисел и упомянутые выше результаты Зигеля о нек-рых арифметич. Д. п. полупростых групп Ли. Пусть H — линейная алгебраич. группа, определенная над $\mathbb{Q}$. Для того чтобы подгруппа $H_{\mathbb{Z}}$ была решеткой в $H_{\mathbb{R}}$, необходимо и достаточно, чтобы группа H не допускала рациональных гомоморфизмов на группу $\mathbb{C}^*$, определенных над $\mathbb{Q}$ (это условие, в частности, выполняется, если группа H полупроста или унипотентна). Для того чтобы подгруппа $H_{\mathbb{Z}}$ была равномерной Д. п. в $H_{\mathbb{R}}$, необходимо и достаточно, сверх этого, чтобы все унипотентные элементы группы $H_{\mathbb{Q}}$ лежали в $U_{\mathbb{Q}}$, где U — унипотентный радикал группы H.

Аналогом теоремы 2) для Д. п. полупростых групп Ли является следующая теорема арифметичности [11]. Пусть Г — решетка в связной полупростой группе Ли G, не имеющей компактных множителей, и пусть (для удобства формулировки) центр группы G тривиален. Пусть, кроме того, решетка Г неприводима в том смысле, что группа G не может быть разложена нетривиальным образом в прямое произведение $G_1 \times G_2$ так, чтобы

Γ была соизмерима с подгруппой вида $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, где $\Gamma_1 \subset G_1$, $\Gamma_2 \subset G_2$. Тогда, если вещественный ранг группы G больше единицы, подгруппа Γ арифметична в том смысле, что существуют полупростая алгебраич. группа H, определенная над $\mathbb{Q}$, и гомоморфизм φ: $H^0_{\mathbb{R}} \to G$ (где $H^0_{\mathbb{R}}$ — связная компонента единицы группы $H_{\mathbb{R}}$) такие, что ядро гомоморфизма φ компактно и подгруппа Γ соизмерима с $\varphi(H_{\mathbb{Z}})$. Предположение о том, что вещественный ранг группы G больше единицы, существенно. Известно, что теорема неверна для группы $PSL_2(\mathbb{R})$ (группы движений плоскости Лобачевского), к-рая вообще играет особую роль в теории Д. п. групп Ли, а также [6], [8] для групп движений пространств Лобачевского размерностей 3, 4 и 5.

Аналогом теоремы 3) для Д. п. полупростых групп Ли является следующая сильная теорема жесткости. Пусть Γ_1, Γ_2 — неприводимые решетки в связных полупростых группах Ли G_1, G_2, не имеющих компактных множителей, и пусть центры групп G_1, G_2 *тривиальны*. Тогда если группы G_1, G_2 не изоморфны $PSL_2(\mathbb{R})$, то всякий изоморфизм $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ однозначно продолжается до изоморфизма $G_1 \to G_2$ (см. [10], [14]). Исторически доказательству этой теоремы предшествовало доказательство слабой теоремы жесткости [5] о продолжении изоморфизмов, достаточно близких к тождественному (в случае, когда $G_1 = G_2$). Из слабой теоремы жесткости вытекает, в частности, существование базиса, в к-ром элементы Д. п. записываются алгебраич. числами. Это обстоятельство сыграло важную роль в развитии теории Д. п. полупростых групп Ли.

О Д. п. группы $PSL_2(\mathbb{R})$ см. *Фуксова группа.*

Из других общих теорем о Д. п. полупростых групп Ли следует отметить теорему плотности Бореля и теорему максимальности Вана. Пусть Γ — решетка в связной полупростой группе Ли, не имеющей компактных множителей. Тогда Γ плотна в G в топологии Зариского [3] и содержится лишь в конечном числе решеток в группе G [17].

Описание решеток в произвольных группах Ли в известной степени сводится к описанию решеток в полупростых группах Ли благодаря теоремам, аналогичным упомянутой выше теореме Бибербаха о кристаллографич. группах. Говорят, что нормальная подгруппа N группы Ли G обладает свойством Бибербаха, если для любой решетки Γ в группе G подгруппа $N\Gamma$ замкнута (и тогда автоматически $N \cap \Gamma$ — решетка в N, а $\Gamma/N \cap \Gamma$ — решетка в G/N). Теорема Бибербаха состоит в том, что в группе движений евклидова пространства подгруппа параллельных переносов обладает свойством Бибербаха. Существует обобщение этой теоремы на группы Ли, являющиеся расширением односвязной нильпотентной группы Ли при помощи компактной [1]. Другая теорема такого типа заключается в следующем. Пусть G — связная группа Ли, R — ее радикал, S — максимальная связная полупростая подгруппа, C — максимальная связная компактная нормальная подгруппа группы S; тогда подгруппа RC обладает свойством Бибербаха в G [2]. Известно также, что свойством Бибербаха обладают нильпотентный радикал связной разрешимой группы Ли [12] и коммутант односвязной нильпотентной группы Ли [9].

Топологич. методами (см. *Дискретная группа* преобразований) доказывается, что всякая равномерная Д. п. связной группы Ли является конечно представимой группой [5]. В действительности всякая решетка в связной группе Ли конечно представима [17], [18].

Лит.: [1] Auslander L., «Amer. J. Math.», 1961, v. 83, p. 276—80; [2] его же, там же, 1963, v. 85, p. 145—50; [3] Borel A., «Ann. Math.», 1960, v. 72, p. 179—88; [4] Борель А., Хариш-Чандра, «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 19—71; [5] Вейль А., там же, 1963, т. 7, № 1, с. 3—41; [6] Винберг Э. Б., «Матем. сб.», 1967, т. 72, № 3, с. 471—88;

[7] Garland H., Raghunathan M. S., «Ann. Math.», 1970, v. 92, p. 279—326; [8] Макаров В. С., «Докл. АН СССР», 1966, т. 167, № 1, с. 30—33; [9] Мальцев А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1949, т. 13, № 1, с. 9—32; [10] Маргулис Г. А., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, № 1, с. 49—98; [11] Margulis G. A., Discrete groups of motions of manifolds of non-positive curvature, в кн.: Congrès International des Mathématiques, Vancouver, 1974; [12] Mostow G. D., «Ann. Math.», 1954, v. 60, p. 1—27; [13] его же, «Amer. J. Math.», 1970, v. 92, p. 1—32; [14] его же, Strong rigidity of locally symmetric spaces, N.Y., 1973; [15] Рагунатан М., Дискретные подгруппы групп Ли, пер. с англ., М., 1977; [16] Сельберг А., «Математика», 1962, т. 6, № 3, с. 3—15; [17] Wang H.-C., «Amer. J. Math.», 1967, v. 89, p. 124—32; [18] его же, в кн.: Symmetric Spaces, N. Y., 1972, p. 459—87.

Э. Б. Винберг.

ДИСКРЕТНАЯ СЕРИЯ представлений — семейство непрерывных неприводимых унитарных представлений локально компактной группы G, эквивалентных представлениям регулярного представления этой группы. Если группа G унимодулярна, то непрерывное неприводимое унитарное представление π группы G тогда и только тогда принадлежит Д. с., когда матричные элементы представления π лежат в $L^2(G)$. В этом случае существует такое положительное число d_π, называемое формальной размерностью представления π, что соотношения

$$\int_G (\pi(g)\xi, \eta)\overline{(\pi(g)\xi', \eta')}\,dg = d_\pi^{-1}(\xi, \xi')\overline{(\eta, \eta')}; \quad (1)$$

$$(\pi(g)\xi, \eta)*(\pi(g)\xi', \eta') = d_\pi^{-1}(\xi, \eta')(\pi(g)\xi', \eta) \quad (2)$$

выполняются для всех векторов ξ, η, ξ', η' из пространства H_π представления π. Если π_1, π_2 — два неэквивалентных представления группы G в пространствах $H_1 H_2$, соответственно, принадлежащие Д. с., то для любых $\xi_1, \eta_1 \in H_1, \xi_2, \eta_2 \in H_2$ выполняются соотношения

$$\int_G (\pi_1(g)\xi_1\eta_1)\overline{(\pi_2(g)\xi_2\eta_2)}\,dg = 0, \quad (3)$$

$$(\pi_1(g)\xi_1, \eta_1)*(\pi_2(g)\xi_2, \eta_2) = 0. \quad (4)$$

Соотношения (1)—(4) являются обобщениями соотношений ортогональности для матричных элементов представлений компактных топологич. групп (см. *Представления компактных групп*); группа G компактна тогда и только тогда, когда все непрерывные неприводимые унитарные представления группы G принадлежат Д. с., и если G компактна и мера Хаара dg удовлетворяет условию $\int_G dg = 1$, то число d_π совпадает с размерностью представления π. Односвязные нильпотентные вещественные группы Ли и комплексные полупростые группы Ли не имеют Д. с.

Класс эквивалентности представления π, входящего в Д. с., является замкнутой точкой в дуальном пространстве $\hat{G}$ группы G, и мера Планшереля этой точки совпадает с формальной размерностью d_π; если при этом нек-рый ненулевой матричный элемент представления π суммируем, то представление π является открытой точкой в носителе регулярного представления группы G, но открытые точки в $\hat{G}$ могут не соответствовать представлениям Д. с. Свойства представлений Д. с. частично распространяются на случай неунимодулярных локально компактных групп.

Лит.: [1] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с фанц., М., 1974; [2] Harish-Chandra, «Acta Math.», 1965, v. 113, p. 241—318; 1966, v. 116, p. 1—111; [3] Schmid W., «Ann. Math.», 1976, v. 103, p. 375—94; [4] Kleppner A., Lipsman R., «Ann. sci. École norm. sup.», 1972, t. 5, p. 459—516; 1973, t. 6, p. 103—32.

А. И. Штерн.

ДИСКРЕТНАЯ ТОПОЛОГИЯ на множестве X — топология, в к-рой любое множество открыто (и потому любое множество замкнуто). Д. т. в решетке всех топологий на данном множестве есть наибольший элемент. Иногда термин «Д. т.» понимается несколько шире: топология, в к-рой пересечения любого числа открытых множеств открыты. Для T_1-пространств оба определения совпадают. В этом понимании теория дискретных пространств эквивалентна теории частично упорядоченных множеств.

Лит.: [1] Александров П. С., «Матем. сб.», 1937, т. 2, с. 501—20. *А. А. Мальцев.*

ДИСКРЕТНОГО НОРМИРОВАНИЯ КОЛЬЦО, дискретно нормированное кольцо,— кольцо с дискретным нормированием, т. е. область целостности с единицей, в к-рой существует такой элемент π, что любой ненулевой идеал порождается нек-рой степенью элемента π; такой элемент наз. униформизирующим и определен с точностью до умножения на обратимый элемент. Каждый ненулевой элемент Д. н. к. единственным способом записывается в виде $u\pi^n$, где u — обратимый элемент, а $n \geqslant 0$ — целое. Примерами Д. н. к. являются кольцо $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел, кольцо $k[[T]]$ формальных степенных рядов от одной переменной T над полем k, кольцо *Витта векторов* $W(k)$ для совершенного поля k.

Д. н. к. может быть определено также как: локальное кольцо главных идеалов; локальное дедекиндово кольцо; локальное одномерное кольцо Крулля; локальное нётерово кольцо с главным максимальным идеалом; нётерово кольцо нормирования; кольцо нормирования с группой значений $\mathbb{Z}$.

Пополнение (в естественной топологии локального кольца) Д. н. к. снова есть Д. н. к. Дискретно нормированное кольцо компактно тогда и только тогда, когда оно полно, а его поле вычетов конечно; любое такое кольцо либо изоморфно $k[[T]]$, где k — конечное поле, либо является конечным расширением $\mathbb{Z}_p$.

Если $A \subset B$ — локальный гомоморфизм Д. н. к. с униформизирующими π и Π, то $\pi = u\Pi^e$, где u — обратимый элемент в B. Целое число $e = e(B/A)$ наз. индексом ветвления расширения $A \subset B$, а

$$[B/\Pi B : A/\pi A] = f(B/A)$$

наз. степенью вычетов. Такая ситуация возникает, когда рассматривают целое замыкание B кольца дискретного нормирования A с полем частных K в конечном расширении L поля K. В этом случае B есть полулокальное кольцо главных идеалов, и если $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_s$ — его максимальные идеалы, то $B_i = B_{\mathfrak{n}_i}$ являются Д. н. к. Если предположить, что L — сепарабельное расширение K степени n, то верна формула

$$\sum\nolimits_{i=1}^{s} e(B_i/A)\, f(B_i/A) = n.$$

Если L/K есть расширение Галуа, то все $e(B_i/A)$ и все $f(B_i/A)$ равны между собой, и $n = sef$. Если же A — полное Д. н. к., то уже само B будет Д. н. к., и $e(B/A)\, f(B/A) = n$. В этих предположениях расширение $A \subset B$ (а также L над K) наз. неразветвленным расширением, если $e(B/A) = 1$, а поле $B/\mathfrak{n}$ сепарабельно над $A/\mathfrak{m}$; слабо разветвленным, если $e(B/A)$ взаимно просто с характеристикой поля $A/\mathfrak{m}$, а $B/\mathfrak{n}$ сепарабельно над $A/\mathfrak{m}$; вполне разветвленным, если $f(B/A) = 1$.

Теория модулей над Д. н. к. имеет большое сходство с теорией абелевых групп (см. [3]). Любой модуль конечного типа есть прямая сумма циклич. модулей; модуль без кручения является плоским модулем; любой проективный модуль или подмодуль свободного модуля свободен. Однако прямое произведение бесконечного числа свободных модулей не свободно. Модуль без кручения счетного ранга над полным Д. н. к. является прямой суммой модулей ранга 1.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [3] Kaplansky J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1952, v. 72, p. 327—40. *В. И. Данилов.*

ДИСКРЕТНОЕ НОРМИРОВАНИЕ — нормирование тела, группа значений к-рого изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$. В этом случае кольцо нормирования является *дискретного нормирования кольцом*. Иногда Д. н., точнее Д. н. в ы с о т ы (или р а н г а) r, наз. нормирование, имеющее группой значений r-ю прямую степень группы $\mathbb{Z}$ с лексикографич. порядком. *В. И. Данилов.*

ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — область математики, занимающаяся исследованием и решением экстремальных задач на конечных множествах. Пусть $M=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и f — числовая функция, определенная на элементах множества M. Требуется найти элемент $a_j \in M$, на к-ром достигается абсолютный минимум (или абсолютный максимум) f на M. Сокращенно такие задачи записываются:

$$\underset{x \in M}{f(x)} \longrightarrow \text{extr}$$

$$\left(\underset{x \in M}{f(x)} \longrightarrow \min \quad \text{или} \quad \underset{x \in M}{f(x)} \longrightarrow \max\right).$$

Из указанного класса задач Д. п. исследует только нетривиальные задачи, выделяемые следующими дополнительными условиями.

1. Число $n=|M|$ должно быть достаточно большим настолько, чтобы задача не решалась непосредственным просмотром значений $f(a_i)$ вручную или на ЭВМ. Так, в задаче коммивояжера, к-рая является типичной задачей Д. п., число вариантов Q при обходе m пунктов равно

$$(m-1)! \sim c\sqrt{m}\left(\frac{m-1}{e}\right)^{m-1}.$$

В задачах минимизации булевых функций (см. *Булевых функций минимизация*, *Булевых функций метрическая теория*) $|M|>2^{2^n}$.

2. Задача не должна быть регулярной. Задача наз. р е г у л я р н о й, если: а) для каждого $a_i \in M$ определена непустая окрестность $S(a_i, M)$, и $|S(a_i, M)| \ll |M|$; б) локальный экстремум f, т. е. точка a_i такая, что $f(a_i)=\text{extr}\, f(x)$, $x \in S(a_i, M)$, определяется при помощи простого алгоритма, в) локальный экстремум совпадает хотя бы с одним глобальным.

Таким образом, Д. п. рассматривает задачи, имеющие, вообще говоря, несколько локальных экстремумов. В типичных случаях число локальных экстремумов весьма велико. Напр., в задачах целочисленного *линейного программирования* с булевыми переменными, в к-рых функционал и ограничения зависят от переменных $x_1, \ldots, x_k$, число элементов в M не больше 2^k, а число локальных экстремумов может быть равным $\text{const}\cdot\frac{2^k}{\sqrt{k}}$ (см. [2]). Трудность решения задач Д. п. и определяется наличием большого числа локальных экстремумов. Универсальных эффективных методов решения задач Д. п. не создано (1978). Как показывают исследования по минимизации булевых функций — хорошо исследованной модельной задаче Д. п. (см. также *Алгоритм локальный*), создание таких методов, по-видимому, невозможно. Методы, в достаточной степени универсальные, такие, как м е т о д в е т в е й и г р а н и ц (см. [1]) и его различные модификации, являются методами направленного перебора. Они эффективно применяются для решения специализированных задач Д. п. Однако для каждого из таких методов существуют обширные классы задач, для к-рых методы направленного перебора мало отличаются по сложности от методов полного перебора. Другой источник математич. трудностей в задачах Д. п. состоит в том, что множество M, на к-ром ищется экстремум f, часто задается в неявной форме. Так, в задачах целочисленного линейного программирования множество M определяется как совокупность целочисленных решений системы линейных неравенств. При таком и более сложных способах задания M нетривиальной становится не только задача полного перечисления M, но и указания хотя бы одного элемента из M. В силу изложенного, основные результаты Д. п. получены при решении и исследовании более узких классов задач. К таким классам относятся *транспортная задача*, задача о коммивояжере и нескольких коммивояжерах, линейное целочисленное программирование, задача о расписаниях (см. *Расписаний теория*), экстремальные задачи на графах (см. *Графов теория*), задачи минимального представления булевых функций и функций k-значной логики и т. д.

Другое направление в теории дискретных экстремальных задач состоит в развитии приближенных методов, обычно применяемых при решении практич. задач большой размерности. Принципиально эти методы не отличаются от соответствующих методов поиска экстремумов непрерывных функций и функционалов. В Д. п. используются аналоги алгоритмов локальной оптимизации, алгоритмов спуска, случайного поиска и т. п. (см. обзор приближенных методов решения задач Д. п. в [3]).

Интересным как с теоретич. точки зрения, так и в решении прикладных задач является статистический подход к задачам Д. п. Пусть совокупность задач $\{Z\}$ можно представить в виде $\{Z\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{Z\}_n$, где $|\{Z\}_i|>|\{Z\}_j|$ при $i>j$ и $|\{Z\}_n|\to\infty$ при $n\to\infty$. Говорят, что подмножество

$$\{Z'\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{Z'\}_n,\quad \{Z'\}_n\subset\{Z\}_n,$$

составляет почти все задачи Z, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\{Z'\}_n|}{|\{Z\}|}=1.$$

Для различных классов задач Д. п. имеет место следующий факт: существует (а часто и эффективно описывается) совокупность $\{Z'\}$ почти всех задач $\{Z\}$, для к-рых нахождение экстремума или хорошего приближения к экстремуму возможно в классе простых алгоритмов. Это было замечено впервые при решении задач синтеза оптимальных управляющих систем, напр. в минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм, см. *Булевых функций нормальные формы*, а также [4]. Напр., задача выделения экстремальных конъюнкций, входящих хотя бы в одну минимальную дизъюнктивную нормальную форму булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, неразрешима в классе локальных алгоритмов при $k\cdot l<\mathrm{const}\cdot 2^n$, где k — индекс локального алгоритма, l — величина памяти. В то же время задача выделения элементарных конъюнкций, входящих хотя бы в одну «почти минимальную» дизъюнктивную нормальную форму для почти всех булевых функций, разрешима в классе локальных алгоритмов при $k=2$, $l=1$ (см. [5]). Столь же значительное сокращение трудоемкости при переходе к почти всем задачам получается для экстремальных задач на графах, в задаче о построении оптимальных покрытий и т. д.

Лит.: [1] Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., Дискретное программирование, М., 1969; [2] Коробков В. К., «Проблемы кибернетики», 1965, в. 14, с. 297—99; [3] Финкельштейн Ю. Ю., Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования, М., 1976; [4] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., 1974; [5] Журавлев Ю. И., «Дискретный анализ», 1964, № 3, с. 41—77. *Ю. И. Журавлев.*

ДИСКРЕТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство, наделенное *дискретной топологией*. *С. М. Сирота.*

ДИСКРЕТНОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ — одна из гипотез возможной структуры пространства в микромире, характеризуемая представлением об элементарных попарно несвязных компонентах пространства, точки к-рых не разделяются наблюдаемыми величинами. Приемлемой формализацией Д. п.-в. могут быть топологические пространства Y, в к-рых связной компонентой точки $y \in Y$ является ее замыкание $\bar{y}$, а в отделимых Y — сама эта точка (вполне несвязные пространства). Примерами Y являются дискретное топологическое пространство, рациональная прямая, аналитич. многообразия и группы Ли над полями с ультраметрическими абсолютными значениями.

Первоначально гипотеза Д. п.-в. разрабатывалась в варианте конечного вполне несвязного пространства, в моделях конечных геометрий на полях Галуа, а в теории поля впервые (в варианте кубического решетчатого пространства) в работах В. А. Амбарцумяна и Д. Д. Иваненко (1930). В квантовой теории гипотеза Д. п.-в. возникла в моделях, в к-рых координатное (импульсное и др.) пространство как спектр C^*-алгебры соответствующих операторов является вполне несвязным (как, напр., спектр C^*-алгебры вероятностных мер). Серьезное обоснование она находит в концепции «фундаментальных длин», возникающих в нелинейных обобщениях электродинамики, мезодинамики и спинорного уравнения Дирака, в которых константы самодействия полей имеют размерность длины, и в квантовой теории поля в связи с необходимостью введения всевозможных обрезающих факторов. На базе этой концепции, а затем нелокальных моделей, сформировалось представление о минимальных областях пространства, в к-рых, по-видимому, уже невозможно принятое в квантовой теории описание микрообъектов через их взаимодействие с макроприбором, следствием чего является неприменимость пространственно-временного континуума для параметризации пространственно-эволюционных отношений в этих областях (например, гамильтонова формализма — в нелокальных теориях) и неразделимость их точек наблюдаемыми величинами (в пространствах Y это можно представить как наличие неотделимой равномерной структуры). Гипотеза Д. п.-в. получает свое развитие в концепции нелинейного вакуума, согласно которой в экстремальных условиях внутри частиц, а возможно в астрофизических и космологических сингулярностях, пространственные характеристики могут выступать как динамические характеристики физической системы и в моделях к-рого элементы пространства наделяются некоммутативной бинарной операцией.

Лит.: [1] Соколов А., Иваненко Д., Квантовая теория поля, М.—Л., 1952; [2] Вяльцев А. Н., Дискретное пространство-время, М., 1965; [3] Блохинцев Д. И., Пространство и время в микромире, М., 1970; [4] Марков М. А., О природе материи, М., 1976; [5] Finkelstein D., «Phys. Rev.», 1974, v. 9, № 8, p. 2219. *Г. А. Сарданашвили.*

ДИСКРЕТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, сосредоточенное на конечном или счетном множестве точек *выборочного пространства* Ω. Точнее, пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots$ — выборочные точки и

$$p_i = p(\omega_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

суть нек-рые числа, удовлетворяющие условиям

$$p_i \geq 0, \qquad \sum_i p_i = 1. \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) полностью определяют Д. р. в пространстве Ω, так как вероятностная мера любого множества $A \subset \Omega$ определяется равенством

$$P(A) = \sum_{\{i : \omega_i \in A\}} p_i.$$

В соответствии с этим распределение случайной величины $X(\omega)$ наз. дискретным, если с вероятностью 1 она принимает конечное или счетное число различных значений x_i с вероятностями $p_i = \mathsf{P}\{\omega : X(\omega) = x_i\}$. Для Д. р. на прямой функция распределения $F(x) = \sum_{\{i : x_i < x\}} p_i$ имеет скачки в точках x_i, равные $p_i = F(x_i + 0) - F(x_i)$, и постоянна в интервалах $[x_i, x_{i+1})$. Наиболее распространены следующие Д. р.:

биномиальное распределение, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение, отрицательное биномиальное распределение, полиномиальное распределение, Пуассона распределение. А. В. Прохоров.

ДИСКРЕТНОЕ СЕМЕЙСТВО МНОЖЕСТВ — семейство подмножеств A топологич. пространства такое, что каждая точка пространства имеет окрестность, к-рая пересекает самое большее один элемент семейства A.

Б. А. Ефимов.

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ в статистической механике — системы, микроскопич. состояния к-рых определяются заданием состояний в каждом из узлов фиксированной пространственной решетки. С точки зрения приложений — это модели твердого тела, в к-рых одно из микроскопич. движений, связанное с изменением состояний в узлах решетки, выделено и считается независимым от других. Одна из наиболее простых Д. с.— модель Изинга (1925) — характеризуется гамильтонианом

$$H=-h\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\sigma_i-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}J(i,\ j)\,\sigma_i\sigma_j,$$

где $i=\boldsymbol{r}_i$ — координаты узлов решетки, $\sigma_i=\pm1$.

Эта модель используется для исследования сплавов типа замещения, магнетиков, решетчатого газа и др. Для Д. с. такого типа характерно наличие в них при температуре ниже λ-точки дальнего порядка — общей регулярности в направлении спинов σ_i магнетиков или регулярности в чередовании атомов различного сорта в бинарных сплавах, к-рая при повышении температуры пропадает в точке θ_λ (точке λ-перехода) с характерным выбросом теплоемкости c_v, в то время как ближний порядок — корреляция отдельного узла с окружающими его узлами — такого резкого изменения не претерпевает. Качественное описание явлений упорядочения укладывается в теорию типа теории молекулярного поля. Несмотря на математич. простоту модели, точное решение в общем виде получено только для одномерной модели и для плоской ферромагнитной решетки ($J(i,\ j)>0$) с взаимодействием только ближайших соседей и в случае $h=0$. Одномерная модель фазового перехода не претерпевает, а двухмерная имеет особенность теплоемкости логарифмич. типа (принципиально в случае $N\to\infty$). Для общего случая разработаны приближенные методы в области низких и высоких температур.

Из других моделей распространена модель магнетиков Гейзенберга, гамильтониан к-рой отличен от гамильтониана модели Изинга тем, что числа σ_i заменены на σ_i^z, а произведение $\sigma_i\sigma_j$ — на $(\sigma_i,\ \sigma_j)$, где σ_i — спиновые *Паули матрицы*.

Целый класс Д. с. с определенным типом взаимодействия узлов решетки допускает асимптотически точное при $N\to\infty$ рассмотрение с помощью метода аппроксимирующих гамильтонианов [3].

Лит.: [1] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966; [2] Займан Дж., Принципы теории твердого тела, пер. с англ., М., 1966; [3] Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974.

И. А. Квасников.

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ — область математики, занимающаяся изучением свойств структур финитного (конечного) характера, к-рые возникают как в самой математике, так и в области ее приложений. К числу таких конечных структур могут быть отнесены, напр., *конечные группы*, конечные *графы*, а также нек-рые математич. модели преобразователей дискретной информации, такие как *автоматы конечные*, *Тьюринга машины* и др. Иногда допускают расширение предмета Д. а. до произвольных дискретных структур и приходят к дискретной математике, отождествляя последнюю с Д. а. К числу таких структур могут быть отнесены некоторые алгебраич. системы, бесконечные графы, нек-рые виды вычислительных сред (напр., однородные структуры) и т. п. В качестве синонима понятий Д. а. и дискретной математики иногда употребляется термин к о н е ч н а я   м а т е м а т и к а. Ниже Д. а. понимается в широком смысле, включающем дискретную математику.

В отличие от Д. а. классич. математика в основном занимается изучением свойств объектов непрерывного характера. Использование классической или дискретной математики как аппаратов исследования связано с тем, какие задачи ставит перед собой исследователь, и, в связи с этим, какую модель изучаемого явления он рассматривает — дискретную или непрерывную. Само деление математики на классическую и дискретную в значительной мере условно, поскольку, с одной стороны, происходит активная циркуляция идей и методов между ними, а с другой — часто возникает необходимость исследования моделей, обладающих одновременно как дискретными, так и непрерывными свойствами. Кроме того, в математике существуют подразделы, использующие средства дискретной математики для изучения непрерывных моделей, и, наоборот, часто средства и постановки задач классич. анализа используются при исследовании дискретных структур. Это указывает на известное слияние рассматриваемых областей.

Д. а. представляет собой важное направление в математике, имеющее характерные для него предмет исследования, методы и задачи, специфика к-рых обусловлена, в первую очередь, необходимостью отказа в Д. а. от основополагающих понятий классич. математики — предела и непрерывности — и (в связи с этим) тем, что для многих задач Д. а. сильные средства классич. математики оказываются, как правило, мало приемлемыми. Наряду с выделением Д. а. путем указания его предмета, методов и задач можно также охарактеризовать Д. а. посредством перечисления подразделов, составляющих его. К ним, в первую очередь, относятся *комбинаторный анализ*, *графов теория*, теория *кодирования и декодирования*, теория *функциональных систем* и нек-рые другие. Часто под термином «Д. а.» (в предположении, что его предмет исчерпывается конечными структурами) понимается именно совокупность перечисленных дисциплин. За счет расширения понимания его круга вопросов возможно и более широкое толкование Д. а. С этой точки зрения, к Д. а. могут быть отнесены также как целые разделы математики, напр. математич. логика, так и части таких разделов, как теория чисел, алгебра, вычислительная математика, теория вероятностей и некоторые другие, в к-рых изучаемый объект носит дискретный характер.

Элементы Д. а. возникли в глубокой древности и, развиваясь параллельно с другими разделами математики, в значительной мере являлись их составной частью. Типичными для того периода были задачи, связанные со свойствами целых чисел, приведшие затем к созданию теории чисел. Позже, в основном в связи с игровыми задачами, появились элементы комбинаторного анализа и дискретной теории вероятностей, а в связи с общими проблемами теории чисел, алгебры и геометрии возникли важнейшие понятия алгебры такие, как группа, поле, кольцо и др., определившие развитие и содержание алгебры на много лет вперед и имевшие по существу дискретную природу. Стремление к строгости математич. рассуждений и анализ рабочего инструмента математики — логики — привели к выделению еще одного важного раздела математики — математич. логики. Однако наибольшего развития Д. а. достиг в связи с появлением кибернетики и ее теоретич. части — математич. кибернетики. Математич. кибернетика, непосредственно изучающая с позиций математики самые разнообразные проблемы, к-рые ставит перед кибернетикой практика, является важным поставщиком идей и задач для Д. а., вызывая в нем целые новые направления. Так, прикладные вопросы, требующие большой числовой обработки, стимулировали появление сильных численных методов решения задач, оформившихся затем в вычислительную математику, а анализ понятий вычислимости и алгоритма привел к появлению важного раздела математич. логики — *алгоритмов теории*. Растущий поток информации и связанные с ним задачи хранения, обработки и передачи информации привели к возникновению теории кодирования; экономич. задачи, задачи электротехники, равно как и внутренние задачи математики, потребовали разработки теории графов; задачи конструирования и описания работы сложных управляющих систем привели к теории функциональных систем и т. д. В то же время математич. кибернетика использует результаты Д. а. при решении своих задач.

Наряду с отмеченными, Д. а. обладает рядом и других особенностей. Так, вместе с задачами типа существования, имеющими общематематич. характер, важное место в Д. а. занимают задачи, связанные с алгоритмич. разрешимостью и построением конкретных решающих алгоритмов, что характерно именно для Д. а. Особенностью Д. а. является и то, что он по существу первым столкнулся с необходимостью глубокого исследования так наз. дискретных многоэкстремальных задач, часто возникающих в математич. кибернетике. Соответствующие методы классич. математики для поиска экстремумов, существенно использующие гладкость функций, в этих случаях оказываются мало эффективными. Типичными задачами такого рода в Д. а. являются, напр., задачи об отыскании в нек-ром смысле оптимальных стратегий в шахматной партии при ограниченном числе ходов, а также важный вопрос математич. кибернетики о построении минимальных дизъюнктивных нормальных форм для булевых функций, т. е. так наз. проблема *булевых функций минимизации*. Особенностью Д. а., связанной уже с задачами для конечных структур, является и то, что для многих из этих задач, как правило, существует алгоритм решения, в то время как в классич. математике полное решение задачи часто возможно лишь при весьма жестких ограничениях. Примером такого алгоритма может служить алгоритм просмотра всех возможных вариантов, т. е. алгоритм типа «полного перебора». К числу задач указанного вида можно отнести, напр., упомянутые задачи о стратегиях в шахматной партии, о минимизации булевых функций и др. Вместе с тем решения типа «полного перебора» очень трудоемки и практически мало приемлемы, в связи с чем возникает ряд новых задач, связанных с условиями, ограничивающими перебор и приводящими к сведению индивидуальных задач, характеризующихся конкретными значениями параметров, к *массовой проблеме*, характеризующейся бесконечным множеством значений параметров; возникают задачи наложения ограничений на средства решения, естественных для этого класса задач, и др. Постановка такого рода вопросов и разработка методик осуществляется на конкретных моделях, доставляемых различными разделами математики, напр. на моделях минимизации булевых функций и синтеза *управляющих систем* из математич. кибернетики.

Лит.: [1] Яблонский С. В., Обзор некоторых результатов в области дискретной математики, «Информационные материалы», 1970, 5, с. 5—15; [2] Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж., Введение в конечную математику, пер. с англ., 2 изд., М., 1965. См. сб. «Проблемы кибернетики» и «Дискретный анализ», ж. «Кибернетика». *В. Б. Кудрявцев.*

ДИСКРИМИНАНТ — 1) Д. многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, с $a_0\neq 0$, корни к-рого равны $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,— произведение

$$D(f)=a_0^{2n-2}\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2.$$

Д. равен нулю тогда и только тогда, когда многочлен имеет кратные корни. Д. симметричен относительно корней многочлена и поэтому может быть выражен через его коэффициенты.

Д. квадратного трехчлена ax^2+bx+c равен b^2-4ac; Д. многочлена x^3+px+q (корни к-рого вычисляются по *Кардано формуле*) равен $-27q^2-4p^3$. Если $f(x)$ — многочлен над полем характеристики 0, то

$$D(f)=(-1)^{n(n-1)/2}a_0^{-1}R(f, f'),$$

где $R(f, f')$ — результант многочлена $f(x)$ и его производной $f'(x)$. Производной многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ с коэффициентами из любого поля наз. многочлен $na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *И. В. Проскуряков.*

2) Д. полуторалинейной формы f в базисе $(v)=\{v_1, \ldots, v_n\}$ — элемент из кольца A, равный

$$D_f(v_1, \ldots, v_n)=\det\begin{Vmatrix} f(v_1, v_1)\ldots f(v_1, v_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ f(v_n, v_1)\ldots f(v_n, v_n)\end{Vmatrix}, \quad (*)$$

где (v) — фиксированный базис конечномерного свободного A-модуля E над коммутативным кольцом A с единицей, снабженным автоморфизмом σ. Если $(w)=\{w_1, \ldots, w_n\}$ — другой базис в E, а

$$C=\begin{Vmatrix} c_{11}\ldots c_{1n} \\ \ldots\ldots \\ c_{n1}\ldots c_{nn}\end{Vmatrix}$$

— матрица перехода от (v) к (w), то

$$D_f(w_1, \ldots, w_n)=(\det C)(\det C)^{\sigma}D_f(v_1, \ldots, v_n).$$

Если кольцо A не имеет делителей нуля, то для невырожденности f необходимо и достаточно, чтобы

$$D_f(v_1, \ldots, v_n)\neq 0.$$

Если $v_1, \ldots, v_n$ — произвольный набор n элементов из E, то элемент $D_f(v_1, \ldots, v_n)$ кольца A, определяемый формулой (*), наз. дискриминантом f относительно системы $v_1, \ldots, v_n$. Пусть A без делителей нуля и f — невырожденная полуторалинейная форма. Тогда для того, чтобы система элементов $v_1, \ldots, v_n$ из E была свободной, необходимо и достаточно, чтобы $D_f(v_1, \ldots, v_n)\neq 0$. При этом $v_1, \ldots, v_n$ будет базисом в E тогда и только тогда, когда $D_f(v_1, \ldots, v_n)$ и $D_f(u_1, \ldots, u_n)$ ассоциированы в A для некоторого базиса $u_1, \ldots, u_n$ в A.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974.

В. Л. Попов.

3) Д. системы элементов поля — одна из важных конструкций в теории расширений полей. Пусть K — конечное расширение поля k степени n. Отображение $K\times K$ в k:

$$(x, y)\mapsto \mathrm{Tr}(xy),$$

где $x, y\in K$, а $\mathrm{Tr}\,\alpha$ — след элемента $\alpha\in K$, является симметрической билинейной формой на поле K, рассматриваемом как линейное пространство над k. Д. этой билинейной формы (см. *Дискриминант* полуторалинейной формы) относительно системы элементов $w_1, \ldots, w_m$ из K наз. дискриминантом системы $w_1, \ldots, w_m$ и обозначается $D(w_1, \ldots, w_m)$. В частности, если указанная система есть базис K над k, то ее Д. наз. дискриминантом базиса K над k. Д. двух базисов отличаются множителем, являющимся квадратом нек-рого ненулевого элемента поля k. Д. всякого базиса K над k не равен нулю тогда и только тогда, когда расширение K/k сепарабельно. Если $f_x(t)$ — многочлен степени m, являющийся минимальным многочленом элемента x из сепарабельного расширения K/k, то $D(1, x, x^2, ..., x^m)$ совпадает с Д. многочлена $f_x(t)$. Приведенные определения могут быть перенесены также на случай произвольной конечномерной ассоциативной алгебры над полем (см. ниже п. 4).

В случае сепарабельного расширения K/k Д. базиса $w_1, \dots, w_n$ может быть вычислен по формуле

$$D(w_1, \dots, w_n) = (\det(\sigma_i(w_j)))^2,$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — все различные вложения K в фиксированное алгебраич. замыкание поля k, оставляющие неподвижным k.

Пусть $k=\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, K — поле алгебраич. чисел и M — некоторый *модуль* ранга n в K. Тогда для любых двух базисов модуля M значения Д. совпадают и это общее значение Д. наз. дискриминантом модуля M. Если M совпадает с кольцом целых чисел поля K, то Д. модуля M наз. просто дискриминантом поля K и обозначается D_k. Число D_k является важной характеристикой поля K. Напр., если K допускает s вещественных и $2t$ комплексных вложений в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, то

$$\lim_{q \to 1+0} (q-1)\zeta_k(q) = \frac{2^{s+t}\pi^t R}{m\sqrt{|D_k|}} h,$$

где $\zeta_k(q)$ — *дзета-функция* Дедекинда, h — число классов *дивизоров*, R — *регулятор* поля K и m — число корней из единицы в поле K. Имеется оценка

$$|D_k| > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2t} \frac{1}{2\pi n} e^{2n-\frac{1}{6n}},$$

которая показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty}|D_k| = \infty$. Для квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где d — свободное от квадратов целое рациональное число, $d \neq 1$, имеют место формулы:

$$D_k = d, \text{ если } d \equiv 1 \pmod 4,$$
$$D_k = 4d, \text{ если } d \equiv 2 \text{ или } 3 \pmod 4.$$

Для *кругового поля* $K=\mathbb{Q}(\varepsilon)$, где ε — примитивный корень p^r-й степени из единицы

$$D_k = \pm p^{p^{r-1}(pr-r-1)}$$

(знак минус берется при $p^r=4$ или $p \equiv 3 \pmod 4$, а плюс — в остальных случаях).

Указанное определение Д. модуля в поле алгебраич. чисел может быть обобщено на тот случай, когда k — поле частных дедекиндова кольца A, а K — конечное сепарабельное расширение поля k степени n. Пусть B — целое замыкание кольца A в K и $\mathfrak{b}$ — произвольный дробный идеал кольца B. Тогда дискриминантом идеала $\mathfrak{b}$ наз. A-модуль $D(\mathfrak{b})$, порожденный всеми Д. вида $D(w_1, \dots, w_n)$, где $\{w_1, \dots, w_n\}$ пробегает всевозможные базисы поля K над k, лежащие в $\mathfrak{b}$. $D(\mathfrak{b})$ оказывается *дробным идеалом* кольца A, причем имеет место равенство $D(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{b})^2 D(B)$, где $N(\mathfrak{b})$ — норма идеала $\mathfrak{b}$. Д. $D(B)$ совпадает с нормой дифференты кольца B над A.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [4] Джекобсон Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947.

В. Л. Попов.

4) Д. алгебры — Д. симметричной билинейной формы $(x, y) = T(xy)$, где x, y — элементы конечномерной ассоциативной алгебры A над полем F, а $T(a)$ — главный след элемента $a \in A$, определяемый следующим образом. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — к.-л. базис алгебры A, $\Phi = F(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — чисто трансцендентное расширение поля F с помощью алгебраически независимых элементов $\xi_1, \dots, \xi_n$, $A_\Phi = A_F \otimes \Phi$ — соответствующее скалярное расширение алгебры A, тогда элемент $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \in A_\Phi$ наз. общим элемен-

том алгебры A, а минимальный многочлен (над Φ) элемента x — минимальным многочленом алгебры A. Пусть

$$g(t;\ \xi)=t^r-m_1(\xi)\,t^{r-1}+\ldots+(-1)^r m_r(\xi)$$

— минимальный многочлен алгебры A; коэффициенты $m_i(\xi)$ оказываются на самом деле многочленами из $F[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Если $a=\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n (\alpha_i \in F)$ — произвольный элемент из A, то $m_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=T(a)$ наз. главным следом элемента a, $m_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=N(a)$ — главной нормой, а многочлен $g(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — главным многочленом. Коэффициенты главного многочлена для данного элемента $a \in A$ не зависят от выбора базиса, поэтому упомянутая выше билинейная форма (x, y) на A определена инвариантно, в то время как ее Д. определен с точностью до мультипликативного множителя, являющегося квадратом ненулевого элемента из F. Алгебра A сепарабельна (см. *Сепарабельная алгебра*) тогда и только тогда, когда ее Д. отличен от нуля.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947. *Е. Н. Кузьмин.*

ДИСКРИМИНАНТНАЯ КРИВАЯ обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка $F(x, y, y')=0$ — множество точек (x, y) плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\varphi(x, y)=0$, получающемуся исключением y' из соотношений $F=0$ и $F'_{y'}=0$ или исключением x' из соотношений $G=0$ и $G'_{x'}=0$, где $G(y, x, x')\equiv F(x, y, 1/x')$ (в предположении, что $F'_{y'}$ существует). Если Д. к. для уравнения $F=0$ — непустое множество и не вырождается в отдельные точки, то она (или каждая ее ветвь) может:
1) являться решением уравнения $F=0$, в каждой точ-

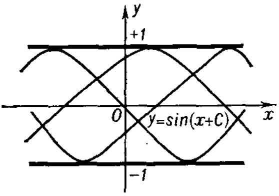


Рис. 1.

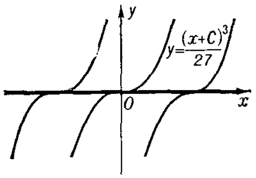


Рис. 2.

ке которого нарушается единственность,— в таком случае Д. к. есть огибающая семейства интегральных кривых (напр., $y=1$ и $y=-1$ для уравнения $y'^2+y^2-1=0$, рис. 1; $y=0$ для уравнения $y'^3-y^2=0$, рис. 2); 2) являться решением уравнения $F=0$, в каждой точке к-рого имеет место единственность (напр., $y=0$ для уравнения $y'^2-y^2=0$, рис. 3); 3) не являться решением уравнения $F=0$, в таком случае Д. к. есть множество либо точек возврата интегральных кривых (например, $x=0$ для уравнения $y'^2-x=0$, рис. 4), либо точек прикосновения различных интегральных

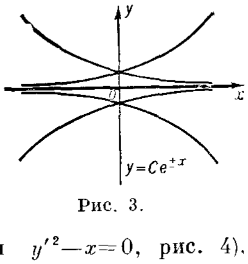


Рис. 3.

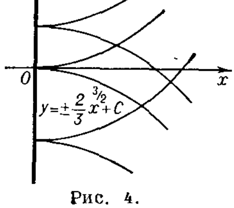


Рис. 4.

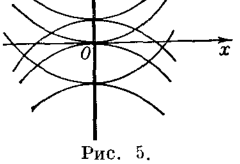


Рис. 5.

кривых (например, $x=0$ для уравнения $y'^2-x^2=0$, рис. 5).

Рассматривается также уравнение $F=0$ в комплексной области, когда F — многочлен от y' (см., напр., [2], гл. II).

Лит.: [1] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 2, М., 1954; [2] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1950. *Н. Х. Розов.*

ДИСКРИМИНАНТНАЯ ФУНКЦИЯ — статистика, служащая для построения правила различения в задачах *дискриминантного анализа* с двумя распределениями. Задача различения (дискриминации) для двух распределений состоит в следующем. Пусть наблюденный объект с вектором измерений $x=(x_1, \ldots, x_p)$ принадлежит одной из совокупностей π_i, $i=1, 2$, причем неизвестно какой. Требуется построить правило, согласно к-рому по значению наблюденного вектора x объект относят к π_i (правило различения). Построение такого правила основывается на разбиении выборочного пространства вектора x на такие области R_i, $i=1, 2$, чтобы при попадании x в R_i было разумно (с точки зрения выбранного принципа оптимальности решения) отнести x к π_i. Если правило дискриминации основывается на разбиении: $R_1=\{x : T(x)<a\}$, $R_2=\{x : T(x)\geqslant b\}$, где a и b — константы, $a<b$, то статистику $T(x)$ наз. Д. ф., а область, где $a\leqslant T(x)<b$,— зоной сомнения. Особую роль, из-за простоты применений, играют линейные Д. ф. В частном случае, когда распределения нормальны и имеют одинаковые матрицы ковариаций, Д. ф. оказывается линейной при разумных требованиях оптимальности к указанному правилу. В задачах дискриминантного анализа со многими распределениями при бейесовском подходе (см. *Бейесовский подход* к статистическим задачам) вводится понятие *дискриминантного информанта.* *Н. М. Митрофанова, А. П. Хусу.*

ДИСКРИМИНАНТНЫЙ АНАЛИЗ — раздел математич. статистики, содержанием к-рого является разработка и исследование статистич. методов решения следующей задачи различения (дискриминации): основываясь на результатах наблюдений, определить, какой из нескольких возможных совокупностей принадлежит объект, случайно извлеченный из одной из них. На практике задача различения возникает, напр., в тех случаях, когда наблюдение признака, полностью определяющего принадлежность объекта к той или иной совокупности, невозможно или требует чрезмерных затрат средств или времени; в случаях, когда информация о таком признаке утеряна, и ее нужно восстановить, а также, когда речь идет о предсказании будущих событий на основе имеющихся данных. Ситуации первого типа встречаются в медицинской практике, напр. при установлении диагноза по комплексу неспецифических проявлений заболевания. Пример ситуации второго типа — определение пола давно умершего человека по останкам, найденным при археологич. раскопках. Ситуация третьего типа возникает, напр., при статистич. прогнозе отдаленных результатов лечения. Методом Д. а. является *многомерный статистический анализ,* служащий для количественного выражения и обработки имеющейся информации в соответствии с выбранным критерием оптимальности решения.

В общем виде задача различения ставится следующим образом. Пусть результатом наблюдения над случайным объектом является реализация p-мерного случайного вектора $x'=(x_1, \ldots, x_p)$ (штрих означает транспонирование) значений p признаков объекта. Требуется установить правило, согласно к-рому по значению вектора x объект относят к одной из возможных совокупностей π_i, $i=1, \ldots, k$. Построение правила дискриминации состоит в том, что все *выборочное пространство* R значений вектора x разбивается на области R_i, $i=1, \ldots, k$, так что при попадании x в R_i объект относят к совокупности π_i. Выбор правила дискриминации среди всех возможных производится в соответствии с установленным принципом оптимальности на основе априорной информации о совокупностях π_i и вероятностях q_i извлечения объекта из π_i. При этом учитывается размер убытка от неправильной дискриминации. Априорная информация о совокупностях π_i может состоять в том, что известны функции распределения вектора признаков объекта в каждой из этих совокупностей, она может быть представлена также и в виде выборок из каждой из этих совокупностей, при этом априорные вероятности q_i совокупностей могут быть либо известны, либо нет. Очевидно, чем полнее исходная информация, тем точнее могут быть рекомендации.

Пусть рассматривается случай двух совокупностей π_1 и π_2 в ситуации, когда имеется полная исходная информация: известны функции распределения вектора признаков в каждой из совокупностей и априорные вероятности (бейесовский подход). Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — функции распределения вектора признаков соответственно в π_1 и π_2, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — плотности распределения, а $C(i|j)$, $i, j=1, 2,$ — убыток вследствие отнесения объекта из j-й совокупности к i-й. Тогда вероятности неправильной дискриминации объектов из π_1 и π_2 соответственно равны:

$$P(2 \mid 1;\ R)=\int_{R_2} p_1(x)\, dx, \quad P(1 \mid 2;\ R)=\int_{R_1} p_2(x)\, dx$$

(символом $P(i|j;\ R)$ обозначена вероятность приписывания объекта из π_j к совокупности π_i при использовании правила R), а математич. ожидание потерь, связанных с неверной дискриминацией, равно

$$C(2|1)P(2|1;\ R)q_1+C(1|2)P(1|2;\ R)q_2.$$

Естественным в рассматриваемой ситуации принципом оптимальности является принцип минимизации этой величины, к-рый приводит в этом случае к следующему разбиению пространства выборок [1]:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &: \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \geqslant \frac{C(1 \mid 2)\, q_2}{C(2 \mid 1)\, q_1}, \\ R_2 &: \frac{p_1(x)}{p_2(x)} < \frac{C(1 \mid 2)\, q_2}{C(2 \mid 1)\, q_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Если выполнены условия

$$\mathsf{P}\left\{\frac{p_1(x)}{p_2(x)}=\frac{C(1 \mid 2)\, q_2}{C(2 \mid 1)\, q_1} \,\Big|\, \pi_i\right\}=0, \qquad i=1,\ 2,$$

то такое разбиение единственно с точностью до множества нулевой вероятности. К аналогичному правилу различения в рассмотренном случае можно прийти и другими путями, напр. с помощью *Неймана — Пирсона леммы* из теории проверки статистич. гипотез.

При выбранном критерии оптимальности о качестве правила различения судят по величине математич. ожидания потерь, и из двух правил лучшим считается то, к-рое приводит к меньшему значению этой величины.

Если в задаче различения априорные вероятности q_i неизвестны, то естественно искать решение в классе допустимых правил, выбирая среди них правило, минимизирующее максимум по всем q_i математич. ожидания потерь (такое правило наз. минимаксным). Математич. ожидания потерь при условии, что наблюдения производились соответственно над объектами из π_1 или π_2, равны

$$C(2|1)P(2|1;\ R)=r(1,\ R),\ C(1|2)P(1|2;\ R)=r(2,\ R).$$

Справедливо утверждение (см. [1]): если выполнены условия

$$\mathsf{P}\left\{\frac{p_1(x)}{p_2(x)}=k \,\Big|\, \pi_i\right\}=0, \quad i=1,\ 2, \quad 0 \leqslant k \leqslant \infty,$$

то класс бейесовских методов является минимальным полным классом. Минимаксное правило R^* из этого класса получается при значении q_1, для к-рого выполнено условие $P(2|1; R^*)=P(1|2; R^*)$. В важном случае, когда P_1 и P_2 — многомерные нормальные распределения с векторами средних $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ и общей ковариационной матрицей Σ, правило дискриминации (1) принимает вид:

$$\left.\begin{array}{c} R_1: x' \sum^{-1} (\mu^{(1)}-\mu^{(2)})- \\ -\frac{1}{2} (\mu^{(1)}+\mu^{(2)})' \sum^{-1} (\mu^{(1)}-\mu^{(2)}) \geqslant \ln k, \\ R_2: x' \sum^{-1} (\mu^{(1)}-\mu^{(2)})- \\ -\frac{1}{2} (\mu^{(1)}+\mu^{(2)})' \sum^{-1} (\mu^{(1)}-\mu^{(2)}) < \ln k, \end{array}\right\} \quad (2)$$

где $k=\frac{q_2 C(1|2)}{q_1 C(2|1)}$. Если $C(1|2)=C(2|1)$ и $q_2=q_1$, то $\ln k=0$

$$\text{и } R_1: D(x)=x' \sum^{-1} (\mu^{(1)}-\mu^{(2)}) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} (\mu^{(1)}+\mu^{(2)})' \sum^{-1} (\mu^{(1)}-\mu^{(2)}). \quad (3)$$

Если априорные вероятности неизвестны, то можно выбрать $\ln k=c$, напр. из условия минимальности ошибки неверной дискриминации или из условия обращения в нуль математич. ожидания потерь от неверной дискриминации. Вообще говоря, выбор критерия оптимальности, как правило, определяется характером самой задачи. Выражение в левой части (3) наз. *дискриминантной функцией* данной задачи; ее можно толковать как поверхность в выборочном пространстве, разделяющую совокупности π_1 и π_2. В приведенном примере дискриминантная функция линейна, т. е. такая поверхность есть гиперплоскость. Если в приведенном примере матрицы ковариации неодинаковы, то дискриминантная функция будет квадратичной функцией от x. В целях упрощения вычислений найден минимальный полный класс линейных процедур различения для этого случая (см. [3]).

С точки зрения применений Д. а. наиболее важной является ситуация, когда исходная информация о распределениях представлена выборками из них. В этом случае задача дискриминации ставится следующим образом. Пусть $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}$ — выборка из совокупности π_i, $i=1, \ldots, k$; $x_j^{(i)}=(x_{j_1}^{(i)}, \ldots, x_{j_p}^{(i)})$ — вектор признаков j-го объекта выборки из i-й совокупности, и произведено дополнительное наблюдение $x'=(x_1, \ldots, x_p)$ над объектом, принадлежащим одной из совокупностей π_i. Требуется построить правило приписывания наблюдения x к одной из этих совокупностей. Первый подход к решению этой задачи в случае двух совокупностей принадлежит Р. А. Фишеру — основоположнику Д. а. [4]. Используя в задаче различения вместо вектора признаков, характеризующих объект, их линейную комбинацию — гиперплоскость, в нек-ром смысле наилучшим образом разделяющую совокупность выборочных точек,— он пришел к дискриминантной функции (3).

Наиболее изученным является случай, когда известно, что распределения векторов признаков в каждой совокупности нормальны, но нет информации о параметрах этих распределений. Здесь самым естественным является подход, состоящий в замене неизвестных параметров распределений в дискриминантной функции (3) их наилучшими оценками (см. [5], [6]). Как и в случае известных распределений, правило дискриминации можно основывать на отношении правдоподобия (см. [7], [8]).

Подавляющая часть результатов Д. а. получена в предположении нормальности распределений. Изучаются вопросы применимости оптимальных в нормальном случае методов в ситуациях, где предположение о нормальности носит лишь приближенный характер [9]. В этих работах задачи Д. а. рассматриваются в рамках общей теории решающих функций и изучаются свойства правил дискриминации по отношению к так наз. принципу Q-оптимальности, естественным образом охватывающему как бейесовский, так и минимаксный подходы. Именно, пусть $R(\xi, \delta)$ — вероятность ошибки при применении правила дискриминации δ, когда вектор априорных вероятностей есть ξ. Пусть известно, что $\xi \in Q$, где Q — некоторое множество в пространстве векторов ξ. Правило δ^* наз. Q - о п т и м а л ь н ы м, если

$$\sup_{\xi \in Q} R(\xi, \delta^*) = \inf_{\delta \in D} \sup_{\xi \in Q} R(\xi, \delta) = R_Q, \qquad (4)$$

где D — множество всех возможных правил дискриминации. Пусть известен функциональный вид $P_i(x, \lambda_i)$, зависящих от параметра распределений вектора признаков в каждой из совокупностей, $i=1, 2$, но параметр λ неизвестен и оценивается по выборке. Тогда если $P_i(x, \lambda_i)$ таковы, что существует Q-оптимальное правило $\delta^*(\lambda_1, \lambda_2)$ дискриминации для распределений $P_i(x, \lambda_i)$, $i=1, 2$, когда значение параметра $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)$ известно, и $\{\lambda_i^{(n_i)}\}$ — сильно состоятельная оценка параметра λ_i по выборке объема n_i, то при нек-рых дополнительных условиях последовательность правил $\{\delta^*(\lambda_1^{(n_1)}, \lambda_2^{(n_2)})\}$ при $n_1, n_2 \to \infty$ является асимптотически Q-оптимальной, то есть с вероятностью 1

$$\lim_{n_1, n_2 \to \infty} \sup_{\xi \in Q} R\left(\xi, \delta^*\left(\lambda_1^{(n_1)}, \lambda_2^{(n_2)}\right)\right) = R_Q, \qquad (5)$$

где риск R в левой части (5) может быть вычислен как при истинном значении параметров, так и при замене истинных значений их оценками $\lambda_i^{(n_i)}$. Если потребовать лишь состоятельности оценки, то имеет место несколько более слабое утверждение.

Непараметрич. методы дискриминации, не требующие знаний о точном функциональном виде распределений и позволяющие решать задачи дискриминации на основе малой априорной информации о совокупностях, являются особо ценными для практических применений [2], [10].

В задачах Д. а. приходится иметь дело со случайными наблюдениями как над количественными, так и над качественными признаками (возможен и смешанный случай). Между этими случаями нет принципиальной разницы. Если признаки качественные, то вводится понятие многомерного состояния объекта и рассматривается распределение по нему. От природы наблюдений зависит способ оценки функции распределений вектора признаков. В соответствующих ситуациях снова применимы бейесовский и минимаксный подходы и можно строить процедуру различения, основываясь на отношении правдоподобия. Иногда целесообразно переходить от количественных величин к качественным путем разбиения функции частот, и наоборот, от качественных к количественным, вводя фиктивные переменные, преобразующие качественную информацию в количественную. При этом, разумеется, нужно исследовать вопрос о том, не происходит ли существенного ухудшения качества правила.

Выше рассматривались задачи Д. а. при фиксированной размерности пространства значений вектора признаков. Однако практич. ситуации чаще всего таковы, что выбор размерности осуществляется исследователем. На первый взгляд кажется, что добавление каждого нового признака в дискриминантной функции по крайней мере не ухудшит ее качества. Однако многие факторы могут при этом вести к потере эффективности различения (достаточно вспомнить, что вместо истинных значений параметров распределений часто используются их оценки). К тому же увеличение числа признаков ведет к быстрому возрастанию трудностей счета. Имеется много рекомендаций для выбора признаков, диктуемых часто здравым смыслом. Теоретически наиболее обоснованным методом выбора признаков является метод, основанный на вычислении расстояния Махаланобиса между двумя распределениями [11]. Особый интерес представляют последовательные методы выбора признаков.

Долгое время задачи отнесения объекта к одной из нескольких возможных совокупностей носили общее название задач классификации. Здесь приведена терминология Кендалла [2], разделившего все задачи, связанные с выбором одной из нескольких равноправных возможностей на три класса. Он назвал задачи рассматриваемого здесь вида задачами различения (дискриминации), оставив термин «классификация» для задач разбиения данной выборки или всей совокупности на группы, по возможности однородные. Если в задачах различения существование групп оговорено в условиях, то здесь это — предмет исследования. Выше были рассмотрены задачи различения, когда исследуемый объект есть результат случайного выбора из нек-рого конечномерного распределения. Возможна более общая ситуация, когда исследуемый объект представляет собой реализацию нек-рого случайного процесса с непрерывным временем.

Д. а. тесно связан также с теорией *распознавания образов*.

Лит.: [1] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Kendall M. G., Stuart A., The advanced theory of statistics, v. 3, L., 1966; [3] Anderson T. W., Bahadur R. R., «Ann. Math. Statistics», 1962, v. 33, № 2, p. 420—31; [4] Fischer R. A., «Ann. Eugenics», 1936, v. 7, № 11, p. 179—188; [5] Wald A., «Ann. Math. Statistics», 1944, v. 15, № 2, p. 145—62; [6] John S., «Sankhya», 1960, v. 22, pt. 3—4, p. 301—16; [7] Welch B. L., «Biometrika», 1939, v. 31, pt. 1—2, p. 218—220; [8] Gupta S. D., «Ann. Math. Statistics», 1965, v. 36, № 4, p. 1174—84; [9] Bunke O., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1967, Bd 7, № 2, S. 131—46; [10] Ryzin J. van, «Sankhya», ser. A, 1966, v. 28, pt. 2—3, p. 261—70; [11] Kudô A., «Memoirs of the Faculty of Science. Kyushu Univ.», ser. A, 1963, v. 17, № 1, p. 63—75; [12] Урбах В. Ю., в сб.: Статистические методы классификации, в. 1, М., 1969, с. 79—173 (лит.). *Н. М. Митрофанова, А. П. Хусу.*

ДИСКРИМИНАНТНЫЙ ИНФОРМАНТ — термин *дискриминантного анализа*, означающий величину, служащую для построения правила приписывания объекта с измерениями $x=(x_1, \ldots, x_p)$, извлеченного из смеси k совокупностей с плотностями распределений $p_1(x), \ldots, p_k(x)$ и априорными вероятностями $q_1, \ldots, q_k$, к одной из этих совокупностей. При этом i-й Д. и. объекта с измерениями x определяется как

$$S_i=-[q_1p_1(x)r_{1i}+\ldots+q_kp_k(x)r_{ki}], \quad i=1, \ldots, k,$$

где r_{ij} — убыток, обусловленный отнесением объекта из i-го распределения к j-му. Правило, состоящее в отнесении объекта к распределению с наибольшим значением Д. и., имеет минимальное математич. ожидание потерь. В частности, если все k распределений нормальны и имеют одинаковые матрицы ковараций, то все Д. и. линейны. Тогда в случае $k=2$ разность S_1-S_2 есть линейная *дискриминантная функция* Фишера.

Лит.: [1] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968.

Н. М. Митрофанова, А. П. Хусу.

ДИСКРИМИНАНТНЫЙ ТЕНЗОР — кососимметрический тензор $\varepsilon_{i_1, \ldots, i_n}$ в n-мерном аффинном пространстве, (единственный) коэффициент внешней n-формы, или монома максимального порядка.

ДИСПЕРСИИ ТОЧКА — точка топологич. пространства, в дополнении к к-рой нет неодноточечных связных множеств. *А. А. Мальцев.*

ДИСПЕРСИОННОЕ ОТНОШЕНИЕ — см. *Дисперсионный анализ.*

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ — соотношение, связывающее нек-рые величины, характеризующие рассеяние частиц, с величинами, характеризующими их поглощение. Более точно, Д. с.— это соотношение, связывающее эрмитову часть амплитуды рассеяния (в более общем случае — *Грина функции*) с определенного рода интегралами от ее антиэрмитовой части. Пусть функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на оси и удовлетворяет условию причинности $f(t)=0$, $t<0$. Тогда ее преобразование Фурье — Лапласа

$$\tilde{f}(\zeta)=\int f(t)\,e^{i\zeta t}dt, \quad \zeta=p+iq,$$

есть голоморфная функция в верхней полуплоскости $q>0$, а действительная и мнимая части граничного значения $\tilde{f}(p)$ удовлетворяют Д. с.

$$\operatorname{Re}\tilde{f}(p)=\frac{1}{\pi}\,v_p\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\tilde{f}(p')\,dp'}{p'-p}. \qquad (*)$$

При описании реальных физич. процессов Д. с. типа (*) усложняются, так как функция $\tilde{f}(\zeta)$ может расти на ∞ как многочлен (в этом случае получают Д. с. с вычитаниями), граничное значение $\tilde{f}(p)$ может быть обобщенной функцией медленного роста, а число переменных — больше одного (многомерные Д. с.).

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958; [2] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976.

В. С. Владимиров.

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, связывающее частоту колебаний ω и *волновой вектор* $\boldsymbol{k}$ плоской волны, зависящей от времени и координат по закону

$$\exp\{i(\omega t-\boldsymbol{kr})\}.$$

Д. у. выводится из уравнений, описывающих рассматриваемый процесс, и определяет дисперсию волн (см., напр., случай электродинамич. процессов в [1], [2]). В зависимости от характера задачи оно может быть использовано для определения частот колебаний по волновому вектору $\omega_n=\omega_n(\boldsymbol{k})$ или величин волновых векторов по их направлению и частоте колебаний.

Первый случай тесно связан с решением задачи Коши и исследованием устойчивости положения равновесия, соответствующего тривиальному решению уравнений рассматриваемого волнового процесса. С помощью разложения начальных условий в интеграл Фурье решение задачи Коши может быть записано в виде суперпозиции плоских волн с частотами $\omega_n(\boldsymbol{k})$. Если при нек-ром действительном $\boldsymbol{k}$ среди этих частот имеется хотя бы одна с отрицательной мнимой частью, то это означает существование ограниченных начальных возмущений, к-рым соответствуют экспоненциально нарастающие решения, т. е. неустойчивость.

Второй случай решения Д. у. связан с задачами возбуждения монохроматич. колебаний внешними источниками, гармонически зависящими от времени.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, М., 1957; [2] Силин В. П., Рухадзе А. А., Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., 1961.

Д. П. Костомаров.

ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ в математической статистике — статистический метод, предназначенный для выявления влияния отдельных факторов на результат эксперимента, а также для последующего планирования аналогичных экспериментов. Первоначально Д. а. был предложен Р. Фишером [1] для обработки результатов агрономич. опытов по выявлению условий, при к-рых испытываемый сорт сельскохозяйственной культуры дает максимальный урожай. Современные приложения Д. а. охватывают широкий круг задач экономики, социологии, биологии и техники и трактуются обычно в терминах статистич. теории выявления систематич. различий между результатами непосредственных измерений, выполненных при тех или иных меняющихся условиях.

Если значения неизвестных постоянных $a_1, \ldots, a_I$ могут быть измерены с помощью различных методов или измерительных средств $M_1, \ldots, M_J$, и в каждом случае систематич. ошибка b_{ij} может, вообще говоря, зависеть как от выбранного метода M_j, так и от неизвестного измеряемого значения a_i, то результаты таких измерений представляют собой суммы вида

$$x_{ijk} = a_i + b_{ij} + y_{ijk},$$
$$i = 1, \ldots, I; \quad j = 1, \ldots, J, \quad k = 1, \ldots, K,$$

где K — количество независимых измерений неизвестной величины a_i методом M_j, а y_{ijk} — случайная ошибка k-го измерения величины a_i методом M_j (предполагается, что все y_{ijk} — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие нулевое математич. ожидание: $\mathsf{E}y_{ijk}=0$). Такая линейная модель наз. двухфакторной схемой Д. а.; первый фактор — истинное значение измеряемой величины, второй — метод измерения, причем в данном случае для каждой возможной комбинации значений первого и второго факторов осуществляется одинаковое количество K независимых измерений (это допущение для целей Д. а. не является существенным и введено здесь лишь ради простоты изложения).

Примером подобной ситуации могут служить спортивные соревнования I спортсменов, мастерство к-рых оценивается J судьями, причем каждый участник соревнований выступает K раз (имеет K «попыток»). В этом случае a_i — истинное значение показателя мастерства спортсмена с номером i, b_{ij} — систематич. ошибка, вносимая в оценку мастерства i-го спортсмена судьей с номером j, x_{ijk} — оценка, выставленная j-м судьей i-му спортсмену после выполнений последним k-й попытки, а y_{ijk} — соответствующая случайная погрешность. Подобная схема типична для так наз. субъективной экспертизы качества нескольких объектов, осуществляемой группой независимых экспертов. Другой пример — статистич. исследование урожайности сельскохозяйственной культуры в зависимости от одного из I сортов почвы и J методов ее обработки, причем для каждого сорта i почвы и каждого метода обработки с номером j осуществляется k независимых экспериментов (в этом примере b_{ij} — истинное значение урожайности для i-го сорта почвы при j-м способе обработки, x_{ijk} — соответствующая экспериментально наблюдаемая урожайность в k-м опыте, а y_{ijk} — ее случайная ошибка, возникающая из-за тех или иных случайных причин; что же касается величин a_i, то в агрономич. опытах их разумно считать равными нулю).

Положим $c_{ij}=a_i+b_{ij}$, и пусть c_{i*}, c_{*j} и c_{**} — результаты осреднений c_{ij} по соответствующим индексам, т. е.

$$c_{i*} = \frac{1}{J} \sum\nolimits_j c_{ij}, \qquad c_{*j} = \frac{1}{I} \sum\nolimits_i c_{ij},$$

$$c_{**} = \frac{1}{IJ} \sum\nolimits_{ij} c_{ij} = \frac{1}{I} \sum\nolimits_i c_{i*} = \frac{1}{J} \sum\nolimits_j c_{*j}.$$

Пусть, кроме того, $\alpha=c_{**}$, $\beta_i=c_{i*}-c_{**}$, $\gamma_j=c_{*j}-c_{**}$ и $\delta_{ij}=c_{ij}-c_{i*}-c_{*j}+c_{**}$. Идея Д. а. основана на очевидном тождестве

$$c_{ij} = \alpha + \beta_i + \gamma_j + \delta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, I, \quad j = 1, \ldots, J. \quad (1)$$

Если символом (c_{ij}) обозначить вектор размерности IJ, получаемый из матрицы $\|c_{ij}\|$ порядка $I \times J$ с помощью какого-либо заранее фиксированного способа упорядочивания ее элементов, то (1) можно записать в виде равенства

$$(c_{ij}) = (\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) + (\gamma_{ij}) + (\delta_{ij}), \qquad (2)$$

где все векторы имеют размерность IJ, причем $\alpha_{ij}=\alpha$, $\beta_{ij}=\beta_i$, $\gamma_{ij}=\gamma_j$. Так как четыре вектора в правой части (2) ортогональны, то $\alpha_{ij}=\alpha$ — наилучшее приближение функции c_{ij} от аргументов i и j постоянной величиной [в смысле минимальности суммы квадратов отклонений $\sum_{ij}(c_{ij}-\alpha)^2$]. В том же смысле $\alpha_{ij}+\beta_{ij}=\alpha+\beta_i$ — наилучшее приближение c_{ij} функцией, зависящей лишь от i, $\alpha_{ij}+\gamma_{ij}=\alpha+\gamma_j$ — наилучшее приближение c_{ij} функцией, зависящей лишь от j, а $\alpha_{ij}+\beta_{ij}+\gamma_{ij}=\alpha+\beta_i+\gamma_j$ — наилучшее приближение c_{ij} суммой функций, из к-рых одна (напр., $\alpha+\beta_i$) зависит лишь от i, а другая — лишь от j. Этот факт, установленный Р. Фишером (см. [1]) в 1918, позднее послужил основой теории квадратичных приближений функций.

В примере, связанном со спортивными соревнованиями, функция δ_{ij} выражает «взаимодействие» i-го спортсмена и j-го судьи (положительное значение δ_{ij} означает «подсуживание», т. е. систематич. завышение j-м судьей оценки мастерства i-го спортсмена, а отрицательное значение δ_{ij} означает «засуживание», т. е. систематич. снижение оценки). Равенство всех δ_{ij} нулю — необходимое требование, к-рое надлежит предъявлять к работе группы экспертов. В случае же агрономич. опытов такое равенство рассматривается как гипотеза, подлежащая проверке по результатам экспериментов, поскольку основная цель здесь — отыскание таких значений i и j, при к-рых функция (1) достигает максимального значения. Если эта гипотеза верна, то

$$\max c_{ij}=\alpha+\max\beta_i+\max\gamma_j,$$

и значит, выявление наилучших «почвы» и «обработки» может быть осуществлено раздельно, что приводит к существенному сокращению числа экспериментов (напр., можно при каком-либо одном способе обработки испытать все I сортов «почвы» и определить наилучший сорт, а затем на этом сорте опробовать все J способов «обработки» и найти наилучший способ; общее количество экспериментов с повторениями будет равно $(I+J)K$). Если же гипотеза $\{\text{все }\delta_{ij}=0\}$ неверна, то для определения $\max c_{ij}$ необходим описанный выше «полный план», требующий при K повторениях IJK экспериментов.

В ситуации спортивных соревнований функция $\gamma_{ij}=\gamma_j$ может трактоваться как систематич. ошибка, допускаемая j-м судьей по отношению ко всем спортсменам. В конечном счете γ_j — характеристика «строгости» или «либеральности» j-го судьи. В идеале хотелось бы, чтобы все γ_j были нулевыми, но в реальных условиях приходится мириться с наличием ненулевых значений γ_j и учитывать это обстоятельство при подведении итогов экспертизы (напр., за основу сравнения мастерства спортсменов можно принять не последовательности истинных значений $\alpha+\beta_1+\gamma_j, \ldots, \alpha+\beta_I+\gamma_j$, а лишь результаты упорядочиваний этих чисел по их величине, поскольку при всех $j=1, \ldots, J$ такие упорядочивания будут одинаковыми). Наконец, сумма двух оставшихся функций $\alpha_{ij}+\beta_{ij}=\alpha+\beta_i$ зависит лишь от i и поэтому может быть использована для характеризации мастерства i-го спортсмена. Однако здесь нужно помнить, что $\alpha+\beta_i=a_i+b_{i*}\neq a_i$. Поэтому упорядочивание всех спортсменов по значениям $\alpha+\beta_i$ (или по $\alpha+\beta_i+\gamma_j$ при каждом фиксированном j) может не совпадать с упорядочиванием по значениям a_i. При практической обработке экспертных оценок этим обстоятельством приходится пренебрегать, так как упомянутый полный план экспериментов не позволяет оценивать отдельно a_i и b_{i*}. Таким образом, число $\alpha+\beta_i=a_i+b_{i*}$ характеризует не только мастерство i-го спортсмена, но и в той или иной мере отношение экспертов к этому мастерству. Поэтому, напр., результаты субъективных экспертных оценок, осуществленных в разное время (в частности, на нескольких Олимпийских играх), едва ли можно считать сопоставимыми. В случае же агрономич. опытов подобные трудности не возникают, поскольку все $a_i=0$ и значит, $\alpha+\beta_i=b_{i*}$.

Истинные значения функций α, β_i, γ_j и δ_{ij} неизвестны и выражаются в терминах неизвестных функций c_{ij}. Поэтому первый этап Д. а. заключается в отыскании статистич. оценок для c_{ij} по результатам наблюдений x_{ijk}. Несмещенная и имеющая минимальную дисперсию линейная оценка для c_{ij} выражается формулой

$$\hat{c}_{ij}=x_{ij*}=\frac{1}{K}\sum\nolimits_k X_{ijk}.$$

Так как α, β_i, γ_j и δ_{ij} — линейные функции от элементов матрицы $\|c_{ij}\|$, то несмещенные линейные оценки для этих функций, имеющие минимальную дисперсию, получаются в результате замены аргументов c_{ij} соответствующими оценками, $\hat{c}_{ij}$, т. е.

$$\hat{\alpha}=x_{***},\quad \hat{\beta}_i=x_{i**}-x_{***},\quad \hat{\gamma}_j=x_{*j*}-x_{***},$$
$$\hat{\delta}_{ij}=x_{ij*}-x_{i**}-x_{*j*}+x_{***},$$

причем случайные векторы $(\hat{\alpha}_{ij})$, $(\hat{\beta}_{ij})$, $(\hat{\gamma}_{ij})$ и $(\hat{\delta}_{ij})$, определенные так же, как введенные выше (α_{ij}), (β_{ij}), (γ_{ij}) и (δ_{ij}), обладают свойством ортогональности, и значит, они представляют собой некоррелированные случайные векторы (иными словами, любые две компоненты, принадлежащие разным векторам, имеют нулевой коэффициент корреляции). Кроме того, любая разность вида

$$x_{ijk}-x_{ij*}=x_{ijk}-\hat{c}_{ij}$$

некоррелирована с любой из компонент этих четырех векторов. Рассмотрим пять совокупностей случайных величин $\{x_{ijk}\}$, $\{x_{ijk}-x_{ij*}\}$, $\{\hat{\beta}_i\}$, $\{\hat{\gamma}_j\}$ и $\{\hat{\delta}_{ij}\}$. Так как

$$x_{ijk}-x_{ij*}=y_{ijk}-y_{ij*},\quad \hat{\beta}_i=\beta_i+(y_{i**}-y_{***}),$$
$$\hat{\gamma}_j=\gamma_j+(y_{*j*}-y_{***}),$$
$$\hat{\delta}_{ij}=\delta_{ij}+(y_{ij*}-y_{i**}-y_{*j*}+y_{***}),$$

то дисперсии эмпирич. распределений, соответствующих указанным совокупностям, выражаются формулами

$$S^2=\frac{1}{IJK}\sum\nolimits_{ijk}(x_{ijk}-x_{***})^2,$$

$$S_0^2=\frac{1}{IJK}\sum\nolimits_{ijk}(x_{ijk}-x_{ij*})^2=\frac{1}{IJK}\sum\nolimits_{ijk}(y_{ijk}-y_{ij*})^2,$$

$$S_1^2=\frac{1}{I}\sum\nolimits_i\hat{\beta}_i^2=\frac{1}{I}\sum\nolimits_i[\beta_i+(y_{i**}-y_{***})]^2,$$

$$S_2^2=\frac{1}{J}\sum\nolimits_j\hat{\gamma}_j^2=\frac{1}{J}\sum\nolimits_j[\gamma_j+(y_{*j*}-y_{***})]^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{IJ}\sum\nolimits_{ij}\hat{\delta}_{ij}^2=\frac{1}{IJ}\sum\nolimits_{ij}[\delta_{ij}+(y_{ij*}-y_{i**}-y_{*j*}+y_{***})]^2.$$

Эти эмпирич. дисперсии представляют собой суммы квадратов случайных величин, любые две из к-рых некоррелированы, если только они принадлежат разным суммам; при этом относительно всех y_{ijk} справедливо тождество

$$S^2=S_0^2+S_1^2+S_2^2+S_3^2,$$

объясняющее происхождение термина «Д. а.».

Пусть I, J, $K\geqslant 2$ и пусть

$$s_0^2=\frac{K}{K-1}S_0^2,\quad s_1^2=\frac{IJK}{I-1}S_1^2,\quad s_2^2=\frac{IJK}{J-1}S_2^2,$$

$$s_3^2=\frac{IJK}{(I-1)(J-1)}S_3^2,$$

в таком случае

$$\mathsf{E}s_0^2=\sigma^2,\quad \mathsf{E}s_1^2=\sigma^2+\frac{JK}{I-1}\sum\nolimits_i\beta_i^2,\quad \mathsf{E}s_2^2=\sigma^2+\frac{IK}{J-1}\sum\nolimits_j\gamma_j^2,$$

$$\mathsf{E}s_3^2=\sigma^2+\frac{K}{(I-1)(J-1)}\sum\nolimits_{ij}\delta_{ij}^2,$$

где σ^2 — дисперсия случайных ошибок y_{ijk}.

На основе этих формул и строится второй этап Д. а., посвященный выявлению влияния первого и второго факторов на результаты эксперимента (в агрономич. опытах первый фактор — сорт «почвы», второй — способ «обработки»). Напр., если требуется проверить гипотезу отсутствия «взаимодействия» факторов, к-рая выражается равенством $\sum_{ij}\delta_{ij}^2=0$, то разумно вычислить **дисперсионное отношение** $s_3^2/s_0^2=F_3$. Если это отношение значимо отличается от единицы, то проверяемая гипотеза отвергается. Точно так же для проверки гипотезы $\sum_j \gamma_j^2=0$ полезно отношение $s_2^2/s_0^2=F_2$, к-рое надлежит также сравнить с единицей; если при этом известно, что $\sum_{ij}\delta_{ij}^2=0$, то вместо F_2 целесообразно сравнить с единицей отношение

$$\frac{(IJK-I-J-1)\ s_2^2}{IJ\ (K-1)\ s_0^2+(I-1)\ (J-1)\ s_3^2}=F_2^*.$$

Аналогичным образом можно построить статистику, позволяющую дать заключение о справедливости или ложности гипотезы $\sum_i \beta_i^2=0$.

Точный смысл понятия значимого отличия указанных отношений от единицы может быть определен лишь с учетом закона распределения случайных ошибок y_{ijk}. В Д. а. наиболее обстоятельно изучена ситуация, в к-рой все y_{ijk} распределены нормально. В этом случае $(\hat{\alpha}_{ij})$, $(\hat{\beta}_{ij})$, $(\hat{\gamma}_{ij})$, $(\hat{\delta}_{ij})$ — независимые случайные векторы, а s_0^2, s_1^2, s_2^2, s_3^2 — независимые случайные величины, причем отношения

$$IJ\,(K-1)\,\frac{s_0^2}{\sigma^2}\,,\quad (I-1)\,\frac{s_1^2}{\sigma^2}\,,\quad (J-1)\frac{s_2^2}{\sigma^2}\,,$$
$$(I-1)\,(J-1)\,\frac{s_3^2}{\sigma^2}$$

подчиняются нецентральным распределениям хи-квадрат с f_m степенями свободы и параметрами нецентральности λ_m, $m=0,\ 1,\ 2,\ 3$, где

$$f_0=IJ\ (K-1),\ f_1=I-1,\ f_2=J-1,\ f_3=(I-1)\ (J-1);$$
$$\lambda_0=0,\quad \lambda_1=JK\sum_i \beta_i^2/\sigma^2,\quad \lambda_2=IK\sum_j \gamma_j^2/\sigma^2,$$
$$\lambda_3=K\sum_{ij}\delta_{ij}^2/\sigma^2.$$

Если параметр нецентральности равен нулю, то нецентральное распределение хи-квадрат совпадает с обычным распределением хи-квадрат. Поэтому в случае справедливости гипотезы $\lambda_3=0$ отношение $s_3^2/s_0^2=F_3$ подчиняется F-распределению (распределению дисперсионного отношения) с параметрами f_3 и f_0. Пусть x — такое число, для к-рого вероятность события $\{F_3>x\}$ равна заданному значению ε, называемому **уровнем значимости** (таблицы функции $x=x(\varepsilon;\ f_3,\ f_0)$ имеются в большинстве пособий по математич. статистике). Критерием для проверки гипотезы $\lambda_3=0$ служит правило, согласно к-рому эта гипотеза отвергается, если наблюдаемое значение F_3 превышает x; в противном случае гипотеза считается не противоречащей результатам наблюдений. Аналогичным образом конструируются критерии, основанные на статистиках F_2 и F_2^*.

Дальнейшие этапы Д. а. существенно зависят не только от реального содержания конкретной задачи, но также и от результатов статистич. проверки гипотез на втором этапе. Напр., в условиях агрономич. опытов справедливость гипотезы $\lambda_3=0$, как указано выше, позволяет более экономно спланировать аналогичные дальнейшие эксперименты (если помимо гипотезы $\lambda_3=0$ справедлива также и гипотеза $\lambda_2=0$, то это означает, что урожайность зависит лишь от сорта «почвы», и поэтому в дальнейших опытах можно воспользоваться схемой однофакторного Д. а.); если же гипотеза $\lambda_3=0$ отвергается, то разумно проверить, нет ли в данной задаче неучтенного третьего фактора? Если сорта «почвы» и способы ее «обработки» варьировались не в одном и том же месте, а в различных географич. зонах, то таким фактором могут быть климатич. или географич. условия, и «обработка» наблюдений потребует применения трехфакторного Д. а.

В случае экспертных оценок статистически подтвержденная справедливость гипотезы $\lambda_3=0$ дает основание для упорядочивания сравниваемых объектов (напр., спортсменов) по значениям величин $\hat{\alpha}+\hat{\beta}_i$, $i=1, \ldots, I$. Если же гипотеза $\lambda_3=0$ отвергается (в задаче о спортивных соревнованиях это означает статистич. обнаружение «взаимодействия» нек-рых спортсменов и судей), то естественно попытаться перевычислить все результаты заново, предварительно исключив из рассмотрения x_{ijk} с такими парами индексов (i, j), для к-рых абсолютные значения статистич. оценок δ_{ij} превышают нек-рый заранее установленный допустимый уровень. Это означает, что из матрицы $\|x_{ij*}\|$ вычеркиваются нек-рые элементы, и значит, план Д. а. становится неполным.

Модели современного Д. а. охватывают широкий круг реальных экспериментальных схем (напр., схемы неполных планов, со случайно или неслучайно отобранными элементами x_{ij*}). Соответствующие этим схемам статистич. выводы во многих случаях находятся в стадии разработки. В частности, еще (к 1978) далеки от окончательного решения те задачи, в к-рых результаты наблюдений $x_{ijk}=c_{ij}+y_{ijk}$ не являются одинаково распределенными случайными величинами; еще более трудная задача возникает в случае зависимости величин x_{ijk}. Неизвестно решение проблемы выбора факторов (даже в линейном случае). Суть этой проблемы заключается в следующем: пусть $c=c(u, v)$ — непрерывная функция и пусть $u=u(z, w)$ и $v=v(z, w)$ — какие-либо линейные функции от переменных z и w. Фиксируя значения $z_1, \ldots, z_I$ и $w_1, \ldots, w_J$, можно при каждом заданном выборе линейных функций u и v определить c_{ij} формулой

$$c_{ij}=c\,[u\,(z_i, w_j), \quad v\,(z_i, w_j)]$$

и построить Д. а. этих величин по результатам соответствующих наблюдений x_{ijk}. Проблема заключается в отыскании таких линейных функций u и v, к-рым соответствует минимальное значение суммы квадратов $\sum_{ij}\delta_{ij}^2$, где

$$\delta_{ij}=c_{ij}-c_{i*}-c_{*j}+c_{**}$$

(предполагается, что функция $c(u, v)$ неизвестна). В терминах Д. а. эта проблема сводится к статистич. отысканию таких факторов $z=z(u, v)$ и $w=w(u, v)$, к-рым соответствует «наименьшее взаимодействие».

Лит.: [1] Fisher R. A., Statistical methods for research workers, Edinburgh, 1925; [2] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, пер. с англ., М., 1956; [4] Снедекор Дж. У., Статистические методы в применении к исследованиям в сельском хозяйстве и биологии, пер. с англ., М., 1961. *Л. Н. Большев.*

ДИСПЕРСИОННЫЙ МЕТОД в теории чисел — метод для решения нек-рых бинарных уравнений (бинарных *аддитивных проблем*) вида

$$\alpha+\beta=n, \tag{1}$$

где α и β принадлежат к достаточно густым и хорошо распределенным в арифметич. прогрессиях последовательностям натуральных чисел.

Д. м., разработанный Ю. В. Линником в 1958—61 и поэтому называемый также дисперсионным методом Линника, соединяет в себе элементарные теоретико-вероятностные понятия (в частности, понятие дисперсии и неравенства типа Чебышева) с аналитич. и алгебраич. идеями И. М. Виноградова и А. Вейля (A. Weil). Сущность Д. м. состоит в следующем (см. также *Аддитивная теория чисел*).

Уравнение (1) сводится к уравнениям вида

$$\nu D'+\beta=n; \tag{2}$$

здесь ν, D' независимо пробегают нек-рые значения из прямоугольной области $\nu\in(\nu)$, $D'\in(D)$, где (ν) и (D) — некоторые интервалы; при этом числа ν — простые, а на D' могут быть наложены различные дополнительные условия. Пусть через F обозначено число решений этого уравнения.

Пусть теперь имеется уравнение

$$\nu D+\beta=n$$

при произвольном $D\in(D)$, и через $A(n, D)$ обозначено число его решений, найденных из каких-либо эвристических соображений. Тогда (гипотетически) число ожидаемых решений уравнения (2) записывается в виде

$$S=\sum\nolimits_{D'\in(D)} A(n, D').$$

Оценка разности $F-S=V$ имеет вид

$$V=\sum\nolimits_{D'\in(D)}\left(\sum\nolimits_{\nu D'+\beta=n} 1-A(n, D')\right). \tag{3}$$

Применение неравенства Коши приводит к неравенству

$$V^2\leqslant D_0V', \tag{4}$$

где D_0 — длина интервала (D), а

$$V'=\sum\nolimits_{D'\in(D)}\left(\sum\nolimits_{\nu D'+\beta=n} 1-A(n, D')\right)^2 \tag{5}$$

есть дисперсия числа решений уравнения (2).

Если распространить суммирование в (5) на все $D\in\in(D)$, то будут сняты все дополнительные условия, наложенные на D' в (2). В то же время величина дисперсии может только возрасти. Поэтому

$$V'\leqslant\sum\nolimits_{D\in(D)}\left(\sum\nolimits_{\nu D+\beta=n} 1-A(n, D)\right)^2= \\ =\Sigma_1-2\,\Sigma_2+\Sigma_3.$$

Суммы Σ_1, Σ_2 и Σ_3 в нек-рых случаях удается вычислить асимптотически. Главную трудность представляет вычисление Σ_1 — основной суммы Д. м. Асимптотич. расчет суммы Σ_1 осуществляется при помощи *Виноградова метода* по подсчету для нек-рых функций количества их дробных частей, попадающих в заданный сегмент, а также с использованием новейших оценок тригонометрич. сумм, полученных средствами алгебраич. геометрии. Асимптотика для сумм Σ_2 и Σ_3 находится путем элементарного суммирования. Если, в результате, дисперсия оказывается не слишком большой, то из (3) и (4) получается асимптотика для числа решений уравнения (2).

Объединение числа решений всех уравнений вида (2) приводит к асимптотич. формуле для числа решений уравнения (1).

Рассмотренная схема Д. м. применима и для решения уравнений вида

$$\alpha-\beta=l,$$

где l — заданное целое число, отличное от нуля.

При помощи этого метода Ю. В. Линником и др. (см. [3]) был решен ряд классических бинарных аддитивных проблем, к-рые до создания Д. м. могли быть решены только на основе эвристических или гипотетических соображений. К числу таких проблем относятся: *аддитивная проблема делителей* ($\alpha=x_1, x_2\ldots x_k$, $k=\text{const}$, $\beta=xy$); *Титчмарша проблема* делителей ($\alpha=p$ — простое, $\beta=xy$); *Харди — Литлвуда проблема* ($\alpha=p$ — простое, $\beta=x^2+y^2$).

При помощи Д. м. решены также нек-рые аналоги и обобщения этих проблем, в частности найдена асимптотика для числа решений общего уравнения Харди — Литлвуда:

$$p+\varphi(\xi, \eta)=n,$$

где p — простое, а $\varphi(\xi, \eta)$ — заданная примитивная положительно определенная квадратичная форма. Доказано существование бесконечного множества простых чисел вида

$$p=\varphi(\xi, \eta)+l,$$

где $l \neq 0$ — любое фиксированное целое число.

Область применения Д. м. пересекается с областью применения метода *большого решета* Ю. В. Линника.

Лит.: [1] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [2] Приложение 1 в кн.: Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [3] Бредихин Б. М., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 2, с. 89—130; [4] Бредихин Б. М., Линник Ю. В., в сб.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, с. 5—22. *Б. М. Бредихин.*

ДИСПЕРСИЯ в теории вероятностей — мера $\mathsf{D}X$ отклонения случайной величины X от ее математич. ожидания $\mathsf{E}X$, определяемая равенством:

$$\mathsf{D}X=\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^2. \tag{1}$$

Свойства Д.:

$$\mathsf{D}X=\mathsf{E}X^2-(\mathsf{E}X)^2;$$

если c — действительное число, то

$$\mathsf{D}(cX)=c^2\mathsf{D}X,$$

в частности $\mathsf{D}(-X)=\mathsf{D}(X)$.

Когда говорят о Д. случайной величины X, всегда предполагают, что существует математич. ожидание $\mathsf{E}X$; при этом Д. $\mathsf{D}X$ может существовать (т. е. быть конечной) или не существовать (т. е. быть бесконечной). В современной теории вероятностей математич. ожидание случайной величины определяется через интеграл Лебега по пространству элементарных событий. Однако важную роль играют формулы, выражающие математич. ожидание различных функций от случайной величины X через распределение этой случайной величины на множестве действительных чисел (см. *Математическое ожидание*). Для Д. $\mathsf{D}X$ эти формулы имеют вид:

$$\text{а) } \mathsf{D}X=\sum_i (a_i-\mathsf{E}X)^2 p_i$$

для дискретной случайной величины X, принимающей не более чем счетное число различных значений a_i с вероятностями $p_i=\mathsf{P}\{X=a_i\}$;

$$\text{б) } \mathsf{D}X=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathsf{E}X)^2\, p(x)\, dx$$

для случайной величины X, имеющей плотность распределения вероятностей $p(x)$;

$$\text{в) } \mathsf{D}X=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathsf{E}X)^2\, dF(x)$$

в общем случае, где $F(x)$ — функция распределения случайной величины X и интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса или Римана — Стилтьеса.

Д. не является единственной мыслимой мерой отклонения случайной величины от ее математич. ожидания. Возможны другие меры отклонения, устроенные по тому же принципу, напр. $\mathsf{E}|X-\mathsf{E}X|$, $\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^4$ и т. д., а также меры отклонения, основанные на *квантилях.* Особая важность Д. объясняется главным образом той ролью, к-рую играет это понятие для *предельных теорем.* Грубо говоря, оказывается, что если знать математич. ожидание и Д. суммы большого числа случайных величин, то можно полностью определить закон распределения этой суммы: он оказывается нормальным (приблизительно) с соответствующими параметрами (см. *Нормальное распределение*).

Таким образом, важнейшие свойства Д. связаны с выражением для Д. $\mathsf{D}(X_1+\ldots+X_n)$ суммы случайных величин $X_1, \ldots, X_n$:

$$\mathsf{D}(X_1+\ldots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{D}X_i+2\sum_{i<j}\operatorname{cov}(X_i, X_j),$$

где

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j)=\mathsf{E}\{(X_i-\mathsf{E}X_i)(X_j-\mathsf{E}X_j)\}$$

обозначает *ковариацию* случайных величин X_i и X_j. Если случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ попарно независимы, то $\operatorname{cov}(X_i, X_j)=0$. Поэтому для попарно независимых случайных величин

$$\mathsf{D}(X_1+\ldots+X_n)=\mathsf{D}X_1+\ldots+\mathsf{D}X_n. \qquad (2)$$

Обратное утверждение неверно: из (2) не следует независимость. Однако, как правило, применение формулы (2) базируется на независимости случайных величин. Строго говоря, для справедливости (2) достаточно лишь, чтобы $\operatorname{cov}(X_i, X_j)=0$, т. е. чтобы случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ были попарно некоррелированы.

Применения понятия Д. развиваются по следующим двум направлениям. Во-первых, применения в области предельных теорем теории вероятностей. Если последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ обладает тем свойством, что $\mathsf{D}X_n \to 0$ при $n\to\infty$, то для любого $\varepsilon>0$ при $n\to\infty$

$$\mathsf{P}\{|X_n-\mathsf{E}X_n|>\varepsilon\}\to 0$$

(см. *Чебышева неравенство*), т. е. практически при больших n случайная величина X_n совпадает с неслучайной величиной $\mathsf{E}X_n$. Развитие этих соображений приводит к доказательству закона больших чисел (см. *Больших чисел закон*), к доказательству состоятельности оценок (см. *Состоятельная оценка*) в математич. статистике, а также к иным применениям, в к-рых устанавливается сходимость по вероятности случайных величин. Другое применение в области предельных теорем связано с понятием нормировки. Нормировка случайной величины X производится путем вычитания математич. ожидания и деления на среднее квадратичное отклонение $\sqrt{\mathsf{D}X}$, иными словами, рассматривается величина $Y=(X-\mathsf{E}X)/\sqrt{\mathsf{D}X}$. Нормировка последовательности случайных величин обычно необходима для получения сходящейся последовательности законов распределения, в частности сходимости к нормальному закону с параметрами 0 и 1. Во-вторых, применение понятия Д. в математич. статистике при обработке выборок. Если смотреть на случайную величину как на реализацию случайного эксперимента, то произвольное изменение шкалы отсчета приведет к преобразованию случайной величины X в величину $Y=\sigma X+a$, где a — любое действительное число, σ — положительное число. Поэтому часто имеет смысл рассматривать не один теоретич. закон распределения $F(x)$ случайной величины X, а тип законов, т. е. семейство законов распределения вида $F\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, зависящих по крайней мере от двух параметров a и σ. Если $\mathsf{E}X=0$, $\mathsf{D}X=1$, то $\mathsf{E}Y=a$, $\mathsf{D}Y=\sigma^2$. Поэтому параметры теоретич. закона имеют следующий смысл $a=\mathsf{E}Y$ и $\sigma=\sqrt{\mathsf{D}Y}$. Отсюда вытекает способ определения этих параметров по выборке.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1964—67; [3] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *В. Н. Тутубалин.*

ДИСПЕРСНОЕ ПРОСТРАНСТВО, наследственно несвязное пространство,— топологическое пространство, не содержащее неодноточечных связных множеств. *А. А. Мальцев.*

ДИССИПАТИВНАЯ СИСТЕМА, D-система, предельно ограниченная система,— система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(t, x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

с непрерывной правой частью, решения $x(t;\ t_0,\ x_0)$ к-рой удовлетворяют свойству единственности и бесконечной продолжимости вправо и для к-рой существует такое число $\rho>0$, что для любого решения $x(t;\ t_0,\ x_0)$ найдется такой момент $T(t_0,\ x_0)\geqslant t_0$, что

$$\| x(t;\ t_0,\ x_0) \| < \rho \quad \text{при всех} \quad t \geqslant T\ (t_0,\ x_0).$$

Иными словами, каждое решение рано или поздно погружается в фиксированный шар $\|x\|<\rho$. Важным частным случаем Д. с. являются так наз. системы с конвергенцией, у которых все решения $x(t;\ t_0,\ x_0)$ определены при $t_0\leqslant t<\infty$ и, кроме того, существует единственное определенное и ограниченное на всей оси решение, и оно асимптотически устойчиво в целом. Такие системы изучены наиболее полно (см., напр., [1]).

Лит.: [1] Плисс В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М.—Л., 1964; [2] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967.

К. С. Сибирский.

ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ, функция рассеяния,— функция, вводимая для учета влияния сил вязкого трения на движение механич. системы. Д. ф. характеризует степень убывания механич. энергии этой системы; вводится также вообще для учета перехода энергии упорядоченного движения в энергию неупорядоченного движения (в конечном счете — в тепловую).

Для изотропной среды Д. ф., отнесенная к единице объема, имеет вид:

$$\Phi=\frac{M}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{3}\sum\nolimits_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2+$$
$$+\left(\eta-\frac{2}{3}\mu\right)\sum\nolimits_{m=2}^{3}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\right)^2,$$

где $\partial v_i/\partial x_k$ — компоненты тензора скоростей деформаций, μ и η — коэффициенты вязкости, характеризующие соответственно вязкость при сдвиге и вязкость при объемном расширении.

Уравнение изменения энтропии в вязкой среде имеет вид:

$$\rho T\frac{dS}{dt}=\Phi,$$

где S — удельная энтропия, ρ — плотность жидкости, T — ее температура.

Д. ф. характеризует силы вязкого трения при движении сплошной среды. Уравнение движения вязкой среды имеет вид:

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k},$$

где σ_{ik} — компоненты тензора напряжений,

$$\sigma'_{ik}=\mu\left\{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\delta_{ik}\right\}+\eta\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\delta_{ik}$$

— компоненты «вязкого» тензора напряжений, причем

$$\Phi=\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Д. ф. используется: для учета влияния сопротивлений на малые колебания системы около ее положения равновесия; исследования затухания колебаний в упругой среде; учета тепловых потерь при затухании колебаний электрич. тока в системе контуров и др.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954, ч. 1, § 16.

В. А. Дородницын.

ДИССИПАТИВНЫЙ ОПЕРАТОР — линейный оператор A с областью определения D_A, плотной в гильбертовом пространстве H, и такой, что

$$\operatorname{Im}(Ax, x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in D_A.$$

Иногда это требование заменяется условием $\operatorname{Re}(Ax, x) \leqslant 0$ при $x \in D_A$, т. е. диссипативность A в этом смысле эквивалентна диссипативности оператора $(-iA)$.

Д. о. наз. максимальным, если он не имеет собственных диссипативных расширений. Д. о. всегда допускает замыкание, к-рое также будет Д. о., в частности максимальный Д. о.— замкнутый оператор. Всякий Д. о. допускает расширение до максимального. Для Д. о. все точки λ с $\operatorname{Im}\lambda < 0$ есть точки регулярного типа, при этом

$$\|Ax - \lambda x\| > |\operatorname{Im}\lambda| \, \|x\|, \qquad x \in D_A.$$

Д. о. является максимальным тогда и только тогда, когда при всех λ с $\operatorname{Im}\lambda < 0$ имеет место $(A - \lambda I) D_A = H$. Эквивалентное условие максимальности Д. о. A — его замкнутость и выполнение условия

$$\operatorname{Im}(A^* y, y) \leqslant 0, \qquad y \in D_{A^*}.$$

Если A_0 — максимальный *симметрический оператор*, то либо A_0, либо $(-A_0)$ является максимальным Д. о. Для произвольного симметрич. оператора A_0 можно рассматривать диссипативные и, в частности, максимальные диссипативные расширения; задача их описания эквивалентна задаче описания всех максимальных диссипативных расширений консервативного оператора $B_0 = iA_0$: $\operatorname{Re}(B_0 x, x) = 0$, $x \in D_B$.

Д. о. тесно связаны со *сжатиями* и с так наз. аккретивными операторами, т. е. такими операторами A, для к-рых iA есть Д. о. В частности, аккретивный оператор A максимален тогда и только тогда, когда $(-A)$ является порождающим оператором (генератором) непрерывной однопараметрич. полугруппы сжатий $\{T_s\}_{s \geqslant 0}$ в H. С помощью преобразований Кэли

$$T = (A - I)(A + I)^{-1}, \qquad A = (I + T)(I - T)^{-1},$$

где A — максимальный аккретивный оператор, а T — сжатие, не имеющее $\lambda = 1$ собственным значением, строится функциональное исчисление и, в частности, теория дробных степеней максимальных Д. о.

Для ограниченных линейных операторов A определение Д. о. эквивалентно требованию $A_J \geqslant 0$, где $A_J = \frac{1}{2i}(A^* - A)$ — мнимая компонента оператора A. Для вполне непрерывного Д. о. в сепарабельном гильбертовом пространстве H с ядерной мнимой компонентой A_J имеются многочисленные критерии (т. е. необходимые и достаточные условия) полноты системы их корневых векторов. Напр.,

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} \operatorname{Im}\lambda_j(A) = \operatorname{Sp} A_J,$$

где $\lambda_j(A)$ — все собственные значения оператора A, $j = 1, \ldots, \nu(A) \leqslant \infty$, а $\operatorname{Sp} A_J$ — след оператора A_J (критерий Лившица);

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{n_+(\rho, A_R)}{\rho} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{\rho \to \infty} \frac{n_-(\rho, A_R)}{\rho} = 0,$$

где $A_R = \frac{1}{2}(A + A^*)$ — действительная компонента оператора A, а $n_{\pm}$ — количество характеристич. чисел оператора A_R в отрезках $[0, \rho]$ и $[-\rho, 0]$ (критерий Крейна). Система $\{\psi_j\}$ собственных векторов, отвечающих различным собственным числам λ_j, $j = 1, 2, \ldots$ Д. о., образует базис своей замкнутой линейной оболочки, эквивалентный ортонормированному, если

$$\sum_{j,\,k=1,\ j\neq k}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\lambda_j\operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_j-\overline{\lambda}_k|}<\infty.$$

Понятие Д. о. введено и для нелинейных и даже многозначных операторов A. Такой оператор в гильбертовом пространстве наз. Д. о., если для любых двух его значений выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}(Ax_1-Ax_2,\ x_1-x_2)\leqslant 0.$$

Это понятие лежит в основе теории однопараметрических нелинейных сжимающих полугрупп и связанных с ними дифференциальных уравнений. Другое обобщение понятия Д. о. относится к операторам, действующим в банаховых пространствах с так называемым полувнутренним произведением. Наконец, имеется обобщение, связанное с операторами, действующими в *гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой*.

Лит.: [1] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; [2] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967; [3] Лившиц М. С., «Матем. сб.», 1954, т. 34, № 1, с. 145—99; [4] Филлипс Р. С., «Математика», 1962, т. 6, № 4, с. 11—70; [5] Crandall M., Pazy A., «J. Funct. Analys.», 1969, v. 3, p. 376—418; [6] Lumer G., Phillips R., «Pacific J. Math.», 1961, v. 11, p. 679—98. *И. С. Иохвидов.*

ДИСТАЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — такая динамическая система $\{T^t\}$ с метрич. фазовым пространством X, что для любых точек $x\neq y$ нижняя грань расстояний

$$\inf_t \rho\,(T^t x,\ T^t y)>0.$$

Если в нек-рой динамич. системе какая-либо пара точек $x\neq y$ обладает последним свойством, то говорят, что эта пара точек дистальна; таким образом, Д. д. с.— это динамич. система, для к-рой все пары точек $x\neq y$ дистальны.

Приведенное определение годится для «общих» динамич. систем, когда «время» t пробегает произвольную группу G. Содержательные результаты получаются, если G локально компактна (основными являются «классические» случаи каскада или потока, т. е. когда $G=\mathbb{Z}$ или $G=\mathbb{R}$, но рассуждения при этом почти не упрощаются), а X компактно. Особый интерес при этом представляет тот случай, когда X является *минимальным множеством* (общий случай в известном смысле сводится к этому, а именно, при указанных ограничениях на G и X замыкание каждой траектории оказывается минимальным множеством). Важнейший пример Д. д. с.— система, возникающая в замыкании почти периодич. траектории какой-нибудь динамич. системы. Другой пример — нильпотоки (см. [1]). Как и в этих примерах, строение Д. д. с. с минимальным X при указанных условиях допускает довольно детальное описание алгебраич. характера (см. [2]; изложение теории Д. д. с. и их обобщений и библиографию см. в [3]).

Лит.: [1] Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф., Потоки на однородных пространствах, пер. с англ., М., 1966; [2] Furstenberg H., «Amer. J. Math.», 1963, v. 85, № 3, p. 477—515; [3] Бронштейн И. У., Расширения минимальных групп преобразований, Киш., 1975. *Д. В. Аносов.*

ДИСТРИБУТИВНАЯ КВАЗИГРУППА — квазигруппа, в к-рой выполняются левый и правый дистрибутивные законы: $x\cdot yz=xy\cdot xz$, $yz\cdot x=yx\cdot zx$. Эти два закона в квазигруппах не зависят друг от друга (существуют леводистрибутивные квазигруппы, не являющиеся праводистрибутивными, [1]). Примером Д. к. служит множество Q рациональных чисел с операцией $(x+y)/2$. Всякая идемпотентная медиальная квазигруппа (т. е. квазигруппа Q, в к-рой выполняются соотношения $x^2=x$ и $xy \cdot uv = xu \cdot yv$ для всех $x, y, u, v \in Q$) дистрибутивна. В общем случае всякая Д. к. $Q(\cdot)$ изотопна коммутативной *Муфанг лупе* [3]. Парастрофы (квазигруппы относительно обратных операций, см. *Квазигруппа*) Д. к. тоже дистрибутивны и изотопны той же коммутативной лупе Муфанг. Если четыре элемента a, b, c, d в Д. к. связаны медиальным законом: $ab \cdot cd = ac \cdot bd$, то они порождают медиальную подквазигруппу. В частности, всякие три элемента Д. к. порождают медиальную подквазигруппу. В Д. к. трансляции являются автоморфизмами, поэтому в определенном смысле Д. к. однородна: ни один элемент, ни одна подквазигруппа не выделяются. Группа, порожденная x всеми правыми трансляциями Д. к., разрешима [4].

Лит.: [1] Stein Sh., «Publ. Math. Debrecen», 1959, v. 6, № 1—2, p. 10—14; [2] Белоусов В. Д., «Матем. сб.», 1960, т. 50, № 3, с. 267—98; [3] его же, Основы теории квазигрупп и луп, М., 1967; [4] Fischer B., «Math. Z.», 1964, Bd 83, № 4, S. 267—303. *В. Д. Белоусов.*

ДИСТРИБУТИВНАЯ РЕШЕТКА, дистрибутивная структура,— решетка, в к-рой справедливо тождество

$$(a+b)c=ac+bc,$$

равносильное как

$$ab+c=(a+c)(b+c),$$

так и

$$(a+b)(a+c)(b+c)=ab+ac+bc.$$

Д. р. характеризуются тем, что все их выпуклые подрешетки служат смежными классами конгруэнций. Всякая Д. р. изоморфна решетке подмножеств (но не обязательно всех) нек-рого множества. Важнейшим частным случаем Д. р. являются *булевы алгебры*. В Д. р. для любого конечного множества I выполняются равенства

$$a\sum_{i\in I} b_i=\sum_{i\in I} ab_i$$

и

$$a+\prod_{i\in I} b_i=\prod_{i\in I}(a+b_i),$$

а также

$$\prod_{i\in I}\sum_{j\in J(i)} a_{ij}=\sum_{\varphi\in\Phi}\prod_{i\in I} a_{i\varphi(i)}$$

и

$$\sum_{i\in I}\prod_{j\in J(i)} a_{ij}=\prod_{\varphi\in\Phi}\sum_{i\in I} a_{i\varphi(i)},$$

где $J(i)$ — конечные множества, а Φ — множество всех однозначных функций φ, ставящих в соответствие элементу i из I элемент $\varphi(i)$ из $J(i)$. В полной Д. р. указанные равенства имеют смысл и в случае бесконечных множеств I и $J(i)$. Однако справедливы они не всегда. Полные Д. р. (см. *Полная решетка*), удовлетворяющие последним двум тождествам для любых множеств I и $J(i)$, наз. вполне дистрибутивными.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970; [3] Grätzer G., Lattice theory. First concepts and distributive lattices, S. F., 1971. *Л. А. Скорняков.*

ДИСТРИБУТИВНОСТЬ, дистрибутивности закон, распределительность, некоторой операции относительно другой — свойство пары бинарных *алгебраических операций*, выражающееся одним из тождеств:

$$\text{Д1.}\qquad (\forall xyz)\; x*(y\oplus z)=(x*y)\oplus(x*z),$$

$$\text{Д2.}\qquad (\forall xyz)\; (x\oplus y)*z=(x*z)\oplus(y*z),$$

где $\oplus$, $*$ — символы бинарных операций, а x, y, z — предметные переменные. Если в множестве A определены две конкретные бинарные операции $x+y$, $x\circ y$, т. е. заданы два отображения

$$+:\quad A\times A\longrightarrow A,\qquad \circ:\quad A\times A\longrightarrow A,$$

то, интерпретируя символы $\oplus$, $*$ как знаки операций $+$, $\circ$ в A, соответственно, можно говорить об истинности или ложности в A каждой из формул Д1, Д2. Если при этом обе формулы Д1, Д2 истинны в A, то операция $\circ$ наз. дистрибутивной относительно операции $+$ в A. *Д. М. Смирнов.*

ДИФРАКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — раздел математич. физики, в к-ром изучаются задачи, возникающие при математич. описании волновых явлений. Такое определение Д. м. т. включает и геометрич. оптику, к-рую, однако, по традиции считают самостоятельным разделом математич. физики. Основные уравнения с частными производными, описывающие волновые процессы,— это *Максвелла уравнения*, уравнения *динамических задач теории упругости*, *волновое уравнение* (к-рое в случае двух пространственных переменных описывает колебания мембраны, а в случае трех пространственных переменных — распространение звука), уравнения гидродинамики и ряд других.

Постановка задач Д. м. т. может быть рассмотрена на примере волнового уравнения; задачи для других уравнений, описывающих волновые процессы, ставятся аналогично.

Нестационарные задачи дифракции — это, по существу, *смешанные задачи*, т. е. задачи с начальными и краевыми условиями для волнового уравнения

$$\frac{1}{c^2(M)}U_{tt}-\Delta U=F(M,\ t) \tag{1}$$

в области $(0<t<+\infty)\times\Omega$, где Ω — область на плоскости или в трехмерном пространстве; при этом

$$U\Big|_{t=0}=U_0(M);\qquad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0}=U_1(M); \tag{2}$$

на границе S области Ω в простейших случаях

$$U\Big|_S=\Phi(M,\ t)\ \text{или}\ \frac{\partial U}{\partial n}\Big|_S=\Psi(M,\ t);\ M\in S,\ t>0. \tag{3}$$

Здесь F, U_0, U_1, Φ, ψ — заданные функции. Иногда коэффициент $c(M)$ на нек-рых поверхностях (в трехмерном случае) или линиях (в плоском случае) имеет скачки; тогда для U должны быть заданы еще и «условия сопряжения», связывающие значения функции U и ее производных по разные стороны поверхности, на к-рой $c(M)$ имеет скачок. Корректность постановки задач такого рода доказывается при помощи априорных оценок искомого решения в различных нормах с использованием соображений компактности. Тонкие вопросы описания сингулярности решений, поведения решений при $t\to\infty$, разработки практически применимых алгоритмов численного решения еще далеки от своего окончательного решения.

Стационарные задачи дифракции. Важную роль в Д. м. т. играют решения, гармонически зависящие от времени, т. е. решения уравнения (1), имеющие вид

$$U(M,\ t)=e^{-i\omega t}u(M),\quad \omega=\text{const}. \tag{4}$$

Параметр ω соответствует частоте колебаний. Функции $F(M,\ t)$, $\Phi(M,\ t)$ и $\psi(M,\ t)$ [см. формулы (1) и (3)] тоже должны гармонически зависеть от времени:

$$F(M,\ t)=f(M)\,e^{-i\omega t};$$
$$\Phi(M,\ t)=\varphi(M)\,e^{-i\omega t};$$
$$\Psi(M,\ t)=\psi(M)\,e^{-i\omega t}.$$

Уравнение (1) и краевые условия (3) дают

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(M)} u = -f(M), \ M \in \Omega, \tag{5}$$

$$u|_S = \varphi(M) \text{ или } \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi(M). \tag{6}$$

Для ограниченной области Ω большое значение имеет задача на отыскание нетривиальных решений уравнения (5) при $f=0$ в случае однородных краевых условий $\varphi(M)=0$ или $\psi(M)=0$. Это — так наз. задача нахождения собственных функций. Однако основной интерес в Д. м. т. представляет решение уравнений (5) в случае краевых условий (6) при неограниченной области Ω. При этом условий (5) и (6) уже недостаточно для определения функции u: нужно задать еще «условия на бесконечности».

Наиболее часто задача дифракции ставится физически следующим образом: предполагается, что решение u уравнения (5) задается в виде суммы u_i+u_s двух функций, где u_i — известная функция («падающая волна»), а u_s — «отраженная» или возникшая в результате дифракции волна. Волна u_s не должна содержать в себе волн, идущих из бесконечности. Это физич. условие и приводит к вышеуказанным условиям на бесконечности. Соответствующие условия для случая, когда Ω есть внешность ограниченной области, $\omega>0$, $c(M)$ вне сферы достаточно большого радиуса есть константа, а $f(M)$ — финитная функция, наз. условиями излучения (см. *Излучения условия*). Задача (5), (6), при выполнении условий излучения, поставлена корректно, что доказывается путем сведения задачи к интегральным уравнениям или с помощью априорных оценок. Имеются также способы отбора единственного решения задачи (5), (6) с помощью принципа предельной амплитуды и принципа предельного поглощения. В случае, когда Ω — внешность ограниченной области,— оба эти принципа выделяют те же решения, что и условия излучения. Сколько-нибудь общей теории задач для уравнения Гельмгольца в случае неограниченных областей не создано. Во всех практически важных случаях решения, представляющие физич. интерес, могут быть выделены при помощи принципа предельного поглощения.

В случае $c(M)=\text{const}$ представление решений задач Дирихле ($u|_S=\varphi(M)$) и Неймана $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=\psi\right)$ может быть получено в виде потенциалов соответственно двойного и простого слоев:

$$\iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n_N} \frac{e^{ikr}}{r} dS,$$

$$\iint_S \mu(N) \frac{e^{ikr}}{r} dS.$$

Для искомой плотности $\mu(N)$ получается интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. При проведении соответствующего доказательства разрешимости задач Дирихле и Неймана приходится преодолевать трудности, вполне аналогичные классич. трудности, возникающей при исследовании методами теории потенциала внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Методы решения задач Д. м. т. Большое значение в задачах Д. м. т. имеет соотношение между длиной волны и характерными размерами тела, в окрестности к-рого изучается волновой процесс. Если длина волны велика (соответственно мала) по сравнению с характерными размерами тела, то говорят о дифракции длинных (соответственно коротких) волн. В случае дифракции длинных волн величина ω в уравнении (5) может рассматриваться как малый параметр. Это позволяет применять в длинноволновом случае различные варианты теории возмущений. В качестве первого приближения можно взять решение уравнения Лапласа. Кроме того, в длинноволновом случае для решения задач Д. м. т. применимы обычные численные методы математич. физики, напр., вариационный метод, численное решение интегральных уравнений теории потенциала. Для областей частного вида задачи Д. м. т. могут быть решены в явном виде, т. е. их решение представимо в виде рядов или интегралов, содержащих специальные функции. Наиболее важными приемами, позволяющими сделать это, являются метод разделения переменных, или *Фурье метод*, и *Винера — Хопфа метод*.

«Доведение до числа» явных решений задач Д. м. т. удавалось ранее лишь в длинноволновом случае (чем меньше длина волны, тем хуже сходятся ряды и интегралы). С развитием вычислительной техники стали поддаваться расчету многие задачи и в области, когда длина волны сравнима с характерными размерами неоднородности. Наиболее эффективными здесь являются методы сведений задач дифракции к интегральным и интегродифференциальным уравнениям и различные варианты проекционных методов.

Асимптотические методы Д. м. т. При малой длине волны численное решение дифракционной задачи весьма затруднительно, даже с использованием ЭВМ. Здесь на первый план выступают асимптотич. методы, к-рые представляют интерес еще и тем, что позволяют делать нек-рые общие заключения о рассматриваемой задаче. Под асимптотическими методами Д. м. т. понимаются нек-рые приемы нахождения приближенного выражения для искомых функций. Приемы эти базируются на физич. соображениях и формальных преобразованиях, чаще всего строго не обоснованных. Одним из первых приемов, позволяющих находить в виде нек-рой квадратуры приближенные решения коротковолновых задач дифракции, был *Кирхгофа метод*, широко применяющийся и теперь при решении прикладных задач. Не менее важное значение имеет *лучевой метод*, породивший целую серию приемов, позволяющих находить асимптотику многих дифракционных задач. Построения лучевого метода, как правило, бывает нетрудно провести, если соответствующее поле лучей регулярно. Если же оно имеет какие-либо особенности, то возникает ситуация, характерная для *пограничного слоя теории*: везде, кроме нек-рой весьма малой окрестности тех точек, где поле лучей теряет регулярность, асимптотика решений известна. Нужно найти ее только в этой малой области, т. е. в пограничном слое. Соответствующий аналог методики пограничного слоя получил название *параболического уравнения метода*. Он часто используется как для численного решения задач Д. м. т., так и для вывода асимптотич. формул.

Важные асимптотич. формулы для решения задач Д. м. т. могут быть получены в тех случаях, когда известно явное выражение для решения. Это явное решение по хорошо разработанной уже методике (так наз. метод Ватсона) преобразуют в контурный интеграл, асимптотика к-рого ищется либо применением *перевала метода*, либо теоремы о вычетах. Представляет интерес тот факт, что полученные на этом пути асимптотич. выражения иногда могут быть использованы как образец («эталон»), при помощи к-рого можно «угадывать» вид асимптотич. разложения в дифракционных задачах, явное решение к-рых неизвестно. Именно такие построения характерны для «метода эталонных задач», к-рый является дальнейшим развитием метода параболич. уравнения.

Лит.: [1] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [2] Вайнштейн Л. А., Теория дифракции и метод факторизации, М., 1966; [3] Никольский В. В., Вариационные методы для решения внутренних задач электродинамики, М., 1967; [4] Купрадзе В. Д., Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, М.—Л., 1950; [5] Купрадзе В. Д. и др., Трехмерные задачи математической теории упругости, 2 изд., М., 1976; [6] Фридлендер Ф., Звуковые импульсы, пер. с англ., М., 1962; [7] Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К., Теория дифракции, пер. с нем., М., 1964; [8] Свешников А. Г., в кн.: International congress of mathematicians, Vancouver, 1974, p. 29—30.

В. М. Бабич.

ДИФФЕОМОРФИЗМ, дифференцируемый гомеоморфизм, гладкий гомеоморфизм,— взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое отображение $f: M \to N$ дифференцируемого многообразия M (напр., области в евклидовом пространстве) в дифференцируемое многообразие N, обратное к к-рому тоже является непрерывно дифференцируемым. Если $f(M)=N$, то говорят, что M и N диффеоморфны. С точки зрения дифференциальной топологии, диффеоморфные многообразия имеют одинаковые свойства, и она интересуется классификацией многообразий с точностью до Д. (последняя не совпадает с более грубой классификацией с точностью до *гомеоморфизма*, исключая случаи малых размерностей).

Хотя сам термин «Д.» был введен сравнительно недавно, фактически многочисленные преобразования и замены переменных, давно используемые в математике, являются Д., а многие семейства преобразований — группами Д. В частности, это относится к Д., сохраняющим ту или иную дополнительную структуру на многообразии (напр., контактную, симплектическую, конформную или комплексную). Исторически такие Д. в ряде случаев получили особые названия (в указанных примерах — контактные преобразования и канонические отображения, конформные отображения и биголоморфные отображения), вместо к-рых в последнее время (70-е гг. 20 в.) нередко употребляют термин «Д.» с добавлением прилагательного, характеризующего сохраняемую структуру (напр., «симплектический Д.» вместо «канонического преобразования»).

Изучались и топологические (точнее, гомотопические) свойства группы $\mathrm{Diff}\,M$ всех Д. многообразия M на себя, в к-рой надлежащим образом введена топология. Они могут быть неожиданно сложными (см., напр., [1], где имеются также обзор и библиография). Этот вопрос связан с рядом важных задач гомотопич. топологии (напр., с гомотопич. группами сфер). В принципе знание свойств $\mathrm{Diff}\,M$ помогло бы в решении этих задач, однако в настоящее время (1978) ситуация является скорее обратной: продвижение в изучении $\mathrm{Diff}\,M$ связано как раз с использованием того, что уже известно об этих задачах, или, в лучшем случае, осуществляется параллельно с их решением и при помощи тех же методов. Относительно алгебраич. свойств группы Д. класса C^r (случай $r=\infty$ не исключается) замкнутого n-мерного многообразия доказано, что при $r \neq n+1$ ее связная компонента единицы является простой группой, т. е. не имеет нетривиальных *нормальных делителей* (см. [2], [3]; при $r=n+1$ ситуация не выяснена). Для незамкнутого n-мерного многообразия M доказана простота группы всех тех Д. f класса C^r $(r \neq n+1)$, к-рые можно соединить с тождественным отображением 1_M посредством непрерывного семейства Д. f_t $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ f_0=1_M;\ f_1=f)$, не сдвигающего точек вне нек-рого компакта (зависящего от этого семейства).

Лит.: [1] Antonelli P. L., Burghelea D., Kahn P. J., «Topology», 1972, v. 11, № 1, p. 1—49; [2] Thurston W., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 80, № 2, p. 304—307; [3] Mather J. N., «Comment. math. helf.», 1974, v. 49, № 4, p. 512—28; 1975, v. 50, № 1, p. 33—40.

Д. В. Аносов.

У-ДИФФЕОМОРФИЗМ — диффеоморфизм, порождающий *У-систему*.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ — главная линейная часть приращения функции.

1) Действительная функция $y=f(x)$ действительного переменного наз. **дифференцируемой** в точке x, если она определена в нек-рой окрестности этой точки и если существует такое число A, что приращение

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

(при условии, что точка $x+\Delta x$ лежит в упомянутой окрестности) может быть представлено в виде

$$\Delta y=A\,\Delta x+\alpha,$$

где $\alpha/\Delta x\to 0$ при $\Delta x\to 0$. При этом $A\,\Delta x$ обозначается через dy и наз. **дифференциалом функции** $f(x)$ в точке x. Д. dy при фиксированном x пропорционален Δx, т. е. является **линейной функцией** от Δx. Дополнительный член α при $\Delta x\to 0$ является, в силу определения, бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с Δx (и по сравнению с dy, если $A\neq 0$). Именно в этом смысле Д. и наз. **главной** частью приращения функции.

Для функции, дифференцируемой в точке x, $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$, т. е. функция, дифференцируемая в некоторой точке, непрерывна в ней. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x в том и только в том случае, если она имеет в этой точке конечную производную

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A;$$

при этом

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

Существуют непрерывные, но не дифференцируемые функции.

Кроме обозначения dy используется обозначение $df(x)$; тогда предыдущее равенство принимает вид

$$df(x)=f'(x)\Delta x.$$

Приращение аргумента Δx обозначается также через dx и наз. **дифференциалом независимого переменного**. Поэтому можно писать

$$dy=f'(x)dx.$$

Отсюда $f'(x)=dy/dx$, т. е. производная равна отношению Д. dy и dx. Если $A=0$, то $\Delta y/dy\to 1$ при $\Delta x\to 0$, т. е. Δy и dy при $\Delta x\to 0$ являются в случае $A\neq 0$ эквивалентными бесконечно малыми; этим, равно как и простой структурой Д. (линейностью по Δx), часто пользуются в приближенных вычислениях, полагая $\Delta y\approx dy$ при малых Δx. Если хотят, напр., вычислить $f(x+\Delta x)$, зная $f(x)$ (Δx мало), то полагают

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+dy.$$

Конечно, такое рассуждение имеет ценность, если можно оценить соответствующую погрешность.

Рис. 1.

Геометрическое истолкование Д. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0,\ y_0)$ имеет вид $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Если положить $x=x_0+\Delta x$, то $y-y_0=f'(x_0)\Delta x$. Правая часть есть значение Д. функции $f(x)$ в точке x_0, отвечающее рассматриваемому значению Δx. Таким образом, Д. совпадает с соответствующим приращением ординаты касательной к кривой $y=f(x)$ (см. отрезок NT на рис. 1). При этом $\alpha=\Delta y-dy$, т. е. значение $|\alpha|$ совпадает с длиной отрезка TS.

2) Определение дифференцируемости и Д. естественным образом обобщается на действительные функции от n действительных переменных. Напр., в случае $n=2$ действительная функция $z=f(x, y)$ наз. дифференцируемой в точке (x, y) по совокупности переменных x и y, если она определена в нек-рой окрестности этой точки и ее полное приращение

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$$

может быть представлено в виде

$$\Delta z=A\,\Delta x+B\,\Delta y+\alpha,$$

где A и B — некоторые числа, $\alpha/\rho\to 0$ при $\rho\to 0$, $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$; предполагается, что точка $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ принадлежит упомянутой окрестности (см. рис. 2). При этом вводится обозначение

$$dz=df(x, y)=A\,\Delta x+B\,\Delta y$$

и dz наз. полным дифференциалом, или просто дифференциалом, функции $f(x, y)$ в точке (x, y) (иногда с добавлением: «по совокупности переменных x и y»). Для фиксированной точки (x,y) Д. dz есть линейная функция от Δx и Δy; разность $\alpha=\Delta z-dz$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с ρ. В этом смысле dz есть главная линейная часть приращения Δz.

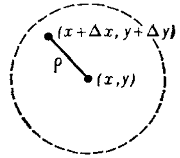


Рис. 2.

Если $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), то она непрерывна в этой точке и имеет в ней конечные частные *производные*

$$f'_x(x, y)=A, \qquad f'_y(x, y)=B.$$

Таким образом

$$dz=df(x, y)=f'_x(x, y)\,\Delta x+f'_y(x, y)\,\Delta y.$$

Приращения Δx и Δy независимых переменных, как и в случае одного переменного, обозначаются dx и dy. По этой причине можно написать

$$dz=df(x, y)=f'_x(x, y)\,dx+f'_y(x, y)\,dy.$$

Существование конечных частных производных, вообще говоря, не влечет дифференцируемости функции (даже если предполагать заранее ее непрерывность)— здесь нарушается аналогия с функциями одного переменного.

Если функция $f(x, y)$ имеет в точке (x, y) частную производную по x, то произведение $f'_x(x, y)dx$ наз. ее частным дифференциалом по x; аналогично, $f'_y(x, y)dy$ есть частный Д. по y. Если функция дифференцируема, то ее полный Д. равен сумме частных Д. Геометрически полный Д. $df(x_0, y_0)$ есть приращение аппликаты касательной плоскости к поверхности $z=f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0=f(x_0, y_0)$ (см. рис. 3).

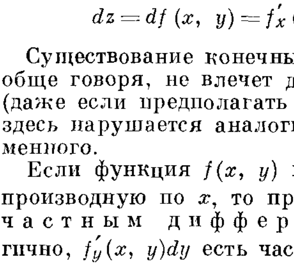


Рис. 3.

Достаточный признак дифференцируемости функции: если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет частную производную f'_x, непрерывную в точке (x_0, y_0), и, кроме того, имеет в точке (x_0, y_0) частную производную f'_y, то $f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в каждой точке открытой области D, то в любой точке этой области

$$dz=A(x, y)dx+B(x, y)dy,$$

причем $A(x, y)=f'_x(x, y)$, $B(x, y)=f'_y(x, y)$. Если при этом существуют непрерывные в D частные производные A'_y и B'_x, то всюду

$$A'_y=B'_x.$$

Это показывает, в частности, что не всякое выражение

$$A(x, y)dx+B(x, y)dy$$

с непрерывными A и B (в области D) является в этой области полным Д. нек-рой функции двух переменных. В этом состоит еще одно нарушение аналогии с функциями одного переменного, где любое выражение $A(x)dx$ с непрерывной в нек-ром промежутке функцией $A(x)$ служит Д. для нек-рой функции.

Выражение $Adx+Bdy$ является полным Д. нек-рой функции $z=f(x, y)$, в односвязной открытой области D, если $A(x, y)$ и $B(x, y)$ непрерывны в этой области и удовлетворяют условию $A'_y=B'_x$ и при этом а) A'_y и B'_x непрерывны или б) $A(x, y)$ и $B(x, y)$ дифференцируемы по совокупности переменных x и y всюду в D (см. [7], [8]).

О Д. действительных функций одного или нескольких действительных переменных и о Д. высших порядков см. также *Дифференциальное исчисление*.

3) Пусть функция $f(x)$ определена на нек-ром множестве E действительных чисел, x — предельная точка этого множества, $x\in E$, $x+\Delta x\in E$, $\Delta y=A\,\Delta x+\alpha$, где $\alpha/\Delta x\to 0$ при $\Delta x\to 0$; тогда функция $f(x)$ наз. дифференцируемой по множеству E в точке x, а $dy=A\,\Delta x$ наз. ее дифференциалом по множеству E в точке x. Это есть обобщение Д. действительной функции одного действительного переменного. Разновидностями этого обобщения являются Д. в концах промежутка, на котором определена функция, и аппроксимативный Д. (см. *Аппроксимативная дифференцируемость*).

Подобным же образом вводится Д. по множеству для действительных функций многих действительных переменных.

4) Все эти определения дифференцируемости и Д. почти без изменений распространяются соответственно на комплексные функции одного или нескольких действительных переменных, на действительные и комплексные вектор-функции одного или нескольких действительных переменных, на комплексные функции и вектор-функции одного или нескольких комплексных переменных. В функциональном анализе они распространяются на функции точки абстрактного пространства. Можно говорить о дифференцируемости и Д. функции множества по отношению к нек-рой мере.

Лит.: [1] Толстов Г. П., Элементы математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1974; [2] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 1, М., 1969; [3] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975; [5] Рудин У., Основы математического анализа, пер. с англ., М., 1966; [6] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976; [7] Толстов Г. П., О криволинейном и повторном интеграле, М.—Л., 1950 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 35); [8] его же, «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 5, с. 167—70.

Г. П. Толстов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ — *дифференциальная форма* на римановой поверхности S, инвариантная относительно конформного преобразования локального униформизирующего параметра $z=x+iy$. Чаще всего встречаются дифференциалы (д.) первого порядка — это дифференциальные формы размерности 1, линейные относительно дифференциалов каждой из переменных (x, y), вида

$$\omega=pdx+qdy\equiv p(x, y)dx+q(x, y)dy,$$

$$\pi=rdx+sdy,$$

инвариантные относительно замены параметра, с достаточно гладкими коэффициентами p, q, ...; д. нулевого порядка — это достаточно гладкие комплексные функции $f=f(x, y)$, $g=g(x, y)$, ..., инвариантные относительно замены параметра, т. е. функции точки $P \in S$; д. второго порядка имеют вид

$$\Omega = A\,dx\,dy \equiv A(x, y)\,dx\,dy, \quad \Pi = B\,dx\,dy.$$

Все д. на римановых поверхностях порядков $k>2$ тождественно равны 0.

Сложение д. на римановых поверхностях одного и того же порядка определяется естественным путем:

$$f+g, \quad \omega+\pi=(p+r)dx+(q+s)dy, \quad \Omega+\Pi=(A+B)dx\,dy;$$

оно коммутативно и ассоциативно. Внешнее умножение д. на римановых поверхностях дистрибутивно относительно сложения, обозначается знаком $\wedge$ и определяется правилами:

$$f \wedge g = fg; \quad f \wedge \omega = (fp)\,dx + (fq)\,dy,$$

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0, \quad dy \wedge dx = -dx \wedge dy = -dx\,dy;$$

отсюда

$$\omega \wedge \pi = (ps-qr)\,dx\,dy, \quad \pi \wedge \omega = -\omega \wedge \pi; \quad f \wedge \Omega = (fA)\,dx\,dy.$$

Вообще, при внешнем умножении д. порядка k на д. порядка l при $k+l \leqslant 2$ получается д. порядка $k+l$, а при $k+l>2$ — тождественный нуль. Линейный оператор дифференцирования $d=\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy$ переводит д. порядка k в д. порядка $k+1$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy,$$

$$d\omega = (dp)\,dx + (dq)\,dy = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)dx\,dy, \quad d\Omega = 0.$$

Кроме того,

$$d(fg) = f\,dg + g\,df,$$

$$d(f\omega) = (df)\,\omega + f(d\omega) = -\omega(df) + f(d\omega)$$

и всегда $dd=0$. Для д. на римановых поверхностях важен также линейный оператор звездного сопряжения

$$*\omega = -q\,dx + p\,dy.$$

При этом

$$*(f \wedge \omega) = f \wedge (*\omega), \quad \omega \wedge (*\pi) = \pi \wedge (*\omega) = (pr+qs)\,dx\,dy,$$

$$\omega \wedge (*\omega) = (p^2+q^2)\,dx\,dy, \quad *d = -\frac{\partial}{\partial y}dx + \frac{\partial}{\partial x}dy,$$

$$*(df) = (*d)\,f, \quad (*d)\,\omega = *d\omega = -d*\omega.$$

Оператор звездного сопряжения не совпадает с оператором комплексного сопряжения. Последний обозначается чертой: если $f=g+ih$, то $\bar{f}=\bar{g}-i\bar{h}$, $\bar{\omega}=\bar{p}dx+\bar{q}dy$, $\bar{\Omega}=\bar{A}dx\,dy$; далее, $d\bar{\omega}=\overline{d\omega}$, $*\bar{\omega}=\overline{*\omega}$. Оператор Лапласа $\Delta=d*d$ определен на д. нулевого порядка:

$$\Delta f = d*df = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dx\,dy.$$

Дифференциал ω наз. точным, если существует функция f на S такая, что всюду $\omega=df$, если $\omega=*df$, то ω наз. коточным; д. ω наз. замкнутым, если $d\omega=0$ на S, если $d*\omega=0$, то ω — козамкнутый д. Из точности вытекает замкнутость, но обратное неверно. Пусть c_1, c_2, ...— циклы на S. Интегралы $\int_{c_1}\omega$, $\int_{c_2}\omega$, ..., называемые периодами дифференциала ω, определяются обычным образом при помощи локальных униформизирующих. Если c_1 и c_2 гомологичны на S и ω — замкнутый д., то $\int_{c_1}\omega=\int_{c_2}\omega$, т. е. периоды замкнутого д. зависят только от класса гомологий. Все периоды точного д. равны нулю. Обратно, замкнутый д. является точным тогда и только тогда, когда все его периоды равны 0.

Функция $f\in C^2$ наз. гармонической на S, если $\Delta f=0$. Дифференциал $\omega\in C^1$ наз. гармоническим дифференциалом на S, если ω замкнут и козамкнут, $d\omega=d{*}\omega=0$. Гармонич. д. ω является полным дифференциалом гармонич. функции в окрестности каждой точки $P_0\in S$. Если действительные функции u, $v\in C^1$ на S связаны соотношением $dv={*}du$, то они суть сопряженные гармонич. функции, удовлетворяющие условиям Коши — Римана. Следовательно, функция $f=u+iv\in C^1$ является регулярной аналитической, или голоморфной, на S, если ${*}df=-idf$. Дифференциал $\omega\in C^1$ наз. регулярным аналитическим, или голоморфным, дифференциалом на S, если $d\omega=0$ и ${*}\omega=-i\omega$. Голоморфный д. ω является полным дифференциалом голоморфной функции в окрестности каждой точки $P_0\in S$. Голоморфный д. ω представим локально в виде $\omega=fdz$, где $dz=dx+idy$, а f — голоморфная функция от z.

Классы эквивалентности измеримых комплексных дифференциалов на римановой поверхности, для к-рых интеграл $\iint_S\omega\wedge({*}\bar{\omega})$ конечен, образуют гильбертово пространство $L^2(S)$ с обычным сложением, умножением на комплексные скаляры и скалярным произведением $(\omega,\pi)=\iint_S\omega\wedge({*}\bar{\pi})$. Каждый д. ω класса $L^2(S)\cap C^3(S)$ единственным образом представим в виде суммы $\omega=\omega_h+df+{*}dg$, где f, $g\in C^2(S)$ и ω_h — гармонический д. на римановой поверхности.

Рассмотренные выше гармонические и голоморфные функции или д. класса C^1 на S наз. регулярными на S. Пусть в проколотой окрестности U точки $P_0\in S$ определен д. θ, к-рый, напр., гармоничен в U. Тогда говорят, что гармонич. д. ω имеет особенность θ в P_0, если разность $\omega-\theta$ является регулярным гармонич. д.

Аналогичные определения применяются для гармонич. и аналитич. функций, аналитич. д. и т. п. В частности, в случае аналитического д. $\omega=fdz$ обычно предполагается, что функция f либо регулярная аналитическая в окрестности каждой точки $P_0\in S$, либо имеет на S лишь изолированные особые точки однозначного характера. Аналитич. д. ω, имеющий на S только особенности в виде полюсов

$$\theta=(a_{-n}z^{-n}+a_{-n+1}z^{-n+1}+\ldots+a_{-1}z^{-1})\,dz,$$

наз. мероморфным дифференциалом; при этом $a_{-n}\neq0$, n — порядок полюса, при $n=1$ полюс наз. простым, a_{-1} — вычет д. ω в полюсе P_0. Мероморфные д. на компактной римановой поверхности S наз. *абелевыми дифференциалами*. Гармонич. функции на S или на нек-рой области $D\subset S$, имеющие заданные особенности, иногда наз. абелевыми потенциалами.

Интегрирование абелевых д. приводит к *абелевым интегралам*, исчерпывающим в сущности все интегралы от алгебраич. функций. При изучении аналитич. д. на произвольной, вообще говоря, некомпактной римановой поверхности S естественное требование сохранения основных черт классич. теории д. на компактных римановых поверхностях приводит к необходимости наложить на рассматриваемые регулярные д. дополнительные конформно инвариантные ограничения, наиболее употребительным из к-рых является условие интегрируемости, напр., аналитич. д. $\omega=fdz$

с квадратом, т. е. условие конечности интеграла Дирихле:

$$\iint_S |f|^2\,dx\,dy < +\infty.$$

В теории д. на римановых поверхностях основное значение имеет проблема существования гармонич. и аналитич. д. с заданными особенностями на произвольной римановой поверхности S. С этим вопросом непосредственно связана проблема глобальной униформизации римановых поверхностей, т. к. построение глобальной униформизирующей требует именно умения строить д. с заданными особенностями.

Ниже приведены основные результаты по проблеме существования.

Если на S существует цикл c, не гомологичный нулю, то на S существует всюду регулярный гармонич. д. ω с периодом $\int_c \omega \neq 0$ и всюду регулярный аналитич. д. $\omega + i{*}\omega$. Эти д. не являются точными, и поэтому при их интегрировании нельзя получить однозначных на S гармонич. или аналитич. функций. На компактной римановой поверхности S всякий гармонический и точный д. тождественно равен нулю. Напротив, на некомпактных римановых поверхностях существуют отличные от тождественного нуля всюду регулярные точные гармонические и голоморфные д.

Пусть P_0 — любая фиксированная точка произвольной римановой поверхности S, n — любое натуральное число. Тогда существуют: точный гармонич. д. с особенностью $d(1/z^n)$ в P_0; точный действительный гармонич. д. с особенностью $\operatorname{Re} d(1/z^n)$ или $\operatorname{Im} d(1/z^n)$ в P_0; гармонич. функция с особенностью $1/z^n$ в P_0; аналитич. д. с особенностью $d(1/z^n)$ в P_0, у к-рого действительная часть есть точный д.

Пусть P_0 и P_1 — любые различные точки S. Тогда существуют: гармонич. или аналитич. д. на S с особенностями $-dz/z$ в P_0 и dz/z в P_1; действительная гармонич. функция на S с особенностями $-\ln|z|$ в P_0 и $\ln|z|$ в P_1.

Пусть $P_0, P_1, \ldots, P_n$ — любые попарно различные точки на S и $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — любые отличные от нуля комплексные числа такие, что $c_0 + c_1 + \ldots + c_n = 0$. Существует гармонический или аналитический д. на S, всюду регулярный, кроме $P_0, P_1, \ldots, P_n$, а в точках P_j имеющий простые полюсы соответственно с вычетами c_j, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Для жордановых областей $D \subset S$, т. е. таких областей, граница к-рых ∂D состоит из n непересекающихся жордановых кривых $c_1, c_2, \ldots, c_n$, возможно также решение *Дирихле задачи*.

Наиболее законченной является теория д. для компактных римановых поверхностей S. Пусть род S равен g. Векторное пространство $\mathfrak{H}$ регулярных гармонич. д. ω над полем комплексных чисел имеет размерность $2g$. Если $a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_g b_g$ — циклы канонич. базиса гомологий S, то в качестве канонич. базиса д. $\mathfrak{H}$ можно выбрать д. ω_i, $i = 1, 2, \ldots, g$, с периодом 1 вдоль a_i, а вдоль a_j, $j \neq i$, и вдоль всех b_i — с периодом 0; далее, ω_{g+i}, $i = 1, 2, \ldots, g$, имеют период 1 вдоль b_i, а вдоль b_j, $j \neq i$, и вдоль всех a_i — период 0. Любой гармонич. д. ω представляется в виде линейной комбинации

$$\omega = \sum\nolimits_{i=1}^{g} A_i \omega_i + \sum\nolimits_{i=1}^{g} B_i \omega_{g+i},$$

где A_i — так наз. A-периоды ω вдоль циклов a_i, а B_i суть B-периоды ω вдоль циклов b_i.

Голоморфные д. на компактной римановой поверхности наз. абелевыми дифференциалами первого рода. Размерность векторного пространства голоморфных д. равна g.

Все введенные выше д. на римановой поверхности можно выразить через переменные z и $\bar{z}$, напр.:

$$f=f(z, \bar{z}), \quad \omega=p\,dz+q\,d\bar{z}=p(z, \bar{z})\,dz+q(z, \bar{z})\,d\bar{z},$$
$$\Omega=A\,dz \wedge d\bar{z}=A(z, \bar{z})\,dz \wedge d\bar{z}$$

и т. д. В отличие от комплексных многообразий высших размерностей, на римановых поверхностях нетривиальны только внешние дифференциальные формы типов (0, 0), (1, 0), (0, 1) и (1, 1), имеющие соответственно вид f, pdz, $qd\bar{z}$, $Adz\wedge d\bar{z}$. При этом аналитич. д. зависят только от z:

$$f=f(z), \quad \omega=p(z)dz.$$

Применяются также нелинейные дифференциальные формы вида $p(z, \bar{z})dz^m d\bar{z}^n$, где m и n — целые числа. Они также наз. дифференциалами типа (m, n), или размерности (m, n). При этом д. типа (0, 0) наз. функциями, типа (1, 0) — линейными дифференциалами, типа (—1, 0) — обратными дифференциалами, типа (2, 0) — квадратичными дифференциалами. Наибольшие применения получили *квадратичные дифференциалы*. См. также *Глобальная структура траекторий*, *Локальная структура траекторий*, *Риманова поверхность*, *Униформизация*.

Лит.: [1] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [2] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [3] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957; [4] Behnke H., Sommer F., Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, B., 1955. *Е. Д. Соломенцев.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ МОДУЛЬ, модуль кэлеровых дифференциалов,— алгебраический аналог понятия дифференциала функции. Пусть A — коммутативное кольцо, рассматриваемое как алгебра над своим подкольцом B. Д. м. B-алгебры A определяется как фактормодуль $\Omega^1_{A/B}$ свободного A-модуля с базисом $(dx)_{x\in A}$ по подмодулю, порожденному элементами вида

$$d(x+y)-dx-dy, \quad d(xy)-xdy-ydx, \quad db,$$

где $x, y\in A$, $b\in B$. Канонич. гомоморфизм A-модулей $d\colon A\to\Omega^1_{A/B}$ является B-дифференцированием кольца A (см. *Дифференцирование* кольца) со значением в A-модуле $\Omega^1_{A/B}$, обладающим следующим свойством универсальности: для любого B-дифференцирования ∂: $A\to M$ со значением в A-модуле M существует однозначно определенный гомоморфизм A-модулей $\bar{\partial}: \Omega^1_{A/B}\to M$ такой, что $\bar{\partial}\circ d=\partial$. Соответствие $\partial\to\bar{\partial}$ определяет изоморфизм A-модулей

$$\mathrm{Der}_B(A, M)\simeq \mathrm{Hom}_A\left(\Omega^1_{A/B}, M\right).$$

В частности, модуль дифференцирований кольца A в себя изоморфен двойственному A-модулю к модулю $\Omega^1_{A/B}$.

Если $A\otimes_B A$ рассматривать как A-алгебру относительно гомоморфизма

$$A\longrightarrow A\otimes_B A \qquad (a\longrightarrow a\otimes 1)$$

и I — идеал, порожденный элементами вида

$$a\otimes 1-1\otimes a,$$

то A-модуль $\Omega^1_{A/B}$ изоморфен A-модулю I/I^2.

Д. м. Ω^1 обладает следующими свойствами:

1) Если S — мультипликативно замкнутое множество в A и $T=S\cap B$, то существует канонич. изоморфизм

локализации

$$(\Omega^1_{A/B})_S \cong \Omega^1_{A_S/B_T}.$$

2) Если φ: $A \to A'$ — гомоморфизм B-алгебр, то определена каноническая точная последовательность A'-модулей:

$$\Omega^1_{A/B} \otimes_A A^1 \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{A'/B} \longrightarrow \Omega^1_{A'/A} \longrightarrow 0.$$

3) Если I — идеал кольца A и $A' = A/I$, то существует каноническая точная последовательность A'-модулей:

$$I/I^2 \xrightarrow{d'} \Omega^1_{A/B} \otimes_A A' \longrightarrow \Omega^1_{A'/B} \longrightarrow 0,$$

где гомоморфизм d' индуцирован дифференцированием d: $A \to \Omega'_{A/B}$.

4) Поле K является сепарабельным расширением поля k конечной степени трансцендентности n в том и только в том случае, когда существует изоморфизм K-пространств $\Omega^1_{K/k} \cong K^n$.

5) Если $A = B\ [T_1, \ldots, T_n]$ — алгебра многочленов, то $\Omega^1_{A/B}$ свободный A-модуль с базисом $dT_1, \ldots, dT_n$.

6) Алгебра A конечного типа над совершенным полем k является регулярным кольцом тогда и только тогда, когда A-модуль $\Omega^1_{A/k}$ проективен.

7) В свойстве 2) A-алгебра A' конечного типа является гладкой над A тогда и только тогда, когда гомоморфизм α инъективен, а Д. м. $\Omega^1_{A'/A}$ проективен и его ранг равен относительной размерности A' над A.

Внешняя степень $\overset{i}{\wedge}\Omega^1_{A/B}$ Д. м. $\Omega^1_{A/B}$ наз. модулем дифференциальных i-форм B-алгебры A и обозначается $\Omega^i_{A/B}$.

Свойство 1) позволяет для любого морфизма схем $X \to Y$ определить пучок относительных (или кэлеровых) дифференциалов $\Omega^1_{X/Y}$ и их внешние степени $\Omega^i_{X/Y}$.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Grothendieck A., Revêtements étales et groupe fondamentale, B.—Hdlb.—N. Y., 1971; [3] его же, «Publ. math. IHES», 1964, № 20; [4] Kähler E., Algebra und Differentialrechnung, B., 1958. *И. В. Долгачев.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА — алгебра A над полем (кольцом) K, являющаяся *дифференциальным кольцом*; при этом каждое дифференцирование ∂ должно коммутировать с умножениями на элементы из K, т. е. $\partial(\alpha x) = \alpha\partial(x)$, где $\alpha \in K$, $x \in A$.

О. А. Иванова.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА — раздел алгебры, изучающий объекты, в к-рых, наряду с операциями сложения и умножения, имеются операции дифференцирования: дифференциальные кольца, дифференциальные модули, дифференциальные поля, дифференциальные алгебраич. многообразия.

Один из основных объектов Д. а.— алгебра дифференциальных полиномов $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, являющаяся аналогом кольца многочленов в коммутативной алгебре (см. *Расширение* дифференциального поля). Каждой системе дифференциальных уравнений

$$F_1 = 0, \ \ldots, \ F_k = 0$$

ставится в соответствие совершенный дифференциальный идеал $\{F_1, \ldots, F_k\}$, порожденный этой системой в алгебре дифференциальных полиномов. Теорема Ритта—Рауденбаха о базисе утверждает, что таким образом получаются все совершенные дифференциальные идеалы (дифференциальный идеал I наз. совершенным, если из $a^n \in I$ для нек-рого

$n>0$ следует, что $a \in I$), т. е. в любом из них можно выбрать конечное число дифференциальных полиномов таких, что совершенный дифференциальный идеал, порожденный этими полиномами, совпадает с данным. В отличие от теоремы Гильберта о базисе в кольце многочленов, в теореме Ритта — Рауденбаха существенна совершенность идеалов, т. е. дифференциальный идеал (даже совершенный) может не являться конечно порожденным дифференциальным модулем.

Совершенному дифференциальному идеалу ставится в соответствие дифференциальное алгебраич. многообразие — множество точек в аффинном пространстве над нек-рым универсальным расширением поля коэффициентов, аннулирующих любой полином из данного идеала. Имеет место аналог теоремы Гильберта о нулях. Пусть $F_1, \ldots, F_p$ — конечная система дифференциальных полиномов и пусть G — дифференциальный полином, обращающийся в нуль во всех решениях данной системы. Тогда некоторая степень полинома G является линейной комбинацией полиномов F и их производных разного порядка с коэффициентами из алгебры дифференциальных полиномов. В частности, если система $F_1, \ldots, F_p$ не имеет нулей, то нек-рая линейная комбинация полиномов F и их производных разного порядка равна единице.

Совершенный дифференциальный идеал допускает представление в виде пересечения конечного числа простых дифференциальных идеалов. Этому представлению соответствует разложение многообразия на конечное число неприводимых компонент. Для простых дифференциальных идеалов вводится понятие общего нуля и его размерности, как и в алгебраич. геометрии. Для неприводимого замкнутого множества V в дифференциальном аффинном пространстве, т. е. в аффинном пространстве над универсальным расширением U поля коэффициентов, определяется дифференциальный размерностный полином

$$\omega_V = \sum\nolimits_{0 \leqslant i \leqslant m} a_i \binom{x+i}{i},$$

где m — количество дифференцирований в поле F. Коэффициент a_m наз. **дифференциальной размерностью** множества V, степень полинома $\tau = \deg \omega_V$ — **дифференциальным типом множества** V, а коэффициент a_τ — его типичной дифференциальной размерностью. Полином ω_V является бирациональным инвариантом, но не является дифференциальным бирациональным инвариантом. Таковыми будут $a_m(V)$, $\tau(V)$ и $a_{\tau(V)}(V)$. Нахождение дифференциальных бирациональных инвариантов представляет значительный интерес. Другая проблема — оценить возможные значения полученных инвариантов. Пусть Σ — подмножество в $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Если элементы из Σ имеют ограниченный порядок, то дифференциальные размерностные полиномы компонент $\{\Sigma\}$ подчинены некоторым ограничениям. В частности, если для каждого Y_j порядок относительно Y_j любого элемента из Σ не превосходит e_j, то для любой компоненты многообразия $\{\Sigma\}$ из условия $a_m(\mathfrak{p})=0$ следует, что $a_{m-1}(\mathfrak{p}) \leqslant \Sigma e_j$. В общем случае имеется гипотеза, что

$$a_{\tau(p)}(p) \leqslant \sum\nolimits_{1 \leqslant j \leqslant n} \binom{e_j + m - \tau(p) - 1}{m - \tau(p)}.$$

Если множество $\Sigma \subset \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ состоит из n дифференциальных полиномов $F_1, \ldots, F_n$, то выдвигаются еще две гипотезы. Пусть

$$e_{ij} = \operatorname{ord}_{Y_j} F_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad i \leqslant j \leqslant n,$$

и

$$h = \max_{\pi} \left(l_{1\pi(1)} + \ldots + l_{n\pi(n)}\right),$$

где π пробегает симметрич. группу S_n. Первая гипотеза утверждает, что для любой компоненты $\mathfrak{p}$ многообразия $\{F_1, \ldots, F_n\}$ из $a_m(\mathfrak{p})=0$ следует, что $a_{m-1}(\mathfrak{p}) \leqslant \leqslant h$. Это предположение доказано в нек-рых частных случаях. Вторая гипотеза состоит в том, что для любой компоненты $\mathfrak{p}$ многообразия $\{F_1, \ldots, F_n\}$ из $a_m(\mathfrak{p})= =a_{m-1}(\mathfrak{p})=0$ следует, что $\omega_{\mathfrak{p}}=0$.

Одной из сложных проблем, исследуемых Д. а., является проблема разложения дифференциально алгебраич. многообразия на неприводимые компоненты. Даже если система Σ состоит из одного неприводимого дифференциального полинома σ, то соответствующее многообразие состоит, в общем случае, из нескольких компонент, одна из к-рых содержит все неособые решения уравнения $\sigma=0$ (хотя может содержать и особые решения), а все остальные компоненты состоят из решений, обращающих в 0 любую сепаранту дифференциального полинома σ. Случай гиперповерхности (система Σ из одного уравнения) особенно важен, т. к. всякое дифференциально алгебраич. многообразие над обыкновенным дифференциальным полем дифференциально бирационально изоморфно гиперповерхности.

Поскольку всякий простой дифференциальный идеал полностью определяется своим характеристич. множеством, проблему разложения дифференциально алгебраического многообразия $\{\mathfrak{p}\}$ можно разделить на две: 1) найти конечное множество $\mathfrak{A}$ авторедуцированных подмножеств в $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, каждое из к-рых является характеристич. множеством простого дифференциального идеала, содержащего Φ, такое, что $\mathfrak{A}$ включает в себя характеристич. множество каждой компоненты $\{\Phi\}$; 2) для данного авторедуцированного множества в $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ определить, является ли оно характеристич. множеством какой-нибудь компоненты $\{\Phi\}$.

Решение проблемы 2) в общем случае не известно (1978), но в важном специальном случае, когда Φ состоит из одного дифференциального полинома, полное решение дается двумя теоремами Ритта: теоремой о компонентах и теоремой о низких степенях (см. ниже).

Задача нахождения компонент многообразия $\{\Phi\}$ может быть также редуцирована к проблеме 1) и следующей проблеме: 3) для данных характеристич. множеств A и B простых дифференциальных идеалов $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ соответственно определить, имеет ли место включение $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$.

Проблема 3) также далека от решения. В частном случае, когда A состоит из одного неприводимого дифференциального полинома A и $\mathfrak{q}$ является дифференциальным идеалом $[Y_1, \ldots, Y_n]$, это — задача о том, лежит ли точка $(0, \ldots, 0)$ в общем решении дифференциального уравнения $A=0$.

Проблема 1) решена для конечного множества $\Phi \subset \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ «в принципе»: при помощи индуктивной процедуры (теория исключения для систем алгебраических дифференциальных уравнений) она сводится к некоторым «более легким» задачам о многочленах от конечного числа неизвестных над $\mathcal{F}$, т. е. задача об алгебраических дифференциальных уравнениях сводится к задаче об алгебраич. уравнениях.

Теорема о компонентах утверждает, что особые компоненты являются в свою очередь общими компонентами других дифференциальных полиномов, точнее: пусть $\mathcal{F}$ — дифференциальное поле и F — ненулевой дифференциальный полином в $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Если $\mathfrak{p}$ — какая-либо компонента идеала $\{F\}$ кольца $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, то существует неприводимый дифференциальный полином $B \in \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ такой, что $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_{\mathcal{F}}(B)$ — общая компонента многообразия $\{B\}$.

Т е о р е м а о н и з к и х с т е п е н я х дает критерий для определения того, является ли общая компонента неприводимого дифференциального полинома $A \in \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ компонентой для $\{F\}$. Точнее, пусть $F, A \in \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, порядки F и A относительно Y_n равны m и l соответственно, A_j есть j-я производная от A и S — сепаранта для A. Существуют $t \geqslant 0$ и $r > 0$ такие, что

$$S^t F = \sum_{j=1}^{r} c_j A^{p_j} A_1^{i_{1j}} A_2^{i_{2j}} \ldots A_{m-l}^{i_{n-l,j}},$$

где $p_j \geqslant 0$, $i_{kj} \geqslant 0$, никакие два множества $i_{1j}, \ldots, i_{m-l,j}$ не совпадают, порядок c_j относительно Y_n не превосходит l и c_j не делится на A. Если найдено такое разложение, то теорема о низких степенях гласит: общая компонента многообразия $\{A\}$ является компонентой многообразия $\{F\}$ тогда и только тогда, когда выписанное разложение содержит член $c_k A^{p_k}$, свободный от производных A, и степень к-рого ниже степени любого другого слагаемого в выписанном разложении, рассматриваемом как полином от $A, A_1, \ldots, A_{m-l}$ (в ненулевой характеристике это условие не является ни необходимым, ни достаточным).

Другое направление исследований в Д. а. представляет вопрос о расширении специализаций. Пусть $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ и $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ — точки в U^n, где U — универсальное расширение дифференциального поля $\mathcal{F}$. Точка $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ наз. д и ф ф е р е н ц и а л ь н о й с п е ц и а л и з а ц и е й т о ч к и $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ над $\mathcal{F}$ (что обозначается $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$), если любой дифференциальный полином, обращающийся в нуль в $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, обращается в нуль и в $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Если $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ и $1 \leqslant k \leqslant n$, то очевидно, что $(\eta_1, \ldots, \eta_t) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_t)$. Говорят, что первая специализация является расширением второй.

Пусть даны $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ и k и пусть $B \in \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ таков, что $B(\eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$. Доказано, что существует ненулевой дифференциальный полином $B_0 \in \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_k\}$, удовлетворяющий условию $B_0(\eta_1, \ldots, \eta_k) \neq 0$, и такой, что любая дифференциальная специализация $(\eta_1, \ldots, \eta_k) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$, для которой $B_0(\zeta_1, \ldots, \zeta_t) \neq 0$, может быть расширена до дифференциальной специализации $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \to (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, где $B(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \neq 0$. Однако, в отличие от ситуации в алгебраич. геометрии, дифференциальная специализация $(\eta_1, \ldots, \eta_k) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ не всегда может быть расширена до дифференциальной специализации $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ даже если элементы $\zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n$ будут принимать значение ∞. Таким образом возникает задача: найти критерий, когда дифференциальная специализация $(\eta_1, \ldots, \eta_k) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ может быть расширена до дифференциальной специализации $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$.

Частный случай этой проблемы встречается в проблеме неопределенных форм. Пусть полиномы $F, G \in \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ взаимно простые, $G \neq 0$, и F и G обращаются в нуль в точке $(0, \ldots, 0)$. Проблема состоит в том, чтобы отношению F/G приписать значение в точке $(0, \ldots, 0)$. Пусть элементы $t_1, \ldots, t_n \in U$ дифференциально алгебраически независимы над $\mathcal{F}$ и

$$u = F(t_1, \ldots, t_n)/G(t_1, \ldots, t_n).$$

Естественно сказать, что F/G допускает значение α в точке $(0, \ldots, 0)$, если $(t_1, \ldots, t_n, u) \underset{\mathcal{F}}{\to} (0, \ldots, 0, \alpha)$. Таким образом проблема сводится к нахождению расширений $(t_1, \ldots, t_n) \underset{\mathcal{F}}{\to} (0, \ldots, 0)$ до $(t_1, \ldots, t_n, u)$. Это эквивалентно определению элементов $\alpha \in U$ таких, что $(0, \ldots, 0, \alpha)$ является нулем общей компоненты дифференциального полинома $Y_{n+1}G-F \in \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_{n+1}\}$. Дж. Ритт (J. Ritt) предположил, что α либо определено однозначно (возможно, равно ∞), либо полностью произвольно; он доказал это предположение для обыкновенных дифференциальных полей при $n=1$, $\mathrm{ord}(FG)=1$. Изучаются свойства конкретных дифференциальных идеалов в кольце $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Для бесконечной последовательности $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p, \ldots$ простых дифференциальных идеалов в $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, где каждый Σ_i — собственный делитель идеала Σ_{i+1}, пересечение всех Σ_i является простым дифференциальным идеалом и размерность соответствующего многообразия $\mathfrak{M}$ больше размерности многообразия $\mathfrak{M}_i$, соответствующего Σ_i для любого i.

Из других результатов о дифференциально алгебраич. многообразиях следует отметить аналог теоремы Люрота: если $\mathfrak{G}$ расширение дифференциального поля $\mathcal{F}$, к-рое содержится в $\mathcal{F}\langle u\rangle$, то $\mathfrak{G}$ содержит элемент v такой, что $\mathcal{F}\langle v\rangle=\mathfrak{G}$.

Однако теория дифференциально алгебраич. кривых (многообразий дифференциальной размерности 1) находится в начальной стадии развития; даже для таких инвариантов, как род кривой в алгебраич. геометрии, дифференциально алгебраич. аналоги не найдены. Значительный интерес представляет теория пересечений дифференциально алгебраич. многообразий. Для них неверно утверждение, что пересечение двух неприводимых многообразий размерности p и q в n-мерном аффинном пространстве имеет размерность не менее $p+q-n$. Однако дифференциально алгебраич. многообразия, кроме размерности, характеризуются также порядком относительно выбранного базиса дифференциальной трансцендентности. Для порядка пересечения многообразий относительно специальным образом выбираемого базиса получены нек-рые оценки сверху. В аналитическом случае доказана следующая теорема о пересечении компонент одного дифференциального полинома: если F — дифференциальный полином от неизвестных $Y_1, \ldots, Y_n$, то нуль полинома F, содержащийся более чем в одной компоненте F, аннулирует $\partial F/\partial Y_{ij}$ для $i=1, \ldots, n$ и любого j. Понятия дифференциально алгебраич. многообразия можно обобщить (уже не предполагая его аффинным). В частности, можно ввести понятия дифференциально однородных полиномов и проективных дифференциально алгебраич. многообразий.

Для дифференциального поля F не существует дифференциально алгебраич. замыкания, не существует дифференциально алгебраич. замкнутых полей. Заменой их, в нек-ром смысле, являются так наз. «стесненные» расширения.

Одним из направлений в Д. а. является теория Галуа дифференциальных полей. Для дифференциального поля $\mathcal{F}$ строится универсальное дифференциальное расширение U и рассматривается множество дифференциальных изоморфизмов конечно порожденного дифференциально алгебраич. расширения $\mathfrak{G}$ поля $\mathcal{F}$ в U, тождественных на $\mathcal{F}$. Если $\mathfrak{G}$ является сильно нормальным расширением $\mathcal{F}$, то на множестве G дифференциальных изоморфизмов $\mathfrak{G}$ в U можно ввести структуру алгебраич. группы над полем констант K поля U. Частным случаем сильно нормальных расширений являются расширения Пикара — Вессио, получающиеся присоединением к полю $\mathcal{F}$ решений линейного однородного дифференциального уравнения с коэффициентами в поле $\mathcal{F}$. Группа Галуа расширения Пикара — Вессио является алгебраической матричной группой. Связь между промежуточными полями и подгруппами группы G описывается следующей теоремой.

Пусть $\mathfrak{G}$ — сильно нормальное расширение дифференциального поля $\mathcal{F}$ с полем констант C. а) Если $\mathcal{F}_1$ — дифференциальное поле такое, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ сильно нормально над $\mathcal{F}_1$, группа Галуа $G(\mathfrak{G}/\mathcal{F}_1)$ является C-подгруппой в $G(\mathfrak{G}/\mathcal{F})$ и поле инвариантов группы $G(\mathfrak{G}/\mathcal{F}_1)$ в $\mathfrak{G}$ совпадает с $\mathcal{F}_1$. б) Если G_1 является C-подгруппой группы $G(\mathfrak{G}/\mathcal{F})$ и $\mathcal{F}_1$ обозначает множество инвариантов группы G_1 в $\mathfrak{G}$, то $\mathcal{F}_1$ — дифференциальное поле, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathfrak{G}$ и $G(\mathfrak{G}/\mathcal{F}_1) = G_1$.

Нормальным делителям G_1 группы $G(\mathfrak{G}/F_1)$ соответствуют при этом сильно нормальные расширения $\mathcal{F}_1$ поля $\mathcal{F}$, и наоборот. Для связных разрешимых групп решена обратная задача Галуа, т. е. вопрос о существовании у поля $\mathcal{F}$ сильно нормального расширения $\mathfrak{G}$, группа Галуа к-рого $G(\mathfrak{G}/\mathcal{F})$ изоморфна заданной группе. Эта задача сведена к оценке размерности нек-рого векторного пространства над полем констант C поля $\mathcal{F}$ и ранга некоторой абелевой группы. Имеются результаты по теории Галуа бесконечных расширений. Смежными с теорией Галуа вопросами занимается теория интегрирования в конечном виде.

Разрабатывается теория дифференциальных алгебраич. групп, существенно отличающаяся от своего алгебраич. аналога. В частности, дифференциальное кольцо всюду определенных дифференциальных рациональных функций на аффинном дифференциальном алгебраич. множестве не является дифференциальным координатным кольцом, и в общем случае не конечно порождено как дифференциальная алгебра.

Среди результатов о приближении дифференциально алгебраич. функций рациональными может быть отмечен аналог теоремы Лиувилля о приближении алгебраич. чисел рациональными. Однако доказательство аналога теоремы Туэ — Зигеля — Рота остается (1978) проблемой.

Развивается теория колец с высшими дифференцированиями. При изучении объектов ненулевой характеристики высшие дифференцирования представляют более сильное средство. Если характеристика дифференциального кольца A равна p, то p-я степень любого элемента является константой, в то время как для колец с высшими дифференцированиями это не так. Для колец с высшими дифференцированиями получены аналоги многих перечисленных выше результатов, касающихся как теории пересечения идеалов, так и теории Галуа.

Лит.: [1] Капланский И., Введение в дифференциальную алгебру, пер. с англ., М., 1959; [2] Ritt J. F., Differential algebra, N. Y., 1950; [3] Kolchin E. R., Differential algebra and algebraic groups, N. Y.—L., 1973; [4] его же, Some problems in differential algebra, в сб.: Тр. международного конгресса математиков. Москва 1966, М., 1968.

А. В. Михалев, Е. В. Панкратьев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, в к-ром изучаются геометрич. образы, в первую очередь кривые и поверхности, методами математич. анализа. Обычно в Д. г. изучаются свойства кривых и поверхностей в малом, т. е. свойства сколь угодно малых их кусков. Кроме того, в Д. г. изучаются свойства семейств линий и поверхностей (см., напр., *Конгруэнция*, *Сеть*).

Д. г. возникла и развивалась в тесной связи с математич. анализом, к-рый сам в значительной степени вырос из задач геометрии. Многие геометрич. понятия предшествовали соответствующим понятиям анализа. Так, напр., понятие касательной предшествовало понятию производной, понятие площади и объема — понятию интеграла.

Возникновение Д. г. относится к 18 в. и связано с именами Л. Эйлера (L. Euler) и Г. Монжа (G. Monge). Первое сводное сочинение по теории поверхностей написано Г. Монжем (Приложение анализа к геометрии, 1795). В 1827 К. Гаусс (C. Gauss) опубликовал работу «Общее исследование о кривых поверхностях», в к-рой заложил основы теории поверхностей в ее современном виде. С тех пор Д. г. перестала быть только приложением анализа и заняла самостоятельное место в математике.

Открытие в 1826 Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии сыграло огромную роль в развитии всей геометрии, в том числе и Д. г. Фактически Н. И. Лобачевским было отвергнуто априорное представление о пространстве, господствовавшее ранее в математике и философии. Он открыл, что возможны пространства, отличные от евклидова. Эта идея Н. И. Лобачевского нашла отражение в различных математич. исследованиях. Так, в 1854 Б. Риман (B. Riemann) своей лекцией «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» заложил основы *римановой геометрии*, к-рая в применении к многомерным многообразиям находится в таком же отношении к геометрии n-мерного пространства, как *внутренняя геометрия* поверхности к евклидовой геометрии на плоскости.

Теоретико-групповая точка зрения Ф. Клейна (F. Klein), изложенная в его «Эрлангенской программе» (1872), т. е.: геометрия — учение об инвариантах групп преобразований, в применении к Д. г. была развита Э. Картаном (E. Cartan), к-рый построил теорию пространств *проективной связности* и *аффинной связности*.

В России школу Д. г. создали Ф. Миндинг и К. М. Петерсон. Их исследования посвящены в значительной степени вопросам *изгибания* поверхностей, т. е. таким непрерывным деформациям поверхностей, при которых внутренняя геометрия все время остается неизменной. Эти исследования были продолжены в работах многих русских и советских геометров.

Т е о р и я к р и в ы х. В теории кривых обычно рассматривают так наз. р е г у л я р н ы е к р и в ы е. Это — кривые, допускающие локальное задание уравнениями вида

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \tag{1}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — достаточно регулярные функции параметра t. В зависимости от свойств дифференцируемости функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, задающих кривую, говорят о степени регулярности кривой. Кривая допускает бесчисленное множество различных способов параметрич. задания уравнениями вида (1). Среди них особое значение имеют так наз. е с т е с т в е н н а я п а р а м е т р и з а ц и я, когда параметром служит длина дуги кривой, отсчитываемая от нек-рой фиксированной точки. Точка кривой наз. о б ы к н о в е н н о й, если при подходящем выборе прямоугольной декартовой системы координат x, y, z она допускает в окрестности этой точки задание уравнениями вида

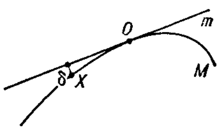


Рис. 1.

$$y=y(x), \quad z=z(x),$$

где $y(x)$ и $z(x)$ — дифференцируемые функции. В противном случае точка наз. о с о б о й (см. *Особая точка*). В Д. г. основное изучение кривой относится к окрестности обыкновенной точки. Для того чтобы точка кривой, заданной общим уравнением (1), была обыкновенной, достаточно, чтобы в этой точке было

$$x'^2+y'^2+z'^2\neq 0.$$

Ряд основных понятий теории кривых вводится с помощью понятия с о п р и к о с н о в е н и я множеств, к-рое состоит в следующем. Пусть M и m — два множества с общей точкой O. Говорят, что множество M имеет с m в точке O **соприкосновение порядка** $\alpha\geqslant 1$, если

$$\frac{\delta(X)}{|XO|^{\alpha}}\longrightarrow 0$$

при $X\to O$, где $\delta(X)$ — расстояние точки X множества M от m. Если в качестве M взять кривую, а в качестве m прямую, проходящую через точку O кривой, то при $\alpha\geqslant 1$ условие соприкосновения определяет *касательную* к кривой в точке O (рис. 1). Гладкая (дифференцируемая) кривая в каждой точке имеет определенную касательную. Направление касательной в точке t_0 кривой, задаваемой уравнениями (1), совпадает с направлением вектора $[x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)]$. В Д. г. выводятся уравнения касательной для различных способов аналитич. задания кривой. В частности, для кривой, задаваемой уравнениями (1), уравнения касательной в точке, отвечающей значению параметра t_0, будут

$$\frac{X-x_0}{x_0'}=\frac{Y-y_0}{y_0'}=\frac{Z-z_0}{z_0'},$$

где индекс $_0$ указывает на значение функций x, y, z и их производных в точке t_0. Если взять в качестве m плоскость, проходящую через точку O кривой M, то условие соприкосновения при $\alpha\geqslant 2$ определяет *соприкасающуюся плоскость* кривой (рис. 2). Дважды дифференцируемая кривая в каждой точке имеет соприкасающуюся плоскость. Она либо единственная, либо любая плоскость, проходящая через касательную кривой, является соприкасающейся.

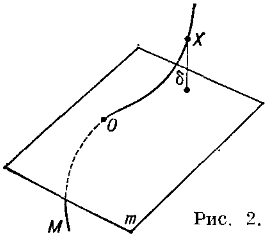


Рис. 2.

При движении вдоль кривой ее касательная вращается. Скорость этого вращения при равномерном, с единичной скоростью, движении вдоль кривой наз. *кривизной* кривой. В случае параметрич. задания кривой уравнениями (1) кривизна кривой определяется по формуле

$$k_1=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^{3/2}},$$

где $\boldsymbol{r}(t)$ — вектор-функция с координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Прямые и только прямые имеют всюду равную нулю кривизну. Дважды дифференцируемая кривая в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, имеет единственную соприкасающуюся плоскость. При движении вдоль кривой в окрестности такой точки соприкасающаяся плоскость вращается, причем касательная кривой является мгновенной осью этого вращения. Скорость вращения соприкасающейся плоскости при равномерном, с единичной скоростью, движении вдоль кривой наз. *кручением* кривой. В зависимости от направления вращения определяется знак кручения. Трижды дифференцируемая кривая в каждой точке с отличной от нуля кривизной имеет определенное кручение. В случае параметрич. задания кривой уравнениями (1) кручение кривой определяется по формуле

$$k_2=\frac{(\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|^2}.$$

Плоская кривая в каждой точке имеет кручение, равное нулю. Обратно, кривая с тождественно равным нулю кручением — плоская.

Прямая, перпендикулярная касательной, проходящая через точку касания, наз. *нормалью* к кривой. Нормаль, лежащую в соприкасающейся плоскости, наз. *главной нормалью*, а нормаль, перпендикулярную соприкасающейся плоскости, наз. *бинормалью*. Фигура, составленная из касательной, главной нормали и бинормали, а также из трех плоскостей, попарно содержащих эти прямые, наз. естественным трехгранником (трехгранником Френе). Если ребра естественного трехгранника в данной точке кривой принять за оси прямоугольной декартовой системы координат, то уравнение кривой в естественной параметризации имеет в окрестности этой точки вид

$$x = s + \ldots, \quad y = \frac{k_1}{2}s^2 + \ldots, \quad z = -\frac{k_1 k_2}{6}s^3 + \ldots,$$

где k_1 и k_2 — кривизна и кручение кривой в указанной точке. На рис. 3 изображены проекции кривой на

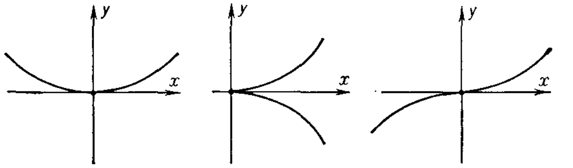


Рис. 3.

грани естественного трехгранника вблизи точки с отличными от нуля кривизной и кручением.

Единичные векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ касательной, главной нормали и бинормали кривой при движении вдоль кривой изменяются. При соответствующем выборе направления этих векторов из определения кривизны и кручения получаются формулы

$$\boldsymbol{\tau}' = k_1 \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\beta}' = k_2 \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\nu}' = -k_1 \boldsymbol{\tau} - k_2 \boldsymbol{\beta}, \qquad (2)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по дуге кривой. Формулы (2) наз. *Френе формулами*. Кривая с отличной от нуля кривизной определяется с точностью до положения в пространстве заданием ее кривизны и кручения в функции дуги s кривой. В связи с этим систему уравнений

$$k_1 = k_1(s), \quad k_2 = k_2(s)$$

наз. *натуральными уравнениями* кривой.

Важный класс кривых представляют п л о с к и е к р и в ы е, т. е. кривые, лежащие в плоскости. Для плоских кривых можно различать направление вращения касательной при движении вдоль кривой, поэтому кривизне можно приписывать знак в зависимости от направления этого вращения. Кривизна плоской кривой, задаваемой уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, определяется по формуле

$$k = \pm \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Знак + или — берется по соглашению, но сохраняется вдоль всей кривой. Для кривых вводится важное понятие *соприкасающейся окружности*. Это — окружность, имеющая с кривой соприкосновение порядка $\alpha \geqslant 2$ (рис. 4). Она существует в каждой точке дважды дифференцируемой кривой с отличной от нуля кривизной. Центр соприкасающейся окружности наз. ц е н т р о м к р и в и з н ы, а радиус — р а д и у с о м к р и в и з н ы. Радиус кривизны является величиной, обратной кривизне. Геометрич. место центров кривизны кривой наз. *эволютой*. Кривая, ортогонально пересекающая касательные кривой, наз. *эвольвентой* (рис. 5). Для эвольвенты данной кривой эволютой является сама кривая.

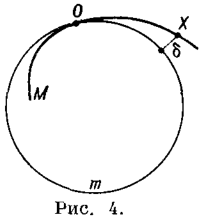


Рис. 4.

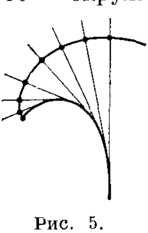


Рис. 5.

Кривая γ наз. *огибающей* семейства кривых γ_α, зависящих от параметра α, если она в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства и каждым своим отрезком касается бесконечного множества этих кривых.

Теория поверхностей и ее обобщения. В теории поверхностей обычно рассматриваются регулярные поверхности. Это — поверхности, допускающие локальное задание уравнениями вида

$$x=x(u,\ v),\quad y=y(u,\ v),\quad z=z(u,\ v),\qquad (3)$$

где $x(u,\ v)$, $y(u,\ v)$, $z(u,\ v)$ — регулярные функции параметров u, v. В зависимости от степени регулярности функций, входящих в уравнения поверхности, говорят о степени регулярности поверхности. Поверхность допускает бесчисленное множество способов параметрич. задания уравнениями вида (3). Точка поверхности наз. обыкновенной, если в ее окрестности при подходящем выборе системы координат x, y, z поверхность допускает задание вида

$$z=z(x,\ y),$$

где $z(x,\ y)$ — гладкая функция. В противном случае точка поверхности наз. особой. В Д. г. основное изучение поверхности ведется в окрестности обыкновенных точек. Для того чтобы точка $(u_0,\ v_0)$ поверхности, задаваемой уравнениями (3), была обыкновенной, достаточно, чтобы в этой точке ранг матрицы $\begin{pmatrix} x_u y_u z_u \\ x_v y_v z_v \end{pmatrix}$ был равен двум. Когда поверхность задается уравнениями вида (3), это условие обычно предполагается выполненным и специально не оговаривается. Уравнения (3) при фиксированном u или v задают кривые, лежащие на поверхности. Эти кривые наз. координатными линиями на поверхности. Параметры u, v наз. координатами на поверхности или гауссовыми криволинейными координатами.

Через понятие соприкосновения определяется *касательная плоскость* к поверхности. Это — плоскость, проходящая через точку поверхности и имеющая в этой точке с поверхностью соприкосновение порядка $\alpha\geqslant 1$. Гладкая (дифференцируемая) поверхность имеет в каждой точке единственную касательную плоскость. Касательная плоскость поверхности, задаваемой уравнениями (3), при условии (4) в точке $(u_0,\ v_0)$ определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} X-x^0 & Y-y^0 & Z-z^0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}=0,$$

где индекс 0 указывает на значение функций $x(u,\ v)$, $y(u,\ v)$, $z(u,\ v)$ и их производных в точке (u_0, v_0). Прямая, проходящая через точку поверхности перпендикулярно касательной плоскости в этой точке, наз. *нормалью* к поверхности. Если $\boldsymbol{r}(u,\ v)$ — вектор с координатами $x(u,\ v)$, $y(u, v)$, $z(u,\ v)$, то

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$$

имеет направление нормали поверхности.

Для поверхностей вводится важное понятие *соприкасающегося параболоида*. Это — параболоид, для к-рого нормаль к поверхности в данной точке является его осью и к-рый имеет соприкосновение порядка $\alpha\geqslant 2$ с поверхностью в этой точке. В каждой точке дважды дифференцируемой поверхности существует единственный соприкасающийся параболоид, к-рый может вырождаться в параболич. цилиндр или плоскость. Если поверхность отнести к прямоугольным декартовым координатам, приняв данную точку поверхности за начало координат, а касательную плоскость в ней за плоскость xy, то уравнение поверхности в окрестности точки касания будет

$$z=f(x, y),$$

а уравнение соприкасающегося параболоида в этой точке

$$z=\frac{1}{2}(f_{xx}x^2+2f_{xy}xy+f_{yy}y^2)$$

(производные функции f берутся в точке касания). В зависимости от вида соприкасающегося параболоида точки поверхности подразделяются на *эллиптические точки*, *гиперболические точки*, *параболические точки* и *уплощения точки*. Значение соприкасающегося параболоида состоит в том, что он воспроизводит форму поверхности с точностью до бесконечно малых 2-го порядка (касательная плоскость воспроизводит ее форму с точностью до бесконечно малых 1-го порядка).

С помощью соприкасающегося параболоида вводится понятие *сопряженных направлений* на поверхности. Именно два направления на поверхности в данной точке наз. сопряженными, если содержащие их прямые сопряжены относительно соприкасающегося параболоида в этой точке. Ортогональные сопряженные направления наз. главными. В данной точке поверхности, как правило, два главных направления. Исключение составляют точки уплощения и специальные эллиптич. точки (*округления точки*), в к-рых каждое направление главное. Линия, у к-рой в каждой точке направление является главным, наз. *кривизны линией*. В точках поверхности, не являющихся эллиптическими, существуют самосопряженные направления. Они наз. *асимптотическими направлениями*. Линия на поверхности, направление к-рой в каждой точке асимптотическое, наз. *асимптотической линией*.

Подобно тому, как для семейства кривых на плоскости, вводится понятие огибающей семейства поверхностей. При этом семейство поверхностей может быть однопараметрическим или двухпараметрическим. В теории поверхностей особое значение имеет огибающая однопараметрич. семейства плоскостей.

В теории поверхностей важную роль играют две дифференциальные *квадратичные формы поверхности*, связанные с поверхностью. Если через $\boldsymbol{r}(u, v)$ обозначить вектор точки на поверхности, а через $\boldsymbol{n}(u, v)$ единичный вектор нормали к поверхности, то эти квадратичные формы записываются в виде

$$I=d\boldsymbol{r}^2, \quad II=-d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{n}.$$

Коэффициенты первой и второй квадратичных форм обычно обозначаются E, $2F$, G и L, $2M$, N соответственно. Первая из этих форм дает расстояние на поверхности между точкой (u, v) и бесконечно близкой точкой $(u+du, v+dv)$:

$$ds=\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}.$$

Длина кривой, задаваемой на поверхности уравнениями $u=u(t)$, $v=v(t)$, вычисляется при помощи первой квадратичной формы

$$L=\int_{t_0}^{t}\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\,dt.$$

Первая квадратичная форма поверхности определяет углы между кривыми на поверхности. В частности, для угла ϑ между координатными линиями $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ в точке их пересечения имеет место формула

$$\cos\vartheta=\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Отсюда видно, что координатная сеть на поверхности ортогональна, если $F=0$. Площадь поверхности также определяется первой квадратичной формой и для области Ω на поверхности вычисляется по формуле

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Вторая квадратичная форма характеризует искривленность поверхности в пространстве. Именно, отношение второй квадратичной формы к первой

$$k=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}$$

представляет собой кривизну плоского сечения, нормального к поверхности, проведенного в направлении $du:dv$ (см. *Нормальная кривизна* поверхности). Существует простая связь между кривизной кривой, лежащей на поверхности, и кривизной нормального сечения поверхности, проведенного через касательную кривой (*Менье теорема*). Экстремальные значения нормальной кривизны поверхности в данной точке наз. *главными кривизнами*. Они достигаются по главным направлениям. Нормальная кривизна поверхности в произвольном направлении выражается через главные кривизны и углы, к-рые это направление образует с главными (*Эйлера формула*). Главные кривизны k_1 и k_2 определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} Ek-L & Fk-M \\ Fk-M & Gk-N \end{vmatrix}=0.$$

Их полусумма называется *средней кривизной* поверхности. Важный класс поверхностей составляют поверхности нулевой средней кривизны — так называемые *минимальные поверхности*. Они отличаются тем, что достаточно малый кусок такой поверхности имеет наименьшую площадь среди поверхностей с той же границей. Произведение $K=k_1k_2$ главных кривизн наз. *гауссовой кривизной* поверхности

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

Из этой формулы видно, что гауссова кривизна поверхности выражается через коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Однако гауссову кривизну можно выразить через коэффициенты только первой формы и их производные (*Гаусса теорема*).

Две поверхности, между к-рыми может быть установлен гомеоморфизм, сохраняющий длины кривых, наз. *изометричными поверхностями*.

Коэффициенты первой и второй квадратичных форм независимы. Одно из соотношений между этими коэффициентами дает теорема Гаусса. Существуют еще два соотношения, открытые К. М. Петерсоном и Д. Кодацци (D. Codazzi) (см. *Петерсона — Кодацци уравнения*). Эти три соотношения составляют полную систему независимых соотношений между коэффициентами первой и второй квадратичных форм поверхности. Согласно *Бонне теореме*, если для двух дифференциальных квадратичных форм, из к-рых первая положительно определенная, выполнены соотношения Гаусса, Петерсона, Кодацци, то существует, и притом единственная, с точностью до положения в пространстве, поверхность, имеющая эти формы первой и соответственно второй квадратичными формами.

Раздел теории поверхностей, в к-ром изучаются свойства фигур на поверхности, зависящие только от измерения длин кривых на поверхности, наз. *внутренней геометрией* поверхностей. Так как длины кривых определяются первой квадратичной формой, то речь идет о таких свойствах, к-рые связаны только с первой квадратичной формой. В частности, объектами внутренней геометрии поверхностей являются длины кривых, углы между кривыми, площадь и гауссова кривизна. Важным понятием внутренней геометрии поверхности является понятие *геодезической линии*. Так называется линия, к-рая на достаточно малом участке является кратчайшей среди всех кривых на поверхности, соединяющих ее концы. Следующее важное понятие внутренней геометрии поверхности — понятие *геодезической кривизны* кривой. *Гаусса — Бонне теорема* связывает интеграл от гауссовой кривизны поверхности по площади, интеграл от геодезич. кривизны края по его длине и эйлерову характеристику.

Внутренняя геометрия поверхности может быть построена как геометрия двумерного метрич. многообразия, в к-ром расстояние между бесконечно близкими точками (u, v) и $(u+du, v+dv)$ определяется с помощью заданной дифференциальной формы ds^2. При таком подходе к внутренней геометрии поверхности она допускает естественное обобщение, при к-ром заданное многообразие имеет любую размерность n, а метрика задается дифференциальной положительно определенной квадратичной формой n переменных $ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$. Дальнейшее обобщение состоит в отказе от положительной определенности формы ds^2. Это приводит к теории пространств общей теории относительности, в частности к *Минковского пространствам*. Если, наконец, отказаться и от квадратичной формы линейного элемента ds^2, а рассматривать общую положительную однородную форму первой степени от du^α, то получим *Финслерово пространство*. Еще более далеким обобщением внутренней геометрии поверхности является геометрия пространств со связностью данной группы, в частности геометрия пространств с *аффинной связностью*, *проективной связностью* и *конформной связностью*.

Лит.: [1] Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, t. 1—2, 3 ed., Bologna, 1927—30; [2] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applicatons géométriques du calcul infinitésimal, p. 1—4, 2 éd., P., 1894—1925; [3] Стройк Д. Дж., Очерк истории дифференциальной геометрии до XX столетия, пер. с англ., М.—Л., 1941; [4] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; [5] Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969; [6] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957; [7] его же, Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна, пер. с нем., т. 1, М.—Л., 1935; [8] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [9] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1—2, М.—Л., 1947—48; [10] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963; [11] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 1—2, М.—Л., 1939—1948; [12] Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.—Л., 1937; [13] его же, Теория конгруэнций, М.—Л., 1950; [14] Широков П. А., Широков А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959; [15] Норден А. П., Пространства аффинной связности, М.—Л., 1950.

А. В. Погорелов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ — раздел дифференциальной геометрии, изучающий различные *инфинитезимальные структуры* на многообразии и их связи со структурой многообразия и его топологией.

К середине 19 в. в результате возникновения неевклидовой геометрии Лобачевского, многомерной геометрии Грассмана, а также развития проективной геометрии и геометрии в комплексной области стало ясно, что привычная евклидова геометрия не является единственно возможной, и в математике с пользой можно развивать другие неевклидовы геометрии, независимо от их отношения к геометрии физического пространства.

В 1854 Б. Риман (B. Riemann) в лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» предложил новую, весьма плодотворную концепцию «многообразия» (см. *Риманово пространство*). Тем самым он положил начало *римановой геометрии*, являющейся важнейшей и наиболее разработанной частью Д. г. м. Концепция Римана не только позволила единообразно описать широкий класс геометрий (включая евклидову геометрию и неевклидову геометрию Лобачевского), но и дала математич. аппарат, в рамках к-рого разнообразные задачи математич. физики и анализа, связанные с дифференциальными уравнениями, получили геометрич. трактовку, что позволило применять для их решения различные геометрич. и топологич. соображения, открыв новые возможности для применения геометрии к анализу. Именно в рамках римановой геометрии А. Эйнштейну (A. Einstein) удалось реализовать идеи о физич. пространстве как о континууме, свойства к-рого определяются распределением материи. Римановым пространством наз. *дифференцируемое многообразие* M, у к-рого в каждом касательном пространстве T_pM задана евклидова метрика g_p (т. е. положительно определенное скалярное произведение), гладко зависящая от точки $p \in M$. Наличие в касательном пространстве T_pM риманова пространства M скалярного произведения позволяет по формулам евклидовой геометрии определить угол между инфинитезимальными кривыми (т. е. векторами из T_pM), длину инфинитезимальной кривой, а также объем k-мерного параллелепипеда в T_pM, а затем, с помощью интегрирования, длину гладкой кривой на M и объем k-мерного подмногообразия в M. Это, в свою очередь, позволяет рассматривать в рамках римановой геометрии различные вариационные задачи и, в частности, определить в римановом пространстве понятие геодезической (или *геодезической линии*) как кривой экстремальной длины и *минимальной поверхности*, как подмногообразия экстремального объема.

Изучение геодезических риманова пространства представляет собой одну из основных задач современной (глобальной) римановой геометрии. Важность ее для приложений определяется тем, что разнообразные динамич. системы физики интерпретируются как равномерное движение по геодезическим того или иного псевдориманова пространства. К таким системам относятся, напр., движения пробных тел (см. *Геодезических гипотеза*) в общей теории относительности, распространение света в неоднородной среде в приближении геометрической оптики, различные системы классической механики. Было обнаружено, что нек-рые важные уравнения с частными производными (уравнение движения идеальной жидкости и уравнение Эйнштейна общей теории относительности) интерпретируются как уравнения геодезических для нек-рых бесконечномерных римановых пространств, называемых также гильбертовыми многообразиями (см. [5], [12]). Эти открытия стимулировали развитие геометрии бесконечномерных многообразий — глобальный анализ.

Уравнения геодезических удается полностью проинтегрировать только в редких случаях. В связи с этим важную роль приобретают геометрич. и топологич. методы качественного исследования поведения геодезических. Важнейшим среди них является созданная М. Морсом (M. Morse) вариационная теория геодезических (см. *Морса теория*).

Обобщение теории Морса на псевдоримановы пространства привело к доказательству теорем сингулярности, утверждающих, что в рамках общей теории относительности физическое пространство-время, как правило, должно обладать сингулярностью (*неполными* геодезическими). Физически сингулярности интерпретируются, напр., как «черные дыры» (см. [7]).

Поведение геодезических риманова пространства в значительной степени определяется его *кривизны тензором* — тензором Римана — геометрическим объектом, характеризующим отклонение риманова пространства от евклидова. Подобно *гауссовой кривизне* поверхности, обобщением к-рой он является, тензор кривизны риманова пространства M в точке x определяет свойства пространства M в окрестности точки x. Более того, тензор кривизны несет богатую информацию о глобальных свойствах риманова пространства и о его топологии, напр. о *фундаментальной группе*, о *Бетти числах* и о *характеристических классах*. Изучение связи между локальными свойствами тензора кривизны и глобальными свойствами риманова пространства составляет одну из главных задач современной глобальной римановой геометрии.

Любое подмногообразие N риманова пространства M наследует от M структуру риманова пространства. Изучение подмногообразий риманова пространства, а также выяснение вопроса о реализации данного риманова пространства N в виде подмногообразия данного риманова пространства M составляют основное содержание геометрии подмногообразий (см. также *Изометрическое погружение*).

Важным направлением исследования римановых пространств, начатым работами С. Ли (S. Lie) и В. Киллинга (W. Killing), является изучение его группы движений (т. е. преобразований, сохраняющих длины кривых), к-рая всегда есть группа Ли. Многие римановы пространства M обладают достаточно богатой группой движений, причем наличие такой группы оказывается очень полезным при изучении целого ряда геометрич. вопросов. Наличие транзитивной группы движений G позволяет свести изучение геометрии и топологии пространства M к вопросам теории групп Ли (см. *Однородное пространство*).

Описание (связной) группы G движений риманова пространства (M, g) сводится к описанию алгебры Ли инфинитезимальных движений (или, иначе, *Киллинга векторов*), определяемых как поля скоростей однопараметрич. подгрупп группы G. Важную роль играют качественные геометрич. методы изучения киллинговых полей и выяснение связи между киллинговыми полями и геометрич. свойствами пространства, прежде всего свойствами его тензора кривизны. Так, напр., доказывается, что в компактном римановом пространстве с отрицательной кривизной Риччи не существует киллинговых полей; интегральная кривая киллингова поля, проходящая через точку экстремума его длины, является геодезической [16]; поведение киллингова поля X вблизи его неподвижных точек (точек, где $X=0$) определяет важный топологич. инвариант риманова пространства — его *Понтрягина числа* [19].

Особый интерес представляют римановы пространства, обладающие достаточно большой группой движений. Как обнаружил еще в 1868 Г. Гельмгольц (H. Helmholtz) и строго доказал С. Ли, n-мерное риманово пространство M, обладающее для данного n максимальной (в смысле размерности) группой движений является *постоянной кривизны пространством* (а именно, евклидовым пространством E^n, пространством Лобачевского Λ^n или сферич. пространством Римана S^n). Наиболее близкими к пространствам постоянной кривизны по своим свойствам являются *симметрические пространства*, т. е. римановы пространства, в к-рых геодезич. симметрия относительно произвольной точки является движением. Эти пространства всегда имеют транзитивную группу движений и допускают классификацию с помощью теории полупростых алгебр Ли (см. [8]).

Важную роль в дифференциальной геометрии играет понятие ковариантной производной $\nabla_X T$ тензорного поля T на M по направлению вектора $X \in T_p M$, к-рое ввел Г. Риччи (G. Ricci), развивший на основе этого понятия «абсолютное дифференциальное исчисление» (см. *Тензорный анализ*). Аппарат ковариантного дифференцирования оказался удобным для получения инвариантов геометрических объектов. Так, найденная Э. Кристоффелем (E. Christoffel) и Р. Липшицем (R. Liepschitz) полная система инвариантов римановой метрики состоит из тензора кривизны и его последовательных ковариантных производных.

Понятие ковариантной производной позволяет канонич. образом определить в римановом пространстве ряд дифференциальных операторов, свойства к-рых тесно связаны с геометрией пространства. Важнейшими из них являются оператор Бельтрами—Лапласа Δ, введенный Э.Бельтрами (E. Beltrami) и совпадающий для евклидова пространства с *Лапласа оператором*. Широкий класс линейных уравнений с частными производными 2-го порядка получает интерпретацию в рамках псевдоримановых пространств как уравнений, соответствующих оператору Бельтрами — Лапласа. Это позволяет использовать риманову геометрию для изучения уравнений. Первый пример такого подхода (для уравнений теплопроводности) был дан Б. Риманом [1]. К настоящему времени получены результаты, устанавливающие связь между свойствами оператора Бельтрами — Лапласа риманова пространства, в частности его спектром, и геометрией пространства — его кривизной, числом замкнутых геодезических и т. п. (см. [19]).

Геометрическую интерпретацию понятия ковариантной производной дал Т. Леви-Чивита (T. Levi-Civita). Он показал, что в римановом пространстве можно каноническим образом определить параллельный перенос касательных векторов (тензоров) вдоль кривых, а оператор ковариантной производной Риччи является оператором инфинитезимального параллельного переноса (см. *Леви-Чивита связность*).

В 1926 Э. Картан (E. Cartan) ввел понятие *голономии группы*, как группы Γ_p линейных преобразований касательного пространства T_pM риманова пространства M, порожденной операторами τ_γ параллельного обноса вдоль всевозможных петель γ. Оказалось, что группа голономии тесно связана с тензором кривизны пространства и для односвязного аналитич. пространства полностью определяется тензором кривизны в точке и всеми его ковариантными производными, — с другой стороны, она содержит нек-рую информацию о геометрии и топологии пространства. Так, зная группу голономии, можно найти все параллельные поля, а также решить вопрос о возможности разложения риманова пространства в прямое произведение двух других римановых пространств. По группе голономии симметрич. пространства можно восстановить само пространство и описать его группу движений.

В 1919 Г. Вейль (H. Weyl), развивая идею параллельного переноса Т. Леви-Чивита и обобщая риманову концепцию пространства, рассмотрел пространство *линейной связности* — многообразие, в к-ром задан закон параллельного переноса касательных векторов вдоль кривых. В пространстве линейной связности определяются понятия геодезической, тензора кривизны, группы голономии. Риманово пространство является частным случаем пространства линейной связности, для к-рого группа голономии содержится в ортогональной группе. Если группа голономии содержится в линейной группе гомотетий $\mathbb{R}^*\cdot SO(n)$, то связность наз. к о н ф о р м н о й. В этом случае на многообразии возникает *конформная структура*.

Развитие идей Г. Вейля привело к созданию современной теории *связности*, изучающей связность (т. е. закон параллельного перенесения слоев вдоль кривых на базе) в данном расслоении. В рамках теории связностей развивается, в частности, теория характеристич. классов [11], [14]. Важную роль играет понятие связности в современной физике. Различные физич. поля (в частности, электромагнитное и гравитационное) могут быть интерпретированы как поля кривизны связности в том или ином расслоении в рамках теории Янга — Миллса. Наличие связности в любом физич. расслоении, т. е. расслоении, сечениями к-рого являются физич. поля, вытекает из физич. возможности сравнения характеристик поля в разных точках пространства — времени.

Другим обобщением риманова пространства является *финслерово пространство*, определяемое как многообразие с финслеровой метрикой. Примером такой метрики является лагранжиан механич. системы. Финслеровы многообразия естественным образом появляются также и в оптике.

Новый групповой подход к обоснованию геометрии, известный под названием «эрлангенской программы», был предложен Ф. Клейном (F. Klein) в 1872. В качестве основного объекта изучения геометрии Ф. Клейн предложил рассматривать G-пространство — множество M вместе с заданной группой G его преобразований.

Основной задачей геометрии по Клейну является изучение инвариантов группы преобразований (см. *Эрлангенская программа*). Несмотря на то, что подход Ф. Клейна оказался слишком узким — многие важные римановы пространства обладают тривиальной группой движений,— этот подход сыграл важную роль в развитии Д. г. м. Он привлек внимание к важному классу — однородным пространствам (т. е. G-пространствам с транзитивной группой G), изучение геометрии к-рых сводится в рамках эрлангенской программы к вопросам теории групп Ли, и способствовал дальнейшему обобщению концепции Римана. Это обобщение состояло в рассмотрении геометрии других (нерймановых) инфинитезимальных структур на многообразии, задаваемых полем тех или иных геометрич. величин. Многие из этих структур впервые появились как инварианты группы движений того или иного однородного пространства.

Примерами неримановых инфинитезимальных геометрич. структур являются абсолютный параллелизм (поле реперов), *конформная связность*, *проективная связность*, *линейная связность*, распределение (или, более общо, *флаговая структура*), *почти комплексная структура*, *почти симплектическая структура*, поле *аффиноров* и т. п. Геометрия этих структур развивается по аналогии с римановой геометрией. Ее основными вопросами являются следующие: 1) Построение по данной геометрической структуре других (производных от нее) структур и, в частности, инвариантов. Иными словами, построение функторов из категории геометрич. структур данного типа в другие категории. 2) Изучение группы автоморфизмов геометрич. структуры, изучение геометрич. структур с достаточно большой группой автоморфизмов, описание структур данного типа с максимальной группой автоморфизмов, классификация структур данного типа на однородных пространствах. 3) Проблема эквивалентности, т. е. нахождение необходимых и достаточных условий для того, чтобы две геометрич. структуры были эквивалентны. 4) Изучение связи между топологией и структурой гладкого многообразия, с одной стороны, и свойствами заданной на нем геометрич. структуры — с другой. 5) Изучение отображений многообразий с геометрич. структурами, в частности изучение расслоений и подмногообразий.

Наиболее важным классом геометрических структур являются транзитивные структуры или G-структуры (см. [10]). Все перечисленные выше примеры структур (кроме поля аффиноров) являются G-структурами. Общая теория G-структур основана на двух фундаментальных идеях Э. Картана: понятии продолжения и понятии структурной функции. В частности, для римановой метрики эти понятия приводят к параллельному перенесению Леви-Чивиты и тензору кривизны. Теория G-структур конечного типа развивается во многом аналогично римановой геометрии. В геометрии

G-структур бесконечного типа наиболее изученные вопросы относятся к случаю локально плоских (интегрируемых) структур. Важнейшими из них являются комплексная структура (см. *Аналитическое многообразие*) и *симплектическая структура*, лежащая в основе гамильтоновой механики.

Э. Картан, развивая геометрич. методы решения систем уравнений с частными производными (систем Пфаффа), создал теорию внешних дифференциальных форм, оказавшую исключительно большое влияние на развитие дифференциальной геометрии. Оператор внешнего дифференцирования d оказался полезным для выражения условия интегрируемости систем уравнений с частными производными. Так, напр., необходимым и достаточным условием полной интегрируемости систем уравнений Пфаффа $\omega_1=\ldots=\omega_k=0$ является замкнутость идеала J, порожденного линейными дифференциальными формами $\omega_1, \ldots, \omega_k$ относительно $d(dJ\subset J)$ (*Фробениуса теорема*). Теория дифференциальных форм была успешно применена Э. Картаном для решения разнообразных задач дифференциальной геометрии и теории групп Ли *подвижного репера методом*. Теория интегрирования устанавливает связь между исчислением дифференциальных форм и гомологиями многообразия (см. *Рама когомологии*, *Дифференциальная форма*).

В римановом пространстве оператор внешнего дифференцирования d выражается через оператор ковариантного дифференцирования ∇. Более того, теория Ходжа устанавливает глубокую связь между оператором d и оператором Бельтрами — Лапласа Δ, действующим в пространстве дифференциальных форм, к-рый можно выразить через оператор ∇. Теорема Ходжа утверждает, что пространство когомологий компактного многообразия изоморфно пространству гармонических (т. е. аннулируемых оператором Δ) дифференциальных форм (см. *Гармоническая форма*). Это и ряд других утверждений теории Ходжа дает информацию о строении кольца когомологий H^*M риманова пространства, обладающего нетривиальными параллельными дифференциальными формами (см. *Параллельное поле*) и, тем самым, имеющего нестандартную группу голономии $\Gamma\neq SO(n)$, $O(n)$. Примерами таких пространств являются *кэлеровы многообразия* и *симметрические пространства*.

Важным направлением исследований современной дифференциальной геометрии является изучение естественных расслоений над произвольным многообразием M (касательных и кокасательных расслоений порядка k, тензорных расслоений, расслоений реперов порядка k, расслоений струй и др.) и выявление имеющихся там естественных (т. е. инвариантных относительно диффеоморфизмов многообразия M) геометрических структур. Примерами таких структур являются канонические симплектическая структура в кокасательном расслоении T^*M и контактная структура в расслоении $J^1(M, \mathbb{R})$ 1-струй функций на M, играющие важную роль в теории дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка и в гамильтоновой механике, а также оператор внешнего дифференцирования в расслоении $\Lambda^*(M)$ внешних дифференциальных форм на M.

Успешно развивается алгебраич. подход к дифференциальной геометрии. В качестве исходного понятия рассматривается не многообразие M, а коммутативное кольцо F (кольцо функций на многообразии), а само многообразие M определяется в терминах кольца F как пространство максимальных идеалов (см. *Схема*). Векторные поля на M определяются как дифференцирования кольца (см. *Дифференциальный оператор модуля*). Такой подход позволяет обобщить различные результаты дифференциальной геометрии и упростить их доказательство, применить идеи дифференциальной геометрии к другим математич. теориям (напр., теории колец и модулей) и, наоборот, использовать различные алгебраич. результаты в дифференциальной геометрии (см. [17]).

Лит.: [1] Риман Б., Избранные произведения, пер. с нем., М.—Л., 1948; [2] Картан Э., Геометрия римановых пространств, пер. с франц., М.—Л., 1936; [3] Каган В. Ф., Очерки по геометрии, М., 1963, с. 437—519; [4] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [5] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [6] Эйзенхард Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [7] Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства — времени, пер. с англ., М., 1977; [8] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [9] Бишоп Р.-Л., Криттенден Р.-Дж., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [10] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [11] Шварц Дж., Дифференциальная геометрия и топология, пер. с англ., М., 1970; [12] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [13] Зуланке П., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975; [14] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [15] Lichnérowicz A., Géométrie des groupes de transformations, P., 1958; [16] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, v. 1—2, N. Y., 1963—69; [17] Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В., Применения нелинейных дифференциальных уравнений, М., 1977; [18] Чжень С. С., «Успехи матем. наук», 1973, т. 33, в. 3, с. 15—111; [19] Молчанов С. А., там же, 1975, т. 30, в. 1, с. 3—59.

Д. В. Алексеевский.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГРУППА — абелева группа C, в к-рой задан такой эндоморфизм $d\colon C \to C$, что $d^2=0$. Этот эндоморфизм наз. **дифференциалом**. Элементы Д. г. наз. **цепями**, элементы ядра $\operatorname{Ker} d$ — **циклами**, элементы образа $\operatorname{Im} d$ — **границами**.

А. В. Михалев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ОКРЕСТНОСТЬ 2 k-го порядка многообразия M класса C^p, $p \geqslant k+1$,— локальная *карта* k-го итерированного *касательного расслоения* $T^k(M)$.

А. Б. Иванов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ — раздел топологии, изучающий топологич. проблемы теории дифференцируемых многообразий и дифференцируемых отображений, в частности диффеоморфизмов, погружений и расслоений. Попытки последовательного построения топологии на базе многообразий, отображений и дифференциальных форм предпринимались еще А. Пуанкаре (H. Poincaré) в конце 19 в., но в то время полная реализация этой программы оказалась невозможной. Систематическое построение Д. т. удалось осуществить лишь в 30-х гг. 20 в. благодаря усилиям ряда крупных математиков.

В Д. т. были выработаны важные общематематич. понятия — такие, как расслоенные пространства и связанные с ними дифференциально-геометрич. и топологич. понятия: связности, G-структуры, характеристич. классы, а также оснащенные многообразия. Большое значение в развитии Д. т. имела теория (ко)бордизмов, получившая ряд приложений в алгебраич. и аналитич. геометрии (теорема Римана — Роха), теории эллиптич. операторов (теорема об индексе), а также в самой топологии. В 50-х гг. были открыты различные гладкие структуры на сферах, затем была найдена классификация многообразий гомотопического типа сферы и доказана обобщенная гипотеза Пуанкаре, решена задача нахождения полной системы инвариантов всех односвязных многообразий (размерности не менее 5) относительно диффеоморфизмов. В 60-х гг. методами Д. т. был решен ряд основных топологич. проблем: установлена топологическая инвариантность характеристич. классов действительных многообразий, затем выяснено взаимоотношение между категориями дифференцируемых, кусочно линейных и топологических многообразий, были обобщены на неодносвязные многообразия (правда, недостаточно эффективно) методы классификации гладких многообразий, возникла алгебраич. K-теория и эрмитова K-теория. Для неодносвязных многообразий были открыты глубокие связи между характеристич. классами и эрмитовыми формами над фундаментальной группой многообразия и ее гомологиями. В дальнейшем в проблеме гомотопич. инвариантности классов и теории эрмитовых форм над коцепями с инволюцией были получены глубокие результаты методами функционального анализа и алгебраич. методами. Важное значение имеют методы, связанные с задачей классификации погружений одного многообразия в другое и ее различных обобщений.

Особым направлением Д. т., пограничным с вариационным исчислением, является глобальная теория экстремалей различных функционалов на многообразиях геодезических, к-рая оказала большое влияние на развитие самой топологии, позволив дать классификацию векторных расслоений и в дальнейшем создать метод исследования топологич. инвариантов, именуемый K-теорией. Многомерные глобальные задачи вариационного исчисления на многообразиях оказались более трудными, рассматривалась в основном проблема минимальных поверхностей, как экстремалей функционала типа Дирихле. Ряд принципиально новых топологических проблем многомерного вариационного исчисления возник в 70-х гг. из теории элементарных частиц.

Другим особым направлением Д. т., пограничным с дифференциальной геометрией и теорией динамич. систем, является теория слоений (вполне интегрируемых локально систем Пфаффа). Так, было установлено существование замкнутого слоя у любого двумерного гладкого слоения на многих трехмерных многообразиях (напр., сфере). Ряд результатов качественной теории слоений был направлен на выяснение вопроса о существовании на многообразиях важного класса гиперболических динамич. систем. В дальнейшем возникло другое — дифференциально-геометрич. направление теории слоений, где был построен своеобразный аналог теории характеристич. классов для слоений, основанный на теории гомологий алгебр Ли векторных полей.

Значительным успехом методов Д. т. является теория «типичных» особенностей отображений и функций. Методы Д. т. нашли применение в классических задачах алгебраической геометрии; ранее результаты этой области (в частности, теоремы об овалах алгебраич. кривых) стояли изолированно, в стороне от основного развития топологии и геометрии. Развитие Д. т. вызвало к жизни ряд новых проблем и методов в алгебре — напр., так наз. стабильная алгебра, метод формальных групп и др., а также в теории дифференциальных уравнений с частными производными и динамич. систем, функциональном анализе и геометрии.

В 70-х гг. резко усилился интерес современных областей физики к методам Д. т., связанный с увеличением роли так называемых калибровочных полей (связностей в расслоениях с базой пространство — время) в теории элементарных частиц, сложной топологией решений в теории жидких кристаллов, теории фазовых переходов, в частности в низкотемпературном жидком гелии.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976; [2] Whitney H., «Ann. Math.», 1936, v. 37, p. 645—80; [3] Том Р., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958, с. 293—351; [4] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 365—474; [5] Милнор Дж., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 6, с. 41—54; [6] Смейл С., там же, 1964, т. 19, в. 1, с. 125—38; [7] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология. Начальный курс, пер. с англ., М., 1972; [8] Munkres J., Elementary differential topology, N. Y., 1963; [9] Милнор Дж., Теорема об h-кобордизме, пер. с англ., М., 1969; [10] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [11] Рурк К., Сандерсон Б., Введение в кусочно линейную топологию, пер. с англ., М., 1974; [12] Wall С., Surgery on compact manifolds, N. Y.— L., 1970; [13] Browder W., Surgery on simply connected-manifolds, N. Y., 1972; [14] Коннер Л., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [15] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [16] Новиков С. П., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1965, т. 14, с. 248—78; [17] Целочисленные потоки и минимальные поверхности, пер. с англ. и итал., М., 1973; [18] Мищенко А. С., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 69—134; [19] Гладкие динамические системы, пер. с англ., М., 1977. *С. П. Новиков.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА — 1) Д. ф. степени p, p-форма на дифференцируемом многообразии M — p раз ковариантное тензорное поле на M. Ее можно интерпретировать также как p-линейное (над алгеброй $F(M)$ гладких вещественных функций на M) отображение $\mathscr{X}(M)^p \to F(M)$, где $\mathscr{X}(M)$ есть $F(M)$-модуль гладких векторных полей на M. Формы степени 1 наз. также пфаффовыми формами. Примером такой формы является дифференциал df гладкой функции f на M, определяемый следующим образом: $(df)(X)$, $X \in \mathscr{X}(M)$, есть производная Xf функции f по направлению поля X. Римановы метрики на многообразии M служат примерами симметрических Д. ф. степени 2. Часто, однако, термин «Д. ф.» относят к кососимметрическим, или внешним Д. ф., имеющим наибольшее число приложений.

Если $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальная система координат в области $U \subset M$, то формы $dx^1, \ldots, dx^n$ составляют базис в кокасательном пространстве $T_x(M)^*$, $x \in U$. Поэтому (см. *Внешняя алгебра*) любая внешняя p-форма α записывается в U в виде

$$\alpha = \sum_{i_1, \ldots, i_p} a_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, \qquad (1)$$

где $a_{i_1 \ldots i_p}$ — функции в U. В частности,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Пусть $E^p = E^p(M)$ — пространство всех внешних p-форм класса C^∞, причем $E^0(M) = F(M)$. Внешнее умножение $\alpha \wedge \beta$ превращает $E^*(M) = \sum_{p=0}^{n} E^p(M)$ (где $n = \dim M$) в ассоциативную градуированную алгебру над $F(M)$, удовлетворяющую условию градуированной коммутативности

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha, \qquad \alpha \in E^p, \ \beta \in E^q. \qquad (2)$$

Гладкое отображение многообразий $f: M \to N$ порождает гомоморфизм $f^*: E^*(N) \to E^*(M)$ алгебр над $\mathbb{R}$.

Понятие дифференциала функции обобщается следующим образом. Для всякого $p \geqslant 0$ существует единственное линейное отображение $d: E^p \to E^{p+1}$ (внешний дифференциал), совпадающее при $p=0$ с введенным выше дифференциалом и обладающее свойствами:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta,$$
$$\alpha \in E^p, \quad \beta \in E^q, \quad d(d\alpha) = 0.$$

Внешний дифференциал формы α, записанной в локальных координатах в виде (1), выражается формулой

$$d\alpha = \sum_{i_1, \ldots, i_p} da_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Его бескоординатная запись:

$$d\alpha(X_1, \ldots, X_{p+1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \alpha(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1}) -$$
$$- \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \times$$
$$\times \alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1}),$$

где $X_1, \ldots, X_{p+1} \in \mathscr{X}(M)$. Оператор взятия *Ли производной* L_X, $X \in \mathscr{X}(M)$, на Д. ф. связан с внешним дифференциалом соотношением

$$L_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d,$$

где $\iota_X : E^p \to E^{p-1}$ — оператор внутреннего умножения на X:

$$(\iota_X \alpha)(X_1, \ldots, X_{p-1}) = \alpha(X, X_1, \ldots, X_{p-1}),$$
$$\alpha \in E^p(M),\ X_1, \ldots, X_{p-1} \in \mathscr{X}(M).$$

Оператор d превращает $E^*(M)$ в коцепной комплекс (комплекс де Рама). Коциклы этого комплекса наз. замкнутыми формами, кограницы — точными формами. Согласно де *Рама теореме*, алгебра когомологий

$$H^*(M) = \sum\nolimits_{p=0}^{n} H^p(M)$$

комплекса де Рама изоморфна алгебре $H^*(M, \mathbb{R})$ вещественных когомологий многообразия M. В частности, $H^p(\mathbb{R}^n) = 0$ при $p > 0$ (лемма Пуанкаре).

С теоремой де Рама тесно связана другая операция — интегрирование Д. ф. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^p$, s — гладкое отображение $\mathbb{R}^p \to M$, определенное в окрестности замыкания $\bar{D}$. Если $\alpha \in E^p(M)$, то $s^*\alpha = a\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$, где a — гладкая функция в $\bar{D}$. Интеграл формы α по поверхности s определяется формулой

$$\int_s \alpha = \int_D a(x_1, \ldots, x_p)\,dx^1 \ldots dx^p.$$

Если D имеет кусочно гладкую границу, то справедлива формула

$$\int_s d\alpha = \int_{\partial s} \alpha, \quad \alpha \in E^{p-1}(M), \qquad (3)$$

где $\int_{\partial s} \alpha$ определяется как сумма интегралов формы α по гладким кускам границы, снабженных естественными параметризациями. Частными случаями этой формулы являются классич. формулы Ньютона — Лейбница, Грина, Гаусса — Остроградского, Стокса (см. также *Стокса теорема*). В силу формулы (3) каждая замкнутая p-форма α определяет p-мерный сингулярный коцикл, значение к-рого на симплексе s равно $\int_s \alpha$. Это соответствие как раз и реализует изоморфизм из теоремы де Рама.

Формула (3) была опубликована в 1899 А. Пуанкаре (см. [2]), к-рый рассматривал внешние формы как подинтегральные выражения для образования интегральных инвариантов. Одновременно Э. Картан (см. [3]) дал близкое к современному определение внешних форм и внешнего дифференциала (вначале на пфаффовых формах), подчеркнув связь своей конструкции с внешней алгеброй.

Наряду с определенными выше скалярными внешними формами можно рассматривать внешние Д. ф. со значениями в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$. Если V является алгеброй, то в пространстве $E(M, V)$ форм со значениями в V определено естественное умножение (обобщение внешнего умножения). Если при этом алгебра V ассоциативна, то и $E(M, V)$ ассоциативна; если V коммутативна, то $E(M, V)$ градуированно-коммутативна (формула (2)); если V — алгебра Ли, то $E(M, V)$ — градуированная алгебра Ли. Часто рассматривается также следующее, еще более общее понятие. Пусть F — гладкое векторное расслоенное пространство с базой M. Если сопоставить каждой точке $x \in M$ кососимметрическую p-линейную функцию на $T_x(M)$ со значениями в слое F_x расслоения F, то получится так наз. F-**значная** p-**форма**. F-значную p-форму можно интерпретировать также как p-линейное (над $F(M)$) отображение модуля $\mathcal{X}(M)^p$ в модуль гладких сечений расслоения F. Пространство таких форм обозначается $E^p(F)$. Если F задано локально постоянными функциями перехода или, что то же, в F задана плоская связность, то можно корректно определить комплекс де Рама и обобщить теорему де Рама на этот случай.

Формы со значениями в касательном расслоении $T(M)$ наз. также **векторными** Д. ф.; векторные p-формы можно отождествить с p раз ковариантными и 1 раз контравариантными тензорными полями на M, кососимметричными по ковариантным индексам. С помощью векторных Д. ф. описываются дифференцирования алгебры внешних форм $E(M)$ [4]. Векторные формы (а также их обобщение — струйные формы) находят применение в теории деформаций комплексных и других дифференциально-геометрич. структур на многообразиях.

Аналоги Д. ф. можно построить также в симплициальной теории. Одна из таких конструкций, восходящая к X. Уитни [5], может быть использована для вычисления рациональных когомологий симплициального комплекса K. **Кусочно линейной формой** (или PL-**формой**) на K наз. согласованный набор Д. ф., заданных на симплексах комплекса K и имеющих в качестве коэффициентов при записи в барицентрич. координатах многочлены с рациональными коэффициентами. PL-формы на K образуют градуированно-коммутативную дифференциальную алгебру $E^*_{PL}(K)$ над $\mathbb{Q}$. Интегрирование форм определяет изоморфизм алгебры когомологий этой алгебры на алгебру $H^*(|K|, \mathbb{Q})$, где $|K|$ — полиэдр, отвечающий комплексу K. Алгебра $E^*_{PL}(K)$ полностью определяет также рациональный гомотопич. тип (в частности, ранги гомотопич. групп) пространства $|K|$. Аналогично алгебра $E^*(M)$ на дифференцируемом многообразии M определяет его вещественный гомотопич. тип [9].

Исчисление внешних форм на комплексном аналитич. многообразии имеет ряд особенностей [6]. В этой ситуации обычно рассматриваются пространства $E^p(M, \mathbb{C})$ комплекснозначных форм или пространства $E^p(F)$, где F — голоморфное векторное расслоение на M. Имеет место разложение

$$E^p(M, \mathbb{C}) = \sum_{r+s=p} E^{r,s}(M),$$

где $E^{r,s}(M)$ — пространство форм типа (r, s), т. е. форм α, локально представимых в виде

$$\sum a_{i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s} dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_s},$$

где $(z^1, \ldots, z^n)$ — локальная аналитич. система координат на M. Аналогично

$$E^p(F) = \sum_{r+s=p} E^{r,s}(F).$$

Далее, $d = d' + d''$, где

$$d: E^{r,s}(M) \longrightarrow E^{r+1,s}(M), \qquad d'': E^{r,s}(M) \longrightarrow E^{r,s+1}(M).$$

При этом $d'^2 = d''^2 = 0$, так что d' и d'' определяют коцепные комплексы. Наиболее известен комплекс оператора d'' (**комплекс Дольбо**), когомологии к-рого обозначаются через $H^{r,s}(M)$. d''-коциклы типа $(p, 0)$ суть голоморфные p-формы (см. *Голоморфная форма*). Для d'' справедлива следующая **лемма Гротендика**: если α — форма типа (r, s) с $s > 0$ в окрестности нуля пространства $\mathbb{C}^n$ и $d''\alpha = 0$, то в меньшей окрестности нуля существует такая форма β типа $(r, s-1)$, что $\alpha = d''\beta$. Комплекс Дольбо можно определить также и для F-значных форм, где F — голоморфное векторное расслоение. Это приводит к пространствам когомологий $H^{r,s}(F)$. Из леммы Гротендика вытекает следующий изоморфизм:

$$H^{r,s}(F) \cong H^s(M, \Omega^r(F)),$$

где $\Omega^r(F)$ — пучок ростков голоморфных F-значных r-форм (теорема Дольбо). В частности,

$$H^{r,s}(M) \cong H^s(M, \Omega^r(M)),$$

где $\Omega^r(M)$ — пучок ростков голоморфных r-форм на M. Существует спектральная последовательность с первым членом $\Sigma_{r,s} H^{r,s}(M)$, сходящаяся к $H^*(M, \mathbb{C})$. Эйлерова характеристика $\chi(M)$ компактного комплексного многообразия M выражается через когомологии Дольбо по формуле

$$\chi(M) = \sum\nolimits_{r,s} (-1)^{r+s} \dim H^{r,s}(M).$$

Д. ф. являются важной составной частью аппарата дифференциальной геометрии (см. [7], [8]). Они систематически используются также в топологии, теории дифференциальных уравнений, механике, теории комплексных многообразий и функций многих комплексных переменных. Обобщением Д. ф., аналогичным обобщенным функциям, являются *потоки*. Алгебраич. аналог теории Д. ф. (см. *Дифференциалов модуль*) позволяет определить *дифференциальные формы* на алгебраических многообразиях и на аналитических пространствах (см. *Дифференциальное исчисление* на аналитических пространствах). См. также *Рама когомологии*, *Дифференциал на римановой поверхности*, *Гармоническая форма*, *Голоморфная форма*, *Лапласа оператор*.

Лит.: [1] де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956; [2] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 3, P., 1899; [3] Cartan E., Œuvres complètes, pt. 2, t. 1, p. 303—96; [4] Frölicher A., Nijenhuis A., «Proc. Koninkl. ned. akad. wet.», Ser. A, 1956, v. 59, № 3, p. 338—59; [5] Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, пер. с англ., М., 1960; [6] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [7] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [8] Картан А., Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, пер. с франц., М., 1971; [9] Гриффитс Ф. [и др.], «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 3, с. 119—52. *А. Л. Онищик.*

2) Д. ф. на алгебраическом многообразии — аналог понятия дифференциальной формы на дифференцируемом многообразии. Пусть X — неприводимое алгебраич. многообразие размерности d над алгебраически замкнутым полем k, K — его поле рациональных функций. Дифференциальной формой степени r на X наз. элемент K-пространства

$$\Omega^r(X) = \overset{r}{\wedge}\, \Omega^1_{K/k},$$

где $\Omega_{K/k}$ — *дифференциалов модуль* поля K над полем k. Если $x_1, \ldots, x_d$ — сепарабельный базис трансцендентности расширения K/k, то каждая Д. ф. $\omega \in \Omega^r(X)$ записывается в виде

$$\omega = \sum a_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r},$$

где $a_{i_1}, \ldots {}_{i_r} \in K$. Д. ф. ω наз. регулярной на открытом множестве $U \subset X$, если ω принадлежит подмодулю $\Omega^r_{k[U]/k}$ пространства $\Omega^r(X)$, рассматриваемого как модуль над кольцом $k[U]$ регулярных функций на подмножестве U. Д. ф. ω наз. регулярной, если любая точка $x \in X$ имеет такую окрестность U, что ω регулярна на U. Регулярные Д. ф. на X образуют модуль над $k[X]$, обозначаемый $\Omega^r[X]$. Его элементы отождествляются с сечениями пучка $\Omega^r_{X/k}$ на многообразии X. В окрестности любой точки $x \in X$ регулярная Д. ф. $\omega \in \Omega^r[X]$ записывается в виде

$$\omega = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_r} df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_r},$$

где функции $\alpha_{i_1 \ldots i_r}, f_{i_1}, \ldots, f_{i_r}$ регулярны в точке x. Если X — полное многообразие, то пространства $\Omega^r[X]$ конечномерны, а в случае, когда X неособое, размерность $p_g(X) = \dim_k \Omega^d[X]$ наз. геометрическим родом многообразия X. В случае, когда X — полное многообразие над полем комплексных чисел, пространство $\Omega^r[X]$ совпадает с пространством голоморфных Д. ф. степени r на соответствующем аналитич. пространстве X^{an}.

Пусть X — нормальное многообразие и $\omega \in \Omega^d[X]$; для любой точки $x \in X^{(1)}$ коразмерности 1 Д. ф. ω может быть записана в виде

$$\omega = a\, dt \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{d-1}, \qquad (*)$$

где a принадлежит полю частных K_x локального кольца $\mathcal{O}_{X,\,x}$, t — образующая его максимального идеала, $t_1, \ldots, t_{d-1}$ — сепарабельный базис трансцендентности над k поля вычетов кольца $\mathcal{O}_{X,\,x}$. Значение нормирования на элементе a, определяемое кольцом $\mathcal{O}_{X,\,x}$, не зависит от выбора представления ω в виде (*) и обозначается $\nu_x(\omega)$. Дивизор

$$D = \sum_{x \in X^{(1)}} \nu_x(\omega) \{\overline{x}\}$$

определен и наз. дивизором дифференциальной формы ω. Д. ф. ω регулярна тогда и только тогда, когда ее дивизор $D \geqslant 0$, т. е. $\nu_x(\omega) \geqslant 0$ для всех $x \in X^{(1)}$. Дивизоры любых двух Д. ф. эквивалентны, более того, дивизоры всех Д. ф. на данном алгебраич. многообразии образуют класс дивизоров относительно линейной эквивалентности. Этот класс наз. каноническим классом многообразия X и обозначается через K_X. Для неособого многообразия X класс K_X совпадает с первым классом Чженя обратимого пучка $\Omega^d_{X/h}$, в частности

$$\Omega^d_{X/k} \simeq \mathcal{O}_X(D)$$

для любого $D \in K_X$.

Для любого доминантного рационального отображения алгебраич. многообразий $f: X' \to X$ определен канонич. гомоморфизм

$$f^*: \Omega^r(X) \longrightarrow \Omega^r(X').$$

При этом, если X и X' — неособые, а X — полное, то f^* переводит регулярные Д. ф. в регулярные. В частности, если неособые полные многообразия X и X' бирационально изоморфны, то векторные пространства $\Omega^r[X]$ и $\Omega^r[X']$ изоморфны над полем k.

Для любого $i > 1$ элементы i-й симметрич. степени $S^i(\Omega^r(X))$ K-пространства $\Omega^r(X)$ наз. i-кратными дифференциальными формами степени r на X. Каждую такую Д. ф. можно рассматривать как рациональное сечение пучка $S^i(\Omega^r_{X/k})$. Регулярные сечения

$$\omega \in \Gamma\left(X,\ S^i\left(\Omega^r_{X/k}\right)\right)$$

наз. регулярными i-кратными дифференциальными формами степени r на X. Для неособого полного многообразия X размерность

$$P_i(X) = \dim_k \Gamma\left(X,\ S^i\left(\Omega^d_{X/k}\right)\right)$$

наз. i-родом многообразия X. Для бирационально изоморфных многообразий их i-роды совпадают.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Бальдассарри М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961. *И. В. Долгачев.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНТРОПИЯ — формальный аналог понятия энтропии для случайных величин, имеющих плотность распределения. Д. э. $h(\xi)$ случайной величины ξ, определенной на нек-ром вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, принимающей значения в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и имеющей плотность распределения $p(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, дается формулой

$$h(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x) \log p(x)\, dx$$

(здесь $0 \log 0$ считается равным 0). Таким образом, Д. э. совпадает с энтропией меры $P(\cdot)$ относительно меры Лебега $\lambda(\cdot)$, где $P(\cdot)$ — распределение ξ.

Понятие Д. э. оказывается полезным при вычислении различных теоретико-информационных характеристик, в первую очередь *информации количества* $J(\xi, \eta)$ случайных векторов ξ и η. В случае, когда $h(\xi)$, $h(\eta)$ и $h(\xi, \eta)$ (Д. э. пары (ξ, η)) конечны, справедлива формула:

$$J(\xi, \eta) = -h(\xi, \eta) + h(\xi) + h(\eta).$$

Среди свойств Д. э. можно отметить следующие два: 1) в отличие от обычной энтропии, Д. э. не ковариантна относительно изменения системы координат и может принимать отрицательные значения; 2) пусть $\varphi(\xi)$ — дискретизация с шагом Δx n-мерной случайной величины ξ, обладающей плотностью, тогда для энтропии $H(\varphi(\xi))$ справедлива формула

$$H(\varphi(\xi)) = -n \log \Delta x + h(\xi) + o(1)$$

при $\Delta x \to 0$. Таким образом, $H(\varphi(x)) \to +\infty$ при $\Delta x \to 0$, главный член асимптотики $H(\varphi(\xi))$ зависит от размерности пространства значений ξ, Д. э. задает следующий по порядку член асимптотич. разложения, не зависящий от Δx, причем это первый член, в к-ром проявляется зависимость от конкретного вида распределения ξ.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н., Яглом А. М., в кн.: Тр. 3-го Всесоюзного математического съезда, т. 3, М., 1958, с. 300—320; [2] Rényi A., Wahrscheinlichkeitsrechnung, B., 1962. *Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА — одно из основных понятий современной дифференциальной геометрии, включающее конкретные изучаемые в ней структуры. Д.-г. с. определяется для данного дифференцируемого многообразия M^n как дифференцируемое сечение в *расслоенном пространстве* (X_F, p_F, M^n) с базой M^n, ассоциированном с нек-рым главным расслоением (X, p, M^n), или, в другой терминологии, как дифференцируемое поле нек-рого геометрич. объекта на M^n. Здесь F является нек-рым дифференцируемым $\mathfrak{G}$-пространством, где $\mathfrak{G}$ — структурная группа Ли главного расслоения (X, p, M^n), или, в другой терминологии, пространством представления группы Ли $\mathfrak{G}$.

Если (X, p, M^n) — главное расслоение реперов в касательных к M^n пространствах, G — нек-рая замкнутая подгруппа в $\mathfrak{G} = GL(n, \mathbb{R})$, а F — однородное пространство $\mathfrak{G}/G$, то соответствующая Д.-г. с. на M^n наз. G-структурой, или инфинитезимальной структурой 1-го порядка. Напр., если G состоит из всех таких линейных преобразований (элементов из $GL(n, \mathbb{R})$), к-рые оставляют инвариантным m-мерное пространство в $\mathbb{R}^n$, то соответствующая G-структура определяет на M^n распределение m-мерных подпространств. Если G является ортогональной группой $O(n, \mathbb{R})$ — подгруппой элементов из $GL(n, \mathbb{R})$, сохраняющих скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, то G-структура есть риманова метрика на M^n, т. е. поле положительно определенного симметрич. тензора g_{ij}. Аналогично, частными случаями G-структуры на M^n являются почти комплексная и комплексная структуры. Обобщением G-структуры является инфинитезимальная структура r-го порядка, $r>1$ (или G-структура высшего порядка); здесь (X, p, M^n) является главным расслоением реперов r-го порядка на M^n, а G — замкнутой подгруппой его структурной группы D_n^r.

Важными частными случаями Д.-г. с. являются *связности*. Напр., связность в главном расслоении получается, если в роли M^n выступает пространство P нек-рого главного расслоения (P, p, B), а G-структурой на P является такое распределение m-мерных, $m=\dim P-\dim B$, подпространств, дополнительных к касательным пространствам слоев, к-рое инвариантно относительно действия в P структурной группы расслоения. Связности на многообразии M^n являются частными случаями Д.-г. с. на M^n, но более общими, чем G-структуры на M^n. Напр., аффинная связность на M^n, к-рую можно определить полем объекта связности $\Gamma_{ij}^k(x)$, получается как Д.-г. с. на M^n, при к-рой (X, p, M^n) является главным расслоением реперов 2-го порядка, $\mathfrak{G}$ — его структурной группой D_n^2, а пространство F представления группы D_n^2 — пространством $\mathbb{R}^{3n}$ с координатами Γ_{ij}^k, где представление определяется формулами

$$\Gamma_{i'j'}^{k'}=\left(A_{i'}^{i}A_{j'}^{j}\Gamma_{ij}^{k}+A_{i'j'}^{k}\right)A_{k}^{k'};$$

здесь

$$A_{i'}^{i}=\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)_0,\qquad A_{i'j'}^{k}=\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\,\partial x^{j'}}\right)_0$$

— координаты элемента группы D_n^2, и $A_{k'}^{j}A_{i}^{k'}=\delta_i^j$. В случае проективной связности на M^n имеют дело с нек-рым представлением группы D_n^3 в пространстве $\mathbb{R}^{3(n+1)}$, а в случае связностей высшего порядка — с представлениями группы D_n^r. При таком подходе теория Д.-г. с. имеет самый тесный контакт с геометрических объектов теорией.

Лит.: [1] Вагнер В. В., [Дополнение], в кн.: Веблен О., Уайтхед Дж., Основания дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1949, с. 135—223; [2] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—382; [3] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [4] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970. *Ю. Г. Лумисте.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ, многозначное дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение с многозначной правой частью,— соотношение

$$\frac{dx}{dt}\in F(t, x),\tag{1}$$

где $x=x(t)$ — неизвестная вектор-функция на нек-ром интервале, $F(t, x)$ — множество в n-мерном пространстве, зависящее от числа t и вектора $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Решением Д. в. (1) обычно называется абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t)$, почти всюду на рассматриваемом интервале изменения t удовлетворяющая соотношению

$$\frac{dx(t)}{dt}\in F(t, x(t)).$$

В частности, если множество $F(t, x)$ состоит из одной точки, то Д. в. превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение $dx/dt=F(t, x)$. Уравнения вида $Dx(t)\in F(t, x(t))$, где $Dx(t)$ — *контингенция* [1], в широком классе случаев равносильны Д. в.

К Д. в. приводят, напр., задача о функциях, удовлетворяющих дифференциальному уравнению с заданной точностью

$$\left|\frac{dx(t)}{dt}-f(t, x(t))\right|\leqslant\varepsilon;$$

дифференциальные неравенства

$$f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right) \geqslant 0;$$

дифференциальные уравнения с разрывной правой частью (см. [1], [2]); задачи теории оптимального управления (см. [3], [4]). В задачах управления обычно рассматривается уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x,\ u), \tag{2}$$

где $x=x(t)$ — искомая вектор-функция, а $u=u(t)$ — управление, т. е. вектор-функция, к-рую можно выбирать произвольно среди всех допустимых управлений (таких, что $u(t) \in U$ при каждом t, где U — заданное множество, могущее зависеть от t и от $x=x(t)$). Множество решений уравнения (2) при всевозможных допустимых управлениях $u=u(t)$ удовлетворяет Д. в. (1), где $F(t,\ x)$ — множество всех значений функции $f(t,\ x,\ u)$, когда u пробегает множество U.

В теории Д. в. обычно предполагается, что при любых t, x из рассматриваемой области G множество $F(t,\ x)$ есть непустое замкнутое ограниченное множество n-мерного пространства. Если множество $F(t,\ x)$ всегда выпукло, при каждом t оно является полунепрерывной сверху функцией от x (т. е. для любых t, x и любого $\varepsilon>0$ при всех достаточно малых $|x'-x|$ множество $F(t,\ x')$ содержится в ε-окрестности множества $F(t,\ x)$), а при каждом x— измеримой функцией от t (т. е. для любого x и любого шара B в n-мерном пространстве множество значений t, при к-рых множество $F(t,\ x) \cap B$ не пусто, является измеримым по Лебегу), и если $F(t,\ x)$ всегда содержится в шаре $|x| \leqslant m(t)$, где функция $m(t)$ интегрируема по Лебегу, то при любых начальных условиях $x(t_0)=x_0$, $(t_0,\ x_0) \in G$, решение Д. в. существует (см. [5]) и *интегральная воронка*, состоящая из таких решений, обладает обычными свойствами [5]. От требования выпуклости множества $F(t,\ x)$ можно отказаться, если оно непрерывно зависит от x. При этом существование решения сохраняется [6], а свойства интегральных воронок — нет.

Обзор работ по теоремам существования решений для Д. в. и связи Д. в. с задачами управления см. в [7]. Для Д. в. рассматривается понятие устойчивости [8]; изучаются существование ограниченных и периодич. решений и другие свойства Д. в. [9].

Лит.: [1] Барбашин Е. А., Алимов Ю. И., «Изв. вузов. Математика», 1962, № 1, с. 3—13; [2] Филиппов А. Ф., «Матем. сб.», 1960, т. 51, № 1, с. 99—128; [3] Wazewski T., «Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math.», 1961, t. 9, № 3, p. 151—55; [4] Филиппов А. Ф., «Вестн. МГУ. Сер. матем.», 1959, № 2, с. 25—32; [5] Davy J. L., «Bull. Austral. Math. Soc.», 1972, v. 6, № 3, p. 379—98; [6] Olech C., «Boll. Unione mat. ital.», 1975, t. 11, № 3, p. 189—97; [7] Благодатских В. И., Summer School on ord. dif. eq, «Difford 74» (Czechosl.), 1974, p. 29—67; [8] Roxin E., «J. Dif. Equat.», 1965, v. 1, № 2, p. 115—50; [9] Поволоцкий А. И., Ганго Е. А., «Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та», 1970, т. 464, ч. 1, с. 235—42.

А. Ф. Филиппов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — раздел математики, в к-ром изучаются понятия производной и дифференциала и способы их применения к исследованию функций. Развитие Д. и. тесно связано с развитием *интегрального исчисления*. Неразрывно и их содержание. Вместе они составляют основу математич. анализа, имеющего чрезвычайное значение для естествознания и техники. Основной предпосылкой для создания Д. и. явилось введение в математику переменных величин (Р. Декарт, R. Descartes). В общих чертах построение дифференциального и интегрального исчислений было завершено в трудах И. Ньютона (I. Newton) и Г. Лейбница (G. Leibniz) к концу 17 в., однако вопросы обоснования с помощью понятия предела были разработаны О. Коши (A. Cauchy) лишь в начале 19 в. Создание дифференциального и интегрального исчисления явилось началом периода бурного развития математики и связанных с ней прикладных наук. Под Д. и. обычно понимают классич. Д. и., в к-ром рассматриваются действительные функции одного или нескольких действительных переменных, хотя в современном толковании может идти речь и о Д. и. в абстрактных пространствах. Д. и. основано на понятиях *действительного числа*, *функции*, *предела* и *непрерывности* — важнейших понятий математики, сформировавшихся и получивших современное содержание в процессе развития математич. анализа и работы над его обоснованием. Центральные понятия Д. и.— *производная* и *дифференциал* — и разработанный в Д. и. аппарат, связанный с ними, доставляют средства для исследований функций, локально сходных с линейной функцией или многочленом, а именно такие функции в первую очередь интересны для приложений.

Производная. Пусть функция $y=f(x)$ определена в нек-рой окрестности точки x_0, $\Delta x \neq 0$ есть приращение аргумента, $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ — соответствующее приращение функции. Если существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он наз. производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$. Итак, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Операция вычисления производной наз. дифференцированием. Если $f'(x_0)$ — конечна, функция $f(x)$ наз. дифференцируемой в точке x_0. Функция, дифференцируемая в каждой точке нек-рого промежутка, наз. дифференцируемой в промежутке.

Геометрическое истолкование производной. Пусть C — плоская кривая, заданная в прямоугольной системе координат уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ определена и непрерывна в нек-ром интервале, $M(x_0, y_0)$ — фиксированная точка на C, $P(x, y)$ — произвольная точка кривой C, MP — секущая (см. рис. 1). Прямая MT наз. касательной к кривой C в точке M, если угол φ между секущей MP и этой прямой стремится к нулю, когда $x \to x_0$ (иными словами, когда точка $P \in C$ произвольным образом стремится к точке M). Если упомянутая касательная существует, то она — единственна. Если положить $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, то для угла β между MP и положительным направлением оси Ox будет иметь место равенство $\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (см. рис. 1). Кривая C имеет в точке M касательную в том и только в том случае, если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. существует $f'(x_0)$. При этом для угла α между касательной и положительным направлением оси Ox справедливо равенство $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. В случае конечной производной $f'(x_0)$ касательная образует с Ox острый угол, т. е.

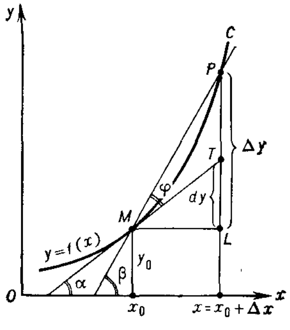


Рис. 1.

$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$; в случае $f'(x_0)=\infty$ касательная образует с Ox прямой угол (см. рис. 2). Таким образом, производная непрерывной функции $f(x)$ в точке x_0 совпадает с угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\alpha$ касательной к кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, в ее точке с абсциссой x_0.

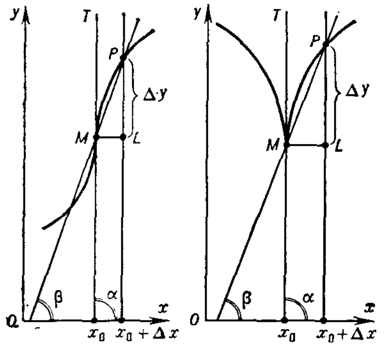


Рис. 2.

Механическое истолкование производной. Пусть точка M движется прямолинейно по закону $s=f(t)$. За время Δt точка M сместится на $\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)$. Отношение $\Delta s/\Delta t$ представляет собой среднюю скорость $v_{\text{ср}}$ точки за время Δt. При неравномерном движении $v_{\text{ср}}$ не постоянна. Мгновенной скоростью в момент t наз. предел средней скорости при $\Delta t \to 0$, т. е. $v=f'(t)$ (в предположении, что эта производная существует).

Таким образом, понятие производной доставляет общее решение задачи о построении касательной к плоской кривой и задачи о вычислении скорости прямолинейного движения. Эти две задачи явились основными предпосылками в формировании понятия производной.

Функция, имеющая в точке x_0 конечную производную, непрерывна в этой точке. В случае бесконечной производной этого может не быть. Непрерывная функция может не иметь ни конечной, ни бесконечной производной. Существуют непрерывные функции, не имеющие производной ни в одной точке области определения.

Для производных основных элементарных функций справедливы следующие формулы (в любой точке области определения; исключения оговариваются):

1) если $f(x)=C=\text{const}$, то $f'(x)=C'=0$;
2) если $f(x)=x$, то $f'(x)=1$;
3) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha=\text{const}$ ($x\neq 0$, если $\alpha\leqslant 1$);
4) $(a^x)'=a^x\ln a$, $a=\text{const}>0$, $a\neq 1$, в частности, $(e^x)'=e^x$;
5) $(\log_a x)'=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a}$, $a=\text{const}>0$, $a\neq 1$, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$;
6) $(\sin x)'=\cos x$;
7) $(\cos x)'=-\sin x$;
8) $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$;
9) $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$;
10) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\neq\pm 1$;
11) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\neq\pm 1$;
12) $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$;
13) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$;
14) $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$;
15) $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$;
16) $(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
17) $(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Имеют место также следующие правила дифференцирования;

1) Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функции

$$cu \text{ (где } c=\text{const}), \; u \pm v, \; uv, \; u/v \; (v \neq 0)$$

также дифференцируемы в этой точке, причем

$$(cu)' = cu',$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$
$$(uv)' = u'v + uv',$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

2) Теорема о производной сложной функции: если функция $y=f(u)$ дифференцируема в точке u_0, а функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, причем $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $y'_x=f'(u_0)\varphi'(x_0)$ или, в другой записи, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

3) Теорема о производной обратной функции: если $y=f(x)$ и $x=g(y)$ — две взаимно обратные возрастающие (или убывающие) функции, заданные на нек-рых интервалах, и существует конечная производная $f'(x_0)\neq 0$, то в точке $y_0=f(x_0)$ существует конечная производная $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$, или, в другой записи, $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. Эта теорема допускает обобщение: если, при выполнении прочих условий, $f'(x_0)=0$ $(f'(x_0)=\infty)$, то $g'(y_0)=\infty$ (соответственно $g'(y_0)=0$).

Односторонние производные. Если в точке x_0 существует предел

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он наз. правой производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 (в этом случае нет необходимости требовать, чтобы функция была определена всюду в нек-рой окрестности точки x_0; достаточно потребовать этого лишь для $x \geqslant x_0$). Аналогично определяется левая производная — как предел

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 в том и только в том случае, если в этой точке существуют равные между собой правая и левая производные. Для непрерывной функции существование в точке правой (соответственно левой) производной равносильно существованию в соответствующей точке ее графика правой (соответственно левой) односторонней полукасательной с угловым коэффициентом, равным значению этой односторонней производной. Точки, в к-рых полукасательные не образуют одну прямую, называются угловыми точками (см. рис. 3).

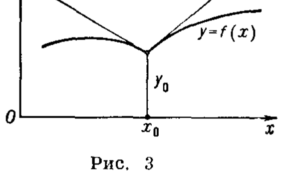


Рис. 3

Производные высших порядков. Пусть функция $y=f(x)$ имеет конечную производную $y'=f'(x)$ в каждой точке нек-рого интервала; эта производная наз. также первой производной, или производной первого порядка, к-рая, будучи функцией от x, может, в свою очередь, иметь производную $y''=f''(x)$, называемую второй производной, или производной второго порядка, функции $f(x)$, и т. д. Вообще n-я производная, или производная порядка n, определяется по индукции равенством $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$, в предположении, что $y^{(n-1)}$ определена на нек-ром интервале. При этом, наряду с $y^{(n)}$, используются также обозначения $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, а для $n=2, 3$ еще y'', $f''(x)$, y''', $f'''(x)$.

Вторая производная имеет механич. истолкование: это есть ускорение $w=\frac{d^2s}{dt^2}=f''(t)$ в момент t точки, движущейся прямолинейно по закону $s=f(t)$.

Дифференциал. Пусть функция $y=f(x)$ определена в нек-рой окрестности точки x и существует такое число A, что приращение Δy может быть представлено в виде $\Delta y=A\,\Delta x+\omega$, где $\omega/\Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Член $A\,\Delta x$ в этой сумме обычно обозначается символом dy, или $df(x)$, и наз. дифференциалом функции $f(x)$ (по переменному x) в точке x. Дифференциал есть главная линейная часть приращения функции (геометрически изображается отрезком LT на рис. 1, где MT — касательная к кривой $y=f(x)$ в рассматриваемой точке (x_0, y_0)).

Функция $y=f(x)$ имеет в точке x дифференциал в том и только в том случае, если она имеет в этой точке конечную производную

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A.$$

Функция, для к-рой существует дифференциал, наз. дифференцируемой в рассматриваемой точке. Таким образом, дифференцируемость функции означает одновременно и существование дифференциала, и существование конечной производной. При этом $dy=df(x)=f'(x)\Delta x$. Для независимого переменного x полагают $dx=\Delta x$ и поэтому можно писать $dy=f'(x)dx$, т. е. производная равна отношению дифференциалов:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

См. также *Дифференциал*.

Формулы и правила вычисления для производных приводят к соответствующим формулам и правилам вычисления для дифференциалов. В частности, справедлива теорема о дифференциале сложной функции: если функция $y=f(u)$ дифференцируема в точке u_0, а функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, причем $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $dy=f'(u_0)du$, где $du=\varphi'(x_0)dx$. Дифференциал сложной функции имеет точно такой же вид, как если бы переменное u было независимым. Это свойство наз. инвариантностью формы дифференциала. Однако, если u — независимое переменное, $du=\Delta u$ есть произвольное приращение, а если u — функция, то du есть дифференциал этой функции, вообще говоря, не совпадающий с ее приращением.

Дифференциалы высших порядков. Дифференциал dy наз. также первым дифференциалом, или дифференциалом первого порядка. Пусть $y=f(x)$ имеет дифференциал $dy=f'(x)dx$ в каждой точке нек-рого интервала. Здесь $dx=\Delta x$ — некоторое число, не зависящее от x, и поэтому можно считать $dx=\text{const}$. При этом dy оказывается функцией только от x и, в свою очередь, может иметь дифференциал, к-рый наз. вторым дифференциалом, или дифференциалом второго порядка функции $f(x)$, и т. д. Вообще, n-й дифференциал, или дифференциал n-го порядка, определяется по индукции равенством $d^n y = d(d^{n-1}y)$ в предположении, что дифференциал $d^{n-1}y$ определен в нек-ром интервале и что значение dx одно и то же на всех шагах. Свойство инвариантности для d^2y, d^3y, ..., вообще говоря, не имеет места (исключение составляет $y=f(u)$, где u — линейная функция).

Повторный дифференциал от dy имеет вид

$$\delta(dy) = f''(x)dx\delta x$$

и вторым дифференциалом является значение $\delta(dy)$ при $dx = \delta x$.

Основные теоремы и приложения Д. и. К основным теоремам Д. и. для функций одного переменного обычно относят *Ролля теорему*, *Лагранжа теорему* (о конечном приращении), *Коши теорему* и *Тейлора формулу*. Эти теоремы лежат в основе наиболее важных приложений Д. и. к исследованию свойств функций — таких, как возрастание и убывание функции, выпуклость и вогнутость графика, к отысканию *экстремумов*, *перегиба точек*, *асимптот* графика. Д. и. позволяет вычислять пределы функций во многих случаях, когда простейшие теоремы о пределах не позволяют сделать этого (см. *Неопределенностей раскрытие*). Д. и. находит широкие приложения во многих разделах математики, в частности в геометрии.

Д. и. функций многих переменных. Для простоты рассматривается случай функций двух переменных (за нек-рым исключением), хотя все понятия легко распространяются на случай трех и большего числа переменных. Пусть функция $z=f(x, y)$ задана в нек-рой окрестности точки (x_0, y_0) и пусть зафиксировано значение $y=y_0$. Тогда $f(x, y_0)$ есть функция только от x. Если она имеет в x_0 производную по x, то эта производная наз. частной производной функции $f(x, y)$ по x в точке (x_0, y_0) и обозначается $f'_x(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$. Итак, по определению,

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

где $\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ — частное приращение функции по x ($\partial z/\partial x$ в общем случае нельзя рассматривать как дробь; $\partial/\partial x$ есть символ операции).

Аналогично определяется частная производная по y:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

где $\Delta_y z$ — частное приращение функции по y. Другие обозначения: $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, z'_y, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Частные производные вычисляются по правилам дифференцирования функций одного переменного (при вычислении z'_x нужно считать $y=\text{const}$, а при вычислении z'_y — считать $x=\text{const}$).

Частными дифференциалами функции $z=f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) наз. (соответственно) выражения

$$d_x z = f'_x(x_0, y_0)\,dx; \quad d_y z = f'_y(x_0, y_0)\,dy$$

(где, как и в случае одного переменного, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ означают приращения независимых переменных).

Первые частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$, или частные производные первого порядка, являясь функциями от x и y, могут в свою очередь иметь частные производные по x и y, к-рые называются, по отношению к функции $z=f(x, y)$, частными производными второго порядка, или вторыми частными производными. При этом полагают

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Вместо $\partial^2 z/\partial x^2$ употребляют также обозначения

$$z''_{xx}, \; z''_{x^2}, \; \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \; f''_{xx}(x, y), \; f''_{x^2}(x, y);$$

вместо $\partial^2 z/\partial x \partial y$ — обозначения

$$z''_{xy}, \; \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \; f''_{xy}(x, y)$$

и т. д. Подобным образом вводятся частные производные третьего порядка и выше, и соответствующая символика: $\partial^n z/\partial x^n$ — функция z дифференцируется n раз по x; $\partial^n z/\partial x^p \partial y^q$, где $n=p+q$,— функция z дифференцируется p раз по x и q раз по y. Частные производные второго и высших порядков, являющиеся результатом дифференцирования по разным переменным, наз. смешанными частными производными.

Каждой частной производной отвечает нек-рый частный дифференциал, получаемый умножением ее на дифференциалы независимых переменных, взятые в степенях, равных числу дифференцирований по соответствующему переменному. Так получаются n-е частные дифференциалы, или частные дифференциалы n-го порядка:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^q} dx^p \, dy^q.$$

Справедлива следующая важная теорема о смешанных производных: если в нек-рой окрестности точки (x_0, y_0) функция $z=f(x, y)$ имеет смешанные частные производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ и эти производные непрерывны в точке (x_0, y_0), то $f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Функция $z=f(x, y)$ наз. дифференцируемой в точке (x_0, y_0) по совокупности переменных x и y, если она определена в нек-рой окрестности этой точки и ее полное приращение

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, \; y_0+\Delta y)-f(x_0, \; y_0)$$

может быть представлено в виде

$$\Delta z=A\,\Delta x+B\,\Delta y+\omega,$$

где A и B — некоторые числа, $\omega/\rho \to 0$ при $\rho= =\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \to 0$ (при условии, что точка $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ принадлежит упомянутой окрестности). При этом выражение

$$dz=df(x_0, \; y_0)=A\,\Delta x+B\,\Delta y$$

наз. полным дифференциалом (первого порядка) функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0); это есть главная линейная часть приращения. Функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке (обратное не всегда верно!). Более того, дифференцируемость влечет существование конечных частных производных

$$f'_x(x_0, \; y_0)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A, \quad f'_y(x_0, y_0)=\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}=B.$$

Таким образом, для функции, дифференцируемой в (x_0, y_0),

$$dz = df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y,$$

или

$$dz = df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\,dx + f'_y(x_0, y_0)\,dy,$$

если, подобно случаю одного переменного, положить для независимых переменных $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Существование конечных частных производных в общем случае не влечет ее дифференцируемости (здесь нарушается аналогия с функциями одного переменного). Достаточный признак дифференцируемости функции двух переменных: если в нек-рой окрестности точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет конечные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, непрерывные в точке (x_0, y_0), то f дифференцируема в этой точке. Геометрически полный дифференциал $df(x_0, y_0)$ есть приращение аппликаты касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0 = f(x_0, y_0)$ (см. рис. 4).

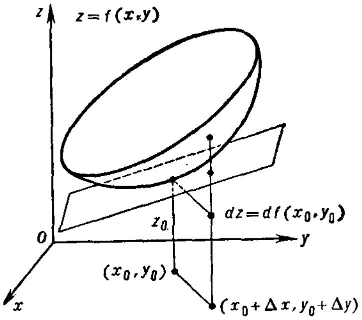


Рис. 4.

Полные дифференциалы высших порядков, подобно случаю функций одного переменного, вводятся по индукции равенством

$$d^n z = d\,(d^{n-1} z)$$

в предположении, что дифференциал $d^{n-1}z$ определен в нек-рой окрестности рассматриваемой точки и что приращения аргументов dx, dy берутся одни и те же на всех шагах. Аналогично определяются и повторные дифференциалы.

Производные и дифференциалы сложных функций. Пусть $w = f(u_1, \ldots, u_m)$ — функция m переменных, дифференцируемая в каждой точке открытой области D m-мерного евклидова пространства R^m, и пусть m функций $u_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $u_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$ — от n переменных заданы в открытой области G n-мерного евклидова пространства R^n. Пусть, наконец, точка $(u_1, \ldots, u_m)$, соответствующая точке $(x_1, \ldots, x_n) \in G$, не выходит из области D. Тогда справедливы следующие теоремы:

1) Если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ имеют конечные частные производные по $x_1, \ldots, x_n$, то сложная функция $w = f(u_1, \ldots, u_m)$ от $x_1, \ldots, x_n$ также имеет конечные частные производные по $x_1, \ldots, x_n$ и

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n}.$$

2) Если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ дифференцируемы по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_n$ в точке $(x_1, \ldots, x_n) \in G$, то и сложная функция $w = f(u_1, \ldots, u_m)$ дифференцируема в этой точке и

$$dw = \frac{\partial f}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}du_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}du_n,$$

где $du_1, \ldots, du_m$ — дифференциалы функций $u_1, \ldots, u_m$. Таким образом, свойство инвариантности первого дифференциала имеет место и для функций нескольких переменных. Для дифференциалов второго и высших порядков это свойство, вообще говоря, нарушается.

Д. и. применяется к изучению свойств функций многих переменных: к отысканию экстремумов, к исследованию функций, задаваемых одним или несколькими неявными уравнениями, к теории поверхностей и т. д. Одним из главных инструментов при этом является *Тейлора формула*.

Понятия производной и дифференциала и их простейшие свойства, связанные с арифметич. действиями над функциями и суперпозицией функций, включая свойство инвариантности первого дифференциала, почти без изменений распространяются на комплексные функции одного или нескольких действительных переменных, на действительные и комплексные вектор-функции одного или нескольких действительных переменных, на комплексные функции и вектор-функции одного или нескольких комплексных переменных. В функциональном анализе понятия производной и дифференциала распространяются на функции точки абстрактного пространства.

Лит.: История дифференциального и интегрального исчисления — [1] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1—3, М., 1970—72; [2] Рыбников К. А., История математики, т. 1—2, М., 1960—63; [3] Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966; [4] Стройк Д. Я., Краткий курс истории математики, пер. с нем., 2 изд., М., 1969; [5] Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963; [6] Cantor M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2 Aufl., Bd 1—4, Lpz., 1900—08.

Работы основоположников и классиков дифференциального и интегрального исчисления — [7] Ньютон И., Математические работы, пер. с латин., М.— Л., 1937; [8] Лейбниц Г., Избранные отрывки из математических сочинений, пер. с латин., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1; [9] Л'Опиталь Г. Ф. де, Анализ бесконечно малых, пер. с франц., М.— Л., 1935; [10] Эйлер Л., Введение в анализ бесконечных, пер. с латин., 2 изд., т. 1, М., 1961; [11] его же, Дифференциальное исчисление, пер. с латин., М.—Л., 1949; [12] Коши О. Л., Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, пер. с франц., СПБ, 1831; [13] его же, Алгебраический анализ, пер. с франц., Лейпциг, 1864.

Учебники и учебные пособия по дифференциальному и интегральному исчислению — [14] Гурса Э., Курс математического анализа, пер. с франц., 3 изд., т. 1, М.—Л., 1936; [15] Ла Валле Пуссен Ш. Ж. де, Курс анализа бесконечно малых, пер. с франц., т. 1, Л.—М., 1933; [16] Курант Р., Курс дифференциального и интегрального исчисления, пер. с нем. и англ., 4 изд., т. 1, М., 1967; [17] Рудин Р., Основы математического анализа, пер. с англ., М., 1966; [18] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, т. 1, 3 изд., М., 1971; т. 2, 1973; [19] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., М., 1973; [20] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., М., 1975; [21] Толстов Г. П., Элементы математического анализа, т. 1—2, 2 изд., М., 1974; [22] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 22 изд., т. 1, М., 1967; [23] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., М., 1969; [24] Хинчин А. Я., Восемь лекций по математическому анализу, 3 изд., М.— Л., 1948. *Г. П. Толстов.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ на аналитических пространствах — обобщение классич. исчисления дифференциальных форм и дифференциальных операторов на случай аналитич. пространств. Об исчислении дифференциальных форм на комплексных многообразиях см. *Дифференциальная форма.* Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — аналитич. пространство над полем k, Δ — диагональ в $X \times X$, J — пучок идеалов, определяющий Δ и порожденный всеми ростками вида $\pi_1^* f - \pi_2^* f$, где f — произвольный росток из $\mathcal{O}_X$, π_i: $X \times X \to X$ — проекция на i-й сомножитель.

Аналитич. пучок $\pi_1 (J/J^2) = \Omega_X^1$ наз. пучком аналитических дифференциальных форм первой степени на X. Если f — росток аналитич. функции на X, то росток $\pi_1^* f - \pi_2^* f$ принадлежит J и определяет элемент df пучка Ω_X^1, $\pi_1 (J/J^2)$, называемый дифференциалом ростка f. Тем самым определяется гомоморфизм пучков векторных пространств $d: \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X$. Если $X = k^n$, то Ω^1_X — свободный пучок, порожденный $dx_1, \ldots, dx_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в k^n. Если X — аналитич. подпространство в k^n, определяемое пучком идеалов J, то

$$\Omega^1_X \cong \Omega^1_{k^n}/(J\Omega^1_{k^n} + dJ)|_X.$$

С каждым аналитич. отображением $f: X \to Y$ можно связать пучок относительных дифференциалов Ω^1_X. Это — аналитич. пучок $\Omega^1_{X/Y}$, индуцирующий $\Omega^1_{X_s}$ на каждом слое $X_s (s \in Y)$ отображения f; он определяется из точной последовательности

$$f^*\Omega^1_Y \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

Пучок $\Theta_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$ наз. пучком ростков аналитических векторных полей на X. Если X — многообразие, то Ω^1_X и Θ_X — локально свободные пучки, естественно изоморфные пучкам ростков аналитич. сечений кокасательного и касательного расслоений над X соответственно.

Аналитич. пучки $\Omega^p_X = \overset{p}{\underset{\mathcal{O}_X}{\wedge}} \Omega^1_X$ наз. пучками аналитических внешних дифференциальных форм степени p на X (при $k = \mathbb{C}$ их наз. также *голоморфными формами*). Для всякого $p \geqslant 0$ определяется гомоморфизм пучков векторных пространств $d^p: \Omega^p_X \to \Omega^{p+1}_X$, совпадающий при $p=0$ с введенным выше и удовлетворяющий условию $d^{p+1}d^p = 0$. Комплекс пучков (Ω^*_X, d) наз. комплексом де Рама пространства X. Если X — многообразие и $k = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, то комплекс де Рама является точным комплексом пучков. Если X многообразие Штейна или вещественное аналитич. многообразие, то когомологии комплекса сечений $\Gamma(\Omega^*_X)$, часто также называемого комплексом де Рама, изоморфны $H^p(X, k)$.

Если X имеет особые точки, то комплекс де Рама не обязан быть точным. В случае, когда $k = \mathbb{C}$, достаточным условием точности комплекса де Рама в точке $x \in X$ является наличие у x комплексно аналитически стягиваемой окрестности. Гипергомологии комплекса $\Gamma(\Omega^*_X)$ при $k = \mathbb{C}$ содержат когомологии пространства X с коэффициентами в $\mathbb{C}$ в качестве прямого слагаемого и совпадают с ними, если X гладко. Сечения пучка Θ_X наз. аналитическими (а при $k = \mathbb{C}$ также голоморфными) векторными полями на X. Поле $Z \in \Gamma(X, \Theta_X)$ определяет для любого открытого $U \subset X$ дифференцирование алгебры аналитич. функций $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, действующее по формуле $\varphi \to Z\varphi = Z(d\varphi)$. Если $k = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, то Z задает локальную однопараметрич. группу $\exp t Z$ автоморфизмов пространства X. Если при этом X компактно, то группа $\exp t Z$ определима глобально.

Пространство $\Gamma(X, \Theta_X)$, снабженное скобкой Ли, является алгеброй Ли над k. Если X — компактное комплексное пространство, то $\Gamma(X, \Theta_X)$ — алгебра Ли группы $\mathrm{Aut}\, X$.

Дифференциальные операторы на аналитич. пространстве $(X, \mathcal{O}_X)$ определяются аналогично *дифференциальным операторам* модуля. Если F, G — аналитич. пучки на X, то линейным дифференциальным оператором порядка $\leqslant l$, действующим из F в G, наз. гомоморфизм пучков векторных пространств $F \to G$, продолжающийся до аналитич. гомоморфизма $F \otimes \pi_1(\mathcal{O}_{X \times X}/I^{l+1}) \to G$. Если X гладко, а F и G локально свободны, то это определение приводит к обычному понятию дифференциального оператора на векторном расслоении [3], [4].

Ростки линейных дифференциальных операторов $F \to G$ образуют аналитич. пучок $\mathrm{Diff}(F, G)$ с фильтрацией

$$\mathrm{Diff}^0(F, G) \subset \mathrm{Diff}^1(F, G) \subset \ldots \subset \mathrm{Diff}^l(F, G) \subset \ldots,$$

где $\mathrm{Diff}^l(F, G)$ — пучок ростков операторов порядка $\leqslant l$. В частности, $\mathrm{Diff}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ — фильтрованный пучок ассоциативных алгебр над k относительно композиции отображений. Имеем

$$\mathrm{Diff}^0(F, G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G),$$

$$\mathrm{Diff}^1(\mathcal{O}, \mathcal{O})/\mathrm{Diff}^0(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \cong \Theta_X.$$

Изучение пучка $\mathrm{Diff}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ проведено (в негладком случае) лишь для нек-рых специальных типов особых точек. В частности, в случае неприводимого одномерного комплексного пространства X доказано, что пучок алгебр $\mathrm{Diff}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ и соответствующий пучок градуированных алгебр допускают конечные системы образующих [5].

Лит.: [1] Malgrange B., «Enseign. math.», 1968, ser. 2, t. 14, № 1, p. 1—20; [2] Koup W., «Math. Ann.», 1965, Bd 160, № 1, S. 72—92; [3] Шварц Л., Комплексные многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными, пер. с нем., М., 1964; [4] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [5] Bloom Th., «Rice Univ. Stud.», 1973, v. 59, № 2, p. 13—19; [6] Berger R., [u. a.], Differentialrechnung in der anaytilschen Geometrie, B.— Hdlb.—N. Y., 1967; [7] Fischer G., Complex analytic geometry, B.— Hdlb.— N. Y., 1976. *Д. А. Пономарев.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ КОЛЬЦО — кольцо, в к-ром отмечено одно или несколько дифференцирований (см. *Дифференцирование* кольца). Если $d(a)=0$ для всех этих дифференцирований, то a наз. константой. *Л. А. Скорняков.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО — неравенство, связывающее аргумент, неизвестную функцию и ее производные, напр.,

$$y'(x) > f(x, y(x)), \qquad (1)$$

где $y(x)$ — неизвестная функция аргумента x. Основная проблема теории Д. н.— по заданному Д. н. и дополнительным (начальным или граничным) условиям описать совокупность всех его решений.

Большую группу составляют Д. н., получающиеся из дифференциальных уравнений хорошо изученных классов заменой знака равенства на знак неравенства, что равносильно добавлению к одной из частей уравнения заранее не уточняемой функции определенного знака. Представляет интерес сравнение решений таких Д. н. с решениями соответствующих дифференциальных уравнений. Так, для любого решения Д. н. (1) справедливы оценки [1]:

$$\begin{aligned} y(x) &< z(x) \quad \text{при} \quad x_1 \leqslant x < x_0, \\ y(x) &> z(x) \quad \text{при} \quad x_0 < x \leqslant x_2, \end{aligned} \qquad (2)$$

где

$$z' = f(x, z), \qquad z(x_0) = y(x_0),$$

на любом интервале $[x_1, x_2]$ существования обоих решений. Это простое утверждение широко применяется для оценок решений дифференциальных уравнений (путем перехода к соответствующему Д. н. с легко указываемым частным решением), области продолжимости решений, разности между двумя решениями, для вывода условий единственности решения и т. д. Справедливо аналогичное утверждение [2] и для Д. н. (неравенство Чаплыгина)

$$y^{(m)} + a_1(x)\, y^{(m-1)} + \ldots + a_m(x)\, y > f(x).$$

Здесь оценки типа (2) для решений, удовлетворяющих при $x=x_0$ одинаковым начальным условиям, гарантируются лишь на интервале, определяемом коэффициентами $a_1, \ldots, a_m$: напр., для Д. н. $y''+y>f(x)$ это интервал $[x_0-\pi, x_0+\pi]$.

Для системы Д. н.

$$y'_i(x) > f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

было указано [3], что если каждая функция f_i не убывает по аргументам $y_j (\forall j \neq i)$, то имеет место оценка

$$y_i(x) > z_i(x) \text{ при } x_0 < x \leqslant x_2; \; i=1, \ldots, n,$$

подобная (2). Развитие этих рассмотрений приводит к теории Д. н. в пространствах с конусом.

Разновидностью Д. н. является требование знакопостоянства полной производной от заданной функции:

$$\frac{d}{dx} F(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y'_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_n} y'_n \leqslant 0,$$

применяемое в теории устойчивости.

Представителем другой группы является Д. н.

$$\max_{i=1, \ldots, n} | y'_i - f_i(x, y_1, \ldots, y_n) | \leqslant \varepsilon \qquad (3)$$

($\varepsilon>0$ задано), исследованное впервые в связи с общей концепцией о приближенном описании реальной задачи дифференциальными уравнениями [4]. Здесь интересно описание *интегральной воронки*, т. е. совокупности всех точек всех решений, удовлетворяющих заданным начальным условиям, в частности поведение воронки при $x \to \infty$. Естественным обобщением Д. н. (3) является дифференциальное уравнение в контингенциях, к-рое задается с помощью поля конусов, обобщающего понятие поля направлений.

Для Д. н. изучалась и теория краевых задач. Д. н. $\Delta u \geqslant 0$ (Δ — оператор Лапласа) определяет *субгармонические функции*, Д. н. $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leqslant 0$ определяет *субпараболические функции*. Рассматривались и более общего вида Д. н. (обеих упомянутых выше групп) с частными производными для дифференциальных операторов различных типов.

Лит.: [1] Petrovitsch M., «Math. Ann.», 1901, Bd 54, № 3, S. 417—36; [2] Чаплыгин С. А., Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М., 1919; [3] Ważewski T., «Ann. Soc. polon. math.», 1950, t. 23, p. 112—66; [4] Bohl P., «J. reine und angew. Math.», 1914, Bd 144, S. 284—313; [5] Haar A., в кн.: «Atti del Congresso Internazionale dei Mathematici. Bologna». 1928, t. 3, Bologna, 1930, p. 5—10; [6] Walter W., Differential- und Integral-Ungleichungen und ihre Anwendung bei Abschätzungs- und Eindeutigkeitsproblemen, B., 1964; [7] Szarski J., Differential inequalities, Wars., 1965; [8] Lakshmikantham V., Leela S., Differential and integral inequalities, v. 1—2, N. Y., 1969. *А. Д. Мышкис.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ — *дифференциальное кольцо*, являющееся полем. Множество констант Д. п. является подполем, оно наз. *полем констант*. *Л. А. Скорняков.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ АБСТРАКТНОЕ — дифференциальное уравнение в том или ином абстрактном пространстве (гильбертовом, банаховом и т. п.) или дифференциальное уравнение с операторными коэффициентами. Классическим и наиболее часто встречающимся Д. у. а. является уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - Au = f, \qquad (1)$$

где неизвестная функция $u=u(t)$ принадлежит нек-рому функциональному пространству X, $0 \leqslant t \leqslant T \leqslant \infty$, и $A: X \to X$ — оператор (как правило — линейный), действующий в этом пространстве. Если оператор A ограничен и постоянен (не зависит от t), то формула

$$u(t) + e^{tA} u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau)\, d\tau$$

дает единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(0)=u_0$. Для переменного $A(t)$

оператор $e^{(t-\tau)A}$ заменяется эволюционным оператором $u(t, \tau)$. В случае неограниченного оператора A решения задачи Коши $u(0)=u_0$ могут: не существовать при нек-рых u_0, быть не единственными, обрываться при $t<T$. Исчерпывающее изучение однородного ($f=0$) уравнения (1) с постоянным оператором дается теорией полугрупп, а вопросы существования и единственности решаются в терминах свойств резольвенты A (см. [1], [5]). Этот же метод применим и для переменного оператора при условиях его гладкой зависимости от t (см. [5]). Другим методом изучения уравнения (1), дающим, как правило, более грубые результаты, но применимым к более широким классам уравнений (в некоторых случаях — даже к нелинейным), является использование энергетич. неравенств: $\|u\|\leqslant c\|Lu\|$, получаемых также за счет тех или иных предположений относительно A. Для гильбертова пространства X постулируются, как правило, различные свойства положительности скалярного произведения (Au, u) (см. [2]). Все сказанное в значительной степени распространяется и на более общее Д. у. а.

$$\frac{d^2u}{dt^2}+A_1\frac{du}{dt}+A_2u=f, \tag{2}$$

рассматриваемое при условиях $u(0)=u_0$, $u_t'(0)=u_1$. Зачастую, изучение уравнения (2) тем или иным приемом (сведением к системе уравнений 1-го порядка, заменой $u=\int_0^t v(\tau)d\tau$, расщеплением левой части на произведение двух операторов 1-го порядка и т. п.) сводится к изучению уравнения (1). Основным источником интереса к Д. у. а. является возможность сведения к уравнениям вида (1) или (2) так наз. смешанных задач в цилиндрич. областях для классических параболич. и гиперболич. уравнений 2-го порядка: функция $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ рассматривается как функция t со значениями в соответствующем пространстве функций от x, а дифференцирования по x, вместе с граничными условиями на боковых поверхностях цилиндра (образующие к-рого параллельны оси t), порождают операторы A, A_k. Уравнения (1), (2), в к-рых постулируемые свойства операторов A, A_k совпадают с получающимися в описанной выше ситуации, наз. абстрактными параболическими или гиперболическими. Реже рассматриваются абстрактные эллиптич. операторы.

Часто формулируются в терминах полугрупп и уравнения (1) задачи в теории рассеяния [3], рассматривающей интервал $-\infty<t<+\infty$. Сведение задач для дифференциальных уравнений с частными производными к задачам для Д. у. а. (1) и (2) оказывается весьма удобным при разработке приближенных (напр., разностных [4]) методов решения и при рассмотрении асимптотич. методов («малый» и «большой» параметры). Общие Д. у. а. с оператором

$$\sum_{k=0}^{m} A_k\frac{d^k}{dt^k}$$

и граничными условиями на обоих концах интервала $(0, T)$ при неограниченных операторах A_k поддаются содержательному изучению лишь при весьма специальных предположениях относительно A_k. Для ограниченных A_k соответствующее обобщение теории обыкновенных дифференциальных уравнений не вызывает затруднений.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., [2 изд.], М., 1962; [2] Lions J., Equations différentielles operationelles et problèmes aux limites, B., 1961; [3] Лакс П., Филлипс Р., Теория рассеяния, пер. с англ., М., 1971; [4] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [5] Крейн С. Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971.

А. А. Дезин.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ — обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})=0, \tag{1}$$

левая часть к-рого может быть записана в виде полной производной:

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})=0.$$

Другими словами, уравнение (1) является Д. у. в п. д., если существует такая дифференцируемая функция $\Phi(x,\ u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_{n-1})$, что

$$F(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)\equiv\Phi'_x+u_1\Phi'_{u_0}+u_2\Phi'_{u_1}+\ldots+u_n\Phi'_{u_{n-1}}$$

тождественно по всем аргументам. Решение уравнения n-го порядка в полных дифференциалах сводится к решению уравнения $(n-1)$-го порядка

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})=C,\quad C=\mathrm{const}.$$

Пусть $F(x,\ u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)$ есть n раз непрерывно дифференцируемая функция, а $\Phi(x, u_0,\ u_1, \ldots, u_{n-1})$ — функция, имеющая непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно. Пусть

$$\Delta\Phi=\Phi'_x+u_1\Phi'_{u_0}+u_2\Phi'_{u_1}+\ldots+u_n\Phi'_{u_{n-1}},$$

$$\Delta_0F=F'_{u_n},\quad \Delta_\nu F=F'_{u_{n-\nu}}-\Delta(\Delta_{\nu-1}F),\quad \nu=1,\ \ldots,\ n.$$

Для того чтобы уравнение (1) было Д. у. в п. д., достаточно, чтобы функции $\Delta_\nu F$, $\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, не зависели от u_n и $\Delta_nF=0$ (см. [1]). В частности, u_n может входить в F только линейно.

Уравнение 1-го порядка

$$M(x,\ y)+N(x,\ y)\,y'=0, \tag{2}$$

где функции M, N, M'_y, N'_x определены и непрерывны в открытой односвязной области D плоскости $(x,\ y)$ и $M^2+N^2>0$ в D, будет Д. у. в п. д. в том и только в том случае, когда

$$M'_y(x,\ y)\equiv N'_x(x,\ y)\ \text{в}\ D.$$

Общее решение уравнения (2) в полных дифференциалах имеет вид $\Phi(x,\ y)=0$, где

$$\Phi(x,\ y)=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)}M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy$$

и интеграл берется по любой спрямляемой кривой, лежащей в области D и соединяющей произвольную фиксированную точку $(x_0,\ y_0)\in D$ с точкой $(x,\ y)$ (см. [2]). Уравнение (2) (в общем случае уравнение (1), линейное по $y^{(n)}$) может быть приведено (при нек-рых предположениях) к Д. у. в п. д. умножением на *интегрирующий множитель*.

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [2] Еругин Н. П., Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 2 изд., Минск, 1972. *Н. Х. Розов.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОЕ — уравнение, в к-ром неизвестной является функция от одного независимого переменного, причем в это уравнение входят не только сама неизвестная функция, но и ее производные различных порядков.

Термин «дифференциальные уравнения» был предложен Г. Лейбницем (G. Leibniz, 1676). Первые исследования Д. у. о. были проведены в конце 17 в. в связи с изучением проблем механики и нек-рых геометрич. задач.

Д. у. о. имеют большое прикладное значение, являясь мощным орудием исследования многих задач естествознания и техники: они широко используются в механике, астрономии, физике, во многих задачах химии, биологии. Это объясняется тем, что весьма часто объективные законы, к-рым подчиняются те или иные явления (процессы), записываются в форме Д. у. о., а сами эти уравнения, таким образом, являются средством для количественного выражения этих законов. Напр., законы механики Ньютона позволяют механич. задачу описания движения системы материальных точек или твердого тела свести к математич. задаче нахождения решений Д. у. о. Расчет радиотехнич. схем и вычисление траекторий спутников, исследование устойчивости самолета в полете и выяснение течения химич. реакций — все это производится путем изучения и решения Д. у. о. Наиболее важные и интересные технич. приложения Д. у. о. находят в *колебаний теории* и в *автоматического управления теории*. В свою очередь прикладные вопросы служат источником новых постановок задач в теории Д. у. о.; именно так возникла, напр., *оптимального управления математическая теория*.

В дальнейшем независимое переменное будет обозначаться через t, неизвестные функции — через x, y, z и др., а производные этих функций по t — через $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\ldots$, $x^{(n)}$ и т. д.

Простейшее Д. у. о. встречается уже в анализе: нахождение первообразной для данной непрерывной функции $f(t)$ является по существу задачей об определении такой неизвестной функции $x=x(t)$, к-рая удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}=f(t). \tag{1}$$

Для доказательства разрешимости этого уравнения необходимо было построить специальный аппарат — теорию интеграла Римана.

Естественным обобщением уравнения (1) является Д. у. о. 1-го порядка, разрешенное относительно производной:

$$\dot{x}=f(t, x), \tag{2}$$

где $f(t, x)$ — известная функция, определенная в нек-рой области D плоскости t, x. Многие практич. задачи сводятся к задаче решения (или, как часто говорят, интегрирования) этого уравнения. Р е ш е н и е м Д. у. о. (2) наз. функция $x=x(t)$, определенная и дифференцируемая на нек-ром интервале I и удовлетворяющая условиям:

$$(t, x(t)) \in D, \quad t \in I,$$
$$\dot{x}(t)=f(t, x(t)), \quad t \in I.$$

Решение Д. у. о. (2) геометрически можно изобразить на плоскости t, x в виде кривой с уравнением $x=x(t)$, $t \in I$. Эта кривая наз. *интегральной кривой*, в каждой своей точке она имеет касательную и целиком лежит в области D. Геометрич. интерпретацию самого уравнения (2) дает п о л е н а п р а в л е н и й в области D, к-рое получается, если через каждую точку $(t, x) \in D$ провести отрезок $l_{t,x}$ малой длины с угловым коэффициентом $f(t, x)$. Любая интегральная кривая $x=x(t)$ в каждой своей точке $(t, x(t))$ касается отрезка $l_{t, x(t)}$.

Ответ на вопрос о том, когда уравнение (2) имеет решение, дает т е о р е м а с у щ е с т в о в а н и я: если $f(t, x) \in C(D)$ (т. е. непрерывна в D), то через любую точку $(t_0, x_0) \in D$ проходит по крайней мере одна непрерывно дифференцируемая интегральная кривая уравнения (2), и каждая из этих кривых может быть продолжена в обе стороны вплоть до границы любой замкнутой подобласти, целиком лежащей в D и содержащей точку (t_0, x_0). Другими словами, для всякой точки $(t_0, x_0) \in D$ найдется хотя бы одно непродолжаемое решение $x=x(t)$, $t \in I$, такое, что $x(t) \in C^1(I)$ (т. е. непрерывна в I вместе с производной $\dot{x}(t)$),

$$x(t_0)=x_0 \tag{3}$$

и $x(t)$ стремится к границе области D, когда t стремится к правому или левому концам интервала I.

Важнейшим теоретич. вопросом является выяснение того, какие предположения о правой части Д. у. о. надо сделать и какие дополнительные условия можно присоединить к уравнению, чтобы выделить одно единственное его решение. Справедлива следующая т е о р е м а с у щ е с т в о в а н и я и е д и н с т в е н н о с т и: если $f(t, x) \in C(D)$ и удовлетворяет в D *Липшица условию* по x, а $(t_0, x_0) \in D$, то уравнение (2) имеет единственное непродолжаемое решение, удовлетворяющее условию (3). В частности, если два решения $x=x_1(t)$, $t \in I_1$, и $x=x_2(t)$, $t \in I_2$, такого уравнения (2) совпадают хотя бы для одного значения $t=t_0$, т. е. $x_1(t_0)=x_2(t_0)$, то

$$x_1(t)=x_2(t), \quad t \in I_1 \cap I_2.$$

Геометрич. содержание этой теоремы заключается в том, что вся область D покрыта интегральными кривыми уравнения (2), к-рые нигде не пересекаются между собой. Единственность решений имеет место и при нек-рых более слабых предположениях относительно функции $f(t, x)$ (см., напр., [6]).

Соотношение (3) наз. начальным условием. Числа t_0 и x_0 наз. начальными значениями для решения уравнения (2), а точка (t_0, x_0) — н а ч а л ь н о й т о ч к о й соответствующей интегральной кривой. Задача отыскания решения этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию (3) (или, как еще говорят, имеющего начальные значения t_0, x_0), наз. *Коши задачей*, или начальной задачей. Сформулированная только что теорема дает достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши (2), (3).

Часто прикладные вопросы приводят к с и с т е м а м Д. у. о., в к-рые входят несколько неизвестных функций от одного и того же независимого переменного и их производные. Естественным обобщением уравнения (2) является н о р м а л ь н а я ф о р м а системы дифференциальных уравнений n-го порядка:

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad i=1, \ldots, n, \tag{4}$$

где $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — неизвестные функции от переменного t, а f^i, $i=1, 2, \ldots, n$, суть заданные функции от $n+1$ переменных. Полагая

$$\boldsymbol{x}=(x^1, \ldots, x^n),$$
$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})=(f^1(t, \boldsymbol{x}), \ldots, f^n(t, \boldsymbol{x})),$$

можно переписать систему (4) в векторной форме:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}). \tag{5}$$

Решением системы (4) или в е к т о р н о г о у р а в н е н и я (5) является вектор-функция

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=(x^1(t), \ldots, x^n(t)), \quad t \in I. \tag{6}$$

Каждое решение можно представлять себе в $(n+1)$-мерном пространстве $t, x^1, x^2, \ldots, x^n$ в виде интегральной кривой — графика вектор-функции (6).

Задача Коши для уравнения (5) состоит в отыскании решения, удовлетворяющего начальным условиям

$$x^1(t_0)=x_0^1, \ \ldots, \ x^n(t_0)=x_0^n,$$

или

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0. \tag{7}$$

Решение задачи Коши (5), (7) удобно записывать в виде

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0), \quad t \in I. \tag{8}$$

Теорема существования и единственности для уравнения (5) формулируется так же, как и для уравнения (2).

Весьма общие системы Д. у. о. (разрешенные относительно старших производных всех неизвестных функций) сводятся к нормальным системам. Важным частным классом систем (5) являются линейные системы Д. у. о. n-го порядка:

$$\dot{x}=A(t)x+\boldsymbol{F}(t),$$

где $A(t)$ — матрица типа $n\times n$.

Большое значение в приложениях и в теории Д. у. о. имеют *автономные системы* Д. у. о.:

$$\dot{x}=\boldsymbol{f}(x), \tag{9}$$

т. е. нормальные системы, правая часть к-рых явно не зависит от переменного t. В этом случае уравнение (6) удобно рассматривать как параметрич. представление кривой, сопоставляя решению фазовую траекторию в n-мерном фазовом пространстве $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Если $x=x(t)$ есть решение системы (9), то ей удовлетворяет также функция $x=x(t+c)$, где c — произвольная постоянная.

Другим обобщением уравнения (2) является Д. у. о. n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)}=f(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}). \tag{10}$$

Важный частный класс таких уравнений — линейные Д. у. о.:

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(t)\dot{y}+a_n(t)y=F(t).$$

Уравнение (10) сводится к нормальной системе n-го порядка, если ввести новые неизвестные функции переменного t по формулам

$$x^1=y,\ x^2=\dot{y},\ \ldots,\ x^{n-1}=y^{(n-2)},\ x^n=y^{(n-1)}.$$

Если, напр., уравнение (10) описывает динамику нек-рого объекта и нужно исследовать движение этого объекта, начинающееся в определенный момент $t=t_0$ из определенного начального состояния, то к уравнению (10) добавляются дополнительные условия:

$$y(t_0)=y_0,\ \dot{y}(t_0)=\dot{y}_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{11}$$

Задача отыскания такой n раз дифференцируемой функции $y=y(t)$, $t\in I$, к-рая обращает уравнение (10) в тождество при всех $t\in I$ и удовлетворяет начальным условиям (11), наз. задачей Коши.

Теорема существования и единственности: если

$$f(t, u_1, u_2, \ldots, u_n)\in C(D)$$

и удовлетворяет условию Липшица по $u_1, u_2, \ldots, u_n$, а

$$(t_0, y_0, \dot{y}_0, \ldots, y_0^{(n-1)})\in D,$$

то задача Коши (10), (11) имеет единственное решение.

Задача Коши далеко не исчерпывает тех задач, к-рые изучаются для уравнений (10) высших порядков [как и систем (5)]. Конкретные физич. и технич. проблемы часто приводят не к начальным условиям, а к дополнительным условиям иного вида (так наз. краевым условиям), когда значения искомой функции $y(t)$ и ее производных (или соотношения между ними) задаются для нескольких различных значений независимого переменного. Напр., в задаче о *брахистохроне* требуется проинтегрировать уравнение

$$2y\ddot{y}+\dot{y}^2+1=0$$

при краевых условиях $y(a)=A$, $y(b)=B$; отыскание 2π-периодич. решения для *Дуффинга уравнения* сводится к выделению такого его решения, к-рое удовлетворяет условиям периодичности: $y(0)=y(2\pi)$, $\dot{y}(0)=$

$=\dot{y}(2\pi)$; при изучении обтекания пластинки ламинарным потоком встречается задача:

$$\dddot{y}+y\ddot{y}=0, \quad y(0)=\dot{y}(0)=0, \ \dot{y}(t)\longrightarrow 2 \text{ при } t\longrightarrow\infty.$$

Задача отыскания для Д. у. о. высшего порядка или системы Д. у. о. решения, удовлетворяющего условиям, отличным от начальных условий (11), наз. *краевой задачей.* Теоретич. анализ существования и единственности решения краевой задачи имеет существенное значение для прикладной проблемы, приводящей к этой краевой задаче, поскольку он показывает взаимную согласованность допущений, принятых при математич. описании проблемы, и известную полноту этого описания. Одной из важных краевых задач является *Штурма — Лиувилля задача.* Краевые задачи для линейных уравнений и систем тесно связаны с задачами о *собственных значениях* и *собственных функциях*, а также со *спектральным анализом* обыкновенных дифференциальных операторов.

Главной задачей теории Д. у. о. является изучение решений таких уравнений. Однако вопрос о том, что значит изучить решения Д. у. о., в разное время понимали по-разному. Первоначально стремились осуществить интегрирование уравнений в квадратурах, т. е. получить замкнутую формулу, дающую (в явной, неявной или параметрич. форме) выражение зависимости того или иного решения от t через элементарные функции и интегралы от них. Такие формулы, если они найдены, оказывают существенную помощь в вычислениях и при исследовании свойств решений. Особый интерес представляет описание всей совокупности решений данного уравнения. При весьма общих предположениях уравнению (5) удовлетворяет семейство вектор-функций, зависящее от n произвольных независимых параметров. Если уравнение этого семейства имеет вид

$$x=\varphi(t, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

то функция φ наз. о б щ и м р е ш е н и е м уравнения (5).

Однако в середине 19 в. были указаны первые примеры Д. у. о., к-рые нельзя проинтегрировать в квадратурах. Оказалось, что решение в замкнутой форме удается найти лишь для небольшого числа классов уравнений (см., напр., *Бернулли уравнение*, *Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах*, *Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами*). Не выражающиеся в квадратурах решения отдельных, наиболее важных и часто встречающихся уравнений (напр., *Бесселя уравнение*) стали изучать подробно, ввели для них специальные обозначения, исследовали их свойства и составили таблицы значений. Так появились многие *специальные функции.*

В связи с потребностями практики постоянно разрабатывались и способы приближенного интегрирования Д. у. о., напр. *последовательных приближений метод*, *Адамса метод* и др. Были предложены также разнообразные приемы графич. и механич. интегрирования этих уравнений. Математика располагает богатым набором численных методов решения многих задач для Д. у. о. (см. *Дифференциальное уравнение обыкновенное*; п р и б л и ж е н н ы е м е т о д ы р е ш е н и я). Эти методы представляют собой удобные алгоритмы вычислений с эффективными оценками точности, а современная вычислительная техника дает возможность экономно и быстро довести решение каждой такой задачи до числового результата.

Однако численные методы для конкретного уравнения дают лишь конечное число частных решений на конечном отрезке изменения независимого переменного. Они не могут ответить на вопросы о том, каково асимптотическое поведение решений, есть ли у данного уравнения периодическое решение имеет ли это уравнение *колеблющееся решение.* Между тем во многих прикладных задачах важно установить характер решения на бесконечном промежутке изменения независимого переменного, изучить полную картину интегральных кривых. В связи с этим центр тяжести в теории Д. у. о. был перенесен на исследование общих закономерностей поведения решений Д. у. о., разработку методов, к-рые позволяли бы получать представление о глобальных свойствах решений по самому дифференциальному уравнению, без его интегрирования.

Все это составило предмет *качественной теории дифференциальных уравнений*, возникшей в конце 19 в. и интенсивно развивающейся.

Принципиальное значение имеет выяснение того, является ли задача Коши для Д. у. о. корректно поставленной задачей. Поскольку в конкретных задачах начальные значения не могут быть указаны абсолютно точно, то важно выяснить, когда малые изменения начальных значений влекут за собой также малые изменения решений. Справедлива теорема о непрерывной зависимости решений от начальных значений: пусть (8) есть решение уравнения (5), где $f(t, x) \in C(D)$ и удовлетворяет условию Липшица по x; тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого замкнутого $J \subset I$, $t_0 \in J$, найдется такое $\delta > 0$, что решение $x(t, t_0, x_0^*)$ этого уравнения, где $|x_0^* - x_0| < \delta$, определено на J и при всех $t \in J$

$$|x(t, t_0, x_0^*) - x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon. \tag{12}$$

Другими словами, если задаться определенным замкнутым отрезком изменения независимого переменного, то при достаточно малом изменении начальных значений решение мало изменится на всем выбранном промежутке. Этот результат может быть обобщен в сторону получения условий, обеспечивающих *дифференцируемость решений* Д. у. о. по начальным значениям.

Однако сформулированная теорема не исчерпывает актуальную для приложений проблему, поскольку в ней речь идет лишь о замкнутом отрезке изменения независимого переменного. Между тем часто (напр., в теории управления движением) рассматривается решение задачи Коши (5), (7), определенное при всех $t \geqslant t_0$, и необходимо выяснить устойчивость этого решения по отношению к малым возмущениям начальных значений на всем бесконечном промежутке $t \geqslant t_0$, т. е. получить условия, обеспечивающие справедливость неравенства (12) при всех $t \geqslant t_0$. Именно к этой задаче сводится исследование устойчивости положения равновесия или стационарного режима конкретной системы. Решение, мало изменяющееся на бесконечном промежутке $[t_0, \infty)$ при достаточно малых отклонениях начальных значений, называется устойчивым по Ляпунову (см. *Устойчивость по Ляпунову*).

При выводе Д. у. о., описывающего реальный процесс, всегда приходится чем-то пренебрегать, что-то идеализировать. Иначе говоря, Д. у. о. описывают процесс приближенно. Напр., изучение работы лампового генератора приводит к *Ван дер Поля уравнению* при нек-рых предположениях, к-рые не вполне точно соответствуют действительному положению вещей. Далее, на ход процесса часто оказывают влияние возмущающие факторы, учесть к-рые при составлении уравнений практически невозможно; известно лишь, что их влияние «мало». Поэтому важно выяснить, как меняется решение при малых изменениях самой системы уравнений, т. е. при переходе от уравнения (5) к возмущенному уравнению

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})+\boldsymbol{R}(t, \boldsymbol{x}),$$

учитывающему малые поправочные члены. Оказывается, что на замкнутом отрезке изменения независимого переменного (при тех же предположениях, что и в теореме о непрерывной зависимости решений от начальных значений) решение мало меняется, если возмущение $\boldsymbol{R}(t, \boldsymbol{x})$ достаточно мало. Если это свойство имеет место на бесконечном промежутке $t \geqslant t_0$, то решение наз. устойчивым при постоянно действующих возмущениях.

Исследование устойчивости по Ляпунову, устойчивости при постоянно действующих возмущениях и их модификаций составляют предмет важнейшего раздела качественной теории — *устойчивости теории*. Для практики в первую очередь представляют интерес такие системы Д. у. о., решения к-рых мало изменяются при всех малых изменениях этих уравнений; такие системы наз. *грубыми системами*.

Другой важной задачей качественной теории является получение схемы поведения семейства решений во всей области определения уравнения. Применительно к автономной системе (9) речь идет о построении фазовой картины, т. е. о качественном описании в целом всей совокупности фазовых траекторий в фазовом пространстве. Такая геометрич. картина дает полное представление о характере всех движений, к-рые могут происходить в рассматриваемой системе. Для этого существенно прежде всего выяснить поведение траекторий в окрестности положений равновесия, отыскать *сепаратрисы* и *предельные циклы*. Особо актуальной задачей является нахождение устойчивых предельных циклов, ибо им соответствуют *автоколебания* в реальных системах.

Любой реальный объект характеризуется различными параметрами, к-рые часто входят в виде нек-рых величин $(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^k)=\boldsymbol{\varepsilon}$ в правую часть системы Д. у. о., описывающей поведение объекта:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}). \tag{13}$$

Значения этих параметров не могут быть известны абсолютно точно, и потому важно выяснить условия, обеспечивающие устойчивость решений уравнения (13) по отношению к малым возмущениям параметра $\boldsymbol{\varepsilon}$. Если задаться определенным замкнутым отрезком изменения независимого переменного, то при естественных предположениях о правой части уравнения (13) имеет место непрерывная (и даже дифференцируемая) зависимость решений от параметров.

Выяснение зависимости решений от параметра имеет прямое отношение к вопросу о том, насколько хороша идеализация, приводящая к математич. модели поведения объекта — системе Д. у. о. Одним из типичных примеров идеализации является пренебрежение малым параметром. Если учет этого малого параметра приводит к системе (13), то непрерывная зависимость решений от параметра позволяет при изучении поведения объекта на конечном отрезке времени безболезненно пренебречь этим параметром, т. е. в первом приближении рассматривать более простую систему

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, 0).$$

Этот результат лежит в основе имеющих широкие приложения *малого параметра метода*, *Крылова — Боголюбова метода усреднения* и других асимптотических методов решения Д. у. о. Однако исследование ряда явлений приводит к системе *дифференциальных уравнений с малым параметром при производных*:

$$\varepsilon \dot{x}=f(t, x, y), \qquad \dot{y}=g(t, x, y).$$

Здесь уже нельзя, вообще говоря, принимать $\varepsilon=0$, даже если пытаться составить грубое представление о явлении на конечном отрезке времени.

В теории Д. у. о. рассматриваются нек-рые плодотворные и важные обобщения перечисленных выше задач. Прежде всего, можно расширить класс функций, в к-ром ищется решение задачи Коши (2), (3): определить решение в классе абсолютно непрерывных функций и доказать существование таких решений. Особый интерес для приложений представляет определение решения уравнения (2) в случае, когда функция $f(t, x)$ разрывна или многозначна по x. Наиболее общей в этом направлении является задача о решении *дифференциального включения.*

Рассматривается и более общее, чем (10), неразрешенное относительно старшей производной Д. у. о. n-го порядка

$$F(t,\ y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ y^{(n)})=0;$$

исследования этого уравнения тесно связаны с теорией неявных функций.

Уравнение (2) связывает производную решения в точке t со значением решения в этой же точке: $\dot{x}(t)=$ $=f(t,\ x(t))$. Но нек-рые прикладные задачи (напр., требующие учета эффекта запаздывания исполнительного устройства) приводят к *дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом*:

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t-\tau));$$

здесь производная решения в точке t связывается со значением решения в точке $t-\tau$. Изучению таких уравнений, а также более общих *дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* посвящен специальный раздел теории Д. у. о.

Изучение фазового пространства автономной системы (9) позволяет подойти к еще одному обобщению Д. у. о. Траекторию этой системы, проходящую через точку x_0, будем записывать в виде $x=x(t, x_0)$. Если точке x_0 поставить в соответствие точку $x(t, x_0)$, то получится преобразование фазового пространства, зависящее от параметра t, к-рое определяет движение в фазовом пространстве. Свойства этих движений исследуются в теории динамич. систем. Такие движения можно рассматривать не только в евклидовом пространстве, но и на многообразиях, изучая, напр., *дифференциальные уравнения на торе.*

Выше речь шла о Д. у. о. в поле действительных чисел [напр., отыскивалась действительная функция $x(t)$ действительного переменного t, удовлетворяющая уравнению (2)]. Однако нек-рые вопросы теории таких уравнений удобнее изучать с привлечением комплексных чисел. Естественным дальнейшим обобщением является изучение Д. у. о. в поле комплексных чисел. Так, можно рассмотреть уравнение

$$\frac{dw}{dz}=f(z,\ w),$$

где $f(z,\ w)$ — аналитич. функция своих переменных, и поставить задачу о нахождении аналитич. функции $w(z)$ комплексного переменного z, к-рая удовлетворяла бы этому уравнению. Исследование таких уравнений, уравнений высших порядков и систем составляет предмет *аналитической теории дифференциальных уравнений*; в частности, она содержит важные для приложений к математич. физике результаты, касающиеся *линейных дифференциальных уравнений второго порядка.*

Можно также рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x), \tag{14}$$

считая, что x принадлежит бесконечномерному банахову пространству B, t — действительное или комплексное независимое переменное, а $f(t, x)$ — оператор, отображающий произведение $(-\infty, +\infty)\times B$ в B. В виде уравнения (14) можно трактовать, напр., системы Д. у. о. бесконечного порядка (см. *Дифференциальные уравнения* системы бесконечного порядка). Уравнения вида (14) изучает теория *дифференциальных уравнений абстрактных*, лежащая на стыке Д. у. о. и функционального анализа. В частности, большой интерес представляют линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\,x+\boldsymbol{F}(t)$$

с ограниченными или неограниченными операторами; в форме такого уравнения удается записать нек-рые классы *дифференциальных уравнений с частными производными*.

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [2] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [3] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; [4] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [5] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970; [6] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 1—2, М., 1953—54; [7] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970.

Е. Ф. Мищенко.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОЕ; приближенные методы решения — методы получения аналитич. выражений (формул), либо численных значений, приближающих с той или иной степенью точности искомое частное решение дифференциального уравнения (д. у.) или системы для одного или нескольких значений аргумента. Важность приближенных методов решения д. у. обусловливается тем, что точные решения в виде аналитич. выражений получаются лишь для немногих типов д. у.

Одним из старейших методов приближенного решения обыкновенных д. у. является метод разложения в ряд Тейлора. Согласно этому методу решение уравнения

$$y'=f(x, y)$$

с начальным условием

$$y(x_0)=y_0$$

приближается отрезком ряда Тейлора

$$y(x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Производные $y^{(k)}(x_0)$ выражаются через $f(x, y)$ и ее частные производные:

$$y'=f(x, y),\quad y''=f'_x(x, y)+f'_y(x, y)\,y',$$

$$y'''=f''_{xx}(x, y)+2f''_{xy}(x, y)\,y'+f''_{yy}(x, y)\,y'^2+f'_y(x, y)\,y''$$

и т. д. Погрешность метода пропорциональна $(x-x_0)^{n+1}$. При больших значениях $x-x_0$ погрешность медленно стремится к нулю при $n\to\infty$, а если значение $x-x_0$ превосходит значение радиуса сходимости ряда Тейлора, то погрешность вообще не стремится к нулю при $n\to\infty$. Это обстоятельство, а также необходимость вычисления большого числа частных производных резко ограничивают область применения метода. Обычно метод разложения в ряд Тейлора, так же как и методы разложения в ряды более общего вида, применяют для нахождения приближенного решения в виде аналитич. выражения. К методам, применяемым для этой же цели, относятся *Чаплыгина метод*, использующий дифференциальные неравенства, и *последовательных прибли-*

жений метод. Эти методы применяются в основном в теоретич. исследованиях и редко используются для получения численных решений д. у. в практич. расчетах.

В приложениях часто используются асимптотич. методы приближенного решения Д. у., основанные на выделении в решаемом уравнении главных членов и членов, малых по сравнению с главными. Примером может служить *малого параметра метод* для уравнения $y'=f(x, y; \mu)$. Асимптотич. методы используются как для получения аналитич. выражений, приближающих решение, так и для исследований качественного поведения решений.

Наиболее распространенными методами численного решения д. у. являются методы, в к-рых решение ищется в виде таблицы приближенных значений искомой функции $y(x)$ для ряда значений аргумента x из отрезка $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+X$. Напр., пусть ищется решение уравнения $y=f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$ на отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+X$ в предположении, что решение вычисляется для значений аргумента

$$x_p=x_0+ph,\ p=0,\ 1,\ \ldots,\ N,\ h=X/N;$$

значения x_p наз. у з л а м и, а величина h — ш а г о м; через y_p обозначено значение приближенного решения в узле x_p.

Один из простейших численных методов — *Эйлера метод* основан на приближенном вычислении в тождестве

$$y_{p+1}=y_p+\int_{x_p}^{x_{p+1}} f(x,\ y)\,dx,$$

квадратуру по формуле прямоугольников:

$$y_{p+1}=y_p+hf(x_p,\ y_p).$$

Погрешность метода Эйлера пропорциональна h^2. Приближая интеграл

$$\int_{x_p}^{x_{p+1}} f(x,\ y)\,dx \qquad (1)$$

более точными квадратурными формулами, можно получить более точные численные методы. Напр., если воспользоваться для приближения (1) формулой трапеций, то

$$y_{p+1}=y_p+\frac{h}{2}\left(f(x_p,\ y_p)+f(x_{p+1},\ y_{n+1})\right).$$

Обычно это уравнение неразрешимо относительно y_{p+1}. Для его решения можно воспользоваться *итерационными методами*, взяв в качестве начального приближения значение y_{p+1}, полученное по методу Эйлера. Одна итерация приводит к следующим формулам:

$$y_{p+1}=y_p+\frac{h}{2}\left(k_1(x_p,\ y_p)+k_2(x_p,\ y_p)\right),$$

где

$$k_1(x_p,\ y_p)=f(x_p,\ y_p)$$

и

$$k_2(x_p,\ y_p)=f(x_p+h,\ y_p+hk_1(x_p,\ y_p)).$$

Эти формулы имеют погрешность порядка h^3. Они относятся к семейству *Рунге — Кутта методов*. Один из наиболее распространенных методов этого семейства имеет порядок погрешности h^5. Методы Рунге — Кутта наз. одношаговыми, так как для вычисления y_{p+1} достаточно знать лишь y_p — значения приближенного решения на предыдущем шаге. Это обстоятельство позволяет применять формулы метода Рунге — Кутта для неравноотстоящих узлов, то есть в случае, когда разность $x_{p+1}-x_p$ непостоянна. При выборе шага интегрирования полезно иметь в распоряжении нек-рую характеристику погрешности метода на шаге. Для оценки погрешности на шаге часто используется прием, называемый экстраполяцией по Ричардсону: y_{p+2} вычисляется дважды — при помощи двух шагов h и одного шага $2h$; полученные значения обозначаются через $y^{(1)}_{p+2}$ и $y^{(2)}_{p+2}$ соответственно; погрешность на шаге

$$r_{p+2} \approx \frac{\left| y^{(2)}_{p+2} - y^{(1)}_{p+2} \right|}{2^s - 1},$$

где $s+1$ — порядок r_{p+2} по h (для метода Эйлера $s=1$, для формулы трапеций $s=2$ и т. д.). Другой способ оценки погрешности на шаге состоит в получении формул метода Рунге — Кутта с контрольным членом, к-рый с точностью до малых более высокого порядка приближает главный член погрешности метода на шаге. Разработаны так наз. неявные одношаговые методы, к-рые оказались весьма эффективными для нек-рых классов задач.

Помимо семейства одношаговых методов для численного решения д. у. используются также и многошаговые методы (или конечноразностные). В этих методах для определения y_{p+1} требуются не только y_p, но и значения y_{p-i} в нек-рых нескольких предыдущих узлах. Формулы k-шаговых методов имеют вид:

$$\sum_{q=0}^{k} a_{-q} y_{p-q} - h \sum_{q=0}^{k} b_{-q} f(x_{p-q}, y_{p-q}) = 0,$$

где a_{-i}, b_{-i} — постоянные, $a_0 \neq 0$. Если $b_0 = 0$, соответствующий метод наз. экстраполяционным, или явным; если $b_0 \neq 0$,— интерполяционным, или неявным, методом. Частным случаем многошаговых методов являются методы типа Адамса (см. *Адамса метод*):

$$y_p - y_{p-1} = h \sum_{q=0}^{k} b_{-q} f(x_{p-q}, y_{p-q}).$$

Обычно вычисления ведут по паре k-шаговых формул, одна из к-рых явная, а другая неявная. Такие пары формул наз. методами прогноза и коррекции. В качестве примера формул прогноза и коррекции можно привести формулы Хемминга:

$$\overset{*}{y}_{p+1} = \frac{2y_{p-1} + y_{p-2}}{3} + \frac{h}{72} (191 f(x_p, y_p) -$$

$$- 107 f(x_{p-1}, y_{p-1}) + 109 f(x_{p-2}, y_{p-2}) - 25 f(x_{p-3}, y_{p-3}));$$

$$\tilde{y}_{p+1} = \overset{*}{y}_{p+1} - \frac{707}{750} (\overset{*}{y}_p - \overset{**}{y}_p),$$

$$\overset{**}{y}_{p+1} \frac{2y_{p-1} + y_{p-2}}{3} + \frac{h}{72} (25 f(x_{p+1}, \tilde{y}_{p+1}) +$$

$$+ 91 f(x_p, y_p) + 43 f(x_{p-1}, y_{p-1}) + 9 f(x_{p-2}, y_{p-2})).$$

$$y_{p+1} = \overset{**}{y}_{p+1} + \frac{43}{750} (\overset{*}{y}_{p+1} - \overset{**}{y}_{p+1}),$$

имеющие на шаге погрешность порядка h^6. При счете по формулам Хемминга сначала вычисляется «прогноз» $\overset{*}{y}_{p+1}$, затем — «поправка» $\tilde{y}_{p+1}$, затем — «коррекция» $\overset{**}{y}_{p+1}$ и, наконец,— приближенное решение y_{p+1}.

В небесной механике широко используются формулы Штермера (см. *Штермера метод*), особенно удобные для уравнений вида

$$y'' = f(x, y);$$

они имеют вид:

$$\Delta^2 y_{p+1} = h^2 f(x_p, y_p) + \frac{h^2}{12} \sum_{q=2}^{k} b_{-q} \Delta^q f(x_{p-q}, y_{p-q})$$

(явная формула Штермера) и

$$\Delta^2 y_{p-1}=h^2 f(x_p, y_p)+\frac{h^2}{2}\sum_{q=1}^{k} c_{-q-1}\Delta^{q+1} f(x_{p-q}, y_{p-q})$$

(неявная формула Штермера). В формулах Штермера

$$b_{-2}=1,\ b_{-3}=1,\ b_{-4}=\frac{19}{20},\ \ldots;\ c_{-2}=1,\ c_{-3}=0,$$

$$c_{-4}=-\frac{1}{120},\ \ldots;$$

$\Delta^q(f)$ — конечная разность порядка q.

Применение многошаговых методов возможно лишь в случае, если известны значения решения в k первых узлах. Для нахождения этих значений обычно пользуются одношаговыми методами, погрешность к-рых пропорциональна соответствующей степени h.

Иногда для вычисления y_{p-q} используется несколько предшествующих значений y_{p-q}, как в многошаговых методах, но в то же время на каждом шаге производится несколько вычислений правой части, как в методах Рунге — Кутта.

Решение краевых задач для обыкновенных д. у. обычно сводится к решению нескольких задач с начальными условиями. Простейшим методом такого рода является *стрельбы метод*, применяемый как к линейным, так и к нелинейным краевым задачам. Пусть, напр., требуется решить краевую задачу для одного уравнения 2-го порядка:

$$y''=f(x, y, y'),\quad y(0)=a,\quad y(l)=b.$$

Полагая $y'(0)=c$, можно решить задачу с начальным условием

$$y''=f(x, y, y'),\quad y(0)=a,\quad y'(0)=c, \tag{2}$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ и вычислить значение $y(l, c)$. Из условия $y(l, c_0)=b$ определяется c_0. Тогда решение краевой задачи будет совпадать с решением задачи с начальными условиями $y(0)=a$, $y'(0)=c_0$. Корень c_0 уравнения $y(l, c)=b$ обычно ищется каким-либо приближенным методом и его нахождение связано с многократным решением задачи с начальными условиями (2). Метод стрельбы часто неустойчив к вычислительной погрешности.

Для линейных краевых задач часто применяют *прогонки метод*, при к-ром решение краевой задачи для уравнения 2-го порядка сводится к решению трех задач с начальным условием для уравнений 1-го порядка. Напр., пусть решается краевая задача

$$y''=p(x)y+f,\quad y'(0)=a_0 y(0)+b_0,\quad y'(l)=a_1 y(l)+b_1.$$

Подбираются функции $a(x)$ и $b(x)$ такие, что $y'(x)=a(x)y(x)+b(x)$ при всех $0 \leqslant x \leqslant l$. Эти функции могут быть получены как решения задач с начальными условиями

$$a'(x)+a^2(x)=p(x),\quad a(0)=a_0$$

и

$$b'(x)+a(x)b(x)=f(x),\quad b(0)=b_0.$$

Решение этих задач наз. прямой прогонкой. В результате прямой прогонки получаются два условия для определения $y(l)$ и $y'(l)$:

$$y'(l)=a_1 y(l)+b_1 \quad \text{и} \quad y'(l)=a(l)y(l)+b(l).$$

Из этих условий находится $y(l)=y_l$, после чего решение $y(k)$ исходной краевой задачи получается как решение задачи с начальным условием

$$y'(x)=a(x)\, y(x)+b(x),\ y(l)=y_l$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ — так наз. обратная прогонка. Методы стрельбы и прогонки применимы для решения краевых задач в случае систем д. у. В вычислительной практике широко используются разностные аналоги этих методов.

Для решения нелинейных краевых задач, кроме метода стрельбы, используют методы линеаризации в сочетании с методом прогонки. Наиболее распространенным методом этого класса является *Ньютона метод*.

При решении краевых задач применяются также и различные вариационные методы: *Ритца метод*, *Галеркина метод* и др. Вариационные методы сводят решение краевых задач к минимизации нек-рого функционала; приближение к решению ищется в задаваемом виде

$$y(x)=g(a_1, \ldots, a_n, x);$$

параметры $a_1, \ldots, a_n$ определяются из условия минимума функционала.

Большинство численных методов решения обыкновенных д. у. реализовано в виде библиотечных программ ЭВМ.

Кроме аналитических и численных методов для приближенного решения обыкновенных д. у. применяются графич. методы, напр. метод *изоклин*, связанный с построением поля направлений, определяемого д. у. Применяются также аналоговые вычислительные машины и другие моделирующие устройства.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, М., 1973; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 2, 2 изд., М., 1962; [3] Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965; [4] Моисеев Н. Н., Численные методы в теории оптимальных систем, М., 1971; [5] Милн В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1955; [6] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, пер. с нем., М., 1953; [7] Хемминг Р. В., Численные методы..., пер. с англ., 2 изд., М., 1972; [8] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, М., 1973; [9] Коллатц Л., Задачи на собственные значения..., пер. с нем., М., 1968. *С. С. Гайсарян.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ — *дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом* запаздывающего типа, т. е. уравнение, в к-ром старшая производная от искомой функции при каком-либо значении аргумента определяется через саму эту функцию и младшие производные, взятые при меньших либо равных значениях аргумента. Эти уравнения и их системы, если аргументом служит время, описывают процессы с последействием, скорость к-рых в любой момент определяется их состоянием не только в тот же момент (как для обыкновенных дифференциальных уравнений), но и в предшествующие моменты. Такая ситуация возникает, в частности, в системах автоматич. управления (см. *Автоматического управления теория*) при наличии запаздывания в органе регулирования.

А. Д. Мышкис.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ — дифференциальное уравнение, связывающее аргумент, искомую функцию и ее производные, взятые, вообще говоря, при различных значениях этого аргумента. Примеры:

$$x'(t)=ax(t-\tau), \tag{1}$$

$$x'(t)=ax(kt), \tag{2}$$

где постоянные a, τ, k заданы; τ в уравнении (1) и $t-kt$ в уравнении (2) — отклонения аргумента. Встречаются и более сложные Д. у. с о. а., включающие большее число отклонений аргумента, могущих представлять собой заданные функции (в частности, если они постоянны, то уравнение часто наз. дифференциально-разностным) или даже зависеть от искомого решения. Эпизодически рассматривались также Д. у. с о. а., в к-рых искомая функция зависит более чем от одного аргумента. Д. у. с о. а. впервые появились в связи с формальным решением уравнений с частными производными и затем неоднократно рассматривались как сами по себе, так и в связи с задачами геометрии, а позднее — в связи с различными приложениями, прежде всего к теории автоматич. управления. Построение систематич. теории Д. у. с о. а. было начато в 1949.

Определение Д. у. с о. а. допускает любые суперпозиции искомого решения [типа $x(x(t))$] и интегралы от него, поэтому формально класс Д. у. с о. а. включает в себя все уравнения математич. анализа. Все же обычно, говоря о Д. у. с о. а., имеют в виду тот или иной естественный класс дифференциальных уравнений, в к-рых введено отклонение аргумента, допускающее построение содержательной теории. При этом ряд свойств Д. у. с о. а. имеет непосредственную аналогию со свойствами обычных дифференциальных уравнений, тогда как иные свойства являются принципиально новыми.

Уравнение (или система уравнений)

$$x^{(n)}(t)=f(t;\ x^{(m_1)}(t-\tau_1),\ \ldots,\ x^{(m_s)}(t-\tau_s)) \qquad (3)$$

(для системы x и f — векторы), где все $\tau_j \geqslant 0$, наз. уравнением (системой) запаздывающего, нейтрального или опережающего типа, если $\max_j m_j < n,\ =n,\ >n$, соответственно. Для уравнений иных видов такая классификация проводится на основе преобразования к виду (3) с помощью замены $t \to \chi(t)$, χ — возрастающая функция; напр., уравнение (1) запаздывающего типа при $\tau \geqslant 0$ и опережающего (замена $t \to t+\tau$) — при $\tau<0$. Если отклонения τ_j зависят от t, то уравнение (3) может менять тип; напр., уравнение (2) для $k \leqslant 1$ запаздывающего типа при $t \geqslant 0$ и опережающего — при $t \leqslant 0$. Если τ_j зависят от искомого решения, то уравнение (3) может иметь различный тип для различных его решений. Наиболее подробно разработана теория Д. у. с о. а. запаздывающего типа, менее — нейтрального типа и почти не изучена теория уравнений опережающего типа.

Один из простейших классов Д. у. с о. а. следующий:

$$x'(t)=f(t,\ x(t),\quad x(t-\tau)),\quad \tau>0. \qquad (4)$$

Для этого класса Д. у. с о. а. ставится основная начальная задача: заданы начальная точка t_0, начальная функция $\varphi(t)$, $t_0-\tau \leqslant t \leqslant t_0$, и значение $x(t_0+0)$; под решением задачи для уравнения (4) понимается функция $x(t)$, $t>t_0$, обращающая уравнение (4) в тождество, причем при $t>t_0$, $t-\tau \leqslant t_0$ в правую часть вместо $x(t-\tau)$ надо подставлять $\varphi(t-\tau)$. Для решения поставленной задачи можно применить метод шагов: при $t_0<t \leqslant t_0+\tau$ решают начальную задачу для уравнения (4), в к-ром вместо $x(t-\tau)$ подставлено $\varphi(t-\tau)$; при $t_0+\tau<t \leqslant t_0+2\tau$ будет $t_0<t-\tau \leqslant t_0+\tau$, т. е. $x(t-\tau)$ уже построено, и т. д.; таким образом, на каждом шаге приходится решать задачу Коши для уравнения без отклонения аргумента. Если функции f и φ непрерывны и $x(t_0+0)=\varphi(t_0)$, то решение задачи существует на нек-ром интервале $t_0<t \leqslant t_0+h$ и может быть продолжено обычным образом, а если функция $f(t,\ x,\ y)$ удовлетворяет по x условию Липшица, то это решение единственно и непрерывно зависит от f, φ, τ. Если при этом функция f достаточно гладкая, то $x'(t)$ непрерывна при $t>t_0$, $x''(t)$ непрерывна при $t>t_0+\tau$ и т. д. (свойство сглаживания).

Аналогично ставится начальная задача и строится решение для систем уравнений вида (4) и для уравнений высших порядков. В случае нескольких запаздываний за шаг принимают наименьшее из них. Если $\tau=\tau(t)$, то $\varphi(t)$ должна быть задана на всем начальном множестве значений $t-\tau(t) \leqslant t_0$, $t>t_0$. Наличие у $\tau(t)$ нулей препятствует применению метода шагов, однако с помощью простых аппроксимационных или итерационных методов можно доказать теорему о разрешимости начальной задачи, аналогичную приведенной выше. Численные методы ее решения в принципе те же, что для $\tau=0$. Если заданные функции разрывны или $x(t_0+0)\neq\varphi(t_0)$, то понятие решения должно быть естественно обобщено.

Решение сформулированной начальной задачи строится только в направлении возрастания t. Другая ее особенность состоит в том, что многообразие решений при произвольной $\varphi(t)$, вообще говоря, бесконечномерное. (Исключением служат уравнения без предыстории, для к-рых $t_0\leqslant t-\tau(t)\leqslant t$ при $t\geqslant t_0$; напр., уравнение (2) при $0\leqslant k\leqslant 1$, $t_0=0$.) Это существенно отличает теорию Д. у. с о. а. от теории уравнений без отклонения аргумента.

В уравнении (4) запаздывание сосредоточенное. Рассматриваются также уравнения с распределенным запаздыванием, правая часть к-рых включает интегралы

$$\int_{-\tau}^{0} x(t+s)\, r(t, s)\, ds=\int_{t-\tau}^{t} x(s)\, r_1(t, s)\, ds$$

(это — интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра) или, комбинированный случай,

$$\int_{-\tau}^{0} x(t+s)\, d_s r(t, s)$$

и т. п. Наиболее общим видом Д. у. с о. а. запаздывающего типа 1-го порядка служит дифференциально-функциональное уравнение типа Вольтерра

$$x'(t)=F[x(t+s);\ t],\quad -\tau\leqslant s\leqslant 0,$$

где правая часть при каждом $t>t_0$ представляет собой функционал. И для таких уравнений начальная задача разрешима.

Для Д. у. с о. а. нейтрального типа, напр.

$$x'(t)=f(t,\ x(t),\ x(t-\tau_1),\ x'(t-\tau_2)),\quad \tau_1,\ \tau_2\geqslant 0,$$

постановка и свойства начальной задачи аналогичны указанным выше, однако свойство сглаживания отсутствует; кроме того, возможны осложнения, если переменное запаздывание $\tau_2(t)$ имеет нули. Начальная задача для Д. у. с о. а. опережающего типа является некорректной.

Лучше других изучены линейные автономные (т. е. с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента) Д. у. с о. а. Уравнение (без подобных членов)

$$x^{(n)}(t)=\sum_{j=1}^{N} a_j x^{(m_j)}(t-\tau_j) \tag{5}$$

(все $a_j\neq 0$) имеет частные решения $x=e^{pt}$, где p удовлетворяет характеристическому уравнению

$$P(p)\equiv p^n-\sum a_j p^{m_j} e^{-\tau_j p}=0. \tag{6}$$

Здесь $P(p)$ — квазиполином; k-кратному корню уравнения (6) отвечают решения $e^{pt}, \ldots, t^{k-1}e^{pt}$ уравнения (5). Если хотя бы одно $\tau_j\neq 0$, то уравнение (6) имеет бесконечное число корней p_1, p_2, ... Чтобы уравнение (5) имело запаздывающий (нейтральный) тип, необходимо и достаточно условие

$$\operatorname{Re} p_r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \left(-\infty<\varlimsup_{r\to\infty}\operatorname{Re} p_r<\infty\right).$$

В этих случаях каждое решение уравнения (5) разлагается в ряд по указанным частным решениям, а при решении начальной задачи для уравнения (5) и соответствующего неоднородного уравнения можно пользоваться обычными методами операционного исчисления. Аналогичными свойствами обладают системы уравнений и уравнения с распределенным запаздыванием.

Обычные определения устойчивости решения непосредственно распространяются на Д. у. с о. а. запаздывающего и нейтрального типов. Для асимптотич. устойчивости решений уравнения (5) необходимо и достаточно условие:

$$\sup_r \operatorname{Re} p_r < 0.$$

При выполнении этого условия асимптотически устойчиво и нулевое решение нелинейных автономных уравнений, для к-рых (5) служит линейным приближением.

Метод функций Ляпунова на исследование устойчивости Д. у. с о. а. распространил Н. Н. Красовский [5]. Он предложил пользоваться функционалами $V[\psi(s); t]$ в $C[-\tau, 0]\times[0, \infty)$; полную производную такого функционала «вдоль решения» заданного уравнения вида (4) можно вычислить в силу этого уравнения, и она представляет собой функционал того же типа, т. е.

$$\frac{d}{dt} V[x(t+s);\ t] = V_1[x(t+s);\ t].$$

Аналог теоремы Ляпунова об устойчивости: если

$$f(t,\ 0,\ 0) \equiv 0;\ (\forall h > 0) \inf_{\|\psi\|>h,\ t>t_0} V[\psi(s);\ t] > 0;$$

$$V[\psi(s);\ t_0] \underset{\|\psi\|\to 0}{\longrightarrow} 0;\ V_1 \leqslant 0,$$

то тривиальное решение уравнения (4) устойчиво. Основные теоремы об устойчивости, выраженные в таких терминах, допускают обращение.

Ряд результатов получен для периодических Д. у. с о. а. Так, если

$$f(+T,\ x,\ y) \equiv f(t,\ x,\ y),\ T > 0,$$

то неподвижные точки оператора

$$U_k[\varphi(s)] \equiv x(kT+s)$$

($t_0-\tau \leqslant s \leqslant t_0$; $x(t)$ — решение уравнения (4) при начальной функции φ; k — натуральное) определяют kT-периодич. решения уравнения (4). Этот и другие аналогичные факты дают возможность применить к отысканию периодич. решений и к выяснению их устойчивости методы теории нелинейных операторов. Для линейных однородных T-периодич. Д. у. с о. а. запаздывающего типа доказана возможность аппроксимации каждого решения с любой степенью точности по шкале экспонент линейной комбинацией решений вида

$$t^k e^{q_r t} \alpha(t),\ \alpha(t+T) \equiv \alpha(t);\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ k_r.$$

Из других направлений исследования Д. у. с о. а. выделяются: детальное изучение асимптотических и осцилляционных свойств уравнений

$$x'(t) = \pm M(t)\, x(t-\tau(t)),\quad M(t) \geqslant 0,$$

и аналогичных уравнений 2-го порядка; получение асимптотич. выражений для решений систем с малыми отклонениями аргумента или с малой нелинейностью; распространение на Д. у. с о. а. асимптотич. методов Крылова — Боголюбова (см. *Крылова — Боголюбова метод усреднения*); распространение на Д. у. с о. а. теории оптимального управления Л. С. Понтрягина (см. *Оптимального управления математическая теория*); исследование краевых задач; исследование *эволюционных уравнений* с частными производными и запаздыванием во времени; исследование стохастич. Д. у. с о. а. (см. *Стохастическое дифференциальное уравнение*) и т. д.

Лит.: [1] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б., Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, М., 1971; [2] Пинни Э., Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения, пер. с англ., М., 1961; [3] Беллман Р., Кук К. Л., Дифференциально-разностные уравнения, пер. с англ., М., 1967; [4] Мышкис А. Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, 2 изд., М., 1972; [5] Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959; [6] Норкин С. Б., Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, М., 1965; [7] Рубаник В. П., Колебания квазилинейных систем с запаздыванием, М., 1969; [8] Oğuztöreli M. N., Time-Lag control systems, N. Y.— L., 1966; [9] Halanay A., Differential equations, N.Y.— L., 1966; [10] Hale J. K., Functional differential equations, N. Y., 1971.

А. Д. Мышкис.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ — уравнение вида

$$F\left(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots\right)=0, \tag{1}$$

где F — заданная действительная функция точки $x=(x_1, \ldots, x_n)$ области D евклидова пространства E_n, $n \geqslant 2$, и действительных переменных

$$p_{i_1 \ldots i_n} \equiv \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$$

($u(x)$ — неизвестная функция) с неотрицательными целочисленными индексами $i_1, \ldots, i_n$, $\sum_{j=1}^n i_j=k$, $k=0, \ldots, m$, $m \geqslant 1$, по крайней мере одна из производных

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}}, \quad \sum_{j=1}^n i_j=m,$$

функции F отлична от нуля; натуральное число m наз. порядком уравнения (1).

Определенная в области D задания уравнения (1) функция $u(x)$, непрерывная вместе со своими частными производными, входящими в это уравнение и обращающая его в тождество, наз. регулярным решением. Наряду с регулярными решениями в теории Д. у. с ч. п. важное значение имеют решения, перестающие быть регулярными вблизи изолированных точек или многообразий особого вида: к ним относятся, в частности, элементарные (фундаментальные) решения. Они позволяют строить широкие классы регулярных решений (так наз. потенциалов) и устанавливать их структурные и качественные свойства.

В предположении непрерывности частных производных 1-го порядка функции F относительно переменных

$$p_{i_1 \ldots i_n}, \quad \sum_{j=1}^n i_j=m,$$

в теории уравнений вида (1) фундаментальную роль играет форма порядка m:

$$k\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)=\sum \frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}} \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^n i_j=m,$$

относительно действительных параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, к-рая наз. характеристической формой, соответствующей уравнению (1).

Когда F — линейная функция переменных $p_{i_1 \ldots i_n}$, уравнение (1) наз. линейным. Линейное уравнение с частными производными 2-го порядка можно записать в виде:

$$\sum_{i, j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^n B_j \frac{\partial u}{\partial x_j}+C u=f, \tag{3}$$

где A_{ij}, B_j, C и f — заданные в области D действительные функции точки x. Уравнение (3) наз. однородным, если $f(x)=0$ для всех $x \in D$. В случае уравнения (3) форма (2) является квадратичной:

$$Q\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)=\sum_{i, j=1}^n A_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

с коэффициентами A_{ij}, зависящими только от точки $x \in D$. В каждой точке $x \in D$ квадратичная форма Q при помощи неособого аффинного преобразования переменных $\lambda_i = \lambda_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $i=1, \ldots, n$, может быть приведена к канонич. виду

$$Q = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2,$$

где коэффициенты α_i, $i=1, \ldots, n$, принимают значения 1, -1, 0, причем число отрицательных коэффициентов (и н д е к с и н е р ц и и) и число нулевых коэффициентов (д е ф е к т ф о р м ы) являются аффинными инвариантами. Когда все $\alpha_i = 1$ или все $\alpha_i = -1$, т. е. когда форма Q соответственно положительно или отрицательно определена (дефинитна), уравнение (3) наз. э л л и п т и ч е с к и м в точке $x \in D$. Если один из коэффициентов α_i отрицателен, а все остальные положительны (или наоборот), то уравнение (3) наз. г и п е р б о л и ч е с к и м в точке x. В случае, когда l, $1 < l < n-1$, коэффициентов α_i положительны, а остальные $n-l$ отрицательны, уравнение (3) наз. у л ь т р а г и п е р б о л и ч е с к и м. Если же хотя бы один из этих коэффициентов (но не все) равен нулю, то уравнение (3) наз. п а р а б о л и ч е с к и м в точке x. Говорят, что в области D своего задания уравнение (3) является уравнением эллиптического, гиперболического или параболического типа, если оно соответственно эллиптично, гиперболично или параболично в каждой точке этой области. Эллиптическое в области D уравнение (3) наз. р а в н о м е р н о э л л и п т и ч е с к и м, если существуют действительные числа k_0 и k_1 одинакового знака такие, что

$$k_0 \sum\nolimits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leqslant Q\ (\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n) \leqslant k_1 \sum\nolimits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

для всех $x \in D$. Когда в разных частях области D уравнение (3) принадлежит к различным типам, то говорят, что оно является уравнением с м е ш а н н о г о типа в этой области.

Лапласа уравнение

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0,$$

теплопроводности уравнение

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

и *волновое уравнение*

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

являются типичными примерами линейных эллиптич., параболич. и гиперболич. уравнений 2-го порядка соответственно (подробнее см. *Линейное гиперболическое уравнение и система*, *Линейное параболическое уравнение и система*, *Линейное эллиптическое уравнение и система*).

Трикоми уравнение

$$x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

относится к уравнениям смешанного типа в любой области плоскости переменных x_1, x_2, пересечение к-рой с осью $x_2 = 0$ не пусто (подробнее см. *Смешанного типа уравнение* с частными производными).

В случае линейного уравнения с частными производными порядка m

$$\sum \alpha_{i_1 \ldots i_n}(x) \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} + L_1 u = f, \quad \sum\nolimits_{j=1}^{n} i_j = m, \quad (4)$$

где L_1 — линейный дифференциальный оператор с частными производными порядка ниже m, форма (2) имеет вид

$$k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_n}(x) \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}. \quad (5)$$

Если при фиксированном значении $x \in D$ можно найти такое аффинное преобразование $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $i=1, \ldots, n$, в результате к-рого полученная из (5) форма содержит лишь l, $0<l<n$, переменных μ, то говорят, что уравнение (4) в точке x параболически вырождается. При отсутствии параболич. вырождения и если конич. многообразие

$$k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0 \quad (6)$$

не имеет действительных точек, кроме $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$, то уравнение (4) в точке x наз. эллиптическим. Уравнение (4) наз. гиперболическим в точке x, если в пространстве переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ существует прямая δ такая, что если принять ее за координатную прямую в новых переменных $\mu_1, \ldots, \mu_n$, полученных аффинным преобразованием $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то относительно координаты, изменяющейся вдоль δ, преобразованное уравнение (6) имеет ровно m действительных корней (простых или кратных) при любом выборе остальных координат μ.

Аналогичным образом по характеру формы (2) происходит классификация по типам уравнения (1) и в нелинейном случае. Поскольку в этом случае коэффициенты формы (2) зависят, наряду с точкой x, от искомого решения и от его производных, классификация по типам имеет смысл лишь для этого решения. См. также *Нелинейное уравнение с частными производными*.

Когда F представляет собой N-мерный вектор $F = (F_1, \ldots, F_N)$ с компонентами

$$F_i(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

зависящими от $x \in D$ и от M-мерных векторов

$$p_{i_1 \ldots i_n} = \left(p^1_{i_1 \ldots i_n}, \ldots, p^M_{i_1 \ldots i_n}\right) = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}},$$

векторное равенство (1) наз. системой дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных функций $u_1, \ldots, u_M$ или относительно неизвестного вектора $u = (u_1, \ldots, u_M)$. Максимальный порядок производных от искомых функций, входящих в данное уравнение системы, наз. порядком этой системы (уравнения). Когда $M = N$ и порядок каждого уравнения системы (1) равен m, определитель

$$k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \det \sum\nolimits_{i_1 \ldots i_n} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \ldots i_n}} \right\| \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}, \quad (7)$$

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} i_k = m,$$

где

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \ldots i_n}} \right\|, \quad i, j = 1, \ldots, N, \quad \sum\nolimits_{k=1}^{n} i_k = m,$$

— квадратная матрица, представляет собой форму порядка Nm относительно действительных скалярных параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и наз. характеристическим детерминантом системы (1). Классификация по типам системы (1) происходит по характеру формы (7) точно так же, как при рассмотрении одного уравнения порядка m. Фигурирующие в левой части уравнения (1) величины могут быть комплексными. Комплексное Д. у. с ч. п. очевидным образом заменяется системой Д. у. с ч. п.

Д. у. с ч. п. может вовсе не иметь решения. Однако встречающиеся в приложениях Д. у. с ч. п., как правило, имеют целые семейства решений. При выводе этих уравнений из общих законов, к-рым подчинены изучаемые явления природы, естественно возникают дополнительные условия, налагаемые на искомые решения. Центральное место в теории Д. у. с ч. п. занимают задачи отыскания именно таких регулярных решений, к-рые удовлетворяют этим условиям. Условия задач, к-рым должно удовлетворять искомое решение, существенно зависят от типа рассматриваемого уравнения.

Для эллиптич. уравнений обычно рассматриваются так наз. *краевые задачи*, к-рые, напр., в случае уравнения 2-го порядка в основном охватываются следующей постановкой: ищется регулярное в области D решение $u(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$f\left(x,\ u,\ \ldots,\ \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}},\ \ldots\right)+$$
$$+\int_S H\left(x,\ t,\ u(t),\ \ldots,\ \frac{\partial^l u(t)}{\partial t_1^{i_1}\ldots\partial t_n^{i_n}},\ \ldots\right)ds_t=0, \qquad (8)$$

где S — граница области D, f и H — заданные действительные функции, ds_t — элемент площади поверхности S, а под

$$\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}},\quad \sum\nolimits_{j=1}^{n} i_j=l,$$

при $x\in S$ понимаются пределы соответствующих производных функции $u(x)$, когда точка x изнутри области D стремится к S.

В такой общей постановке задача (8) далека от своего сколько-нибудь полного решения. Сравнительно хорошо исследованы такие частные случаи этой задачи, какими являются так наз. первая и вторая краевые задачи (см. *Дирихле задача* и *Неймана задача*) для линейных уравнений, удовлетворяющих условию равномерной эллиптичности.

В отличие от краевых задач для эллиптич. уравнений, в к-рых носителем данных является вся граница области, где ищется решение, для широких классов уравнений гиперболич. и параболич. типов носителями дополнительных данных могут служить определенным образом ориентированные незамкнутые поверхности пространства E^n, причем от них существенно зависит область определения искомого решения. К таким задачам относятся, напр., *Коши задача* с начальными данными, характеристическая задача Коши. Особо ставятся краевые задачи для уравнений смешанного типа. В теории Д. у. с ч. п. значительное внимание уделяется обширному классу смешанных задач. См. *Смешанная задача для гиперболического уравнения и системы*, *Смешанная и краевая задачи для параболического уравнения и системы*.

Задача считается в классич. смысле корректно (правильно) поставленной, если она имеет и притом единственное устойчивое решение. Задачи, не удовлетворяющие этим требованиям, до недавнего времени считались лишенными смысла. Начиная с 40-х гг. 20 в. широта диапазона математич. проблем физики, механики и техники заставила расширить не только понятие корректности постановок задач для Д. у. с ч. п., но и понятие самого решения. Были введены так наз. обобщенные решения. Наряду с вопросами существования и единственности точных решений тех или иных задач для Д. у. с ч. п. в приложениях значительную важность приобрели понятия в определенном смысле приближенных решений и фактическое построение таких решений.

Исторически одним из первых методов, позволяющих строить решения ряда задач для важных классов Д. у. с ч. п., является метод разделения переменных, или *Фурье метод*, к к-рому тесно примыкает метод интегральных преобразований (см. *Фурье интеграл*). От применения этого метода берет свое начало *спектральная теория дифференциальных операторов*.

Сравнительно позже был создан *параметрикса метод*, на основе к-рого построен *потенциалов метод*. Этот метод позволяет привлекать к исследованию краевых задач для эллиптич. уравнений аппарат интегральных уравнений. Далеко идущим развитием метода параметрикса являются методы теории функций комплексного переменного, успешно применяющиеся при исследовании эллиптич. уравнений с двумя независимыми переменными. См. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; методы комплексного переменного.

Когда изучаемое Д. у. с ч. п. представляет собой уравнение Эйлера для многомерной задачи вариационного исчисления, часто пользуются вариационным методом. Вариационный метод весьма удобен в тех случаях, когда уравнение Эйлера является уравнением эллиптич. типа. См. также *Дифференциальное уравнение с частными производными*; вариационные методы решения.

Начиная с 30-х гг. 20 в. при исследовании Д. у. с ч. п. широко используются методы функционального анализа, среди к-рых центральное место занимают *Шаудера метод* и его дальнейшее развитие — метод априорных оценок. Эти методы позволяют сравнительно легко установить существование *слабых решений* и *сильных решений* как для линейных, так и для нек-рых классов нелинейных Д. у. с ч. п. См. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; функциональные методы решения.

Среди методов, успешно приводящих к цели при построении приближенных решений Д. у. с ч. п., чаще всего применяются методы *конечных разностей исчисления*. См. также *Гиперболического типа уравнение*, численные методы решения; *Параболического типа уравнение*, численные методы решения; *Эллиптического типа уравнение*, численные методы решения.

Лит.: [1] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [2] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972.

А. В. Бицадзе.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; вариационные методы решения — методы решения краевых задач для Д. у. с ч. п. при помощи сведения этих задач (когда это возможно) к соответствующим образом подобранным вариационным задачам (т. е. к задачам на отыскание минимума или максимума нек-рого функционала) и решения последних.

Вариационные методы широко применяются как в теоретич. исследованиях (для доказательства теорем существования, единственности и устойчивости решений, при исследовании дифференциальных свойств решений, в спектральной теории, при изучении разнообразных вопросов оптимизации и т. д.), так и в вопросах, связанных с нахождением приближенных решений уравнений. Приближенные решения вариационных задач можно находить при помощи решения конечных систем алгебраич. уравнений, при этом алгоритмы нахождения приближенных решений вариационных задач часто оказываются проще и удобнее, чем имеющиеся алгоритмы решения соответствующих задач для Д. у. с ч. п.

Вариационный метод исследования краевых задач возник в сер. 19 в. в виде так наз. *Дирихле принципа* отыскания в области G гармонич. функции, принимающей на границе ∂G области G данное значение $\varphi(x)$, $x \in \partial G$, как функции, дающей в рассматриваемом классе функций минимум интегралу Дирихле. Первоначально принцип Дирихле применялся лишь в теории линейных эллиптич. уравнений 2-го порядка (впоследствии и более высоких порядков), а затем и в теории уравнений других типов, причем не только линейных, но и нелинейных. Разработке вариационных методов были посвящены работы Б. Римана (B. Riemann), К. Вейерштрасса (K. Weierstrass), Д. Гильберта (D. Hilbert). Большую роль в развитии вариационных методов, в частности в вопросе их обоснования, сыграли *вложения теоремы* и их обобщения.

Одним из простых и типичных примеров использования вариационных методов является решение *Дирихле задачи* для эллиптического самосопряженного уравнения 2-го порядка

$$Au+cu=0, \tag{1}$$

где $c=c(x)\geqslant 0$,

$$u\big|_{\partial G}=\varphi, \tag{2}$$

$$Au=-\sum_{i,\ j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right], \quad x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in G, \tag{3}$$

(G — область конечномерного евклидова пространства, ∂G — ее граница, φ — заданная на ∂G функция), и существует постоянная $\varkappa>0$ такая, что для всех точек $x\in G$ и всех чисел $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ выполняется неравенство (условие эллиптичности)

$$\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j\geqslant\varkappa\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2.$$

В этом случае вариационный метод решения задачи (1) — (2) состоит в отыскании функции $u(x)$, для к-рой функционал

$$K(u)=\int_G\left[\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+cu^2\right]dx$$

(уравнение (1) является Эйлера уравнением для функционала $K(u)$) принимает наименьшее значение в классе допустимых функций, т. е. таких функций $u(x)$, для к-рых $K(u)<+\infty$, и выполняется граничное условие (2). Вариационный метод применим только тогда, когда класс допустимых функций не пуст. Условия, к-рым должна удовлетворять заданная на границе функция φ для того, чтобы класс допустимых функций был не пуст, даются теоремами вложения. Функция $u(x)$, для к-рой функционал $K(u)$ принимает наименьшее значение в классе допустимых функций, является обобщенным решением задачи (1) — (2) (см. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; функциональные методы решения) и, напр., в классическом случае непрерывной дифференцируемости коэффициентов $a_{ij}(x)$ оператора (3) — обычным решением этой задачи.

Другим типичным примером использования вариационных методов является их применение к отысканию собственных значений и собственных функций оператора (3).

Функция, дающая минимум нек-рому функционалу, может быть получена как предел так наз. минимизирующей последовательности, т. е. последовательности функций, значения функционала на членах к-рой стремятся к указанному минимуму. Для построения минимизирующих последовательностей и установления скорости их сходимости разработаны специальные методы (напр., *Ритца метод*).

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [2] его же, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, пер. с англ., М., 1953; [3] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3—5, М., 1958—59; [5] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, 2 изд., М., 1970; [6] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2 изд., М., 1973; [7] Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, М., 1976.
Л. Д. Кудрявцев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; задача с данными на характеристиках — задача, состоящая в решении дифференциального уравнения или системы уравнений с частными производными по заданным условиям на *характеристических многообразиях.* Основными задачами такого типа являются характеристическая задача Коши и *Гурса задача.*

В случае характеристич. задачи Коши, когда начальное многообразие является характеристич. в каждой точке, начальные данные не могут быть заданы произвольным образом. Они должны удовлетворять определенным условиям, к-рые диктуются дифференциальным уравнением. Поэтому характеристич. задача Коши, вообще говоря, не является корректно поставленной, если на класс искомых решений и на заданные функции не наложены дополнительные условия (особенно вдоль многообразия, не касательного к начальному). Напр., для *теплопроводности уравнения*

$$u_t = u_{xx}$$

характеристич. задача Коши

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

корректна в классе функций, растущих на бесконечности не быстрее $\exp(cx^2)$; если же показатель 2 при x заменить на $2+\varepsilon$, то единственности уже не будет. Существует широкий класс уравнений, для к-рых характеристич. задача Коши корректна.

Если начальное многообразие S одновременно является многообразием вырождения типа или порядка уравнения, то характеристич. задача может оказаться правильно поставленной. Напр., для уравнения

$$u_{xx} - y^m u_{yy} = 0, \quad y > 0, \quad 0 < m = \text{const} < 1,$$

с достаточно гладкими начальными данными на любом интервале S характеристики $y=0$ задача разрешима и притом единственным образом.

К задачам с данными на характеристиках относятся задачи с неполными и видоизмененными начальными данными, к-рые возникают в теории вырождающихся гиперболич. и параболич. уравнений и систем. Эти задачи для уравнений вида

$$u_{xx} - y^m u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0, \quad y > 0, \quad m > 0,$$

ставятся следующим образом. Требуется отыскать решение $u(x,y)$ уравнения, удовлетворяющее видоизмененным начальным данным

$$\lim \varphi(x, y)\, u = \tau(x), \quad \lim \psi(x, y)\, u_y = \nu(x),$$

где $\alpha < x < \beta$, φ, τ, ψ и ν — заданные функции, или неполным начальным данным, т. е. одному из этих условий.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959; [2] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [3] Тихонов А. Н., «Матем. сб.», 1935, т. 42, с. 199—216; [4] Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [5] его же, «Математика», 1968, т. 12, № 2, с. 88—109.
А. М. Нахушев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; задача с косой (наклонной) производной — линейная краевая задача для эллиптич. уравнений 2-го порядка.

Пусть D — область действительного евклидова пространства с декартовыми координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, граница ∂D к-рой представляет собой $(n-1)$-мерную гиперповерхность Ляпунова. Пусть в области D задано линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\mathscr{E}(u) = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = F(x) \quad (1)$$

с действительными коэффициентами a_{ij}, b_i, c, F, удовлетворяющими условию Гёльдера в $D \cup \partial D$, и, кроме того, в D соблюдено условие равномерной эллиптичности уравнения. Пусть $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ — заданный на ∂D непрерывный действительный вектор, к-рый нигде не обращается в нуль. Задача с косой производной состоит в следующем: найти регулярное в области D решение $u(x)$ уравнения (1), непрерывное в $D \cup \partial D$, для к-рого в каждой точке $y \in \partial D$ существует предел

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in D}} [l(y) \operatorname{grad}_x u] = \lambda(u),$$

совпадающий с заданной непрерывной на ∂D функцией $f(y)$:

$$\lambda(u) = f(y), \quad y \in \partial D. \quad (2)$$

В краевом условии (2) без ограничения общности можно считать, что l — единичный вектор. *Неймана задача* является частным случаем задачи с косой производной, когда левая часть в краевом условии (2) совпадает с производной от искомого решения по конормали ν:

$$\frac{du}{d\nu} = f(y), \quad y \in \partial D.$$

Если соблюдены условия

$$c(x) \leqslant 0 \quad (3)$$

и

$$\inf_{y \in \partial D} (Nl) > 0, \quad (4)$$

где N — внешняя нормаль ∂D в точке y, то соответствующая задаче (1), (2) однородная краевая задача

$$\mathscr{E}(u) = 0, \quad \lambda(u) = 0, \quad (5)$$

в силу принципов Хопфа и Зарембы — Жиро (см., напр., [1]), не может иметь решения, отличного от постоянной. В частности, когда в условии (3) по крайней мере в одной точке выполняется строгое неравенство, задача (1), (2) не может иметь более одного решения. При исследовании вопроса о существовании решений задачи (1), (2) обычно пользуются методом интегральных уравнений, априорными оценками или методами *конечных разностей исчисления*.

Выполнение условия (4) гарантирует ф р е д г о л ь м о в о с т ь задачи (1), (2), то есть: а) размерность $\varkappa_1$ пространства решений однородной задачи (5) конечна; б) если $\varkappa_1 = 0$, то задача (1), (2) всегда разрешима и притом однозначно; если $\varkappa_1 > 0$, то существует пространство линейных функционалов, обращение в нуль к-рых над F и f является условием, необходимым и достаточным для существования решений задачи (1), (2); причем размерность этого пространства также равна $\varkappa_1$. Фредгольмовость задачи (1), (2) может нарушиться лишь тогда, когда множество M точек y, для к-рых $(Nl) = 0$, не пусто. В частности, при $n = 2$ в предположении, что

$$\sum_{i,\ j=1}^{2} a_{ij} u_{x_i x_j} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u(x)$$

(а это не ограничивает общность), задача (1), (2) редуцируется к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши, откуда следует н ётеровость задачи, то есть: а) размерность $\varkappa_1$ пространства решений однородной задачи (5) конечна; б) размерность $\varkappa_2$ пространства линейных функционалов, обращение в нуль к-рых над F и f является условием, необходимым и достаточным для разрешимости задачи (1), (2), также конечна; в) разность $\varkappa_1 - \varkappa_2 = \varkappa$ (индекс задачи (1), (2)) дается формулой

$$\varkappa = 2(p+1),$$

где $2\pi p$ — приращение $\arg(l_1 - il_2)$ при однократном обходе контура ∂D области D в положительном направлении. В рассматриваемом случае задача (1), (2) будет фредгольмовой лишь при $p=-1$. Число p характеризует вращение векторного поля (l_1, l_2). Когда (1) представляет собой равномерно эллиптич. систему, т. е. когда F и u являются m компонентными векторами, а a_{ij}, b_i и c — квадратными матрицами порядка m, причем матрицы a_{ij} удовлетворяют условию

$$k_0\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^r\right)^m \leqslant \left|\det\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j\right| \leqslant k_1\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2\right)^m,$$

при определении оператора $\lambda(u)$ в краевом условии (2) задачи с косой производной под $l_1, l_2, \ldots, l_n$ следует понимать квадратные матрицы порядка m, а под f — вектор с m компонентами.

Нётеровость задачи с косой производной имеет место для широких классов равномерно эллиптич. систем и операторов $\lambda(u)$. Так, напр., когда $n=2$ и $a_{ij}=0$, $i \neq j$, $a_{ii}=E$, где E — единичная (диагональная) матрица, выполнение условия $\det(l_1+il_2) \neq 0$ всюду на ∂D гарантирует нётеровость задачи (1), (2). При соблюдении этого условия индекс задачи (1), (2) вычисляется по формуле $\varkappa = 2(p+m)$, где $2\pi p$ — приращение $\arg\det(l - il_2)$ при однократном обходе контура ∂D области D в положительном направлении.

С 60-х гг. 20 в. ведется интенсивное исследование задачи с косой производной при $n \geqslant 3$ (см. [1]).

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [2] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [3] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [4] Bouligand G., Giraud G., Delens P., Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel, P., 1935. *А. В. Бицадзе.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; задача с разрывными коэффициентами — задача для Д. у. с ч. п., в к-рой коэффициенты дифференциальных операторов испытывают разрывы 1-го рода (или скачки) при переходе через нек-рые поверхности и на этих поверхностях заданы условия сопряжения.

Задача с разрывными коэффициентами в случае эллиптич. операторов 2-го порядка (задача трансмиссии) состоит в следующем. В произвольной ограниченной открытой N-мерной области g с границей Γ задана $(N-1)$-мерная поверхность Γ_1, разбивающая область g на подобласти g_1 и g_2; в области $(g+\Gamma)$ ставится задача:

$$\left.\begin{array}{c} L_l u = f_l(x) \text{ в } g_l,\ l=1,2, \\ [u]\big|_{\Gamma_1} = \varphi(x),\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right]\Big|_{\Gamma_1} = \psi(x), \\ u\big|_{\Gamma} = \chi(x), \end{array}\right\} (*)$$

где

$$L_l u = \sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}^{(l)}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i^{(l)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c^{(l)}(x)u$$

— определенный в области g_l линейный дифференциальный оператор эллиптич. типа;

$$[u]\big|_{\Gamma_1} \equiv u\big|_{x\to\Gamma_1-0} - u\big|_{x\to\Gamma_1+0},$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu_1}\right]\Big|_{\Gamma_1} \equiv \frac{\partial u}{\partial \nu_1}\Big|_{x\to\Gamma_1-0} - \frac{\partial u}{\partial \nu_2}\Big|_{x\to\Gamma_2+0},$$

где $\partial/\partial\nu_l$ — производная по конормали, равная

$$\sum_{i,\ j} a_{ij}^{(l)} \cos(\boldsymbol{n},\ x_j) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

n — внешняя нормаль к Γ_1, а символы Γ_1-0 и Γ_1+0 означают, что берутся предельные значения соответственно с внутренней и с внешней сторон поверхности Γ_1 по отношению к области g_1, f_l, φ, ψ, χ — заданные функции.

Здесь для простоты считается, что имеется лишь одна поверхность разрыва коэффициентов — поверхность Γ_1.

Задача (*) является математич. описанием стационарных физич. процессов, происходящих в области, составленной из различных сред, напр. рассеяния электромагнитной волны на каком-либо препятствии или распространения тепла в слоистой среде.

У задачи (*) существует классич. решение при условиях, к-рые в случае отсутствия разрыва у коэффициентов и при $\varphi=\psi=0$ переходят в *Жиро условия* разрешимости задачи Дирихле (см. [3], [4], [5]). Для задачи (*) изучались: обобщенные из W_2^l решения (см. [1], [2]); задача на собственные значения и оценки собственных функций для самосопряженных операторов L_l (см. [6], [8]); случаи вырождения в связи с марковскими процессами (см. [9], [10]); случаи с квазилинейными операторами L_l (см. [13]). Для задачи (*) могут быть установлены оценки Шаудера (см. [6], [7]); разработаны численные методы ее решения [11], [12]. Построена теория разрешимости задач с разрывными коэффициентами для эллиптич. уравнений и систем порядка $2m$ (см. [18], [19], [20]).

Задача с разрывными коэффициентами для параболич. и гиперболич. операторов 2-го порядка столь же подробно изучена (см. [2], [9], [14], [15], [16], [17]).

Лит.: [1] Ладыженская О. А., «Докл. АН СССР», 1954, т. 96, № 3, с. 433—36; [2] Олейник О. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 1, с. 3—20; [3] Ильин В. А., Шишмарев И. А., «Сиб. матем. ж.», 1961, т. 2, № 1, с. 46—58; [4] Ильин В. А., «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 1, с. 28—30; [5] Ладыженская О. А., Уральцева Н. И., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964; [6] Шишмарев И. А., «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 1, с. 45—47; [7] Ван Тун, «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1964, т. 4, № 3, с. 577—80; [8] Ильин В. А., «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 2, с. 272—75; [9] Гирсанов И. В., «Докл. АН СССР», 1960, т. 135, № 6, с. 1311—13; [10] Фрейдлин М. И., «Докл. АН СССР», 1962, т. 144, № 3, с. 501—04; [11] Самарский А. А., в кн.: Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда. Ленинград, 1961, т. 2, Л., 1964; [12] его же, «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1961, т. 1, № 3, с. 441—460; [13] Борсук М. В., «Докл. АН СССР», 1967, т. 177, № 5, с. 991—94; [14] Камынин Л. И., в кн.: Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными, Новосиб., 1963, с. 3—6; [15] Камынин Л. И., Масленникова В. Н., «Сиб. матем. ж.», 1961, т. 2, № 3, с. 384—99; [16] Ильин В. А., «Докл. АН СССР», 1962, т. 142, № 1, с. 21—4; [17] Егоров Ю. В., «Докл. АН СССР», 1960, т. 134, № 3, с. 514—17; [18] Schechter M., «Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.», 1960, v. 14, p. 207—36; [19] Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г., «Докл. АН СССР», 1963, т. 148, № 5, с. 1034—37; [20] их же, «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 181—82.

И. А. Шишмарев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; задача с разрывными начальными (краевыми) условиями — задача для Д. у. с ч. п., в к-рой функции, задающие (начальные) краевые условия, не являются непрерывными.

Пусть, например, для гиперболического уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad 0 < x < 1, \quad t > t_0,$$

поставлена смешанная задача с начальными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \varphi_1, \quad u\Big|_{t=t_0} = \varphi_0,$$

и краевыми условиями

$$u\big|_{x=0}=\psi_1,\quad u\big|_{x=1}=\psi_2;$$

в этом смысле разрывы начальных функций φ_0 и φ_1 влекут за собой разрывы u и $\partial u/\partial t$ вдоль характеристических лучей $x-at=\text{const}$ и $x+at=\text{const}$, причем мера разрыва

$$\chi=u(c\pm at+0,\ t)-u(c\pm at-0,\ t),$$

или

$$\chi=u_t(c\pm at+0,\ t)-u_t(c\pm at-0,\ t),$$

где $c\in[0,\ 1]$ — точка разрыва функций φ_0 или φ_1, удовлетворяет вдоль характеристического луча уравнению

$$\frac{d\chi}{dt}+0\cdot\lambda=0,$$

т. е. $\chi=\text{const}$. Аналогичные результаты справедливы для гиперболических уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами:

$$u_{tt}=\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum\nolimits_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u+f,$$

$$u\big|_{t=t_0}=\varphi_0(x),\quad u_t\big|_{t=t_0}=\varphi_1(x),\quad u\big|_{\partial D}=\psi.$$

В этом случае разрывы начальных функций и краевых условий также влекут за собой разрывы u и $\partial u/\partial t$ вдоль характеристических лучей, определяемых из системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum\nolimits_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\psi_j,\quad \sum\nolimits_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(c)\varphi_i\varphi_j=1;$$

мера разрыва χ удовлетворяет уравнению:

$$2\frac{d\chi}{dt}+A\chi=0,\ \ A=\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}+\sum\nolimits_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$

где функция $\varphi(x)$ определяет характеристическую поверхность в виде уравнения $\varphi(x)=C$.

Для уравнения эллиптического типа разрывы краевых условий внутрь области D не распространяются, т. к. в этом случае характеристические лучи комплексны. Для таких уравнений эллиптического типа изучен вопрос о существовании и единственности решения и об удовлетворении решения граничным условиям. Так, для эллиптических уравнений 2-го порядка в произвольной области

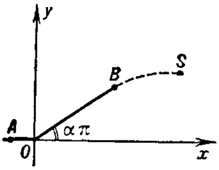
$$\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum\nolimits_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f,$$

$$u\big|_{\partial D}=\psi,\quad\text{или}\quad \frac{\partial u}{\partial n}+k(x)u\big|_{\partial D}=\psi$$

доказано, что если граничная функция $\psi\in W_2^{1/2}(\partial D)$ для первой краевой задачи и $\psi\in L_2(\partial D)$ для второй краевой задачи, то существует обобщенное решение из $W_2^1(D)$, к-рое удовлетворяет граничному условию в среднем, т. е. $\|u-\psi\|_{L_2(\partial D_n)}\to 0$, где поверхности ∂D_n аппроксимируют поверхность ∂D. В случае параболических уравнений (также как и для эллиптических уравнений) разрывы внутрь области D не распространяются, если разрывны начальные данные или краевые условия. Для этих задач изучены также вопросы о существовании и единственности обобщенного решения граничному условию.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, М., 1976; [3] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [6] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2 изд., М., 1973; [7] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967; [8] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [9] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [10] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы ..., пер. с англ., М., 1962. *Е. И. Моисеев.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; задача со свободными границами — задача, в к-рой требуется найти решение системы Д. у. с ч. п. с соответствующими начальными и граничными условиями в области, граница к-рой частично или полностью неизвестна и подлежит определению. К такого типа задачам приводят многие проблемы фильтрации, диффузии, теплопроводности и др. разделов механики сплошных сред. Так, напр., задача Гельмгольца — Кирхгофа о симметричном струйном обтекании равнобочного клина с углом раствора $2\alpha\pi$ неограниченным потоком идеальной жидкости заключается в отыскании компонент скорости $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, являющихся решением системы уравнений Коши — Римана:



$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

и удовлетворяющих на известной границе условиям (см. рис.):

$$v\big|_{AO}=0, \quad v\big|_{OB}=\operatorname{tg}\alpha\pi u\big|_{OB}.$$

Неизвестная граница BS является линией тока, и на ней задано дополнительное условие

$$u^2+v^2=v_\infty^2, \quad \lim_{r\to\infty} u=v_\infty, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

(на рис. приведена верхняя половина течения $y\geqslant 0$, при $y\leqslant 0$ течение симметрично).

При изучении плоских задач со свободными границами большую роль играют методы теории функций комплексного переменного.

См. также *Стефана задача.*

Лит.: [1] Монахов В. Н., Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем, Новосиб., 1977; [2] Кружков С. Н., «Прикл. матем. и механ.», 1967, т. 31, в. 6, с. 1009—20; [3] Шишкин Г. И., «Докл. АН СССР», 1971, т. 197, № 6, 1276—79. *Ф. П. Васильев.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; метод уравнений Фишера — Рисса, метод Пиконе,— метод решения краевых задач для Д. у. с ч. п., основанный на применении формулы Грина и приводящий к системе интегральных уравнений (Фишера — Рисса) для нек-рого подходящим образом подобранного неизвестного вектора. Метод дает возможность находить численные значения решений, но может быть применен и для доказательства теорем существования.

Пусть L^* и L — сопряженные линейные эллиптические операторы 2-го порядка в пространстве точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с действительными коэффициентами

$$a_{ik}\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(D\cup S),$$

$$b_i\in C^{(1)}(D\cup S), \quad c, f\in C^{(0)}(D\cup S),$$

D — конечная область, ограниченная замкнутой поверхностью S. Пусть в классе функций, допускающих интегральные представления по формулам Грина, ищется решение $u(x)$ задачи Дирихле:

$$Lu(x)=f(x), \quad x\in D, \quad \lim_{x\to y\in S} u(x)=\varphi(y).$$

Пусть, далее, $v(x)$ — произвольная функция из того же класса. Применение формулы Грина к $u(x)$ и $v(x)$ приводит к соотношению

$$-\int_D u(x) L^* v(x)\,dx = \\ = \int_S \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial v}{\partial \nu} - Av\right) - v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] dy - \\ - \int_D f(x)\,v(x)\,dx, \tag{1}$$

где

$$A = \sum_i \cos nx_i \left(b_i - \sum_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}\right),$$

ν — внутренняя конормаль. Пусть $U=(u_1, u_2)$ —двухкомпонентный вектор, составляющие к-рого — действительные функции с суммируемым квадратом, причем первая составляющая определена в D, а вторая — на S. Пусть $L_2(D, S)$ — множество этих векторов; норма вводится через скалярное произведение U и V из $L_2(D, S)$:

$$(U, V) = \int_D u_1 v_1\,dx + \int_S u_2 v_2\,dy.$$

Пусть $\{v_k\}$ — множество, выбранное так, что совокупность двухкомпонентных векторов

$$V_k = (-L^* v_k(x),\ v_k(y)), \quad x \in D, \quad y \in S,$$

полна в гильбертовом пространстве $L_2(D, S)$. Тогда, обозначив через $U=(u_1, u_2)$ вектор с первой составляющей $u_1(x)$, равной $u(x)$, и второй составляющей $u_2(y)$, совпадающей с $\partial u/\partial\nu$, можно записать (1) в виде системы интегральных уравнений Фишера — Рисса:

$$(U, V_k) = \int_S \varphi(y)\left(\frac{\partial v_k}{\partial \nu} - Av_k\right) dy - \int_D f v_k\,dx. \tag{2}$$

Если совокупность $\{V_k\}$ ортонормирована и выполняются условия *Рисса — Фишера теоремы*, то система (2) определит в $L_2(D, S)$ коэффициенты Фурье c_k вектора $U=(u_1, u_2)$ относительно полной системы базисных векторов $\{V_k\}$. Если известно, что решение рассматриваемой задачи существует и единственно, то ряд Фурье $\sum_k c_k V_k$ сходится в среднем к искомому решению и только к нему. В противном случае выбор функций $\{v_k\}$ связан с необходимостью дополнительного исследования. Так, если допускаются собственные решения $u_0(x)$ (нарушена единственность), совокупность $\{V_k\}$ должна удовлетворять равенствам

$$(U_0, V_k) = 0,$$

где $U_0=(u_0(x),\ \partial u_0/\partial\nu)$. Если в качестве $\{v_k\}$ взята последовательность одночленов $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$ с целыми неотрицательными показателями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, то значения $u(x)$ и $\partial u/\partial\nu$, найденные из (2), вместе с заданным на S значением $u(x)$, удовлетворяют функциональным соотношениям Грина:

$$\delta(x)\,k_m u(x) = \int_S \left[u(y)\left(\frac{\partial w(y, x)}{\partial \nu} - \right.\right. \\ \left.\left. - A(y)\,w(y, x)\right) - w(y, x)\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] dy - \int_D f w(y, x)\,dy,$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D \cup S, \end{cases}$$

где k_m — отличная от нуля постоянная, зависящая от m, и $w(y, x)$ — фундаментальное решение уравнения $L^* v = 0$. В этом случае все решения системы уравнений Фишера — Рисса (2) и только они являются решениями рассматриваемой краевой задачи. Центральным пунктом этого метода является построение подходящим образом выбранной совокупности функций $\{v_n\}$, удовлетворяющих условию $L^* v_n = 0$ либо нек-рым условиям полноты [4].

Этот способ не требует задания явного выражения фундаментального решения, но если последнее известно, то, в силу того, что совокупность $\{w(y, x^{(k)})\}$, где $x^{(k)}$ — счетная бесконечная последовательность произвольных точек, не принадлежащих $D \cup S$, линейно независима и полна в $L_2(S)$ [4], можно значительно упростить вычисления; эта теорема позволяет также распространить метод уравнений Фишера — Рисса на задачи с косыми производными (см. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; задача с косой производной) и другие типы уравнений.

Лит.: [1] Picone M., «Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur.», 1940, v. 75, p. 413—26; [2] Amerio L., «Amer. J. Math.», 1947, v. 69, № 3, p. 447—89; [3] Fichera G., «Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.», 1950, t. 4, fasc. 1—2, p. 35—99; [4] Купрадзе В. Д., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 2, с. 59—107; [5] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957. *В. Д. Купрадзе.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; методы комплексного переменного — методы решения эллиптических Д. у. с ч. п., в к-рых используется представление решений через аналитич. функции комплексного переменного.

Теория аналитич. функций

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

комплексного переменного $z = x + iy$ представляет собой теорию двух действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющих системе уравнений Коши — Римана: $u_x - v_y = 0$, $u_y + v_x = 0$, к-рая по существу эквивалентна уравнению Лапласа

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Начиная с 30-х гг. 20 в. методы аналитич. функций интенсивно стали проникать в общую теорию уравнений эллиптич. типа. Это привело к созданию нового раздела анализа, существенно расширяющего рамки классич. теории аналитич. функций и ее применений. В этой области фундаментальную роль играют различные формулы представления всех решений весьма широкого класса эллиптич. уравнений через аналитич. функции одного комплексного переменного. Для линейных уравнений эти представления осуществляются с помощью нек-рых линейных операторов, выражающихся посредством коэффициентов. Эти формулы дают возможность распространить свойства аналитич. функций на решения уравнений эллиптич. типа, причем, в ряде случаев в дословной формулировке сохраняются такие важные свойства, как теорема единственности, принцип аргумента, теорема Лиувилля и др. В естественной форме обобщаются ряды Тейлора и Лорана, интегральная формула Коши, принцип компактности, принцип аналитич. продолжения и др.

Формулы комплексного представления позволяют строить разнообразные семейства частных решений уравнения, обладающие теми или иными заданными свойствами. Напр., можно строить различные классы так наз. элементарных решений, имеющих точечные особенности, к-рые используются для получения различных интегральных формул, а также так наз. полные системы частных решений; последние обладают тем свойством, что при помощи их линейных комбинаций можно приближать любые решения. Формулы комплексного представления позволяют также редуцировать широкий круг граничных задач к эквивалентным краевым задачам для аналитич. функций, а также строить эквивалентные задаче интегральные уравнения (типа Фредгольма или сингулярные). Этот метод позволяет исследовать краевые задачи нефредгольмового типа, получить условие нормальной разрешимости и явную формулу индекса. См. *Краевая задача*; методы комплексного переменного.

Эллиптические уравнения с аналитическими коэффициентами. Пусть дано уравнение 2-го порядка эллиптич. типа

$$\Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0, \qquad (1)$$

где a, b и c — аналитич. функции действительных переменных x, y в нек-рой области плоскости $z=x+iy$. Аналитическое продолжение коэффициентов в область независимых комплексных переменных $z=x+iy$, $\zeta = x - iy$ приводит уравнение (1) к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial\zeta} + A(z, \zeta)\frac{\partial u}{\partial z} + B(z, \zeta)\frac{\partial u}{\partial\zeta} + C(z, \zeta)u = 0. \quad (2)$$

Односвязная область D_0 наз. основной областью уравнения (1), если A, B и C — аналитич. функции двух независимых переменных в цилиндрич. области $(D_0, \bar{D}_0)$, где D_0 обозначает зеркальное изображение D_0 относительно действительной оси.

Если $D \subset D_0$ — односвязная область, то все регулярные в области D решения уравнения (1) выражаются по формуле

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left\{G(z, z_0;\ z, \bar{z})\,\Phi(z) - \right.$$

$$\left. - \int_{z_1}^{z} \Phi(t)\frac{\partial}{\partial t}G(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\,dt\right\}, \qquad (3)$$

где $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная функция в области D, z_1, $z_0 \in D$ — произвольные фиксированные точки; аналитич. функция $G(z, \zeta, t, \tau)$ четырех независимых комплексных аргументов в цилиндрич. области $(D_0, \bar{D}_0, D_0, \bar{D}_0)$ наз. функцией Римана уравнения (1). Она является решением интегрального уравнения типа Вольтерра:

$$G(z, \zeta, t, \tau) - \int_{\tau}^{\zeta} A(z, \eta)\,G(z, \eta, t, \tau)\,d\eta -$$

$$- \int_{t}^{z} B(\xi, \zeta)\,G(\xi, \zeta, t, \tau)\,d\xi +$$

$$+ \int_{t}^{z} d\xi \int_{\tau}^{\zeta} C(\xi, \eta)\,G(\xi, \eta, t, \tau)\,d\eta = 1. \qquad (4)$$

Осуществляемое формулой (3) соответствие между семейством решений $\{u\}$ уравнения (1) и семейством голоморфных функций $\{\Phi\}$ взаимно однозначно, если зафиксировать значения мнимой части Φ в фиксированной точке z_1 области D. При $z_1=z_0=0$ имеет место формула обращения:

$$\Phi(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0)\,G(0, 0, z, 0).$$

Уравнение (4) можно решить методом последовательных приближений. Таким путем можно найти приближенные выражения для функции Римана.

В случае многосвязной области D формула (3) дает, вообще говоря, многозначные решения. Чтобы получить в этом случае все однозначные решения уравнения (1), в качестве Φ в (3) надо брать многозначные функции определенного вида.

Пусть D — двухсвязная область $(D \subset D_0)$, D' — ограниченный континуум, дополняющий D до односвязной области. Тогда все однозначные в области D решения уравнения (1) даются формулой

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left\{G(z, \bar{z}_0, z, \bar{z})\,\Phi(z) - \right.$$

$$\left. - \int_{z_1}^{z} \Phi(t)\,H(t, \bar{z}_0, z, \bar{z})\,dt\right\}, \qquad (5)$$

где $z_1 \in D$, $z_0 \in D'$ — фиксированные точки, $\Phi(z)$ — многозначная аналитич. функция вида

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \left[\alpha G(z_0, \overline{z_0}, z, \overline{z}) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\Phi_0(t)} H^*(z_0, t, z, \overline{z_0})\, dt \right] \ln(z - z_0).$$

Здесь α — произвольная действительная постоянная, $\Phi_0(z)$ — произвольная голоморфная функция в области D, L — любая простая замкнутая кусочно гладкая кривая, лежащая в D и окружающая D'. Функции H и H^* выражаются по формулам

$$H(t, \tau, z, \zeta) = \frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau, z, \zeta) - B(t, \tau) G(t, \tau, z, \zeta),$$

$$H^*(t, \tau, z, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \tau} G(t, \tau, z, \zeta) - A(t, \tau) G(t, \tau, z, \zeta).$$

Комплексные представления вида (3) распространяются также и на системы уравнений, записываемых в векторной форме в виде (1), где u — вектор с компонентами $u_1, \ldots, u_n$, a, b, c — квадратичные матрицы порядка n, элементы которых — аналитич. функции переменных x, y.

В той области, где уравнение (1) имеет хотя бы одно положительное решение $u_0 > 0$, подстановкой $u = u_0 v$ его можно привести к виду

$$\Delta v + a v_x + b v_y = 0$$

(такое решение всегда существует в малой окрестности любой фиксированной точки, а также в любой области, где $c \leqslant 0$). В этом случае уравнение (1) эквивалентно системе уравнений, к-рая представляет собой частный случай обобщенной системы Коши — Римана вида

$$u_x - v_y + au + bv = 0, \quad u_y + v_x + cu + dv = 0. \tag{6}$$

Вводя в рассмотрение комплексную функцию $w = u + iv$, эту систему можно записать в виде

$$\partial_{\overline{z}} w + A(z) w + B(z) \overline{w} = 0, \quad 2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y. \tag{7}$$

Если коэффициенты A и B — аналитич. функции комплексных аргументов z и ζ ($z = x + iy$, $\zeta = x - iy$) в нек-рой цилиндрич. области $(D_0, \overline{D_0})$, где D_0 — односвязная область, то решение уравнения (6) в односвязной области $D \subset D_0$ выражается формулой

$$W(z) = \exp\left\{\int_{z_0}^{z} A(z, \tau)\, d\tau\right\} \times$$
$$\times \left\{\Phi(z) + \int_{z_0}^{z} \tilde{\Gamma}_1(z, \overline{z}, t)\, \Phi(t)\, dt + \right.$$
$$\left. + \int_{\overline{z_0}}^{\overline{z}} \tilde{\Gamma}_2(z, \overline{z}, t)\, \overline{\Phi(t)}\, dt\right\}, \tag{8}$$

в к-рой $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$ — аналитич. функции своих аргументов, выражающиеся через A и B; они строятся по методу последовательных приближений, Φ — произвольная аналитич. функция переменного z.

В случае, когда A и B — целые функции переменных x и y, представление (8) имеет место для любой односвязной области плоскости z без ограничений на поведение коэффициентов A и B вблизи бесконечности.

Пусть дано эллиптич. уравнение вида

$$\Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} \sum_{0 \leqslant p+q \leqslant k} a_{p,q}^{(k)} \frac{\partial^{p+q} \Delta^{n-k} u}{\partial x^p \partial y^q} = 0, \tag{9}$$

где $a_{p,q}^{(k)}$ — аналитич. функции x, y. Если D_0 — основная область уравнения (9), то всякое регулярное решение этого уравнения в односвязной области $D \subset D_0$, выражается формулой

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left\{G(z, \overline{z_0}, z, \overline{z})\,\Phi_0(z) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_1}^{z} \Phi_k(t) \frac{\partial}{\partial t} G_k(t, \overline{z_0}, z, \overline{z})\,dt\right\}, \qquad (10)$$

где $\Phi_0, \ldots, \Phi_{n-1}$ — произвольные голоморфные в области D функции

$$G_k(t, \tau, z, \zeta) = \frac{\partial^{2(n-k-1)} G(t, \tau, z, \zeta)}{\partial t^{n-k-1}\,\partial \tau^{n-k-1}}, \; k=0, 1, \ldots, n-1.$$

Здесь G — комплексная функция Римана уравнения (9), к-рая аналитически зависит от комплексных аргументов (t, τ, z, ζ) в цилиндрич. области $(D_0, \bar{D}_0, D_0, \bar{D}_0)$. При выполнении условий

$$\Phi_k(z_1) = \overline{\Phi_k(z_1)}, \; k=0, 1, \ldots, n-1,$$

формула (10) осуществляет взаимно однозначное соответствие между семейством решений $\{u\}$ уравнения (9) и семейством голоморфных функций $\{(\Phi_0, \ldots, \Phi_{n-1})\}$. Если D — многосвязная область, то формула (10) дает, вообще говоря, многозначные решения. Но, как и в случае уравнения 2-го порядка, можно видоизменить эту формулу так, чтобы она давала все однозначные решения уравнения (9) и в многосвязной области. Формула (10) распространяется также на систему уравнений вида (9), где u — вектор, а коэффициенты — матрицы.

Для ряда уравнений математич. физики функция Римана выражается в явной форме при помощи элементарных или специальных функций.

В случае уравнения колебаний мембраны

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0, \qquad \lambda = \text{const},$$
$$G(z, \zeta, t, \tau) = J_0\left(\lambda \sqrt{(z-t)(\zeta-\tau)}\right),$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка; в качестве основной области можно взять всю комплексную плоскость. Случай $\lambda=0$ дает уравнение Лапласа $\Delta u=0$; тогда $G=1$ и формула (3) принимает вид

$$u = \operatorname{Re}[\Phi(z)].$$

Для уравнения сферич. функций

$$\Delta u + n(n+1)(1+x^2+y^2)^{-2} u = 0, \; n = \text{const},$$
$$G(z, \zeta, t, \tau) = P_n\left(\frac{(1-z\zeta)(1-t\tau)+2z\tau+2\zeta t}{(1+z\zeta)(1+t\tau)}\right),$$

где P_n — функция Лежандра первого рода; в качестве основной области можно взять любую односвязную область D_0, для к-рой выполняется условие: если $z \in D_0$, $\zeta \in D_0$, то $z\zeta \neq 1$ (напр., круг $|z|<1$). Для уравнения Эйлера — Дарбу

$$\Delta u + y^{-1}(\alpha u_x + \alpha' u_y) = 0, \quad \alpha, \alpha' = \text{const},$$
$$G(z, \zeta, t, \tau) = (\tau - z)^{-\beta'} (\zeta - t)^{-\beta} (\zeta - z)^{\beta+\beta'} \times$$
$$\times F\left(\beta', \beta, 1, \frac{(z-t)(\zeta-\tau)}{(z-\tau)(\zeta-t)}\right),$$

где $2\beta = \alpha' + i\alpha$, $2\beta' = \alpha' - i\alpha$, F — гипергеометрич. ряд; в качестве основной области можно взять полуплоскости $y>0$ или $y<0$.

Для уравнения

$$\Delta^n u = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$G(z, \zeta, t, \tau) = \frac{(z-1)^{n-1}(\zeta-t)^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!},$$

и имеет место формула Гурса

$$u = \operatorname{Re}\left[(z\bar{z})^{n-1}\Phi_{n-1} + (z\bar{z})^{n-2}\Phi_{n-2} + \ldots + \Phi_0\right].$$

Метод комплексных представлений решений применим также к нек-рому классу нелинейных уравнений. Пусть, напр., дано известное в дифференциальной геометрии уравнение Гаусса

$$\Delta u = -2ke^{u},$$

где $k(x, y)$ — заданная функция. Если $v_0(z)$ — какое-либо частное решение этого уравнения, то его же решениями являются функции вида

$$u(z) = v_0[\Phi(z)]\,|\Phi'(z)|^2,$$

где $\Phi(z)$ — произвольная аналитич. функция. Если $k = \mathrm{const}$, то $v_0 = 4(1 - kz\bar{z})^{-2}$ и все решения уравнения Гаусса выражаются формулой:

$$u(x, y) = 4\,|\Phi'(z)|^2\,(1 + k\,|\Phi(z)|^2)^{-2}.$$

Если $k < 0$, то надо предполагать, что $|\Phi(z)| < -k^{-1}$.

Эллиптические уравнения с неаналитическими коэффициентами. Пусть дана обобщенная система уравнений Коши — Римана (7) с коэффициентами A и B, заданными на всей плоскости E комплексного переменного z и принадлежащими классу $L_{p,2}(E)$, т. е.

$$A(z),\ B(z) \in L_p,\ |z|^{-2} A\left(\frac{1}{z}\right),\ \ |z|^{-2} B\left(\frac{1}{z}\right) \in L_p,$$

$$p > 2,\ |z| \leqslant 1.$$

Если коэффициенты заданы в ограниченной области S и принадлежат классу $L_p(S)$, $p > 2$, то они будут удовлетворять предыдущим условиям при продолжении их вне S нулем. При этих предположениях уравнение (7), вообще говоря, не имеет решения в классическом смысле. Поэтому рассматриваются так наз. обобщенные решения: функция $w(z) \in L_1(S)$ наз. решением уравнения (7) в области S, если она обладает производной в смысле С. Л. Соболева $\partial_{\bar{z}} W \in L_1(S)$ и удовлетворяет уравнению почти везде в S.

Теория функций, удовлетворяющих уравнению (7), представляет собой далеко идущее обобщение классич. теории аналитич. функций ($A \equiv B \equiv 0$) и сохраняет существенные черты последней. Поэтому решения уравнения вида (7) наз. *обобщенными аналитическими функциями*.

Всякое решение уравнения (7) (в S) удовлетворяет интегральному уравнению

$$w(z) - \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{A(\zeta)\,w(\zeta) + B(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}}{-z}\, d\xi\, d\eta = 0, \qquad (11)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, $\Phi(z)$ — голоморфная функция в S. Если $\Phi \in L_q(\bar{S})$, $q \geqslant \frac{p}{p-1}$, $p > 2$, то уравнение (11) имеет единственное решение, к-рое выражается формулой вида

$$w(z) = \Phi(z) + \iint_S \Gamma_1(z, \zeta)\,\Phi(\zeta)\, d\xi\, d\eta + \\ + \iint_S \Gamma_2(z, \zeta)\,\overline{\Phi(\zeta)}\, d\xi\, d\eta. \qquad (12)$$

Резольвенты Γ_1 и Γ_2 зависят от коэффициентов уравнения (7) и строятся при помощи процесса последовательных приближений.

Формула (12) дает общее (линейное) представление решений уравнения (7) через аналитич. функции $\Phi(z)$. Она, в частности, позволяет построить так наз. основные ядра

$$\Omega_1(z, t) = X_1(z, t) + iX_2(z, t),\ \Omega_2(z, t) = X_1(z, t) - iX_2(z, t),$$

где t — некоторая фиксированная точка, а X_1 и X_2 — решения интегрального уравнения (11), соответствующие функциям

$$2\Phi_1 = (t - z)^{-1}, \quad 2i\Phi_2 = (t - z)^{-1}.$$

Эти ядра позволяют написать **обобщенную формулу Коши:**

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S}\Omega_1(z,\zeta)\,w(\zeta)\,d\zeta-\Omega_2(z,\zeta)\,\overline{w(\zeta)}\,d\bar{\zeta}=$$

$$=\begin{cases} w(z), & z\in S,\\ \frac{1}{2}w(z), & z\in\partial S,\\ 0, & z\notin\bar{S}. \end{cases}\qquad(13)$$

При $A\equiv B\equiv 0$ она обращается в классич. формулу Коши. При помощи формулы (13) на обобщенные аналитич. функции распространяются многие из тех свойств аналитич. функций, к-рые доказываются обычно с помощью формулы Коши. В частности, можно обобщить классич. теоремы об аналитич. продолжении, построить теорию обобщенных интегралов типа Коши, получить представления обобщенных аналитич. функций в виде контурных интегралов с действительной плотностью и др.

Основными ядрами сопряженного уравнения

$$\partial_{\bar{z}}w_*-Aw_*-\bar{B}\bar{w}_*=0\qquad(14)$$

являются функции

$$\Omega_1^*(z,t)=-\Omega_1(t,z),\quad \Omega_2^*(z,t)=-\overline{\Omega_2(t,z)}.$$

Если w и w_* удовлетворяют в S уравнениям (7) и (14), соответственно, и непрерывны в $\bar{S}$, то имеет место тождество (аналог классической теоремы Коши):

$$\operatorname{Re}\left[i\int_{\partial S}w(z)\,w_*(z)\,dz\right]=0.$$

Если $w(z)$ — решение уравнения (7) в области S, то существует такая аналитическая в S функция $\Phi(z)$, что имеет место равенство

$$w(z)=\Phi(z)\,e^{\omega(z)},\qquad(15)$$

где

$$\omega(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_S\frac{A(\zeta)+B(\zeta)\dfrac{\overline{w}(\zeta)}{w(\zeta)}}{\zeta}\,d\xi\,d\eta\qquad(16)$$

и принадлежит классу $C_\alpha(E)$, $\alpha=p/(p-2)$, причем $\omega(z)\to 0$, если $z\to\infty$.

Эта формула, в частности, позволяет распространить на решения уравнений вида (7) основные теоремы классич. теории аналитич. функций: теорему единственности, теорему Лиувилля, принцип аргумента, принцип компактности и др. Формула (15) допускает обращение: задавая аналитич. функцию Φ, можно найти функцию $w(z)$, удовлетворяющую нелинейному интегральному уравнению (15).

Пусть $\Phi(z)$ — аналитическая в области S функция, к-рая может иметь любые особенности, и t — фиксированная точка. Тогда существует решение $w(z)$ уравнения (7) такое, что функция $w_0=w/\Phi$ непрерывно продолжима на всю плоскость E, принадлежит классу $C_\alpha(E)$, $\alpha=(p-2)/p$, не обращается в нуль нигде на плоскости E и $w_0(t)=1$. Функция w_0 удовлетворяет интегральному уравнению

$$w_0(z)-\frac{z-t}{x}\iint_S\frac{A(\zeta)\,w_0(\zeta)+B_0(\zeta)\,\overline{w_0(\zeta)}}{(\zeta-z)(\zeta-t)}\,d\xi\,d\eta=1,\qquad(17)$$

$$B_0=B=\bar{\Phi}/\Phi,$$

к-рое имеет единственное решение, а функция $w=\Phi(z)w_0$ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$w(z)=\Phi(z)\exp\left\{\frac{z-t}{\pi}\iint_S\frac{A(\zeta)\,w(\zeta)+B(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}}{(\zeta-z)(\zeta-t)\,w}\,d\xi\,d\eta\right\},\qquad(18)$$

из к-рого при $t\to\infty$ получается представление (15).

Проблема приведения эллиптич. уравнения 2-го порядка общего вида

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+f(u)=0 \quad (19)$$

к виду (1) эквивалентна задаче редукции к канонич. виду положительной квадратичной формы

$$adx^2+2bdxdy+cdy^2, \quad a>0, \quad \Delta\equiv ac-b^2>0.$$

Последняя проблема эквивалентна отысканию гомеоморфизмов уравнения Бельтрами

$$\partial_{\bar z} w-q(z)\,\partial_z w=0, \quad w=u+iv, \qquad (20)$$

где

$$q(z)=\left(a-\sqrt{\Delta}-ib\right)\left(a+\sqrt{\Delta}+ib\right)^{-1}, \quad |q(z)|<1.$$

Если (19) — равномерно эллиптич. уравнение

$$(\Delta\geqslant\Delta_0=\mathrm{const}>0), \text{ то } |q(z)|\leqslant q_0=\mathrm{const}<1.$$

При изучении уравнения Бельтрами основным вопросом является построение нек-рого его гомеоморфизма для данной области S; если $\omega(z)$ — гомеоморфизм уравнения Бельтрами, реализующий топологич. отображение области S на область $\omega(S)$, то всякое другое его решение в S имеет вид

$$w(z)=\Phi[\omega(z)], \qquad (21)$$

где Φ — произвольная аналитич. функция в области $\omega(S)$.

Если $q(z)$ — измерима, $q(z)\equiv 0$ вне S и $|q(z)|\leqslant q_0<1$, то уравнение Бельтрами (20) имеет решение вида

$$w(z)=z-\frac{1}{\pi}\iint_E\frac{\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta}{\zeta-z}, \qquad (22)$$

где ρ удовлетворяет сингулярному интегральному уравнению (интеграл понимается в смысле главного значения по Коши):

$$\rho(z)-\frac{q(z)}{\pi}\iint_E\frac{\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta}{(\zeta-z)^2}=q(z). \qquad (23)$$

Это уравнение имеет единственное решение в нек-ром классе $L_p(E)$, $p>2$; его можно получить методом последовательных приближений. Функция (22) принадлежит классу $C_\alpha(E)$, $\alpha=p/(p-2)$, реализует топологич. отображение плоскости на себя, причем $w(\infty)=\infty$, $z^{-1}w(z)\to 1$ при $z\to\infty$. Если $q\in C_\alpha^m(E)$, $0<\alpha<1$, $m\geqslant 0$, то $w(z)\in C_\alpha^{m+1}(E)$.

Равномерно эллиптич. система 1-го порядка общего вида в комплексной записи имеет вид

$$\begin{gathered}\partial_{\bar z} w-q_1(z)\,\partial_z w-q_2(z)\,\partial_{\bar z}\bar w+Aw+B\bar w=0,\\ |q_1|+|q_2|\leqslant q_0=\mathrm{const}<1.\end{gathered} \qquad (24)$$

С помощью гомеоморфизма нек-рого уравнения вида (20) ее можно привести к виду (7).

Всякое решение уравнения (24) в нек-рой ограниченной области S при условии, что $A, B\in L_p(S)$, $p>2$, представлено в виде

$$w(z)=\Phi[\omega(z)]\,e^{\varphi(z)}, \qquad (25)$$

где $\omega(z)$ — некоторый гомеоморфизм уравнения Бельтрами (20) с коэффициентом

$$q(z)=q_1(z)+q_2(z)\frac{\partial_{\bar z}\bar w}{\partial_z w},$$

$\Phi(\omega)$ — аналитич. функция в области $\omega(S)$, функция $\varphi(z)\in G_\alpha(E)$, $\alpha=(p-2)/p$ голоморфна вне S и исчезает на бесконечности. Представление (25) имеет место и тогда, когда коэффициенты левой части уравнения (24) зависят от w и ее производных любого порядка, лишь бы на рассматриваемых решениях выполнялись указанные выше условия. Как и (15), формула (25) допускает обращение.

Формула (25) позволяет перенести целый ряд свойств классич. теории аналитич. функций на решения уравнения (24); теорему единственности, принцип аргумента, принцип максимума и др.

Общее квазиконформное отображение Q является решением нек-рой равномерно эллиптич. системы вида (24) (при $A \equiv B \equiv 0$). Справедливо и обратное утверждение. Поэтому указанные выше результаты позволяют решить чисто аналитич. путем основные проблемы *квазиконформных отображений.*

Системы уравнений 1-го порядка эллиптич. типа с $2n$, $n>1$, неизвестными функциями двух независимых переменных, при нек-рых естественных ограничениях, приводятся к канонич. виду:

$$\partial_{\bar{z}} w - Q(z)\, \partial_z w + Aw + B\bar{w} = 0, \qquad (26)$$

где w — искомый вектор с n комплексно значными компонентами, Q, A, B — квадратные матрицы порядка n. Теория уравнений вида (26) имеет много сходства со случаем $n=1$, но она имеет и свои особенности.

Лит.: [1] Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., 1948; [2] его же, *Обобщенные аналитические функции*, М., 1959; [3] его же, «Матем. сб.», 1952, т. 31, № 2, с. 217—314; [4] Бергман С., Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Bers L., Theory of pseudo-analytic functions, N. Y., 1953; [6] Боярский Б. В., «Докл. АН СССР», 1958, т. 122, № 4, с. 543—46; [7] его же, там же, 1959, т. 124, № 1, с. 15—18; [8] Carleman T., «C. r. Acad. sci», 1933, t. 197, p. 471; [9] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [10] Халилов З. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1947, т. 11, с. 345—62; [11] Courant R., Hilbert D., Methods of mathematical physics, v. 2, 2 ed., N. Y.— L., 1962.

И. Н. Векуа.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; функциональные методы решения — методы, основанные на рассмотрении левой части уравнения как оператора, действующего в функциональном пространстве, определенном соответствующим образом. Наибольшее развитие функциональные методы получили в применении к линейным уравнениям с частными производными. В этом случае функциональные методы условно могут быть разбиты на две группы: а) относящиеся к спектральной теории дифференциальных операторов и б) используемые при выяснении общего характера разрешимости уравнений, краевых задач и свойств решений. Внутри группы б) удобно, в свою очередь, выделить, с одной стороны, методы, опирающиеся лишь на общие теоремы функционального анализа (теории операторов), а с другой — методы, существенно использующие технику преобразования Фурье. Для первых характерно непосредственное рассмотрение краевых задач для общих уравнений с переменными коэффициентами; для вторых отправной точкой является изучение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, часто безотносительно к краевым условиям, а переход к переменным коэффициентам (когда это возможно) осуществляется при помощи соответствующей «теории возмущений». Получаемые в обоих направлениях результаты дополняют друг друга.

Функциональные методы возникли при использовании связи между задачей минимизации функционала

$$J(u) = \int_V \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2fu \right\} dV \qquad (1)$$

в классе действительных функций $u(x, y)$, удовлетворяющих на границе S области V (для простоты — двумерной) условию

$$u|_S=0, \tag{2}$$

и задачей решения уравнения Пуассона

$$-\Delta u=f \tag{3}$$

в V [являющегося уравнением Эйлера для (1)] при тех же краевых условиях (2). Если f не является гладкой (напр., $f\in H(V)$ — гильбертову пространству функций с суммируемым в V квадратом), то минимум для (1) достигается на функциях, не имеющих, вообще говоря, вторых производных, входящих в уравнение (3), т. е. эти функции дают лишь обобщенное решение задачи (3), (2). Для исчерпывающего описания возникающей ситуации (см. [1], [2]) вводится гильбертово пространство $\dot{W}^1$, получаемое пополнением линейного многообразия гладких функций, удовлетворяющих (2), в норме, порождаемой скалярным произведением

$$\{u, v\}=\int_V \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right\} dV.$$

Тогда под решением задачи (3), (2) понимается элемент $u\in\dot{W}^1$ такой, что для любого элемента $v\in\dot{W}^1$ выполняется равенство

$$\{u, v\}=(f, v), \tag{4}$$

где круглые скобки означают скалярное произведение в $H(V)$. Минимум для (1) при любой $f\in H$ также достигается в $\dot{W}^1$ и дает решение задачи (3), (2) в смысле (4), являющееся единственным. Всякое классическое (имеющее вторые производные) решение задачи (3), (2) удовлетворяет равенству (4) при любой допустимой функции v и, значит, является обобщенным. Отсюда, в частности, следует определение, с помощью обобщенного решения, нек-рого расширения классич. оператора $-\Delta$, заданного первоначально на гладких функциях, удовлетворяющих условию (2). Вопрос «при каких условиях на f и границу S обобщенное решение будет классическим?» значительно более сложен (это — вопрос о так наз. дифференциальных свойствах обобщенного решения).

В рассмотренной схеме существование обобщенного решения следовало из существования в $\dot{W}^1$ элемента, реализующего минимум функционала (1). В дальнейшем было замечено, что теорема существования может быть получена непосредственно из определения (4) при помощи так наз. теоремы Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала (см. [1]). Последующее развитие теории идет в нескольких направлениях. Приведенные построения немедленно обобщаются на случай, когда $-\Delta$ заменяется на общий самосопряженный положительный эллиптич. оператор порядка $2m$ с переменными коэффициентами. При этом, естественно, в скалярное произведение будут входить производные порядка m. Свойство полной непрерывности обратного оператора позволяет установить характер спектра соответствующих задач и установить справедливость для них *Фредгольма альтернативы*. Можно получить теорему существования решения и в случае, когда в уравнении присутствует подчиненный главной эллиптич. части кососимметрич. оператор (напр., вместе с $-\Delta$ имеются члены $a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+$ $+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}$), т. е. и при отсутствии связи с вариационными задачами [3].

Обобщения иного характера возникают из замечания о сохранении теоремы существования и единственности обобщенного решения задачи (3), (2) и в том случае, когда f — произвольный ограниченный линейный функционал над $\dot{W}^1$. Пространство всех таких функционалов может быть получено пополнением H по новой норме

$$|f, \dot{W}^{-1}| = \sup_{w \in \dot{W}^1} \frac{|(f, w)|}{|w, \dot{W}^1|}. \tag{5}$$

Получаемое пространство $\dot{W}^{-1}$ оказывается существенно шире H. Напр., в одномерном случае (V — интервал $(-1, 1)$) последовательность функций

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \ \varepsilon = 1, 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots, \end{cases}$$

сходится в $\dot{W}^{-1}$, но расходится в H. Предел этой последовательности не является функцией в обычном смысле, т. е. пространство $\dot{W}^{-1}$ содержит обобщенные функции. В то же время неравенство

$$|\langle f, w \rangle| \leqslant |f, \dot{W}^{-1}| |w, \dot{W}^1|$$

(скобки $\langle\ ,\ \rangle$ обозначают действие функционала f на элемент $w \in \dot{W}^1$) обеспечивает справедливость теоремы существования и единственности в случае $f \in \dot{W}^{-1}$. Этот результат интересен еще и в том отношении, что теперь оператор $-\Delta$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\dot{W}^1$ и $\dot{W}^{-1}$. При $f \in H$ и гладкой S обобщенное решение задачи (3), (2) не только принадлежит $\dot{W}^1$, но всегда имеет и вторые обобщенные производные ($u \in W^2$), причем

$$|u, W^2| \leqslant c |f, H|.$$

При $n=2$ (n — размерность V) пространство W^{-2} (функционалов над W^2) содержит δ-функцию, т. е. функционал, определяемый равенством $\langle \delta_{x_0}, u \rangle = u(x_0)$. Существует принадлежащее пространству H обобщенное решение уравнения

$$-\Delta v_{x_0} = \delta_{x_0}$$

такое, что для u-обобщенного решения задачи (3), (2) верна формула

$$(-\Delta u, v_{x_0}) = \langle u, -\Delta v_{x_0} \rangle = \langle u, \delta_{x_0} \rangle = u(x_0),$$

или

$$u(x_0) = (f, v_{x_0}).$$

Это составляет абстрактную теорему существования функции Грина задачи (3), (2). Соответствующие построения осуществимы и в пространстве произвольного числа измерений для общих эллиптич. операторов [4].

Следующим (после эллиптич. операторов) объектом, к к-рому успешно были применены общие функциональные методы, явились уравнения с выделенным переменным — «временем», непосредственно обобщающие классические параболич. и гиперболич. уравнения математич. физики. Здесь основные результаты условно могут быть разбиты на 3 группы: относящиеся к операторным уравнениям с 1-й и 2-й производной по времени [5], к симметричным положительным системам с частными производными 1-го порядка [3], [6] и к задаче Коши для гиперболич. уравнения произвольного порядка. Первая группа результатов излагается обычно либо в контексте обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и теории полугрупп операторов, либо, вместе со второй и третьей группами, в рамках так наз. техники энергетич. неравенств. Последняя, в общих чертах, заключается в следующем. Для гладких решений уравнения со временем, записанного в операторной форме

$$Lu = f, \tag{6}$$

подчиненных соответствующим начальным и краевым условиям, устанавливается неравенство вида

$$|u,\ H_1| \leqslant c|Lu,\ H_2|, \tag{7}$$

где H_1, H_2 — соответствующим образом определенные функциональные пространства. Для простоты их считают гильбертовыми. Напр., для $u \in C^2$, удовлетворяющих в единичном квадрате V уравнению

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

и условиям

$$u\Big|_{t=0} = u'_t\Big|_{t=0} = u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=1} = 0,$$

умножением на $\partial u/\partial t$, интегрированием по V и элементарными преобразованиями можно получить неравенство вида

$$\int_{t=T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx \leqslant 4\int_V f^2\,dx\,dt,\ 0 \leqslant T \leqslant 1, \tag{8}$$

(являющееся математич. выражением нек-рого закона сохранения, откуда и термин «энергетическое неравенство»), соответствующее неравенству (7) при надлежащем определении норм в H_1, H_2. Определив обобщенное решение уравнения (6) как элемент $u \in H_1$, для к-рого существует последовательность гладких функций u_i, удовлетворяющих описанным краевым условиям, такая. что $u_i \to u$ в H_1 и $Lu_i \to f$ в H_2, одновременно получают определение оператора L: $H_1 \to H_2$ (снова являющегося расширением классического), для к-рого существует ограниченный обратный оператор, что эквивалентно теореме единственности обобщенного решения. Следующим шагом исследования уравнения (6) является доказательство существования такого решения при любой допустимой правой части $f \in H_2$. Так как область изменения R_L оператора L является замкнутым подпространством в H_2, доказательство единственности эквивалентно доказательству пустоты ортогонального дополнения к R_L: из равенства

$$(Lu,\ v)_2 = 0 \text{ для любого } u \in \mathfrak{U}_L \tag{9}$$

(скалярное произведение в H_2) следует $v=0$. Равенство (9), с точки зрения теории операторов, означает, что $v \in \mathfrak{U}_L$ и $L^*v=0$, т. е. требуемый результат немедленно следовал бы из теоремы о единственности решения уравнения $L^*v=g$. Однако доказательство такой теоремы требует специальных построений, часто весьма сложных, поскольку для L^* (определенного с точки зрения классич. анализа с помощью нек-рого интегрального тождества) наличие неравенства, аналогичного (7) (так же, как и наличие для v последовательности сходящихся к ней гладких функций, удовлетворяющих нужным граничным условиям), отнюдь не очевидно. Возникающие трудности являются отражением несамосопряженности задач со «временем». При исследовании гиперболич. уравнений 2-го и высшего порядков использование (9) для доказательства равенства $v=0$ проводится обычно следующим образом: подбирается оператор P^* такой, что $P^*v \in \mathfrak{U}_L$ и

$$(LP^*v,\ v)_2 \geqslant c\,|v,\ H_2|^2. \tag{10}$$

Если заметить еще, что получение (7) основано обычно на рассмотрении выражения вида $(Lu,\ Qu)_2$, где Q — оператор, подобранный так, что

$$(Lu,\ Qu)_2 \geqslant c|u,\ H_1|^2,$$

и записать теперь (10) в виде

$$(L^*v,\ P^*v)_1 \geqslant c\,|v,\ H_2|^2,$$

то можно считать, что исследование (6) основывается на этой паре неравенств (называемых иногда д у а л ь н ы м и). Сказанное относится главным образом к гиперболич. уравнениям. Параболич. уравнения допускают трактовку, более близкую к эллиптич. случаю.

Преобразование Фурье позволяет провести, в известном смысле, исчерпывающее изучение задачи Коши для уравнений с постоянными коэффициентами [10]. Кроме того, преобразование Фурье, вместе с так наз. «замораживанием коэффициентов» (т. е. заменой оператора с переменными коэффициентами оператором с постоянными коэффициентами, равными значениям соответствующих коэффициентов в нек-рой фиксированной точке), часто используется для получения энергетич. неравенств при использовании схем рассмотренного выше типа, а также играет важную роль в локальной характеризации операторов и краевых условий при исследовании краевых задач для эллиптич. уравнений [10]. Дальнейшее развитие этих идей привело к введению и изучению *псевдодифференциальных операторов*. Кроме того, с помощью преобразования Фурье было установлено, что для дифференциальной операции L с постоянными коэффициентами, рассматриваемой в компактной области V евклидова пространства на функциях $u \in \dot{C}^\infty(V)$, т. е. равных нулю на границе вместе со всеми производными, всегда имеет место неравенство

$$|u, \ H(V)| \leqslant c |Lu, \ H(V)|. \qquad (11)$$

Взяв для L замыкание $\dot{L}$ в $H(V)$ (областью определения для L считают $\dot{C}^\infty(V)$) и определив $\tilde{L}$ как сопряженный к $\dot{L}$ (в $H(V)$), получают, что $R_{\tilde{L}} = H(V)$. Наличие неравенства (11) для решений уравнения (6), обеспечивающее единственность решения, автоматически влечет и разрешимость при любой правой части уравнения $L^* v = g$, содержащего сопряженный оператор. Используя теорему Банаха, можно заключить, что существует оператор $\hat{L}$, $\dot{L} \subset \hat{L} \subset \tilde{L}$ (т. е. $\hat{L}$ является расширением минимального оператора $\dot{L}$ и сужением максимального $\tilde{L}$), такой, что $R_{\hat{L}} = H(V)$, причем существует ограниченный (в H) обратный оператор $\hat{L}^{-1}$ (см. [10]). Можно считать, что $\hat{L}$ соответствует нек-рой краевой задаче (определяется нек-рой системой условий, «сосредоточенной» на границе и находящейся «между» тождественно нулевыми условиями и полным отсутствием условий). О характере условий, определяющих оператор $\hat{L}$, в общем случае известно мало.

Использование преобразования Фурье лежит также в основе исследования широкого круга вопросов теории дифференциальных операторов, связанных с изучением структуры фундаментального решения и так наз. локальных свойств решений уравнений (в отличие от исследования свойств решений краевых задач). Сюда относятся теорема о существовании фундаментального решения для общего оператора с постоянными коэффициентами, теорема о локальной (в окрестности данной точки) разрешимости уравнения с правой частью и о характере гладкости этого решения (см. [9], [11]). В связи с тем, что в случае переменных (комплексных) коэффициентов локальная разрешимость неоднородного уравнения (6) не всегда имеет место (для уравнения

$$-i \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} - 2(x_1 + i x_2) \frac{\partial u}{\partial x_3} = f$$

имеется такая $f \in C^\infty$, что не существует решения, даже в классе обобщенных функций, ни в каком открытом непустом подмножестве R^3, см. [9]), исследуются условия, обеспечивающие локальную разрешимость.

Использование функциональных методов весьма плодотворно и при изучении нелинейных уравнений с частными производными. Это прежде всего относится к вариационным методам (если вместо функционала (1) рассматривать более общий, то связанное с ним уравнение Эйлера оказывается нелинейным) (см. [12]), различным вариантам метода неподвижной точки (см. *Шаудера метод*), к методу продолжения по параметру (см. [3], [13]), и другим, применяемым главным образом к эллиптич. и параболич. уравнениям. Метод энергетич. неравенств успешно используется при изучении квазилинейных гиперболич. уравнений.

Лит.: [1] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [2] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., 3 изд., т. 1—2, М.— Л., 1951; [3] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [4] Lions J., Equations differentielles opérationelles et problèmes aux limites, B., 1961; [5] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [6] Нагумо М., Лекции по современной теории дифференциальных уравнений в частных производных, пер. с япон., М.,1967; [7] Гординг Л., Задачи Коши для гиперболических уравнений, пер. с англ., М., 1961; [8] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, М., 1958; [9] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [10] его же, К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, пер. с англ., М., 1959; [11] Трев Ж., Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, пер. с англ., М., 1965; [12] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964; [13] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957. *А. А. Дезин.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА — уравнение, к-рое содержит хотя бы одну производную 2-го порядка от неизвестной функции $u(x)$ и не содержит производных более высокого порядка. Напр., линейное уравнение 2-го порядка имеет вид

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+ \\ +c(x)\,u(x)+f(x)=0, \qquad (1)$$

где точка $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит нек-рой области $\Omega\subset R_n$, в к-рой определены действительнозначные функции $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$, и в каждой точке $x\in\Omega$ хотя бы один из коэффициентов $a_{ij}(x)$ отличен от нуля. Для любой точки $x_0\in\Omega$ существует такое неособое преобразование независимых переменных $\xi=\xi(x)$, что уравнение (1) в новых координатах $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ примет вид

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a^*_{ij}(\xi)\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_i\,\partial \xi_j}+\sum_{i=1}^{n} b^*_i(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}+ \\ +c^*(\xi)\,u(\xi)+f^*(\xi)=0, \qquad (2)$$

где коэффициенты $a^*_{ij}(\xi)$ в точке $\xi_0=\xi(x_0)$ равны нулю при $i\neq j$, и равны ± 1 или 0 при $i=j$. Уравнение (2) наз. каноничн. видом уравнения (1) в точке x_0.

Число k положительных и число l отрицательных в точке ξ_0 коэффициентов $a^*_{ii}(\xi)$ в уравнении (2) зависит только от коэффициентов $a_{ij}(x)$ уравнения (1). Это обстоятельство позволяет классифицировать дифференциальные уравнения (1) следующим образом. Если $k=n$ или $l=n$, то уравнение (1) наз. эллиптическим в точке x_0; если $k=n-1$, а $l=1$, или $k=1$, а $l=n-1$, то — гиперболическим; если $k+l=n$ и $1<k<n-1$, то — ультрагиперболическим. Уравнение наз. параболическим в широком смысле в точке x_0, если хотя бы один из коэффициентов $a^*_{ii}(\xi)$ равен нулю в точке $\xi_0=\xi(x_0)$, $k+l<n$; уравнение наз. параболическим в точке x_0, если только один из коэффициентов $a^*_{ii}(\xi)$ равен нулю в точке ξ_0 (пусть $a^*_{11}(\xi_0)=0$), а все остальные коэффициенты $a^*_{ii}(\xi)$ одного знака и коэффициент $b^*_1(\xi_0)\neq 0$.

В случае двух независимых переменных ($n=2$) тип уравнения удобнее определять с помощью функции

$$\Delta(x)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Так, уравнение (1) является эллиптическим в точке x_0, если $\Delta(x_0)>0$; гиперболическим, если $\Delta(x_0)<0$, и параболическим в широком смысле, если $\Delta(x_0)=0$.

Уравнение наз. эллиптическим, гиперболическим и т. д. в области, если оно эллиптично, соответственно, гиперболично и т. д. в каждой точке этой области. Так, напр., уравнение Трикоми $yu_{xx}+u_{yy}=0$ эллиптично при $y>0$, гиперболично при $y<0$ и параболично в широком смысле при $y=0$.

Преобразование переменных $\xi=\xi(x)$, к-рое приводит уравнение (1) к канонич. виду в точке x_0, зависит от этой точки. В случае трех и более независимых переменных, вообще говоря, не существует неособого преобразования, приводящего уравнение (1) к канонич. виду одновременно во всех точках нек-рой окрестности точки x_0, т. е. к виду

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial\xi_i^2}-\sum_{i=k+1}^{k+l}\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial\xi_i^2}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}b_i^*(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_i}+c^*(\xi)\,u(\xi)+f^*(\xi)=0.$$

В случае же двух независимых переменных ($n=2$) такое приведение уравнения (1) к канонич. виду возможно при нек-рых условиях на коэффициенты $a_{ij}(x)$; напр., если функции $a_{ij}(x)$ непрерывно дифференцируемы до 2-го порядка включительно и уравнение (1) одного типа в нек-рой окрестности точки x_0.

Пусть

$$\Phi\left(x,\ u,\ u_{x_1},\ \ldots,\ u_{x_n},\ u_{x_1x_1},\ u_{x_1x_2},\ \ldots,\ u_{x_nx_n}\right)=0 \quad (3)$$

— нелинейное уравнение 2-го порядка, где $u_{x_i}=\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$, $u_{x_ix_j}=\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}$, и пусть в каждой точке из области определения действительнозначной функции Φ существуют производные $\frac{\partial\Phi}{\partial u_{x_ix_j}}$ и выполнено условие

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_{x_ix_j}}\right)^2\neq 0.$$

Для классификации нелинейных уравнений вида (3) фиксируют некоторое решение $u^*(x)$ этого уравнения и рассматривают линейное уравнение

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}=0 \quad (4)$$

с коэффициентами

$$a_{ij}(x)=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial u_{x_ix_j}}\right|_{u=u^*(x)}$$

Уравнение (3) для данного решения $u^*(x)$ наз. эллиптическим, гиперболическим и т. д. в точке x_0 (или в области), если эллиптично, гиперболично и т. д. в этой точке (соответственно в области) уравнение (4).

К решению дифференциальных уравнений 2-го порядка сводится весьма широкий класс физических задач. См., напр., *Волновое уравнение*, *Телеграфное уравнение*, *Теплопроводности уравнение*, *Лапласа уравнение*, *Пуассона уравнение*, *Гельмгольца уравнение*, *Трикоми уравнение*.

А. К. Гущин.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА — уравнение, связывающее искомую функцию $u(x)$, ее первые производные $D_iu=u_{x_i}$, $i=1,\ \ldots,\ n$, и независимые переменные $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Всякая система дифференциальных уравнений с частными производными может быть приведена к нек-рой системе Д. у. с ч.п.п.п. Для этого достаточно ввести в качестве новых искомых функций все частные производные от каждой функции $u_i(x)$ до порядка l_i-1 включительно, если хотя бы одна производная порядка l_i входит в к.-л. уравнение рассматриваемой системы. При этом систему следует пополнить новыми уравнениями, выражающими равенство различных смешанных производных. Напр., уравнение

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})=0$$

после введения вспомогательных искомых функций $v=u_x$, $w=u_y$ приводится к следующей системе уравнений 1-го порядка:

$$F(x, y, u, v, w, v_x, v_y, w_y)=0,$$
$$u_x-v=0,$$
$$u_y-w=0,$$
$$v_y-w_x=0$$

(последние три уравнения не независимы).

Одно Д. у. с ч. п. п. п. с одной искомой функцией задается соотношением:

$$F(x, u, p)=0, \qquad (1)$$

где $p=(p_1, p_2, \ldots, p_n)=(D_1u, D_2u, \ldots, D_nu)$. Всякое решение $u=u(x)$ уравнения (1) при определенных требованиях определяет нек-рую поверхность (и н т е г р а л ь н у ю   п о в е р х н о с т ь) в пространстве E_{n+1} переменных $(x_1, \ldots, x_n, u)$, причем p_i являются компонентами вектора нормали к этой поверхности. Поэтому уравнение (1) задает связь между составляющими p_i вектора нормали к интегральной поверхности и в каждой точке (x, u) определяет $(n-1)$-параметрич. семейство касательных к интегральной поверхности плоскостей [или несколько таких семейств, соответствующих различным решениям уравнения (1) относительно p]. Огибающая этого семейства плоскостей наз. к о н у с о м   М о н ж а [в данной точке (x, u)], а направления его образующих — х а р а к т е р и с т и ч е с к и м и   н а п р а в л е н и я м и. В каждой точке (x, u) эти направления определяются уравнениями

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}}=\frac{dx_2}{F_{p_2}}=\ldots=\frac{dx_n}{F_{p_n}}=\frac{du}{\sum_{i=1}^{n} p_iF_{p_i}}, \qquad (2)$$

где $p=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — любой вектор, удовлетворяющий уравнению (1). Кривая с непрерывно изменяющейся касательной, имеющая в каждой своей точке характеристич. направление, наз. к р и в о й   М о н ж а, или ф о к а л ь н о й   к р и в о й. Фокальная кривая является интегральной кривой системы (2) при произвольно заданном непрерывно дифференцируемом векторе $p=p(x, u)$ таком, что $F(x, u, p)=0$.

Поскольку каждой точке фокальной кривой сопоставлен вектор p, определяющий направление плоскости, касательной к кривой в этой точке, то фокальная кривая задается одновременно со своими касательными плоскостями и наз. поэтому ф о к а л ь н о й   п о л о с о й. Если σ — параметр на фокальной кривой, то уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}=\sum p_iF_{p_i}$$

системы (2) наз. у р а в н е н и е м (или у с л о в и е м) п о л о с ы.

Если фокальная кривая принадлежит интегральной поверхности $u=u(x)$ уравнения (1) и в каждой ее точке выполнены равенства $p_i=D_iu(x)$, то она наз. х а р а к т е р и с т и ч е с к о й   к р и в о й (б и х а р а к т е р и с т и к о й), а соответствующая фокальная полоса — характеристической полосой. Характеристич. полоса определяется системой уравнений:

$$\frac{dx_i}{F_{p_i}} = \frac{du}{\sum p_j F_{p_j}} = \frac{dp_i}{F_{x_i} + p_i F_u}, \qquad (3)$$

к-рая наз. характеристической системой уравнения (1). Функция $F(x, u, p)$ является интегралом системы уравнений (3), поэтому условие $F=0$ выполнено на всей характеристич. кривой, если оно выполнено в к.-л. ее точке. Интегральная поверхность уравнения (1), касаясь в каждой своей точке конуса Монжа, является огибающей семейства конусов Монжа и тем самым — огибающей семейства характеристич. полос. Последнее означает, что интегральная поверхность состоит из характеристич. кривых, так что ее нахождение сводится к интегрированию характеристич. системы (3). Фокальные кривые, не сводящиеся к характеристическим (если они существуют), являются огибающими последних на интегральной поверхности $u=u(x)$. Их проекции на пространство $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ состоят из точек сингулярности решения $u(x)$.

Уравнение (1) наз. квазилинейным, если

$$F(x, u, p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x, u)\, p_i + f_{n+1}(x, u).$$

Уравнения (2) в этом случае имеют вид:

$$\frac{dx_i}{f_i(x, u)} = -\frac{du}{f_{n+1}(x, u)} \qquad (4)$$

и не содержат p; конус Монжа вырождается в прямую (ось Монжа), и все фокальные кривые являются характеристическими.

Задача Коши для уравнения (1) состоит в нахождении интегральной поверхности, проходящей через заданное $(n-1)$-мерное (начальное) многообразие:

$$x_i = x_i^0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), \quad u = u^0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}). \qquad (5)$$

Эта интегральная поверхность состоит из характеристич. кривых, проведенных через точки начального многообразия. В случае квазилинейного уравнения последние получаются интегрированием характеристич. системы (4) с начальными условиями (5). В общем случае для построения характеристич. кривых условия (5) нужно дополнить заданием начальных значений $p_i = p_i^0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$, к-рые определяются из уравнений:

$$\frac{\partial u^0}{\partial \lambda_j} = \sum p_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial \lambda_j}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \qquad (6)$$

получающихся дифференцированием условий (5), и уравнения

$$F(x^0, u^0, p^0) = 0. \qquad (7)$$

Ввиду нелинейности, уравнения (6) и (7) определяют $p_i^0(\lambda)$ и, соответственно, решение задачи Коши (1), (5), вообще говоря, неоднозначно. Пусть

$$x_i = X_i(\sigma, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), \quad u = U(\sigma, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \qquad (8)$$

— уравнения характеристич. кривых, проходящих через точки начального многообразия. Если начальное многообразие (5) не является характеристическим (см. *Характеристическое многообразие*), то эти уравнения — параметрические уравнения искомой интегральной поверхности, они определяют решение $u=u(x)$ задачи Коши, если эта поверхность однозначно проектируется на пространство независимых переменных

$(x_1, \ldots, x_n)$. В случаях, когда уравнения (8) определяют поверхность, не представимую, однако, уравнением $u=u(x)$, т. е. не проектирующуюся однозначно на пространство $(x_1, \ldots, x_n)$, вводят понятие обобщенного решения задачи Коши (1), (5).

Решение нелинейного уравнения (1), по существу, сводится к решению системы квазилинейных уравнений с одинаковой главной частью:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + F_k p_k + F_{x_k} = 0, \quad k=1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i} = 0,$$

получающейся дифференцированием уравнения (1).

Примеры. $(D_1 u)^2 + (D_2 u)^2 = 1$; характеристич. полосы задаются уравнениями:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{p_1^0} = \frac{x_2 - x_2^0}{p_2^0} = u - u^0,$$

$$p_1 = p_1^0, \ p_2 = p_2^0, \ (p_1^0)^2 + (p_2^0)^2 = 1.$$

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$; характеристич. система (3) имеет вид $\frac{\partial x}{u} = \frac{\partial u}{0} = \frac{\partial t}{1}$, уравнения характеристик: $\frac{x - x_0}{t - t_0} = u_0$, $u = u_0$, решение задачи Коши с начальным условием $u(x, 0) = u^0(x)$ задается параметрич. уравнениями

$$x = \lambda + t u^0(\lambda), \quad u = u^0(\lambda).$$

Полным интегралом уравнения (1) наз. решение

$$u = \varphi(x, a) \tag{9}$$

уравнения (1), существенно зависящее от n параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Решение вида (9) есть полный интеграл, если ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} \varphi_{a_1} & \varphi_{x_1 a_1} & \cdots & \varphi_{x_n a_1} \\ \varphi_{a_2} & \varphi_{x_1 a_2} & \cdots & \varphi_{x_n a_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{a_n} & \varphi_{x_1 a_n} & \cdots & \varphi_{x_n a_n} \end{Vmatrix}$$

равен n (в нек-рой области изменения переменных). Путем образования огибающих из полного интеграла строятся решения уравнения (1), зависящие от произвольных функций.

Если из n-параметрич. семейства поверхностей (9) выделить $(n-k)$-параметрич. семейство, предполагая параметры a связанными k соотношениями $\omega_i(a)=0$, $i=1, 2, \ldots, k$, то огибающая этого семейства зависит от k произвольных функций $n-k$ переменных; соответствующие решения, зависящие от произвольных функций, наз. общими интегралами. Огибающая n-параметрич. семейства (9) (если она существует) не содержит никакого произвола и дает особый интеграл, к-рый может быть также найден исключением p из соотношений $F = F_p = 0$.

Многообразие касания поверхности семейства (9) с огибающей этого семейства является характеристич. многообразием k измерений. В частности, при $k=1$ это многообразие является характеристич. кривой. На этом основан способ построения общего решения характеристич. системы уравнений (3) по полному интегралу уравнения (1) (метод Якоби), часто применяемый при интегрировании канонич. уравнений.

Переопределенные системы Д. у. с ч. п. п. п. — это системы уравнений вида (1), в к-рых число независимых уравнений больше числа искомых функций. Такие системы, вообще говоря, противоречивы, и выделение классов непротиворечивых (совместных) систем составляет предмет теории совместности дифференциальных уравнений с частными производными.

Пусть имеется переопределенная система

$$F_i(x, p) \equiv \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x) p_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

для одной искомой функции $u(x)$. Пусть все уравнения системы (10) независимы, так что $m \leqslant n$. Эта система наз. замкнутой, если все уравнения вида

$$\{F_i, F_j\} \equiv \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_{is}}{\partial x_l} f_{jl} - f_{il} \frac{\partial f_{js}}{\partial x_l} \right) p_s = 0 \tag{11}$$

($\{\ ,\ \}$ — скобки Пуассона) являются следствиями исходных уравнений, и незамкнутой — в противном случае. Незамкнутую систему с помощью присоединения независимых уравнений вида (11) можно расширить до замкнутой. При $m=n$ замкнутая система имеет только тривиальное решение, а при $m<n$ количество ее независимых решений равно $n-m$.

Лит.: [1] Goursat E., Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2 éd., P., 1921; [2] Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Lpz.— B., 1935; [3] Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.— М., 1934; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [6] его же, Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [7] Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, пер. с франц., 1962; [8] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.— Л., 1947; [9] Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.— Л., 1948; [10] Яненко Н. Н., Рождественский Б. Л., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М., 1968. *Н. Н. Кузнецов, Б. Л. Рождественский.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ОСОБЕННОСТЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ — уравнение с частными производными, коэффициенты и свободный член к-рого на некоторых многообразиях из замыкания области их задания имеют разрывы первого рода или обращаются в бесконечность.

Типичными уравнениями такого типа являются, например, уравнение Лаврентьева — Бицадзе

$$\operatorname{sign} y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0$$

и уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу

$$u_{xy} + \frac{\beta'}{y-x} u_x - \frac{\beta}{y-x} u_y = 0, \quad \beta \text{ и } \beta' = \mathrm{const}$$

или

$$\Delta u - u_{x_0 x_0} = \frac{\lambda}{x_0} u_{x_0},$$

$$\Delta u - u_{x_0 x_0} = \frac{\lambda}{x_0} u_{x_0}, \quad \lambda = \mathrm{const},$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

К уравнениям с особенностями в коэффициентах относятся многие вырожденные уравнения с частными производными.

Центральное место в теории дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах занимает исследование разрешимости начальных краевых и смешанных задач в их классической и обобщенной постановках, а также поиск новых корректно поставленных задач. Сравнительно полно исследованы краевые задачи для линейных эллиптич., гиперболич. и параболич. уравнений 2-го порядка со слабыми особенностями в коэффициентах, к-рые, как правило, суммируемы со степенью, большей размерности области их задания. В случае, когда коэффициенты этих уравнений претерпевают лишь разрывы первого рода на нек-рых достаточно гладких поверхностях, лежащих внутри области задания, создана весьма полная теория основных краевых задач. См. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; задача с разрывными коэффициентами, а также [3], [5], [6].

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959; [2] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [3] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964; [4] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [5] Олейник О. А., «Докл. АН СССР», 1959, т. 124, № 6, с. 1219—22; [6] Самарский А. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 2, с. 225—28. *А. М. Нахушев.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ — см. *Разностное уравнение.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, связывающее аргумент, а также искомую функцию и ее производные, взятые, вообще говоря, от функционально преобразованного аргумента; при этом выражение функционального преобразования может включать искомую функцию, в результате чего в уравнении могут встречаться комбинации вида $y'(y(x))$ и т. п. Понятия Д.-ф. у. и *дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом* часто отождествляются.

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

А. Д. Мышкис.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ — раздел математич. теории управления (см. *Автоматического управления теория*), в к-ром изучается управление в конфликтных ситуациях. Теория Д. и. примыкает также к общей *игр теории*. Первые работы по теории Д. и. появились в сер. 50-х гг. 20 в.

Постановка задач теории дифференциальных игр. Различают Д. и. двух игроков и нескольких игроков. Основные результаты получены для задач с двумя игроками. Содержательное описание этих задач укладывается в следующую схему. Имеется *динамическая система*, в к-рой часть управляющих воздействий подчинена игроку I, а другая часть — игроку II. При постановке задачи, стоящей перед игроком I или II, предполагается, что выбор управлений этого игрока, гарантирующий ему достижение определенной цели при любом неизвестном заранее управлении противника, может опираться лишь на нек-рую информацию о текущих состояниях системы. В теории Д. и. рассматриваются также задачи управления в условиях неопределенности, когда помехи, действующие на систему, трактуются как управления противника. Напр., постановка задачи игрока I описывается следующим образом. Обычно предполагается, что движение управляемой системы задается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \qquad (1)$$

где x — фазовый вектор системы, u и v — управляющие векторы игроков I и II соответственно. Определен класс стратегий $\mathcal{U}$ игрока I, и для каждой стратегии $U \in \mathcal{U}$ определен пучок движений $X(U)$, к-рый порожден этой стратегией в паре со всевозможными управлениями противника и выходит из начального состояния системы (1). Эти понятия выбираются так, чтобы они соответствовали заданным ограничениям на управления игроков и характеру информации о текущих состояниях системы, предоставленной игроку I. На движениях $x(t)$, $t \geqslant t_0$, системы (1) задан функционал $\gamma(x(\cdot))$ (плата игры), значение к-рого игрок I стремится минимизировать (иногда функционал γ зависит также от реализаций $u(t)$, $v(t)$, $t \geqslant t_0$, управлений игроков). Учитывая самую неблагоприятную реализацию движения $x(\cdot) \in X(U)$, выбор к-рой в этой задаче предоставляется противнику, качество стратегий $U \in \mathcal{U}$ оценивается величиной

$$\varkappa_1(U) = \sup\{\gamma(x(\cdot)) : x(\cdot) \in X(U)\}.$$

Задача игрока I состоит в определении стратегии $U_0 \in \mathcal{U}$, на к-рой достигается минимум функционала $\varkappa_1$ (эта задача наз. задачей степени). Иногда рассматривается так наз. задача качества, в к-рой требуется определить условия существования стратегии $U_c \in \mathcal{U}$, удовлетворяющей неравенству $\varkappa_1(U_c) \leqslant c$, где c — нек-рое заданное число.

Аналогичным образом формулируются задачи игрока II, к-рый максимизирует плату игры. Стратегии игрока II $V \in \mathcal{V}$ оцениваются величиной

$$\varkappa_2(V) = \inf\{\gamma(x(\cdot)) : x(\cdot) \in X(V)\}.$$

Задача степени здесь состоит в выборе стратегии $V_0 \in \mathcal{V}$, максимизирующей значение функционала $\varkappa_2$, а задача качества — в определении условий, при к-рых $\varkappa_2(V_c) \geqslant c$ для нек-рой стратегии $V_c \in \mathcal{V}$.

Если в задачах игроков I и II классы стратегий $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ таковы, что для всякой пары $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ можно определить хотя бы одно движение

$$x(\cdot) \in X(U) \cap X(V),$$

порожденное этой парой, то говорят, что эти две задачи составляют дифференциальную игру, определенную на классе стратегий $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Если в Д. и. выполняется равенство

$$\inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{x(\cdot) \in X(U)} \gamma(x(\cdot)) = \sup_{V \in \mathcal{V}} \inf_{x(\cdot) \in X(V)} \gamma(x(\cdot)) = c_0,$$

то величина c_0 наз. ценой дифференциальной игры.

Типичным примером Д. и. является игра преследования — уклонения. В этой игре $x = (x_1, \ldots, x_{k+l}) = (y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l)$, где y и z — фазовые векторы преследователя и преследуемого соответственно, движение к-рых описывается уравнениями

$$\dot{y} = g(t, y, u), \quad \dot{z} = h(t, z, v).$$

Наиболее часто рассматривается случай, когда выбор управлений стеснен ограничениями вида

$$u \in P, \quad v \in Q, \tag{2}$$

где P и Q — некоторые компакты. Платой в этой игре является время до встречи, т. е.

$$\gamma(x(\cdot)) = T(x(\cdot)) = \inf\{t - t_0 : \|\{y(t)\}_m - \{z(t)\}_m\| \leqslant \varepsilon\},$$

где $\{y\}_m$ и $\{z\}_m$ — векторы, составленные из первых m компонент векторов y и z. Таким образом, сближение точек $\{y(t)\}_m$ и $\{z(t)\}_m$ на заданное расстояние ε трактуется как встреча объектов. В случае, когда игроки располагают информацией о текущей позиции игры $(t, x(t))$, т. е. в *позиционной игре* преследования-уклонения, существует цена игры.

Формализации дифференциальных игр. Для математич. формализации Д. и. необходимы строгие определения перечисленных выше понятий. Основное внимание в теории Д. и. было уделено задачам, в к-рых игрокам известна позиция игры, а управления удовлетворяют ограничениям (2). В этом случае естественно было определить стратегии игроков как функции $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$ со значениями в компактах P и Q соответственно. Оказалось, однако, что при таком подходе нередки случаи, когда приходится рассматривать разрывные стратегии, а порожденные ими движения нельзя определить известными в теории дифференциальных уравнений понятиями. Трудности, возникшие сначала на этом пути, привели к созданию иных постановок Д. и. Ниже рассмотрены такие формализации, где не используются позиционные стратегии. Затем дана формализация позиционных Д. и., к-рая охватывает разрывные позиционные стратегии и базируется на специальном определении движений.

Среди сложившихся направлений в теории Д. и. прежде всего следует отметить цикл исследований (см., напр., [2] — [4]), восходящих к работе У. Флеминга [1]. Здесь рассматривается аппроксимация Д. и. многошаговыми играми, где игроки последовательно (по шагам) выбирают свои управления на заданных промежутках времени $[t_i, t_{i+1})$, $i=0, 1, \ldots, N$. Причем обычно выделяется игрок, выбирающий каждый раз свое управление первым и сообщающий этот выбор противнику. В зависимости от того, минимизирует или максимизирует этот игрок плату игры, различают мажорантную и минорантную многошаговые игры. Применение этого подхода сводится к доказательству теорем существования цены Д. и., определенной здесь как общее значение, к к-рому сходятся цены мажорантной и минорантной игр при измельчении разбиений $[t_i, t_{i+1})$, $i=0, 1, \ldots, N$ (увеличении числа шагов). Однако построение позиционных стратегий, не зависящих от дискретизации времени, при таком подходе, как правило, не рассматривается.

Л. С. Понтрягин предложил постановку игровых задач управления (см., напр., [5] — [8]), где допускается информационная дискриминация противника, т. е. при постановке задачи игрока I (или II) предполагается, что кроме реализовавшейся позиции игры $(t, x(t))$ этому игроку известно управление противника $v(\tau)$ (соответственно $u(\tau)$), к-рое будет выбрано на промежутке $[t, t+\delta]$ ($\delta>0$ — малое число). При таком подходе достигается удобное описание игрового процесса, что позволяет построить строгую математич. теорию для широкого круга задач конфликтного управления. Однако введение информационной дискриминации дает одному из игроков I информационное превосходство над противником и вместе с тем накладывает ограничения на поведение противника, в частности не позволяет ему формировать управление по принципу обратной связи

$$v[t]=v(t, x(t))$$

(соответственно $u[t]=u(t, x(t))$). При переходе к содержательной трактовке результатов, полученных в условиях дискриминации противника, вместо информации об управлении противника, к-рое будет выбрано им на промежутке $[t, t+\delta)$, можно использовать информацию об управлении, реализованном на промежутке $[t-\delta, t)$. Такую замену нетрудно обосновать для систем, где

$$f(t, x, u, v)=f_1(t, x, u)+f_2(t, x, v).$$

Содержательное использование глубоких теоретич. результатов, полученных в условиях дискриминации противника, достигается при рассмотрении позиционных Д. и. (см. ниже описание процедуры управления с поводырем).

Формализация позиционных Д. и. разработана Н. Н. Красовским и его сотрудниками (см., напр., [9]). Здесь рассматриваются позиционные стратегии U и V — функции $u=u(t, x)$ и $v=v(t, x)$, значения к-рых содержатся в компактах P и Q соответственно. Относительно этих функций не предполагается к.-л. условий непрерывности. Движения $x(t, t_0, x_0, U)(t\geqslant t_0$, $x(t_0)=x_0)$, порожденные стратегией $U\div u(t, x)$ игрока I, определяются как равномерные на любом отрезке $[t_0, T]$ пределы последовательностей аппроксимационных движений $x_k(t)$, $k=1, 2, \ldots$, абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих уравнению

$$\dot{x}_k(t) = f(t, x_k(t), u_k[t], v_k[t]), \qquad (3)$$

где $v_k[t] \in Q \; (t \geqslant t_0)$ — произвольные измеримые функции,

$$u_k[t] = u(t_i^{(k)}, x_k(t_i^{(k)})), \; t_i^{(k)} \leqslant t < t_{i+1}^{(k)}, \; i=0,1, \ldots$$

причем

$$\sup_i (t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)}) \longrightarrow 0 \text{ при } k \longrightarrow \infty.$$

Аналогичным образом вводятся движения $x(t, t_0, x_0, V)$, $t \geqslant t_0$, $x(t_0)=x_0$. При таком определении стратегий и движений справедливо следующее положение.

Альтернатива 1. Пусть для любых векторов $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и $s \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} s'f(t, x, u, v) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} s'f(t, x, u, v), \qquad (4)$$

где $s'f$ — скалярное произведение векторов s и f. Тогда, каковы бы ни были замкнутые множества $M_c \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и $N_c \subset \mathbb{R}^{n+1}$, начальная позиция (t_0, x_0) и момент $\vartheta \geqslant t_0$, всегда либо существует стратегия U_* такая, что для любого движения $x(t)=x(t, t_0, x_0, U_*)$ точка $(t, x(t))$ попадет на M_c к моменту $t=\vartheta$, оставаясь в N_c вплоть до ее встречи с M_c; либо существует стратегия V_*, к-рая для любого движения $x(t)=x(t, t_0, x_0, V_*)$ гарантирует или уклонение точки $(t, x(t))$ от попадания на M_c при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, или нарушение фазового ограничения $(t, x(t)) \in N_c$ раньше, чем точка $(t, x(t))$ попадет на M_c.

К решению такой игры сближения-уклонения сводится исследование многих типов Д. и., для к-рых из альтернативы 1 следует существование цены игры. При постановке позиционных Д. и. возможны и другие определения стратегий и движений. Напр., при рассмотрении разрывных стратегий иногда удобно либо заменять разрывную правую часть дифференциального уравнения неоднозначной и использовать аппарат теории дифференциальных уравнений в контингенциях, либо аппроксимировать разрывные стратегии непрерывными (см., напр., [10]). Однако такие подходы могут оказаться неудачными. Известны примеры, в к-рых оптимальное решение Д. и., полученное в рамках описанной здесь формализации, не удается достичь и даже аппроксимировать в рамках других формализаций, опирающихся на уравнения в контингенциях или непрерывные стратегии.

Если условие (4) нарушается, то различают постановку Д. и. в классе стратегий одного и контрстратегий другого игроков, к-рой отвечает детерминированное решение Д. и., и постановку Д. и. в классе смешанных стратегий обоих игроков, содержание к-рой раскрывается при аппроксимации смешанных стратегий соответствующими стохастическими процедурами управления. Контрстратегии U_v, V_u отождествляются с функциями $u=u(t, x, v) \in P$, $v=v(t, x, u) \in Q$, борелевскими по переменным v, u соответственно. Движения $x(t, t_0, x_0, U_v)$, $t \geqslant t_0$, $x(t_0)=x_0$, определяются как пределы аппроксимационных движений $x_k(t)$ (3), где

$$u_k[t] = u(t_i^{(k)}, x_k(t_i^{(k)}), v_k[t]), \; t_i^{(k)} \leqslant t < t_{i+1}^{(k)}, \; i=0, 1, \ldots.$$

Аналогично определяются движения $x(t, t_0, x_0, V_u)$. Смешанные стратегии $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ отождествляются с функциями $\mu=\mu(t, x)$, $\nu=\nu(t, x)$, значениями к-рых являются вероятностные меры, заданные на компактах P, Q соответственно. Движения $x(t, t_0, x_0, \tilde{U})$, $t \geqslant t_0$, $x(t_0)=x_0$, определяются как пределы аппроксимационных движений $x_k(t)$, $t \geqslant t_0$, удовлетворяющих уравнению

$$\dot{x}_k(t) = \int_P \int_Q f(t, x_k(t), u, v)\, d\mu_k[t]\, d\nu_k[t],$$

где

$$\mu_k[t] = \mu(t_i^{(k)}, x_k(t_i^{(k)})), \quad t_i^{(k)} \leqslant t < t_{i+1}^{(k)}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

$\nu_k[t]$ — некоторая слабо измеримая функция. Аналогичным образом вводятся движения $x(t, t_0, x_0, \tilde{V})$.

Для Д. и. сближения-уклонения всегда справедлива альтернатива 2 (альтернатива 3), формулировка к-рой получается из формулировки альтернативы 1 заменой стратегии одного из игроков на соответствующую контрстратегию (соответственно, заменой стратегий U_* и V_* смешанными стратегиями $\tilde{U}_*$ и $\tilde{V}_*$). Для Д. и., сводящихся к игре сближения-уклонения и рассматриваемых в классе позиционных стратегий одного из игроков и контрстратегий противника (в классе смешанных стратегий $\{\tilde{U}\}$ и $\{\tilde{V}\}$), устанавливается существование цены Д. и., причем здесь не предполагается условие (4). Решения Д. и. в указанных классах стратегий могут оказаться неустойчивыми по отношению к информационным помехам. Для стабилизации этих решений вводится процедура управления с поводырем (см. [9]). Здесь наряду с реальной системой рассматривается эталонная система — поводырь, движение к-рой моделируется в вычислительной машине и известно с любой требуемой точностью. Управление игрока в реальной системе и движение поводыря формируются так, чтобы движения исходной и моделируемой систем взаимно отслеживались, причем поводырь сохраняется на нек-ром мосту, соединяющем начальную позицию с целевым множеством. Такая процедура управления оказывается устойчивой к ошибкам измерения и помехам, действующим на систему. При моделировании движения поводыря можно использовать конструкции, допускающие дискриминацию противника.

Методы теории дифференциальных игр. Один из методов решения Д. и. был предложен Р. Айзексом [11]. Этот подход примыкает к методу *динамического программирования* и основан на интегрировании специального уравнения с частными производными, решение к-рого определяет цену игры $c_0(t, x)$ как функцию исходной позиции игры. Оптимальные стратегии игрока I (или II) выбираются здесь так, чтобы обеспечить невозрастание (неубывание) цены игры вдоль порожденных ими движений системы. Однако нередки случаи, когда цена игры является разрывной функцией позиции игры, поэтому применение данного подхода требует специального анализа решений вблизи поверхностей разрыва функции $c_0(t, x)$ или ее частных производных. Полное исследование сингулярностей и обоснование этого метода оказываются весьма сложными и их удается осуществить лишь в немногих примерах.

Наиболее полно изучены линейные Д. и., т. е. случай, когда

$$f(t, x, u, v) = A(t)x + B(t)u + C(t)v,$$

где A, B, C — непрерывные матрицы соответствующих размерностей. Для линейных задач преследования и уклонения Н. Н. Красовский сформулировал правило экстремального прицеливания (см., напр., [12]), к-рое позволило решить эти задачи (без дискриминации противника) при условии регулярности и, в частности, в случае однотипных объектов. Элементы этого решения описываются следующим образом. Пусть $W(t_*, \vartheta, G)$ — множество программного поглощения, т. е. совокупность точек $x_* \in \mathbb{R}^n$, для к-рых для всякого управления

$v(t) \in Q$ существует управление $u(t) \in P, t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, такое, что пара этих управлений переводит систему из состояния $x(t_*) = x_*$ на множество $G \subset \mathbb{R}^n$ в момент времени $t = \vartheta$. Вводится функция

$$\varepsilon_0(t, x, \vartheta) = \inf \{\varepsilon : x \in W(t, \vartheta, M_\varepsilon)\},$$

где M_ε — евклидова ε-окрестность целевого множества M. В области $\Gamma_\vartheta = \{(t, x) : \varepsilon_0(t, x, \vartheta) > 0\}$ величина $\varepsilon_0(t, x, \vartheta)$ определяется соотношением

$$\varepsilon_0(t, x, \vartheta,) = \max_l \varkappa(l, t, x, \vartheta), \ l \in \mathbb{R}^n, \ \|l\| \leqslant 1, \qquad (5)$$

где для функции $\varkappa$ известно простое выражение через опорные функции множеств P, Q и выпуклого множества M (см. [12]). При условии выпуклости функции $\varkappa$ по переменной l (сильное условие регулярности) в области Γ_ϑ максимум в (5) достигается на единственном векторе $l_0(t, x, \vartheta)$, к-рый выбирается в качестве краевого условия в принципе максимума, определяющем выбор экстремального управления u_0. Построенная таким образом стратегия $U_0 \div u_0(t, x)$ обеспечивает встречу с множеством M к моменту $t = \vartheta$ из любой позиции (t_0, x_0), где $\varepsilon_0(t_0, x_0, \vartheta) = 0$. [Указанные построения опираются лишь на информацию о позиции игры и эффективно реализуются на ЭВМ.] Решение задачи сближения с помощью программной конструкции можно получить и при ослабленных условиях регулярности.

Исследование линейных задач преследования при различных предположениях регулярности проводилось Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягиным, Б. Н. Пшеничным (см., напр., [13], [14], в частности, описано [13] решение линейной задачи преследования при так наз. условиях локальной выпуклости, при к-рых имеет место указанное выше сильное условие регулярности).

Одним из наиболее удобных способов решения игровых задач управления является прямой метод. В тех задачах, где возможно применение этого метода, управление игрока выбирается так, чтобы при любом противодействии противника осуществлялось отслеживание нек-рого вспомогательного процесса, приводящее к успешному окончанию игры. В случае однотипных объектов ($C = -B$, $Q = \lambda P$, $\lambda \leqslant 1$) и при условии дискриминации противника прямой метод решения задачи преследования назначает выбор управления игрока I в виде суммы двух слагаемых, одно из к-рых копирует управление противника, а другое совпадает с решением программной задачи на быстродействие перевода системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)w, \quad w \in (1 - \lambda)P,$$

на целевое множество M. Впервые прямой метод был описан Л. С. Понтрягиным [5] для линейной задачи преследования. Позднее были указаны условия, при к-рых прямой метод дает оптимальный результат [15]. Затем прямой метод был развит для решения нелинейных задач и для задач с интегральными ограничениями (см., напр., [16], [17]). Во всех этих исследованиях прямой метод использовался при условии дискриминации противника; он был развит также и для решения позиционных игр (см., напр., [9]).

Задача об убегании. В этой задаче требуется определить условия, при к-рых преследуемый объект может обеспечить уклонение от встречи с преследователем при всех $t \geqslant t_0$. Исследование этого вопроса было начато Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко (см. [7], [8]), к-рые указали условия разрешимости линейной задачи об убегании и получили оценку гарантируемого расстояния между преследующей и преследуемой точками. Подход, предложенный ими, был обобщен затем для исследования других случаев задачи об убегании.

Предложенное Л. С. Понтрягиным [6] понятие альтернированного интеграла позволило описать структуру множества начальных позиций, из к-рых возможно окончание линейной игры преследования в заданный момент времени $t=\vartheta$. Альтернированный интеграл определяется как предел рекуррентной процедуры, в к-рой исходное множество A_0 совпадает с целевым множеством $M\subset\mathbb{R}^n$, а каждое последующее множество A_{i+1} определяется по предыдущему операцией программного поглощения, т. е. $A_{i+1}=W(\tau_{i+1}, \tau_i, A_i)$, где $\tau_{i+1}=\tau_i-\Delta$, $\tau_0=\vartheta$, $\Delta>0$ — шаг рекуррентной процедуры. Б. Н. Пшеничный [18] при исследовании структуры Д. и. преследования в качестве элементарной операции также использовал программное поглощение, где в отличие от предыдущего случая требовалось лишь, чтобы продолжительность перехода из точек $x\in A_{i+1}$ на A_i не превосходила числа Δ, но, вообще говоря, не равнялась этому числу. Такая рекуррентная процедура позволила в общем случае нелинейной системы описать структуру множества позиций, из к-рых игру преследования можно окончить к заданному моменту времени.

Была также предложена экстремальная конструкция для решения позиционных Д. и. (см., напр., [9]). Этот подход используется как для решения конкретных примеров, так и при доказательстве общих положений, в частности альтернатив 1—3, указанных выше. Напр., при решении задачи сближения с $M_c\subset\mathbb{R}^{n+1}$ в классе стратегий $U\div u(t, x)$ при условии (4), согласно экстремальной конструкции, в пространстве позиций выделяется множество $W_u\subset\mathbb{R}^{n+1}$, образующее мост, к-рый соединяет начальную позицию с целевым множеством M_c и лежит целиком во множестве N_c. Мост обладает так наз. свойством u-стабильности, т. е. для любых $(t_*, x_*)\in W_u$, $v_*\in Q$ и $t^*\geqslant t_*$ существует решение $x(t)$ уравнения в контингенциях

$$\dot{x}(t)\in\omega\{f(t, x(t), u, v_*): u\in P),$$

$$x(t_*)=x_*,$$

для к-рого либо $(t^*, x(t^*))\in W_u$, либо $(\tau, x(\tau))\in M_c$ при нек-ром $\tau\in[t_*, t^*]$. Вводится экстремальная к мосту W_u стратегия $U^{(e)}\div u^{(e)}(t, x)$, определяемая соотношением

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}(x-w)'f(t, x, u, v)=$$
$$=\max_{v\in Q}(x-w)'f(t, x, u^{(e)}(t, x), v),$$

где w — вектор, для к-рого (t, w) — точка множества W_u, ближайшая к позиции (t, x). Экстремальная стратегия удерживает движения на мосту W_u и тем самым доставляет решение задачи о сближении.

В этой конструкции основным моментом является определение подходящих стабильных мостов, после чего построение экстремальных стратегий не доставляет больших трудностей. Использование известных рекуррентных процедур для определения таких мостов ограничивается значительными трудностями вычислительного характера, поэтому важным является исследование эффективных способов построения стабильных мостов. Один из таких способов доставляет прямой метод. Другой способ — построение стабильных мостов в форме множеств регулярного программного поглощения. В нелинейном случае программное поглощение определяется с помощью специальных программных управлений-мер (см., напр., [9]). В регулярных случаях программного поглощения решение задач конфликтного управления можно довести до алгоритмов, реализуемых на ЭВМ.

Основные направления исследований дифференциальных игр. Изложенные выше результаты относились в основном к Д. и., в к-рых движение описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (1), где управляющие векторы удовлетворяют ограничениям (2). Аналогичные результаты получены для игровых задач управления, в к-рых движение описывается *дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом*, а также для задач с интегральными ограничениями на управления игроков (см., напр., [17]).

Для исследования структуры Д. и. представляет интерес изучение задач конфликтного управления, где движение задается обобщенной динамич. системой (см., напр., [19], [20]). Рассмотрено решение Д. и. в классе квазистратегий, к-рые формируют управление игрока по реализовавшемуся управлению противника; предложены также итерационные процедуры для определения функции цены и стабильных мостов (см., напр., [21]).

Кроме Д. и. с двумя игроками, рассматриваются также Д. и. N лиц. Постановка Д. и. N лиц обычно предполагает, что каждый из игроков, распоряжающийся выбором своего управления, стремится минимизировать нек-рый функционал, определенный на траекториях управляемой системы. При этом допускается использование ими лишь информации о текущих позициях игры. Задача заключается, напр., в определении условий, при к-рых в таких играх имеется точка равновесия по Нэшу в заданном классе стратегий игроков.

Важный раздел теории Д. и. составляют игровые задачи управления с неполной информацией. В этих задачах предполагается, что неполнота информации заключается либо в незнании части компонент фазового вектора $x(t)$, либо в измерении текущей позиции игры с нек-рым запаздыванием, либо в неточном измерении положения фазовой точки $x(t)$, причем возможен случай, когда для погрешности измерения указаны лишь допустимая область, и случай, когда задано нек-рое статистич. описание этой погрешности.

Лит.: [1] Fleming W. H., «Contributions to the theory of games», 1957, v. 3, p. 407—12; [2] Varaiya P., Lin Jiguan G., «SIAM J. Contr.», 1969, v. 7, № 1, p. 141—57; [3] Петров Н. Н., «Докл. АН СССР», 1970, т. 190, № 6, с. 1289—91; [4] Friedman A., «J. Different. equat.», 1970, v. 7, № 1, p. 111—25; [5] Понтрягин Л. С., «Докл. АН СССР», 1967, т. 174, № 6, с. 1278—80; [6] его же, там же, т. 175, № 4, с. 764—66; [7] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 112, с. 30—63; [8] Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф., «Дифференц. уравнения», 1971, т. 7, № 3, с. 436—45; [9] Красовский Н. Н., Субботин А. И., Позиционные дифференциальные игры, М., 1974; [10] Кротов В. Ф., Гурман В. И., Методы и задачи оптимального управления, М., 1973; [11] Айзекс Р., Дифференциальные игры, пер. с англ., М., 1967; [12] Красовский Н.Н., Игровые задачи о встрече движений, М., 1970; [13] Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., «Докл. АН СССР», 1967, т. 174, № 1, с. 27—29; [14] Пшеничный Б. Н., «Кибернетика», 1967, № 6, с. 54—64; [15] Гусятников П. Б., Никольский М. С., «Докл. АН СССР», 1969, т. 184, № 3, с. 518—21; [16] Чикрий А. А., сб. «Теория оптимальных решений. Тр. семинара», в. 3, К., 1969, с. 17—25; [17] Никольский М. С., «Дифференц. уравнения», 1972, т. 8, № 6, с. 964—71; [18] Пшеничный Б. Н., «Докл. АН СССР», 1969, т. 184, № 2, с. 285—87; [19] Nardzewski C. R., «Adv. in game theory. Ann. of Math. Studies», 1964, p. 113—26; [20] Roxin E., «J. Optimiz. theory and appl.», 1969, v. 3, № 3, p. 153—63; [21] Ченцов А. Г., «Матем. сб.», 1976, т. 99, № 3, с. 394—420.

М. С. Никольский, А. И. Субботин.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: система бесконечного порядка — бесконечная совокупность дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

содержащая бесконечное множество неизвестных функций $x_k(t)$, $k=1, 2, \ldots$, и их производные. Решением такой системы наз. множество функций $\{x_k(t)\}$, обращающих все уравнения системы в тождества.

Система (1) наз. **счетной**, в отличие от **несчетной** системы

$$\frac{dx_\alpha}{dt}=f_\alpha\ (t,\ \ldots,\ x_\alpha,\ \ldots), \tag{2}$$

где α пробегает нек-рое несчетное множество значений. Система вида (2) содержит в себе несчетное множество функций $\{x_\alpha(t)\}$, подлежащих определению, и их производные. Рассматриваются также Д. у., содержащие бесконечное множество неизвестных функций двух и более аргументов и их частные производные.

Начало развитию теории систем Д. у. вида (1) положила работа А. Н. Тихонова [1]. Основным ее результатом является доказательство теоремы существования решения системы (1) в предположении, что ее правые части определены при произвольных значениях $x_1,\ x_2,\ \ldots\ (0\leqslant t-t_0\leqslant a)$, непрерывны по отношению к $x_1,\ x_2,\ \ldots$ при фиксированном значении t, измеримы по t при фиксированных $x_1,\ x_2,\ \ldots$ и ограничены некоторыми суммируемыми на сегменте $[t_0,\ t_0+a^2]$ функциями $M_i(t)$, $i=1, 2, \ldots$ При дополнительных предположениях о выполнении обобщенных условий Липшица

$$|f_n(t, x_1', x_2', \ldots)-f_n(t, x_1'', x_2'', \ldots)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}K_{n_i}\,|\,x_i'-x_i''\,|,$$

и о сходимости и равномерной ограниченности рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}K_{n_i}=A_i<A$$

доказана теорема единственности решения $x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots$, системы (1) при заданных начальных условиях такого, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n(t)|$$

сходится.

Дальнейшее развитие теория счетных систем получила в направлении исследований условий ограниченности решений (см. [2]), аналитической зависимости от параметра, устойчивости по Ляпунову и других свойств решений (см. [2]). Особенно глубоко изучены линейные и квазилинейные счетные системы дифференциальных уравнений.

К изучению систем бесконечного порядка плодотворно применяются операторные методы. Так, например, вместо системы (1) рассматривается операторное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f\ (t,\ x), \tag{3}$$

где $x(t)$ — бесконечномерный вектор нек-рого банахова пространства B, $f(t,\ x)$ — бесконечномерная вектор-функция со значениями в том же пространстве, производная рассматривается в смысле Фреше. В частности, для уравнения (3) были получены следующие результаты (см. [3]).

Если $f(t,\ x)$ — ограниченный оператор, то из выполнения локальной теоремы существования и отрицательности генерального показателя (см. [3]) следует неограниченная продолжимость решений с достаточно близкими к нулю начальными значениями.

Если

$$f(t,\ x)\equiv Ax$$

(где A — бесконечномерная постоянная матрица) — ограниченный оператор, то в гильбертовом пространстве ограниченность всех решений при $-\infty<t<\infty$ имеет место тогда и только тогда, когда оператор A подобен косоэрмитову. В этом же случае найдено явное выражение решения задачи Коши с начальными условиями $x(t_0)=x_0$ в виде

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0,$$

где e^{At} — операторная экспонента.

Если

$$f(t, x)\equiv Ax+f(t),$$

где A имеет прежнее значение, а $f(t)$ — непрерывная T-периодическая вектор-функция, то существует единственное периодическое решение, когда спектр $\sigma(A)$ оператора A не содержит точек мнимой оси $2k\pi i/T$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Для случая

$$f(t, x)\equiv Ax+F(t, x)$$

найдены условия устойчивости по Ляпунову в нуле в виде требования

$$\|F(t, x)\|<q\|x\|, \quad t>0, \quad \|x\|<\rho,$$

при достаточно малом $q>0$ и расположении спектра оператора A в левой открытой полуплоскости.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., «Матем. сб.», 1934, т. 41, в. 4, с. 551—60; [2] Валеев К. Г., Жаутыков О. А., Бесконечные системы дифференциальных уравнений, А.-А., 1974; [3] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970. *И. П. Макаров.*

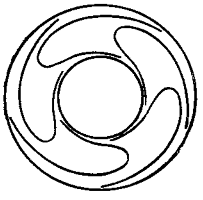
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ТОРЕ, потоки на торе,— класс *динамических систем.* Примером может служить поток, порожденный групповыми сдвигами тора (как *Ли группы*) на элементы к.-л. однопараметрич. подгруппы тора. В терминах «угловых», или «циклических», координат на торе, отсчитываемых по модулю 1 (их можно рассматривать как обычные координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, из к-рого тор T^n получается как факторгруппа по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$), этот поток описывается так: за время t точка $x=(x_1, \ldots, x_n)$ переходит в точку

$$T^t x = x + t\omega, \tag{1}$$

где $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — набор так наз. базисных частот. Все траектории этого потока являются *квазипериодическими функциями* времени; их свойства определяются арифметич. свойствами базисных частот. Так, траектории периодичны, если все ω_i кратны одному и тому же числу. В другом крайнем случае, когда ω_i линейно независимы над $\mathbb{Z}$ (т. е. никакая нетривиальная линейная комбинация $\sum k_i\omega_i$ с целыми k_i не равна нулю), каждая траектория всюду плотно заполняет тор (говорят об иррациональной обмотке тора), а поток эргодичен (по отношению к *Хаара мере* на T^n; мера Хаара естественным образом получается из меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ при факторизации по $\mathbb{Z}^n$ и сохраняется при сдвигах T^t) и даже строго эргодичен; его спектр дискретен.

Подобные потоки часто возникают в различных вопросах. Напр., для интегрируемых *гамильтоновых систем* «типичные» финитные (т. е. остающиеся в конечной области фазового пространства) движения приводят как раз к ним (соответствующие торы суть многообразия уровня системы первых интегралов, см. [8]). Обычно такие инвариантные торы с иррациональными обмотками имеются также и у гамильтоновых систем, достаточно близких к интегрируемым (этот вопрос тесно связан с *малыми знаменателями*).

Для двумерного тора T^2 А. Пуанкаре (H. Poincaré, [1]), А. Данжуа [2] (см. также [3]) и Х. Кнезером ([4], модифицированное изложение см. в [5], [6]) полностью выяснены возможные типы качественного поведения траекторий потоков без положений равновесия. (Из всех замкнутых поверхностей только на торе и *Клейна поверхности* возможны такие потоки, причем изучение потоков на последней в основном сводится к изучению потоков на торе, являющемся ее двулистной накрывающей поверхностью). Об этих потоках известно следующее. Если на поверхности имеется двусвязная область («кольцо Кнезера»,) к-рая ограничена двумя замкнутыми траекториями и внутри к-рой траектории свиваются с одной из них и навиваются на другую в противоположном направлении (см. рис.), то качественное поведение траекторий на поверхности напоминает поведение траекторий в ограниченной области на плоскости. В частности, все непериодич. траектории в обе



стороны по времени стремятся к периодическим. Более интересен случай (возможный лишь на торе), когда колец Кнезера нет; это эквивалентно существованию замкнутой трансверсали L (т. е. замкнутой кривой, нигде не касающейся векторного поля), к-рую каждая траектория пересекает бесконечное число раз. На L определено отображение последования S — гомеоморфизм, переводящий точку $x \in L$ в первую по времени точку пересечения проходящей через x положительной полутраектории с L. Характеристикой каскада $\{S^n\}$ на L служит число вращения Пуанкаре α (см., например, [3]. Оно отчасти зависит от конкретного выбора L; совершенно инвариантной характеристикой исходного потока является асимптотический цикл [14]). Согласно теореме Данжуа, если S — класса C^2 (что гарантировано при соответствующей гладкости трансверсали и исходного потока на торе) и α иррационально, то S топологически сопряжен с поворотом окружности на угол $2\pi\alpha$, т. е. на L можно так ввести циклич. координату x, что S представится в виде $x \to x+\alpha \bmod 1$. (Если S — класса C^1, то это не обязательно так, см. [2].) Тогда разбиение тора на траектории с точностью до гомеоморфизма является таким же, как и в случае (1) (однако это не относится к скорости движения по ним). Гладкость замены координат, гарантируемая теоремой Данжуа, зависит (помимо гладкости S) от арифметических свойств числа вращения α. При почти всех α из $S \subset C^n$, $n \geq 3$, следует, что замена координат принадлежит классу C^{n-2} [9], но для чисел вращения, очень быстро приближающихся рациональными числами, замена координат, вообще говоря, не гладкая, даже если преобразование S аналитическое (см. [7]).

Если исходный поток на T^2 имеет *интегральный инвариант*, то колец Кнезера быть не может, а S (независимо от рациональности или иррациональности α) гладко сопряжено с поворотом окружности; таким образом, при отсутствии положений равновесия на торе существуют циклич. координаты x, y того же класса гладкости, что и сам поток, в к-рых последний принимает вид:

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = \alpha f(x, y), \; f(x, y) > 0 \tag{2}$$

(здесь α — число вращения, отвечающее замкнутой трансверсали $x=\text{const}$). При достаточной гладкости f и надлежащих свойствах α поток (2) можно привести к (1) (с $n=2$ и $\omega=(1, \alpha)$) посредством нек-рого диффеоморфизма, в общем же случае это не всегда возможно, и даже эргодические свойства потока (2) могут отличаться от свойств потоков (1) (возможен непрерывный спектр, хотя перемешивание в гладком случае невозможно). См. [10] (опущенные доказательства восстановлены в [11], [12]) и [13].

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М.—Л., 1947; [2] Denjoy A., «J. math. pures et appl.», sér. 9, 1932, t. 11, № 4, p. 333—75; [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [4] Kneser H., «Math. Ann.», 1924, Bd 91,

№ 1—2, S. 135—54; [5] Reinhart B. L., «Amer. J. Math.», 1959, v. 81, № 3, p. 617—31; [6] Aepply A., Markus L., «Amer. J. Math.», 1963, v. 85, № 4, p. 633—54; [7] Арнольд В. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 1, с. 21—86; [8] его же, «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 2, с. 471—74; [9] Herman M. R., «C. r. Acad. sci.», 1976, t. 283, № 8, p. 579—82; [10] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1953, т. 93, № 5, с. 763—66; [11] Sternberg S., «Amer. J. Math.», 1957, v. 79, № 2, p. 397—402; [12] Шкловер М. Д., «Изв. ВУЗов. Математика», 1967, № 10, с. 113—24; [13] Кочергин А. В., «Докл. АН СССР», 1972, т. 205, № 3, с. 515—18; [14] Schwartzman S., «Ann. Math.», 1957, v. 66, № 2, p. 270—84. *Д. В. Аносов.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ — система вида

$$\mu \frac{dz}{dt}=F(z,\ y,\ t),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,\ y,\ t),\tag{1}$$

где z и y суть, соответственно, M- и m-мерные векторы, $\mu>0$ — малый параметр. Полагая в (1) формально $\mu=0$, получим так наз. вырожденную систему

$$0=F(z,\ y,\ t),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,\ y,\ t).\tag{2}$$

Пусть решение $x(t,\ \mu)$ системы (1) (x означает z и y в совокупности) определяется нек-рыми дополнительными условиями. При выяснении возможности использования уравнений (2) для построения асимптотического при малых μ приближения к $x(t,\ \mu)$ возникают трудности, связанные с тем, что система (2) более низкого порядка, чем (1), и поэтому ее решение не может удовлетворить всем условиям, поставленным для (1). Априори не ясно, какие из дополнительных условий, поставленных для (1), следует оставить для определения решения (2), а какие — отбросить. Кроме того, уравнение $F(z,\ y,\ t)=0$ имеет относительно z, вообще говоря, несколько корней, и снова априори не ясно, какой из этих корней нужно выбрать при решении системы (2), чтобы получить правильное приближение. Эти моменты отличают постановку задачи об асимптотике решения системы (1) от регулярного случая, когда μ входит не в качестве множителя при производных, а в правые части и притом регулярно.

Первые работы, относящиеся к системе вида (1), были посвящены начальной задаче

$$z\,\big|_{t=0}=z^0,\quad y\,\big|_{t=0}=y^0.\tag{3}$$

В наиболее законченной форме результат был дан А. Н. Тихоновым [1]. В общих чертах он состоит в следующем. Пусть уравнение $F(z,\ y,\ t)=0$ определяет в нек-рой замкнутой ограниченной области D несколько изолированных корней

$$z=\varphi_i(y,\ t).$$

Введем так называемую присоединенную систему

$$\frac{dz}{d\tau}=F(z,\ y^*,\ t^*),\tag{4}$$

в к-рой y^* и t^* рассматриваются как параметры. Возьмем один из корней $z=\varphi_i$ и обозначим его $z=\varphi(y,\ t)$. Корень $z=\varphi(y,\ t)$ наз. устойчивым в D, если для каждой точки $(y^*,\ t^*)\in D$ соответствующая точка покоя $z=\varphi(y^*,\ t^*)$ присоединенной системы (4) является асимптотически устойчивой. Областью влияния устойчивого корня $z=\varphi(y,\ t)$ наз. множество точек $(z^*,\ y^*,\ t^*)$ таких, что решение системы (4), определяемое начальным условием $z|_{\tau=0}=z^*$, стремится к $\varphi(y^*,\ t^*)$ при $\tau\to\infty$. Оказывается, что если $z=\varphi(y,\ t)$ — устойчивый корень, а точка $(z^0,\ y^0,\ 0)$, являющаяся начальной для рассматриваемого решения $x(t,\ \mu)$ начальной задачи (3), принадлежит его области влияния, то это решение при $\mu\to0$ стремится к решению вырожденной системы (2), причем в качестве решения первого уравнения в (2) берется

$z=\varphi(y,\ t)$, а в качестве начального условия — условие (3) для y (условие (3) для z отбрасывается). Другими словами,

$$\lim_{\mu\to 0} y(t,\ \mu)=y_0(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{5}$$

$$\lim_{\mu\to 0} z(t,\mu)=z_0(t)\equiv\varphi(y_0(t),\ t),\quad 0<t\leqslant T, \tag{6}$$

где $y_0(t)$ находится из системы

$$\frac{dy}{dt}=f(\varphi(y,\ t),\ y,\ t) \tag{7}$$

при начальном условии $y_0|_{t=0}=y^0$; T связано с размерами области D. Таким образом, в отличие от регулярного случая близость при малых μ решения $x(t,\ \mu)$ системы (1) к решению системы, в к-рой положено $\mu=0$, т. е. системы (2), имеет место только при специальных условиях.

Предельный переход (6) не является равномерным в связи с тем, что, вообще говоря, $z^0\neq\varphi(y^0,\ 0)$. Иными словами, в связи с «потерей» начальных условий для z, и в окрестности $t=0$ имеется (правда, бесконечно сужающаяся при $\mu\to 0$) область, где $z(t,\ \mu)$ и $z_0(t)$ не близки. Это явление получило название явления *пограничного слоя* (название заимствовано из гидродинамики).

Понятие устойчивости корня $z=\varphi(y,\ t)$ играет большую роль при исследовании системы (1). Различным критериям устойчивости точки покоя по Ляпунову (см. *Устойчивость по Ляпунову*) соответствуют различные критерии устойчивости корня $z=\varphi(y,\ t)$. Наиболее употребителен критерий первого приближения, состоящий в требовании, чтобы собственные значения λ матрицы

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{z=\varphi(y,\ t)} \tag{8}$$

удовлетворяли неравенству $\operatorname{Re}\lambda<0$ в D. Если $\operatorname{Re}\lambda>0$, то для задачи (1), (3) имеет место результат, аналогичный описанному выше, но для $t<0$. Если матрица (8) имеет собственные значения с действительными частями разных знаков, т. е.

$$\operatorname{Re}\lambda_i<0,\ i=1,\ \ldots,\ k,\ \operatorname{Re}\lambda_i>0,\ i=k+1,\ \ldots,\ M, \tag{9}$$

то решение начальной задачи (1), (3), вообще говоря, предела при $\mu\to 0$ не имеет. Однако если для (1) поставить не начальную, а краевую задачу, причем при $t=0$ задать k компонент вектора z (компоненты будем обозначать нижними индексами), а при $t=T$ задать $M-k$ компонент вектора z (значение y можно задавать как при $t=0$, так и при $t=T$):

$$z_i|_{t=0}=z_i^0,\ i=1,\ \ldots,\ k,\ z_i|_{t=T}=z_i^0,\ i=k+1,\ \ldots,\ M, \tag{10}$$

$$y|_{t=0}=y^0, \tag{11}$$

то для решения $x(t,\ \mu)$ задачи (1), (10), (11) при выполнении нек-рых условий (аналогичных требованию принадлежности начальной точки области влияния устойчивого корня в случае начальной задачи) будет справедлив предельный переход (5), (6), где $y_0(t)$ определяется по-прежнему системой (7). При этом предельный переход (6) справедлив для $0<t<T$, и пограничный слой появляется как в окрестности $t=0$, так и в окрестности $t=T$, поскольку при $\mu=0$ происходит «потеря» дополнительных условий (10), заданных и при $t=0$, и при $t=T$. Случай (9) получил название условно устойчивого случая (см. [2]).

После того как был установлен предельный переход (5), (6), исследование задачи (1), (3) развивалось в направлении построения асимптотич. разложения ее решения. В регулярном случае решение начальной задачи представляется степенным рядом по μ

$$x(t, \mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\ldots, \tag{12}$$

к-рый при условии достаточной гладкости правых частей является асимптотич. рядом. В случае (1), благодаря наличию пограничного слоя, асимптотич. разложение решения носит более сложный характер, а именно: к степенному разложению типа (12) следует добавить еще так наз. пограничный ряд

$$\begin{gathered} x(t, \mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\ldots \\ \ldots+\Pi_0 x\left(\frac{t}{\mu}\right)+\mu \Pi_1 x\left(\frac{t}{\mu}\right)+\ldots . \end{gathered} \tag{13}$$

Члены $\Pi_k x(t/\mu)$ наз. *пограничными членами*. Они играют роль вблизи $t=0$, а далее быстро убывают по закону $\exp(\alpha t/\mu)$, где $\alpha>0$. (Подробное описание алгоритма построения асимптотич. разложения решения задачи (1), (3) дано в [2]; там же доказано, что остаточный член асимптотич. разложения (13) при достаточной гладкости правых частей (1) имеет порядок $O(\mu^{n+1})$ равномерно относительно $t\in[0, T]$.) Подобного же рода асимптотич. разложение имеет место для решения задачи (1), (10), (11). Отличие заключается в том, что в этом случае к степенному разложению типа (12) добавляются уже два пограничных ряда в связи с наличием пограничного слоя в окрестности и $t=0$, и $t=T$.

Асимптотич. представление (13) (при наличии устойчивого корня) или аналогичное ему представление с двумя пограничными слоями (при наличии условно устойчивого корня) дает возможность доказать существование и получить асимптотику решения задач с более сложными дополнительными условиями, чем (3) или (10), (11) (см. [2]):

$$R(x(0), x(T))=0. \tag{14}$$

Во всех описанных выше задачах в построении функции, к к-рой при $\mu\to 0$ стремится рассматриваемое решение, участвовал один корень $z=\varphi(y, t)$ уравнения $F(z, y, t)=0$. Однако при наличии нескольких корней уравнения $F(z, y, t)=0$ часто наблюдается *явление перехода* (или *срыва*), когда решение уравнения (1), удовлетворяющее нек-рым дополнительным (вообще говоря, краевым) условиям, имеет в качестве предельной кривую (вообще говоря, разрывную), состоящую из нескольких кусков, каждый из к-рых на соответствующем участке определяется вырожденной системой (2), причем в качестве решения уравнения $F(z, y, t)=0$ выбирается надлежащим образом один из корней $z=\varphi_i(y, t)$. При переходе от участка к участку корень, вообще говоря, меняется. Границы участков наз. *точками срыва*. В окрестности каждой точки срыва возникает пограничный слой, называемый *внутренним пограничным слоем*. Причины срыва весьма разнообразны. В одних случаях асимптотика решения с точками срыва может быть описана разложением типа (13) (см. [2]), в других — носит более сложный характер (см., напр., [3], [4]).

Существует много работ, посвященных отдельным весьма разнообразным задачам, напр., таким, как исследование случаев обращения $\operatorname{Re}\lambda$ в нуль, исследование (1) на бесконечном промежутке, изучение решения начальной задачи с сингулярными по μ начальными значениями z, изучение (1) в абстрактной форме и др. (см. обзор [4]). Большое количество исследований посвящено линейным уравнениям типа (1). Для линейных уравнений одной из характерных задач является задача исследования асимптотики собственных значений и собственных функций (см., напр., [5]), построение асимптотики фундаментальной системы решений в целом. Исследование последнего вопроса сильно затрудняется, если в системе имеются так наз. точки поворота (подробный обзор этого рода проблем см. в [4]).

Ряд результатов, полученных для дифференциальных уравнений типа (1), был перенесен на интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром при производных (см., напр., [6]). Имеется также значительный круг работ, посвященных уравнениям с частными производными, содержащими при старшей производной малый параметр (см., напр., [5], [7]). Совершенно аналогичные асимптотич. закономерности наблюдаются для дифференциально-разностных уравнений в случае малого отклонения аргумента (см. [4]).

Дифференциальные уравнения вида (1), а также другие, сходные с ними в отношении асимптотич. поведения решений, получили, в отличие от регулярного случая, название сингулярно возмущенных уравнений. Для исследования сингулярно возмущенных систем с успехом применяется метод усреднения Крылова — Боголюбова, к-рый особенно эффективен при исследовании колебательных процессов и резонансных явлений; был предложен также так наз. метод подъема, или метод регуляризации (см. [8]). Сингулярно возмущенные уравнения встречаются в самых различных областях физики и техники: в теории нелинейных колебаний, гидродинамике, небесной механике, квантовой механике, кинетике и др.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., «Матем. сб.», 1952, т. 31, № 3, с. 575—86; [2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., 1973; [3] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975; [4] Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 5—75; [5] Вишик М. И., Люстерник Л. А., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 5, с. 3—122; 1960, т. 15, в. 3, с. 3—80; [6] Иманалиев М. И., Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем, Фр., 1972; [7] Треногин В. А., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 4, с. 123—56; [8] Ломов С. А., Теория возмущений сингулярных краевых задач, А.-А., 1976.

А. Б. Васильева.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ БИНОМ — выражение вида

$$x^m (a+bx^n)^p \, dx,$$

где a и b — действительные, а m, n и p — рациональные числа. Неопределенный интеграл от Д. б.

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx$$

в случае, когда хоть одно из чисел p, $(m+1)/n$ и $(m+1)/n+p$ целое, сводится к интегралу от рациональных функций. Во всех остальных случаях, как это было показано П. Л. Чебышевым (1853). интеграл от Д. б. не выражается через элементарные функции.

Л. Д. Кудрявцев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ — выражение, составленное из одной или нескольких функций, их частных производных по независимым переменным различных порядков, а иногда и дифференциалов этих переменных, инвариантных относительно того или иного преобразования.

Пусть в дифференцируемом многообразии X_n, элементом к-рого является точка $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, задан геометрический объект Ω (см. *Геометрических объектов теория*). Геометрич. объект ω того же многообразия наз. дифференциальным инвариантом порядка r относительно объекта Ω, если его координаты ω_A, $A=1, 2, \ldots, N$, являются функциями координат Ω_α, $\alpha=1, 2, \ldots, M$, объекта Ω и их частных производных по координатам u^i, $i=1, 2, \ldots, n$, до порядка r:

$$\omega_A = f_A (\Omega_\alpha, \partial_i \Omega_\alpha, \ldots, \partial^r_{i_1 i_2 \ldots i_r} \Omega_\alpha)$$

и обладают следующим свойством инвариантности относительно нек-рого преобразования координат. Именно, при замене координат

$$u^i = u^i(u^{1'}, u^{2'}, \ldots, u^{n'})$$

новые координаты ω'_A объекта ω выражаются через новые координаты Ω'_A объекта Ω и их частные производные по новым координатам — теми же самыми функциями f_A:

$$\omega'_A = f_A(\Omega'_A, \partial_i \Omega_\alpha, \ldots, \partial^r_{i'_1 i'_2 \ldots i'_n} \Omega_\alpha).$$

Пусть, напр., Ω — объект линейной аффинной связности (без кручения). Объект ω (тензор кривизны):

$$R^l_{ijk} = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{is}\Gamma^s_{jk} - \Gamma^l_{js}\Gamma^s_{ik}$$

есть тензорный Д. и. порядка 1 относительно *Кристоффеля символов* Γ^k_{ij}.

Пусть в X_n задана группа (псевдогруппа) G точечных преобразований

$$u^i = f^i(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n) \tag{1}$$

и M_h — подмногообразие X_n размерности h:

$$u^i = \varphi^i(t^1, t^2, \ldots, t^n), \tag{2}$$

параметры к-рого подвергаются преобразованиям бесконечной группы G_∞:

$$t^\alpha = \psi^\alpha(\bar{t}^{1*}, \bar{t}^{2*}, \ldots, \bar{t}^{n*}).$$

Геометрическим дифференциальным инвариантом порядка r многообразия M_h относительно группы (псевдогруппы) G наз. функцию координат u^i точки M_h и их частных производных до порядка r по параметрам t^α:

$$F\left(u^i, \frac{\partial u^i}{\partial t^\alpha}, \ldots, \frac{\partial^r u^i}{\partial t^{\alpha_1} \ldots \partial t^{\alpha_r}}\right), \tag{3}$$

обладающую свойством инвариантности относительно преобразований (1) и (2). Именно, если в (3) заменить u^i по формулам (1), а частные производные от u^i по t^α — их выражениями через частные производные от $\bar{u}^i$ по $\bar{t}^{\alpha^*}$, то получается та же функция F от $\bar{u}^i$ и их производных по $\bar{t}^{\alpha^*}$:

$$F\left(u^i, \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \bar{t}^{\alpha^*}}, \ldots, \frac{\partial^r \bar{u}^i}{\partial \bar{t}^{\alpha^*_1} \ldots \partial \bar{t}^{\alpha^*}}\right).$$

Если координаты u^i однородны, то функция F должна быть также инвариантна относительно преобразований

$$\overset{*}{u}{}^i = \lambda(t^1, \ldots, t^n)\, u^i, \quad \lambda \neq 0.$$

В определении геометрич. Д. и. функцию F можно заменить геометрич. объектом. Если этот объект — ковариантный (контравариантный) вектор, то его наз. *ковариантом* (*контравариантом*).

Если инвариантно обращение в нуль нек-рого объекта, то его наз. *относительным дифференциальным инвариантом*.

Лит.: [1] Thomas T. Y., The differential invariants of generalized spaces, Camb., 1934; [2] Weitzenböck R., Jnvarianten-theorie, Groningen, 1923. *В. И. Шуликовский.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ КОМИТАНТ — дифференцируемое отображение φ тензорного пучка T на многообразии M в тензорный пучок T' на том же многообразии такое, что если p': $T \to M$ и p' : $T' \to M$ — проекции пучков T и T' на M, то

$$p'\varphi = p.$$

Компоненты тензора $T'=\varphi(T)$ в локальной карте ξ на M зависят от ξ только через посредство компонент тензора T.

В частности, когда T' сводится к пучку относительных скаляров веса g, Д. к. является дифференциальным инвариантом веса g. *М. И. Войцеховский.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — обобщение оператора дифференцирования. Д. о. (вообще говоря, не непрерывный, не ограниченный и не линейный) — оператор, определенный нек-рым дифференциальным выражением и действующий в пространствах (вообще говоря, векторнозначных) функций (или сечений дифференцируемых расслоений) на дифференцируемых многообразиях, или в пространствах, сопряженных к пространствам этого типа. Дифференциальное выражение — это такое отображение λ множества Ω в пространстве сечений расслоения ξ с базой M в пространство сечений расслоения η с той же базой, что для любой точки $p\in M$ и любых сечений $f, g\in\Omega$ из совпадений их k-струй в точке p следует совпадение λf и g в той же точке; наименьшее из чисел k, удовлетворяющих этому условию для всех $p\in M$, наз. порядком дифференциального выражения и порядком Д. о., определенного этим выражением.

На многообразии M без края Д. о. часто является расширением оператора, естественно определяемого фиксированным дифференциальным выражением на нек-ром (открытом в подходящей топологии) множестве бесконечно (или достаточно много раз) дифференцируемых сечений данного векторного расслоения ξ с базой M и, таким образом, допускает естественное обобщение на случай пучков ростков сечений дифференцируемых расслоений. На многообразии M с краем ∂M Д. о. L часто определяется как расширение аналогичного оператора, естественно определенного дифференциальным выражением на множестве тех дифференцируемых функций (или сечений расслоения), ограничения к-рых на ∂M лежат в ядре нек-рого Д. о. l на ∂M (или удовлетворяет каким-либо др. условиям, определяемым теми или иными требованиями к области значений оператора l на ограничениях функций из области определения оператора L, напр., неравенствами); Д. о. l наз. определяющим граничные условия для Д. о. L. Линейные Д. о. в пространствах, сопряженных к пространствам функций (или сечений), определяются как операторы, сопряженные к Д. о. указанного выше вида в этих пространствах.

Примеры. 1) Пусть F — действительная функция $k+2$ переменных $x, y_0, y_1, \ldots, y_k$, определенная в нек-ром прямоугольнике $\Delta=I\times J_0\times J_1\times\ldots\times J_k$; дифференциальное выражение

$$Du\overset{\text{def}}{=}F\left(x,\ u,\ \frac{du}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^k u}{dx^k}\right)$$

(где функция F обычно удовлетворяет нек-рым условиям регулярности — измеримости, непрерывности, дифференцируемости и т. п.) определяет Д. о. D на многообразии Δ, область определения которого Ω состоит из всех функций $u\in C^k(\Delta)$, удовлетворяющих условию $u^{(i)}(x)\in J_i$ для $i=0,\ 1, \ldots, k$; если F непрерывна, то D может рассматриваться как оператор в $C(I)$ с областью определения Ω; Д. о. D наз. общим обыкновенным Д. о. Если F зависит от y_k, то порядок D равен k. Д. о. D наз. квазилинейным, если F линейно зависит от y_k; линейным, если F линейно зависит от $y_0, y_1, \ldots, y_k$; линейным с постоянными коэффициентами, если F не завист от x и D является линейным Д. о. Остальные Д. о. наз. нелинейными. Квазилинейный Д. о. при нек-рых условиях регулярности функции F может быть расширен до Д. о. из одного *Соболева пространства* в другое.

2) Пусть $x=(x^1, \ldots, x^N)$ пробегает область $\mathfrak{G}$ в $\mathbb{R}^N$, $F=F(x, u, D^{(n)}(u))$ — дифференциальное выражение определяемое действительной функцией F на произведении области $\mathfrak{G}$ на нек-рый открытый прямоугольник ω, здесь $D^{(n)}(u)$ — набор частных производных вида $D^\alpha u=\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_N}}{(\partial x^1)^{\alpha_1}\ldots(\partial x^N)^{\alpha_N}}$, где $\alpha_1+\ldots+\alpha_N\leqslant n$, а функция F (как и в 1) удовлетворяет нек-рым условиям регулярности. Определенный этим выражением Д. о. на пространстве достаточно дифференцируемых функций на $\mathfrak{G}\times\omega$ наз. общим Д. о. с частными производными. Аналогично 1) определяются нелинейные, квазилинейные и линейные Д. о. с частными производными и порядок Д. о.; Д. о. наз. эллиптическим, гиперболическим или параболическим, если он определяется дифференциальным выражением соответствующего типа. Иногда рассматриваются функции F, зависящие от производных всех порядков (напр., в виде формальной линейной комбинации их); таким дифференциальным выражениям, не определяющим Д. о. в обычном смысле, тем не менее могут быть сопоставлены нек-рые операторы (напр., в пространствах ростков аналитич. функций), наз. Д. о. бесконечного порядка.

3) Предыдущие примеры могут быть перенесены на случай комплексного поля, локально компактного вполне несвязного поля и (по крайней мере в случае линейных Д. о.) даже в более общую ситуацию, см. *Дифференциальная алгебра*.

4) Системы дифференциальных выражений определяют Д. о. в пространствах вектор-функций. Напр., Д. о. Коши—Римана, определенный дифференциальным выражением $\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right\}$, преобразует пространство пар гармонических функций на плоскости в себя.

В определении Д. о. и его обобщений (кроме обычных производных) часто используются не только обобщенные производные (естественно возникающие при рассмотрении расширений Д. о., заданных на дифференцируемых функциях) и слабые производные (связанные с переходом к сопряженному оператору), но и производные дробного и отрицательного порядков. Более того, само дифференцирование заменяется преобразованием Фурье (или другим интегральным преобразованием), применяемым к области определения и значения такого обобщенного Д. о. (см. *Псевдодифференциальный оператор*) так, чтобы получить возможно более простое представление соответствующей Д. о. функции F и достичь разумной общности постановки задач и хороших свойств рассматриваемых объектов, а также построить функциональное или операционное исчисление (продолжающее соответствие между оператором дифференцирования и оператором умножения на независимую переменную, осуществляемое преобразованием Фурье).

Такие вопросы теории дифференциальных уравнений, как существование, единственность, регулярность, непрерывная зависимость решений от начальных данных или правой части, явный вид решения дифференциального уравнения, определенного данным дифференциальным выражением, естественно интерпретируются в терминах теории операторов как задачи Д. о., определенного данным дифференциальным выражением в подходящих функциональных пространствах, а именно — как задачи о ядре, образе, изучении структуры области определения данного Д. о. L или его расширения, непрерывности обратного оператора к данному Д. о. и явного построения этого обратного оператора. Вопросы аппроксимации решений и построения приближенных решений дифференциальных уравнений также находят естественное обобщение и усовершенствование в задачах о соответствующих Д. о., а именно — о подборе таких естественных топологий в области определения и области значений, чтобы оператор L (при условии единственности решений) осуществлял гомеоморфизм области определения и области значений в этих топологиях (эта теория связана с теорией интерполяции и шкал функциональных пространств, особенно в случаях линейных и квазилинейных Д. о.), или в подборе Д. о., близких к данному в том или ином смысле (что позволяет, используя различные топологии в множестве Д. о., обосновывать методы аппроксимации уравнений, в том числе метод регуляризации, метод штрафа и нек-рые итерационные методы регуляризации). Теория Д. о. позволяет применить классич. методы теории операторов, напр. теорию вполне непрерывных операторов, и метод сжатых отображений в различных теоремах существования и единственности решений дифференциальных уравнений, в теории бифуркации решений и в нелинейных задачах о собственных значениях. Часто оказывается возможным использовать наличие в функциональных пространствах, где определен Д. о., естественной структуры порядка (в частности, применить теорию монотонных операторов), использовать методы линейного анализа (теорию двойственности, теорию выпуклых множеств, теорию сопряженных операторов, теорию диссипативных операторов), вариационные методы и теорию экстремальных задач, а также наличие нек-рых дополнительных структур в области определения области значений (напр., комплексной, симплектической и т. д.) для выяснения структуры области значений и ядра Д. о., т. е. получения информации о классе решений соответствующих уравнений. Ряд задач, связанных с дифференциальными выражениями, приводит к необходимости изучения дифференциальных неравенств, естественно связанных с многозначными Д. о.

Таким образом, теория Д. о. позволяет разрешить ряд трудностей классич. теории дифференциальных уравнений. Использование различных расширений обычных Д. о. приводит к понятию обобщенного решения соответствующего дифференциального уравнения (к-рое в ряде случаев, связанных, напр., с эллиптич. задачами, оказывается необходимо классическим), а использование линейной структуры позволяет вводить понятие слабых решений дифференциальных уравнений. При выборе подходящего расширения Д. о., определенного дифференциальным выражением, важную роль играют связанные с конкретным видом последнего априорные оценки для решений, к-рые позволяют указать такие функциональные пространства, что в этих пространствах Д. о. непрерывен или ограничен.

Но теория Д. о. дает возможность поставить и решить и ряд принципиально новых задач по сравнению с классич. задачами теории дифференциальных уравнений. Так, для нелинейных операторов представляют интерес изучение структуры множества его неподвижных точек и действие оператора в их окрестности, а также классификация этих особых точек и вопрос об устойчивости типа особой точки при возмущении данного Д. о.; для линейных Д. о., кроме указанных выше задач, представляют интерес задачи об описании и изучении спектра Д. о., построения его резольвенты, вычислений индекса, описание структуры инвариантных подпространств данного Д. о., построение связанного с данным Д. о. гармонич. анализа (в частности, разложения по собственным функциям, что требует предварительного изучения вопросов полноты системы собственных и присоединенных функций), изучения линейных и нелинейных возмущений данного Д. о. Эти задачи представляют особый интерес для эллиптич. Д. о., порожденных симметричными дифференциальными выражениями, в связи с теорией самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (в частности, со спектральной теоремой для таких операторов и теорией расширений симметрич. операторов). Теория ряда задач гиперболических и параболических (не обязательно линейных) Д. о. связана с теорией групп и полугрупп преобразований локально выпуклых пространств.

Пожалуй, наиболее исследованный (помимо линейных) класс Д. о., к тому же имеющий широкое практич. применение, — Д. о., не изменяющиеся вообще или меняющиеся по вполне определенному закону при действии на область их определения и соответствующим образом на дифференциальное выражение нек-рых преобразований, составляющих группу G (или полугруппу). Таковы, напр., инвариантные дифференциальные операторы, тесно связанные с представлениями группы G; ковариантная производная или, более общо, пульверизация — Д. о. на пространствах дифференцируемых тензорных полей (здесь G группа всех диффеоморфизмов), длинный ряд операторов теоретич. физики и т. п. Функционально-геометрич. методы полезны и при исследовании Д. о. с так наз. скрытой симметрией (см., напр., *Кортевега — де-Фриза уравнение*).

Теория Д. о., являющаяся составной частью общей теории операторов, играет в последнее время все более значительную роль не только в теории дифференциальных уравнений, но и вообще в современном анализе, причем не только как важный конкретный пример неограниченных операторов (это в особенности касается теории линейных Д. о.), но и как аппарат представления и средство изучения объектов различной природы: так, напр., любая обобщенная функция (и даже гиперфункция) получается действием нек-рого обобщенного Д. о. на непрерывную функцию. Наконец, непрерывно возрастает роль и влияние теории Д. о. в других разделах математики — напр., одно из решений так наз. проблемы индекса (см. *Индекса формулы*) связывает топологич. характеристики многообразия с наличием на нем определенного класса Д. о., что позволяет сделать заключение о свойствах эллиптич. комплексов на этом многообразии.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [2] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [3] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [4] Бурбаки Н., Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [5] Канторович Л. В., Акилов Г. П.. Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [6] Пале Р., Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе, пер. с англ., М., 1970; [7] Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р., Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений, пер. с нем., М., 1974; [8] Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.— Л.. 1948; [9] Скрыпник И. В., Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка, К., 1973; [10] Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения, М., 1958; [11] Схоутен Я.-А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965; [12] Лионс Ж. П., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, пер. с франц., М., 1972; [13] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М., 1968.

М. И. Войцеховский, А. И. Штерн.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР модуля — отображение модулей над коммутативным кольцом, являющееся аналогом понятия дифференциального оператора. Пусть R — коммутативное кольцо, S — подкольцо кольца R, N и M — два R-модуля. Гомоморфизм S-модулей D: $N \rightarrow M$ наз. дифференциальным оператором порядка $\leqslant m$ (m — неотрицательное целое), если для любого $x \in R$ отображение D_x: $N \to M$, определяемое формулой

$$D_x(n) = D(xn) - xD(n),$$

является Д. о. порядка $\leqslant m-1$. При этом Д. о. порядка 0 наз. гомоморфизм R-модулей $N \to M$. Множество всех таких Д. о. образует подмодуль $\mathrm{Diff}_S^m(N, M)$ R-модуля всех гомоморфизмов S-модулей $\mathrm{Hom}_S(N, M)$. В частности,

$$\mathrm{Diff}\,_S^0(N, M) \simeq \mathrm{Hom}_R(N, M),$$

а фактормодуль

$$\mathrm{Diff}_S^1(N, M)/\mathrm{Diff}\,_S^0(N, M)$$

изоморфен модулю S-дифференцирований $\mathrm{Der}_S(R, M)$ кольца R со значениями в M. Объединение $\mathrm{Diff}_S(M)$ возрастающего семейства подмодулей

$$\mathrm{Diff}\,_S^0(M, M) \subset \mathrm{Diff}\,_S^1(M, M) \subset \ldots$$

является фильтрованным ассоциативным кольцом относительно операции композиции отображений. Это кольцо наз. кольцом дифференциальных операторов R-модуля M над подкольцом S, а соответствующее градуированное кольцо

$$\mathrm{Symb}_S(M) = \oplus_{i \geqslant 0} \mathrm{Symb}_S^i(M),$$

где

$$\mathrm{Symb}_S^i(M) = \mathrm{Diff}_S^i(M, M)/\mathrm{Diff}_S^{i-1}(M, M),$$

наз. кольцом символов. Образ Д. о. $D \in \mathrm{Diff}_S^i(M, M)$ в кольце $\mathrm{Symb}_S^i(M)$ наз. символом Д. о.

Если R является алгеброй над полем рациональных чисел и модуль дифференциалов $\Omega^1_{R/S}$ проективен, то существует изоморфизм S-алгебры $\mathrm{Diff}_S(R)$ и обертывающей алгебры алгебры Ли S-дифференцирований $\mathrm{Der}_S(R, R)$. В этом случае кольцо $\mathrm{Symb}_S(R)$ изоморфно симметрич. алгебре R-модуля $\mathrm{Der}(R, R)$.

Напр., пусть $R = k[T]$ — кольцо многочленов над полем k; отображения $\partial/\partial T^i$: $R \to R$, определяемые формулой

$$\frac{\partial}{\partial T^i}(T^r) = \binom{r}{i} T^{r-i},$$

являются Д. о. кольца R над k порядка i. Кольцо Д. о. $\mathrm{Diff}_k(R)$ — свободный модуль над R с базой $\partial/\partial T^0$, $\partial/\partial T^1, \ldots, \partial/\partial T^i$. Умножение задается формулой

$$\frac{\partial}{\partial T^i} \circ \frac{\partial}{\partial T^j} = \binom{i+j}{i} \frac{\partial}{\partial T^{i+j}}.$$

В частности,

$$\left(\frac{\partial}{\partial T^1}\right)^n = n!\,\frac{\partial}{\partial T^n}$$

(формула Тейлора), что в случае, когда характеристика поля k равна 0, дает

$$\mathrm{Diff}_k(R) \cong R\left[\frac{\partial}{\partial T^1}\right].$$

Если $\mathrm{Spec}(R)$ является аффинной групповой S-схемой, то можно рассматривать также инвариантные Д. о. кольца R (см. [2]).

Лит.: [1] Виноградов А. М., Красильщиков И. С., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 1, с. 173—98; [2] Grothendieck A., Eléments de géométrie algébrique, P., 1967, ch. 4; [3] Demazure M., Gabriel P., Groupes algébriques, t. 1, P.—Amst., 1970; [4] Björk J.-E., «Invent. Math.», 1972, v. 17, № 1, p. 67—78. *И. В. Долгачев.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР, дифференциатор,— совместный *дифференциальный инвариант* одной или нескольких функций и метрич. тензора g_{ij} римановой геометрии.

Д. п. 1-го порядка (первый Д. п.) функции V есть квадрат ее градиента:

$$\Delta_1 V = g^{ij} V_i V_j.$$

Смешанный Д. п. 1-го порядка функций V и W есть скалярное произведение градиентов этих функций

$$\Delta_1 (V, W) = g^{ij} V_i W_j.$$

В трехмерном евклидовом пространстве в декартовой прямоугольной системе координат эти Д. п. выражаются формулами:

$$\Delta_1 (V) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_1 (V,\ W) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Д. п. 2-го порядка (второй Д. п.) функции есть дивергенция ее градиента:

$$\Delta_2 (V) = g^{ij} \nabla_i V_j = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}\, g^{ij} V_j),$$

где g — определитель матрицы $\|g_{ij}\|$. В трехмерном евклидовом пространстве в декартовой прямоугольной системе координат второй Д. п. выражается формулой

$$\Delta_2 (V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Первоначально Д. п. были введены Г. Ламе [1] в евклидовой геометрии. Обобщение этого понятия для римановой геометрии принадлежит Э. Бельтрами [2]. Поэтому Д. п. иногда наз. дифференциальными параметрами Ламе, или дифференциальными параметрами Бельтрами.

Лит.: [1] Lamé G., Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, P., 1859; [2] Beltrami E., Ricerche di analisi applicata alla geometria, «G. mat. Battaglini», 1864, v. 2, 1865, v. 3; [3] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1—2, М.— Л., 1947—48; [4] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. И. Шуликовский.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ — операция, к-рая относит функции ее производную или дифференциал. При этом речь может идти о производной или дифференциале в точке или на нек-ром множестве, о частных производных, о производной по направлению, о частных и полных дифференциалах, а сами функции могут быть не только числовыми, но и функциями более общей природы. *Г. П. Толстов.*

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ кольца — отображение ∂ кольца R в себя, являющееся эндоморфизмом аддитивной группы кольца R и удовлетворяющее соотношению

$$\partial (x \cdot y) = x\partial (y) + \partial (x) y.$$

Пусть M — левый R-модуль. Дифференцированием кольца R со значениями в M наз. гомоморфизм соответствующих аддитивных групп, удовлетворяющий условию

$$\partial (x \cdot y) = x\partial (y) + y\partial (x)$$

для всех x, y из R. Для любого элемента c из центра C кольца R отображение $x \to c\partial (x)$, где ∂ — дифференцирование, является Д. Сумма двух дифференцирований также является Д. Это определяет на множестве всех Д. кольца R со значениями в M структуру C-модуля, обозначаемого $\mathrm{Der}(R,\ M)$. Если S подкольцо в R, то Д. ∂ такое, что $\partial (s) = 0$ для всех $s \in S$ наз. S-дифференцированием. Множество всех S-дифференцирований образует подмодуль в $\mathrm{Der}(R,\ M)$, обозначаемый $\mathrm{Der}_S (R,\ M)$. Операция

$$[\partial,\ \partial'] = \partial \circ \partial' - \partial' \circ \partial$$

определяет в S-модуле $\mathrm{Der}_S (R,\ M)$ структуру S-алгебры Ли. Если φ: $R \to M$ — гомоморфизм R-модулей, то для любого $\partial \in \mathrm{Der}(R, R)$ композиция $\varphi \circ \partial \in \mathrm{Der}(R, M)$.

Пусть R — кольцо полиномов $A[T_1, \ldots, T_n]$ с коэффициентами в коммутативном кольце A. Отображение

$$\frac{\partial}{\partial T_j}: F(T_1, \ldots, T_n) = \\ = \sum a_{i_1 \ldots i_n} T_1^{i_1} \ldots T_n^{i_n} \longrightarrow \sum a_{i_1 \ldots i_n} i_j T_1^{i_1} \ldots T_j^{i_j - 1} \ldots T_n^{i_n}$$

является A-дифференцированием кольца R, а R-модуль $\mathrm{Der}_A(R, R)$ — свободным модулем с базисом $\partial/\partial T_1, \ldots, \partial/\partial T_n$.

Для любого элемента a ассоциативного (соответственно лиева) кольца R отображение $x \to ax - xa$ (соответственно $x \to ax$) будет Д. кольца R, наз. **внутренним дифференцированием**. Д., не являющееся внутренним, наз. **внешним**.

Если R — подкольцо кольца R' и $\partial \in \mathrm{Der}(R, R)$, то говорят, что $\bar{\partial} \in \mathrm{Der}(R', R')$ продолжает ∂, когда ограничение $\bar{\partial}$ на R совпадает с ∂. В случае, когда R — коммутативное целостное кольцо, а R' — его поле частных, а также в случаях, когда R' — сепарабельное алгебраич. расширение поля R или R — алгебра Ли над полем k, а R' — ее обертывающая алгебра, существует единственное продолжение любого Д. $\partial: R \to R$ на R'.

Имеется тесная связь между Д. и изоморфизмами колец. Напр., если ∂ — **нильпотентное** Д., т. е. $\partial^n = 0$, и R — алгебра над полем характеристики нуль, то отображение

$$\exp(\partial) = 1 + \partial + \frac{\partial^2}{2!} + \ldots + \frac{\partial^{n-1}}{(n-1)!}$$

является автоморфизмом k-алгебры R. Если R — локальное коммутативное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, то имеет место биекция между множеством Д. $\mathrm{Der}(R, R/\mathfrak{m})$ и множеством автоморфизмов кольца $R/\mathfrak{m}^2$, индуцирующих тождественный автоморфизм поля вычетов $R/\mathfrak{m}$. Д. несепарабельных расширений полей играют роль элементов группы Галуа сепарабельных расширений в теории Галуа таких расширений [4].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Джекобсон Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947; [3] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [4] Mordeson J., Vinograde B., Structure of arbitrary purely inseparable extension fields, B., 1970. *И. В. Долгачев.*

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В СИЛУ СИСТЕМЫ — оператор, к-рый определяется следующим образом. Пусть

$$\dot{x} = f(x) \qquad (*)$$

— *автономная система*, $x \in \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ и $f_j: G \to R$ — гладкие отображения, где G — область в $\mathbb{R}^n$. Пусть дано гладкое отображение $\varphi: G \to R$. **Производная** $\theta_f \varphi$ **в силу системы** (*) функции φ в точке $x^0 \in G$ определяется выражением

$$(\theta_f \varphi) x^0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x^0)}{\partial x_j} f_j(x^0) \equiv \frac{d}{dt} (\varphi(x(t, x^0))) \big|_{t=t^0},$$

где $x(t, x^0)$ — решение системы (*) такое, что $x(t^0, x^0) = x^0$. Свойства оператора θ_f: 1) линейность по φ, 2) $\theta_f(\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 \theta_f \varphi_2 + \varphi_2 \theta_f \varphi_1$. Функция $(\theta_f \varphi)(x)$ совпадает с производной φ по векторному полю f.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970. *М. В. Федорюк.*

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ — нахождение дифференциала или, иначе, главной линейной части отображения. Нахождение дифференциала, т. е. аппроксимация отображения в окрестности нек-рой точки линейными отображениями, является важнейшей операцией дифференциального исчисления. Дифференциальное исчисление наиболее разработано в топологич. линейных пространствах.

Пусть X и Y—линейные топологич. пространства. Пусть отображение f определено на открытом множестве V пространства X и принимает значения в пространстве Y. Если разность $f(x_0+h)-f(x_0)$, где $x_0 \in V$ и $x_0+h \in V$, может быть аппроксимирована линейной относительно приращения h функцией $l_{x_0}: X \to Y$, то f наз. дифференцируемым отображением в точке x_0. При этом аппроксимирующая линейная функция l_{x_0} наз. производной или дифференциалом отображения в точке x_0 и обозначается символом $f'(x_0)$ или $df(x_0)$. Отображения, имеющие в данной точке одинаковые производные, наз. касательными отображениями друг к другу в этой точке. Значение аппроксимирующей функции на элементе $h \in X$ (обозначаемое символом $f'(x_0)h$ или $d_hf(x_0)$) наз. дифференциалом отображения f в точке x_0 при приращении h.

В зависимости от того, что понимается под аппроксимацией приращения $f(x_0+h)-f(x_0)$ линейным по h выражением, приходят к различным понятиям дифференцируемости и производной. Все важнейшие существующие определения см. в [1], [2].

Пусть F—совокупность всех отображений из X в Y и τ — нек-рая топология или псевдотопология в F. Отображение $r \in F$ является малым в нуле, если кривая

$$r_t : r(tx)/t,$$

понимаемая как отображение

$$t \to [x \to \frac{r(tx)}{t}]$$

прямой $-\infty < t < \infty$ в F, непрерывна в нуле в псевдотопологии τ. Далее, отображение $f \in F$ дифференцируемо в точке x_0, если существует такое линейное (непрерывное) отображение l_{x_0}, что отображение

$$r : h \to f(x_0+h)-f(x_0)-l_{x_0}(h)$$

является малым в нуле. В зависимости от выбора τ в F получаются различные определения производных. Напр., в случае, если в качестве топологии τ выбирается топология поточечной сходимости, получается дифференцируемость по Гато (см. *Гато производная*). В случае, если X и Y — банаховы пространства, а топология в F есть топология равномерной сходимости на ограниченных множествах в X, приходят к дифференцируемости по Фреше (см. *Фреше производная*).

Если $X=R^n$, а $Y=R^m$, то производная $f'(x_0)$ дифференцируемого отображения $f(x)=(f_1(x), \ldots, f_m(x))$, где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, задается *Якоби матрицей* $\|\partial f_i(x_0)/\partial x_j\|$ и является непрерывным линейным отображением из R^n в R^m.

Производные отображений обладают многими свойствами производных функций одного переменного. Напр., для них в самых широких предположениях имеет место свойство линейности:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0),$$

$$(\alpha f)'(x_0)=\alpha f'(x_0);$$

во многих случаях для них верна формула

$$(f \circ g)'(x_0)=f'(g(x_0)) \circ g'(x_0)$$

дифференцирования сложной функции; для отображений в локально выпуклые пространства справедливо обобщение теоремы Лагранжа о среднем значении.

Понятие дифференцируемого отображения распространяется на случай, когда X и Y — гладкие дифференцируемые многообразия, как конечномерные, так и бесконечномерные [4], [5], [6]. Дифференцируемые отображения бесконечномерных пространств и их производные были определены впервые В. Вольтерра (V. Volterra, 1887), М. Фреше (M. Frechet, 1911), Р. Гато (R. Gateau, 1913). Подробнее об истории развития понятия производной в многомерных пространствах см. [2].

Лит.: [1] Фрёлихер А., Бухер В., Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы, пер. с англ., М., 1970; [2] Авербух В. И., Смолянов О. Г., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 6, с. 201—60; 1968, т. 23, в. 4, с. 67—116; [3] Дьедонне Ж., Основы современного анализа, пер. с англ., М., 1964; [4] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [5] Бурбаки Н., Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [6] Спивак М., Математический анализ на многообразиях, пер. с англ., М., 1968.

О. Г. Смолянов, В. И. Соболев, В. М. Тихомиров.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПО СЕТИ — специальное понятие дифференцирования функций множеств $\psi(E)$. Сеть N — совокупность разбиений $\{A_j^i\}$ основного пространства X с мерой μ, при этом

$$\bigcup_j A_j^i = X, \quad A_{j_1}^i \cap A_{j_2}^i = \varnothing,$$
$$j_1 \neq j_2, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

и для каждого $A_{j_1}^{i+1}$ найдется содержащее его множество $A_{j_2}^i$. Все A_j^i измеримы и их совокупность в определенном смысле (см. [1]) аппроксимирует все измеримые множества. Множества A_j^i при фиксированном i наз. множествами i-го ранга. Для каждой точки x_0 и любого n имеется одно и только одно множество $A_n(x_0)$ n-го ранга, содержащее точку x_0.

Производной функции $\psi(E)$ по данной сети N в точке x_0 наз. выражение

$$D_N(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\psi[A_n(x_0)]}{\mu[A_n(x_0)]},$$

если этот предел существует. Можно также определить понятие производных чисел по сети N.

Простейшим примером Д. по с. служит дифференцирование приращения функции одного действительного переменного по двоично-рациональным интервалам вида $\left(\frac{j}{2^l}, \frac{j+1}{2^l}\right]$.

Производная по сети для каждой счетно аддитивной функции $\psi(E)$ существует почти всюду и совпадает с плотностью абсолютно непрерывной составляющей функции $\psi(E)$. В n-мерном пространстве обычно рассматривается Д. по с. полуоткрытых сегментов, диаметр к-рых стремится к нулю с ростом ранга (см. [2]).

Понятие сети и дифференцирования по ней может быть обобщено на случай абстрактных пространств без меры (см. [3]).

Лит.: [1] Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л., Интеграл, мера и производная, 2 изд., М., 1967; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Kenyon H., Morse A. P., Web derivatives, N. Y., 1973 («Mem. Amer. Math. Soc.», № 132).

В. А. Скворцов.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЕ — нахождение производной функции численными методами. Д. ч. используется в случаях, когда методы дифференциального исчисления неприменимы (функция задана таблично), или их применение вызывает значительные трудности (функция имеет сложное аналитическое выражение).

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $u = u(x)$ и заданы узловые точки x_i, $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Совокупность точек $(x_i, u_i = u(x_i))$, $i = 1, \ldots, n$, наз. таблицей. Результатом Д. ч. таблицы является функция $u_n^k(x)$, в каком-либо смысле приближающая k-ю производную $\frac{d^k u(x)}{dx^k}$ функции на нек-ром множестве X_n^k точек x. Применение Д. ч. целесообразно, когда получение функции $u_n^k(x)$ для каждого $x \in X_n^k$ требует незначительной затраты вычислительных средств. Обычно используются линейные методы Д. ч., где результат Д. ч. записывается в виде

$$u_n^k(x) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} u_i a_i^k(x), \tag{1}$$

$a_i^k(x)$ — функции, определенные на X_n^k. Наиболее распространенный метод получения формул (1) состоит в следующем: строят функцию

$$u_n(x) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} u_i a_i(x),$$

интерполирующую $u(x)$, и полагают

$$u_n^k(x) \equiv \frac{d^k u_n(x)}{dx^k} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{d^k a_i(x)}{dx^k}.$$

Точность алгоритмов, основанных на интерполяционных формулах Лагранжа, Ньютона и др., существенным образом определяется выбором способа интерполяции и может быть иногда весьма низкой даже для достаточно гладких функций $u = u(x)$ и при большом числе узловых точек (см. [1]). От этого недостатка часто свободны алгоритмы Д. ч., использующие сплайн-интерполяцию (см. [2]). Если требуется вычисление приближенных значений производной только в узловых точках x_i, то формула (1) принимает вид

$$u_n^k(x_j) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} u_i a_{ij}^k \tag{2}$$

и $u_n^k(x_j)$ полностью определяется заданием для данного k матрицы коэффициентов a_{ij}^k. Формулы типа (2) наз. разностными формулами Д. ч. Коэффициенты a_{ij}^k этих формул определяют из условия наивысшего порядка малости по $h_n = \max\limits_{ij} |x_{i+1} - x_i|$ разности

$$\frac{d^k u(x_j)}{dx^k} - \sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij}^k = \xi_j^n.$$

Формулы (2), как правило, весьма просты и удобны на практике. Напр., при $h = h_n = (x_2 - x_1) = (x_3 - x_2) = \ldots = (x_n - x_{n-1})$ они имеют вид:

$$\frac{du(x_j)}{dx} = \frac{u_{j+1} - u_j}{h} + O(h_n) = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} + O(h_n),$$

$$\frac{du(x_j)}{dx} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + O(h^2),$$

$$\frac{d^2 u(x_j)}{dx^2} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + O(h^2).$$

Алгоритмы Д. ч. часто применяются к таким таблицам, в к-рых значения $u(x_i)$ заданы (или получены) неточно. В этом случае требуется их предварительное сглаживание, так как непосредственное применение Д. ч. может привести к большим погрешностям в результатах (см. [3]).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972; [3] Морозов В. А., в кн.: Вычислительные методы и программирование, в. 14, М., 1970, с. 46—62.

В. А. Морозов.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ — функция, имеющая *дифференциал.*

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ МНОГООБРАЗИЕ — локально евклидово пространство, наделенное дифференциальной структурой.

Пусть X — хаусдорфово топологич. пространство. Если для каждой точки $x \in X$ найдется ее окрестность U, гомеоморфная открытому множеству пространства $\mathbb{R}^n$, то X наз. **локально евклидовым пространством**, или **топологическим многообразием** размерности n. Пара (U, φ), где φ — указанный гомеоморфизм, называется **локальной картой** X в точке x. Таким образом, каждой точке соответствует набор n действительных чисел $(x^1, \ldots, x^n)$, называемых **координатами** x в карте (U, φ).

Семейство карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\alpha \in A$, наз. n-мерным C^k-**атласом** $(0 \leqslant k \leqslant \infty, a)$ многообразия X, если: а) совокупность всех U_α покрывает X, $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$; б) для любых α, $\beta \in A$ таких, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, отображение

$$\varphi_\beta^\alpha = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta)$$

принадлежит *дифференцируемости классу* C^k; φ_β^α является дифференцируемым отображением с отличным от нуля якобианом и наз. преобразованием координат точки x из карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ в карту (U_β, φ_β).

Два C^k-атласа наз. **эквивалентными**, если их объединение снова является C^k-атласом. Совокупность C^k-атласов разбивается на классы эквивалентности, к-рые наз. C^k-**структурами**, при $1 \leqslant k \leqslant \infty$ — **дифференциальными** (или **гладкими**) **структурами**, при $k = a$ — **аналитическими структурами**. Топологич. многообразие X, наделенное C^k-структурой, называется C^k-**многообразием**, или **дифференцируемым многообразием класса** C^k.

Понятие дифференциальной структуры можно ввести для произвольного множества X, заменив гомеоморфизмы φ_α биективными отображениями на открытые множества $\mathbb{R}^n$; при этом топология C^k-многообразия описывается как топология объединения, построенная по любому атласу соответствующей структуры. В этом случае n-мерные многообразия обладают очевидной n-мерной C^0-структурой.

Задачи аналитич. и алгебраич. геометрии приводят к необходимости рассматривать в определении дифференциальной структуры вместо пространства $\mathbb{R}^n$ более общие пространства $\mathbb{C}^n$ или даже K^n, где K — полное недискретное нормированное поле. Так, в случае $K = \mathbb{C}$ соответствующая C^k-структура, $k \geqslant 1$, непременно оказывается C^a-структурой, она наз. **комплексно аналитической**, или просто **комплексной**, а соответствующее Д. м. — **комплексным многообразием**. При этом на любом таком многообразии есть и естественная действительная C^a-структура.

На любом C^a-многообразии есть согласованная с ней C^∞-структура, и на C^k-многообразии, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, — C^r-структура, если $0 \leqslant r \leqslant k$. Обратно, любое паракомпактное C^r-многообразие, $r \geqslant 1$, можно наделить C^a-структурой, совместимой с заданной, причем эта структура (с точностью до изоморфизма, см. ниже) единственна. Может, однако, случиться, что C^0-многообразие нельзя снабдить C^1-структурой (т. е. существуют *несглаживаемые многообразия*), а если это удается, то такая структура неединственна. Например, число $\theta(n)$ C^1-неизоморфных C^∞-структур на n-мерной сфере таково:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\theta(n)$	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1

Пусть $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение C^r-многообразий X, Y; оно наз. C^k-**морфизмом** (или C^k-**отображением**, $k \leqslant r$, или **отображением класса** C^k) Д. м., если для любой пары карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ на X и (V_β, ψ_β) на Y такой, что $f(U_\alpha) \subset V_\beta$, отображение

$$\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \psi_\beta(V_\beta)$$

принадлежит классу C^k. Биективное отображение f такое, что оно и f^{-1} суть C^n-отображения, наз. C^n-изоморфизмом (или диффеоморфизмом) класса C^n. В этом случае X и Y и определяющие их C^r-структуры наз. C^n-изоморфными.

Подпространство Y n-мерного C^k-многообразия X наз. C^k-подмногообразием размерности m в X, если для всякой точки $y \in Y$ существуют ее окрестность $V \subset Y$ и карта (U, φ) C^k-структуры X такие, что $V \subset U$ и φ индуцирует гомеоморфизм V на пересечение $\varphi(U \cap Y)$ с (замкнутым) подпространством $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$; другими словами, существует карта с координатами $x^1, \ldots, x^n$ такая, что $U \cap Y$ определяется соотношениями $x^{m+1} = \ldots = x^n = 0$.

Отображение $f: X \to Y$ наз. C^k-вложением, если $f(X)$ есть C^k-подмногообразие в Y, а $X \to f(X)$ — C^k-диффеоморфизм. Всякое n-мерное C^k-многообразие допускает вложение в $\mathbb{R}^{2n+1}$ и даже в $\mathbb{R}^{2n}$. Более того, множество таких вложений является всюду плотным в пространстве отображений $C^k(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ относительно компактно-открытой топологии. Тем самым, рассмотрение Д. м. как подмногообразий евклидова пространства дает один из способов изложения их теории, на этом пути устанавливаются, напр., указанные выше теоремы о C^a-структурах.

В топологии Д. м., иначе наз. *дифференциальной топологией*,— две основные проблемы. Первая — задача классификации Д. м. Существуют три основных класса Д. м.— замкнутые, компактные многообразия с краем и открытые. Важными инвариантами, различающими Д. м., являются *гомотопический тип* и *касательное расслоение*, в частности *характеристические классы*. С их помощью проведена классификация гладких структур для односвязных многообразий данного гомотопич. типа. С помощью другого инварианта — класса *бордизма* Д. м.— решена обобщенная *Пуанкаре гипотеза*, изучены неподвижные точки при действии группы на многообразии и т. д. При этом потребовалось введение дифференциальных структур на многообразиях с краем и аппарата сглаживания. Наконец, полезными здесь оказываются методы алгебраич. топологии, поскольку, напр., установлена триангулируемость произвольного C'-многообразия.

Вторая — задача классификации отображений Д. м. Прежде всего здесь выделяются классы иммерсий, или погружений, обобщающих вложения; их классификация сведена к гомотопич. задаче в отличие от вложений, полная классификация к-рых не получена (1978) (см. *Топология вложений*), и субмерсий, или расслоений, одного Д. м. в (на) другое. Важную роль, в частности, в вопросах *устойчивости* (стабильности) и в исследовании типичных особенностей отображений играет понятие трансверсальности отображения вдоль подмногообразия. Существование трансверсальных отображений обеспечивается теоремами типа *Сарда теоремы*. Все это, а также задачи дифференциальной динамики, изучающей строение различных групп *диффеоморфизмов*, в частности интегральных траекторий и особых точек векторных полей на Д. м. (динамических систем), и различные отношения эквивалентности: изотопия, топологическая и C^k-сопряженность и т. п.,— диктует необходимость рассмотрения, наряду с конечномерными пространствами $\mathbb{R}^n$, произвольных банаховых (или гильбертовых) пространств и определения соответствующих дифференциальных структур. При этом требуется выполнение разумных в отношении приложений дополнительных условий, напр. Д. м. отделимо тогда и только тогда, когда преобразования координат имеют замкнутый график. Получающиеся наделением такой структурой, вообще говоря, бесконечномерные многообразия, соответственно именуемые **банаховыми** (или **гильбертовыми**) **многообразиями**, типичным примером к-рых служат многообразия отображений конечномерных Д. м., оказываются полезным средством исследования и геометрич. интерпретацией задач аппроксимации отображений (как в указанной выше теореме вложения), анализа *петель пространства* — надлежащей области для построения теории Морса и т. д.

Д. м. являются естественной базой для построения дифференциальной геометрии. Там на Д. м. вводятся дополнительные инфинитезимальные структуры — ориентации, метрика, связность и т. д., и изучаются те свойства, связанные с этими объектами, к-рые инвариантны относительно группы диффеоморфизмов, сохраняющих дополнительную структуру. С другой стороны, использование той или иной структуры позволяет исследовать строение самого Д. м. Простейший пример — выражение характеристич. классов через кривизну Д. м., наделенного линейной связностью.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976; [2] Бурбаки Н., Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [3] де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956; [4] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [5] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [6] Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, пер. с англ., М., 1960; [7] Постников М. М., Введение в теорию Морса, М., 1971; [8] Нарасимхан Р., Анализ на действительных и комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1971; [9] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [10] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977; [11] Брекер Т., Ландер Л., Дифференцируемые ростки и катастрофы, пер. с англ., М., 1977; [12] Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975; [13] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [14] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [15] Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975.
См. также лит. при статье *Дифференциальная топология*.

М. И. Войцеховский.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ КЛАСС, **гладкости класс** C^k, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, a — понятие, характеризующее дифференцируемые отображения (в частности, функции). Класс C^0 состоит из всех непрерывных функций, класс C^k — из функций, имеющих непрерывные производные всех порядков, не превосходящих k (в частности, C^∞ — из функций с непрерывными производными всех порядков), класс C^a — из всех действительных аналитических функций.

М. И. Войцеховский.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ **дифференциальных уравнений** — свойство решений дифференциальных уравнений, состоящее в существовании у решений определенного числа непрерывных производных по независимому переменному t и параметру μ, входящему в уравнение. В теории дифференциальных уравнений вопрос ставится так: какими свойствами должна обладать правая часть уравнения, чтобы решение имело столько-то непрерывных производных по t и μ? Вопрос о Д. р. наиболее систематически исследован для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть имеется уравнение вида (x может быть также и вектором):

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \tag{1}$$

где μ — параметр (тоже, вообще говоря, вектор), и пусть $x(t, \mu)$ — его решение, определяемое начальным условием

$$x\,|_{t=t_0} = x_0. \tag{2}$$

Пусть рассматривается сначала Д. р. по t. В случае непрерывности f по t и x в нек-рой области справедлива теорема существования непрерывного решения задачи (1) — (2), и тогда из тождества, получаемого после подстановки $x(t, \mu)$ в (1), последует также существование непрерывной производной x'_t. Наличие n непрерывных производных f по t и x обеспечивает существование $n+1$ непрерывных производных от решения по t; $x_t^{(n)}$ можно найти (выразить через $x(t, \mu)$), последовательным дифференцированием тождества, получаемого в результате подстановки $x(t, \mu)$ в (1).

В ряде вопросов, напр. для построения асимптотики решения по параметру μ, необходимо исследовать производные по μ от $x(t, \mu)$. Для определенности рассмотрим задачу о существовании производных по μ при $\mu=0$. Когда $f(t, x, \mu)$ непрерывна и обладает непрерывными частными производными по x и μ в нек-рой области, то $\eta_1 = x'_\mu$ существует и определяется из так наз. уравнения в вариациях (линейного относительно η_1), получаемого из (1), если обе части продифференцировать по μ и положить $\mu=0$:

$$\frac{d\eta_1}{dt} = f'_x(t,\ x(t,\ 0),\ 0)\,\eta_1 + f'_\mu(t,\ x(t,\ 0),\ 0), \tag{3}$$

и при помощи начального условия

$$\eta_1 \big|_{t=t_0} = 0 \tag{4}$$

в случае, если x_0 от μ не зависит; если же $x_0 = x_0(\mu)$, то $\eta_1|_{t=t_0} = x_0(0)$.

Производная η_k от $x(t, \mu)$ по μ порядка k (при условии, что f обладает непрерывными частными производными до k-го порядка) определяется из уравнения в вариациях порядка k, к-рое отличается от (3) только неоднородностью, зависящей от t, $x(t, 0)$, $\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$. При наличии $k+1$ непрерывных производных от $x(t, \mu)$ по μ можно воспользоваться формулой Тейлора в качестве асимптотич. формулы для $x(t, \mu)$ по μ:

$$x(t,\ \mu) = x(t,\ 0) + \mu\eta_1(t) + \ldots + \mu^k\eta_k(t) + O(\mu^{k+1}). \tag{5}$$

Это имеет важное значение, так как $x(t, 0)$ и η_i находятся из более простых уравнений, чем (1).

В случае аналитич. зависимости правой части от своих аргументов решение является аналитич. функцией параметра μ (см., напр., [2]).

Вопрос о Д. р. по μ сохраняет смысл также в ряде случаев, когда правая часть не является регулярно зависящей от μ. Один из таких случаев имеет место, когда μ входит множителем при производных:

$$\begin{aligned} \mu\frac{dy}{dt} &= F(y,\ x,\ t), & y\big|_{t=t_0} &= y_0, \\ \frac{dx}{dt} &= f(y,\ x,\ t), & x\big|_{t=t_0} &= x_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Если (6) переписать в виде (1), т. е. разрешить относительно производных, то в правой части при $\mu \to 0$ появляется особенность типа полюса. Оказывается, что и в этом случае при наличии $k+1$ непрерывных производных от правых частей и при нек-рых специальных условиях, так наз. условиях устойчивости, справедливо разложение (5), где η_i — предельные значения производных по μ от решения (6) при $\mu \to 0$, определяемые из уравнений в вариациях, строящихся по тому же правилу: нужно продифференцировать (6) по μ и положить $\mu=0$. Но при этом в отличие от регулярного случая система уравнений в вариациях будет более низкого порядка, чем (6), и начальные значения для η_i, несмотря на то, что y_0, x_0 от μ не зависят, уже не будут нулевыми, а будут равны нек-рым, вообще говоря, отличным от нуля, постоянным, получаемым по определенному правилу [3].

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [2] Тихонов А. Н., «Матем. сб.», 1948, т. 22, № 2, с. 193—204; [3] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., 1973. *А. Б. Васильева.*

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЙ ВЕКТОР в пространстве V представления T группы Ли G — вектор $\xi \in V$, для к-рого отображение

$$g \rightarrow T(g)\xi$$

является бесконечно дифференцируемой (класса C^{∞}) вектор-функцией на G со значениями в V. Для дифференцируемости вектор-функции $f: G \rightarrow V$ необходимо (а в случае локально выпуклого квазиполного пространства V и достаточно), чтобы были дифференцируемы все скалярные функции вида $F \circ f$, где F — линейный непрерывный функционал на V (см. [1]). Теорема Гельфанда — Гординга: если T — непрерывное представление группы Ли G в банаховом пространстве V, то множество V^{∞} дифференцируемых векторов плотно в V. Для однопараметрич. групп эта теорема доказана в [2], на общий случай доказательство перенесено в [3]. Обобщение этого результата на широкий класс представлений в локально выпуклых пространствах получено в [4], см. также [5].

Наличие дифференцируемых векторов в пространстве представления группы Ли позволяет построить представление соответствующей алгебры Ли и тем самым связать теорию представлений групп Ли с теорией представлений алгебр Ли (см. [6] § 10).

Лит.: [1] Grothendieck A., Éspaces vectoriels topologiques, São Paulo, 1954; [2] Гельфанд И. М., «Докл. АН СССР», 1939, т. 25, с. 711—16; [3] Gårding L., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1947, v. 33, p. 331—32; [4] Moore R. T., Measurable, continuos and smooth vectors for semigroups and group representations, Providence, 1968; [5] Желобенко Д. П., «Вестн. МГУ. Сер. матем.», 1965, т. 1, с. 3—10; [6] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978.
А. А. Кириллов.

ДИФФУЗИИ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными 2-го порядка, описывающее процесс диффузии, т. е. процесс выравнивания концентрации в среде с неравномерным распределением вещества. Д. у. имеет вид

$$Lu \equiv c\,\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) = 0, \qquad (1)$$

где c — коэффициент пористости, D — коэффициент диффузии, $u(x, t)$ — концентрация вещества в точке x среды в момент времени t. Вывод Д. у. проводится путем подсчета баланса массы вещества с использованием закона диффузии Нернста. При этом подразумевается, что в рассматриваемой области отсутствуют источники вещества и диффузия во внешнюю среду. Такое Д. у. наз. однородным Д. у. Если в рассматриваемой области имеются источники вещества с объемной плотностью распределения $F(x, t)$, то процесс диффузии описывается неоднородным Д. у. с правой частью $F(x, t)$. Учет распада или размножения вещества со скоростью, пропорциональной наличной концентрации, приводит к члену $\pm\lambda\partial u/\partial x$ в правой части Д. у.

Д. у. есть уравнение параболического типа. Для выделения единственного решения ставятся начальное и краевые условия. Начальное условие для Д. у. состоит в задании концентрации $u_0(x)$ вещества в начальный момент

$$u(x, 0) = u_0(x). \qquad (2)$$

Если при этом вещество заполняет все пространство, то получают задачу Коши (1), (2). Если же диффундирующее вещество заполняет объем V, ограниченный боковой поверхностью S, то, наряду с начальным условием (2), на S задается граничное условие. Основными являются следующие три линейных граничных условия для Д. у.

1) На S задана концентрация $\theta(x, t)$ вещества; тогда

$$u(x, t)=\theta(x, t)$$

есть граничное условие I рода.

2) Задана плотность потока $q(x, t)$ вещества, входящего в V через S; тогда

$$-D \frac{\partial u(x, t)}{\partial n}=q(x, t), \quad x \in S,$$

где n — внутренняя нормаль к поверхности S, есть граничное условие II рода (если S непроницаема, то $q(x, t) \equiv 0$).

3) S полупроницаема и диффузия во внешнюю среду с заданной концентрацией $\theta(x, t)$ через S происходит по линейному закону; тогда

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial n}=-h(u(x, t)-\theta(x, t)), \quad x \in S,$$

есть граничное условие III рода.

Возможны и другие, в том числе и нелинейные граничные условия на S, а также условия, содержащие производные более высокого порядка, чем входящие в Д. у. Являясь частным случаем дифференциального уравнения, описывающего физич. процессы выравнивания, Д. у. аналогично *теплопроводности уравнению*, *Навье — Стокса уравнению* для ламинарного потока несжимаемой жидкости, уравнению чистой электропроводности и т. д.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966. *Л. И. Камынин.*

ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — метод решения кинетич. уравнения переноса нейтронов (или других частиц, квантов). Д. п. основано на представлении плотности потока нейтронов (неизвестной функции координат точки наблюдения, компонент вектора скорости и времени) в виде двух первых членов разложения по сферическим функциям, зависящим от угловых координат вектора скорости нейтронов. В односкоростной стационарной задаче это приводит к *диффузии уравнению*.

Д. п. применимо вдали от источников, границ областей с различными свойствами и дает решения, совпадающие по форме с асимптотич. частью решений уравнения переноса. Об усовершенствованиях Д. п. см. *Диффузионные методы*.

Лит.: [1] Глесстон С., Эдлунд М., Основы теории ядерных реакторов, пер. с англ., М., 1954; [2] Марчук Г. И., Методы расчета ядерных реакторов, М., 1961. *В. А. Чуянов.*

ДИФФУЗИОННЫЕ МЕТОДЫ — методы решения кинетич. уравнения переноса нейтронов (или других частиц), модифицирующие уравнения *диффузионного приближения*. Поскольку диффузионное приближение дает правильную форму асимптотич. решения уравнения переноса (вдали от источников и границ раздела сред с различными свойствами), то его усовершенствования заключаются в правильном выборе констант (напр., коэффициента диффузии) и разумной постановке граничных условий с вакуумом и между областями с различными физич. характеристиками.

Усовершенствованный Д. м. использует в односкоростной задаче трансцендентное уравнение для бесконечной среды,

$$p \frac{\operatorname{Ar\,th} k}{k}=1,$$

чтобы определить коэффициент диффузии

$$D_0=(1-p)/k^2,$$

где p — отношение сечения рассеяния к полному сечению, k — корень характеристического уравнения. На границах сред в экстраполированных точках ставятся граничные условия, полученные из точного решения задачи для двух сред с постоянным полным сечением (равенство логарифмич. производных и скачок асимптотич. плотности).

Другой путь улучшения диффузионного приближения — использование P_2-приближения метода сферич. гармоник (см. *Сферических гармоник метод*). Обычное диффузионное приближение исходит из P_1-приближения метода сферич. гармоник. Переход к P_2-приближению приводит к уравнению диффузии с исправленными параметрами и улучшенными граничными условиями, причем плотность нейтронов на границе терпит разрыв.

Кроме того, возможно применение решения уравнения диффузии для ускорения сходимости последовательных приближений кинетич. уравнения переноса с использованием в следующей итерации приближенного решения кинетич. уравнения для вычисления поправок к коэффициенту диффузии.

Возможно также, в рамках одной задачи, такое сопряжение диффузионного решения с точным решением, при к-ром диффузионное приближение используется вдали от областей, занятых поглотителями, источниками и т. п., а в этих областях решается точное уравнение переноса.

Лит.: [1] Романов Ю. А., в кн.: Исследования критических параметров реакторных систем, М., 1960, с. 3—26; [2] Теория и методы расчета ядерных реакторов, М., 1962; [3] Вычислительные методы в теории переноса, М., 1969. *В. А. Чуянов.*

ДИФФУЗИОННЫЙ ПРОЦЕСС — непрерывный *марковский процесс* $X = X(t)$ с переходной плотностью $p(s, x, t, y)$, удовлетворяющей следующим условиям: существуют функции $a(t, x)$ и $\sigma^2(t, x)$, называемые соответственно коэффициентами сноса и диффузии, такие, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\left.\begin{aligned} &\int_{|y-x|>\varepsilon} p(t, x, t+\Delta t, y)\,dy = o(\Delta t), \\ &\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y-x)\,p(t, x, t+\Delta t, y)\,dy = \\ &\qquad = a(t, x) + o(\Delta t), \\ &\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y-x)^2\,p(t, x, t+\Delta t, y)\,dy = \\ &\qquad = \sigma^2(t, x) + o(\Delta t) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(причем обычно предполагается, что эти предельные соотношения выполняются равномерно по t в каждом конечном интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и по x, $-\infty < x < \infty$). Важнейшим представителем этого класса процессов является процесс броуновского движения, впервые рассмотренный как математич. модель процессов диффузии (отсюда и название «Д. п.»).

Если переходная плотность $p(s, x, t, y)$ непрерывна по s и x вместе со своими производными $\frac{\partial}{\partial x} p(s, x, t, y)$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(s, x, t, y)$, то она является фундаментальным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s} p(s, x, t, y) = -a(s, x)\frac{\partial}{\partial x} p(s, x, t, y) - \\ -\frac{1}{2}\sigma^2(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(s, x, t, y), \tag{2}$$

к-рое наз. обратным уравнением Колмогорова.

В однородном случае, когда коэффициенты сноса $a(t, x) = a(x)$ и диффузии $\sigma^2(t, x) = \sigma^2(x)$ не зависят от времени t, обратное уравнение Колмогорова для соответствующей переходной плотности $p(s, x, t, y) = p(t-s, x, y)$ имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x, y) = a(x) \frac{\partial}{\partial x} p(t, x, y) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t, x, y).$$

Если переходная плотность $p(s, x, t, y)$ имеет непрерывную по t и y производную $\frac{\partial}{\partial t} p(s, x, t, y)$ такую, что функции $\frac{\partial}{\partial y} [a(t, y) p(s, x, t, y)]$ и $\frac{\partial^2}{\partial y^2} [\sigma^2(t, y) p(s, x, t, y)]$ непрерывны по y, то она является фундаментальным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} p(s, x, t, y) = -\frac{\partial}{\partial y} [a(t, y) p(s, x, t, y)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\sigma^2(t, y) p(s, x, t, y)], \quad (3)$$

к-рое наз. **уравнением Фоккера — Планка**, или **прямым уравнением Колмогорова**. Дифференциальные уравнения (2) и (3) для плотности вероятности являются основой аналитич. методов изучения Д. п. Существует и другой, чисто «вероятностный», подход к Д. п., основанный на представлении процесса $X(t)$ как решения **стохастического дифференциального уравнения Ито**

$$dX(t) = a(t, X(t))\, dt + \sigma(t, X(t))\, dY(t),$$

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, X(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X(s))\, dY(s),$$

где $Y(t)$ — стандартный процесс броуновского движения. Грубо говоря, при таком подходе считают $X(t)$ связанным с нек-рым процессом броуновского движения $Y(t)$ таким образом, что при условии $X(t)=x$ за последующее время Δt приращение $\Delta X(t) = X(t+\Delta t) - X(t)$ есть

$$\Delta X(t) \sim a(t, x)\, \Delta t + \sigma(t, x)\, \Delta Y(t).$$

Если понимать это асимптотич. соотношение в том смысле, что

$$\mathsf{E}\{\Delta X(t) - (a(t, x)\, \Delta t + \sigma(t, x)\, \Delta Y(t)) \mid X(t) = x\} = o(\Delta t),$$

$$\mathsf{E}\{\Delta X(t) - (a(t, x)\, \Delta t + \sigma(t, x)\, \Delta Y(t))^2 \mid X(t) = x\} = o(\Delta t),$$

где $o(\Delta t)$ — величины того же типа, что и в равенствах (1), то рассматриваемый процесс $X(t)$ будет диффузионным и в смысле этого определения.

Многомерным Д. п. обычно наз. непрерывный марковский процесс $X(t) = \{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ в n-мерном векторном пространстве E^n, переходная плотность $p(s, x, t, y)$ к-рого удовлетворяет следующим условиям: для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_{|y-x|>\varepsilon} p(t, x, t+\Delta t, y)\, dy = o(\Delta t),$$

$$\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y_k - x_k)\, p(t, x, t+\Delta t, y)\, dy = a_k(t, x)\, \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y_k - x_k)(y_j - x_j)\, p(t, x, t+\Delta t, y)\, dy = 2b_{kj}(t, x)\, \Delta t + o(\Delta t),$$

$$k, j = 1, \ldots, n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Вектор $a = \{a_1(t, x), \ldots, a_n(t, x)\}$ характеризует локальный снос процесса $\xi(t)$, матрица $\sigma^2 = \|2b_{kj}(t, x)\|$, $k, j = 1, \ldots, n$, характеризует среднеквадратичное отклонение случайного процесса $\xi(t)$ от исходного положения x за малый промежуток времени от t до $t+\Delta t$.

При нек-рых дополнительных ограничениях переходная плотность $p(s, x, t, y)$ многомерного Д. п.

удовлетворяет обратному и прямому дифференциальным уравнениям Колмогорова:

$$\frac{\partial p}{\partial s}=-\sum_{k=1}^{n} a_k(s, x)\frac{\partial p}{\partial x_k}-\sum_{k, j=1}^{n} b_{kj}(s, x)\frac{\partial^2 p}{\partial x_k\,\partial x_j},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}[a_k(t, y)\,p]+$$

$$+\sum_{k, j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_k\,\partial y_j}[b_{kj}(t, y)\,p].$$

Многомерный Д. п. $X(t)$ может быть описан также при помощи стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$dX_k(t)=a_k(t, X(t))\,dt+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{kj}(t, X(t))\,dY_j(t),$$

где $Y_1(t), \ldots, Y_n(t)$ — взаимно независимые процессы броуновского движения, а

$$\sigma_j=\{\sigma_{1j}(t, x), \ldots, \sigma_{nj}(t, x)\}, \quad j=1, \ldots, n,$$

суть собственные векторы матрицы $\sigma^2=\|2b_{kj}(t, x)\|$.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, М., 1965; [2] их же, Стохастические дифференциальные уравнения, К., 1968.

Ю. А. Розанов.

ДИХОТОМИЯ — свойство линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t)\,x, \quad x\in E^n, \quad t\geqslant 0,$$

с ограниченными непрерывными коэффициентами обладать такими положительными постоянными K, L, α, β, что существует разложение $E^n=E^m\dotplus E^{n-m}$, для к-рого

$$x(0)\in E^m\Rightarrow\|x(t)\|\leqslant K\|x(\tau)\|\exp[-\alpha(t-\tau)],$$
$$t\geqslant\tau\geqslant 0;$$

$$x(0)\in E^{n-m}\Rightarrow\|x(t)\|\leqslant L\|x(\tau)\|\exp[-\beta(\tau-t)],$$
$$\tau\geqslant t\geqslant 0$$

(экспоненциальная Д.; при $\alpha=\beta=0$ — обыкновенная Д.). Наличие экспоненциальной Д. эквивалентно тому, что неоднородная система

$$\dot{x}=A(t)\,x+f(t)$$

при любой ограниченной непрерывной функции $f(t)$, $t\geqslant 0$, имеет хотя бы одно ограниченное на $[0, \infty)$ решение (см. [1]). Теория Д. (см. [2]) перенесена на уравнения в банаховых пространствах, используется также для изучения потоков и каскадов на гладких многообразиях [4].

Лит.: [1] Perron O., «Math. Z.», 1930, Bd 32, № 5, S. 703—728; [2] Массера Х.-Л., Шеффер Х.-Х., Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства, пер. с англ., М., 1970; [3] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [4] Аносов Д. В., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1967, т. 90.

Р. А. Прохорова.

ДИЭДРА ГРУППА, диэдральная группа,— группа, изоморфная группе вращений диэдра, т. е. правильной удвоенной пирамиды. Если в основании пирамиды лежит n-угольник, то соответствующая Д. г. имеет порядок $2n$ и порождается двумя вращениями φ и ψ порядков n и 2, соответственно, с определяющим отношением $\varphi\psi\varphi\psi=1$. Иногда под Д. г. подразумевают только Д. г. порядка 8. Два различных элемента порядка 2 в любой конечной группе порождают Д. г.

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

В. Д. Мазуров.

ДЛИНА — числовая характеристика протяженности линий в метрич. пространстве. Д. отрезка прямой — расстояние между его концами, измеренное каким-либо отрезком, принятым за единицу Д. Длина ломаной — сумма Д. ее звеньев. Д. простой дуги — точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в эту дугу. Всякая непрерывная кривая имеет Д.— конечную или бесконечную. Если ее Д. конечна, то кривая наз. спрямляемой. Д. плоской кривой, заданной в прямоугольных координатах уравнением $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ ($f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$), выражается интегралом

$$s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Если кривая задана в параметрич. форме

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$

то Д. кривой равна

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

Д. спрямляемой кривой не зависит от параметризации. Д. пространственной кривой, заданной в параметрич. форме $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, выражается формулой

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt;$$

в случае n-мерного пространства

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n}[x_i'(t)]^2}\,dt.$$

Пусть γ — непрерывно дифференцируемая кривая, заданная функциями $u=u(t)$, $v=v(t)$, на непрерывно дифференцируемой поверхности $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$. Тогда длина дуги кривой от точки, соответствующей значению параметра $t=t_0$, равна

$$s(t, t_0)=\int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt=\int_{\gamma(P_0,\,P)} |d\boldsymbol{r}(u, v)|=\int_{t_0}^{t} \sqrt{I},$$

где I — первая квадратичная форма поверхности. Д. непрерывно дифференцируемой кривой, заданной функциями $x^i=x^i(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, в римановом пространстве с метрич. тензором g_{ik}, равна

$$s=\int_{t_1}^{t_2} ds=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}}\,dt.$$

А. Б. Иванов.

ДЛИНА частично упорядоченного множества — наибольшая из длин *цепей* этого множества. Существуют бесконечные множества конечной длины.

Т. С. Фофанова.

ДЛИНЫ И ПЛОЩАДИ ПРИНЦИП — принцип, выражающий зависимость между длинами кривых, принадлежащих нек-рому специальному семейству, и площадью, покрываемой этим семейством кривых.

Пусть $w=f(z)$ — регулярная в открытом множестве G функция. Пусть $n(w)$ — число корней уравнения $f(z)=w$, лежащих в G; $l(\rho)$ — суммарная длина кривых в G, на к-рых $|f(z)|=\rho$; A — площадь G и

$$p(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n\left(\rho e^{i\theta}\right)d\theta,\quad \rho>0;$$

тогда Д. и п. п. выражается неравенством (см. [2]):

$$\int_0^{\infty}\frac{l(\rho)^2\,d\rho}{\rho p(\rho)}\leqslant 2\pi A.$$

Д. и п. п. получил широкое применение в теории функций комплексного переменного (см. [1] — [4]).

Д. и п. п. используется, напр., при изучении свойств функций, регулярных в круге $|z|<1$. В частности, с помощью Д. и п. п. доказывается следующая теорема (см. [2]): если функция $w=f(z)=a_0+a_1z+\ldots$, $\mu_q=\max\limits_{0\leqslant\nu\leqslant q}|a_\nu|$, регулярна в $|z|<1$ и имеет в нем не более

q нулей, из которых не более h лежит в $|z|<{}^1/_2$, то

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho p(\rho)} < 2\log\frac{1}{1-r} + A(q),$$

где

$$R_1 = (h+2)\, 2^{h-1}\mu_h,\quad R_2 = \max_{|z|=r} |f(z)|,\quad 0<r<1,$$

$A(q)$ — константа, зависящая от q.

Д. и п. п. и различные его обобщения (напр., длины и объема принцип) применяются и в случае n-мерных пространств к квазиконформным отображениям, а также к отображениям с ограниченным *Дирихле интегралом* (см. [4] — [7]).

При выводе Д. и п. п. существенным образом используется неравенство Буняковского. Дальнейшее рассмотрение связи между длинами кривых и площадью, покрываемой ими, привело к важному методу изучения однолистных конформных и квазиконформных отображений — *экстремальной метрики методу* (см., напр., [8]). В конце 20-х — начале 30-х гг. метод экстремальной метрики в менее совершенной форме (метод полос) успешно применялся для исследования свойств указанных выше отображений односвязных и многосвязных областей.

Лит.: [1] Ahlfors L. W., «Acta Soc. scient. fennica», 1930, A. 1, № 9; [2] Хейман В. К., Многолистные функции, пер. с англ., М., 1960; [3] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [4] Суворов Г. Д., Семейства плоских топологических отображений, Новосиб., 1965; [5] Крейнес М. А., «Матем. сб.», 1941, т. 9, № 3, с. 713—19; [6] Овчинников И. С., «Метрические вопросы теории функций и отображений», 1971, в.3, с. 98—115; [7] Lelong-Ferrand J., Représentation conforme et transformations à intégral de Dirichlet bornées, P., 1955; [8] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962. *И. П. Митюк.*

ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ — см. *Доверительное оценивание.*

ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ГРАНИЦА — см. *Доверительное оценивание.*

ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО — см. *Доверительное оценивание.*

ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ — метод математич. статистики, предназначенный для построения множества приближенных значений неизвестных параметров вероятностных распределений.

Пусть X — случайный вектор, принимающий значения на множестве $\mathscr{X}$ в евклидовом пространстве, причем распределение вероятностей этого вектора принадлежит параметрич. семейству распределений, заданному плотностями $p(x|\theta)$, $x\in\mathscr{X}$, $\theta\in\Theta$, относительно нек-рой меры $\mu(x)$. Предполагается, что истинное значение параметрич. точки θ, соответствующей результату наблюдений X, неизвестно. Суть Д. о. заключается в построении такого множества $C(X)$, зависящего от X, к-рое содержит значение заданной функции $u(\theta)$, соответствующее неизвестному истинному значению параметрич. точки θ.

Пусть U — множество значений функции $u(\theta)$, $\theta\in\Theta$, и пусть $C(x)$, $x\in\mathscr{X}$,— какая-либо совокупность множеств, принадлежащих U при всех x из $\mathscr{X}$, причем предполагается, что для произвольного элемента $u\in U$ и любого значения $\theta\in\Theta$ определена вероятность события $\{C(X)\ni u\}$. Эта вероятность выражается интегралом

$$P_C(u,\theta) = \int_{C(x)\,\ni\, u} p(x\,|\,\theta)\, d\mu(x),\quad u\in U,\ \theta\in\Theta,$$

и наз. вероятностью накрытия множеством $C(X)$ значения u при заданном значении θ.

Если истинное значение θ неизвестно, то множество $C(X)$ (из совокупности множеств $C(x)$, $x\in\mathscr{X}$), соответствующее результату наблюдений X, наз. доверительным множеством, или *интервальной оценкой*, для неизвестного истинного значения функции $u(\theta)$. В качестве вероятностной характеристики интервальной оценки $C(X)$, построенной по указанному правилу, используется доверительная вероятность $P_C(\theta)$, выражающаяся в терминах вероятности накрытия равенством

$$P_C(\theta) = P_C[u(\theta), \theta], \ \theta \in \Theta.$$

Иными словами, $P_C(\theta)$ — вероятность накрытия множеством $C(X)$ значения заданной функции $u(\theta)$, соответствующего неизвестной истинной параметрич. точке θ.

В тех случаях, когда доверительная вероятность $\mathsf{P}_C(\theta)$ от θ не зависит, интервальную оценку $C(X)$ наз. подобной пространству выборок. Это название обусловлено аналогией формул

$$P_C(\theta) = \mathsf{P}\{C(X) \ni u(\theta) \mid \theta\} = \text{const}$$

и

$$\mathsf{P}\{X \in \mathscr{X} \mid \theta\} = \text{const} = 1.$$

В более общей ситуации $\mathsf{P}_C(\theta)$ зависит от неизвестного θ, и поэтому в практич. работе принято характеризовать качество интервальной оценки коэффициентом доверия

$$P_C = \inf P_C(\theta),$$

где нижняя грань вычисляется на множестве Θ (иногда коэффициент доверия наз. доверительным уровнем).

Оптимизация Д. о. определяется теми требованиями, к-рые предъявляются к интервальным оценкам. Напр., если цель заключается в построении доверительных множеств, подобных пространству выборок и имеющих заданный коэффициент доверия ω $(0{,}5 \leqslant \omega < 1)$, то первое требование выражается тождеством

$$P_C[u(\theta), \theta] \equiv \omega, \ \theta \in \Theta.$$

При этом естественно искать такие интервальные оценки, к-рые накрывают истинное значение $u(\theta)$ с вероятностью, не меньшей вероятности накрытия любого произвольного значения $u \in U$. Иными словами, второе требование, называемое требованием несмещенности, выражается неравенством

$$P_C(u, \theta) \leqslant \omega, \ u \in U, \ \theta \in \Theta.$$

В этих условиях «наилучшей» разумно считать ту интервальную оценку C, к-рая с меньшей вероятностью накрывает любое значение u, отличное от истинного $u(\theta)$. Отсюда возникает третье требование «наибольшей селективности»: для всякого другого доверительного множества C', отличного от C и удовлетворяющего условию

$$P_{C'}[u(\theta), \theta] \geqslant \omega, \ \theta \in \Theta,$$

должно выполняться неравенство

$$P_C(u, \theta) \leqslant P_{C'}(u, \theta), \ u \in U, \ \theta \in \Theta.$$

Задача отыскания интервальных оценок C, удовлетворяющих указанным трем требованиям, эквивалентна задаче построения несмещенных, наиболее мощных статистич. критериев, подобных пространству выборок и имеющих уровень значимости $1 - \omega$. Вопросы существования решения такой задачи и его конструктивного описания составляют основу общей теории статистич. проверки гипотез.

Наиболее часто применяется Д. о. в ситуации, когда $u(\theta)$ — скалярная функция. Пусть $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 2$, — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же *нормальному распределению* с неизвестными параметрами $\mathsf{E}X_i = \theta_1$ и $\mathsf{D}X_i = \theta_2$, причем требуется построить интервальную оценку для $u(\theta)=\theta_1$. Пусть

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ и } s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

Поскольку случайная величина $T=\sqrt{n}(\overline{X}-\theta_1)/s$ подчиняется *Стьюдента распределению* с $n-1$ степенями свободы и это распределение не зависит от неизвестных параметров θ_1 и θ_2 ($|\theta_1|<\infty$, $\theta_2>0$), то при любом положительном t вероятность события

$$\left\{\overline{X}-ts/\sqrt{n}<\theta_1<\overline{X}+ts/\sqrt{n}\right\}$$

зависит лишь от t. Если указанный интервал принять за интервальную оценку C для θ_1, то ему будет соответствовать доверительная вероятность

$$P_C(\theta_1, \theta_2)=\mathsf{P}\{|T|<t\},$$

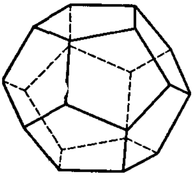
не зависящая от $\theta=(\theta_1, \theta_2)$. Такую интервальную оценку наз. доверительным интервалом, а ее концевые точки — доверительными границами, или доверительными пределами, причем в данном случае доверительный интервал представляет собой интервальную оценку, подобную пространству выборок. В приведенном примере интервальная оценка является несмещенной и наиболее селективной.

Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] Шметтерер Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976; [3] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [4] Большев Л. Н., «Теория вероят. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 187—92. *Ю. В. Линник, Н. М. Халфина.*

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ — см. *Доверительное оценивание.*

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ — см. *Доверительное оценивание.*

ДОДЕКАЭДР — один из пяти типов правильных многогранников. Д. имеет 12 граней (пятиугольных), 30 ребер, 20 вершин (в каждой вершине сходятся 3 ребра). Если a — длина ребра Д., то его объем



$$v=\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})\approx 7{,}6631a^3.$$

БСЭ-3.

ДОДЕКАЭДРА ПРОСТРАНСТВО — первый пример *Пуанкаре пространства.* Построен А. Пуанкаре (H. Poincaré) в 1904. Получается отождествлением противоположных граней додекаэдра после поворота их друг относительно друга на угол $\pi/5$. Д. п. есть многообразие рода 2, имеющее *Зейферта расслоение,* и представляет собой единственное известное пространство Пуанкаре с конечной фундаментальной группой. Д. п. является пространством орбит свободного действия бинарной группы икосаэдра на трехмерной сфере.

Лит.: [1] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.—Л., 1938. *А. В. Чернавский.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРИЯ — раздел математич. логики, посвященный исследованию понятия доказательства в математике, приложениям этого понятия в различных разделах науки и техники.

Доказательство в широком смысле этого слова есть способ обоснования истинности того или иного суждения. Степень убедительности доказательства решающим образом зависит от средств, используемых для обоснования истинности. Напр., в точных науках выработаны определенные условия, при выполнении к-рых сообщаемый экспериментальный факт может считаться доказанным (необходима устойчивая воспроизводимость эксперимента, отчетливое описание методики эксперимента, его точности, применяемого оборудования и т. п.). В математике, для к-рой характерен *аксиоматический метод* исследования, средства доказательства достаточно четко определились уже на раннем этапе ее развития. Доказательство фигурирует в математике как последовательное выведение одних суждений из других, причем способы этого выведения допускают точный анализ.

Истоки Д. т. можно проследить со времен античности (дедуктивный метод рассуждения в элементарной геометрии, силлогистика Аристотеля и др.), но современный этап ее развития начинается в конце 19 в.— начале 20 в. под влиянием работ Г. Фреге (G. Frege), Б. Рассела (B. Russell) и А. Уайтхеда (A. Whitehead), Э. Цермело (E. Zermelo) и, в особенности, Д. Гильберта (D. Hilbert). В это время в теории множеств Г. Кантора (G. Cantor) были обнаружены *антиномии*, поставившие под сомнение достоверность даже простейших рассуждений с произвольными множествами. Л. Брауэр (L. Brouwer) подверг весьма серьезной критике нек-рые классич. способы доказательства существования объектов в математике и предложил радикальную перестройку математики в духе *интуиционизма*. Вопросы оснований математики приобрели особую актуальность. Д. Гильберт предложил выделить часть практич. математики, так наз. ф и н и т н у ю м а т е м а т и к у, не вызывающую возражений как с точки зрения появления антиномий, так и с точки зрения интуиционистской критики. В рамках финитной математики к рассмотрению допускаются лишь *конструктивные объекты*, напр. натуральные числа, и лишь такие способы рассуждений, к-рые согласуются с *абстракцией потенциальной осуществимости* и не привлекают *абстракции актуальной бесконечности*. В частности, ограничивается использование закона исключенного третьего. В финитной математике никаких антиномий не обнаружено и нет оснований их ожидать. С философской точки зрения способы рассуждения в финитной математике значительно более удовлетворительным образом отражают конструктивные процессы реальной действительности, чем в общей теоретико-множественной математике. Идея Д. Гильберта состояла в том, чтобы обосновать все основные разделы классич. математики, оставаясь на твердой почве финитной математики. С этой целью Д. Гильберт предложил м е т о д ф о р м а л и з а ц и и, являющийся одним из основных методов Д. т.

В общих чертах метод формализации состоит в следующем: формулируется логико-математич. язык (предметный язык) L, в терминах к-рого суждения данной математич. теории T записываются в виде формул. Далее описывается нек-рый класс A формул L, называемых аксиомами теории, и описываются *вывода правила*, с помощью к-рых можно переходить от одних формул к другим. Для аксиом и правил вывода употребляется общий термин — п о с т у л а т ы. Заданием постулатов определяется формальная теория (в другой терминологии — *исчисление*) T^*. Формулы, получаемые из аксиом формальной теории по ее правилам вывода, наз. в ы в о д и м ы м и, или д о к а з у е м ы м и, в данной теории. Сам процесс вывода может быть при этом оформлен в виде дерева вывода (см. *Вывода дерево*). Исчисление T^* представляет особенный интерес по отношению к содержательной математич. теории T, если аксиомы T^* являются записями истинных суждений T, а правила вывода ведут от истинных суждений к истинным. В этом случае T^* можно рассматривать как уточненный фрагмент теории T, а понятие вывода в T^* можно рассматривать как уточнение неформальной идеи доказательства в теории T, по крайней мере в рамках, формализованных исчислением T^*. Таким образом, при построении исчисления T^* нужно предварительно уметь определять, какие постулаты считать пригодными с точки зрения теории T. Это, однако, не означает, что необходимо уже иметь развитую семантику теории T: здесь можно использовать практич. навыки, включать в число постулатов наиболее часто употребляющиеся или наиболее интересные в теоретич. отношении факты и т. п. Точный характер описания выводов исчисления T^* позволяет применять для их исследования математич. методы и таким образом судить о содержании и свойствах теории T.

В Д. т. выработаны стандартные приемы формализации содержательных математич. теорий. Аксиомы и правила вывода исчислений обычно делятся на логические и прикладные. Логич. постулаты служат для получения высказываний, истинных независимо от формализуемой теории уже в силу своей формы. Такие постулаты определяют логику формальной теории и оформляются в виде *высказываний исчисления* или *предикатов исчисления* (см. также *Логические исчисления*, *Математическая логика*, *Интуиционизм*, *Конструктивная логика*, *Строгой импликации исчисление*). Прикладные постулаты служат для описания истин, относящихся к особенностям данной математич. теории. Напр., в аксиоматич. теории множеств — это *выбора аксиома*, в элементарной арифметике — схема аксиом индукции (см. *Математическая индукция*), в интуиционистском анализе — *бар-индукция*.

Гильбертову программу обоснования математики можно описать следующим образом. Можно надеяться, что всякую, даже весьма сложную и абстрактную математич. теорию T (такую, напр., как теория множеств), можно в ее существенных частях формализовать в виде исчисления T^*, причем формулировка самого исчисления требует лишь финитной математики. Далее, анализируя выводы T^* чисто финитными средствами, можно пытаться установить непротиворечивость T^* и, следовательно, установить отсутствие антиномий в T, по крайней мере в той ее части, к-рая отражена в постулатах T^*. Для обычных методов формализации отсюда непосредственно следует, что нек-рые простейшие суждения (в терминологии Гильберта — реальные суждения) выводимы в T^*, только если они истинны в финитном смысле. Первоначально надежда состояла в том, что в виде исчисления, формулируемого финитным образом, удастся описать практически всю классич. математику, а затем финитно же доказать ее непротиворечивость. Невыполнимость этой программы в целом была установлена в 1931 К. Гёделем (K. Gödel), к-рый показал, что при нек-рых естественных предположениях непротиворечивость исчисления T^* невозможно доказать даже мощными средствами, формализуемыми в T^*. Тем не менее исследование различных формальных исчислений остается важнейшим методом в основаниях математики. Во-первых, представляет интерес построение исчислений, отражающих существенные разделы современной математики и построенных в расчете на непротиворечивость, даже если непротиворечивость таких исчислений и нельзя доказать в настоящее время убедительным для всех математиков способом. Примером такого рода исчисления является система теории множеств Цермело — Френкеля, в к-рой могут быть выведены практически все результаты, полученные в современной теоретико-множественной математике. Доказательства невыводимости в этой теории ряда фундаментальных гипотез, полученные в предположении непротиворечивости теории (см. *Аксиоматическая теория множеств*, *Вынуждения метод*), свидетельствуют о независимости этих гипотез от применяемых в математике теоретико-множественных принципов. Это, в свою очередь, можно рассматривать как подтверждение той точки зрения, что существующих представлений недостаточно для доказательства или опровержения рассматриваемых гипотез. Именно в этом смысле П. Коэн (P. Cohen) установил независимость континуум-гипотезы Г. Кантора.

Во-вторых, широко изучается класс исчислений, непротиворечивость к-рых можно установить финитными средствами. Так, К. Гёдель в 1932 предложил погружающую операцию, перерабатывающую формулы, доказуемые в классическом арифметич. исчислении, в формулы, доказуемые в интуиционистском арифметич. исчислении. Если последнее считать непротиворечивым (напр., в силу его естественной финитной интерпретации), то отсюда следует непротиворечивость и классического арифметич. исчисления.

Наконец, перспективным является исследование средств более широких, чем традиционный финитизм Д. Гильберта, но в то же время достаточно удовлетворительных с нек-рой точки зрения. Так, оставаясь в рамках потенциальной осуществимости, можно использовать так наз. общие индуктивные определения. Это позволяет применять полуформальные теории, в к-рых некоторые из правил вывода имеют бесконечное (но конструктивно порожденное) множество посылок, и перенести в финитную математику многие семантические результаты. К этому направлению относятся результаты П. С. Новикова (1943), установившего непротиворечивость классич. арифметики с использованием эффективных функционалов конечного типа, К. Спектора (C. Spector, 1961), доказавшего непротиворечивость классич. анализа с помощью расширения естественных интуиционистских средств доказательства на интуиционистские эффективные функционалы конечного типа, А. А. Маркова (1971) по конструктивной семантике, использующие общие индуктивные определения. Кроме того, ряд важных проблем, относящихся к исчислениям, можно рассматривать и вне связи с основаниями математики. Сюда относятся вопросы о полноте и разрешимости формальных теорий, вопрос о независимости нек-рых утверждений от данной формальной теории и др. В такой ситуации нет необходимости ограничиваться в рассуждениях определенными средствами и можно развивать Д. т. как обычную математич. теорию, пользуясь любыми математич. средствами доказательства, убедительными для исследователя.

Инструментом для исследования исчислений, а также часто и мотивировкой для самого введения ряда исчислений служит точно определенная *семантика* для формул рассматриваемого языка, т. е. точное определение смысла суждений, выразимых в данном языке. Напр., для классич. исчисления высказываний такая семантика хорошо известна: в этом исчислении выводимы тавтологии и только они. В общем случае, чтобы показать, что нек-рая формула A не выводится в рассматриваемом исчислении T^*, достаточно построить семантику для формул языка этой теории таким образом, чтобы все формулы, выводимые в T^*, были истинны в этой семантике, в то время как A не истинна. Семантика может быть классической, интуиционистской или иного типа в зависимости от того, с какими логич. постулатами она согласована. В исследовании классич. исчислений с успехом применяются неклассич. семантики, напр. отношение вынуждения П. Коэна при естественном уточнении задает интуиционистскую семантику. В другом известном варианте теории П. Коэна используются многозначные семантики — модели с истинностными значениями в полной булевой алгебре. С другой стороны, семантики типа *Крипке моделей*, определенные классическим теоретико-множественным способом, позволяют выяснить многие свойства модальных и нестандартных логик (включая интуиционистскую логику).

Алгебраич. методы получили широкое развитие в Д. т. в виде *моделей теории*. Алгебраич. система, сопоставляющая каждому начальному символу языка нек-рый алгебраич. объект, естественно определяет нек-рую классич. семантику языка. Алгебраич. система наз. **моделью формальной теории** T^*, если все формулы, выводимые в T^*, истинны в семантике, порожденной алгебраич. системой. К. Гёдель в 1931 показал, что всякое непротиворечивое исчисление (с классич. логикой) имеет модель. Несколько позже А. И. Мальцев независимо от результата К. Гёделя установил, что если каждый конечный фрагмент исчисления имеет модель, то и все исчисление в целом имеет модель (так наз. **теорема о компактности логики первого порядка**). Эти две теоремы легли в основу целого направления в математич. логике.

Рассмотрение нестандартных моделей арифметики позволило установить неаксиоматизируемость понятия натурального ряда в рамках теорий 1-го порядка, доказать независимость принципа математич. индукции от других аксиом арифметич. исчисления. Относительность понятия мощности множества в классич. математике выявилась при изучении счетных моделей для формальных теорий, стандартная интерпретация к-рых предполагает лишь заведомо несчетные модели (так наз. парадокс Сколема). Многие синтаксич. результаты были получены вначале из теоретико-модельных соображений. В терминах конструкций теории моделей можно дать простые критерии для многих понятий, интересных с точки зрения Д. т. Так, критерий Скотта гласит, что класс K алгебраич. систем данного языка тогда и только тогда является аксиоматизируемым, когда он замкнут относительно ультрапроизведений, изоморфизмов и взятия элементарных подсистем.

Формальная теория наз. **разрешимой**, если существует алгоритм, позволяющий по произвольной формуле A выяснять, выводима ли A в этой теории или нет. Известно, что всякая формальная теория, содержащая нек-рый фрагмент теории *рекурсивных функций*, необходимо неразрешима. Отсюда следует неразрешимость элементарной арифметики, системы Цермело — Френкеля и многих других теорий. В Д. т. разработаны тонкие методы интерпретации одних теорий в других; с помощью таких интерпретаций можно установить неразрешимость и ряда очень простых исчислений, в к-рых не интерпретируются непосредственно рекурсивные вычисления. Примерами могут служить элементарная теория групп, теория двух отношений эквивалентности, элементарная теория частичного порядка. С другой стороны, имеются примеры интересных разрешимых теорий, таких, как элементарная геометрия, элементарная теория действительных чисел, теория множеств натуральных чисел с единственной операцией следования. Разрешимость теорий доказывается теоретико-модельными и синтаксич. методами. Синтаксические методы часто дают более простые разрешающие алгоритмы. Так, например, для элементарной теории p-адических чисел разрешимость была установлена сначала теоретико-модельными методами. Позднее был найден примитивно-рекурсивный алгоритм распознавания выводимости для этой теории с помощью нек-рой модификации синтаксич. метода элиминации кванторов. Существенной является оценка сложности алгоритмов разрешения теорий. Как правило, для разрешимых теорий имеется примитивно-рекурсивный разрешающий алгоритм, и проблема состоит в том, чтобы указать более точные границы сложности. Перспективным направлением исследований является изучение разрешимости естественных фрагментов известных формальных теорий. В этом отношении особенно подробно изучено классич. исчисление предикатов, где эффективно описаны все разрешимые и неразрешимые классы формул, заданные в терминах расположения кванторов в формуле и вида предикатных символов, встречающихся в формуле. Описан ряд разрешимых фрагментов арифметич. исчисления, элементарной теории множеств.

Внимание исследователей привлекают и методы оценки сложности выводов. Сюда относятся такие проблемы, как отыскание сравнительно коротких формул, необходимо имеющих сложные доказательства, или формул, из к-рых уже сравнительно несложно можно получить большое количество результатов. Такие формулы можно рассматривать как выражающие в нек-ром смысле «глубокие» факты теории. Рассматриваются естественные меры сложности вывода: длина доказательства; время, требуемое для поиска вывода; сложность формул, фигурирующих в выводе, и др. В этой области методы Д. т. смыкаются с методами теоретич. кибернетики.

Лит.: [1] Клини С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; [2] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [3] Ершов Ю. Л. и др., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 4, с. 37—108.

А. Г. Драгалин.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО — рассуждение по определенным правилам, обосновывающее какое-либо предложение (утверждение, теорему); основанием Д. служат исходные утверждения (аксиомы). Конкретное Д. не обязательно начинается с аксиом, оно может опираться на ранее доказанные предложения. Всякое Д.— относительно, поскольку базируется на нек-рых недоказываемых положениях. Правила, по к-рым ведутся рассуждения, а также методы Д. изучает логика. См. *Доказательств теория.* *А. С. Кузичев.*

ДОМИНАНТА топологического пространства X — любое топологич. пространство, для к-рого X служит *ретрактом.* *А. В. Чернавский.*

ДОМИНИРОВАНИЕ — 1) Какое-либо из возможных соотношений порядка для дифференциальных операторов, формулируемое в терминах *характеристического многочлена* $P(\xi)$. Напр., если

$$\tilde{P}^2(\xi)=\sum\nolimits_{\alpha\geqslant 0}|P^{(\alpha)}(\xi)|^2,$$

$$P^{(\alpha)}(\xi)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\ldots\partial\xi_n^{\alpha_n}}P(\xi)\equiv i^{|\alpha|}D^{\alpha}P(\xi);\ \xi\in R^n,$$

то $P(D)$ сильнее $Q(D)$, когда для любого $\xi\in R^n$

$$\tilde{Q}(\xi)/\tilde{P}(\xi)<\text{const}.$$

Существуют и другие определения Д. (см. [1], с. 99, 103).

Лит.: [1] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965.

А. А. Дезин.

2) Д. в теории игр — отношение, выражающее превосходство одного объекта (*стратегии, дележа*) над другим. Д. стратегий: стратегия s игрока i доминирует (строго доминирует) его стратегию t, если его выигрыш в каждой ситуации, содержащей s, не меньше (соответственно больше), чем его выигрыш в ситуации, состоящей из тех же стратегий остальных игроков и стратегии t. Д. дележей (в *кооперативных играх*): дележ x доминирует дележ y (обозначение $x\succ y$), если существует такая непустая коалиция $P\subset N$, что

$$\sum\nolimits_{i\in P}x_i\leqslant v(P)$$

и $x_i>y_i$ для $i\in P$ (v — характеристическая функция игры). *И. Н. Врублевская.*

3) Д. в теории потенциала — отношение порядка $v_1\geqslant v_2$ между функциями, в частности потенциалами определенных классов, т. е. выполнение неравенства $v_1(x)\geqslant v_2(x)$ для всех x в общей области определения v_1 и v_2. В различных принципах

доминирования отношение $v_1 \geqslant v_2$ устанавливается как следствие выполнения неравенства $v_1(x) \geqslant v_2(x)$ на нек-рых собственных подмножествах области определения. Простейший принцип доминирования Картана: пусть $v=v(x)$ — неотрицательная супергармоническая функция (см. *Субгармоническая функция*) на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и $U_\mu = U_\mu(x)$ — ньютонов потенциал меры $\mu \geqslant 0$ конечной энергии (см. *Энергия мер*). Тогда, если $v(x) \geqslant U_\mu(x)$ на нек-ром множестве $A \subset \mathbb{R}^n$ таком, что $\mu(CA)=0$, то имеет место Д. $v \geqslant U_\mu$. См. также *Потенциала теория абстрактная.*

Лит.: [1] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [2] его же, О топологиях и границах в теории потенциала, пер. с англ., М., 1974.

Е. Д. Соломенцев.

ДОПЛЕРА ЭФФЕКТ — изменение воспринимаемой частоты колебаний в зависимости от скорости движения источника колебаний и наблюдателя относительно друг друга. При сближении источника и наблюдателя частота повышается, при удалении — понижается. Д. э. возникает при распространении волн любой природы: акустических, упругих, электромагнитных.

Пусть $\bar{x}^j$ и x^j, где $j=0, 1, 2, 3$, $x^0=t$, $\bar{x}^0=\bar{t}$ — время, являются инерциальными системами отсчета источника электромагнитных волн в вакууме и наблюдателя. И пусть фазовый множитель плоской волны имеет вид $\exp(i\omega_j x^j)$ в первой и соответственно $\exp(i\bar{\omega}_j \bar{x}^j)$ во второй системах отсчета. Д. э. выражается формулой, связывающей временные компоненты (частоты) ω_0 и $\bar{\omega}_0$ четырехмерных волновых векторов $\{\omega_j\}$ и $\{\bar{\omega}_j\}$:

$$\bar{\omega}_0 = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\varphi}.$$

Здесь v — относительная скорость источника и наблюдателя, φ — угол между скоростью v и линией наблюдения, измеренный в системе наблюдателя, c — скорость света в вакууме.

Д. э. назван по имени К. Доплера (Ch. Doppler), к-рый впервые обосновал этот эффект в 1842.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 5 изд., М., 1967, гл. 6; [2] Фриш С. Э., Тиморева А. В., Курс общей физики, 10 изд., М., 1962, т. 1, гл. 12.

В. М. Бабич, М. М. Попов.

ДОПОЛНЕНИЕ — операция, к-рая ставит в соответствие подмножеству M данного множества X другое подмножество $N \subset X$ так, что если известны M и N, то тем или иным способом может быть восстановлено множество X. В зависимости от того, какой структурой наделено множество X, получаются различные определения Д. и разные способы восстановления X по M и N.

В общей теории множеств дополнением подмножества (или дополнительным подмножеством) до множества X наз. подмножество $C_X M$ (или CM, а также $X \setminus M$), состоящее из всех элементов в $x \in X$, не принадлежащих M; одним из важных его свойств является принцип двойственности:

$$C_X(\bigcup_\xi M_\xi) = \bigcap_\xi (C_X M_\xi).$$

Пусть X наделено структурой линейного пространства и L — подпространство X. Подпространство $N \subset X$ наз. прямым алгебраическим дополнением (или короче алгебраич. дополнением) подпространства X, если $\forall x \in X$ однозначно представим в виде $x=y+z$, $y \in L$, $z \in N$. Это эквивалентно условиям: $X=L+N$; $L \cap N = \{0\}$. Алгебраич. Д. любого подпространства X всегда существует, но определяется неоднозначно.

Пусть (X, τ) — линейное топологич. пространство и X — прямая алгебраич. сумма $X=L+N$ своих подпространств L и N, рассматриваемых как линейное топологич. пространство с индуцированной топологией. Если $x=y+z$, $y \in L$, $z \in N$, то взаимно однозначное отображение $(x, y) \to x+y$ декартова произведения $L \times N$ на X, непрерывное в силу линейности топологии τ, вообще, не взаимно непрерывно. Если же это отображение есть гомеоморфизм, т. е. если X является топологич. прямой суммой пространств L и N, то подпространство N наз. **прямым топологическим дополнением** подпространства L, к-рое наз. в этом случае дополняемым. В произвольном линейном топологич. пространстве не всякое подпространство, даже конечномерное, дополняемо. Имеют место следующие необходимые и достаточные условия дополняемости: существует непрерывный проектор P пространства X на подпространство L; подпространство L топологически изоморфно X/N, где N — алгебраическое Д. L. Из этих критериев вытекают следующие достаточные условия дополняемости: L замкнуто и имеет конечную коразмерность; X — локально выпукло, L — конечномерно, N — замкнуто и др.

Специальным случаем топологич. Д. является ортогональное Д. подпространства L гильбертова пространства H. Это — множество

$$L^{\perp}=\{x \in H \mid \langle x, y\rangle=0, \ \forall y \in L\},$$

являющееся замкнутым подпространством пространства H. Важнейшим для теории гильбертовых пространств является тот факт, что всякое замкнутое подпространство L гильбертова пространства имеет ортогональное Д. и $H=L \oplus L^{\perp}$.

Пусть, наконец, X — условно полная векторная решетка (K-пространство). **Дизъюнктным дополнением множества** $M \subset X$ называется совокупность элементов вида

$$M^{d}=\{x \in X \mid |x| \wedge |y|=0, \ \forall y \in M\},$$

являющаяся линейным подпространством X. Если M — линейное подпространство, то в общем случае $X \neq M+M^{d}$, но если M компонента (по другой терминологии полоса, замкнутый идеал), т. е. линейное подпространство такое, что: из $x \in M$ и $|y| \leqslant |x|$ следует $y \in M$; M замкнуто относительно операций перехода к точным верхним и нижним границам, то $X=M+M^{d}$ (для любого M множество M^{d} есть компонента; $M^{dd}=(M^{d})^{d}$ есть наименьшая компонента, содержащая множество $M \subset X$).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965; [2] его же, Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [3] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [4] Робертсон А., Робертсон В., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967; [5] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [6] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. *В. И. Соболев.*

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ СЕРИЯ представлений — семейство неприводимых непрерывных унитарных представлений локально компактной группы G, ненулевые матричные элементы к-рых не могут быть аппроксимированы конечными линейными комбинациями матричных элементов регулярного представления группы G в топологии равномерной сходимости на компактах в G. Д. с. группы G непуста в том и только в том случае, если G не аменабельна, т. е. если на пространстве $L^{\infty}(G)$ не существует нетривиального левоинвариантного среднего (см. [2]). Связная группа Ли G тогда и только тогда имеет непустую Д. с., когда полупростая факторгруппа группы G по максимальному связному разрешимому нормальному делителю группы G некомпактна (см. *Леви — Мальцева разложение*). Д. с. впервые обнаружена для комплексных классич. групп [1]. Д. с. полностью описана (к 1978) лишь для нек-рых локально компактных групп. Нек-рые задачи теории чисел (см., напр., [5]) равносильны задачам теории представлений, связанных с Д. с. групп аделей линейных алгебраич. групп.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления классических групп, М., 1950; [2] Гринлиф Ф., Инвариантные средние на топологических группах и их приложения, пер. с англ., М., 1973; [3] Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, М., 1958; [4] Костант Б., «Математика», 1970, т. 14, № 2, с. 102—16; [5] Petersson H., «Math. Ann.», 1937/1938, Bd 115, S. 23—67.

А. И. Штерн.

ДОПУСТИМОЕ ПРАВИЛО — *вывода правило*, добавление к-рого в *исчисление* не меняет объема выводимых в этом исчислении слов. Введение в исчисление Д. п. является мощным и часто применяемым средством сокращения выводов, во многих случаях полезно для совершенствования алгоритмов установления выводимости. Одним из важнейших результатов математич. логики является теорема о допустимости правила сечения (см. *Генцена формальная система*). См. *Выводимое правило*, *Производное правило*. *С. Ю. Маслов.*

ДОСТАТОЧНАЯ СТАТИСТИКА для семейства распределений вероятностей $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ или для параметра $\theta \in \Theta$ — статистика (векторная случайная величина) такая, что для любого события A существует вариант условной вероятности $P_\theta(A \mid X = x)$, не зависящий от θ. Это эквивалентно требованию, что условное распределение любой другой статистики Y при условии $X = x$ не зависит от θ.

Знание Д. с. X дает исчерпывающий материал для статистич. выводов о параметре θ, поскольку любые дополнительные статистич. данные ничего не добавляют к той информации о параметре, к-рая содержится в распределении X. Математич. выражением этого свойства является один из результатов теории статистич. решений, утверждающий, что множество решающих правил, основанных на Д. с., образует существенно полный класс. Переход от исходного семейства распределений к семейству распределений Д. с. наз. редукцией статистической задачи. Смысл редукции заключается в уменьшении (часто весьма значительном) размерности пространства наблюдений.

Практический способ нахождения Д. с. основан на следующей теореме факторизации. Пусть семейство $\{P_\theta\}$ доминировано σ-конечной мерой μ и пусть $p_\theta = dP_\theta / d\mu$ — плотность распределения P_θ относительно меры μ. Статистика X достаточна для семейства $\{P_\theta\}$ в том и только в том случае, когда

$$p_\theta(\omega) = g_\theta(X(\omega))\, h(\omega), \qquad (*)$$

где g_θ, h — неотрицательные измеримые функции (h не зависит от θ). Для дискретных распределений в качестве μ можно взять «считающую» меру: в этом случае $p_\theta(\omega)$ в соотношении $(*)$ имеет смысл вероятности элементарного события $\{\omega\}$.

Пусть, напр., $X_1, \ldots, X_n$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих значение 1 с неизвестной вероятностью ν и значение 0 с вероятностью $1-\nu$ (схема Бернулли). Тогда

$$p_\nu(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \prod_{i=1}^n \nu^{x_i}(1-\nu)^{1-x_i} = \nu^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\nu)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Равенство $(*)$ выполняется, если положить

$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad g_\theta = p_\theta, \quad h = 1.$$

Таким образом, эмпирическая частота

$$\hat{\nu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

является Д. с. для неизвестной вероятности ν в схеме Бернулли.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — последовательность независимых нормально распределенных величин с неизвестными средним значением μ и дисперсией σ^2. Совместная плотность распределения $X_1, \ldots, X_n$ по мере Лебега дается выражением

$$p_{\mu, \sigma^2}(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] =$$
$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left(-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i\right),$$

зависящим от $x_1, \ldots, x_n$ только через величины

$$\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Поэтому векторная статистика

$$X = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$

является Д. с. для двумерного параметра $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Д. с. здесь будет и совокупность выборочного среднего

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

и выборочной дисперсии

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2,$$

поскольку величины

$$\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

могут быть выражены через $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}^2$.

Для одного и того же семейства распределений может существовать много Д. с. В частности, тривиальной Д. с. является совокупность всех наблюдений [в рассмотренных выше примерах $(X_1, \ldots, X_n)$]. Однако основной интерес представляют статистики, позволяющие осуществить действительную редукцию статистич. задачи. Д. с. наз. **минимальной**, или **необходимой**, если она есть функция от любой другой Д. с. Необходимая Д. с. осуществляет максимально возможную редукцию статистич. задачи. В рассмотренных примерах найденные Д. с. являются необходимыми.

Важное применение понятия достаточности — метод улучшения несмещенных оценок, основанный на **теореме Рао — Блэкуэлла — Колмогорова**: если X — Д. с. для семейства $\{P_\theta\}$, X_1 — произвольная статистика, принимающая значения в векторном пространстве $\mathbb{R}^d$, то для действительной непрерывной выпуклой функции g на $\mathbb{R}^d$

$$\mathsf{E}_\theta g(X_1-\mathsf{E}_\theta(X_1)) \geqslant \mathsf{E}_\theta g(\hat{X}_1-\mathsf{E}_\theta(\hat{X}_1)), \quad \theta \in \Theta,$$

где $\hat{X}_1 = \mathsf{E}_\theta(X_1|X)$ — условное математич. ожидание статистики X_1 относительно X (к-рое фактически не зависит от θ в силу достаточности X). В качестве функции потерь g здесь часто берется положительно определенная квадратичная форма на $\mathbb{R}^d$.

Статистика X наз. **полной**, если равенство $\mathsf{E}_\theta f(X) \equiv 0$, $\theta \in \Theta$, влечет $f(X)=0$ почти наверное относительно P_θ, $\theta \in \Theta$. Одно из следствий теоремы Рао — Блэкуэлла — Колмогорова утверждает, что если существует полная Д. с. X, то она является равномерно по θ наилучшей несмещенной оценкой своего математич. ожидания $e(\theta) = \mathsf{E}_\theta X$. Подобная ситуация имеет место в приведенных примерах. Так, эмпирическая частота $\hat{\nu}$ является равномерно наилучшей несмещенной оценкой вероятности ν в схеме Бернулли, а выборочные среднее $\hat{\mu}$ и дисперсия $\hat{\sigma}^2$ — равномерно наилучшие несмещенные оценки параметров нормального распределения μ и σ^2.

В теоретическом плане иногда удобнее иметь дело не с Д. с., а с достаточными σ-алгебрами. Если $\{P_\theta;\ \theta\in\Theta\}$ — семейство распределений на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$, то σ-подалгебра $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ наз. **достаточной** для $\{P_\theta\}$, если для любого события $A\in\mathcal{A}$ существует вариант условной вероятности $P_\theta(A|\mathcal{B})$, не зависящий от θ. Статистика X достаточна тогда и только тогда, когда достаточна порождаемая ею σ-подалгебра $\mathcal{A}=X^{-1}(\mathcal{B})$.

Лит.: [1] Halmos P. R., Savage L. I., «Ann. Math. Statistics», 1949, v. 20, p. 225—41; [2] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 4, с. 303—26; [3] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968. *А. С. Холево.*

ДОСТАТОЧНОЕ МНОЖЕСТВО ФУНКЦИОНАЛОВ, тотальное множество функционалов,— множество Г непрерывных линейных функционалов $f(X)$, определенных на линейном топологич. пространстве X и обладающих тем свойством, что не существует элемента $x\in X$, $x\neq 0$, на к-ром равенство $f(x)=0$ выполнялось бы для всех $f\in\Gamma$. Каждое локально выпуклое пространство обладает Д. м. ф.

М. И. Кадец.

ДОСТИЖИМАЯ ГРАНИЧНАЯ ТОЧКА — совокупность точки границы области и класса эквивалентных путей, ведущих изнутри области в эту точку. Пусть ξ — точка границы ∂G области G на плоскости комплексного переменного z и пусть существует путь с уравнением $z=z(t)$, где функция $z(t)$ определена и непрерывна на нек-ром отрезке $[\alpha, \beta]$, $z(t)\in G$ при $\alpha\leqslant t<\beta$, $z(\beta)=\xi$. Тогда говорят, что этот путь ведет в точку ξ (изнутри G) и определяет Д. г. т., изображаемую точкой ξ. Два пути, ведущие в ξ, наз. эквивалентными (или определяющими одну и ту же Д. г. т.), если существует третий путь, также ведущий в ξ изнутри G и имеющий с каждым из рассматриваемых двух путей непустые пересечения внутри G в любой близости от ξ. Совокупность точки $\xi\in\partial G$ и класса эквивалентных путей, ведущих в ξ изнутри G, наз. Д. г. т. области G. Не всякая точка $\xi\in\partial G$ изображает Д. г. т.; с другой стороны, одна и та же точка $\xi\in\partial G$ может изображать несколько, и даже бесконечное множество, различных Д. г. т.

Д. г. т. является единственной точкой *граничного элемента* 1-го рода; (многоточечный) граничный элемент 2-го рода содержит ровно одну Д. г. т., а граничные элементы 3-го и 4-го родов не содержат Д. г. т. Каждая точка границы жордановой области является Д. г. т.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [2] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971, гл. 9. *Е. П. Долженко.*

ДОСТИЖИМАЯ ДУГА ГРАНИЦЫ области G на плоскости z — жорданова дуга, входящая в состав границы области G и одновременно входящая в состав границы нек-рой жордановой области $g\subset G$. Каждая точка Д. д. г. является достижимой (изнутри g) граничной точкой области G (см. *Достижимая граничная точка*). Конформное отображение односвязной области G на единичный круг $D:|z|<1$ непрерывно продолжимо на неконцевые точки Д. д. г. до гомеоморфизма открытой Д. д. г. на нек-рую открытую дугу окружности $|z|=1$. *Е. П. Долженко.*

ДОСТИЖИМАЯ ПОДГРУППА — подгруппа H, к-рую можно включить в конечный нормальный ряд группы G, т. е. ряд

$$E\subset H=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_n=G,$$

в к-ром каждая подгруппа H_i инвариантна в H_{i+1}. Свойство подгруппы быть Д. п. транзитивно. Пересечение Д. п. есть Д. п. Подгруппа, порожденная двумя Д. п., может не быть Д. п. Группа G, у к-рой каждая подгруппа является Д. п., удовлетворяет нормализаторному условию, т. е. всякая подгруппа отлична от своего *нормализатора* и, следовательно, локально нильпотентна.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

В. М. Копытов.

ДОСТИЖИМОЕ ПРОСТРАНСТВО, T_1-пространство,— топологич. пространство X, в к-ром замыкание любого одноточечного множества совпадает с ним самим. Это условие равносильно тому, что пересечение всех окрестностей точки $x \in X$ совпадает с x или что каковы бы ни были две различные точки $x, y \in X$, существуют их окрестности U_x и U_y такие, что $U_x \not\ni y$ и $U_y \not\ni x$, т. е. выполняется *отделимости аксиома* T_1.

Достижимость, т. е. выполнение T_1,— наследственное свойство: всякое подпространство Д. п. есть Д. п., и топология, мажорирующая топологию Д. п., является достижимой топологией. Всякое отделимое пространство (T_2-пространство) является Д. п., обратное неверно: существуют T_1-пространства, не являющиеся T_2-пространствами, таково, напр., бесконечное множество β, наделенное топологией, в к-рой открытыми считаются те множества, дополнения к к-рым конечны.

М. И. Войцеховский.

ДОСТОВЕРНОЕ СОБЫТИЕ — событие, которое априори должно обязательно произойти. Точнее, если $\Omega = \{\omega\}$ — пространство элементарных исходов, то событие A, наступающее вместе с любым из элементарных исходов ω, наз. Д. с. и, очевидно, должно совпадать со всем пространством Ω. Поэтому естественно приписать Д. с. вероятность, равную 1:

$$P(A) = \text{мера } \{\omega : \omega \in A\} = P(\Omega) = 1.$$

Дополнительным к A является *невозможное событие.*

А. В. Прохоров.

ДОСТОВЕРНОСТЬ — априорное убеждение в осуществимости нек-рого явления, исключающее всякое сомнение. Д. характеризует реализуемость нек-рого события, отмечая его наивысшим значением вероятности. В теории вероятностей понятие Д. связано с *достоверными событиями* и с событиями, происходящими с вероятностью 1. На практике говорят о Д. уже тогда, когда вероятность нек-рого события достаточно близка к 1.

А. В. Прохоров.

ДОУПОРЯДОЧИВАЕМАЯ ГРУППА — группа, всякий частичный порядок в к-рой может быть продолжен до линейного (см. *Упорядочиваемая группа*). Д. г. наз. также O^*-группами. Существует следующий критерий доупорядочиваемости группы. Пусть $S(g)$ — минимальная инвариантная подполугруппа группы G, содержащая элемент g. Группа G доупорядочиваема тогда и только тогда, когда для всякого $g \neq e$ подполугруппа $S(g)$ не содержит единицы группы G и для любых $x, y \in S(g)$ пересечение $S(x) \cap S(y)$ не пусто.

Д. г. являются все нильпотентные группы без кручения и все упорядочиваемые двуступенно разрешимые группы. Свободные группы ранга большего 2 и свободные разрешимые группы класса разрешимости большего 2 дают примеры упорядочиваемых групп, к-рые не доупорядочиваемы. Для Д. г. справедлива локальная теорема (см. *Мальцева локальные теоремы*), т. е. если все конечно порожденные подгруппы группы G доупорядочиваемы, то и G — Д. г. Однако подгруппа Д. г. не обязана быть Д. г. Если факторгруппа Д. г. упорядочиваема, то она есть Д. г. Имеются упорядочиваемые, но недоупорядочиваемые группы, факторгруппа по центру к-рых есть Д. г. Класс Д. г. замкнут относительно прямых произведений, но не замкнут относительно полных прямых произведений и, следовательно, неаксиоматизируем (см. *Аксиоматизируемый класс*). Сплетение Д. г. не всегда доупорядочиваемо.

Подгруппа H группы G наз. **Г-доупорядочиваемой**, если всякий максимальный частичный порядок группы G индуцирует на H линейный порядок.

Лит.: [1] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [2] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов.

ДРЕВОВИДНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — гладкое нечетномерное многообразие специального вида, являющееся краем четномерного многообразия, строящегося из расслоений над сферами с помощью склеек по схеме, задаваемой нек-рым графом (деревом).

Пусть $p_i: E_i^{2n} \to S_i^n$, $i=1, 2, \ldots$ — расслоение над n-сферами со слоем n-шар D^n и структурной группой SO_n и пусть B_i^n — замкнутый стандартный n-шар в n-сфере S_i^n; тогда

$$p_i^{-1}(B_i^n) \approx B_i^n \times D_i^n,$$

где D_i^n — слой расслоения p_i. Пусть

$$\gamma_{ij}: B_i^n \times D_i^n \longrightarrow B_j^n \times D_j^n,\ i=1, 2,$$

— гомеоморфизм, осуществляющий склейку двух расслоений p_i, p_j и переводящий каждый n-шар $B^n \times x$ из $B_i^n \times D_i^n$ в некоторый шар $y \times D^n$ из $B_j^n \times D_j^n$ (склейка меняет сомножители прямого произведения $B^n \times D^n$). Результатом склейки двух расслоений p_i, p_j является $2n$-мерное многообразие $E_i^{2n} \bigcup_{\gamma_{ij}} E_j^{2n}$, к-рое превращается в гладкое многообразие с помощью операции «сглаживания углов».

Расслоения E_i^{2n} рассматриваются как «строительные блоки», из к-рых с помощью попарных склеек результирующее гладкое многообразие строится следующим образом. Пусть T — одномерный конечный комплекс (граф). Каждой вершине графа T сопоставляется блок E_i^{2n}, выбираются в S_i^n непересекающиеся n-шары $B_{i_k}^n$ в количестве $k=1, 2, \ldots$, равном индексу ветвления соответствующей вершины, и производится склейка по схеме, указанной графом T. Полученное таким образом многообразие с краем обозначается (опуская зависимость от выбора расслоений E_i^{2n}) через $W^{2n}(T)$. В случае, если T есть дерево, то есть граф без циклов, то край $\partial W^{2n}(T) = M^{2n-1}$ наз. **древовидным многообразием**.

Если T — дерево, то $W^{2n}(T)$ имеет гомотопич. тип букета n-сфер в количестве, равным числу вершин дерева T.

Д. м. $M^{2n-1} = \partial W^{2n}(T)$ является целочисленной гомологич. $(2n-1)$-сферой тогда и только тогда, когда определитель матрицы целочисленной билинейной $(-1)^n$-формы пересечений, определенной на решетке n-мерных гомологий $H_n(W^{2n}, \mathbb{Z})$, равен ± 1. Если это условие выполнено, то многообразие $W^{2n}(T)$ наз. **плюмбингом**.

Если T — произвольный граф и $n \geqslant 2$, то $W^{2n}(T)$ тогда и только тогда односвязно, когда T — дерево. Если T — дерево и $n \geqslant 3$, то $\partial W^{2n}(T)$ односвязно; если W^{2n} — плюмбинг, то край ∂W^{2n} является гомотопич. сферой, $n \geqslant 3$.

Если плюмбинг W^{4k} — параллелизуем, то на главной диагонали матрицы пересечений $2k$-мерных циклов стоят четные числа; в этом случае сигнатура матрицы пересечений делится на 8. Плюмбинг W^{4k} тогда и только тогда параллелизуем, когда все расслоения над S^{2k}, использованные при построении W^{4k}, являются стабильно тривиальными; напр., если все расслоения, используемые при построении W^{4k}, являются касательными расслоениями на диски над $2k$-мерными сферами, то плюмбинг W^{4k} параллелизуем. Плюмбинг W^{4k+2} тогда и только тогда параллелизуем, когда каждое расслоение E_i^{4k+2}, используемое в качестве блоков при построении плюмбинга W^{4k+2}, принадлежит к одному из двух типов: оно либо тривиально, либо является трубчатой окрестностью диагонали в произведении $S^{2k+1}\times S^{2k+1}$, то есть касательным расслоением на диски над S^{2k+1}. Если плюмбинг W^{4k+2} параллелизуем, то его матрица пересечений приводится к симплектическому виду, состоящему из блоков $\left\|\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right\|$, расположенных вдоль главной диагонали.

Среди плюмбингов особо выделяются многообразия Милнора размерности $4k$, $k>1$ и многообразия Кервера размерности $4k+2$, $k\geqslant 0$. Многообразия Милнора строятся следующим образом: в качестве блоков берутся несколько экземпляров трубчатой окрестности E^{4k} диагонали в произведении $S^{2k}\times S^{2k}$; в качестве графа T берется граф следующего вида:

Г =


При этих условиях многообразие $W^{4k}(\Gamma)$ реализует квадратичную форму 8-го порядка, у которой на главной диагонали стоят двойки, а сигнатура равна 8.

Для построения многообразий Кервера K^{4k+2} берутся два экземпляра блока, получающегося как трубчатая окрестность E^{4k+2} диагонали в произведении $S^{2k+1}\times S^{2k+1}$. Склеиваются они так, что матрица пересечений имеет вид $\left\|\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right\|$.

Край многообразия Милнора ∂M^{4k} (сферы Милнора) всегда недиффеоморфен стандартной сфере S^{4k-1}; относительно многообразий Кервера этот вопрос до конца не решен (1978). Если $2k+1\neq 2^i-1$, то край многообразия Кервера ∂K^{4k+2} (сферы Кервера) всегда нетривиален, если же $2k+1=2^i-1$, то для $1\leqslant i\leqslant b$ получится стандартная сфера S^{4k+1}, для остальных i решение неизвестно (см. *Кервера инвариант*).

Многообразия Кервера K^{4k+2} размерности 2, 6, 14 представляют собой произведения сфер $S^{2k+1}\times S^{2k+1}$, $k=0, 1, 3$, с выкинутой открытой клеткой, а все другие многообразия Кервера не гомеоморфны произведениям сфер с выкинутой клеткой.

В топологии многообразий часто используются PL-многообразия $\hat{M}^{4k}$ и $\hat{K}^{4k}$, полученные добавлением конуса над краем, соответственно, многообразий Милнора M^{4k} и многообразий Кервера K^{4k+2}, а также два 4-мерных гладких многообразия — одно из них $W^4(T)$ (T не обязательно дерево) является параллелизуемым односвязным многообразием, край к-рого диффеоморфен 3-сфере, а сигнатура равна 16. Такое многообразие $P^4=W^4(T)$ наз. многообразием (или плюмбингом) **Рохлина**. В известных примерах многообразий Рохлина минимальное значение двумерного числа Бетти равно 22. Другое многообразие есть $W^4(\Gamma)$, где Γ — граф, указанный выше, в качестве блока берется трубчатая окрестность диагонали в произведении $S^2\times S^2$. Край получающегося многообразия $Q^4=W^4(\Gamma)$ есть неодносвязное *додекаэдра пространство*.

Трехмерные Д. м. $M^3=\partial W^4(T)$ принадлежат к так называемым многообразиям Зейферта. Не всякое 3-мерное многообразие является Д. м., и для Д. м. справедлива гипотеза Пуанкаре. В частности, 3-мерные *линзовые пространства* получаются от склейки только двух блоков.

Лит.: [1] Kervaire M., «Comment. math. helv.», 1960, v. 34, p. 257—70; [2] Kervaire M., Milnor J., «Ann. Math.», 1963, v. 77, № 3, p. 504—37; [3] Милнор Дж., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 6, с. 41—54; [4] Hirzebruch F., Neumann W. D., Koh S. S., Differentiable manifolds and quadratic forms, N. Y., 1971; [5] Browder W., Surgery on simply-conuected manifolds, B., 1972.

М. А. Штанько.

ДРЕЙФОВЫЕ УРАВНЕНИЯ — приближенные уравнения движения заряженной частицы в электрическом и магнитном полях, полученные с помощью усреднения по быстрому вращению частицы под действием магнитного поля. Д. у. справедливы в том случае, когда магнитное поле $\vec{B}$ медленно меняется в пространстве и во времени, а электрич. поле $\vec{E}$ мало по сравнению с магнитным:

$$\frac{1}{\omega_B B}\frac{\partial B}{\partial t}\sim\varepsilon,\quad \frac{\rho_B}{B}\,|\nabla B|\sim\varepsilon,\quad \frac{cE}{vB}\sim\varepsilon. \tag{1}$$

Здесь ε — малый параметр, $\omega_B = eB/mc$ — ларморовская частота, $\rho_B = v_\perp/|\omega_B|$ — ларморовский радиус, v — величина скорости частицы, $v_\perp$ — составляющая скорости в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Д. у. получаются из полных уравнений движения разложением по степеням ε при помощи метода усреднения [1]. Они имеют следующий вид:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = V_\parallel\,\frac{\vec{B}}{B} + \vec{V}_{\text{др.}}, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(V_\perp^2 + V_\parallel^2\right)\right) = e\vec{E}\,\frac{d\vec{R}}{dt} - \frac{mcV_\perp^2}{2B^2}\,\vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V_\perp^2}{B}\right) = 0, \tag{4}$$

где

$$\vec{V}_{\text{др.}} = \frac{c}{B^2}[\vec{E}\times\vec{B}] + \frac{mcV_\parallel^2}{cB^4}[\vec{B}\times(\vec{B}\nabla)\vec{B}] + \frac{mcV_\perp^2}{2eB^3}[\vec{B}\times\nabla B].$$

Система (2) — (4), называемая дрейфовой системой, записана относительно вспомогательных усредненных переменных $\vec{R}$, $V_\perp$, $V_\parallel$, связанных с исходными переменными $\vec{r}$, $\vec{v}$ определенными соотношениями. Дрейфовая скорость $\vec{V}_{\text{др.}}$ в уравнении (2) описывает медленное движение по усредненной траектории в направлении, перпендикулярном магнитному полю:

$$V_{\text{др.}}\sim\varepsilon v,\quad \vec{V}_{\text{др.}}\vec{B} = 0.$$

Уравнения (3), (4) имеют второй порядок точности по ε и определяют величины $V_\perp$ и $V_\parallel$ с точностью до членов первого порядка в течение промежутка времени t, содержащего много ларморовских периодов $t\sim 1/\varepsilon|\omega_B|$. Уравнение (2) имеет первый порядок точности по ε.

Величина $\mu = V_\perp^2/B$, к-рая представляет собой интеграл дрейфовой системы (2) — (4), является приближенным интегралом истинного движения. Она наз. адиабатическим инвариантом. В статическом случае, когда $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$ и $\vec{E} = -\nabla\varphi$, уравнение (3) допускает интеграл энергии

$$\frac{1}{2}m\left(V_\perp^2 + V_\parallel^2\right) + e\varphi = \mathrm{const}$$

для усредненного движения.

Возможно обобщение дрейфовой системы на релятивистский случай (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 3 изд., М., 1963; [2] Сивухин Д. В., в кн.: Вопросы

теории плазмы, в. 1, М., 1963, с. 7—97; [3] Морозов А. И., Соловьев Л. С., там же, в. 2, М., 1963, с. 177—261.
Д. П. Костомаров.

ДРОБНАЯ ДОЛЯ ЧИСЛА — функция, определенная для всех действительных чисел x и равная разности между x и целой частью (антье) $[x]$ числа x. Дробная доля числа x обычно обозначается знаком $\{x\}$. Напр., $\{1{,}03\}=0{,}03$; $\{-1{,}25\}=0{,}75$; $\{\pi\}=\{3{,}14\ldots\}=0{,}14\ldots$
С. А. Степанов.

ДРОБНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ — конгруэнция η/θ факторсистемы A/θ, определяемая формулой

$$[x]_\theta\,(\eta/\theta)\,[y]_\theta \Leftrightarrow x\eta y,$$

где η — некоторая конгруэнция *алгебраической системы* $\boldsymbol{A}$, содержащая данную конгруэнцию θ, и $[a]_\theta = \{x\in \boldsymbol{A} \mid x\theta a\}$. Факторсистема $(\boldsymbol{A}/\theta)/(\eta/\theta)$ изоморфна системе $\boldsymbol{A}/\eta$.
Д. М. Смирнов.

ДРОБНАЯ СТЕПЕНЬ линейного оператора A в комплексном банаховом пространстве E — функция $f(A)$ от этого оператора такая, что $f(z)=z^\alpha$. Если оператор A ограничен, и спектр его не содержит и не окружает нуля, то A^α определяется *Коши интегралом* по контуру, окружающему спектр A и не содержащему внутри себя нуль. Если A неограничен, то контур приходится брать бесконечным, и возникают вопросы об условиях сходимости интеграла. Если A имеет плотную в E область определения $D(A)$ и при $\lambda<0$ имеет резольвенту

$$R(\lambda,\ A)=(A-\lambda I)^{-1}$$

с оценкой

$$\|R(-s,\ A)\|\leqslant M\,(1+s)^{-1},\quad s>0, \tag{1}$$

то

$$A^{-\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-\alpha}R(\lambda,\ A)\,d\lambda,$$

где Γ состоит из сторон угла, строящегося по M. Операторы $A^{-\alpha}$ ограничены и $A^{-\alpha}x\to x$ при любом $x\in E$ и $\alpha\to 0$. Положительные степени определяются так: $A^\alpha=(A^{-\alpha})^{-1}$; они уже являются неограниченными. При любых действительных α и β выполнено основное свойство степеней

$$A^\alpha A^\beta x=A^\beta A^\alpha x=A^{\alpha+\beta}x$$

для $x\in D(A^\gamma)$ и $\gamma=\max\{\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\}$. При $0<\alpha<1$ $(A^\alpha)^\beta=A^{\alpha\beta}$. При любых $\alpha<\beta<\gamma$ и $x\in D(A^\gamma)$

$$\|A^\beta x\|\leqslant C(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\,\|A^\alpha x\|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\,\|A^\gamma x\|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}$$

(неравенство моментов). Полугруппа степеней $A^{-\alpha}$ допускает расширение до полугруппы A^{-z}, аналитической в правой полуплоскости.

Ряд приведенных свойств Д. с. обобщается на случай, когда A не имеет ограниченного обратного и справедлива оценка $\|R(-s,\ A)\|\leqslant Ms^{-1}$, $s>0$. При условии (1) и при $0<\alpha<1$

$$A^{-\alpha}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty s^{-\alpha}R(-s,\ A)\,ds.$$

Если оператор B — производящий оператор сжимающей полугруппы $U(t)$, то

$$(-B)^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}U(t)\,dt.$$

Из условия (1) не вытекает, что $-A$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы, но оператор $-A^\alpha$ при $\alpha\leqslant 1/2$ является производящим оператором аналитич. полугруппы.

Оператор B подчинен оператору A, если $D(B)\supset D(A)$ и $\|Bx\|\leqslant c\|Ax\|$, $x\in D(A)$. Если B подчинен A и резольвенты обоих операторов обладают свойством (1), то B^α подчинен A^β при $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$.

Если A — положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то его Д. с. определяется через спектральное разложение

$$A^{\alpha}=\int_0^{\infty}\lambda^{\alpha}\,dE_{\lambda}.$$

В неравенстве моментов для такого оператора константа $c(\alpha, \beta, \gamma)=1$. Пусть A и B — два самосопряженных положительных оператора, действующие в гильбертовых пространствах H и H_1 соответственно. Если T — такой ограниченный линейный оператор из H в H_1 с нормой M, что $TD(A)\subset D(B)$ и $\|BTx\|\leqslant M_1\|Ax\|$, $x\in D(A)$, то $TD(A^{\alpha})\subset D(B^{\alpha})$ и

$$\|B^{\alpha}Tx\|\leqslant M^{1-\alpha}M_1^{\alpha}\|A^{\alpha}x\|,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

(неравенство Хайнца). В частности, при $H=H_1$ и $T=I$ из подчиненности B оператору A следует подчиненность B^{α} оператору A^{α} при $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Д. с. операторов применяются при исследовании нелинейных уравнений. Они детально изучены для операторов, порожденных эллиптич. праевыми задачами.

Лит.: [1] Функциональный анализ. [Справочная математическая библиотека], 2 изд., М., 1972; [2] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967; [3] Сили Р., «Математика», 1968, т. 12, № 1, с. 96—112. *С. Г. Крейн.*

ДРОБНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ — распространение операций интегрирования и дифференцирования на случай дробных порядков. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, $I_1^a f(x)$ — интеграл от f по $[a, x]$, а $I_{\alpha}^a f(x)$ — интеграл от $I_{\alpha-1}^a f(x)$ по $[a, x]$, $\alpha=2, 3, \ldots$. Имеет место соотношение

$$I_{\alpha}^a f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt,\quad a\leqslant x\leqslant b,\qquad (1)$$

где $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$ — гамма-функция. Правая часть в (1) имеет смысл при всех $\alpha>0$. Соотношение (1) определяет дробный интеграл (или интеграл Римана — Лиувилля) порядка α от f с началом в точке a. Оператор I_z^a при комплексных значениях параметра z изучался Б. Риманом (B. Riemann, 1847). Оператор I_{α}^a линеен и обладает полугрупповым свойством:

$$I_{\alpha}^a\left[I_{\beta}^a f(x)\right]=I_{\alpha+\beta}^a f(x).$$

Операция, обратная дробному интегрированию, носит название дробного дифференцирования: если $I_{\alpha}f=F$, то f есть дробная производная порядка α от F. При $0<\alpha<1$ имеет место формула Маршо:

$$f(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\left\{\frac{F(x)-F(x-t)}{t^{1+\alpha}}\right\}dt.$$

Понятие Д. и. и д. впервые ввел Ж. Лиувилль (J. Liouville, 1832), в частности он рассмотрел оператор $I_{\alpha}^{-\infty}=I_{\alpha}$, $\alpha>0$:

$$I_{\alpha}f=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt$$

(при соответствующих ограничениях на функцию f; см. [1], где приведены также оценки оператора I_{α} в L_p).

Для интегрируемой 2π-периодической функции $f(x)$ с нулевым средним значением по периоду удобно (см. [2]) определение, предложенное Г. Вейлем (H. Weyl, 1917): если

$$f(x)\sim\sum_{|n|>0}c_n e^{inx}=\sum{}' c_n e^{inx},$$

то и н т е г р а л В е й л я $f_\alpha(x)$ порядка $\alpha>0$ функции f определяется формулой

$$f_\alpha(x)\sim\sum{}'\frac{c_n e^{inx}}{(in)^\alpha};\qquad (2)$$

производная f^β порядка $\beta>0$ определяется при этом равенством

$$f^\beta(x)=\frac{d^n}{dx^n}f_{n-\beta}(x),$$

где n — наименьшее целое, большее β (отметим, что $f_\alpha(x)$ совпадает с $I_\alpha f(x)$).

Перечисленные определения получили дальнейшее развитие в рамках теории обобщенных функций. Для периодических обобщенных функций

$$f\sim\sum{}' c_n e^{inx}$$

операция дробного интегрирования $I_\alpha f=f_\alpha$ выполнима по формуле (2) для любых действительных α (при отрицательных α $I_\alpha f$ совпадает с дробной производной порядка α) и обладает групповым свойством по параметру α.

В n-мерном пространстве X аналогом оператора дробного интегрирования является р и с с о в п о т е н ц и а л (или и н т е г р а л т и п а п о т е н ц и а л а)

$$R_\alpha f(x)=\pi^{\alpha-n/2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_X\frac{f(t)}{|x-t|^{n-\alpha}}dt.$$

Обратная к R_α операция наз. р и с с о в о й п р о и з в о д н о й порядка α.

Лит.: [1] Х а р д и Г. Г., Л и т т л ь в у д Д. Е., П о л и а Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [2] З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965; [3] Х и л л е Э., Ф и л л и п с Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [4] Д ж р б а ш я н М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966. *П. И. Лизоркин.*

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ — функция вида

$$w=L(z)=\frac{a_1z_1+\ldots+a_nz_n+b}{c_1z_1+\ldots+c_nz_n+d},$$

где $z=(z_1, \ldots, z_n)$ — комплексные или действительные переменные, a_j, b, c_j, d — комплексные или действительные коэффициенты, $|c_1|+\ldots+|c_n|+|d|>0$. Если $|c_1|=\ldots=|c_n|=0$, то Д.-л. ф. является целой линейной функцией; если ранг матрицы $A=\left\|\begin{matrix}a_1 & \ldots & a_n & b\\ c_1 & \ldots & c_n & d\end{matrix}\right\|$ равен единице, то $L(z)$ — постоянная. Собственно Д.-л. ф. получается, если $|c_1|+\ldots+|c_n|>0$ и ранг A равен двум; ниже эти условия предполагаются выполненными.

В случае $n=1$ и действительных $a_1=a$, $c_1=c$, $z_1=z$ график Д.-л. ф. есть равнобочная гипербола с асимптотами $z=-d/c$ и $w=a/c$. В случае $n=2$ и действительных a_1, a_2, b, c_1, c_2, d, z_1, z_2 график Д.-л. ф. есть гиперболич. параболоид.

В случае $n=1$ Д.-л. ф. $L(z)$ есть аналитич. функция комплексного переменного z всюду в расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, за исключением точки $z=-d/c$, в к-рой $L(z)$ имеет простой полюс. При $n\geqslant 1$ Д.-л. ф. $L(z)$ есть мероморфная функция в пространстве $\mathbb{C}^n$ комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, имеющая полярным множеством множество

$$\{z\in\mathbb{C}^n;\ c_1z_1+\ldots+c_nz_n+d=0\}.$$

См. также *Дробно-линейное отображение.*

Е. П. Долженко, Е. Д. Соломенцев.

ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, д р о б н о-л и н е й н о е п р е о б р а з о в а н и е,— отображение комплексного пространства $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, осуществляемое *дробно-линейными функциями*.

В случае комплексной плоскости $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ — это отличное от константы отображение вида

$$z \longrightarrow w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad (1)$$

где $ad-bc \neq 0$; часто применяется унимодулярная нормировка $ad-bc=1$. Всякое Д.-л. о. доопределяется соответствиями $\infty \to a/c$ и $-d/c \to \infty$ до взаимно однозначного отображения расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. Простейшими среди Д.-л. о. являются линейные: $z \to w = \tilde{a}z + \tilde{b}$, получающиеся при $c=0$. Всякое нелинейное Д.-л. о. представимо в виде суперпозиции двух линейных отображений и отображения L_0: $z \to w = 1/z$. Свойства Д.-л. о. L_0 становятся наглядными на *Римана сфере*, так как при стереографич. проекции ему соответствует поворот сферы на $180°$ вокруг диаметра, проходящего через образы точек $\pm 1 \in \mathbb{C}$.

Основные свойства. Д.-л. о. отображает взаимно однозначно и конформно $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. Круговое свойство: при Д.-л. о. любая окружность на $\overline{\mathbb{C}}$ (т. е. окружность на $\mathbb{C}$ или прямая, пополненная точкой ∞) переходит в окружность на $\overline{\mathbb{C}}$. Инвариантность отношения симметрии двух точек: пара точек z, z^*, симметричных относительно какой-либо окружности на $\overline{\mathbb{C}}$, при Д.-л. о. переходит в пару точек w, w^*, симметричных относительно образа этой окружности. Двойное отношение четырех точек на $\overline{\mathbb{C}}$ инвариантно относительно Д.-л. о., т. е. если точки $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ при Д.-л. о. переходят соответственно в $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$, то

$$\frac{\xi_3-\xi_1}{\xi_3-\xi_2} : \frac{\xi_4-\xi_1}{\xi_4-\xi_2} = \frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_2} : \frac{\zeta_4-\zeta_1}{\zeta_4-\zeta_2}. \qquad (2)$$

Для любых заданных троек ξ_1, ξ_2, ξ_3 и $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, попарно различных точек на $\overline{\mathbb{C}}$, существует и притом только одно Д.-л. о., переводящее соответственно $\xi_k \to \zeta_k$, $k=1, 2, 3$. Это Д.-л. о. можно найти из уравнения (2), подставляя в него z и w соответственно вместо ξ_4 и ζ_4. Групповое свойство: совокупность всех Д.-л. о. образует некоммутативную группу относительно суперпозиции $(L_1L_2)(z) = L_1(L_2(z))$ с единицей $E(z)=z$. Свойство универсальности: всякий конформный автоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ есть Д.-л. о., и, таким образом, группа всех Д.-л. о. совпадает с группой $\operatorname{Aut}\overline{\mathbb{C}}$ всех конформных автоморфизмов $\overline{\mathbb{C}}$.

Все конформные автоморфизмы единичного круга $B = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ образуют подгруппу $\operatorname{Aut} B$ группы $\operatorname{Aut}\overline{\mathbb{C}}$, состоящую из Д.-л. о. вида:

$$z \longrightarrow w = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \quad |\alpha| < 1, \quad \operatorname{Im}\theta = 0.$$

Так же обстоит дело с конформными автоморфизмами верхней полуплоскости $\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$, имеющими вид:

$$z \longrightarrow w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \operatorname{Im}(a, b, c, d) = 0, \quad ad-bc > 0.$$

Все конформные гомеоморфизмы верхней полуплоскости на единичный круг имеют вид:

$$z \longrightarrow w = e^{i\theta}\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}}, \quad \operatorname{Im}\beta > 0, \quad \operatorname{Im}\theta = 0.$$

Исключив тождественное Д.-л. о. $E(z)$, можно сказать, что Д.-л. о. имеет не более двух различных неподвижных точек ξ_1, ξ_2 на $\overline{\mathbb{C}}$. В случае двух различных неподвижных точек $\xi_1 \neq \xi_2$ семейство окружностей Σ, проходящих через ξ_1 и ξ_2, переводится Д.-л. о. (1) само в себя. При этом семейство Σ' всех окружностей, ортогональных к окружностям Σ, также переходит само в себя. Здесь возможны в свою очередь три случая.

1) Каждая окружность Σ переходит сама в себя; такое Д.-л. о. наз. гиперболическим, и оно представимо в нормальной форме:

$$\frac{w-\xi_1}{w-\xi_2}=\mu\,\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}, \tag{3}$$

где множитель Д.-л. о. $\mu>0$, $\mu\neq1$, ∞. Унимодулярное Д.-л. о. (1) является гиперболическим тогда и только тогда, когда $a+d\in\mathbb{R}$ и $|a+d|>2$.

2) Каждая окружность Σ' переходит сама в себя; такое Д.-л. о. наз. эллиптическим и в нормальной форме (3) характеризуется множителем μ таким, что $|\mu|=1$, $\mu\neq1$. Унимодулярное Д.-л. о. (1) является эллиптическим тогда и только тогда, когда $a+d\in\mathbb{R}$, $|a+d|<2$.

3) Ни одна из окружностей семейств Σ и Σ' не переходит сама в себя; такое Д.-л. о. называется локсодромическим и в нормальной форме (3) характеризуется множителем $\mu\in\mathbb{C}$, $|\mu|\neq1$, таким, что либо $\operatorname{Im}\mu\neq0$, либо $\mu<0$. Унимодулярное Д.-л. о. (1) является локсодромическим тогда и только тогда, когда $a+d\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Если же две неподвижные точки сливаются в одну ξ_1, то Д.-л. о. наз. параболическим. Семейство Σ состоит при этом из всех окружностей, имеющих в ξ_1 общую касательную; каждая окружность Σ переходит сама в себя. Нормальная форма параболич. Д.-л. о. имеет вид либо

$$\frac{1}{w-\xi_1}=\frac{1}{z-\xi_1}+\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{C},\quad \alpha\neq0,$$

при $\xi_1\neq\infty$, либо

$$w=z+\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{C},\quad \alpha\neq0,$$

при $\xi_1=\infty$. Унимодулярное Д.-л. о. (1) является параболическим тогда и только тогда, когда $a+d=\pm2$.

Благодаря перечисленным богатым элементарным свойствам, Д.-л. о. находят самое широкое применение во всех разделах теории функций комплексного переменного и в различных прикладных дисциплинах. В частности, Д.-л. о. позволяют построить модель *Лобачевского геометрии*.

Среди подгрупп общей группы всех Д.-л. о. наиболее важны, с точки зрения их применений для аналитич. теории дифференциальных уравнений, теории автоморфных функций и других вопросов анализа, дискретные группы Γ Д.-л. о. Элементарные дискретные группы Д.-л. о.— это конечные группы; они изоморфны либо циклическим группам вращений сферы Римана, либо группам вращений правильных многогранников. Дискретные группы Д.-л. о. Γ, имеющие инвариантную окружность γ на $\overline{\mathbb{C}}$, общую для всех преобразований Γ, причем внутренность γ при всех преобразованиях Γ переходит сама в себя, наз. *фуксовыми группами*. Локсодромич. Д.-л. о. не может быть фуксовым. Исторически первым примером фуксовой группы была *модулярная группа*, возникшая в теории эллиптич. функций (см. также *Модулярная функция*). Модулярная группа состоит из всех унимодулярных Д.-л. о. (1), у к-рых коэффициенты a, b, c, d — целые действительные числа; действительная ось инвариантна относительно модулярных Д.-л. о. Более сложны и менее изучены неэлементарные группы Д.-л. о., не являющиеся фуксовыми,— *клейновы группы*.

Д.-л. о. комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant1$, наз. невырожденное отображение

$$z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)\longrightarrow w=(w_1,\ \ldots,w_n)=(L_1(z),\ \ldots,L_n(z)),$$

осуществляемое дробно-линейными функциями

$$L_k(z)=\frac{a_{1k}z_1+\ldots+a_{nk}z_n+b_k}{c_{1k}z_1+\ldots+c_{nk}z_n+d_k},\quad k=1,\ \ldots,\ n.$$

Наиболее важны те Д.-л. о. $\mathbb{C}^n$, к-рые продолжаются в какую-либо компактификацию $\mathbb{C}^n$. Так, в пространство теории функций $\overline{\mathbb{C}^n}$ продолжаются все линейные преобразования, переставляющие координаты, а также Д.-л. о. вида

$$z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)\longrightarrow w=(L_1(z_1),\ \ldots,\ L_n(z_n)),$$

где $L_k(z_k)$ — Д.- л. о. вида (1) на плоскости z_k. Порождаемая перечисленными отображениями группа Д.-л. о. совпадает с группой $\operatorname{Aut}\overline{\mathbb{C}^n}$ всех биголоморфных автоморфизмов компактификации $\overline{\mathbb{C}^n}$. Соответствующая подгруппа $\operatorname{Aut} U^n$ с

$$L_k(z_k)=e^{i\theta_k}\frac{z_k-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z_k},\quad |\alpha_k|<1,\quad \operatorname{Im}\vartheta_k=0,$$

исчерпывает все автоморфизмы единичного поликруга $U^n=\{z\in\mathbb{C}^n;\ \ |z_j|<1,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$. В проективное замыкание $\mathbb{C}P^n$ пространства $\mathbb{C}^n$ продолжаются Д.-л. о., у к-рых

$$L_k(z)=\frac{a_{1k}z_1+\ldots+a_{nk}z_n+b_k}{c_1z_1+\ldots+c_nz_n+d}=\frac{l_k(z)}{l(z)},\tag{4}$$

в однородных координатах это продолжение имеет вид

$$(z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)\longrightarrow\left(z_0 l\left(\frac{z}{z_0}\right),\ z_0 l_1\left(\frac{z}{z_0}\right),\ \ldots,\ z_0 l_n\left(\frac{z}{z_0}\right)\right).$$

Этими отображениями исчерпывается группа $\operatorname{Aut}\mathbb{C}P^n$ всех биголоморфных автоморфизмов $\mathbb{C}P^n$. Автоморфизмы единичного шара $B^n=\{z\in\mathbb{C}^n;\ |z|<1\}$ образуют подгруппу $\operatorname{Aut}B^n$ группы $\operatorname{Aut}\mathbb{C}P^n$, состоящую из всех Д.-л. о. вида (4), у к-рых коэффициенты подчинены известным дополнительным условиям (см. [2], ч. 2).

Лит.: [1] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 11 изд., М., 1967; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [3] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1, М., 1962; [4] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.— Л., 1936.

Е. П. Долженко, Е. Д. Соломенцев, Е. М. Чирка.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — см. *Рациональная функция.*

ДРОБНЫЙ ИДЕАЛ — подмножество Q поля частных K коммутативной области целостности R, имеющее вид $Q=a^{-1}I$, где $a\in R$, $a\neq 0$, I — идеал кольца R. В других терминах Q есть R-подмодуль поля K, все элементы к-рого допускают общий знаменатель, т. е. существует элемент $a\in R$, $a\neq 0$, такой, что $ax\in R$ для всех $x\in Q$. Д. и. образуют относительно умножения полугруппу $\mathfrak{A}$ с единицей R. Для *дедекиндовых колец* и только для них эта полугруппа является группой. Обратимые элементы полугруппы $\mathfrak{A}$ наз. обратимыми идеалами. Каждый обратимый идеал имеет конечный базис над R.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

Л. А. Бокуть.

ДРОБНЫХ ШАГОВ МЕТОД — метод построения экономичных (в смысле числа операций) устойчивых разностных схем для решения дифференциальных уравнений математич. физики.

При увеличении размерности задачи число операций для получения численного решения растет как вследствие роста числа точек, так и вследствие логич. трудностей составления программы расчета. Для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu,\tag{1}$$

где $L=L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — дифференциальный оператор, $u=u(x,\ t)$, $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, абсолютно устойчивые неявные схемы простой аппроксимации

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}=\Lambda_1 u^{n+1}+\Lambda_0 u^n, \tag{2}$$

$$\Lambda_0 \sim L_0,\ \Lambda_1 \sim L_2,\ L_0+L_1=L,$$

становятся неэффективными в случае многомерных задач. В одних случаях требуется использовать слишком мелкий шаг по времени, в других нахождение каждого u^{n+1} требует $\mathrm{const}\cdot N^{\alpha(m)}$ операций, где N — число точек на одно измерение, m — число пространственных измерений, а $\alpha(m)$ сильно растет с увеличением m.

Для получения экономичных устойчивых разностных схем предложены методы, основанные на следующих идеях:

1) расщепления разностных схем;

2) приближенной факторизации;

3) расщепления (слабой аппроксимации) дифференциальных уравнений.

В случае уравнения (1) соответствующие разностные схемы имеют вид (для простоты взяты два дробных шага и рассматривается периодич. задача Коши): схема расщепления:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u^{n+1/2}u^n}{\tau}=\Lambda_{11}u^{n+1/2}+\Lambda_{01}u^n,\\ &\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau}=\Lambda_{12}u^{n+1}+\Lambda_{02}u^{n+1/2}; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

схема приближенной факторизации:

$$(E-\tau\Lambda_{11})\,(E-\tau\Lambda_{12})\,u^{n+1}=(E+\tau\Omega)\,u^n, \tag{4}$$

$$\Lambda_{11}+\Lambda_{12}=\Lambda_1,\quad \Omega\sim\Lambda_0$$

схема слабой аппроксимации:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=(\alpha_1 L_1+\alpha_2 L_2)\,u=Lu,\quad L=L_0+L_1, \tag{5}$$

$$\alpha_1(t,\ \tau)=2,\ \alpha_2(t,\ \tau)=0 \quad \text{при} \quad t\in\left[n\tau,\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right],$$

$$\alpha_1(t,\ \tau)=0,\ \alpha_2(t,\ \tau)=2 \ \text{при} \ t\in\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau,\ (n+1)\,\tau\right].$$

В случае схем (3) и (4) обращение оператора $E-\tau\Lambda_1$ заменяется обращением оператора $(E-\tau\Lambda_{11})(E-\tau\Lambda_{12})$, т. е. последовательным обращением операторов $E-\tau\Lambda_{11}$, $E-\tau\Lambda_{12}$, вообще говоря, более простой структуры.

Трактовка (5) позволяет рассматривать схему расщепления

$$\frac{u^{n+1/2}-u^n}{\tau}=\Lambda_1 u^{n+1/2},\quad \frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau}=\Lambda_2 u^{n+1}$$

как простую аппроксимацию уравнения (5), слабо аппроксимирующего уравнение (1).

Таким образом, в основе этих методов лежит представление сложных операторов через простейшие, при этом интегрирование исходного уравнения сводится к интегрированию уравнений более простой структуры, а методы дробных шагов обязаны удовлетворять условиям аппроксимации и устойчивости только в окончательном итоге (при записи их в «целых» шагах). Методом расщепления решаются многие сложные задачи математич. физики.

Большое развитие получили схемы расщепления повышенного порядка точности. К одной из модификаций метода расщепления принадлежит метод «частиц в ячейках»: здесь расщепление производится по физическим процессам и не связано с понижением размерности операторов.

Лит.: [1] Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; [2] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971. *Н. Н. Яненко.*

ДРОБОВОЙ ЭФФЕКТ — математическое описание флуктуаций напряжений на выходе линейной системы, на входе к-рой действуют случайные возмущения, возникающие в случайные моменты времени. Если $W(t, \tau)$ — выходная реакция системы в момент времени t на единичный импульс, приложенный в момент времени $\tau \leqslant t$, то Д. э. может быть описан случайным процессом

$$X(t) = \sum\nolimits_{\{k:\tau_k \leqslant t\}} \alpha_k W(t, \tau_k),$$

где $\ldots < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < \ldots$ — моменты поступления импульсов, а α_k — случайные величины, характеризующие величину интенсивностей импульсов. В частном случае, когда $W(t, \tau) = W(t-\tau)$, $W(s) = 0$, $s \leqslant 0$, величины α_k суть независимые одинаково распределенные случайные величины с конечной дисперсией, а $\ldots < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \ldots$ образуют *пуассоновский поток* событий с параметром λ, процесс $X(t)$ является стационарным в узком смысле процессом с

$$\mathsf{E}X(t) = \lambda \mathsf{E}\alpha_1 \int_0^\infty W(s)\, ds,$$

$$\mathsf{D}X(t) = \lambda \mathsf{E}\alpha_1^2 \int_0^\infty W^2(s)\, ds.$$

Лит.: [1] Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р. Г., Случайные процессы в задачах автоматического управления, пер. с англ., М., 1958. *А. Н. Ширяев.*

ДРОБЬ арифметическая — число, состоящее из одной или из нескольких равных частей (долей) единицы. Д. изображается символом $\frac{a}{b}$ (или a/b), где a и b — целые числа. Числитель a Д. $\frac{a}{b}$ показывает число взятых долей единицы, разделенной на столько долей, какова величина знаменателя b. Д. можно рассматривать также, как частное от деления a на b.

Д. $\frac{a}{b}$ не меняется, если ее числитель и знаменатель умножить на одно и то же отличное от нуля целое число. Благодаря этому любые две Д. $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ можно привести к общему знаменателю, т. е. заменить $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ на равные им Д., имеющие один и тот же знаменатель. Кроме того, Д. можно сокращать, поделив ее числитель и знаменатель на одно и то же число, вследствие чего, всякую Д. можно представить в виде несократимой, т. е. такой, у к-рой числитель и знаменатель не имеют общих множителей.

Сумма и разность Д. $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ с одинаковыми знаменателями определяются по правилу:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$$

Чтобы сложить или вычесть Д. с разными знаменателями, надо предварительно привести их к общему знаменателю. Обычно в качестве общего знаменателя дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ берется наименьшее общее кратное чисел b и d. Умножение и деление Д. производятся по правилам:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Д. $\frac{a}{b}$ наз. правильной, если ее числитель меньше знаменателя, и неправильной — в противном случае. Д. наз. десятичной, если ее знаменатель является степенью числа 10 (см. *Десятичная дробь*).

Формальное определение дробей. Д. могут быть определены как упорядоченные пары целых чисел (a, b), где $b \neq 0$, для к-рых задано отношение эквивалентности (отношение равенства Д.), а именно, считается, что $(a, b) = (c, d)$, если $ad = bc$. Кроме того, во множестве Д. определены операции сложения, вычитания, умножения и деления, подчиненные следующим правилам:

$$(a, b) \pm (c, d) = (ad \pm bc, bd),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd),$$

$$(a, b) : (c, d) = (ad, bc)$$

(таким образом, деление определено только в том случае, когда $c \neq 0$).

Подобное определение Д. удобно для обобщений и принято в современной алгебре (см. *Частных кольцо*).

С. А. Степанов.

ДРУЖЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА — пара натуральных чисел, каждое из к-рых равно сумме собственных делителей другого, т. е. делителей, отличных от самого числа. Определение Д. ч. имеется уже в «Началах» Евклида, а также в трудах Платона. Древним грекам была известна одна пара Д. ч.: 220 и 284; суммы их делителей соответственно равны

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$$

$$1+2+4+71+142=220.$$

Л. Эйлер (L. Euler) отыскал около 60 пар Д. ч. Несколько сот Д. ч. удалось найти с использованием ЭВМ. Неизвестно, однако, существует ли пара Д. ч., одно из которых четное, а другое нечетное.

А. И. Галочкин.

ДУАЛЬНАЯ АЛГЕБРА — топологическая алгебра, в к-рой для любого замкнутого левого (соответственно правого) идеала I левый аннулятор правого (соответственно правый аннулятор левого) аннулятора идеала I совпадает с I. Наибольший интерес представляют вопросы реализации Д. а. в виде алгебр операторов и установление связей между свойствами аннуляторности и дуальности топологич. алгебр различных классов, в частности комплексных *банаховых алгебр* с инволюцией, в том числе *гильбертовых алгебр* и *C^*-алгебр*.

C^*-алгебра вполне непрерывных линейных операторов в гильбертовом пространстве и гильбертова алгебра операторов Гильберта — Шмидта в гильбертовом пространстве — Д. а. Всякая дуальная банахова алгебра, являющаяся C^*-алгеброй, изоморфна пополнению алгебраической прямой суммы алгебр вполне непрерывных операторов в нек-рых гильбертовых пространствах. Всякая полная гильбертова алгебра дуальна; она изоморфна прямой ортогональной сумме гильбертовых алгебр операторов Гильберта — Шмидта в нек-рых гильбертовых пространствах. Всякая полупростая Д. а. с непрерывным квазиобратным — пополнение прямой суммы всех своих минимальных замкнутых двусторонних идеалов, к-рые являются топологически простыми Д. а.; топологически простая Д. а. A может быть реализована как алгебра непрерывных линейных операторов в нек-ром топологическом векторном пространстве E, содержащая множество $K(E)$ конечномерных непрерывных линейных операторов в E; если A — банахова алгебра, то образ A при этой реализации содержится в равномерном замыкании $F(E)$ алгебры $K(E)$. С другой стороны, существует рефлексивное банахово пространство E такое, что (топологически простая, аннуляторная) банахова алгебра $F(E)$ не является дуальной.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [2] Davie A. M., «Bull. London Math. Soc.», 1973, v. 5, № 1, p. 79—80.

А. И. Штерн.

ДУАЛЬНАЯ ПАРА — пара $(E,\ E')$ векторных пространств над одним и тем же полем вместе с невырожденной билинейной формой $(x,\ x')$ на $E \times E'$. См. *Двойственность* в теории топологических векторных пространств. *М. И. Войцеховский.*

ДУБЛЕТ — упорядоченная пара гиперплоскостей n-мерного аффинного пространства. Задание Д. равносильно заданию *ковариантного вектора*. В центроаффинной геометрии Д. определяется единственной гиперплоскостью — краем Д. *М. И. Войцеховский.*

ДУБЛЬ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ — двулистная *накрывающая поверхность* W конечной римановой поверхности R. Каждой внутренней точке $p \in R$ ставится в соответствие пара точек p и $\tilde{p}$ Д. р. п. W; иными словами, над p расположены две сопряженные точки Д. р. п. p и $\tilde{p}$. Каждой точке q края R ставится в соответствие одна точка $q \in W$. При этом над каждой окрестностью внутренней точки $p \in R$ расположены две непересекающиеся окрестности точек $p,\ \tilde{p} \in W$. Если z — локальная униформизирующая в окрестности внутренней точки $p \in R$, то она же будет локальной униформизирующей в W-окрестности одной из двух сопряженных точек W, лежащих над p, скажем в W-окрестности точки $p \in W$; тогда в W-окрестности сопряженной точки $\tilde{p}$ униформизирующей является комплексно сопряженная $\bar{z}$ переменной z. Если z — локальная униформизирующая в точке q края R, то униформизирующей в лежащей над ней точке $q \in W$ является переменная, равная z на одном листе W и $\bar{z}$ — на другом.

Для случая компактной ориентируемой римановой поверхности R Д. р. п. W состоит просто из двух компактных ориентируемых римановых поверхностей, и поэтому в этом случае его рассмотрение интереса не представляет. Во всех остальных случаях Д. р. п. W — компактная ориентируемая риманова поверхность, что и позволяет упростить исследование нек-рых вопросов теории функций на R путем сведения их к исследованию функций на W. Род W равен $g+m-1$, где g — род R, m — число компонентов края R, предполагаемых невырожденными. Например, дублем односвязной плоской области является сфера, а дублем m-связной плоской области — сфера с $m-1$ ручками.

Аналитические *дифференциалы* на римановой поверхности R среди аналитич. дифференциалов на Д. р. п. W характеризуются тем, что они принимают сопряженные значения в сопряженных точках W и действительных значениях в точках $q \in W$, лежащих над точками края R.

Лит.: [1] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957; [2] Picard E., Traité d'analyse, t. 2, P., 1893.

Е. Д. Соломенцев.

ДУГА, простая дуга, жорданова дуга, — часть кривой, заключенная между двумя ее точками (и не содержащая кратных точек). Д. на плоскости определяют, задавая координаты ее точек как непрерывные функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ некоторого параметра t, $a \leqslant t \leqslant b$; при этом предполагают, что различным значениям t соответствуют различные точки.

ДУГА БЕЗ КОНТАКТА — гладкая кривая без самопересечений на фазовой плоскости двумерной *автономной системы* дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=P\ (x,\ y), \quad \dot{y}=Q\ (x,\ y), \qquad (*)$$

обладающая тем свойством, что в каждой точке этой кривой вектор фазовой скорости системы (см. *Фазовой скорости вектор*) определен, отличен от нуля и не является касательным вектором к кривой. Это понятие было введено А. Пуанкаре (H. Poincaré, [1]); оно широко используется в качественной теории дифференциальных уравнений (см. [2]). Через любую обыкновенную точку произвольной траектории системы (*) можно провести, напр., отрезок без контакта достаточно малой длины. Д. б. к. характеризуется тем, что все траектории системы (*), пересекающие эту кривую, пересекают ее в одном направлении. Если производная в силу системы (*) (см. *Дифференцирование в силу системы*) в каждой точке гладкой кривой не обращается в нуль, то эта кривая есть Д. б. к. Замкнутая Д. б. к. наз. циклом без контакта.

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М.— Л., 1947; [2] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961. *Н. Х. Розов.*

ДУГЛАСА ЗАДАЧА — см. *Плато задача.*

ДУФФИНГА УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$x''+kx'+\omega_0^2x+\alpha x^3=F\cos\omega t, \qquad (*)$$

где $k>0$, ω_0, α, F, ω — постоянные. Это уравнение представляет собой важный пример системы (с одной степенью свободы) с нелинейной восстанавливающей силой $f(x)=-\omega_0^2x-\alpha x^3$ и затуханием, совершающей вынужденные колебания при гармоническом внешнем воздействии $F(t)=F\cos\omega t$. При $\alpha>0$ говорят о жесткой упругой силе, а при $\alpha<0$ — о мягкой. Впервые исследование решений уравнения (*) предпринял Г. Дуффинг (G. Duffing, [1]).

Решения Д. у. в замкнутой форме получить не удается. Доказано, что оно имеет большое число разнообразных периодич. решений. В уравнении (*) возможны гармонич. колебания $x=A\cos\omega t$ с амплитудой $A=A(\omega)$, к-рая является функцией частоты (амплитудная кривая); для нек-рых значений частоты ω могут иметь место несколько видов колебаний, отличающихся по амплитуде. При определенных условиях в Д. у. возникают субгармонич. колебания с частотами ω/n, где n — целое число. Для изучения решений уравнения (*) часто применяются методы малого параметра.

Лит.: [1] Duffing G., Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung, Braunschweig, 1918; [2] Стокер Д., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [3] Хаяси Т., Нелинейные колебания в физических системах, пер. с англ., М., 1968. *Н. Х. Розов.*

ДУЭЛЬ — *игра с выбором момента времени*, описывающая конфликт следующего типа. Два противника могут стрелять друг в друга в течение нек-рого отрезка времени, располагая при этом оружием, имеющим ограниченное количество боеприпасов. Стратегиями игроков являются выборы моментов стрельбы. Функция выигрыша определяется как математич. ожидание нек-рой заданной случайной величины, принимающей конечное число значений, соответствующих возможным исходам Д. В зависимости от информации о действиях противника Д. делятся на шумные и бесшумные (тихие). Напр., если каждый из противников имеет по одному выстрелу, к-рые они могут произвести в интервале [0, 1], функции меткости (т. е. вероятности попадания игроков I и II) соответственно равны $p(x)$ и $q(y)$, и если игрок I получает 1, когда он убивает II, теряет 1, когда гибнет сам, и выигрыш равен 0 в остальных случаях, то функции выигрыша $K(x, y)$ в шумной и бесшумной Д. равны:

шумная Д.

$$K(x, y)=\begin{cases} p(x)-(1-p(x))\sup\limits_{y>x} q(y), & x<y, \\ p(x)-q(x), & x=y, \\ -q(y)+(1-q(y))\sup\limits_{x>y} p(x), & x>y; \end{cases}$$

бесшумная Д.

$$K(x, y) = \begin{cases} p(x) - (1 - p(x))\, q(y), & x < y, \\ p(x) - q(x), & x = y, \\ -q(y) + (1 - q(y))\, p(x), & x > y. \end{cases}$$

Рассматриваются Д., в к-рых противники располагают несколькими выстрелами или же могут расходовать имеющиеся ресурсы непрерывно.

Лит.: [1] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964.

Е. Б. Яновская.

ДЬЁДОННЕ МОДУЛЬ — модуль M над кольцом Витта векторов $W(k)$, где k — совершенное поле характеристики $p>0$, снабженный двумя эндоморфизмами F_M и V_M, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$F_M(\omega m) = \omega^{(p)} F_M(m),$$

$$\omega V_M(m) = V_M(\omega^{(p)} m),$$

$$F_M(V_M(m)) = V_M(F_M(m)) = pm.$$

Здесь $m \in M$, $\omega = (a_0, \ldots, a_n, \ldots) \in W(k)$, $\omega^{(p)} = (a_0^p, \ldots, a_n^p, \ldots)$. Эквивалентное определение состоит в том, что M есть левый модуль над кольцом D_k (кольцом Дьёдонне), порожденным $W(k)$ и двумя переменными F и V связанными соотношениями

$$F\omega = \omega^{(p)} F, \quad \omega V = V\omega^{(p)},$$

$$FV = VF = p, \quad \omega \in W(k).$$

Для любого целого $n>0$ существует изоморфизм

$$D_k / D_k V^n \simeq \mathrm{End}_k(W_{nk}),$$

где $D_k V^n$ — левый идеал, порожденный V^n, а W_{nk} — усеченная k-схема Витта. Д. м. играют важную роль в классификации унипотентных коммутативных алгебраических групп (см. [1]). Д. м. наз. также левые модули над пополнением $\hat{D}_k$ кольца D_k относительно топологии, порождаемой степенями двустороннего идеала (F, V) кольца D_k.

Лит.: [1] Dieudonné J., «Amer. J. Math.», 1957, v. 79, № 2, p. 331—88; [2] Demazure M., Gabriel P., Groupes algébriques, t. 1, P.— Amst., 1970; [3] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 3—90.

И. В. Долгачев.

ДЮАМЕЛЯ ИНТЕГРАЛ — представление решения *Коши задачи* или смешанной задачи с однородными граничными условиями для неоднородного линейного уравнения с частными производными через решение соответствующей задачи для однородного уравнения. Пусть для уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + L[u(t, x)] = f(t, x); \quad t > 0, \ x \in R_n, \tag{1}$$

где L — линейный дифференциальный оператор с независящими от t коэффициентами, содержащий производные по t не выше 1-го порядка, поставлена задача Коши с начальными условиями:

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

И пусть достаточно гладкая функция $v(t, x; \tau)$, $t \geqslant \tau$, $\tau \geqslant 0$, $x \in R_n$, является при $t > \tau$ решением однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v(t, x; \tau)}{\partial t^2} + L[v(t, x; \tau)] = 0,$$

удовлетворяющим при $t = \tau$ начальным условиям:

$$v(t, x; \tau)\Big|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial v(t, x; \tau)}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f(\tau, x).$$

Тогда решение задачи Коши (1), (2) выражается Д. и.:

$$u(t, x) = \int_0^t v(t, x; \tau)\, d\tau.$$

Сформулированное утверждение носит название принципа Дюамеля и является аналогом метода вариации постоянных.

Аналогичное построение можно провести и в случае задачи Коши с однородным начальным условием для уравнения

$$\frac{\partial u(t,\ x)}{\partial t}+M\left[u(t,\ x)\right]=f(t,\ x);\quad t>0;\ x\in R_n,$$

где M — линейный дифференциальный оператор с независящими от t коэффициентами, содержащий производные только по переменным x.

Решение задачи Коши с однородными начальными условиями для неоднородного уравнения теплопроводности выражается Д. и.

$$u(t,\ x)=\int_0^t\int_{R_n}\left[4\pi(t-\tau)\right]^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}f(\tau,\ \xi)\,d\xi\,d\tau,$$

а для волнового уравнения в случае $n=1$

$$u(t,\ x)=\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}f(\tau,\xi)\,d\xi.$$

Д. и. наз. по имени Ж. Дюамеля (J. Duhamel).

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966; [2] Йон Ф., Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, пер. с англ., М., 1958. *А. К. Гущин.*

ДЮБУА-РЕЙМОНА ЛЕММА, Дю-Буа-Реймонда лемма: если $N(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[x_1,\ x_2]$ и если для всех дифференцируемых функций $\eta(x)$, обращающихся в нуль при $x=x_1$, $x=x_2$, справедливо соотношение:

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta'(x)\,N(x)\,dx=0,$$

то $N(x)=\mathrm{const}$ на отрезке $[x_1,\ x_2]$; сформулирована П. Дюбуа-Реймоном [1].

Д.-Р. л. применяется в вариационном исчислении для вывода *Эйлера уравнения* в интегральной форме и при этом позволяет не предполагать заранее, что экстремум функционала достигается на дважды дифференцируемой кривой — достаточно предположения о непрерывной дифференцируемости.

Лит.: [1] Du Bois-Reymond P., «Math. Ann.», 1879, Bd 15, S. 313; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950. *И. Б. Вапнярский.*

ДЮБУА-РЕЙМОНА ПРИЗНАК сходимости ряда: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$, где a_n и b_n—комплексные числа, сходится, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ абсолютно сходится. Установлен П. Дюбуа-Реймоном (P. Du Bois Reymond). *Л. Д. Кудрявцев.*

ДЮБУА-РЕЙМОНА ТЕОРЕМА о единственности разложения функции в ряд: если сумма всюду сходящегося тригонометрич. ряда интегрируема по Риману, то этот ряд является ее рядом Фурье; доказана П. Дюбуа-Реймоном [1]. Важный частный случай сходимости тригонометрич. ряда к нулю несколько ранее рассмотрел Г. Кантор [2].

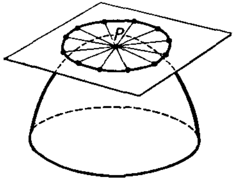
Д.-Р. т. обобщалась в различных направлениях. Для интеграла Лебега с условием ограниченности суммы аналогичную теорему доказал А. Лебег (H. Lebesgue), без этого условия — Ш. Ж. Валле Пуссен (Ch. J. de la Vallée-Poussin) (см. [3], с. 200, 789). Имеются аналоги этой теоремы для интегралов Данжуа (см. [5]).

Другое направление обобщений заключается в ослаблении условия сходимости всюду. У. Юнг (W. Young) доказал, что можно пренебрегать счетным множеством (см. [3], с. 792), Д. Е. Меньшов показал, что нельзя пренебрегать любым множеством меры нуль (см. *Меньшова пример нуль-ряда* или [3], с. 804). О дальнейших работах в этом направлении см. [3], [4]. Еще одно направление обобщений получается при замене требования сходимости требованием суммируемости. Впервые этим стал заниматься М. Рисс (M. Riesz, [4]).

Лит.: [1] Du Bois-Reymond P., «Abh. Akad. Wiss. Math.-Phys. Kl.», 1876, Bd 12, Tl 1, S. 117—66; [2] Cantor G., «Math. Ann.», 1872, Bd 5, S. 123—32; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1—2, пер. с англ., М., 1965; [5] Виноградова И. А., Скворцов В. А., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971, с. 65—107.

Т. П. Лукашенко.

ДЮПЕНА ИНДИКАТРИСА, индикатриса кривизны,— плоская кривая, к-рая дает наглядное представление об искривленности поверхности в данной ее точке. Д. и. лежит в плоскости, касательной к поверхности S в точке P, и является совокупностью концов отрезков, отложенных от точки P в направлении l в касательной плоскости и имеющих длину, равную $1/\sqrt{|K_l|}$, где $|K_l|$ — абсолютная величина нормальной кривизны поверхности S в точке P в направлении l. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ — параметрич. уравнение поверхности S в окрестности точки P. Введем декартову систему координат на плоскости, касательной к S в точке P, принимая точку P за начало координат, векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ за базисные векторы этой координатной системы. Тогда уравнение Д. и. имеет вид



$$|Lx^2+2Mxy+Ny^2|=1,$$

где x и y — координаты точки Д. и., а L, M и N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S, вычисленные в точке P. Д. и. представляет собой: а) эллипс, если P — *эллиптическая точка* (окружность, если P — *округления точка*); б) пару сопряженных гипербол, если P — *гиперболическая точка*; в) пару параллельных прямых, если P — *параболическая точка*. Д. и. названа по имени Ш. Дюпена (Ch. Dupin), впервые применившего эту кривую к исследованию поверхностей (1813).

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.— Л., 1948. *Е. В. Шикин.*

ДЮПЕНА ТЕОРЕМА: если даны три семейства поверхностей, образующих *триортогональную систему*, то линия пересечения каждых двух поверхностей различных семейств будет линией кривизны для каждой из этих поверхностей. Напр., софокусные центральные поверхности 2-го порядка пересекаются по линиям кривизны. Д. т. названа по имени Ш. Дюпена, к-рому принадлежит ее первое доказательство [1].

Лит.: [1] Dupin Ch., Développements de géométrie, P., 1813; [2] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1, М.— Л., 1947. *Е. В. Шикин.*

ДЮПЕНА ЦИКЛИДА — поверхность, оба семейства линий кривизны к-рой состоят из окружностей, так что она является частным случаем *каналовой поверхности*. Обе полости эволюты Д. ц. вырождаются в кривые Γ_1 и Γ_2, являющиеся фокальными кривыми 2-го порядка. Различают Д. ц. трех типов.

1) Эволюты — эллипс и гипербола, радиус-вектор соответствующей Д. ц.:

$$x=\frac{Vb\sin u}{U+V},\quad y=\frac{Ub\operatorname{sh} v}{U+V},\quad z=\frac{Va\cos u+Uc\operatorname{ch} v}{U+V},$$

где

$$U=c\cos u+d,\quad V=-a\operatorname{ch} v-d,\quad d=\mathrm{const}.$$

2) Эволюты — фокальные параболы, радиус-вектор:

$$x=\frac{Vu}{U+V},\quad y=\frac{Uv}{U+V},\quad z=\frac{V(2u^2-p^2)-U(2v^2-p^2)}{Up(U+V)},$$

где

$$U=\frac{2u^2+p+q}{up},\quad V=\frac{2v^2+p^2-q^2}{up},\quad q=\mathrm{const}.$$

3) Эволюты — окружность и прямая, соответствующая Д. ц.— *тор*.

Д. ц. являются алгебраическими поверхностями 4-го порядка в случаях 1) и 3) и 3-го порядка — в случае 2).

Лит.: [1] Dupin Ch., Développements de géométrie, P., 1813; [2] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1939. *И. Х. Сабитов.*

e, **ч и с л о** *e*, — обозначение предела, к к-рому стремится выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченном возрастании n:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots;$$

служит основанием натуральных логарифмов; *e* — трансцендентное число, что впервые доказано в 1873 Ш. Эрмитом (Ch. Hermite). Иногда число *e* малообоснованно называют **н е п е р о в ы м ч и с л о м.**

С. А. Степанов.

ЕВКЛИДА АЛГОРИТМ — способ нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел, двух многочленов (и вообще, двух элементов *евклидова кольца*) или общей меры двух отрезков. Описан в геометрич. форме в «Началах» Евклида (3 в. до н. э.).

Для случая положительных целых чисел $a\geqslant b$ этот способ состоит в следующем. Деление с остатком числа a на число b всегда приводит к результату $a=nb+b_1$, где частное n — целое положительное число, а остаток b_1 либо 0, либо положительное число, меньшее b, $0\leqslant b_1<b$. Производится последовательное деление:

$$\left.\begin{aligned} a&=nb+b_1,\\ b&=n_1b_1+b_2,\\ b_1&=n_2b_2+b_3,\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

где все n_i — положительные целые числа и $0\leqslant b_i<b_{i+1}$, до тех пор, пока не получится остаток, равный 0. Ряд равенств (*) закончится так:

$$b_{k-2}=n_{k-1}b_{k-1}+b_k,$$
$$b_{k-1}=n_kb_k.$$

Последний положительный остаток b_k в этом процессе и является наибольшим общим делителем чисел a и b.

Е. а. для многочленов или отрезков аналогичны Е. а. для целых чисел. В случае несоизмеримых отрезков применение Е. а. приводит к бесконечному процессу.

БСЭ-3.

ЕВКЛИДА ТЕОРЕМА **о п р о с т ы х ч и с л а х**: множество простых чисел является бесконечным («Начала» Евклида, книга IX, теорема 20). Более точную количественную информацию о множестве простых чисел в натуральном ряде содержит *Чебышева теорема* о простых числах и асимптотич. закон *распределения простых чисел.*

С. М. Воронин.

ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ — геометрия пространства, описываемого системой аксиом, первое систематическое (но не достаточно строгое) изложение к-рой было дано в *«Началах» Евклида.* Обычно пространство Е. г. описывается как совокупность объектов трех родов, называемых «точками», «прямыми», «плоскостями»; отношениями между ними: принадлежности, порядка («лежать между»), конгруэнтности (или понятием движения); непрерывностью. Особое место в аксиоматике Е. г. занимает аксиома о параллельных *(пятый постулат).* Первая достаточно строгая аксиоматика Е. г. была предложена Д. Гильбертом (D. Hilbert, см. *Гильберта система аксиом*). Существуют модификации системы аксиом Гильберта и другие варианты аксиоматики Е. г. Напр., в *векторно-точечной аксиоматике* за одно из основных понятий принято понятие вектора; в основу аксиоматики Е. г. может быть положено отношение симметрии (см. [5]).

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., 1949; [3] Погорелов А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968; [4] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963; [5] Бахман Ф., Построение геометрии на основе понятия симметрии, пер. с нем., М., 1969. *А. Б. Иванов.*

ЕВКЛИДОВА СВЯЗНОСТЬ — дифференциально-геометрическая структура на евклидовом векторном расслоении, обобщающая *Леви-Чивита связность* и *риманову связность* в римановой геометрии. Гладкое векторное расслоение наз. евклидовым, если каждый его слой обладает структурой евклидова векторного пространства со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$, так что для любых гладких сечений X и Y функция $\langle X, Y\rangle$ является гладкой функцией на базе. Линейная связность в евклидовом векторном расслоении наз. евклидовой связностью, если при произвольном параллельном перенесении любых двух векторов их скалярное произведение остается постоянным. Это равносильно тому, что метрич. тензор, определяющий скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ в каждом слое, ковариантно постоянен. Е. с. в касательном векторном расслоении риманова пространства является римановой связностью. Иногда термин «Е. с.» применяется только в этом смысле, и тогда «риманова связность» означает связность Леви-Чивита. *Ю. Г. Лумисте.*

ЕВКЛИДОВО КОЛЬЦО — область целостности с единицей такая, что всякому ее элементу a, отличному от нуля, поставлено в соответствие неотрицательное целое число $n(a)$, причем выполняется следующее требование: для любых двух элементов a, b, если $b\neq 0$, можно так подобрать элементы q и r, что

$$a=bq+r,$$

причем или $r=0$, или $n(r)<n(b)$.

Всякое Е. к. является *главных идеалов кольцом* и, следовательно, *факториальным кольцом*, однако, существуют кольца главных идеалов, не являющиеся евклидовыми. К числу Е. к. принадлежат кольцо целых чисел (роль $n(a)$ в нем играет абсолютная величина $|a|$), а также кольцо многочленов от одного переменного над полем ($n(a)$ — степень многочлена). Во всяком Е. к. для разыскания наибольшего общего делителя двух элементов можно применять *Евклида алгоритм*.

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973. *О. А. Иванова.*

ЕВКЛИДОВО ПОЛЕ — упорядоченное поле, в к-ром каждый положительный элемент является квадратом. Напр., поле $\mathbb{R}$ действительных чисел — Е. п. Поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не является Е. п. *В. Л. Попов.*

ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство, свойства к-рого описываются аксиомами *евклидовой геометрии*. В более общем смысле Е. п.— конечномерное действительное *векторное пространство* $\mathbb{R}^n$ со *скалярным произведением* (x, y), $x, y\in\mathbb{R}^n$, к-рое в надлежащим образом выбранных координатах (декартовых)

$$x=(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad y=(y_1, \ldots, y_n)$$

выражается формулой

$$(x,\ y)=\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Е. Д. Соломенцев.

ЕГОРОВА СИСТЕМА п о в е р х н о с т е й — триортогональная система Σ, состоящая из потенциальных поверхностей; названа по имени Д. Ф. Егорова, подробно рассмотревшего (под названием потенциальных систем) в 1901 (см. [1]) общую теорию и многочисленные примеры систем указанного вида. Е. с. Σ может быть определена как система, допускающая (однопараметрическую) группу преобразований, переводящих Σ саму в себя таким образом, что нормали в соответственных точках Σ остаются параллельными. Механическим истолкованием этой группы служит переносящее поверхности Е. с. стационарное течение жидкости, имеющее потенциал скоростей.

Пусть

$$u^i(x,\ y,\ z)=\text{const},\quad i=1,\ 2,\ 3,$$

— уравнения поверхностей, образующих Е. с. Σ, H_i — коэффициенты Ламе, фигурирующие в выражении квадрата линейного элемента пространства в криволинейных координатах $\{u^i\}$:

$$ds^2=\sum\nolimits_{i=1}^{3} H_1^2 (du^i)^2,$$

P_i — расстояние начала координат от трех касательных плоскостей Σ, R_{ik}— главные радиусы кривизны поверхности $u^i=\text{const}$, соответствующие элементу дуги $H_k du^k$, $\beta_{ik}=-H_k/R_{ik}$ — величины, через к-рые выражаются линейные элементы $d\sigma_i$ сферич. изображений поверхностей:

$$(d\sigma_i)^2=\beta_{ik}^2 (du^k)^2+\beta_{il}^2 (du^l)^2,\quad i\neq k\neq l.$$

Функции P_i и H_i удовлетворяют одной и той же системе уравнений:

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial u^k}=\beta_{ik}\theta_k.$$

Решения этих уравнений определяют еще две Е. с. Σ_1 и Σ_{-1} того же сферич. изображения, для к-рых

$$P_i^{(1)}=H_i,\quad H_i^{(-1)}=P_i.$$

Продолжение этого преобразования в ту и другую стороны дает ряд Е. с. (р я д Е г о р о в а)

$$\ldots,\ \Sigma_{-2},\ \Sigma_{-1},\ \Sigma,\ \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \ldots$$

одного сферич. изображения, из к-рых каждая следующая Σ_{k+1} получается из предыдущей Σ_k с помощью формул:

$$P_i^{(k+1)}=H_i^{(k)}.$$

И вообще, изыскание сферич. изображения Е. с. Σ приводится к изысканию потенциальной системы на сфере: любую такую систему можно принять за сферич. изображение одного из трех семейств, составляющих Σ.

Е. с. Σ характеризуется тем, что

$$H_i^2=\frac{\partial\omega}{\partial u^i},$$

где ω — некоторая функция, имеющая смысл потенциала скоростей соответствующего течения, т. е. $u^i=$ $=\text{const}$ — потенциальные поверхности. При этом, для любой потенциальной поверхности S определяется Е. с. Σ, в состав к-рой входит S. Касательная к линии пересечения какой-либо поверхности $\omega=\text{const}$ с поверхностью $u^i=\text{const}$ в любой точке параллельна лучу l^i, соединяющему центры геодезич. кривизн линий кривизны поверхности $u^i=\text{const}$; во всякой точке пространства три луча l^1, l^2, l^3 параллельны одной и той же плоскости — касательной плоскости поверхности $\omega=\text{const}$, а соприкасающиеся плоскости координатных линий проходят через одну прямую. Величины β_{ik} и R_{ik} для Е. с. удовлетворяют соотношениям:

$$R_{12}R_{23}R_{31}=R_{13}R_{32}R_{21},$$

$$\beta_{ik}=\beta_{ki},$$

(симметричность β_{ik} также необходима и достаточна для того, чтобы триортогональная система была Е. с.).

Лит.: [1] Егоров Д. Ф., Работы по дифференциальной геометрии, М., 1970. *М. И. Войцеховский.*

ЕГОРОВА ТЕОРЕМА о связи между понятиями сходимости почти всюду и равномерной сходимости последовательности функций: пусть μ есть σ-аддитивная мера, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{S}_\mu$, $E\in\mathfrak{S}_\mu$ и последовательность μ-измеримых почти везде конечных функций $f_k(x)$, $x\in E$, $k=1, 2, \ldots$, сходится почти всюду к функции $f(x)$; тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое измеримое множество $E_\varepsilon\subset E$, что $\mu\ (E\setminus E_\varepsilon)<\varepsilon$, и на множестве E_ε последовательность $f_k(x)$ сходится к функции $f(x)$ равномерно. В случае, когда μ — мера Лебега на прямой, это утверждение доказано Д. Ф. Егоровым [1].

Е. т. допускает различные обобщенные формулировки, расширяющие ее возможности. Пусть, напр., $f_k(x)$ — последовательность измеримых отображений локально компактного пространства X в метризуемое пространство Y, причем предел

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$$

существует локально почти всюду на X по *Радона мере* $\mu\geqslant0$. Тогда функция f: $X\to Y$ измерима по мере μ и для любых компакта $K\subset X$ и числа $\varepsilon>0$ найдется компакт $K_1\subset K$ такой, что $\mu(K\cap K_1)<\varepsilon$, а сужения f_k на K_1 непрерывны и равномерно сходятся на K_1 к f. Заключения Е. т. могут не выполняться, если Y не метризуемо.

Лит.: [1] Егоров Д. Ф., «C.r. Acad. sci», 1911, t. 152, p. 244—6; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976. *Л. Д. Кудрявцев.*

ЕДИНИЦА —1) Наименьшее из натуральных чисел: 1. При умножении любого числа на 1 получается то же самое число.

2) Элемент e множества M наз. левой (правой) единицей по отношению к бинарной алгебраической операции $*$, определенной на множестве M, если для любого элемента $a\in M$ выполняется равенство

$$e*a=a \quad (a*e=a).$$

Если существуют хотя бы одна левая Е. и хотя бы одна правая Е., то они совпадают и других Е. нет. Если на множестве M определено несколько бинарных операций (напр., сложение и умножение в кольце), то Е. наз. только Е. по отношению к одной из этих операций, обычно по отношению к умножению. Е. по отношению к сложению наз. тогда нулем.

3) Единицей решетки (структуры) наз. ее наибольший элемент, т. е. Е. относительно операции объединения.

4) Единицей, или делителем единицы, области целостности K наз. всякий ее обратимый элемент, т. е. такой элемент ε, для к-рого существует обратный ε^{-1} и $\varepsilon\varepsilon^{-1}=1$. Все Е. области целостности образуют группу по умножению. Эта же терминология иногда сохраняется и при переходе к полю частных кольца K (т. е. единицами поля частных наз. Е. самого кольца K). Напр., Е. поля алгебраич. чисел k наз. единицы кольца целых алгебраич. чисел поля k, p-адическими Е. наз. единицы кольца целых *p-адических чисел* и т. д.

5) Единичный морфизм объекта в категории иногда наз. просто единицей. *О. А. Иванова.*

ЕДИНИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — одномерное представление группы G, сопоставляющее любому элементу из группы G число 1. Е. п. иногда наз. также тривиальным представлением. Е. п. группы G в векторном пространстве E наз. представление группы G, сопоставляющее любому элементу из группы G единичный оператор в пространстве E.

А. И. Штерн.

ЕДИНСТВЕННОСТИ МНОЖЕСТВО, U-множество,— множество $E \subset [0, 2\pi]$ такое, что тригонометрич. ряд, сходящийся к нулю во всякой точке $(0, 2\pi] \setminus E$, есть ряд нулей. Множество, не являющееся U-множеством, наз. множеством неединственности, или M-множеством. Эти понятия связаны с проблемой единственности представления функции сходящимся к ней тригонометрич. рядом всюду, за исключением, быть может, заданного множества E. Г. Кантор (G. Kantor, 1872) показал, что конечное (а также пустое) множество является Е. м., и распространение этого результата на бесконечные множества привело его к созданию *множеств теории.*

Множества положительной меры Лебега всегда являются M-множествами. Всякое счетное множество есть U-множество. Существуют совершенные множества меры нуль, к-рые являются как M-множествами (Д. Е. Меньшов, 1916), так и U-множествами (Н. К. Бари, 1921); напр., *канторово множество* с постоянным рациональным отношением θ является U-множеством тогда и только тогда, когда $1/\theta$ есть целое число, т. е. свойство числового множества быть U- или M-множеством зависит от арифметич. природы составляющих его чисел. Существуют, однако, такие множества $E \subset [0, 2\pi]$ (так наз. $U(\varepsilon)$-множества) полной меры, что каждый тригонометрич. ряд, сходящийся к нулю в каждой точке $[0, 2\pi] \setminus E$ и имеющий коэффициенты вида $O(\varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n \downarrow 0$, есть ряд нулей.

Понятия U- и M-множества обобщаются и на ряды Фурье — Стилтьеса.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1—2, пер. с англ., [2 изд.], М., 1965; [3] Бари Н. К., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 3, с. 3—68. *В. Ф. Емельянов.*

ЕДИНСТВЕННОСТИ СВОЙСТВА аналитических функций — свойства аналитич. функций, состоящие в том, что они вполне определяются своими значениями на нек-рых подмножествах точек их области определения или границы этой области, в связи с чем различают внутренние Е. с. и граничные Е. с.

Внутренние свойства единственности. Пусть D — некоторая область плоскости $\mathbb{C}=\mathbb{C}^1$ комплексного переменного z. Классическая внутренняя теорема единственности для голоморфных, т. е. однозначных аналитич., функций в D утверждает: если голоморфные в D функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают на нек-ром множестве $E \subset D$, имеющем хотя бы одну предельную точку в D, то $f(z) \equiv g(z)$ всюду в D. Иначе говоря, если голоморфная в D функция $f(z)$ принимает нулевые значения на множестве $E \subset D$, имеющем хотя бы одну предельную точку в D, то $f(z) \equiv 0$. Доказательство этого внутреннего Е. с. аналитич. функций показывает, что оно, в сущности, является Е. с. степенных рядов по одному комплексному переменному z. Е. с. полностью сохраняется и для мероморфных в D функций $f(z)$ и $g(z)$, если рассматривать полюсы $f(z)$ и $g(z)$ как точки, в к-рых функции принимают значение ∞.

В частности, если две аналитич. функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают на сколь угодно малой окрестности нек-рой точки или на сколь угодно малой дуге нек-рой непрерывной кривой, то $f(z) \equiv g(z)$. Другое следствие: множество A-точек аналитич. функции $f(z)$, т. е. таких точек z, в к-рых $f(z)=A$, не может иметь предельных точек внутри области определения D, если только $f(z) \not\equiv A$.

Полные аналитические функции $F(z)$, $G(z)$ в смысле Вейерштрасса, вообще говоря, многозначные, обладают следующим внутренним Е. с.: пусть $f(z)$ и $g(z)$ — однозначные элементы, или ветви полных аналитич. функций $F(z)$ и $G(z)$, определенные соответственно в областях D_1 и D_2, $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$. Тогда, если $f(z)$ и $g(z)$ совпадают на нек-ром множестве точек $E \subset D_1 \cap D_2$, имеющем хотя бы одну предельную точку $z_0 \in D_1 \cap D_2$, то функции $F(z)$ и $G(z)$ имеют одну и ту же область существования и всюду совпадают как полные аналитич. функции.

На случай аналитич. функций $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $n>1$, Е. с. в приведенных формулировках не переносится. Напр., аналитич. функция $f(z)=z_1 z_2$ не равна тождественно нулю, но обращается в нуль на комплексно $(n-1)$-мерных аналитич. плоскостях $z_1=0$ и $z_2=0$. Для таких функций имеют место следующие Е. с.:

1) Если $f(z)$ — аналитич. функция в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, обращающаяся в нуль во всех точках нек-рого непустого открытого подмножества $U \subset D$, то $f(z) \equiv 0$ в D.

2) Если $f(z)$ — аналитич. функция в области $D \subset \mathbb{C}^n$, обращающаяся в нуль в нек-рой точке $z^0 \in D$ вместе со всеми частными производными $\partial^k f / \partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \ldots \partial z_n^{k_n}$, $k=k_1+k_2+\ldots+k_n$; $k_j=0, 1, 2, \ldots$; $j=1, 2, \ldots, n$, то $f(z) \equiv 0$ в D.

3) Если $f(z)$ — аналитич. функция в области $D \subset \mathbb{C}^n$, обращающаяся в нуль в действительной окрестности U_∂ точки $z^0=x^0+iy^0 \in D$, т. е. на множестве $U_\partial=\{z=x+iy \in \mathbb{C}^n;\ |x-x^0|<r,\ y=y^0\}$, то $f(z) \equiv 0$ в D.

Различие во внутренних Е. с. для случаев $n=1$ и $n>1$ обусловлено различием в поведении кратных степенных рядов по сравнению со степенными рядами по одному переменному.

Граничные свойства единственности. Сформулированная выше внутренняя теорема единственности аналитич. функций $f(z)$ одного комплексного переменного допускает ряд обобщений на тот случай, когда нули $f(z)$ лежат не внутри области аналитичности D, а на ее границе Г. Так, напр., если Г содержит жорданову дугу σ, причем всюду на σ существуют и равны нулю граничные значения $f(z)$ изнутри области D, то $f(z) \equiv 0$ в D. Наиболее общие и глубокие граничные теоремы единственности получены Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым в 1925. Пусть D — область плоскости z, ограниченная спрямляемой кривой Г, и $f(z)$ — мероморфная в D функция. Пусть ζ_0 — точка Г, в к-рой существует касательная к Г; таким свойством обладают почти все точки спрямляемой кривой. Говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке ζ_0 *угловое граничное значение* A, если $f(z)$ стремится к A, когда точка z стремится к ζ_0, оставаясь внутри пересечения области D с внутренностью любого угла раствора меньше π с вершиной ζ_0 и нормалью к Г в ζ_0 в качестве биссектрисы.

Справедлива *граничная теорема единственности Лузина — Привалова в случае угловых граничных значений*: если мероморфная в области D, ограниченной спрямляемой кривой Г, функция $f(z)$ принимает угловые граничные значения нуль на множестве $E \subset \Gamma$ положительной лебеговой меры, то $f(z) \equiv 0$. Вообще говоря, мероморфная функция может и не иметь граничных значений на Г, но для довольно широких классов мероморфных функций, напр. для функций ограниченного вида, установлено существование угловых граничных значений почти всюду на Г.

Наряду с этим имеются примеры ограниченных аналитич. функций в единичном круге D, стремящихся к нулю во всех смыслах на заданном множестве E точек единичной окружности Γ меры нуль. Кроме того, Н. Н. Лузин и И. И. Привалов построили примеры аналитических в единичном круге D функций, имеющих нулевые радиальные граничные значения, т. е. стремящихся к нулю по радиусам, всюду на нек-ром множестве $E \subset \Gamma$ полной меры 2π. Оказалось, что в вопросах единственности весьма важно также понятие категории множества по Бэру. Именно, справедлива граничная теорема единственности Лузина — Привалова в случае радиальных граничных значений: если мероморфная в единичном круге D функция $f(z)$ имеет радиальные граничные значения нуль на множестве E, расположенном на дуге σ единичной окружности Γ, метрически плотном и второй категории по Бэру на σ, то $f(z) \equiv 0$. (Множество E наз. метрически плотным на σ, если каждая порция E на σ имеет положительную меру.)

См. также *Граничные свойства аналитических функций, Предельное множество.*

Исследование граничных Е. с. аналитич. функций многих комплексных переменных еще (к 1978) не достигло такой степени полноты, как для функций одного переменного (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 3; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969, ч. 1, гл. 2, ч. 2, гл. 1 и сл.; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [4] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [5] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974; [6] Хенкин Г. М., Чирка Е. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 13—142. *Е. Д. Соломенцев.*

ЕДИНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ — собирательное название для попыток представить все или нек-рые (чаще всего — гравитационное и электромагнитное) физич. поля в виде проявлений одного фундаментального поля подобно тому, как электрическое и магнитное поля — проявления электромагнитного поля. Е. т. п. условно можно разбить на два типа: в первом фундаментальным полем является поле нек-рого геометрического объекта в пространстве событий (напр., различные варианты Е. т. п. А. Эйнштейна [1], *геометродинамика*); во втором — фундаментальное поле не имеет геометрич. природы (напр., нелинейные спинорные теории поля [3], [4]). В нек-рых Е. т. п. удается получить удачные оценки основных физич. констант.

Лит.: [1] Эйнштейн А., Собр. научных трудов, т. 2, М., 1966; [2] Уилер Дж. А., Гравитация, нейтрино и Вселенная, пер. с англ., М., 1962; [3] Гейзенберг В., Введение в единую полевую теорию элементарных частиц, пер. с англ., М., 1968; [4] Нелинейная квантовая теория поля. Сб. статей, М., 1959. *Д. Д. Соколов.*

ЕМКОСТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ, равновесный потенциал,— см. *Емкость, Робена задача.*

Е. Д. Соломенцев.

ЕМКОСТЬ множества — функция множества, возникшая в *потенциала теории* как аналог физич. понятия электростатич. емкости.

Пусть S и S^* — две гладкие замкнутые гиперповерхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, причем S^* охватывает S. Такую систему наз. конденсатором (S, S^*). Пусть $u(x)$ — гармонич. функция в области D между S и S^*, принимающая значения 1 на S и 0 на S^*. Емкостью конденсатора $C(S, S^*)$ наз. число

$$C(S, S^*) = -\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n} \int_{S'} \frac{\partial u(x)}{\partial n}\, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{(n-2)\,\sigma_n} \int_D |\operatorname{grad} u(x)|^2\, d\omega, \qquad (1)$$

где $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $\partial u/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к любой промежуточной гиперповерхности

S', лежащей между S и S^* и охватывающей S, $d\sigma$ — элемент площади S', $d\omega$ — элемент объема. Иначе Е. конденсатора $C(S, S^*)$ можно определить как нижнюю грань интегралов

$$\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}\int_D |\operatorname{grad} v(x)|^2\, d\omega$$

в классе всех непрерывно дифференцируемых в D функций $v(x)$, к-рые на S и S^* принимают значения, соответственно, 1 и 0. Если гиперповерхность $S^* = S(0, R)$ есть сфера достаточно большого радиуса R с центром в начале координат, то, переходя в (1) к пределу при $R \to \infty$, получают емкость компакта K, ограниченного гиперповерхностью S, называемую также гармонической емкостью K, или ньютоновой емкостью K:

$$C(K) = \lim_{R \to \infty} C(S, S(0, R)),$$

при этом $0 \leqslant C(K) < \infty$. Е. $C(K)$ есть аналог электростатич. Е. уединенного проводника K.

В случае плоскости $\mathbb{R}^2$ конденсатор (L, L^*) есть система двух гладких замкнутых непересекающихся простых кривых L и L^*, причем L^* охватывает L. Пусть $u(x)$ — гармонич. функция в области D между L и L^*, принимающая значения 1 на L и 0 на L^*. Емкостью конденсатора $C(L, L^*)$ наз. число

$$C(L, L^*) = -\frac{1}{2\pi}\int_{L'}\frac{\partial u(x)}{\partial n}\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_D |\operatorname{grad} u(x)|^2\, d\omega,$$

где ds — элемент длины дуги линии L', лежащей между L и L^* и охватывающей L. Пусть кривая $L^* = S(0, R)$ есть окружность достаточно большого радиуса R с центром в начале, тогда предельный переход при $R \to \infty$ в формуле

$$W(K) = \lim_{R \to \infty}\left[\frac{1}{C(L, S(0, R))} - \ln R\right]$$

даст винеровскую емкость, или постоянную Робена, компакта K, ограниченного линией L; винеровская Е. может принимать любые значения, $-\infty < W(K) < \infty$. Чаще используется логарифмическая емкость, называемая также гармонической или конформной:

$$C(K) = e^{-W(K)} = \lim_{R \to \infty} R e^{-\frac{1}{C(L, S(0, R))}}, \qquad (2)$$

к-рая изменяется в пределах $0 \leqslant C(K) < \infty$.

Е. компакта K, ограниченного гиперповерхностью S, при $n \geqslant 3$ можно определить и несколько иначе. Пусть $v_K(x)$ — емкостный, или равновесный, потенциал этого компакта, т. е. гармоническая всюду вне K, регулярная на бесконечности функция, принимающая на S значение 1. Тогда

$$C(K) = -\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}\int_S \frac{\partial v_K(x)}{\partial n}\, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}\int_{D'} |\operatorname{grad} v_K(x)|^2\, d\omega, \qquad (3)$$

где D' — внешность S. Формула (3) показывает, что Е. $C(K)$ есть совокупная положительная мера $\mu(S)$, распределенная на S и такая, что ньютонов потенциал простого слоя, порождаемый этой мерой, в точности совпадает с емкостным потенциалом $v_K(x)$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} v_K(x) &= \int_S \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}, \quad x \in D'; \\ C(K) &= \int_S d\mu(y) = \mu(S). \end{aligned}\right\}$$

Мера μ наз. емкостной, или равновесной, мерой.

В классе всех положительных борелевских мер λ на K таких, что $\lambda(K)=\mu(S)=C(K)$, емкостная мера μ дает минимум интегралу энергии

$$E(\lambda)=\iint_{K\times K}\frac{d\lambda(x)\,d\lambda(y)}{|x-y|^{n-2}}. \tag{4}$$

Иначе говоря, Е. $C(K)$ можно определить формулой $C(K)=1/\inf E(\lambda)$, где нижняя грань берется в классе всех положительных мер λ, сосредоточенных на K и нормированных условием $\lambda(K)=1$.

При $n=2$, вследствие особого поведения логарифмич. потенциала на бесконечности, вышеуказанное построение емкостного потенциала возможно только для конденсатора, напр. для $(L, S(0, R))$ при помощи *Грина функции* $G(x, y)$ для внутренности D'' окружности $S(0, R)$ в виде

$$\left.\begin{aligned} u_K(x;\ S(0,\ R)) &= \int_L G(x,\ y)\,d\mu(y), \quad x\in D,\\ C(L,\ S(0,\ R)) &= \int_L d\mu(y)=\mu(\ ), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где емкостный потенциал $u_K(x;\ S(0, R))$ совпадает в D с ранее введенной для конденсатора $(L, S(0, R))$ гармонич. функцией $u(x)$. Е., определяемая по формулам (5), иногда наз. гриновой емкостью; эта конструкция возможна при любом $n\geqslant 2$. Формула $W(K)=1/\inf E(\lambda)$, $\lambda(K)=1$, при $n=2$ дает винеровскую Е. компакта K, так как интеграл энергии

$$E(\lambda)=\iint_{K\times K}\ln\frac{1}{x-y}\,d\lambda(x)\,d\lambda(y) \tag{6}$$

теперь не всегда положителен.

Емкость произвольного компакта $K\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, можно определить при помощи описанного свойства минимума энергии:

$$C(K)=\frac{1}{\inf E(\lambda)},\quad \lambda(K)=1,\ \lambda\geqslant 0,$$

где интегралы $E(\lambda)$ вычисляются по формуле (4). При $n=2$ такой путь приводит к определению винеровской емкости произвольного компакта:

$$W(K)=\frac{1}{\inf E(\lambda)},\quad \lambda(K)=1,\ \lambda\geqslant 0,$$

где энергия $E(\lambda)$ вычисляется по формуле (6). Переход к логарифмич. Е. осуществляется по формуле $C(K)=e^{-W(K)}$.

Равносильный способ состоит в построении емкостного потенциала $v_K(x)$ для произвольного компакта K. При $n\geqslant 3$ его можно определить как наибольший из потенциалов $U_\lambda(x)$ положительных мер λ, сосредоточенных на K и таких, что $U_\lambda(x)\leqslant 1$. Порождающая $v_K(x)$ мера μ является емкостной, $\mu(K)=C(K)$. При $n=2$ построение емкостного потенциала, как и выше, ведется для конденсатора $(K, S(0, R))$ при помощи функции Грина для круга D''. Е. компакта $C(K)$ получается далее предельным переходом, как в формуле (2).

Если $v_K(x)=0$, то $C(K)=0$. При $n=2$ равенства $C(K)=0$ и $W(K)=+\infty$ равносильны. Компакты нулевой Е. играют в теории потенциала ту же роль, что и множества меры нуль в теории интегрирования. Напр., равенство $v_K(x)=1$ на K имеет место всюду, за возможным исключением множества точек, принадлежащего нек-рому компакту нулевой Е. Потенциал любой положительной меры, сосредоточенной на компакте K нулевой Е., неограничен. Более того, для любого компакта K нулевой Е. существует сосредоточенная на K положительная мера ν такая, что $U_\nu(x)=+\infty$ при

$x \in K$ и $U_\nu(x) < +\infty$ при $x \notin K$, т. е. любой компакт нулевой Е. является *полярным множеством.*

Свойства емкостных потенциалов и емкостей компактов: 1) отображения $K \to v_K(x)$ и $K \to C(K)$ возрастающие, т. е. из включения $K_1 \subset K_2$ вытекает, что всюду $v_{K_1}(x) \leqslant v_{K_2}(x)$, $C(K_1) \leqslant C(K_2)$; 2) эти отображения непрерывны справа, т. е. для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество ω такое, что если компакт K' подчинен условиям $K \subset K' \subset \omega$, то всюду $v_{K'}(x) - v_K(x) < \varepsilon$, $C(K') - C(K) < \varepsilon$; 3) $v_K(x)$ и $C(K)$, как функции K, сильно субаддитивны, т. е.

$$v_{K_1 \cup K_2}(x) + v_{K_1 \cap K_2}(x) \leqslant v_{K_1}(x) + v_{K_2}(x),$$
$$C(K_1 \cup K_2) + C(K_1 \cap K_2) \leqslant C(K_1) + C(K_2).$$

Если G — открытое множество, лежащее в шаре $B = B(0, R)$, то, по определению, Е. $C(G) = C(B) - C(B \setminus G)$. Для произвольного множества E внутренняя Е. $\underline{C}(E)$ определяется как верхняя грань $\underline{C}(E) = \sup C(K)$ по всем компактам $K \subset E$. Внешняя Е. $\overline{C}(E)$ определяется как нижняя грань $\overline{C}(E) = \inf C(G)$ по всем открытым множествам $G \supset E$. Множество E наз. C-измеримым, если $\overline{C}(E) = \underline{C}(E) = C(E)$. Все борелевские и даже аналитич. множества в $\mathbb{R}^n$ являются C-измеримыми. Таким образом, Е. $C(E)$ представляет собой функцию множества, инвариантную относительно движений, но не являющуюся, однако, аддитивной. Особенно важна характеристика множества E, даваемая условием, что его Е. $C(E)$ равна нулю. Во многих вопросах теории потенциала множествами нулевой Е. в определенном смысле можно пренебрегать. Так, напр., справедливо следующее усиление принципа максимума. Пусть $w(x)$ — ограниченная сверху субгармонич. функция в области $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\infty \notin G$; пусть неравенство $\limsup\limits_{x \to y} w(x) \leqslant M$ имеет место для всех точек $y \in \partial G$, за возможным исключением множества E, $C(E) = 0$, $\infty \notin E$. Тогда всюду в G имеем $w(x) \leqslant M$, причем знак равенства хотя бы в одной точке возможен только в случае $w(x) \equiv M$.

Понятие Е. обобщается в различных направлениях. Исходя из понятия емкостного потенциала и емкостной меры или энергии, теорию Е. строят для неньютоновых потенциалов таких, как *бесселевы потенциалы*, *нелинейные потенциалы*, *Рисса потенциалы* и др. Эти построения позволяют, в частности, варьировать понятие множества нулевой Е. применительно к различным проблемам математич. физики и анализа (см. [6]).

По Г. Шоке (G. Choquet), Е. компактов K в абстрактном отделимом топологич. пространстве X определяется аксиоматически как числовая функция множества $K \to C(K)$, удовлетворяющая аксиомам возрастания, непрерывности справа и сильной субаддитивности. Несколько иной подход к теории Е. в абстрактных пространствах X получается в рамках общей аксиоматики *потенциала теории абстрактной* или теории *гармонических пространств.* В абстрактной теории Е. основной является теорема Шоке, утверждающая, что C-измеримыми являются K-аналитические множества, т. е. непрерывные образы множеств типа $K_{\sigma\delta}$ из нек-рого компактного пространства.

Вообще, в различных задачах теории функций, связанных главным образом с аппроксимацией в определенных классах функций, весьма полезным оказалось введение своих специфич. понятий Е. Так, напр., большое значение в вопросах приближения аналитич. функциями имеет понятие *аналитической емкости.* Пусть K — компакт на комплексной плоскости z,

$f(z)$ — аналитич. функция вне K, $|f(z)| \leqslant 1$, $f(\infty)=0$; аналитической Е. $\gamma(K)$ наз. число

$$\gamma(K) = \sup \left| \frac{1}{2\pi} \int_{L'} f(z)\, dz \right|,$$

где L' — контур, охватывающий K, и верхняя грань берется по всем $f(z)$, удовлетворяющим выписанным условиям.

Лит.: [1] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [2] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [3] Полиа Г., Сёге Г., Изопериметрические неравенства в математической физике, [пер. с англ.], М., 1962; [4] Brelot M., Lectures on potential theory, Bombay, 1960; [5] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [6] Карлесон Л., Избранные проблемы теории исключительных множеств, пер. с англ., М., 1971; [7] Витушкин А. Г., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 5—12.
Е. Д. Соломенцев.

ЕРМАКОВА ПРИЗНАК сходимости числовых рядов с положительными членами: пусть $f(x)$ — положительная убывающая при $x \geqslant 1$ функция. Если при указанных x для $\lambda < 1$ выполняется неравенство

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \leqslant \lambda,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится; если выполняется неравенство

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \geqslant 1,$$

то ряд расходится. В частности, если существует предел

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} < 1 \quad (\text{или } > 1),$$

то ряд сходится (расходится). Установлен В. П. Ермаковым [1].

Лит.: [1] Ермаков В. П., Новый признак сходимости и расходимости бесконечных знакопостоянных рядов, К., 1872.
Л. Д. Кудрявцев.

ЕСТЕСТВЕННО УПОРЯДОЧЕННЫЙ ГРУППОИД — частично упорядоченный группоид H, в к-ром все элементы положительны (т. е. $a \leqslant ab$ и $b \leqslant ab$ для любых $a, b \in H$) и больший из двух элементов всегда делится (и справа и слева) на меньший, т. е. из $a < b$ следует $ax = ya = b$ для некоторых $x, y \in H$. Положительный конус любой частично *упорядоченной группы* является естественно упорядоченной полугруппой.

О. А. Иванова.

ЕСТЕСТВЕННЫЙ ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД — формальный вывод, по возможности приближенный к содержательному рассуждению, привычному для математика и логика. Критерии естественности и качества вывода не уточняются полностью, но обычно имеются в виду выводы, осуществляемые по общеупотребительным правилам логических переходов, компактные (в частности, не содержащие излишних применений правил вывода), «склеенные» (повторяющиеся участки выводов должны устраняться, напр., при помощи вычленения вспомогательных лемм) и др.

Первоначально формализации логических и математич. теорий не преследовали целей естественности (см. *Логические исчисления*); решающее продвижение в этом направлении составило исчисление натуральных выводов (см. *Генцена формальная система*), имитирующее форму обычных математич. умозаключений и позволяющее вводить и использовать допущения привычным образом. Довольно естественно выглядят и приемы обращения с допущениями в секвенциальных исчислениях, к-рые обладают дополнительным преимуществом — *подформульности свойством* и поэтому лежат в основе дальнейших продвижений в проблеме построения Е. л. в.

Для автоматизации поиска Е. л. в. были предложены [2] вспомогательные секвенциальные исчисления, обладающие свойством подформульности, но запрещающие переход допущений в сукцедент (см. *Секвенция*). По выводу в таком исчислении легче строить Е. л. в. На этой основе была разработана методика поиска Е. л. в., включающая учет «родственностей» (т. е. равных подформул в составе испытуемых формул) для сокращения выводов и их «склеивания», «прополку» излишних формул и применений правил, возможность варьирования тактик установления выводимости и др. В рамках логических средств классического *высказываний исчисления* эта методика была доведена до машинного алгорифма (программа находила Е. л. в. данного утверждения из данного списка гипотез и записывала этот вывод в виде логико-математич. текста на русском языке). К проблеме поиска Е. л. в. примыкают задачи корректирования гипотез и усиления теорем (речь идет о методах, позволяющих вводить в заданную формулу небольшие исправления так, чтобы она стала теоремой или превратилась в более сильную теорему, и об исследовании критериев качества таких исправлений).

Разработки в области Е. л. в. в основном посвящены классич. логикам, но возникшие методы носят более общий характер.

Лит.: [1] Математическая теория логического вывода, сб. переводов, М., 1967; [2] Шанин Н. А. и др., Алгорифм машинного поиска естественного логического вывода в исчислении высказываний, М.— Л., 1965; [3] Prawitz D., Natural deduction, Stockh., 1965.

С. Ю. Маслов.

ЖАНЕ ТЕОРЕМА: во всяком аналитическом *римановом многообразии* размерности n с отмеченной точкой существует окрестность этой точки, допускающая изометрическое аналитич. вложение в евклидово пространство E^{s_n}, где размерность $s_n = n(n+1)/2$. Ж. т. сохраняет силу при замене пространства E^{s_n} произвольным аналитическим римановым многообразием размерности s_n с отмеченной точкой (в к-рую должна переходить отмеченная точка вкладываемого многообразия). Ж. т. справедлива в случае псевдоримановых многообразий при условиях

$$q \geqslant s_n, \quad q_+ \geqslant n_+, \quad q_- \geqslant n_-,$$

где n_+ и $n_- = n - n_+$ — размерности положительной и отрицательной частей метрического тензора на погружаемом многообразии, q_+ и $q_- = q - q_+$ — соответствующие размерности объемлющего многообразия (см. [3]). Ж. т.— первая общая теорема вложения в римановой геометрии (см. *Изометрическое погружение*).

Ж. т. впервые была высказана как гипотеза Л. Шлефли [1], доказана М. Жане [2].

Лит.: [1] Schläfli L., «Ann. mat. pura ed appl.», 1873, ser. 2, t. 5, p. 178—93; [2] Janet M., «Ann. polon. math.», 1926, t. 5, s. 38—43; [3] Фридман А., в сб.: Гравитация и топология, М., 1966, с. 182—88. *А. Б. Иванов.*

ЖЕГАЛКИНА АЛГЕБРА — специальная алгебра $A = \langle A, \Omega \rangle$, где

$$A = \{0, 1\}, \quad \Omega = \{x \cdot y, \ x + y \pmod 2), 0, 1\},$$

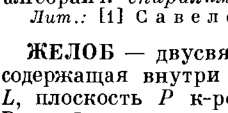
$x \cdot y$ — операция умножения. Интерес представляет *клон* F действия Ω на A. Каждая операция из F представляется в виде полинома по mod 2, к-рый наз. полиномом Жегалкина по имени И. И. Жегалкина, начавшего изучение этого клона [1]. Им было показано, что всякая конечноместная операция на A содержится в F. Таким образом, изучение свойств клона F включает в себя, в частности, изучение всех алгебр $A = \langle A, \Omega' \rangle$ при произвольном Ω'.

Лит.: [1] Жегалкин И. И., «Матем. сб.», 1927, т. 34, № 1, с. 9—28; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1966. *В. Б. Кудрявцев.*

ЖЕЗЛ — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид:

$$\rho = a / \sqrt{\varphi}.$$

Каждому значению φ соответствуют два значения ρ — положительное и отрицательное. Кривая состоит из двух ветвей, каждая из к-рых асимптотически приближается к полюсу (см. рис.). Прямая $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ при $\rho = \pm\infty$ является асимптотой, $(^1/_2, \ a\sqrt{2})$ и $(-^1/_2, -a\sqrt{2})$ — точки перегиба. Ж. относится к так наз. алгебраич. *спиралям*.



Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

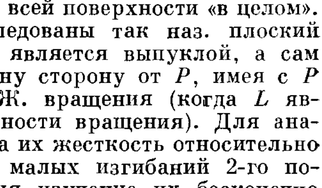
ЖЕЛОБ — двусвязная поверхность S типа кольца, содержащая внутри себя плоскую замкнутую кривую L, плоскость P к-рой во всех точках L касается S. Вдоль L гауссова кривизна K Ж. S обращается в нуль. Если при этом L разделяет Ж. S на две части, на каждой из к-рых K знакопостоянна, то соответствующие части S наз. положительным и отрицательным полужелобами. Примером Ж. является узкая полоска тора вдоль одной из его замкнутых параболических параллелей.

Ж. занимает промежуточное положение между объектами геометрии «в целом» и геометрии «в малом», так как он, заключая в себе определенную замкнутую кривую L, не может быть сколь угодно малым, и в то же время размеры его в трансверсальных к L направлениях могут быть сколь угодно малыми. Интерес к изучению Ж. вызывается тем, что достаточно узкая полоска поверхностей знакопеременной кривизны вдоль замкнутой параболич. линии часто представляет собой Ж., и поэтому знание свойств Ж. при различных деформациях позволяет иногда получать информацию о соответствующих свойствах всей поверхности «в целом».

Наиболее подробно исследованы так наз. плоский Ж. (для к-рого кривая L является выпуклой, а сам Ж. S располагается по одну сторону от P, имея с P касание 1-го порядка) и Ж. вращения (когда L является параллелью поверхности вращения). Для аналитич. плоских Ж. доказана их жесткость относительно аналитических бесконечно малых изгибаний 2-го порядка, а для Ж. вращения изучение их бесконечно малых изгибаний 1-го и 2-го порядков распространено до класса регулярности C^1 [3]. С точки зрения дифференциальных уравнений исследование Ж. сводится к изучению уравнений смешанного типа.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», т. 3, в. 2, 1948, с. 47—158; [2] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959; [3] Сабитов И. Х., «Матем. сб.», 1975, т. 98, № 1, с. 113—29; 1976, т. 99, № 1, с. 49—57. *И. Х. Сабитов.*

ЖЕРГОННА ТОЧКА — точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности с противоположными этим вершинам сторонами. Названа по имени Ж. Жергонна (J. Gergonne, 19 в.).



А. Б. Иванов.

ЖЕСТКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА — система обыкновенных дифференциальных уравнений, при численном решении к-рой явными методами типа Рунге — Кутта или Адамса, несмотря на медленное изменение искомых переменных, шаг интегрирования обязан оставаться малым. Попытки уменьшить время вычисления решения Ж. д. с. за счет увеличения шага интегрирования приводят к резкому возрастанию погрешности (взрыв погрешности).

Автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz(t)}{dt}=f(z(t)), \quad f(z)\in C^p(G), \quad G\subset R^m, \qquad (1)$$

наз. Ж. д. с., если для любых начальных значений $z(0)=z^\circ\in G$ на заданном отрезке $[0, T]$, принадлежащем интервалу существования решения (1), выполнены условия:

а) максимальный модуль собственных значений матрицы Якоби (спектральный радиус) ограничен вдоль решения $z(t)$:

$$0 < L \leqslant \rho\left(\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right) \leqslant \left\|\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right\| = \left\|\frac{\partial K(t+\tau, t)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}\right\| < \infty,$$
$$0 \leqslant t \leqslant T;$$

б) существуют такие числа $\tau_п$, N, ν, что при $0 < \tau_п \leqslant T$, $1 \leqslant N$, $1 \leqslant \nu \leqslant p$, $0 < \tau_п \leqslant t + \tau_п \leqslant t + \tau \leqslant T$ справедливо неравенство

$$\left\|\frac{\partial^\nu K(t+\tau, t)}{\partial \tau^\nu}\right\| \leqslant \left(\frac{L}{N}\right)^\nu,$$

здесь

$$K(t+\tau, t) = X(t+\tau)X^{-1}(t),$$

$X(t)$ — фундаментальная матрица уравнения в вариациях для системы (1),

$$\|A\| = \max_i \sum_{k=1}^m |a_{ik}|,$$

$\tau_п$ — длина пограничного слоя. К Ж. д. с. относятся все системы вида (1), для к-рых условия а) и б) выполняются совместно после масштабирования компонент вектора $z(t)$ на каждом решении.

Неавтономная нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка m наз. Ж. д. с., если жесткой является равносильная ей автономная система порядка $m+1$. Примером жесткого неавтономного уравнения может служить скалярное уравнение:

$$\frac{dz(x)}{dx} = q\,[z(x) - \varphi(x)] + \frac{d\varphi(x)}{dx}, \quad z(0) = z^0, \qquad (2)$$

$\varphi(x) \in C^p$, $0 \leqslant x < \infty$, — заданная функция. Другой пример Ж. д. с.— линейная однородная система

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t), \quad z(0) = z^0, \qquad (3)$$

с постоянной $(m \times m)$-матрицей A, имеющей различные собственные значения, разделенные на две группы:

$$\left.\begin{array}{c} |\lambda_i| \leqslant \beta, \quad \max\limits_i \operatorname{Re}\lambda_i \leqslant \alpha, \quad \alpha \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant S; \\ \max\limits_i \operatorname{Re}\lambda_i < -\Lambda \leqslant -\beta, \quad \max\limits_i |\lambda_i| = L, \quad 1 \leqslant \frac{L}{\beta}, \\ S+1 \leqslant i \leqslant m. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Условие а) для системы (3) очевидно выполняется. Норма

$$\left\|\frac{\partial K(t+\tau, t)}{\partial \tau}\right\| = \|Ae^{A\tau}\|$$

ограничена сверху величиной $C_1\beta e^{\alpha\tau}$ при $\tau \geqslant \tau_п = C_2/\Lambda$, где C_1, C_2 — некоторые постоянные. При $C_1\beta e^{\alpha T} \leqslant L$, $N = L/(C_1\beta e^{\alpha T})$ выполняется условие б). Вектор $d^2z(t)/dt^2$ при $t \geqslant \tau_п$ ограничен сверху:

$$\left\|\frac{d^2z(t)}{dt^2}\right\| \leqslant \left\|\frac{\partial K(t, 0)}{dt}\right\| \cdot \left\|\frac{dz(t)}{dt}\Big|_{t=0}\right\| \leqslant C_1\beta e^{\alpha T}\left\|\frac{dz(t)}{dt}\Big|_{t=0}\right\|.$$

Поэтому для вектора $dz(t)/dt$ при $t \geqslant \tau_п$ можно построить интерполяционный алгебраич. многочлен нулевой степени с равномерно распределенными узлами и выбрать шаг интерполяции в виде $H = C_3/C_1\beta e^{\alpha T}$, где C_3 — некоторая постоянная (см. [1]), зависящая от заданной погрешности. С другой стороны, использование метода ломаных Эйлера для системы (3) требует ограничения сверху на шаг интегрирования на всем отрезке решения системы (см. [1]):

$$|1 + h\lambda_i| < 1, \ h < -\max_i \frac{2\operatorname{Re}\lambda_i}{|\lambda_i|^2} \leqslant \frac{2}{L}, \ i = s+1, \ldots, m. \ (5)$$

При этом составляющие приближенного решения системы (3) методом ломаных Эйлера, соответствующие первой группе собственных значений (4), будут представлены с достаточной точностью (см. [1]):

$$h\beta \leqslant 2\beta/L \ll 1, \quad 1 \ll NC_3/2 \leqslant H/h.$$

Ограничение вида (5) на шаг интегрирования характерно для экстраполяционных методов типа Рунге — Кутта и Адамса. Отношение H/h, к-рое может рассматриваться как качественная мера жесткости системы (3), достигает во многих случаях величин порядка 10^4—10^{10}. Математич. описание динамич. процессов и явлений в физике, химии, биологии, технике и экономике, связанное с учетом все большего числа факторов, повышающих порядок дифференциальных систем, приводит к увеличению жесткости. Ж. д. с. требуют специальных методов решения.

В некоторых случаях исходную систему (1) можно преобразовать, используя теорию и асимптотич. методы для дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, поведение решения к-рых в пограничном слое описывается экспоненциально затухающими функциями (см. [2]). Однако Ж. д. с. обычно трудно привести к подобному виду, и, кроме того, после асимптотич. преобразования жесткость не всегда существенно уменьшается. Поэтому для решения систем общего вида используются численные методы, основным свойством к-рых является обеспечение подавления быстро затухающих составляющих решения системы (1) вне пограничного слоя при величине применяемого шага интегрирования, близкой к величине шага алгебраич. интерполяции.

Для решения Ж. д. с. целесообразно использование неявных методов (см. [9], [17]). Для построения неявных схем можно использовать способ неопределенных коэффициентов на основе формулы Тейлора, записанной в виде:

$$z(t_{n+1}) = z(t_n) + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu+1} \frac{d^\nu z(t)}{dt^\nu}\bigg|_{t=t_{n+1}} \cdot H^\nu + \\ + \int_0^H (-1)^{p+1} \frac{\tau^p}{p!} \frac{d^{p+1} z(t)}{dt^{p+1}}\bigg|_{t=t_n+\tau} d\tau, \qquad (6)$$

где n — целое положительное число, $H > 0$, $nH = t_n$. Напр., такие методы описаны в [9]:

$$\sum_{\chi=0}^{r} a_\chi y_{n+1-\chi} = Hf(y_{n+1}), \quad y_n = y(t_n), \qquad (7)$$

$r=1$, $a_0=1$, $a_1=-1$ — неявный метод ломаных;

$r=2$, $a_0=\frac{3}{2}$, $a_1=-2$, $a_2=\frac{1}{2}$ — неявный метод 2-й степени;

$r=3$, $a_0=\frac{11}{6}$, $a_1=-3$, $a_2=\frac{3}{2}$, $a_3=-\frac{1}{3}$ — неявный метод 3-й степени;

$r=4$, $a_0=\frac{25}{12}$, $a_1=-4$, $a_2=3$, $a_3=-\frac{4}{3}$, $a_4=\frac{1}{4}$ — неявный метод 4-й степени.

Под степенью метода понимается наибольшая степень H^k в разложении (7) по степеням H, множитель при к-рой совпадает с соответствующим множителем в (6).

Применение неявного метода ломаных к системе (3) приводит к разностным уравнениям

$$(E - HA)\, y_{n+1} = y_n, \quad y_0 = z^0. \qquad (8)$$

Пусть система (3) асимптотически устойчива по Ляпунову. Тогда матрица $\|E - HA\|$ — неособенная при любом H. При использовании формулы Лагранжа — Сильвестра решение (8) представляется в виде

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} P_i(A, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \frac{z^0}{(1 - H\lambda_i)^n}. \qquad (9)$$

Для неявного метода ломаных (8) условие асимптотич. устойчивости

$$\left|\frac{1}{1-H\lambda_i}\right|<1$$

выполняется при любом H, и в (9), с ростом n составляющие решения, соответствующие второй группе собственных значений (4), будут быстро убывать по модулю. Величина H ограничивается только условиями требуемой точности приближенных решений. Стремление повысить степень линейных многошаговых методов вступает в определенное противоречие с их устойчивостью (см. [11]).

r-Шаговый метод

$$\sum_{\chi=0}^{r}\alpha_\chi y_{n+1-\chi}=H\sum_{\chi=0}^{r}b_\chi f(y_{n+1-\chi}) \qquad (10)$$

наз. *А - устойчивым*, если все решения (10) стремятся к нулю при $n\to\infty$ с фиксированным положительным H в случае применения (10) к скалярному уравнению

$$\frac{dz}{dt}=qz, \qquad (11)$$

где q — комплексная постоянная с отрицательной действительной частью. Явный r-шаговый метод не может быть A-устойчивым. Степень линейного многошагового A-устойчивого метода не может превышать двух. Наименьшая константа ошибки $c_\delta={}^1/_{12}$ получается для неявного метода трапеций (см. [11]):

$$y_{n+1}=y_n+\frac{H}{2}\left[f(y_{n+1})+f(y_n)\right]. \qquad (12)$$

Требование $A(\alpha)$-устойчивости накладывает менее жесткие ограничения на методы в отличие от A-устойчивости. r-Шаговый метод (10) при фиксированном $H>0$ наз. *$A(\alpha)$ - устойчивым*, если все решения (10) стремятся к нулю при $n\to\infty$ в случае применения (10) к уравнению (11), q — комплексная постоянная, к-рая принадлежит множеству

$$s_\alpha=\{z\in\mathbb{C}\mid|\arg(-z)|<\alpha,\ z\neq 0\},$$

$\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. Явный r-шаговый метод не может быть $A(0)$-устойчивым. Существует только один $A(0)$-устойчивый r-шаговый метод со степенью равной $r+1$ — метод (12). Для всех $\alpha\in[0,\ \frac{\pi}{2})$ существуют $A(\alpha)$-устойчивые методы со степенью, равной r при $r=3,\ 4$ (см. [13]).

Следующее ослабление требований A-устойчивости содержится в так наз. *определении Гира* (см. [14]): метод (10) наз. *жестко устойчивым*, если все решения (10) стремятся к нулю при $n\to\infty$ в случае применения (10) к уравнению (11). Hq — комплексная постоянная, принадлежащая множеству $R_1\cup R_2$, где

$$R_1=\{Hq\in C\mid -a\leqslant \operatorname{Re}Hq\leqslant b,\quad -d\leqslant \operatorname{Im}Hq\leqslant d\},$$

$$R_2=\{Hq\in C\mid \operatorname{Re}Hq<-a\},$$

причем для $Hq\in R_1$ обеспечивается заданная точность.

Методы (7) жестко устойчивы и, следовательно, $A(\alpha)$-устойчивы. Для них $a\leqslant 0{,}7$.

Можно построить согласно (6) неявные аналоги явных методов Рунге — Кутта любой степени, обладающие A-устойчивостью и жесткой устойчивостью. Напр., метод 2-й степени

$$y_{n+1}=y_n+Hf\left(y_{n+1}-\frac{H}{2}f(y_{n+1})\right). \qquad (13)$$

Применение метода (13) к системе (3) приводит к разностным уравнениям

$$\left(E-HA+\frac{H^2A^2}{2}\right)y_{n+1}=y_n,$$

которые доказывают его A-устойчивость. Для метода 3-й степени:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}(K_1+4K_2+K_3), \tag{14}$$

$$K_1=Hf(y_{n+1}),\ K_2=Hf\left(y_{n+1}-\frac{K_1}{2}\right),$$

$$K_3=Hf(y_{n+1}-2K_2+K_1)$$

аналогично получаются разностные уравнения:

$$\left(E-HA+\frac{H^2A^2}{2}-\frac{H^3A^3}{6}\right)y_{n+1}=y_n.$$

Так же строятся A-устойчивые и жестко устойчивые методы более высоких степеней. Методы (13) и (14) и методы, опубликованные в [5], принципиально отличаются от так наз. неявных методов Рунге — Кутта (см. [16]), не получивших распространения из-за большой вычислительной трудоемкости. Применение неявных методов требует большей вычислительной работы на одном шаге, чем применение явных методов, но это оправдывается в Ж. д. с. за счет резкого увеличения шага интегрирования. При решении задачи (3) необходимо обращать матрицу или решать систему линейных уравнений. Здесь может возникнуть проблема плохой обусловленности, так как число обусловленности матрицы $\|E-HA\|$ увеличивается с увеличением H. В общем случае (1) на каждом шаге интегрирования необходимо решать нелинейную систему уравнений относительно вектора y_{n+1}. Обычно при этом пользуются модифицированным методом Ньютона с начальным условием, вычисленным по любой экстраполяционной формуле, использующей вектор y_n. Метод экстраполирования при этом наз. **предиктором**, а неявный метод — **корректором**. Метод простой итерации в Ж. д. с. неприменим из-за больших значений LH. Поскольку в неявных схемах применяется метод Ньютона для решения уравнений $F(y_{n+1})=0$ и, следовательно, необходимо вычислить матрицу Якоби системы (1), то иногда включают эту матрицу непосредственно в формулы методов, к-рые при решении линейных систем также обладают свойством A-устойчивости (см. [12], [15]). Для решения Ж. д. с. широко применяется **процедура Гира** (**метод Гира**) с автоматич. контролем погрешности на шаге и изменением по этому критерию как степени методов, так и шага интегрирования [14]. В процедуре Гира в качестве корректора используются и методы (7) (см. [9]).

Другой подход к созданию методов интегрирования жестких систем уравнений связан с учетом в формулах методов решений соответствующих линейных систем (см. [4] — [8], [10]). В первых работах этого направления рассмотрены жесткие системы уравнений с известными собственными значениями матрицы $\partial f(z)/\partial z$, по к-рым строились матричные коэффициенты методов. В связи с трудностью решения проблемы собственных значений это направление длительное время не развивалось. В [6], [7], [8] предложены способы построения матричных коэффициентов без решения проблемы собственных значений для матрицы $\partial f(z)/\partial z$ системы (1). Методы этого направления можно строить на основе равенства (см. [7]):

$$z(t_{n+1})-z(t_n)-$$

$$-\left[\int_0^H \varphi^{-1}(t_n+\tau)\,d\tau+C\right]\varphi(t_{n+1})\frac{dz}{dt}\Big|_{t=t_n}+$$

$$+C\varphi(t_n)\frac{dz(t)}{dt}\Big|_{t=t_{n+1}}=\int_0^H\left[\int_0^\tau \varphi^{-1}(t_n+\rho)\,d\rho+C\right]\times$$

$$\times\left[\varphi(t_n+\tau)\frac{d^2z(t)}{dt^2}-\frac{d\varphi(t_n+\tau)}{d\tau}\frac{dz(t)}{dt}\right]_{t=t_{n+1}-\tau}d\tau, \tag{15}$$

где $\varphi(t_n+\tau)\in C^1$, $0\leqslant\tau\leqslant H$,— неособенная $(m\times m)$-матрица, C — матрица, не зависящая от τ.

Различный выбор матриц $\varphi(t_n+\tau)$ и C приводит к разностным уравнениям, соответствующим тем или иным методам численного интегрирования, если пренебречь правой частью в (15). При $C=0$ получаются явные методы, а при $C\neq0$ — неявные. Пусть $\varphi(t_n+\tau)=$ $=E$. Тогда неявный метод ломаных (7) соответствует $C=-HE$; метод трапеций (12) $C=-\frac{H}{2}E$; явный метод ломаных $C=0$. При $\varphi(t_n+\tau)=e^{A\tau}$, где A — постоянная $(m\times m)$-матрица, получается обобщенный метод ломаных (см. [7]):

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+\int_0^H e^{A\tau}\,d\tau\, f(y(t_n)). \tag{16}$$

Формула (16) переходит в явный метод ломаных при $A=0$. Метод (16) дает точное решение системы уравнений

$$\frac{dz(t)}{dt}=Az(t)+M,\quad z(0)=z^0,\quad M\in R^m, \tag{17}$$

для дискретных значений $t_n=nH$. Если известна матрица

$$\Phi(A,h)=\int_0^h e^{A\tau}\,d\tau,$$

то использование k раз рекуррентной формулы

$$\Phi(A,2^{q+1}h)=\Phi(A,2^qh)\,[2E+A\Phi(A,2^qh)] \tag{18}$$

приводит к матрице

$$\Phi(A,2^kh)=\int_0^{2^kh} e^{A\tau}\,d\tau,$$

применяемой в (16). В качестве начального приближения для (18) при достаточно малом $h\leqslant1/\|A\|$ целесообразно употреблять приближенную формулу:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^h e^{A\tau}\,d\tau\cong h\left(E-\frac{hA}{2}\right)^{-1}=\Phi_0,\\ &e^{Ah}\cong\left(E-\frac{Ah}{2}\right)^{-1}\left(E+\frac{Ah}{2}\right)=E+A\Phi_0,\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

или, если собственные значения матрицы действительные, то

$$\int_0^h e^{A\tau}\,d\tau\cong h\sum_{\gamma=0}^{s}\frac{A^\gamma h^\gamma}{(\gamma+1)!}=\Phi_0. \tag{20}$$

Формула (19) дает соответствие по устойчивости в смысле Ляпунова решений системы дифференциальных (17) и разностных (16) уравнений в случае комплексных собственных значений A с малой действительной частью. Если область существования решений $\bar G\subset G$ является замкнутой, выпуклой по z, и приближенные решения принадлежат той же области, то погрешность метода (16) удовлетворяет разностному уравнению (см. [7]):

$$\varepsilon_{n+1}=\left\{e^{AH}+\int_0^H e^{A\tau}\,d\tau\left[\int_0^1\frac{\partial f(y_n+\rho\varepsilon_n)}{\partial y_n}\,d\rho-A\right]\right\}\varepsilon_n+$$
$$+\int_0^H\int_0^\tau e^{A\xi}\,d\xi\left[\frac{d^2z(t)}{dt^2}-A\frac{dz(t)}{dt}\right]_{t=t_{n+1}-\tau}d\tau,$$

где $\varepsilon_n=z_n-y_n$, а $z_n=z(t_n)$, $y_n=y(t_n)$ — решения (1) и (16) соответственно. Пусть $\|y\|=\max\limits_i|y_i|$ — норма вектора (норма матриц подчинена принятой норме вектора) и в области $\bar G$:

$$\left\|\int_0^1\frac{\partial f(y_n+\rho\varepsilon_n)}{\partial y_n}\,d\rho-A\right\|\leqslant\mu_1,$$

$$\left\|\frac{\partial f(z)}{\partial z}-A\right\|\leqslant\mu_2,\quad\left\|\frac{dz(t)}{dt}\right\|\leqslant l.$$

По матрице A с действительными элементами вычисляется число

$$R=\max_i\left(a_{ii}+\sum\nolimits_{k=1,\ k\neq i}^{m}|a_{ik}|\right),\quad \|e^{At}\|\leqslant e^{Rt}.$$

Тогда справедлива оценка

$$\|\varepsilon_{n+1}\|\leqslant\left(e^{RH}+\int_0^H e^{R\tau}\,d\tau\cdot\mu_1\right)\|\varepsilon_n\|+$$

$$+\int_0^H\int_0^\tau e^{R\xi}\,d\xi\,d\tau\cdot\mu_2 l,\quad \|\varepsilon_0\|=\|\varepsilon(0)\|;$$

$$R=0,\ \|\varepsilon_{n+1}\|\leqslant(1+\mu_1 H)\|\varepsilon_n\|+\frac{H^2}{2}\mu_2 l;$$

$$0<\mu_1\leqslant-R=\alpha,\ \|\varepsilon_{n+1}\|\leqslant\|\varepsilon_n\|+\frac{\alpha H+e^{-\alpha H}-1}{\alpha^2}\mu_2 l;$$

$$0\leqslant\mu_1\leqslant R,\ \|\varepsilon_{n+1}\|\leqslant e^{2RH}\|\varepsilon_n\|+\frac{e^{RH}-1-RH}{R^2}\mu_2 l;$$

$$0<R\leqslant\mu_1,\ \|\varepsilon_{n+1}\|\leqslant e^{2\mu_1 H}\|\varepsilon_n\|+\frac{e^{\mu_1 H}-1-\mu_1 H}{\mu_1^2}\mu_2 l.$$

Если $0<\alpha=-R<\mu_1$, погрешность ε_n можно оценивать, считая $R=0$. В оценках возможны другие нормы векторов, соответствующие им нормы матриц и логарифмич. нормы (см. [3]). Приведенные оценки показывают, что при решении системы (1) шаг интегрирования H можно использовать значительно большим, чем в классич. методах. Матрицу A следует выбирать близкой по всем элементам к матрице Якоби системы (1). В пограничном слое, когда переменные изменяются быстро, грубо оценивая μ_1, μ_2, l, R по приближенному решению, можно менять матрицу A, добиваясь необходимой точности. Так как за пограничным слоем переменные системы (1) меняются медленно, на практике часто оказывается достаточно одной матрицы A, чтобы вычислить все решение при $\tau_{\text{п}}<t<T$. Проверку точности можно производить по правилу Рунге (см. [1]).

С целью увеличения точности на основе метода (16) в [7] предложен класс системных методов численного интегрирования. Для методов этого класса выполняются требования: 1) системный метод s-й степени должен быть точным при интегрировании алгебраич. многочленов степени $s-1$ при $A=0$; 2) системный метод любой степени должен быть точным при решении уравнений (17).

Одношаговый метод 2-й степени имеет вид:

$$y_{n+1}=y_n+\int_0^{H/2}e^{A\tau}\,d\tau\times$$

$$\times\left[2f\left(y_n+\int_0^{H/2}e^{A\tau}\,d\tau f(y_n)\right)-A\int_0^{H/2}e^{A\tau}\,d\tau\ f(y_n)\right].$$

Там же построены явный одношаговый метод 3-й степени и многошаговые системные методы. Даны асимптотич. оценки их погрешностей. При $A=0$ эти методы переходят в формулы типа Рунге — Кутта или Адамса. При аппроксимации интегралов от $e^{A\tau}$ дробно рациональными матричными полиномами от A с учетом неособенности соответствующих матриц системные методы переходят в явную форму соответствующих неявных методов, получающихся после итераций по методу Ньютона. Неявным системным методом 1-й степени является метод

$$y_{n+1}=y_n+\int_0^H e^{A\tau}\,d\tau f(y_n)+$$

$$+\int_0^H e^{A\tau}\,d\tau\,[f(y_{n+1})-f(y_n)-A(y_{n+1}-y_n)].\quad(21)$$

Он получается из (15), если выбрать

$$\varphi(t_n+\tau)=e^{A\tau},\ C=-\int_0^H e^{-A\tau}\,d\tau.$$

Уравнения (21) получаются способом приведения дифференциальных уравнений к интегральным (см. [8]). Интеграл от $e^{A\tau}$ в методе (21) вычисляется по формулам (18) с начальным условием (20). Исследован способ коррекции этого интеграла по ходу решения (см. [8]).

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Васильева А. Б., «Матем. сб.», 1960, т. 50, в. 1, с. 43—58; [3] Былов Б. Ф. и др., Теория показателей Ляпунова..., М., 1966; [4] Гаврин М. К., в сб.: Методы вычислений, 1963, в. I, с. 45—51; [5] Ракитский Ю. В., «Докл. АН СССР», 1970, т. 193, № 1, с. 40—42; [6] его же, там же, 1972, т. 207, № 4, с. 793—95; [7] его же, «Тр. Ленингр. политехн. ин-та», 1973, № 332, с. 88—97; [8] Павлов Б. В., Повзнер А. Я., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1973, т. 13, № 4, с. 1056—59; [9] Curtiss C. F., Hirschfelder J. O., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1952, v. 38, p. 235—43; [10] Mah R. S. H., Michaelson S., Sargent R. W., «Chem. Engng Sci.», 1962, v. 17, p. 619—39; [11] Dahlquist G., «Nord. tidskr. Informationsbehandling», 1963, b. 3, s. 27—43; [12] Rosenbrock H. H., «Comput. J.», 1963, v. 5, p. 329—30; [13] Widlund O. B., «Nord. tidskr. Informationsbehandling», 1967, b. 7, s. 65—70; [14] Gear C. W., в кн.: Information Processing 68, v. 1, Amst., 1969, p. 187—93; [15] Lambert J. D., Sigurdsson S. T., «SIAM J. Numer Anal.», 1972, v. 9, p. 715—33; [16] Lambert J. D., Computational methods in ordinary differential equations, N.Y., 1973; [17] Stiff differential systems, [The IBM research simposia series], N.Y.— L., 1974.

Ю. В. Ракитский.

ЖЕСТКОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — вариант понятия аналитич. пространства, относящийся к случаю, когда основное поле K является полным неархимедово нормированным полем.

Аналитич. функции p-адического переменного рассматривались еще в конце 19 в. в теории алгебраич. чисел, однако соответствующий глобальный объект — Ж. а. п.— был введен Дж. Тейтом (J. Tate) лишь в начале 60-х гг. 20 в. (см. [1]). Этой конструкции предшествовало более прямолинейное построение по образцу теории комплексно аналитич. многообразий. Главный недостаток последнего подхода связан с тем, что обычное локальное определение аналитич. функции, как разлагающейся в степенной ряд в окрестности каждой точки, неудобно в силу полной несвязности основного поля K. Определенных таким образом аналитич. функций оказывалось «слишком много» (а аналитич. многообразий, соответственно, «слишком мало»). Напр., всякое компактное аналитич. многообразие над K является объединением конечного множества замкнутых шаров (см. [3], с. 168). Конструкция Тейта начинается с выбора локальных объектов — аффиноидных пространств, аналогичных аффинным многообразиям в алгебраич. геометрии. Пусть T_n — алгебра степенных рядов от n переменных $t_1, \ldots, t_n$ над K, сходящихся в полидиске $|t_1|\leqslant 1, \ldots, |t_n|\leqslant 1$. Факторалгебры алгебры T_n наз. аффиноидными алгебрами. Эти алгебры нётеровы и в них имеется естественная банахова топология, в к-рой все идеалы замкнуты, а гомоморфизмы непрерывны. Оказывается, что любой максимальный идеал такой алгебры имеет конечную коразмерность и пространство $\mathrm{Max}A$ максимальных идеалов состоит, с точностью до сопряжения, из геометрич. точек, определенных над конечными расширениями поля K. В частности, $\mathrm{Max}\,T_n$ есть полидиск единичного радиуса, а вообще, для произвольного A пространство $\mathrm{Max}A$ представляет собой аналитическое подмножество в полидиске. Гомоморфизмы $\varphi\colon A\to B$ определяют морфизмы $\varphi^*\colon \mathrm{Max}B\to\mathrm{Max}A$, так что аффиноидные пространства образуют категорию.

Жесткостью на топологич. пространстве X наз. набор T, $\mathrm{Cov}U$, $\mathcal{O}_X$, где T есть семейство открытых множеств из X, называемых допустимыми, $\mathrm{Cov}U$ для каждого $U\in T$ — семейства покрытий множества U допустимыми множествами (допустимые покрытия), а $\mathcal{O}_X$ — предпучок колец на T. Для допустимых покрытий требуется выполнимость естественных аксиом, в частности допустимые покрытия можно измельчать, а предпучок $\mathcal{O}_X$ должен быть пучком относительно всех допустимых покрытий допустимых множеств. Морфизмы пространств с жесткостью, а также понятие индуцированной на подпространстве жесткости определяются по аналогии с такими же понятиями для окольцованных пространств. Каждое аффиноидное пространство можно наделить канонической жесткостью, сохраняющейся при любых морфизмах. Жесткое аналитическое пространство есть, по определению, топологич. пространство с жесткостью, на к-ром существует допустимое покрытие $X=\bigcup X_i$ такое, что каждое X_i с индуцированной жесткостью изоморфно аффиноидному пространству, наделенному канонич. жесткостью.

Для Ж. а. п. получен ряд результатов, аналогичных известным теоремам теории комплексных пространств. Так, имеют место аналоги теорем A и B Картана (см. *Картана теорема* [4]). Точнее, когерентные пучки $\mathcal{O}_X$-модулей на аффиноидных пространствах однозначно определяются модулем своих сечений, а их когомологии в размерностях $\geqslant 1$ обращаются в нуль. Верен также аналог теоремы Грауэрта о когерентности прямого образа когерентного пучка при собственном отображении (однако определение собственного отображения здесь сильно отличается от обычного). Построен p-адический аналог *униформизации* алгебраических кривых и абелевых многообразий (см. [5]). Обнаружена связь между понятием Ж. а. п. и понятием формальной схемы в алгебраич. геометрии (см. [5]).

Лит.: [1] Тэйт Дж., «Математика», 1969, т. 13, № 3, с. 3—37; [2] Бурбаки Н., Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Узель К., «Математика», 1969, т. 13, № 3, с. 38—49; [5] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 3, М., 1974, с. 5—92. *А. Н. Паршин.*

ЖЕСТКОСТЬ — свойство подмногообразия M в *римановом пространстве* V, заключающееся в том, что любая его изометрич. вариация (*бесконечно малое изгибание*) является тривиальной, т. е. соответствующее поле скоростей z на M индуцируется полем *Киллинга вектора* ζ на M: $z=\zeta\circ i$, где i: $M\to V$ — *изометрическое погружение* M в V. Вопрос о Ж. подмногообразий — по существу вопрос о единственности решения системы дифференциальных уравнений, являющихся линеаризацией основной системы уравнений теории поверхностей — почти не исследован в случае, когда $\dim M>2$ и $\dim V>3$, однако и в простейшей ситуации ($\dim M=\dim V-1=2$) более или менее законченную теорию удается построить лишь для поверхностей положительной кривизны, расположенных в пространствах постоянной кривизны (см. *Векуа метод*). О Ж. поверхностей неположительной и переменной кривизны известны лишь отдельные результаты, причем на Ж. поверхности, помимо ее пространственной формы, оказывает влияние степень регулярности рассматриваемых деформаций.

Как правило, незамкнутая поверхность нежесткая, однако: 1) построены примеры поверхностей с *уплощения точкой* m, любая окрестность к-рой является жесткой или допускает бесконечно малые изгибания ограниченной регулярности; 2) существуют жесткие незамкнутые выпуклые поверхности с полной кривизной, равной 4π, окаймленные плоскими параболич. кривыми (части поверхностей типа T).

На Ж. поверхности влияет то, насколько ограничена подвижность края поверхности или линий внутри ее; так, напр., 1) сферич. сегмент S, скользящий по плоскости, будет жестким или нет в зависимости от того, меньше или больше S полусферы; 2) кусок гиперболич. параболоида с двумя пересекающимися неподвижными образующими — жесткий; 3) кусок плоскости с закрепленным краем — нежесткий.

Замкнутые поверхности изучены с точки зрения Ж. более детально; так, напр., 1) замкнутая выпуклая поверхность — жесткая (см. *Бляшке — Вейля формула*, а также [2]); 2) в то же время есть и нежесткие замкнутые поверхности вращения знакопеременной кривизны; 3) тор — жесткий; 4) замкнутый *цилиндроид* жесткий тогда и только тогда, когда площадь среднего сечения

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{4}(S_1 + S_2),$$

где S_1 и S_2 — площади верхнего и нижнего оснований; 5) метрич. произведение k двумерных сфер является жестким в евклидовом пространстве E^{3k} и нежестким в E^{3k+l}, $l>0$.

Так определенное понятие Ж. иногда наз. Ж. 1-го порядка, вводится также Ж. 2-го и высших порядков. Понятие Ж. переносится на нерегулярные поверхности, напр. многогранники, однако и там основные результаты касаются лишь выпуклых многогранников (см. *Коши теорема* о многогранниках), и на поверхности в римановом пространстве, напр. замкнутые поверхности любого рода с положительной внешней кривизной — жесткие.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, № 2, с. 47—158; [2] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969; [3] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959; [4] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [5] Александров А. Д., Выпуклые многогранники, М.— Л., 1950; [6] Фоменко В. Т., «Матем. заметки», 1974, т. 16, в. 3, с. 441—45.

М. И. Войцеховский.

ЖИРО УСЛОВИЯ — условия разрешимости в классич. смысле основных краевых задач для линейного эллиптич. уравнения 2-го порядка. Пусть в ограниченной N-мерной ($N \geqslant 2$) области D с границей Γ задано эллиптич. уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\,u = f(x). \qquad (*)$$

Требуется найти функцию $u(x)$, к-рая: 1) принадлежит классу $C^{(2)}(D) \cap C^{(0)}(D+\Gamma)$; 2) удовлетворяет в области D уравнению (*); 3) на границе Γ удовлетворяет условию $u(x) = \varphi(x)$ (первая краевая задача, или задача Дирихле), или условию

$$\frac{\partial u(x)^{+}}{\partial \nu} + \beta(x)\,u(x) = \varphi(x)$$

(вторая краевая задача, или задача Неймана), или условию

$$\frac{\partial u(x)^{+}}{\partial l} + \beta(x)\,u(x) = \varphi(x)$$

(третья краевая задача). Здесь ν — направление конормали, его направляющие косинусы равны

$$\cos(\nu, x_i) = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\cos(n, x_j),$$

$$a = \left[\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\cos(n, x_j)\right)^2\right]^{1/2}, \; i = 1, 2, \ldots, N,$$

n — внешняя нормаль к границе Γ, l — произвольное направление, для к-рого $\cos(l, n) \geqslant \delta > 0$ для всех $x \in \Gamma$, знак $^{+}$ показывает, что берется предельное значение изнутри области D.

Жиро условия разрешимости указанных краевых задач состоят в следующем. Если коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ оператора L принадлежат в области $(D+\Gamma)$ классу $C^{(0,\mu)}$, правая часть уравнения $f(x) \in C^{(0,\mu)}(D) \cap C^{(0)}(D+\Gamma)$, краевое условие $\varphi(x) \in C^{(0)}(\Gamma)$ и $\beta(x) \in C^{(0)}(\Gamma)$ (для второй и третьей краевых задач), $\cos(l, x_i) \in C^{(0,\mu)}(\Gamma)$ (для третьей краевой задачи), а граница Γ области D принадлежит классу $A^{(1,\mu)}$, то для первой, второй и третьей краевых задач справедлива альтернатива Фредгольма, т. е. либо соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение и тогда неоднородная задача имеет единственное решение при любых f и φ, либо однородная задача имеет p, $0<p<\infty$, линейно независимых решений $u_1, \ldots, u_p$ и тогда неоднородная задача разрешима лишь в случае, если p определенных линейных функционалов от f и φ обращаются в нуль, причем при выполнении этого последнего условия неоднородная задача имеет бесконечно много решений, и если u_0 — одно из этих решений, то общее решение представимо в виде $u_0+\sum_{i=1}^{p} c_i u_i$, где c_i — произвольные постоянные. В случае, когда коэффициенты оператора L являются более гладкими ($a_{ij}\in C^{(2,\mu)}$, $b_i\in C^{(1,\mu)}$), так что можно рассматривать сопряженный оператор L^*, требование обращения в нуль линейных функционалов от f и φ сводится к ортогональности f и φ ко всем p линейно независимым решениям однородной сопряженной задачи. Ж. у. получены Ж. Жиро [1] — [3].

Лит.: [1] Giraud G., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 202, p. 380—82; [2] его же, «Bull. soc. math. France», 1932, t. 56, p. 248—72, 281—312, 316—52; [3] его же, «J. math. pures et appl.», 1939, t. 18, p. 111—43; [4] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957. *И. А. Шишмарев.*

ЖОРДАНА КРИВАЯ — гомеоморфный образ окружности. Назв. по имени К. Жордана (C. Jordan), предложившего это определение. См. также *Линия.*

ЖОРДАНА ЛЕММА: пусть $f(z)$ — регулярная аналитич. функция комплексного переменного z при $|z|>c\geqslant 0$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, за исключением дискретного множества особых точек. Если существует последовательность полуокружностей

$$\gamma(R_n)=\{z:|z|=R_n,\quad \operatorname{Im} z\geqslant 0\},\quad R_n\uparrow+\infty,$$

такая, что максимум $M(R_n)=\max|f(z)|$ на полуокружности $\gamma(R_n)$ стремится к нулю, когда $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma(R_n)} e^{iaz} f(z)\,dz=0,$$

где a — любое положительное число. Ж. л. позволяет применять вычеты не только при условии $zf(z)\to 0$, но уже при равномерном стремлении $f(z)\to 0$ на последовательности полуокружностей в верхней или нижней полуплоскости для вычисления, напр., интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx.$$

Получена К. Жорданом [1].

Лит.: [1] Jordan C., Cours d'analyse, t. 2, 2 ed., P., 1894, p. 285—86; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Д.-Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 1, М., 1963, гл. 6. *Е. Д. Соломенцев.*

ЖОРДАНА МЕРА параллелепипеда

$$\Delta=\{a_i\leqslant x_i\leqslant b_i;\quad a_i<b_i,\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,n\}\qquad (*)$$

в $\mathbb{R}^n$ объем $m\Delta=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ этого параллелепипеда. Для ограниченного множества $E\subset\mathbb{R}^n$ определяются: внешняя мера Жордана

$$m_eE=\inf\sum_{j=1}^{k} m\Delta_j,\quad \bigcup_{j=1}^{k}\Delta_j\supset E,\quad k=1,\,2,\,\ldots$$

и внутренняя мера Жордана

$$m_iE=\sup\sum_{j=1}^{k} m\Delta_j,\quad E\supset\Delta_j,$$

где Δ_j попарно не пересекаются (здесь Δ_j — параллелепипеды вида (*)). Множество E наз. измеримым по Жордану (квадрируемым при $n=2$, кубируемым при $n\geqslant 3$), если $m_eE=m_iE$ или, что равносильно,

$$m_eE+m_e(\Delta\setminus E)=m\Delta,$$

где $\Delta \supset E$. В этом случае Ж. м. равна $mE = m_e E = m_i E$. Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда его граница имеет Ж. м. нуль (или, что равносильно, когда его граница имеет *Лебега меру* нуль).

Приведенное понятие меры ввели Дж. Пеано [1] и К. Жордан [2]. Внешняя Ж. м. одна и та же для E и $\bar{E}$ (*замыкания множества* E) и равна *Бореля мере* $\bar{E}$. Измеримые по Жордану множества образуют кольцо множеств, на к-ром Ж. м. конечно аддитивная функция. См. также *Квадрируемость*.

Лит.: [1] Peano G., Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, Torino, 1887; [2] Jordan C., «J. math. pures et appl.», 1892, t. 8, p. 69—99; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 2, М., 1973; [4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976. *А. П. Терехин.*

ЖОРДАНА ПРИЗНАК сходимости рядов Фурье: если 2π-периодическая функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in (a, b)$ к числу $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$; если при этом функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на всяком отрезке $[a', b']$, строго внутреннем к $[a, b]$. Ж. п. установлен К. Жорданом [1]; он обобщает *Дирихле теорему* о сходимости рядов Фурье кусочно монотонных функций.

Лит.: [1] Jordan C., «C. r. Acad. sci.», 1881, t. 92, p. 228—30; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, с. 121. *Б. И. Голубов.*

ЖОРДАНА РАЗЛОЖЕНИЕ — 1) Ж. р. функции ограниченной вариации — представление функции f в виде

$$f = f_1 - f_2,$$

где f_1 и f_2 — монотонно возрастающие функции. Ж. р. наз. также представление обобщенной меры, или *заряда* $\mu(E)$ измеримого множества E в виде разности мер

$$\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E),$$

где хотя бы одна из *мер* μ^+ или μ^- конечна. Установлено К. Жорданом.

Лит.: [1] Jordan C., Cours d'analyse, t. 1, P., 1893; [2] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974. *М. И. Войцеховский.*

2) Ж. р. эндоморфизма g конечномерного векторного пространства — представление этого эндоморфизма в виде суммы полупростого и нильпотентного эндоморфизмов, коммутирующих между собой: $g = g_s + g_n$. Эндоморфизмы g_s и g_n наз. соответственно полупростой и нильпотентной компонентами Ж. р. эндоморфизма g. Такое представление наз. аддитивным Ж. р. (Полупростой эндоморфизм — эндоморфизм, обладающий при нек-ром расширении основного поля базисом из собственных векторов, нильпотентный — равный в некоторой степени нулю.) Если в нек-ром базисе пространства матрица $\|a_{ij}\|$ эндоморфизма g является *жордановой матрицей*, а t — такой эндоморфизм, что в том же базисе его матрица имеет вид $\|b_{ij}\|$, где $b_{ij}=0$ при всех $i \neq j$ и $b_{ii} = a_{ii}$ для всех i, то

$$g = t + (g - t)$$

будет Ж. р. эндоморфизма g с $g_s = t$ и $g_n = g - t$.

Ж. р. существует и единственно для любого эндоморфизма g векторного пространства V над алгебраически замкнутым полем K. Более того, $g_s = P(g)$ и $g_n = Q(g)$ для некоторых многочленов P и Q над полем K (зависящих от g) с нулевыми свободными членами. Если W инвариантное относительно g подпространство в V, то W инвариантно относительно g_s и g_n, причем

$$g|_W = g_s|_W + g_n|_W$$

является Ж. р. для $g|_W$ (здесь $|_W$ обозначает сужение эндоморфизма на подпространство W). Если k — подполе в K и g рационально над k (относительно некоторой k-структуры на V), то g_s и g_n не будут, вообще говоря, рациональными над k; можно лишь утверждать, что g_s и g_n рациональны над полем $k^{p^{-\infty}}$, где p — характеристическая экспонента поля k (при $p=1$ $k^{p^{-\infty}}$ совпадает с k, а при $p>1$ это — множество всех элементов из K, чисто несепарабельных над k).

Если g — автоморфизм пространства V, то g_s — также автоморфизм V и

$$g=g_sg_u=g_ug_s,$$

где $g_u=1_V+g_s^{-1}g_n$, 1_V — тождественный автоморфизм пространства V. Автоморфизм g_u является унипотентным, т. е. все его собственные значения равны единице. Всякое представление автоморфизма g в виде произведения коммутирующих полупростого и унипотентного автоморфизмов совпадает с описанным представлением $g=g_sg_u=g_ug_s$. Это представление наз. мультипликативным Ж. р. автоморфизма g, а g_s и g_u — полупростой и унипотентной компонентой автоморфизма g. Если g рационален над k, то g_s и g_u рациональны над $k^{p^{-\infty}}$. Если W — инвариантное относительно g подпространство в V, то W инвариантно относительно g_s и g_u, а

$$g|_W=g_s|_W\, g_u|_W$$

— мультипликативное Ж. р. автоморфизма $g|_W$.

Понятие Ж. р. может быть обобщено на локально конечные эндоморфизмы бесконечномерного векторного пространства V, т. е. такие эндоморфизмы g, что V порождается конечномерными g-инвариантными подпространствами. Для g имеют место существование и единственность представления в виде суммы g_s+g_n, а в случае автоморфизма — в виде произведения g_sg_u, коммутирующих локально конечных полупростого и нильпотентного эндоморфизмов (соответственно полупростого и унипотентного автоморфизмов), т. е. таких эндоморфизмов, что любое конечномерное g-инвариантное подпространство W в V инвариантно относительно g_s и g_n (соответственно g_s и g_u) и $g|_W=$ $=g_s|_W+g_n|_W$ (соответственно $g|_W=g_s|_W\cdot g_u|_W$ есть Ж. р. для $g|_W$).

Указанное распространение понятия Ж. р. на локально конечные эндоморфизмы позволяет ввести определение Ж. р. в алгебраич. группах и алгебраич. алгебрах Ли. Пусть G — аффинная алгебраич. группа над K, $\mathcal{G}$ — ее алгебра Ли, ρ — представление G в группу автоморфизмов алгебры $K[G]$ регулярных функций на G, определенное правыми сдвигами, и $d\rho$ — его дифференциал. Для любых g из G и X из $\mathcal{G}$ эндоморфизмы $\rho(g)$ и $d\rho(X)$ векторного пространства $K[G]$ являются локально конечными, поэтому можно говорить об их Ж. р.:

$$\rho(g)=\rho(g)_s\,\rho(g)_u$$

и

$$d\rho(X)=d\rho(X)_s+d\rho(X)_n.$$

Один из важных результатов теории алгебраич. групп состоит в том, что указанные Ж. р. реализуются с помощью элементов из G и $\mathcal{G}$ соответственно. Точнее, существуют однозначно определенные элементы g_s, $g_u\in G$ и X_s, $X_n\in\mathcal{G}$ такие, что

$$g=g_sg_u=g_ug_s, \tag{1}$$

$$X=X_s+X_n,\quad [X_s,\ X_n]=0, \tag{2}$$

и

$$\rho(g_s)=\rho(g)_s,\quad \rho(g_u)=\rho(g)_u,$$
$$d\rho(X_s)=(d\rho(X))_s,\quad d\rho(X_n)=(d\rho(X))_n.$$

Разложение (1) наз. Ж. р. в алгебраической группе G, а разложение (2) — Ж. р. в алгебраической алгебре Ли $\mathcal{G}$. Если G определена над подполем k поля K и элемент $g \in G$ (соответственно $X \in \mathcal{G}$) рационален над k, то g_s, g_u (соответственно X_s, X_n) рациональны над $k^{p^{-\infty}}$. Более того, если G реализована как замкнутая подгруппа полной линейной группы $GL(V)$ автоморфизмов некоторого конечномерного векторного пространства V [и, следовательно, $\mathcal{G}$ реализуется как подалгебра в алгебре Ли группы $GL(V)$], то Ж. р. (1) для элемента $g \in G$ совпадает с введенным выше мультипликативным Ж. р. для g, а разложение (2) для $X \in \mathcal{G}$ — с аддитивным Ж. р. для X (рассматриваемых как эндоморфизмы пространства V). Если φ: $G_1 \to G_2$ — рациональный гомоморфизм аффинных алгебраич. групп и $d\varphi$: $\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ — соответствующий гомоморфизм их алгебр Ли, то

$$\varphi(g_s) = \varphi(g)_s, \quad \varphi(g_u) = \varphi(g)_u,$$
$$d\varphi(X_s) = (d\varphi(X))_s \text{ и } d\varphi(X_n) = (d\varphi(X))_n$$

для любых $g \in G_1$, $X \in \mathcal{G}_1$.

Понятие Ж. р. в алгебраич. группах и алгебрах Ли позволяет ввести определение полупростого, унипотентного (соответственно нильпотентного) элементов в произвольной аффинной алгебраич. группе (соответственно алгебраич. алгебре Ли). Элемент $g \in G$ наз. полупростым, если $g = g_s$, и унипотентным, если $g = g_u$; элемент $X \in \mathcal{G}$ наз. полупростым, если $X = X_S$, и нильпотентным, если $X = X_n$. Пусть G определена над k, тогда

$$G_u = \{g \in G \mid g = g_u\}$$

является k-замкнутым подмножеством в G, а

$$\mathcal{G}_n = \{X \in \mathcal{G} \mid X = X_n\}$$

— k-замкнутым подмножеством в $\mathcal{G}$. В общем случае

$$G_s = \{g \in G \mid g = g_s\}$$

не является замкнутым множеством, но если G коммутативна, то G_s и G_u являются замкнутыми подгруппами и $G = G_s \times G_u$. Множества G_s и G_u в произвольной аффинной алгебраич. группе инвариантны относительно внутренних автоморфизмов, и изучение разбиения этих множеств на классы сопряженных элементов составляет предмет специальных исследований [3].

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Kolchin E. R., «Ann. Math.», 1948, v. 49, p. 1—42; [3] Семинар по алгебраическим группам, пер. с англ., М., 1973.

В. Л. Попов.

ЖОРДАНА ТЕОРЕМА: плоская простая замкнутая кривая Г разбивает плоскость $\mathbb{R}^2$ на две связные компоненты и является их общей границей. Установлена К. Жорданом [1]. Вместе с примыкающим к ней утверждением: простая дуга не разбивает плоскость, это — старейшая теорема теоретико-множественной топологии.

Из двух компонент одна (внутренность Г) — ограниченная; характеризуется тем, что порядок любой точки, ей принадлежащей, относительно Г равен ± 1; другая (внешность Г) — неограниченная, и порядок ее точек относительно Г равен нулю. Для любой точки x ограниченной компоненты A и любой точки $x_0 \in Г$ существует простая дуга с концами x_0 и x, все точки к-рой, отличные от x_0, содержатся в A (теорема Шёнфлиса).

Ж. т. обобщается по размерности: любое $(N-1)$-мерное подмногообразие в $\mathbb{R}^N$, гомеоморфное сфере, разбивает пространство на две компоненты и является их общей границей; при $N=3$ это доказано А. Лебегом (H. Lebesgue), в общем случае — Л. Брауэром (L. Brouwer), отчего N-мерная Ж. т. иногда наз. Жордана—Брауэра теоремой.

Лит.: [1] Jordan C., Cours d'analyse, t. I, P., 1893; [2] Валле-Пуссен Ш. Ж. де, Курс анализа бесконечно малых, пер. с франц., т. 2, Л.—М., 1933; [3] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947; [4] Дьедонне Ж., Основы современного анализа, пер. с англ., М., 1964; [5] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948; [6] Филиппов А. Ф., «Успехи матем. наук», 1950, т. 5, в. 5, с. 173—76. *М. И. Войцеховский.*

ЖОРДАНА — ГЁЛЬДЕРА ТЕОРЕМА: если группа обладает *композиционными рядами*, то любые два ее композиционных ряда изоморфны. К. Жордан [1], [2] и О. Гёльдер [3], занимаясь вопросом о разрешимости уравнений в радикалах (см. *Галуа теория*), исследовали группы подстановок. Для этих групп К. Жордан ввел понятие композиционного и *главного рядов* и доказал, что индексы двух одноименных рядов (т. е. индексы подгруппы G_i в G_{i+1}), с точностью до расположения, одинаковы. Иными словами, было доказано совпадение последовательностей порядков факторов двух композиционных (главных) рядов с точностью до расположения. О. Гёльдер доказал изоморфизм соответствующих факторов. О. Шрейером [4] было доказано еще более общее утверждение: любые два нормальных ряда произвольной группы обладают изоморфными уплотнениями (теорема Шрейера). Ж.— Г. т. была доказана также для групп с произвольной областью операторов (Э. Нётер, E. Noether, В. Крулль, W. Krull), откуда, в частности, вытекали аналогичные теоремы для характеристических и вполне характеристич. рядов.

В дальнейшем обобщения Ж.— Г. т. пошли по следующим направлениям. 1) Были получены обобщения теорем Шрейера и Жордана — Гёльдера для бесконечных нормальных систем и, в частности, вполне упорядоченных нормальных и композиционных рядов, а также доказано, что все возрастающие нормальные ряды группы с простыми факторами изоморфны (эти ряды могут и не быть композиционными) (см. [5]). 2) Ж.— Г. т. была перенесена на ряды идеалов колец и других алгебраич. образований. Эти направления объединились рядом результатов для Ω-групп (мультиоператорных групп), Ω-алгебр и для универсальных алгебр с одноэлементной подалгеброй и перестановочными конгруэнциями (см. [5] — [8]). 3) Рассматривались различные способы обобщения Ж.— Г. т. на языке теории решеток и частично упорядоченных множеств. Получено обобщение теоремы Шрейера для цепочек элементов дедекиндовых решеток. В ряде работ для определения нормального ряда элементов решетки вводилось дополнительное отношение нормальности или операция умножения (см. [5], [6], [9] — [11]). 4) Были получены обобщения Ж.— Г. т. и теоремы Шрейера для нормальных категорий (см. [8]).

Лит.: [1] Jordan C., «C. r. Acad. sci.», 1869, t. 68, p. 257; [2] его же, Traité des substitutions et des équations algébriques, P., 1870 (2 ed., 1957); [3] Hölder O., «Math. Ann.», 1889, Bd 34, S. 26—56; [4] Schreier O., «Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg», 1928, Bd 6, № 3—4, S. 300—02; [5] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [6] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [7] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [8] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974; [9] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 237—74; [10] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, М., 1968, с. 109—136; 1968, М., 1970, с. 101—54; [11] Фофанова Т. С., в сб.: Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1974, с. 99—108. *И. В. Стеллецкий.*

ЖОРДАНОВА ДУГА, простая дуга,— топологическое пространство, гомеоморфное отрезку [0, 1] числовой прямой. *А. А. Мальцев.*

ЖОРДАНОВА МАТРИЦА — квадратная блочно-диагональная матрица J над полем k, имеющая вид

$$J = \begin{Vmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & J_{n_s}(\lambda_s) \end{Vmatrix},$$

где $J_m(\lambda)$ — квадратная матрица порядка m вида

$$J_m(\lambda)=\left\|\begin{matrix}\lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & 0 & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & 0 & & & \cdot & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda\end{matrix}\right\|,$$

$\lambda\in k$. Матрица $J_m(\lambda)$ называется жордановой клеткой порядка m с собственным числом λ. Каждая клетка определяется *элементарным делителем* (см. [5]).

Для произвольной квадратной матрицы A над алгебраически замкнутым полем k всегда существует такая квадратная невырожденная матрица C над k, что $C^{-1}AC$ является Ж. м. (иначе говоря, A подобна над k некоторой Ж. м.). Это утверждение справедливо и при более слабых ограничениях на поле k: для того чтобы матрица A была подобна над k нек-рой Ж. м., необходимо и достаточно, чтобы поле k содержало все корни минимального многочлена матрицы A. Матрица $C^{-1}AC$, указанная выше, наз. жордановой формой (или жордановой нормальной формой) матрицы A. Такая нормальная форма рассматривалась одним из первых К. Жорданом [1] (см. также историч. очерк к гл. VI и VII книги [2]).

Жорданова форма матрицы определена не однозначно, а с точностью до порядка жордановых клеток. Точнее, две Ж. м. подобны над k в том и только в том случае, когда они составлены из одних и тех же жордановых клеток и отличаются друг от друга лишь расположением этих клеток на главной диагонали. Количество $C_m(\lambda)$ жордановых клеток порядка m с собственным числом λ в жордановой форме матрицы A определяется формулой

$$C_m(\lambda)=rk(A-\lambda E)^{m-1}-2rk(A-\lambda E)^m+ + rk(A-\lambda E)^{m+1},$$

где E — единичная матрица того же порядка n, что и A, $rk\,B$ — ранг матрицы B, а $rk(A-\lambda E)^0$, по определению, равен n.

Помимо жордановой нормальной формы, имеется и ряд других типов нормальных форм матрицы. К их рассмотрению прибегают, напр., когда хотят исключить неоднозначность приведения к жордановой форме или когда основное поле не содержит всех корней минимального многочлена матрицы (см. [2] — [5]).

С точки зрения теории инвариантов Ж. м.— это канонич. представители в орбитах присоединенного представления для полной линейной группы. Нахождение аналогичных представителей для произвольной редуктивной алгебраич. группы является пока (1978) нерешенной до конца задачей (см. [6], [7]).

Лит.: [1] Jordan C., Traité des substitutions et des équations algébriques, P., 1870, p. 114—25; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [3] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966; [4] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975; [6] Семинар по алгебраическим группам. Сб. статей, пер. с англ., М., 1973; [7] Steinberg R., в кн.: Тр. Международного конгресса математиков. Москва. 1966, М., 1968, с. 277—83.

В. Л. Попов.

ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА матрицы — см. *Жорданова матрица.*

ЖУКОВСКОГО ТЕОРЕМА — одна из основных теорем гидромеханики несжимаемой идеальной жидкости, полученная Н. Е. Жуковским в 1906 методами теории функций комплексного переменного: подъемная сила крыла (на единицу длины крыла), обтекаемого установившимся плоскопараллельным потоком жидкости (газа), ортогональна к скорости потока на бесконечности и по величине равна произведению этой скорости на циркуляцию скорости и на плотность жидкости. При применении Ж. т. следует иметь в виду, что величина циркуляции скорости однозначно определяется из условия Жуковского конечности скорости жидкости у задней острой кромки крыла (см. рис. 2 и лит. в ст. *Жуковского функция*). *Е. Д. Соломенцев.*

ЖУКОВСКОГО ФУНКЦИЯ — рациональная функция комплексного переменного z:

$$w=\lambda(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Важна своими применениями в гидромеханике, открытыми Н. Е. Жуковским (см. [1], [2]) в основном для построения и изучения профиля Жуковского (крыла Жуковского). Пусть в плоскости z заданы окружность K, проходящая через точки $z=\pm 1$ (рис. 1), и окружность K', касающаяся K извне в точке $z=1$, с центром α и радиусом ρ. При отображении $w=\lambda(z)$ образом окружности K' является нек-рая замкнутая кривая L' с острием в точке $w=1$, касающаяся в этой точке дуги окружности L (образа K)

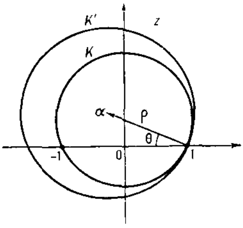


Рис. 1.

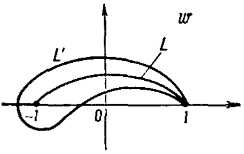


Рис. 2.

и изображенная на рис. 2,— это и есть профиль Жуковского. Функция $w=\lambda(\rho t+\alpha)$ отображает внешность единичного круга плоскости t на внешность L'. Для получения профилей Жуковского более общего вида и расположения применяется обобщенная Ж. ф. (см. [3], [4], [5]):

$$w=\frac{1}{2}(a-b)z+\frac{1}{2}(a+b)\frac{1}{z}, \quad a>b>0.$$

Лит.: [1] Жуковский Н. Е., Гидродинамика, Собр. соч., М.—Л., т. 2, 1949; [2] его же, Теоретические основы воздухоплавания, Собр. соч., т. 6, 1950; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [4] Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 2 изд., М., 1966; [5] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1, 6 изд., М., 1963.

Е. Д. Соломенцев.

ЖУРДЕНА ПРИНЦИП — дифференциальный вариационный принцип механики, установленный Ф. Журденом [1] и выделяющий действительные движения системы из класса кинематически возможных движений, удовлетворяющих условиям наложенных на систему идеальных связей и условиям постоянства положений точек системы для рассматриваемого момента времени. Согласно Ж. п., для действительного движения системы, стесненной идеальными двусторонними (удерживающими) связями, сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любых вариациях кинематически возможных скоростей равна нулю в любой момент времени. См. также *Вариационные принципы классической механики.*

Лит.: [1] Jourdain P. E. B., «Quart. J. Pure and Appl. Math.», 1908, v. 39, p. 375—84.

В. В. Румянцев.

ЖЮЛИА ТЕОРЕМА: если a — изолированная существенно особая точка аналитич. функции $f(z)$ комплексного переменного z, то существует по крайней мере один выходящий из a луч $S=\{z;\ \arg(z-a)=\theta_0\}$ такой, что в любом угле

$$V=\{z;\ |\arg(z-a)-\theta_0|<\varepsilon\},\ \varepsilon>0,$$

симметричном относительно этого луча, функция $f(z)$ принимает каждое конечное значение, за исключением, быть может, одного, в бесконечной последовательности точек $\{z_k\} \subset V$, сходящейся к a. Этот результат Г. Жюлиа (см. [1]) дополняет большую *Пикара теорему* о поведении аналитич. функции в окрестности существенно особой точки.

Фигурирующие в Ж. т. лучи наз. лучами Жюлиа. Так, для функции $f(z)=e^z$ и $a=\infty$ лучами Жюлиа являются положительная и отрицательная части мнимой оси. В связи с Ж. т. для мероморфной, напр. в единичном круге $D=\{z;\ |z|<1\}$, функции $w=f(z)$ хорда S с конечной точкой $e^{i\theta_0}$ на окружности $|z|=1$ наз. отрезком, или хордой, Жюлиа, если в любом открытом угле V с вершиной $e^{i\theta_0}$, содержащем S, функция $w=f(z)$ принимает все значения на римановой сфере w, за исключением, быть может, двух. Точка $e^{i\theta_0}$ наз. **точкой Жюлиа** для $f(z)$, если любая хорда S с концом $e^{i\theta_0}$ является хордой Жюлиа для $f(z)$. Существуют мероморфные функции ограниченного вида, для к-рых каждая точка окружности $|z|=1$ является точкой Жюлиа.

См. также *Асимптотическое значение*, *Иверсена теорема*, *Предельное множество*.

Лит.: [1] Julia G., Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, P., 1924; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8.

Е. Д. Соломенцев.

ЗАВИСЯЩИЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ ИНТЕГРАЛ — интеграл вида

$$J(y)=\int f(x,\ y)\,dx,$$

в к-ром точка $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пробегает пространство $\mathbb{R}^n$ (в случае, если эта точка пробегает только нек-рую область D в пространстве $\mathbb{R}^n$, то функцию $f(x, y)$ можно считать равной нулю при $x\in\mathbb{R}^n\setminus D$), а точка $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, образующая совокупность параметров $y_1, y_2, \ldots, y_m$, изменяется в пределах нек-рой области G пространства $\mathbb{R}^m$.

Основные вопросы теории таких интегралов — это выяснение условий непрерывности и дифференцируемости функции $J(y)$ по параметрам $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Менее стеснительные условия непрерывности и дифференцируемости $J(y)$ получают при понимании интеграла в смысле Лебега. Справедливы следующие утверждения.

1) Если функция $f(x, y)$ для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$ непрерывна по y в области $G\subset\mathbb{R}^m$ и если существует интегрируемая в $\mathbb{R}^n$ функция $g(x)$ такая, что для каждого $y\in G$ и для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $|f(x, y)|\leqslant g(x)$, то интеграл $J(y)$ является непрерывной функцией y в области G.

2) Если функция $f(x, t)$, определенная при $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in(a, b)$, для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$ и каждого $t\in(a, b)$ имеет производную $\frac{df}{dt}(x, t)$, к-рая для почти каждого $x\in\mathbb{R}^n$ является непрерывной функцией t на интервале (a, b), и если существует интегрируемая в $\mathbb{R}^n$ функция $g(x)$ такая, что для каждого $t\in(a, b)$ и для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $\left|\frac{df}{dt}(x, t)\right|\leqslant g(x)$, то из существования при нек-ром $t_0\in(a, b)$ интеграла

$$\int f(x,\ t_0)\,dx$$

следует дифференцируемость по t на интервале (a, b) функции

$$J(t)=\int f(x,\ t)\,dx$$

и возможность вычисления производной $J'(t)$ дифференцированием под знаком интеграла:

$$J'(t)=\int \frac{\partial f}{\partial t}(x,\ t)\,dx.$$

Из 1) — 2) получают ряд более простых утверждений о непрерывности и дифференцируемости интегралов по параметрам, относящихся к трактовке интеграла в смысле Римана и более частным случаям (см. [2] — [4]).

Несобственные интегралы, зависящие от параметров. Для простейшего несобственного интеграла 1-го рода

$$J(t)=\int_a^\infty f(x,\ t)\,dx \qquad (*)$$

вводят понятие равномерной сходимости по параметру t на нек-ром сегменте $c\leqslant t\leqslant d$. Этот интеграл наз. равномерно сходящимся по t на сегменте $[c, d]$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $A(\varepsilon)>0$ такое, что

$$\left|\int_R^\infty f(x, t)\,dx\right|<\varepsilon$$

для всех $\mathbb{R}\geqslant A(\varepsilon)$.

Справедливы следующие утверждения:

а) Если функция $f(x, t)$ непрерывна в полуполосе $[a\leqslant x<\infty,\ c\leqslant t\leqslant d]$ и интеграл (*) сходится равномерно по t на сегменте $[c, d]$, то функция $J(t)$ непрерывна на сегменте $c\leqslant t\leqslant d$.

б) Если $f(x, t)$ и производная $\frac{df}{dt}(x, t)$ непрерывны в полуполосе $[a\leqslant x<\infty,\ c\leqslant t\leqslant d]$, интеграл (1) сходится для нек-рого $t\in[c, d]$, а интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\,dx$$

сходится равномерно относительно t на сегменте $[c, d]$, то функция $J(t)$ дифференцируема на сегменте $[c, d]$ и ее производная может быть найдена по формуле

$$J'(t)=\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\,dx.$$

Аналогичные утверждения справедливы и для несобственного интеграла 2-го рода.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [2] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 2, М., 1973; [3] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 2, М., 1970; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 2, М., 1973; [5] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972.

В. А. Ильин.

ЗАМЕНА БАЗЫ — теоретико-категорная конструкция, частными случаями которой являются понятие индуцированного расслоения в топологии, а также понятие расширения кольца скаляров в теории модулей.

Пусть C — категория с расслоенными произведениями и g: $S'\to S$ — морфизм этой категории. З. б. при помощи морфизма g есть функтор из категории S-объектов (т. е. из категории морфизмов f: $X\to S$, где X — объект из C) в категорию S'-объектов, сопоставляющий S-объекту f: $X\to S$ S'-объект f': $X'\to S'$, где $X'=X\times_S S'$, а морфизм f' есть проекция на второй сомножитель. Морфизм g при этом наз. морфизмом замены базы. Говорят также, что объект X' получен З. б. из объекта X.

Частным случаем понятия З. б. является понятие слоя морфизма f: $X\to S$ схемы S. А именно, слой морфизма f над точкой $s\in S$ есть схема

$$X_s=X\times_S s,$$

т. е. схема, получаемая из X З. б. при помощи естественного морфизма $s\to S$. Аналогично определяется геометрический слой $X_{\bar{s}}$, он получается З. б. при помощи морфизма Spec $K\to S$, связанного с точкой $\bar{S}$, где K — алгебраически замкнутое поле. Многие свойства S-схемы X сохраняются при З. б. Обратная задача — восстановление свойств схемы X по свойствам схемы, полученной из X З. б., рассматривается в теории спуска (см. также [3]).

Пусть морфизм $f'\colon X' \to S'$ получен З. б. при помощи $g\colon S' \to S$ из морфизма $f\colon X \to S$, т. е. задан декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow[g]{} & S \end{array}$$

И пусть F — пучок множеств на X. Тогда существует естественное отображение пучков $\psi\colon g^* f_*(F) \longrightarrow f'_* g'^*(F)$. Если F — пучок абелевых групп, то для каждого $q \geqslant 0$ существует естественный гомоморфизм пучков

$$\psi_q\colon\ g^*(R^q f_*(F)) \longrightarrow R^q f'_*(g'^*(F)).$$

При этом ψ и ψ_q также наз. морфизмами замены базы. Принято говорить, что справедлива теорема о замене базы, если ψ или, соответственно, ψ_q являются изоморфизмами. Иначе говоря, теорема о З. б. это — утверждение о согласованности (коммутировании) функторов $R^q f_*$ с функтором замены базы. В частности, если g есть вложение точки $s \in S$, то теорема о З. б. означает существование естественного изоморфизма: $(R^q f_*(F))_x \xrightarrow{\sim} H^q(X_x, F \mid X_x)$ между слоем q-го прямого образа пучка F и q-мерной группой когомологий слоя морфизма f. Теорема о З. б. справедлива в следующих ситуациях: 1) f — собственное отображение паракомпактных топологич. пространств, S — локально компактное пространство [1]; 2) f — отделимый квазикомпактный морфизм схем, g — плоский морфизм, F — квазикогерентный пучок O_X-модулей (теорему о сравнении когомологий обычных и формальных схем (см. [2]) также можно интерпретировать как теорему о З. б.); 3) f — собственный морфизм схем, F — пучок кручения в этальной топологии. Некоторые другие случаи, в к-рых справедлива теорема о З. б., рассмотрены в [3].

Лит.: [1] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [2] Grothendieck A., Dieudonné J., Éléments de géométrie algébrique, P., 1961, (Publ. math. IHES, № 11); [3] Théorie des topos et cohomologie etale des schémas, B., 1973. *В. И. Данилов.*

ЗАМКНУТАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ — замкнутая гладкая кривая на *римановом многообразии* M, к-рая является *геодезической линией*. Более общее понятие — геодезическая петля, т. е. геодезическая $\gamma(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, проходящая при $t=a$ и $t=b$ через одну и ту же точку p; рассматриваемая как замкнутая линия, она может иметь «излом» в точке p. Геодезич. петля является З. г. только в том случае, когда такого излома нет, т. е. когда $\gamma(t)$ при $t=a$ и при $t=b$ имеет одну и ту же касательную. Замкнутые траектории *геодезического потока* в пространстве TM касательных векторов к M проектируются в З. г. при естественной проекции $TM \to M$. Кривая, получающаяся, когда одна и та же З. г. обходится несколько раз, наз. кратной З. г. Если З. г. не является кратной, то она наз. простой З. г.

Определение З. г. и геодезич. петли дословно переносится на тот случай, когда M снабжено *финслеровой метрикой* или *аффинной связностью*. Если же M — метрич. пространство (в этом случае геодезич. линия определяется как локально кратчайшая линия), то определение геодезич. петли сохраняется дословно, тогда как определение З. г. нужно несколько изменить, поскольку нельзя говорить о гладкости или изломе. Геодезич. петля $\gamma(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, где $\gamma(a)=\gamma(b)=p$ и γ не постоянна ни на каком отрезке, будет З. г., если при достаточно малом $\varepsilon > 0$ линия

$$\bar\gamma(s) = \begin{cases} \gamma(b+s), & -\varepsilon \leqslant s \leqslant 0, \\ \gamma(a+s), & 0 \leqslant s \leqslant \varepsilon, \end{cases}$$

(состоящая из двух дуг линии γ: первая дуга соединяет $\gamma(b-\varepsilon)$ с $\gamma(b)=p$, вторая соединяет $p=\gamma(a)$ с $\gamma(a+\varepsilon)$)

является кратчайшей линией между своими концами $\gamma(b-\varepsilon)$ и $\gamma(a+\varepsilon)$.

Исследования З. г. проводились главным образом для З. г. на замкнутых римановых многообразиях; имеется также ряд результатов для финслеровых многообразий; нек-рые результаты получены и в более общем случае метрич. пространств с нек-рыми специальными свойствами (так наз. G-пространства Буземана, см. *Геодезических геометрия*) [1]. Эти исследования были начаты Ж. Адамаром [2], А. Пуанкаре (H. Poincaré [3]) и Дж. Биркгофом [4].

Ж. Адамар положил начало исследованиям геодезич. линий (не обязательно замкнутых) на многообразиях отрицательной кривизны. Основные современные результаты относятся к случаю замкнутых многообразий M, кривизна к-рых отрицательна по всем двумерным направлениям во всех точках. Относительно З. г. на таком M доказано, что замкнутые траектории геодезич. потока всюду плотны в TM (см. [5]) (аналогичное явление наблюдается и в ряде примеров с положительной кривизной, но не всегда [6]); имеется оценка роста числа З. г., длина к-рых не превосходит l, с увеличением l (см. [7]). Ж. Адамар аппроксимировал длинные отрезки незамкнутых геодезических с помощью З. г., что можно считать началом *символической динамики*.

К Ж. Адамару восходит также теорема, дающая нек-рую информацию о З. г. на замкнутом многообразии M (уже без каких-либо предположений о кривизне) в терминах свойств *фундаментальной группы* $\pi_1(M)$. Ориентированная замкнутая кривая γ определяет некоторый класс сопряженных элементов $[\gamma]$ группы $\pi_1(M)$; все такие кривые, отвечающие одному классу, получаются друг из друга посредством свободной *гомотопии*. Оказывается, что для каждого класса K сопряженных элементов $\pi_1(M)$, кроме класса, состоящего из единицы этой группы, среди всех замкнутых кривых γ с $[\gamma]=K$ существуют кратчайшие, и они являются З. г. Эта теорема (справедливая не только для римановых или финслеровых метрик, но и в общем случае G-пространств Буземана) является простейшим и исторически первым результатом *вариационного исчисления в целом*. Однако возникновение последнего как самостоятельного направления связано с более сложным применением вариационных методов к исследованию З. г. на многообразиях, гомеоморфных сфере, для к-рых (как и вообще для односвязных многообразий) предыдущая теорема бессодержательна.

Вопрос о З. г. на таких многообразиях поставил А. Пуанкаре (точнее, у него речь шла об о в а л о и д е, т. е. двумерной замкнутой выпуклой поверхности). Он предположил, что в «общем» случае на овалоиде имеются три З. г. без самопересечений, причем две из них устойчивы в линейном приближении, а одна неустойчива. Такая связь вопроса о существовании З. г. и оценке их числа с вопросом об их свойствах устойчивости составляет существенную особенность эвристических рассуждений А. Пуанкаре, связанных преимущественно с теорией динамич. систем. Эти рассуждения могут быть проведены вполне строго, однако только для метрик, достаточно близких к «стандартной» (обычной метрике на сфере $x^2+y^2+z^2=1$ в евклидовом пространстве, см. [8]). Для метрик, далеких от стандартной, предполагавшиеся А. Пуанкаре свойства устойчивости З. г. могут не иметь места [9].

Открытие вариационного подхода к вопросу о З. г. на односвязных многообразиях принадлежит Дж. Биркгофу [4]. Он доказал, что на многообразии, гомеоморфном сфере, существует хотя бы одна З. г.; в частности, предположение о существовании на двумерной сфере трех З. г. без самопересечений было доказано Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом (см. [10]).

Имеются работы о свойствах З. г. для «типичных» римановых (или финслеровых) метрик (т. е. образующих множество второй категории в пространстве всех метрик данного класса гладкости) (см. [11] — [13]).

Стандартная метрика на сфере обладает тем свойством, что все ее геодезические замкнуты и имеют одинаковую длину; на сфере имеются и другие метрики с тем же свойством [14]. Исследовался также вопрос о топологич. свойствах многообразия и о метрике на нем, если последняя обладает указанным свойством или каким-нибудь вариантом такового.

Подробное изложение теории З. г. см. в [15].

Лит.: [1] Буземан Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962; [2] Hadamard J., «J. math pure appl.», 1898, t. 4, p. 27—75; [3] Пуанкаре А., Избр. труды, М., 1972, т. 2, с. 735—74; [4] Birkhoff G. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1917, v. 18, p. 199—300; [5] Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, М., 1967; [6] Weinstein A., «C. r. Acad. sci.», 1970, t. 271, A504; [7] Синай Я. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, в. 6, с. 1275—96; [8] Грюнталь А. И., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 4, с. 244—45; [9] его же, там же, в. 5, с. 166; [10] Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., там же, 1947, т. 2, в. 1, с. 166—217; [11] Abraham R., в кн.: «Global Analysis, N. Y., 1970 (Proc. Symp. Pure Math., v. 14), p. 1—3; [12] Klingenberg W., Takens F., «Math. Ann.», 1972, Bd 197, № 4, S. 323—34; [13] Klingenberg W., «J. differential geometry», 1976, v. 11, p. 299—308; [14] Zoll O., «Math. Ann.», 1903, Bd 57, S. 108—33; [15] Klingenberg W., Lectures on closed geodesics, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, № 230, B.— Hdlb.— N. Y., 1978. *Д. В. Аносов.*

ЗАМКНУТАЯ КАТЕГОРИЯ — категория с дополнительной структурой, позволяющей использовать внутренний Hom-функтор как сопряженный справа функтор к абстрактному тензорному произведению.

Категория $\mathfrak{M}$ наз. замкнутой, если в ней задан бифунктор $\otimes: \mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ (см. *Функтор*), выделен объект I, заданы естественные изоморфизмы

α_{ABC}: $(A\otimes B)\otimes C\to A\otimes(B\otimes C)$ (ассоциативность),

λ_A: $I\otimes A\to A$ (левая единица),

ρ_A: $A\otimes I\to A$ (правая единица),

$\varkappa_{AB}$: $A\otimes B\to B\otimes A$ (коммутативность)

и выполнены следующие условия: 1) естественные изоморфизмы α, λ, ρ, $\varkappa$ когерентны; 2) каждый функтор

$$H_{AB}(X)=H_{\mathfrak{M}}(A\otimes X,\ B):\mathfrak{M}\longrightarrow\mathfrak{S},$$

где $\mathfrak{S}$ — категория множеств, представим. Представляющие объекты обычно обозначаются $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(A,\ B)$, и их можно рассматривать как значения на объектах бифунктора $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}$: $\mathfrak{M}^*\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ (внутренний Hom-функтор). Если бифунктор $\otimes$ совпадает с произведением, а объект I является правым нулем (терминальным объектом) категории $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ наз. декартово замкнутой.

Декартово замкнутыми являются: категории множеств, категория малых категорий, категория пучков множеств над топологич. пространством; замкнутыми — категория модулей над коммутативным кольцом с единицей, категория действительных (или комплексных) банаховых пространств и линейных отображений с нормой, не превосходящей единицы.

Лит.: [1] Бунге М., «Математика», 1972, т. 16, № 2, с. 11—46; [2] Toposes, Algebraic Geometry and Logic, B.— Hdlb.— N.Y., 1972; [3] Dubuc E., Kan extensions in enriched category theory, B.— Hdlb.— N.Y., 1970. *М. Ш. Цаленко.*

ЗАМКНУТАЯ ПОДСХЕМА — подсхема схемы X, задаваемая квазикогерентным пучком идеалов J структурного пучка $\mathcal{O}_X$ следующим образом: топологич. пространство подсхемы $V(J)$ является носителем факторпучка $\mathcal{O}_X/J$, а структурный пучок — ограничением $\mathcal{O}_X/J$ на свой носитель. Морфизм схем f: $Y\to X$ наз. замкнутым вложением, если f осуществляет изоморфизм Y с нек-рой З. п. в X; замкнутое вложение является мономорфизмом в категории схем. Для любого замкнутого подмножества $Y\subset X$ существует минимальная З. п. в X с пространством Y — так наз. приведенная З. п. с пространством Y, Если Y — подсхема X, то наименьшая З. п. Y' в X, содержащая Y, наз. (схемным) замыканием подсхемы Y в X. *В. И. Данилов.*

ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА элементов, замкнутая система функций,— система элементов φ_n некоторого линейного нормированного пространства H такая, что любой элемент $f \in H$ можно сколь угодно точно приблизить в метрике пространства H конечной линейной комбинацией элементов из этой системы, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$, что выполняется неравенство

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \right\| < \varepsilon. \tag{1}$$

Напр., система степеней $\{x^n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, замкнута в пространстве $L_p[a, b, d\mu(x)]$ функций, суммируемых в степени $p \geqslant 1$ на конечном отрезке $[a, b]$ с интегральным весом $\mu(x)$, причем неравенство (1) в этом случае имеет вид

$$\int_a^b |f(x) - Q_n(x)|^p \, d\mu(x) < \varepsilon^p, \tag{2}$$

где $Q_n(x)$ — многочлен степени n. Обычно рассматривается случай, когда $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная последовательность элементов в гильбертовом пространстве H. Тогда условие замкнутости (1) эквивалентно выполнению для всех элементов $f \in H$ равенств

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2, \tag{3}$$

где $\{a_n\}$ — коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\varphi_n\}$. В случае тригонометрич. системы функций условие (3) наз. равенством Парсеваля; оно имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Это равенство рассматривали М. Парсеваль (М. Parseval, 1806), Ш. Валле Пуссен (Ch. La Vallée Poussin, 1890), А. Гурвиц (A. Hurwitz, 1901—03); строгое его доказательство дал (в случае, когда $f(x)$ ограничена) А. М. Ляпунов (1896).

Общий случай условия замкнутости (3) впервые подробно исследовал В. А. Стеклов (1898) в связи с решением нек-рых задач математич. физики. Введя термин «замкнутость», В. А. Стеклов рассмотрел с этой точки зрения различные конкретные системы ортогональных функций, и в частности фундаментальные решения уравнения Штурма — Лиувилля (см. *Штурма — Лиувилля задача*). Поэтому равенство (3) часто наз. условием замкнутости Парсеваля — Стеклова.

Понятие замкнутости широко применяется в теории *ортогональных многочленов*. Если отрезок ортогональности конечен, то система ортогональных многочленов замкнута при любом весе. В случае бесконечного интервала ортогональности В. А. Стеклов установил ряд условий на весовую функцию, достаточных для замкнутости соответствующей системы ортогональных многочленов; в частности, он доказал замкнутость систем многочленов Эрмита и Лагерра. Одно из достаточных условий Стеклова в случае интервала (a, ∞) заключается в том, что существует такая последовательность положительных чисел $\{a_n\}$, для к-рой выполняются соотношения

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \left(\frac{4}{a_n} \right)^n \int_{a_n}^{\infty} h(x) \, x^n \, dx \right\} = 0,$$

где $h(x)$ — дифференциальный вес на интервале (a, ∞) (т. е. $d\mu(x)=h(x)dx$). Для всего интервала $(-\infty, +\infty)$ достаточное условие состоит в том, чтобы дифференциальный вес $h(x)$ был почти всюду положителен и удовлетворял неравенству

$$h(x) \leqslant c \exp(-\alpha|x|), \ \alpha > 0, \ x \in (-\infty, \infty).$$

Это условие в нек-ром смысле близко к необходимому, ибо, как показал еще В. А. Стеклов, система многочленов незамкнута в случае весовой функции вида

$$h(x) = \exp(-|x|^{\beta}), \quad \beta = \frac{2m}{2m+1}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Полное решение вопроса об условиях замкнутости системы многочленов в пространстве $L_2[a, b, d\mu(x)]$ в случае бесконечного интервала дал М. Рис (M. Riesz, 1922). Он доказал, что для замкнутости системы многочленов в $L_2[a, b, d\mu(x)]$ необходимо и достаточно, чтобы либо соответствующая *моментов проблема* была определенной, либо в случае неопределенности функция $\mu(x)$ была так наз. N-экстремальным решением проблемы моментов.

С понятием замкнутости тесно связано понятие полноты системы функций, к-рое заключается в том, что из равенства нулю линейного ограниченного функционала f на всех элементах системы $\{\varphi_n\}$ следует условие $f=0$. В гильбертовом пространстве эти два понятия эквивалентны. Полнота системы $\{\varphi_n(x)\}$ в пространстве L_p эквивалентна замкнутости этой же системы в L_q, где $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

В комплексной области подробно изучены аналоги неравенств типа (1) или (2) для систем многочленов и более общих систем функций (см. *Ортогональные многочлены* в комплексной области).

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [2] Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов. Обзор достижений отечественной математики, М.— Л., 1950; [3] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [4] Стеклов В. А., «Зап. Акад. наук» (физ.-матем. сер.), 1911, т. 30, № 4, с. 1—86; 1914, т. 33, № 8, с. 1—59; [5] его же, Основные задачи математической физики, ч. 1—2, П., 1922—23; [6] Riesz M., в кн.: Acta litterarum ac Scientiarum regial Universitatis Hungaricae. Sec. scient. mathemat., 1922—1923, köt. 1, old. 209—25; [7] Hewitt E., «Amer. Math. Monthly», 1954, v. 61, p. 249—50.

П. К. Суетин.

ЗАМКНУТАЯ ФОРМУЛА — см. *Арифметика формальная.*

ЗАМКНУТОЕ МНОГООБРАЗИЕ — компактное многообразие без *края*. Например, совокупность всех краевых точек k-мерного компактного многообразия есть $(k-1)$-мерное З. м.

ЗАМКНУТОЕ МНОЖЕСТВО в топологическом пространстве — множество, содержащее все свои *предельные точки*. Таким образом, все точки дополнения к З. м.— внутренние, и потому З. м. можно определить как дополнение к открытому. Понятие З. м. лежит в основе определения топологич. пространства как непустого множества X с заданной системой множеств (называемых замкнутыми), удовлетворяющей аксиомам: все X и пустое множество ϕ замкнуты; пересечение любого числа З. м. замкнуто; объединение конечного числа З. м. замкнуто.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, [пер. с англ.], т. 1, М., 1966.

А. А. Мальцев.

ЗАМКНУТОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение одного топологич. пространства на другое, при к-ром образ всякого замкнутого множества есть замкнутое множество. Класс непрерывных З. о. играет важную роль в общей топологии и ее приложениях. Непрерывные замкнутые бикомпактные отображения наз. совершенными. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, $f(X)=Y$ T_1-пространств замкнуто тогда и только тогда, когда разбиение $\{f^{-1}y\colon y \in Y\}$ непрерывно в смысле Александрова (непрерывно сверху) или когда для каждого открытого в X множества U множество $f^{\#}U=\{y\in Y,\ f^{-1}y\subset U\}$ открыто в U. Последнее свойство лежит в основе определения полунепрерывных сверху многозначных отображений. Т. о., f замкнуто тогда и только тогда, когда обратное (многозначное) отображение непрерывно сверху. Каждое непрерывное отображение бикомпакта на хаусдорфово пространство — З. о. Каждое непрерывное З. о. T_1-пространств факторно; обратное неверно. Ортогональное проектирование плоскости на прямую непрерывно и открыто, но не замкнуто. Также не всякое непрерывное З. о. открыто. Если f: $X\to Y$ непрерывно и замкнуто, а X и Y вполне регулярны, то $\bar f^{-1}y=[f^{-1}y]\beta X$ для любой точки $y\in Y$ (здесь βX — *Стоуна — Чеха бикомпактное расширение*, а $\bar f$: $\beta X\to\beta Y$ — непрерывное продолжение отображения на расширения Стоуна — Чеха пространств X и Y); в классе нормальных пространств справедливо и обратное. Для непрерывных З. о. при переходе к образу сохраняются следующие топологич. свойства: нормальность; коллективная нормальность; совершенная нормальность; паракомпактность; слабая паракомпактность. Полная регулярность и сильная паракомпактность могут для непрерывных замкнутых и даже совершенных отображений не сохраняться. При переходе к прообразу для непрерывных З. о. перечисленные выше свойства могут не сохраняться. Это объясняется тем, что для непрерывного З. о. прообразы точек могут быть небикомпактными, хотя во многих случаях непрерывные З. о. мало отличаются от совершенных. Если f — непрерывное З. о. метрич. пространства X на пространство Y с первой аксиомой счетности, то Y метризуемо, а граница полного прообраза $f^{-1}y$ бикомпактна для любого $y\in Y$. Если f — непрерывное З. о. метрич. пространства X на T_1-пространство Y, то множество всех точек $y\in Y$, при к-рых $f^{-1}y$ небикомпактно, σ-дискретно.

Лит.: [1] Архангельский А. В., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 133—84; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [3] Engelking R., Outline of General Topology, Amst., 1968. *В. И. Пономарев.*

***Н*-ЗАМКНУТОЕ ПРОСТРАНСТВО**, абсолютно замкнутое пространство,— хаусдорфово пространство, к-рое при любом топологич. вложении в какое бы то ни было хаусдорфово пространство Y является в Y замкнутым множеством. H-З. п. характеризуются тем, что из каждого их открытого покрытия можно выделить конечную подсистему, замыкания элементов к-рой покрывают это пространство. Регулярное H-З. п. — бикомпакт. Если каждое замкнутое подпространство пространства H-замкнуто, то само пространство — бикомпакт. Разработана теория H-замкнутых расширений хаусдорфовых пространств.

Лит.: [1] Александров П. С., Урысон П. С., Мемуар о компактных топологических пространствах, 3 изд., М., 1971; [2] Илиадис С. Д., Фомин С. В., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 47—76; [3] Малыхин В. И., Пономарев В. И., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 13, с. 149—230. *В. И. Пономарев.*

ЗАМКНУТЫЙ ГРАФИК, теорема о замкнутом графике: пусть X и Y — полные линейные метрические пространства с метриками, инвариантными относительно сдвига, т. е. $\rho(x,\ y)=\rho(x+a,\ y+a)$, $x,\ y,\ a\in X$ (соответственно для Y) и A — линейный оператор из X в Y. Если график $\mathrm{Gr}\,A=\{(x,\ Ax)\mid x\in X\}$ этого оператора есть замкнутое подмножество декартова произведения $X\times Y$, то оператор A непрерывен. Теорема о З. г. допускает ряд обобщений, напр.: линейное отображение с замкнутым графиком отделимого бочечного пространства в совершенно полное пространство непрерывно. К теореме о З. г. тесно примыкают теорема об открытом отображении и теорема Банаха о гомеоморфизме.

Лит.: [1] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975; [2] Робертсон А.-П., Робертсон В.-Дж., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967. *В. И. Соболев.*

ЗАМКНУТЫЙ ОПЕРАТОР — оператор $A: D_A \to Y$ такой, что из $x_n \in D_A$, $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$ следует $x \in D_A$ и $Ax=y$ (здесь X, Y — банаховы пространства над одним и тем же полем скаляров и $D_A \subset X$ — область определения оператора A). Понятие З. о. распространяется и на операторы, действующие в отделимых линейных топологич. пространствах, только вместо последовательностей $\{x_n\}$ надо рассматривать произвольные направления (сети) $\{x_\xi\}$. Если $\mathrm{Gr} A$ — график оператора A, то A замкнут тогда и только тогда, когда $\mathrm{Gr} A$ есть замкнутое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Это свойство часто принимается за определение З. о.

Понятие З. о. есть обобщение понятия оператора, определенного и непрерывного на замкнутом подмножестве банахова пространства. Примером замкнутого, но не непрерывного оператора является оператор $A=\frac{d}{dt}$, определенный на множестве $C_1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a, b]$. Замкнутыми, но не непрерывными являются многие операторы математич. физики.

Оператор A допускает замыкание (т. е.— замыкаем), если существует замкнутое расширение этого оператора. Для того чтобы оператор был замыкаем, необходимо и достаточно, чтобы из x_n, $x_n' \in D_A$,

$$\lim x_n = \lim x_n', \ \lim Ax_n = y, \ \lim Ax_n' = y'$$

следовало $y=y'$. Наименьшее замкнутое расширение оператора наз. его **замыканием**. Симметрический оператор в гильбертовом пространстве с плотной областью определения всегда допускает замыкание.

Линейный ограниченный оператор $A: X \to Y$ замкнут. Обратно, если A определен на всем X и замкнут, то он ограничен. Если A замкнут и A^{-1} существует, то A^{-1} также замкнут. Так как $A: X \to X$ замкнут тогда и только тогда, когда $A-\lambda I$ замкнут, то A замкнут, если резольвента $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$ существует и ограничена хотя бы для одного значения параметра $\lambda \in \mathbb{C}$.

Если D_A всюду плотно в X и, следовательно, однозначно определен сопряженный оператор $A^*: D_{A^*} \to X^*$, $D_{A^*} \subset Y^*$, то A^* — З. о. Если, кроме того, $D_{A^*}=Y$ и X, Y рефлексивны, то A — замыкаемый оператор и A^{**} является замыканием A.

З. о. A с помощью введения новой нормы в области его определения можно сделать ограниченным. Пусть

$$\|x\|_0 = \|x\|_X + \|Ax\|_Y.$$

Тогда D_A с новой нормой будет банаховым пространством и A, как оператор из $(D_A \|\cdot\|_0)$ в Y, будет ограниченным.

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972. *В. И. Соболев.*

ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ СИСТЕМА — система классов функций, замкнутых относительно операций рассматриваемой *функциональной системы*. Важнейшими примерами З. к. с. являются системы подалгебр алгебры логики, конечнозначных логик, автоматных отображений, алгебр рекурсивных функций и нек-рые другие. *В. Б. Кудрявцев.*

ЗАМЫКАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА — система уравнений

$$L_z u = f_z, \ 0 \leqslant z \leqslant Z, \tag{1}$$

предельная при $h \to 0$, $z(m, h) \to z$ для системы частично разрешенных уравнений

$$L_m^h u^h = f_m^h, \quad m=0, 1, \ldots, M, \tag{2}$$

описывающих последовательные этапы вычислительного алгоритма решения уравнения

$$L^h u^h = f^h \qquad (3)$$

(напр., сеточного уравнения, тогда h — шаг сетки), аппроксимирующего при $h \to 0$ уравнение

$$Lu = f. \qquad (4)$$

При этом $L_0^h = L^h$, $f_0^h = f^h$, L_M^h — тождественный оператор, $f_M^h = (L^h)^{-1} f^h = u^h$, т. е. на M-м этапе алгоритма получается окончательное решение аппроксимирующего уравнения (3). Функция $z(m, h)$ предполагается возрастающей вместе с m (напр., линейной возрастающей) и удовлетворяющей граничным условиям $z(0, h) = 0$, $z(M, h) = Z$. Не исключается возможность $M = \infty$; в этом случае L_∞^h, f_∞^h, $z(\infty, h)$ понимаются как пределы переменных L_m^h, f_m^h, $z(m, h)$ при $m \to \infty$. Случай $M = \infty$ соответствует итерационным методам решения уравнения (3).

Если операторы L_z в уравнении (1) ограничены равномерно по z, то говорят, что алгоритм (2) имеет регулярное замыкание. Хотя множества алгоритмов с регулярным замыканием и реально устойчивых алгоритмов не совпадают, построение З. в. а. часто помогает при исследовании устойчивости алгоритма к различным возмущениям, в частности к вычислительной погрешности (см. [3], [4]).

Понятие З. в. а. введено в [1]. Там же получено и исследовано замыкание алгоритма последовательного исключения неизвестных решения сеточного уравнения, аппроксимирующего уравнение (4), где $Lu = u - Au$, A — интегральный оператор Фредгольма.

Построение З. в. а. и обратная операция — построение по непрерывному процессу дискретного алгоритма, имеющего этот процесс своим замыканием,— бывают полезными при конструировании новых методов решения задач. В частности, большое число итерационных методов имеет своими замыканиями устанавливающиеся процессы. Напр., методу простой итерации решения сеточного уравнения Лапласа соответствует процесс установления $u_t = \Delta u$, трехслойному итерационному методу — процесс установления $u_{tt} + \alpha u_t = \Delta u$ (см. [5]).

Лит.: [1] Соболев С. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1956, т. 20, № 4, с. 413—36; [2] Бабушка И., Прагер М., Витасек Э., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1964, т. 4, № 2, с. 351—53; [3] Бахвалов Н. С., Вычислительные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, К., 1970; [4] его же, Численные методы, 2 изд., М., 1975; [5] Саульев В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, М., 1960; [6] Шапкин А. Ф., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 2, с. 411—16.

А. Ф. Шапкин.

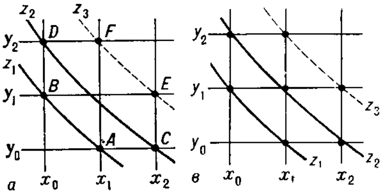
ЗАМЫКАНИЕ МНОЖЕСТВА в топологическом пространстве — пересечение всех *замкнутых множеств*, содержащих данное множество.

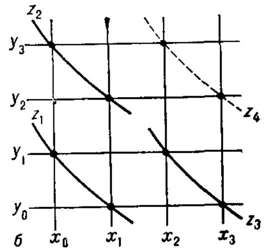
А. А. Мальцев.

ЗАМЫКАНИЯ ОТНОШЕНИЕ в частично упорядоченном множестве M — однозначное отображение множества M в себя, сопоставляющее каждому элементу $a \in M$ некоторый элемент $\bar{a} \in M$, наз. замыканием элемента a, и удовлетворяющее следующим аксиомам: 1) $a \leqslant \bar{a}$; 2) если $a \leqslant b$, то $\bar{a} \leqslant \bar{b}$; 3) $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$. Элемент a наз. замкнутым, если он совпадает со своим замыканием. З. о. в множестве M однозначно определяется заданием системы всех замкнутых элементов. З. о. может быть введено, в частности, в системе всех подмножеств произвольного множества M, частично упорядоченной по теоретико-множественному включению. В этом случае также принято говорить, что З. о. задано в самом множестве M. Во всяком множестве M можно задать З. о., беря в качестве системы замкнутых подмножеств любую систему подмножеств, содержащую как само M, так и пересечение любой своей подсистемы. Два частично упорядоченных множества с З. о. наз. изоморфными, если существует такой изоморфизм этих частично упорядоченных множеств, при к-ром образы и прообразы замкнутых элементов замкнуты. Важную роль в математике играют З. о. на множестве всех подмножеств M, обладающие следующим дополнительным свойством: замыкание объединения двух подмножеств множества M равно объединению замыканий этих подмножеств. Такое З. о. наз. топологией в множестве M.

Лит.: [1] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, М., 1962. *О. А. Иванова.*

ЗАМЫКАНИЯ УСЛОВИЕ — условие в *тканей геометрии*, при выполнении к-рого из некоторых инциденций точек и линий ткани вытекает новая инциденция. Примером З. у. может служить условие замыкания Томсена (см. рис. *а*): первое и второе семейства линий ткани изображены параллельными прямыми, третье — кривыми линиями; З. у. означает, что из принадлежности A и B и C и D линиям третьего семейства следует принадлежность такой же линии точек E и F. Если x, y и z — параметры, определяющие линии трех семейств, то З. у. можно придать абстрактную форму системы условных тождеств, если рассматривать z как результат «умножения» x и y: $z=xy$,





$$x_0y_1=x_1\ y_0,\ \ x_0y_2=x_2y_0 \Longrightarrow x_1y_2=x_2y_1.$$

Если $z=xy$ рассматривать как квазигрупповую операцию, то условие замыкания Томсена равносильно изотопности квазигруппы абелевой группе.

На рис. *б* и *в* изображены условие замыкания Рейдемейстера и условие шестиугольности (все три условия равносильны для плоской три-ткани даже без предположения дифференцируемости). В абстрактной форме они ведут к разным классам квазигрупп и луп, в многомерной геометрии тканей — к разным классам тканей.

К З. у. относятся также некоторые предложения проективной геометрии (например, теоремы Дезарга и Паппа).

Лит.: [1] Бляшке В., Введение в геометрию тканей, пер. с нем., М., 1959; [2] Белоусов В. Д., Рыжков В. В., в сб.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 159—88; [3] Белоусов В. Д., Алгебраические сети и квазигруппы, Киш., 1971. *В. В. Рыжков.*

ЗАОСТРЕНИЯ ТОЧКА — то же, что *возврата точка*.

ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛОВ МЕТОД, принцип Дюамеля,— метод отыскания решения однородной задачи Коши для неоднородного линейного дифференциального уравнения или системы с частными производными по известному решению однородного уравнения или системы.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}-Lu=f\,(x,\ t),\ \ u=u\,(x,\ t),\ \ x=(x_1,\ \ldots,\ x_n),\quad (1)$$

где L — произвольный линейный дифференциальный оператор, к-рый не содержит производных по t выше

$n-1$ порядка. Частное решение $u(x, t)$ уравнения (1) при $t>0$ ищется в виде *Дюамеля интеграла*

$$u(x, t)=\int_0^t \varphi(x, t; \tau)\, d\tau, \qquad (2)$$

где φ является (регулярным или обобщенным) решением однородного уравнения

$$\frac{\partial^m \varphi}{\partial t^m}-L\varphi=0, \quad t>\tau.$$

Если

$$\left.\frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}\right|_{t=\tau}=\begin{cases} 0 & \text{при } k=0, 1, \ldots, m-2, \\ f(x, \tau) & \text{при } k=m-1, \end{cases}$$

то функция (2), полученная с помощью суперпозиции импульсов φ, будет решением задачи Коши

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=0, \quad k=0, 1, \ldots, m-1, \qquad (3)$$

для неоднородного уравнения (1).

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений и систем З. п. м. известен под названием **метода вариации постоянных**, или **метода импульсов**. Этот метод для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка m:

$$lu\equiv\frac{d^m u}{dt^m}-\sum_{j=1}^m a_j(t)\frac{d^{m-j}u}{dt^{m-j}}=f(t) \qquad (4)$$

заключается в том, что если $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ — какая-либо фундаментальная система решений уравнения $lu=0$, то решение $u(t)$ неоднородного уравнения (4) отыскивается в виде

$$u(t)=\sum_{j=1}^m c^j(t)\, u_j(t).$$

Функции $\dot{c}^j=dc^j/dt$, $j=1, \ldots, m$, однозначно определяются как решения системы алгебраич. уравнений

$$\sum_{j=1}^m \dot{c}^j(t)\, d^k u_j/dt^k=0, \quad k=0, 1, \ldots, m-2,$$

$$\sum_{j=1}^m \dot{c}^j(t)\, d^{m-1}u_j/dt^{m-1}=f(t)$$

с отличным от нуля детерминантом Вроньского.

Если $f(t)=0$ при $t\leqslant 0$, то решение $u_f(t)$ однородной задачи Коши (3) для уравнения (4) принято наз. нормальной реакцией на внешнюю нагрузку $f(t)$. Функция $u_f(t)$ представима в виде свертки или интеграла Дюамеля

$$u_f(t)=\int_0^t \varphi(\tau) f(t-\tau)\, d\tau=\int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

где $l\varphi(t)=0$ при $t>0$ и

$$\left.\frac{d^k \varphi}{dt^k}\right|_{t=0}=\begin{cases} 0 & \text{при } k=0, 1, \ldots, m-2, \\ 1 & \text{при } k=m-1. \end{cases}$$

Пусть $f(x, t)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$,— функция, имеющая непрерывные частные производные до порядка $(n+1)/2$ в случае нечетного n и $(n+2)/2$ — в случае четного n, а $M_r[f(x, t)]$ — среднее значение f на сфере $|y-x|=r$ с центром в точке x и радиуса r. Зависящая от неотрицательного параметра $\tau\leqslant t$ функция

$$v(x, t; \tau)=\frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^t (t^2-r^2)^{(n-3)/2} r M_r[f(x, \tau)]\, dr$$

является решением волнового уравнения

$$\Box v\equiv v_{tt}-\Delta v=0,$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$v(x, 0; r)=0, \quad v_t(x, 0; \tau)=f(x, \tau).$$

Интеграл Дюамеля

$$u(x, t)=\int_0^t v(x, t-\tau; \tau)\, d\tau \tag{5}$$

представляет собой решение однородной задачи Коши: $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=0$ для уравнения $\Box u=f(x, t)$. При $n=2$ и $n=3$ из (5) получаются выражения

$$u(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau \int_{\rho\leqslant\pi} \frac{f(y, t-\tau)\, dy}{\sqrt{\tau^2-\rho^2}}, \quad y=(y_1, y_2),$$

и

$$u(x, t)=\frac{1}{4\pi}\int_{\rho\leqslant t}\frac{f(y, t-\rho)}{\rho}\, dy, \quad y=(y_1, y_2, y_3), \tag{6}$$

где $\rho=|x-y|$.

Если же $n=1$, то

$$u(x, t)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(y, \tau)\, dy, \ y=y_1.$$

Интеграл (6) наз. з а п а з д ы в а ю щ и м п о т е н ц и а л о м с плотностью f.

З. п. м. (метод вариации параметров) особенно прост и полезен, когда он применяется к линейным системам дифференциальных уравнений 1-го порядка вида

$$Su\equiv u_t+\sum_{i=1}^n A^i u_{x_i}+Bu=f(x, t), \tag{7}$$

где $u=u(x, t)$ — вектор с k компонентами, A^i и B — заданные матрицы размера $k\times k$, а f — заданный вектор.

Пусть вектор $\varphi=\varphi(x, t; \tau)$, зависящий от параметра $\tau\leqslant t$, есть решение задачи Коши

$$\varphi(x, \tau; \tau)=f(x, \tau)$$

для однородной системы $S\varphi=0$. Тогда вектор

$$u(x, t)=\int_0^t \varphi(x, t; \tau)\, d\tau \tag{8}$$

является решением неоднородной системы (7) с начальным условием

$$u(x, 0)=0. \tag{9}$$

Функция $\varphi(x, t; \tau)$, соответствующая неоднородному уравнению теплопроводности

$$u_t-a\,\Delta u=f(x, t), \ a=\mathrm{const}>0, \tag{10}$$

имеет вид

$$\varphi(x, t; \tau)=\int_{R^n}[4\pi a(t-\tau)]^{-n/2}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4a(t-\tau)}} f(y, \tau)\, dy, \tag{11}$$

где R^n — евклидово пространство. Решение $u(x, t)$ уравнения (10) с начальным условием (9) задается интегралом Дюамеля (3), где под знаком интеграла стоит функция (11).

З. п. м. используется и при исследовании смешанных задач для уравнений с частными производными параболич. и гиперболич. типов, позволяя общую задачу редуцировать к задачам со специальными начальными и граничными функциями.

Напр., пусть в области $\Omega=\{(x, t)|\alpha<x<\beta, 0<t<T\}$ задано уравнение с частными производными

$$Au_{tt}+Bu_{xx}+au_t+bu_x+cu=0, \tag{12}$$

где B, b, $c=\mathrm{const}$, $B<0$,

$$A=\begin{cases} A_0=\mathrm{const} & \text{при } \alpha\leqslant x\leqslant 0, \\ 0 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\beta, \end{cases}$$

$$a=\begin{cases} a_0=\mathrm{const}>0 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\beta, \\ a_1=\mathrm{const} & \text{при } \alpha\leqslant x\leqslant 0, \end{cases}$$

к-рое гиперболично при $x<0$ и параболично при $x>0$. Если $\varphi(x, t)$ — непрерывно дифференцируемое при $x=0$ решение смешанной задачи

$$\varphi(x, 0)=0,\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ \varphi_t(x, 0)=0,\ \alpha<x<0,$$
$$u(\alpha, t)=1,\ \varphi_x(\beta, t)=0,\ 0<t<T,$$

для уравнения (12) в области Ω, то, согласно З. п. м., интеграл Дюамеля

$$u(x, t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \varphi(x, t-\tau) f(\tau)\, d\tau\equiv Tf \qquad (13)$$

с непрерывно дифференцируемой плотностью $f(t)$ будет решением смешанной задачи

$$u(x, 0)=0,\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ u_t(x, 0)=0,\ \alpha<x<0,$$
$$u(\alpha, t)=f(t),\ u_x(\beta, t)=0,\ 0<t<T,$$

для уравнения (12) в области Ω.

Интеграл Дюамеля (13) по существу есть формула представления линейного оператора T, к-рый преобразует заданную граничную функцию $f(t)$ в решение $u(x, t)$. Интегральная формула Дюамеля имеет место не только для оператора T из (13), но и для всех линейных операторов T, удовлетворяющих следующим условиям.

1) Оператор T определен для всех функций $f(t)$, равных нулю при $t<0$, и преобразует f в функцию $Tf=u(x_1, \ldots, x_n, t)$, также равную нулю при $t<0$.

2) $$T\int_{\tau_1}^{\tau_2} f[\theta(t, \tau)]\, d\tau=\int_{\tau_1}^{\tau_2} Tf[\theta(t, \tau)]\, d\tau,$$

где $\theta(t, \tau)$ — некоторая функция t и параметра τ.

3) Если $f(0)=0$ и $f(t)$ дифференцируема, то

$$\frac{d}{dt} Tf=T\frac{df}{dt}.$$

4) Если $Tf(t)=\varphi(t)$, то для всех $\tau>0$

$$Tf(t-\tau)=\varphi(t-\tau).$$

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970; [6] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972. *А. М. Нахушев.*

ЗАПОЛНЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X такое, что каждое отображение $g\colon A\to X$ любого замкнутого подмножества A произвольного *нормального пространства* Y может быть распространено на все пространство Y. Прямое произведение и *ретракт* З. п. являются З. п. В частности, З. п. являются единичный интервал I, n-мерный куб I^n и гильбертов куб I^ω. Любые два отображения бинормального пространства в З. п. гомотопны, а бинормальное З. п. стягиваемо к точке. *М. И. Войцеховский.*

ЗАПЯТАЯ — термин, относящийся к представлению действительного числа дробью, к способу представления действительных чисел в цифровой вычислительной машине.

Пусть выбрана система счисления с основанием q, и пусть для действительного числа x имеет место разложение

$$x=\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha_k q^k, \qquad (1)$$

где α_k — целые числа, заключенные в пределах от 0 до $q-1$. В представлении числа x q-ичной дробью

$$x=(\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0,\ \alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots) \qquad (2)$$

З. (так наз. q-ичная запятая) разделяет коэффициенты разложения (1), относящиеся соответственно к неотрицательным и отрицательным степеням q.

По способу представления действительных чисел цифровые вычислительные машины делятся на машины с фиксированной З. и машины с плавающей З.

Арифметика с фиксированной запятой предполагает, что все числа имеют модуль, меньший 1. Для хранения коэффициентов $\alpha_{-1}, \alpha_{-2} \ldots$ отводится фиксированное число разрядов. Если при выполнении арифметич. операции над числами с фиксированной З. результат имеет модуль, больший 1, то выполнение программы прерывается, и выдается сигнал переполнения. Чтобы избежать этого, программист заранее должен предусмотреть возможность переполнения и предупредить его соответствующим масштабированием. К числу машин с фиксированной З. относится, напр., «Сетунь», работающая в троичной системе счисления. Трудности программирования для арифметики с фиксированной З. объясняют тот факт, что большинство современных ЭВМ используют арифметику с плавающей З. Число с плавающей запятой имеет вид

$$x = \pm q^p \sum_{k=1}^{t} \alpha_k q^{-k},$$

при этом p наз. порядком, а $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$ — мантиссой числа x. Для хранения порядка и мантиссы числа с плавающей З. обычно отводится фиксированное число разрядов (определяемое длиной машинного слова), что вызывает ограничения на величину порядка такого числа. Число с плавающей З., у к-рого $\alpha_1 \neq 0$, наз. нормализованным числом. Обычно результаты арифметич. операций в машине с плавающей З. автоматически нормализуются суммирующим устройством машины.

Х. Д. Икрамов.

ЗАРИСКОГО КАСАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО к алгебраическому многообразию или схеме X в точке x — векторное пространство над полем вычетов $k(x)$ точки x, двойственное к пространству $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$, где $\mathfrak{M}_x$ — максимальный идеал локального кольца $O_{X,x}$ точки x на X. Если $X \subset A_k^n$ и задается системой уравнений

$$F_\alpha = 0,$$

где $F_\alpha \in k[X_1, \ldots, X_n]$, то З. к. п. в рациональной точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ задается системой линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_\alpha}{\partial X_i}(x)(X_i - x_i) = 0.$$

Многообразие X неособо в рациональной точке x тогда и только тогда, когда размерность З. к. п. к X в x равна размерности X. Для рациональной точки $x \in X$ З. к. п. двойственно к пространству $\Omega^1_{X/k} \otimes k(x)$ — слою в точке x кокасательного пучка $\Omega^1_{X/k}$. Неприводимое многообразие X над совершенным полем k гладко тогда и только тогда, когда пучок $\Omega^1_{X/k}$ локально свободен. Векторное расслоение $T_X = V(\Omega^1_{X/k})$, ассоциированное с пучком $\Omega^1_{X/k}$, наз. касательным расслоением X над k; оно функториально связано с X. Его пучок сечений называется касательным пучком к X. З. к. п. рассмотрено О. Зариским [1].

Лит.: [1] Zariski O., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 62, p. 1—52; [2] Samuel P., Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, 2 ed., B.— Hdlb.— N.Y., 1967; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972, с. 107.

В. И. Данилов.

ЗАРИСКОГО ТЕОРЕМА о связности: пусть f: $X \to Y$ — собственный сюръективный морфизм неприводимых многообразий и пусть поле рациональных функций $k(Y)$ сепарабельно алгебраически замкнуто в $k(X)$, а $y \in Y$ — нормальная точка, тогда $f^{-1}(y)$ связно (и более того, геометрически связно) (см. [2]). Эта теорема обосновывает классический принцип вырождения: если общий цикл алгебраич. системы циклов является многообразием (т. е. геометрически неприводим), то любая специализация этого цикла связна.

Частным случаем З. т. о связности является так наз. **основная теорема Зариского**, или **теорема Зариского о бирациональных соответствиях**: бирациональный морфизм алгебраич. многообразий $f: X \to Y$ является открытым вложением в окрестности нормальной точки $y \in Y$, если $f^{-1}(y)$ — конечное множество (см. [1]). В частности, бирациональный морфизм нормальных многообразий, биективный на точках, является изоморфизмом. Другая формулировка этой теоремы: пусть $f: X \to Y$ — квазиконечный отделимый морфизм схем, а Y — квазикомпактная квазиотделимая схема, тогда существует разложение $f = u \circ g$, где u — конечный морфизм, а g — открытое вложение [3].

Лит.: [1] Zariski O., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 53, № 3, p. 490—542; [2] его же, «Mem. Amer. Math. Soc.», 1951, № 5, p. 1—90; [3] Grothendieck A., «Publ. Math. IHES», 1961, № 11; 1967, № 32. *В. И. Данилов.*

ЗАРИСКОГО ТОПОЛОГИЯ на аффинном пространстве — топология, множество замкнутых подмножеств к-рой совпадает с множеством алгебраич. подмногообразий данного аффинного пространства A^n. Если X — аффинное алгебраич. многообразие (см. *Аффинное алгебраическое множество*) в A^n, то индуцированная на X топология также наз. З. т. Аналогично определяется З. т. аффинной схемы Spec A кольца A (она наз. иногда **спектральной топологией**) — замкнутыми считаются множества вида

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A,\ \mathfrak{p} \supset I\},$$

где I — идеал кольца A.

З. т. впервые была рассмотрена О. Зариским [1] как топология в множестве нормирований поля алгебраич. функций. Хотя З. т. в общем случае не является отделимой топологией, на нее переносятся многие конструкции алгебраич. топологии [2]. Аффинная схема, снабженная З. т., квазикомпактна.

Топологию, к-рая естественно определена на произвольной *схеме*, также наз. З. т., чтобы отличать ее от *этальной топологии* или, если многообразие X определено над полем $\mathbb{C}$, то — от топологии аналитич. пространства на множестве комплекснозначных точек $X(\mathbb{C})$.

Лит.: [1] Zariski O., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1944, v. 50, № 10, p. 683—91; [2] Серр Ж. П., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 372—450. *В. И. Данилов.*

ЗАРЯД, обобщенная мера, — действительная σ-аддитивная функция множества, определенная на σ-алгебре, борелевских подмножеств области $G \subset \mathbb{R}^n$ и конечная на компактах $K \subset G$. Разность двух мер является З.; обратно, таким способом получаются все З.: для любого З. ν существует разложение G на два непересекающихся множества G^+ и G^- таких, что $\nu(e) \geqslant 0$ при $e \subset G^+$ и $\nu(e) \leqslant 0$ при $e \subset G^-$. Меры $\nu^+ = \nu(e \cap G^+)$ и $\nu^- = \nu(e \cap G^-)$ не зависят от выбора G^+ и G^- и наз. **положительной** и **отрицательной вариациями** З. ν, а мера $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ — **полной вариацией** З. ν. Имеет место **разложение Хана — Жордана**: $\nu = \nu^+ + \nu^-$, в силу к-рого свойства З. могут быть выражены в терминах теории меры.

Лит.: [1] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [2] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953. *М. И. Войцеховский.*

ЗАУЗЛЕННАЯ СФЕРА — нетривиальный *двумерный узел* в 4-мерном евклидовом пространстве E^4, сфера S^2, к-рую нельзя получить вращением в E^4 (заузленной) дуги k, расположенной в полупространстве E^3_+ вокруг ограничивающей это полупространство плоскости. Для З. с. фундаментальная группа $\pi(E^4 \setminus S^2)$ не является группой узла.

Лит.: [1] Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, пер. с англ., М., 1967. *М. И. Войцеховский.*

ЗАЦЕПЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТ — целое или дробное число, сопоставляемое двум непересекающимся циклам z^{k-1} и z^{n-k} в многообразии M размерности n, классы гомологий к-рых принадлежат подгруппам кручения в целочисленных гомологиях $H_{k-1}(M, \mathbb{Z})$ и $H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$ соответственно. Простейшим примером является З. к. двух непересекающихся замкнутых спрямляемых кривых L_1, L_2 пространства $\mathbb{R}^3$, выражаемый так наз. интегралом Гаусса:

$$I = \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{(x_1 - x_2,\ dx_1,\ dx_2)}{|x_1 - x_2|^{3/2}}$$

(здесь x_1 и x_2 — радиус-векторы L_1 и L_2).

Понятие З. к. обобщается на случай замкнутых ориентированных многообразий M^{k-1} и M^{n-k}, расположенных в пространстве $\mathbb{R}^n$: З. к. равен *степени отображения* χ ориентированного прямого произведения $M^{k-1} \times M^{n-k}$ в сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, где $\chi(x, y)$, $x \in M^{k-1}$, $y \in M^{n-k}$, есть точка пересечения с S^{n-1} луча, отложенного параллельно вектору (x, y) от начала координат. З. к. равен *пересечения индексу* любой k-мерной цепи C^k, для к-рой $\partial C^k = \alpha z^{k-1}$, с циклом z^{n-k}, деленному на α. Это число не зависит от выбора пленки C^k. Если поменять ролями циклы z^{k-1} и z^{n-k}, то З. к. умножится (в ориентируемом случае) на $(-1)^{k(n-k)}$. Если заменить любой из циклов на гомологичный ему в дополнении к другому, то З. к. не изменится. Этот факт является основой при интерпретации *Александера двойственности* с помощью зацеплений. При замене одного из циклов на любой гомологичный с ним З. к. изменяется на целое число, благодаря чему определено спаривание подгрупп кручения в $H_{k-1}(M, \mathbb{Z})$ и $H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$ со значениями в факторгруппе $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Q}$ — рациональные числа. Это спаривание устанавливает между ними *Понтрягина двойственность*. В частности, для подгруппы кручения в $H_m(M, \mathbb{Z})$ в случае $n = 2m + 1$ этим задается невырожденная квадратичная форма самозацеплений со значениями в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, к-рая является гомотопич. инвариантом многообразия. Напр., с ее помощью впервые были обнаружены асимметричные многообразия, а именно, нек-рые линзовые многообразия.

З. к. рассматриваются также в случае других областей коэффициентов, напр., если на многообразии действует свободно группа π, то группы гомологии являются групповыми модулями, и значение З. к. определено в соответствующим образом локализованном групповом кольце.

Лит.: [1] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.— Л., 1938; [2] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976. *А. В. Чернавский.*

ЗВЕЗДА ЭЛЕМЕНТА ФУНКЦИИ, звезда Миттаг-Леффлера,— *звездообразная область*, в к-рую данный элемент

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

аналитич. функции может быть аналитически продолжен по лучам, выходящим из его центра a. З. э. ф. состоит из тех точек комплексной плоскости z, к-рые можно достичь, аналитически продолжая элемент $f(z)$ в виде степенного ряда вдоль всевозможных лучей, исходящих из центра элемента a. Если при продолжении элемента вдоль данного луча $z=a+re^{i\varphi}$, $0\leqslant r<+\infty$, нельзя достичь произвольной точки этого луча, то на луче найдется точка $z_1\neq a$ такая, что продолжение возможно до любой точки интервала $[a, z_1)$, но далее неосуществимо. Если продолжение возможно в любую точку луча, то полагают $z_1=\infty$. Совокупность точек, принадлежащих всем интервалам $[a, z_1)$ представляет собой (односвязную) звездообразную область относительно точки a — это и есть З. э. ф. S_f. В результате аналитич. продолжения в S_f получают регулярную аналитич. функцию $f(z)$, являющуюся однозначной ветвью в S_f полной аналитич. функции, порождаемой данным элементом.

Все точки границы ∂S_f З. э. ф. являются *достижимыми граничными точками*. В вопросах аналитического продолжения (см. также *Адамара теорема*) различают также угловые, доступные и хорошо доступные точки границы ∂S_f. Точка $z_1\in\partial S_f$ наз. угловой точкой границы З. э. ф., если она имеет наименьший модуль $|z_1|$ среди всех точек ∂S_f с тем же аргументом $\arg z_1$. Точка $z_1\in\partial S_f$ наз. доступной точкой границы З. э. ф., если существует полукруг $V(z_1)$ такой, что $f(z)$ регулярна всюду внутри $V(z_1)$ и в точках его диаметра, отличных от z_1. Точка $z_1\in\partial S_f$ наз. хорошо доступной (или хорошо достижимой) точкой границы З. э. ф., если существует угол $V(z_1)$ с вершиной z_1 раствора больше π и такой, что $f(z)$ регулярна в области $\{V(z_1)\cap(|z-z_1|<<\delta)\}$ при достаточно малом $\delta>0$.

Г. Миттаг-Леффлер [1] показал, что регулярную функцию $f(z)$ в ее звезде S_f можно представить в виде равномерно сходящегося внутри S_f ряда многочленов

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k_n} c_\nu^{(n)}\frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(z-a)^\nu. \qquad (*)$$

Формула (*) наз. Миттаг-Леффлера разложением в звезде. Здесь степени многочленов k_n и коэффициенты $c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, \ldots, c_{k_n}^{(n)}$, $n=0, 1, \ldots$, не зависят от вида $f(z)$ и могут быть вычислены раз навсегда. Такое вычисление было проделано П. Пенлеве (P. Painlevé; см. [2], [3]).

Лит.: [1] Mittag-Leffler G., «Acta math.», 1900, v. 23, p. 43—62; 1901, v. 24, p. 183—204, 205—44; 1902, v. 26, p. 353—93; 1905, v. 29, p. 101—82; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8; [3] Borel E., Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, P., 1928.

Е. Д. Соломенцев.

ЗВЕЗДНОЕ ТЕЛО с центром в точке O — открытое множество $\mathfrak{S}$ n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, обладающее свойством лучистости (относительно O): если $a\in\bar{\mathfrak{S}}$, где $\bar{\mathfrak{S}}$— замыкание $\mathfrak{S}$, то и весь отрезок $[O, a)$ (здесь $O\in[O, a)$, $a\notin[O, a)$) лежит в $\mathfrak{S}$. Иногда к З. т. причисляют и точки его границы. З. т. $\mathfrak{S}$ с центром в O можно охарактеризовать следующим образом: O есть внутренняя точка $\mathfrak{S}$; каждый луч, выходящий из O, или целиком лежит в $\mathfrak{S}$, или содержит такую точку a, что отрезок луча $[O, a)$ лежит внутри $\mathfrak{S}$, а отрезок луча $(a, +\infty)$ лежит вне $\mathfrak{S}$. Это определение эквивалентно первому, с точностью до точек на границе $\mathfrak{S}$. З. т. есть частный случай звездного множества с центром в O — множества, обладающего свойством обобщенной лучистости относительно O: если $a\in\mathfrak{S}$, то и весь отрезок $[O, a]$ лежит в $\mathfrak{S}$. Частным случаем З. т. является *выпуклое тело*.

Каждому З. т. $\mathfrak{S}$ с центром в начале координат O можно взаимно однозначно сопоставить *лучевую функцию* $F(x)=F_{\mathfrak{S}}(x)$ так, что $\mathfrak{S}$ есть множество точек $x\in\mathbb{R}^n$ с условием $F(x)<1$.

Это сопоставление задается формулой

$$F(x) = \inf_{\substack{tx \in \mathfrak{S} \\ t > 0}} \frac{1}{t}.$$

При этом З. т. $\mathfrak{S}$ ограничено тогда и только тогда, когда $F(x)$ — положительная лучевая функция, и выпукло тогда и только тогда, когда $F(x)$ — выпуклая лучевая функция.

Лит.: [1] Касселс Дж. В. С., Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965. *А. В. Малышев.*

ЗВЕЗДНОЙ АСТРОНОМИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, возникающие при исследовании общих закономерностей строения, состава, динамики и эволюции звездных систем.

Основным типом уравнений, решаемых в задачах звездной статистики, являются уравнения, связывающие функции распределения видимых и истинных характеристик объектов. Это, как правило, интегральные уравнения для искомых функций распределения истинных характеристик. Напр., важное для исследования строения Галактики уравнение Шварцшильда:

$$A(m) = \omega \int_0^\infty \Delta(r)\, \varphi(M)\, dr, \tag{1}$$

в к-ром неизвестной в данном телесном угле ω является функция распределения звезд по расстояниям $\Delta(r)$, а функция распределения звезд по видимым звездным величинам $A(m)$ и по абсолютным звездным величинам $\varphi(M)$ известна по наблюдениям ($M = m - 5 \lg r + 5$). Уравнение (1) имеет точное решение в характеристич. функциях. Трудность задачи состоит в том, что $A(m)$ известна лишь до нек-рой, предельной для телескопов, видимой звездной величины m.

Другим примером является уравнение типа Абеля:

$$F(r) = 2 \int_r^R f(\rho) \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}},$$

связывающее наблюдаемую поверхностную звездную плотность (здесь и далее под звездной плотностью подразумевается плотность распределения звезд как объектов) $F(r)$ сферически симметричного скопления звезд или галактик, имеющего радиус R, с пространственной плотностью $f(\rho)$.

Примером двумерного интегрального уравнения является уравнение, связывающее функции распределения видимых конфигураций $\varphi(\xi, \eta)$ и истинных конфигураций $f(x, y)$ тройных звезд

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_\eta^\infty \int_{-\infty}^\infty k(x-\xi, y, \eta)\, f(x, y)\, dx dy,$$

где

$$k(x-\xi, y, \eta) = \eta^{-2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{2y\eta}{y^2 + \eta^2 + (x-\xi)^2} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\};$$

оно получается в предположении, что все ориентации плоскости истинных конфигураций тройных звезд равновероятны; ξ и η (соответственно x и y) суть координаты третьего компонента тройной звезды, если $(0, 0)$ — координаты первого и $(0, 1)$ — второго компонентов.

Для звездной кинематики характерно решение избыточных систем условных уравнений, получаемых для отдельных звезд или для отдельных площадок неба.

Примеры: 1) Система для определения экваториальных компонентов X, Y, Z локальной скорости Солнца по наблюденным собственным движениям звезд μ_α и μ_δ, их расстояниям r и экваториальным координатам α и δ:

$$X \sin \alpha - Y \cos \alpha = 4{,}74 r \mu_\alpha \cos \delta,$$

$$X \cos \alpha \sin \delta + Y \sin \alpha \sin \delta - Z \cos \delta = 4{,}74 r \mu_\delta$$

и лучевым скоростям звезд v_r:

$$X \cos\alpha \cos\delta + Y \sin\alpha \cos\delta + Z \sin\delta = -v_r.$$

2) Система

$$A r \sin 2 (l - l_0) = v_r,$$

$$A r \cos 2 (l - l_0) + B r = 4{,}74 \mu_l$$

для определения коэффициентов Оорта A и B характеризующих угловую скорость $\omega(R)$ вращения Галактики в районе Солнца:

$$A = -\frac{1}{2} R_0 \omega' (R_0), \quad B = A - \omega (R_0)$$

и долготы галактич. центра l_0 (l — галактич. долготы звезд, находящихся вблизи галактич. экватора).

Основным уравнением звездной динамики является уравнение Больцмана

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + u \frac{\partial\psi}{\partial x} + v \frac{\partial\psi}{\partial y} + w \frac{\partial\psi}{\partial z} + \\ + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial w} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{irr}, \qquad (2)$$

где ψ — фазовая плотность, Φ — потенциал звездной системы. Так как звездная система самогравитирующая, уравнение (2) должно решаться совместно с уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -4\pi G \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi du\, dv\, dw. \qquad (3)$$

При рассмотрении только регулярных сил (создаваемых всей системой в целом) звездной системы правая часть (2) равна нулю; при учете также и иррегулярных сил (возникающих при сближении звезд системы) нужно учитывать интеграл столкновений. Исследование уравнений (2) и (3) показывает, что в сферич. системах имеются два, а во вращающихся системах — три интеграла движения.

В *гидродинамическом приближении* рассматриваются гидродинамич. уравнения, получаемые из уравнения (2).

В теории иррегулярных сил звездных систем изменение скорости звезды часто рассматривается как непрерывный случайный процесс и решается уравнение Фоккера — Планка

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \beta \, \mathrm{div}_v \, (fv) + q \nabla_v F,$$

где $F(x, y, t) dv$ — вероятность того, что звезда в момент t имеет скорость v в промежутке $[y, y+dy]$, если в начальный момент ее скорость была равна x. Здесь β и q соответственно коэффициенты динамич. трения и диффузии, определяемые характеристиками звездного поля.

Более точное приближение дает рассмотрение изменения скорости звезды в рамках чисто разрывного случайного процесса. После нахождения плотности переходной вероятности $P(x, y)$ и плотности вероятности скачка $p(x)$ решение уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} = \\ = -\int_{-\infty}^{y} p(z)\, d_z F(x, y, t) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} p(z)\, P(z, y)\, d_z F(x, z, t) \qquad (4)$$

определяет функцию $F(x, y, t)$. Ввиду наличия критической скорости в звездных системах уравнение (4) рассматривается также с поглощающим экраном.

При исследовании устойчивости звездных систем в уравнении Больцмана для равновесной системы рассматривают вариации фазовой плотности и потенциала. Это приводит к уравнениям, схожим с уравнениями, используемыми в физике при исследовании плазменных неустойчивостей. Существенной особенностью для звездных систем при решении этих уравнений является самогравитация и неаддитивность энергии.

При изучении распределения плотности $\rho(a)$ во внешних галактиках решается интегральное уравнение

$$v^2(R)=4\pi G\sqrt{1-e^2}\int_0^R \frac{a^2\rho(a)\,da}{\sqrt{R^2-e^2a^2}},$$

в к-ром $v(R)$ — наблюдаемая круговая скорость вращения галактики, e — эксцентриситет ее меридианного сечения.

Лит.: [1] Паренаго П. П., Курс звездной астрономии, 3 изд., М., 1954; [2] Зонн В., Рудницкий К., Звездная астрономия, пер. с польск., М., 1959; [3] Огородников К. Ф., Динамика звездных систем, М., 1958. *Т. А. Агекян.*

ЗВЕЗДООБРАЗНАЯ ОБЛАСТЬ, звездная область, относительно фиксированной точки O — область D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geq 1$, такая, что отрезок, соединяющий любую точку области D с точкой O, целиком принадлежит этой области.

Односвязная открытая риманова поверхность D над плоскостью w наз. p-листно звездообразной относительно фиксированной точки $a\in D$ (p — натуральное число), если имеется p точек D над $w=a$ (с учетом кратности) и если для любой точки $Q\in D$ существует путь $\Gamma\in D$ из Q в одну из точек над $w=a$ такой, что проекция Γ на плоскость w есть отрезок, соединяющий проекцию Q с $w=a$.

Пусть B — двусвязная область плоскости w, E_1 и E_2 — дополнительные континуумы, $\infty\in E_2$, a — фиксированная точка из E_1, Γ_1 и Γ_2 — граничные компоненты B. Тогда область B наз. З. о. относительно точки a, если либо звездообразна относительно точки a каждая из односвязных областей, содержащих точку a и ограниченных соответственно кривыми Γ_1 и Γ_2, либо Γ_1 состоит из отрезков, выходящих из точки a, а область $E_1\cup B$ звездообразна относительно точки a.

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Hummel J. A., «J. d'Analyse math.», 1967, v. 18, p. 133—60.

Е. Г. Голузина.

ЗВЕЗДООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ, однолистная звездообразная функция,— функция $w=f(z)$, регулярная и однолистная в круге $|z|<1$, $f(0)=0$, и такая, что она отображает $|z|<1$ на *звездообразную область*, относительно точки $w=0$. Для того, чтобы функция $f(z)$, $f(z)\neq 0$ в $0<|z|<1$, $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$, регулярная в круге $|z|<1$, была в нем З. ф., необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]>0,\quad |z|<1.$$

Все З. ф. в $|z|<1$, нормированные условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$, образуют класс S^*, для к-рого имеет место параметрическое представление интегралом Стилтьеса

$$f(z)=z\exp\left[-2\int_{-\pi}^{\pi}\log(1-e^{-it}z)\,d\mu(t)\right],$$

где $\mu(t)$ — неубывающая функция на $[-\pi,\ \pi]$, $\mu(\pi)-\mu(-\pi)=1$.

Для класса S^* решена *коэффициентов проблема*, найдены точные оценки для $|f(z)|$, $|f'(z)|$, $\arg f(z)$, $\arg f'(z)$ (под аргументом функции понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$), причем экстремальными функциями этих оценок являются функции $f(z)=z/(1-e^{i\theta}z)^2$, где θ вещественно. Класс S^* функций $f(z)$ связан с классом функций $\varphi(z)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$, регулярных и однолистных в $|z|<1$, отображающих $|z|<1$ на выпуклую область, по формуле: $z\varphi'(z)=f(z)$.

З. ф., удовлетворяющая условию

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]>\alpha,\quad |z|<1,\quad \alpha<1,$$

наз. З. ф. порядка α в круге $|z|<1$.

Рассматривались также однолистные З. ф. в кольце (см. [1] с. 586—87), p-листные З. ф. и слабо З. ф. в круге (см. [2], [4]), ε-локально звездные функции (см. [1] с. 584), функции, звездообразные в направлении действительной оси (см. [3]). Относительно З. ф. многих комплексных переменных см. [5].

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Hummel J. A., «J. d'Analyse math.», 1967, v. 18, p. 133—60; [3] Robertson M. S., «Amer. J. Math.», 1936, v. 58, № 3, p. 465—72; [4] Goodman A. W., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 74, № 6, p. 1035—50; [5] Баврин И. И., Классы голоморфных функций многих комплексных переменных и экстремальные вопросы для этих классов функций, М., 1976. *Е. Г. Голузина.*

ЗВЕЗДООБРАЗНОСТИ ГРАНИЦА, точный радиус звездообразности,— точная верхняя граница R_U радиусов кругов $|z| \leqslant r$, где U — некоторый класс функций $w=f(z)=z+\ldots$, регулярных и однолистных в круге $|z|<1$, а круги $|z| \leqslant r$ при отображении круга $|z|<1$ каждой функцией класса U отображаются на *звездообразные области* относительно точки $w=0$. Всякое число r из интервала $0<r<R_U$ наз. радиусом звездообразности класса U.

Для нахождения З. г. обычно используется следующий критерий звездообразности: круг $|z|<r$ при отображении $w=f(z)$ тогда и только тогда переходит в звездообразную область, когда на $|z|=r$

$$\frac{\partial \arg f(z)}{\partial \varphi} = \operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geqslant 0, \quad z=re^{i\varphi},$$

или, что то же,

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

З. г. R_S класса S всех функций вида $f(z)=z+\ldots$, регулярных и однолистных в круге $|z|<1$, равна $\operatorname{th}\frac{\pi}{4}=0{,}65\ldots$.

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966. *Е. Г. Голузина.*

ЗЕЙДЕЛЯ МЕТОД — итерационный метод решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$. Решение системы x^* находится как предел последовательности

$$x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)}\right),$$

вычисляемой по правилу

$$x_i^{(k)} = -\sum\nolimits_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} - \sum\nolimits_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k-1)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad (*)$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где a_{ij} — элементы матрицы A, b_i — компоненты вектора b; диагональные элементы матрицы A предполагаются отличными от нуля. Вычисления $(*)$ отличаются от *простой итерации метода* лишь тем, что на k-м шаге при вычислении i-й компоненты учитываются вычисленные k-е приближения первых $(i-1)$ компонент.

В матричной записи З. м. представляется следующим образом. Если $A=B+C$, где

$$B=\left\|\begin{matrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}\right\|, \quad C=\left\|\begin{matrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}\right\|,$$

то соотношение $(*)$ соответствует матричному соотношению $x^{(k)}=-B^{-1}Cx^{(k-1)}+B^{-1}b$. З. м. равносилен методу простой итерации, примененному к системе $x=-B^{-1}Cx+B^{-1}b$, эквивалентной исходной. Для сходимости З. м. необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $B^{-1}C$ по модулю были меньше 1. Иначе, чтобы все корни уравнения $\det(C+B\lambda)=0$ были по модулю меньше 1.

На практике более удобны следующие достаточные условия сходимости З. м. 1) Пусть при всех $i, 1 \leqslant i < n$, $\sum_{i \neq j} |a_{ij}| \leqslant q |a_{ii}|$, $q < 1$. Тогда З. м. сходится и для скорости сходимости имеет место оценка:

$$\| x^{(k)} - x^* \|_1 \leqslant q \| x^{(k-1)} - x^* \|, \quad \| x \|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i |.$$

2) Пусть A — эрмитова положительно определенная матрица. Тогда З. м. сходится.

З. м. относится к классу *релаксации методов*, наиболее употребительным из к-рых является *сверхрелаксации метод*.

Известны модификации З. м., использующие предварительное преобразование исходной системы в эквивалентную ей систему $x = Mx + f$ (см. [4]).

Метод предложен Л. Зейделем в [1].

Лит.: [1] Seidel L., «Abhandl. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl.», 1874, Bd 11, № 3, S. 81—108; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [4] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963.

Г. Д. Ким.

ЗЕЙФЕРТА МАТРИЦА — матрица, сопоставляемая узлам и зацеплениям для алгебраич. изучения их топологич. свойств. Названа в честь Г. Зейферта [1], применившего эту конструкцию для получения алгебраич. инвариантов одномерных узлов в S^3. Пусть $L = (S^{n+2}, l^n)$ есть n-мерное m-компонентное зацепление, т. е. пара, состоящая из ориентированной сферы S^{n+2} и ее дифференцируемого или кусочно линейного ориентированного подмногообразия l^n, гомеоморфного несвязной сумме m экземпляров сферы S^n. Существует компактное $(n+1)$-мерное ориентируемое подмногообразие V сферы S^{n+2} такое, что $\partial V = l$, оно наз. многообразием Зейферта зацепления L. Ориентация многообразия Зейферта V определяется ориентацией его края $\partial V = l$, и, поскольку ориентация сферы S^{n+2} фиксирована, нормальное расслоение к V в S^{n+2} оказывается ориентированным, так что можно говорить о поле положительных нормалей к V. Пусть $i_+ : V \to Y$ малый сдвиг вдоль этого поля, где Y — дополнение открытой трубчатой окрестности V в S^{n+2}. Если $n = 2q - 1$ — нечетное число, то определено спаривание

$$\theta : HqV \otimes HqV \longrightarrow \mathbb{Z},$$

к-рое сопоставляет элементу $z_1 \otimes z_2$ коэффициент зацепления класса $z_1 \in HqV$ и класса $i_{+*} z_2 \in HqY$. Спаривание θ наз. спариванием Зейферта зацепления L. Если z_1 или z_2 имеет конечный порядок, то $\theta(z_1 \otimes z_2) = 0$. Имеет место формула

$$\theta(z_1 \otimes z_2) + (-1)^q \theta(z_2 \otimes z_1) = z_1 \cdot z_2,$$

где справа — индекс пересечения классов z_1 и z_2 на V.

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис свободной части группы HqV. Целочисленная $(k \times k)$-матрица $A = \| \theta(e_i \otimes e_j) \|$ наз. матрицей Зейферта зацепления L. З. м. всякого $(2q-1)$-мерного узла обладает следующим свойством: матрица $A + (-1)^q A'$ унимодулярна, а если $q = 2$, то сигнатура матрицы $A + A'$ делится на 16 (A' — матрица, транспонированная к A). Всякая целочисленная квадратная матрица A является З. м. нек-рого $(2q-1)$-мерного узла, если $q \neq 2$ и матрица $A + (-1)^q A'$ унимодулярна.

Сама по себе З. м. не является инвариантом зацепления L; это связано с неоднозначностью построения многообразия Зейферта V и выбора базиса $e_1, \ldots, e_k$. Матрицы вида

$$\begin{Vmatrix} A & 0 & \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} A & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где α — вектор-строка, а β — вектор-столбец, наз. элементарными расширениями квадратной матрицы A, а матрица A наз. элементарной редукцией своих элементарных расширений. Две квадратные матрицы наз. S-эквивалентными, если одну можно получить из другой последовательностью элементарных редукций, элементарных расширений и унимодулярных конгруэнций (т. е. преобразований вида $A \to P'AP$, где P — унимодулярная матрица). Для многомерных узлов ($m=1$) и для одномерных зацеплений ($n=1$) класс S-эквивалентности З. м. является инвариантом типа зацепления L. В случае, когда L — узел, З. м. A полностью определяет $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-модуль $H_q\tilde{X}$, где $\tilde{X}$ — бесконечное циклическое накрывающее дополнения узла. Полиномиальная матрица $tA+(-1)^qA'$ является матрицей Александера (см. *Александера инварианты*) модуля $H_q\tilde{X}$. З. м. определяет также q-мерные гомологии и коэффициенты зацепления в циклич. накрытиях сферы S^{2q+1}, разветвленных над зацеплением.

Лит.: [1] Seifert H., «Math. Ann.», 1934, Bd 110, S. 571—592; [2] Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, пер. с англ., М., 1967; [3] Levine J., «Ann. Math.», 1966, v. 84, p. 537—54; [4] его же, «Comment. math. helv.», 1970, v. 45, p. 185—98. *М. Ш. Фарбер.*

ЗЕЙФЕРТА МНОГООБРАЗИЕ — многообразие, имеющее *Зейферта расслоение*. *А. В. Чернавский.*

ЗЕЙФЕРТА РАССЛОЕНИЕ — класс расслоений трехмерных многообразий на окружности; определен X. Зейфертом [1]. Каждый слой З. р. имеет в многообразии M^3 окрестность со стандартным расслоением на окружности, к-рое возникает из произведения $D^2\times[0, 1]$ диска на отрезок при склейке каждой точки $(x, 0)$ с точкой $(g(x), 1)$, где g — поворот D^2 на угол $2\pi\nu/\mu$ (μ и ν — взаимно простые целые числа, $0\leqslant\nu<\mu$). Образы отрезков $x\times[0, 1]$ в полученном полнотории P составляют слои: каждый слой, кроме центрального, состоит из μ отрезков; центральный слой наз. особым, если $\nu>0$. Инварианты (μ, ν) обычно заменяются инвариантами Зейферта (α, β), где $\alpha=\mu$, а β определяется из условий

$$0<\beta<\alpha, \quad \beta\nu=1 \bmod \alpha.$$

Геометрич. смысл α и β состоит в следующем: если в расслоении, индуцированном на крае P, взять меридиан m (кривая, стягиваемая в P) и параллель l (пересекающую m трансверсально один раз), а также любой слой f и секущую g (все четыре кривые простые и замкнутые), то при надлежащей ориентации

$$m=\alpha g+\beta f, \quad l=-\nu g-\mu f.$$

причем $\beta\nu-\alpha\mu=1$.

Первая задача относительно З. р. состоит в их классификации с точностью до послойного гомеоморфизма. Оказывается [1], что если M^3 имеет З. р., то существует отображение π: $M^3\to B^2$, где B^2 — двумерное многообразие, и слоями служат $\pi^{-1}(x)$, $x\in B^2$. Имеется шесть типов З. р.: типы O_1 и O_2, в к-рых B^2 ориентируемо и M^3 ориентируемо в случае O_1 и неориентируемо в случае O_2, причем род B^2 в этом случае не меньше единицы, и типы n_i, $i=1, 2, 3, 4$, для к-рых B^2 неориентируемо. В случае n_1 обнос слоя вдоль пути в B^2 не меняет ориентацию слоя, в случае n_2 имеется система образующих, обнос вдоль к-рых меняет ориентацию, в случае n_3 не меняет ориентацию только одна из образующих, а в случае n_4 — только две из образующих, причем род B^2 не меньше двух для n_3 и не меньше трех для n_4. Многообразие M^3 ориентируемо только для типа n_2. Каждому З. р. относится система инвариантов

$$\{b;\ (\varepsilon, p);\ \ (\alpha_1, \beta_1);\ \ldots\ ;\ \ (\alpha_r, \beta_r)\},$$

так что с точностью до послойного гомеоморфизма имеется одно и только одно З. р. с таким набором. Здесь $\varepsilon=O_i$ или n_i, p — род B^2, (α_i, β_i) — инварианты Зейферта для особых слоев расслоения, число к-рых равно r, причем $\beta_i<\alpha/2$ в случаях $\varepsilon=O_2$, n_1, n_3, n_4, и, наконец, b — целое число, если $\varepsilon=O_1$ или n_2 и вычет mod2 в остальных случаях, при этом $b=0$, если $\alpha_i=2$ хотя бы для одного слоя. Геометрич. смысл b: на крае окрестности каждого особого слоя выбирается сечение, и вся их совокупность продолжается до сечения во всем дополнении к особым слоям. Это возможно сделать вплоть до одного неособого слоя, к к-рому край продолжаемого сечения подойдет, накручиваясь на него со степенью b. При изменении ориентации M^3 в случаях O_1 и n_2 число b меняется на $-b-r$, а β_i — на $\alpha_i-\beta_i$.

Вторая задача относительно З. р. заключается в установлении того, что на замкнутом многообразии M^3 может существовать не более одного такого расслоения с точностью до послойных гомеоморфизмов. Это доказано для так наз. больших З. р., к-рые являются пространствами типа $K(\pi, 1)$, т. е. гомотопич. тип к-рых определен фундаментальной группой. Фундаментальную группу $\pi_1(M^3)$ многообразия, снабженного З. р., удобно описывать с помощью специальной системы образующих: сечений g_j на краях окрестностей особых слоев, элементов a_i, b_i (или v_i, если B^2 неориентируемо), образы к-рых в $\pi_1(B^2)$ являются канонич. образующими, h — неособый слой. При этом определяющие соотношения в случаях O_1 и O_2 следующие:

$$a_i h a_i^{-1}=h^{\varepsilon_i},\quad b_i h b_i^{-1}=h^{\varepsilon_i},\quad g_j h g_j^{-1}=h,\quad g_j^{\alpha_i} h^{\beta_j}=1,$$

$$g_1 \ldots g_r\,[a_1,\ b_1] \ldots [a_p,\ b_p]=h^b,$$

а в случаях n_i:

$$v_i h v_i^{-1}=h^{\varepsilon_i},\quad g_j h g_j^{-1}=h,\quad g_j^{\alpha_j} h^{\beta_j}=1,$$

$$g_1 \ldots g_r v_1^2 \ldots v_p^2=h^b,$$

где $\varepsilon_i=\pm 1$ в зависимости от того, обращается ли ориентация слоя при обносе вдоль соответствующей образующей $\pi_1(B^2)$. К многообразиям с малыми З. р. относятся: для типа O_1 все расслоения с

$$p=0,\quad r\leqslant 2;$$

$$p=0,\quad r=3,\quad \frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}>1;$$

$$p=1,\quad r=0;$$

$$\{-2;\ (O_1,\ 0);\ (2,\ 1);\ (2,\ 1);\ (2,\ 1);\ (2,\ 1)\};$$

для типа O_2 только расслоения с $p=1$, $r=0$; для типов n_1 и n_2 расслоения с $p=1$, $r\leqslant 1$; $p=2$, $r=0$; для типа n_3 расслоения с $p=2$, $r=0$. Все З. р. типа n_4 большие. Малые З. р. все перечислены, их имеется 10 типов (см. [3]).

Свободные действия конечных групп на трехмерной сфере коммутируют с естественным действием на ней группы SO(2), и поэтому пространства орбит этих действий оказываются З. р. с конечными фундаментальными группами. Это — единственные известные (1977) примеры M^3 с конечной $\pi_1(M^3)$. Нек-рые из З. р. встречаются как границы сферич. окрестностей изолированных особых точек алгебраич. поверхностей, инвариантных относительно действия мультипликативной группы комплексных чисел. Именно, это З. р. типа: $\{b;\ (O_1,\ p);\ (\alpha_1,\ \beta_1),\ \ldots,\ (\alpha_r,\ \beta_r)\}$ при $b+r>0$. Идентификация этих многообразий позволяет построить явное разрешение особенностей с учетом действия $\mathbb{C}^*$ (а также дать полное описание изолированных особенностей поверхностей в $\mathbb{C}^3$, допускающих действие $\mathbb{C}^*$). З. р. имеются также на локально плоских римановых многообразиях, полученных при факторизации евклидова пространства по свободному действию дисретной группы движений (имеется 6 ориентированных и 4 неориентируемых многообразия, все из к-рых, кроме одного, являются различными расслоениями над окружностью со слоем тор или поверхность Клейна).

В топологии трехмерных многообразий З. р. важны, напр., для идентификации многообразий, фундаментальные группы к-рых имеют центр [4]. Имеются также обобщения З. р. на другие классы расслоений с особыми слоями.

Лит.: [1] Seifert H., «Acta Math.», 1933, Bd 60, S. 147—238; [2] Holmann H., «Math. Ann.», 1964, Bd 157, S. 138—66; [3] Orlik P., Seifert manifolds, B.— Hdlb.— N. Y., 1972; [4] Hempel J., 3-manifolds, N.Y., 1976. *А. В. Чернавский.*

ЗЕНОНА ПАРАДОКС — одна из *антиномий.*

ЗИГЕЛЯ МЕТОД — метод исследования арифметич. свойств значений в алгебраич. точках E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$; был предложен К. Зигелем [1].

Целая функция

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}$$

наз. E-функцией, если все коэффициенты c_n принадлежат нек-рому алгебраич. полю конечной степени, причем для каждого $\varepsilon>0$ максимум модулей, сопряженных с c_n, есть $O(n^{\varepsilon n})$ и существует последовательность целых рациональных чисел $q_n=O(n^{\varepsilon n})$ таких, что $q_n c_k$ есть целое алгебраич. число для $k=0, 1, \ldots, n$. Таковы, напр., e^z, $\sin z$, функция Бесселя $J_0(z)$.

Пусть $[\alpha, 0]=1$, а $[\alpha, n]=(\alpha+n-1)[\alpha, n-1]$, $n=1, 2, \ldots$ Если $a_1, \ldots, a_l$ и $b_1, \ldots, b_m$ — рациональные числа, $b_k\neq-1, -2, \ldots$ и $m-l=t>0$, то функция

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a_1, n] \ldots [a_l, n]}{[b_1, n] \ldots [b_m, n]} z^{tn}$$

является E-функцией; она удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению порядка m с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$.

Основной результат К. Зигеля относится к значениям функции

$$K_\lambda(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda} J_\lambda(z),$$

где $J_\lambda(z)$ — функция Бесселя. Если λ — рациональное число, $\lambda\neq\pm\frac{1}{2}, -1, \pm\frac{3}{2}, -2, \ldots$, то при любом алгебраическом $\alpha\neq0$ числа $K_\lambda(\alpha)$ и $K'_\lambda(\alpha)$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

В 1949 К. Зигель придал своему методу общую форму, однако условия, к-рым должны были удовлетворять E-функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ для того, чтобы можно было утверждать, что их значения алгебраически независимы, оказались очень трудно проверяемыми. И это не позволило установить какие-либо новые конкретные результаты.

Дальнейшее развитие и обобщение З. м. получил в работах А. Б. Шидловского (см. [2] — [3]): пусть совокупность E-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ является решением системы дифференциальных уравнений

$$y'_k=q_{k0}+\sum_{i=1}^{m} q_{ki}y_i, \quad k=1, \ldots, m, \quad q_{ki}\in C(z), \quad (1)$$

и алгебраич. число α отлично от нуля и особых точек системы (1); тогда, для того чтобы m чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ были алгебраически независимы над полем $\mathbb{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ были алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Из этой теоремы, в частности, следует трансцендентность всех чисел $f_k(\alpha)$, если $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы, а также трансцендентность отличных от нуля и полюсов системы (1) A-точек функций $f_k(z)$ при алгебраическом A; она позволила получить многочисленные результаты, относящиеся к конкретным E-функциям, доказать алгебраич. независимость значений E-функций, удовлетворяющих линейным однородным и неоднородным дифференциальным уравнениям порядка большего двух. Напр., для функции

$$\psi_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{kn}}{(n!)^k},$$

удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению порядка k с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, справедливо следующее утверждение: при любом алгебраическом $\alpha\neq 0$, $r(r+1)/2$ чисел $\psi_k^{(l)}(\alpha)$, $l=0, 1, \ldots, k-1$, $k=1, 2, \ldots, r$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

При тех же условиях максимальное количество алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ чисел среди $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ равно максимальному количеству алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций среди $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Если $f_1(z), \ldots, f_l(z)$ — алгебраически независимые над $\mathbb{C}(z)$ E-функции, удовлетворяющие системе (1), то для всех, кроме конечного числа, точек α числа $f_1(\alpha), \ldots, f_l(\alpha)$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$. В каждом конкретном случае исключительные точки могут быть определены.

Этими теоремами решаются, по существу, все задачи общего характера о трансцендентности и алгебраич. независимости значений E-функций в алгебраических точках.

З. м. позволяет оценивать меру алгебраич. независимости чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$, придав тем самым результатам количественную форму. Если функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы, то $\Phi(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha); n, H)>CH^{-\gamma n^m}$, где $C>0$ не зависит от H, а $\gamma>0$ зависит только от m и степени алгебраич. числа α.

Лит.: [1] Siegel C. L., «Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.», 1929, № 1, p. 1—41; [2] Шидловский А. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 1, с. 35—66; [3] его же, там же, 1962, т. 26, № 6, с. 877—910; [4] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 169—202; [5] Lang S., «Mathem.», 1962, v. 9, с. 157—61; [6] Фельдман Н. И., Шидловский А. Б., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 3, с. 1—81.
Ю. В. Нестеренко.

ЗИГЕЛЯ ОБЛАСТЬ — неограниченная область в $(n+m)$-мерном комплексном аффинном пространстве имеющая вид

$$D(V, F)=\{(z, w)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m \mid \operatorname{Im} z-F(w, w)\in V\},$$

где V — открытый выпуклый конус в пространстве $\mathbb{R}^n$, а F: $\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^n$ — отображение, являющееся V-*эрмитовой формой*, а именно, F линейно по первому аргументу, $F(w', w)=\overline{F(w, w')}$, $F(w, w)\in\overline{V}$ ($\overline{V}$ — замыкание V), $F(w, w')=0$ только при $w=0$. В случае, когда $m=0$ (и, стало быть, $F=0$) область $D(V, F)$ наз. З. о. первого рода и обозначается просто $D(V)$; в случае, когда $m\neq 0$, область $D(V, F)$ наз. З. о. второго рода.

Простейшим примером З. о. (первого рода) является верхняя полуплоскость одного комплексного переменного. В работе К. Зигеля [1] в связи с исследованием абелевых многообразий была рассмотрена область H_p в пространстве комплексных симметричных матриц порядка p, образованная матрицами, мнимая часть к-рых положительно определена. Эта область, наз. теперь *верхней полуплоскостью Зигеля* (и при $p=1$ совпадающая с обычной верхней полуплоскостью), является З. о. первого рода, ассоциированной с конусом положительно определенных симметричных матриц порядка p. Общее понятие З. о. возникло в связи с изучением автоморфных функций многих комплексных переменных (см. [5]). Впоследствии это понятие стало центральным в теории однородных ограниченных областей.

Всякая З. о. аналитически изоморфна ограниченной области. Напр., при $n=1$ З. о. изоморфна комплексному шару

$$\{z \in \mathbb{C}^{m+1} \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_{m+1}|^2 < 1\}.$$

Всякая однородная ограниченная область изоморфна З. о., однородной относительно аффинных преобразований. Две З. о. аналитически изоморфны тогда и только тогда, когда они переводятся одна в другую аффинным преобразованием (см. [3]).

Лит.: [1] Siegel C. L., «Math. Ann.», 1939, Bd 116, S. 617—57; [2] Зигель К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954; [3] Kaup W., Matsushima Y., Ochiai T., «Amer. J. Math.», 1970, v. 92, p. 475—98; [4] Murakami S., On Automorphisms of Siegel Domains, B.— Hdlb.— N.Y., 1972; [5] Итоги науки. Матем. анализ. 1963, М., 1965, с. 81—124. *Э. Б. Винберг.*

ЗИГЕЛЯ ТЕОРЕМА — 1) З. т. о L-функциях Дирихле: для любого $\varepsilon>0$ существует $c=c(\varepsilon)>0$ такое, что для всякого неглавного действительного *Дирихле характера* χ модуля k выполняется

$$L(1, \chi) > \frac{c(\varepsilon)}{k^{\varepsilon}}.$$

Установлена К. Зигелем [1]. Эквивалентное утверждение относится к действительным нулям L-функций: для любого $\varepsilon>0$ существует $c_1=c_1(\varepsilon)$ такое, что $L(z, \chi) \neq 0$ при $z>1-c_1/k^{\varepsilon}$ для всякого неглавного действительного характера Дирихле χ. Константы $c(\varepsilon)$ и $c_1(\varepsilon)$ не эффективны в том смысле, что ни при одном $\varepsilon<{}^1/_2$ нет способа оценивать их снизу. В силу этого применения З. т. носят неконструктивный характер. Напр., если $h(-D)$ есть число классов дивизоров квадратичного поля дискриминанта $-D$, то из З. т. следует, что

$$h(-D) > c_2(\varepsilon) D^{1/2-\varepsilon}$$

с неэффективной константой $c_2(\varepsilon)$ при $\varepsilon<{}^1/_2$. Аналогично, оценка, равномерная при $1 \leqslant k \leqslant \ln^A x$, $(k, l)=1$,

$$\pi(x, k, l) - \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = O\left(xe^{-c_3 \sqrt{\ln x}}\right),$$

где $\pi(x, k, l)$ — число простых чисел вида $kn+l$, меньших x, содержит неэффективную константу c_3.

Лит.: [1] Siegel C. L., «Acta arithmetica», 1935, v. 1, p. 83—86; [2] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [3] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975, гл. IX. *С. М. Воронин.*

2) З. т. о целых точках — теорема о конечности числа решений в целых числах одного класса диофантовых уравнений. В своей простейшей форме эта теорема утверждает, что если $F(x, y)$ — многочлен с целыми коэффициентами, определяющий неприводимую кривую $F=0$ рода $g>0$, то уравнение $F(x, y)=0$ имеет конечное число решений в целых числах. Этот результат (в более общем виде для целых алгебраич. чисел) был получен в 1929 К. Зигелем [1] с помощью теории диофантовых приближений и теории абелевых многообразий. Он явился завершением начатого в 1908 А. Туэ (A. Thue, см. [2], [3]) направления в теории диофантовых уравнений. В дальнейшем эта теорема была обобщена на случай произвольных аффинных кривых рода $g>0$, определенных над подкольцами конечного типа глобальных полей (см. [5]). В частности, приведенное выше уравнение $F(x, y)=0$ имеет конечное число решений в числах вида

$$\frac{m}{p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s}},$$

где $m, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}$, а $p_1, \ldots, p_s$ — фиксированные простые числа. До недавнего времени доказательства этих теорем имели существенный недостаток — утверждая лишь конечность числа решений, они не давали никакой границы для их величины (см. *Высота* в диофантовой геометрии), так что не имелось никакого алгоритма для построения решений в явном виде. Первый результат в этом направлении был получен А. Бейкером (A. Baker, 1967). Эффективные доказательства З. т. получены для различных классов диофантовых уравнений, однако в общем случае вопрос остается (1978) открытым (см. [4]). Другой важной задачей является обобщение З. т. на многообразия размерности больше 1.

Лит.: [1] Siegel C. L., «Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.», 1929, № 1, S. 41—69; [2] Гельфонд А. О., Решение уравнений в целых числах, 2 изд., М., 1956; [3] Дэвенпорт Г., Высшая арифметика, пер. с англ., М., 1965; [4] Проблемы теории диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1974; [5] Lang S., Diophantine Geometry, N. Y.— L., 1962. *А. Н. Паршин.*

ЗИГМУНДА КЛАСС функций — класс Z_M непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, для к-рых существует такая постоянная $M>0$, что при всех x и $h>0$ имеет место неравенство

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant Mh.$$

Класс Z_M введен А. Зигмундом [1]. В терминах класса Z_M получает окончательное решение задача Джексона — Бернштейна о прямых и обратных теоремах теории приближения функций. Напр., имеет место следующее утверждение: для того чтобы непрерывная 2π-периодическая функция $f(x)$ входила в З. к. при некотором $M>0$, необходимо и достаточно, чтобы ее наилучшее приближение $E_n(f)$ тригонометрич. полиномами порядка не выше n удовлетворяло неравенству

$$E_n(f)\leqslant A/n,$$

где $A>0$ — постоянная. Для модуля непрерывности $\omega(\delta, f)$ любой функции $f(x)\in Z_M$ имеет место оценка

$$\omega(\delta, f)\leqslant\frac{M}{2\ln(\sqrt{2}+1)}\,\delta\ln\frac{\pi}{\delta}+O(\delta),$$

причем постоянная $M/2\ln(\sqrt{2}+1)$ на всем З. к. Z_M не может быть улучшена [3].

Лит.: [1] Zygmund A., «Duke Math. J.», 1945, v. 12, № 1, p. 47—76; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969; [3] Ефимов А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, № 2, с. 283—8. *А. В. Ефимов.*

ЗМЕЕВИДНЫЙ КОНТИНУУМ — континуум, допускающий для любого $\varepsilon>0$ открытое покрытие, *нерв* к-рого — конечный линейный комплекс. Иначе говоря, для любого $\varepsilon>0$ З. к. должен покрываться конечной системой G_n, $n=1, 2, \ldots, p$, открытых множеств такой, что все G_n имеют диаметр меньше ε, и $G_i\cap G_j\neq\phi$ тогда и только тогда, когда $|i-j|=1$ (такие системы наз. ε-цепями). Всякий З. к. неприводим (см. *Неприводимый континуум*) между любой парой своих точек. Всякий подконтинуум З. к. змеевиден. Два наследственно неразложимых З. к. (см. *Неразложимый континуум*), содержащих более одной точки, гомеоморфны и называются псевдодугами. Каждый З. к. топологически содержится в плоскости. Всякий однородный З. к. есть псевдодуга. Каждый З. к. есть непрерывный образ псевдодуги и предел обратного спектра из дуг.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология [пер. с англ.], т. 2, М., 1969. *А. А. Мальцев.*

ЗНАКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ — условные обозначения, предназначенные для записи математич. понятий и выкладок. Напр., понятие «квадратный корень из числа, равного отношению длины окружности к ее диаметру» обозначается кратко $\sqrt{\pi}$, а предложение «отношение длины окружности к ее диаметру больше, чем три и десять семьдесят первых, и меньше, чем три и одна седьмая» записывается в виде:

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}.$$

Развитие математической символики было тесно связано с общим развитием понятий и методов математики.

Первыми З. м. были знаки для изображения чисел — *цифры*, возникновение которых, по-видимому, предшествовало введению письменности. Наиболее древние системы нумерации (системы *счисления*) — вавилонская и египетская — возникли еще за $3^1/_2$ тысячелетия до н. э.

Первые З. м. для произвольных величин появились много позднее (начиная с 5—4 вв. до н. э.) в Греции. Произвольные величины (площади, объемы, углы) изображались в виде отрезков, а произведение двух произвольных величин — в виде прямоугольника, построенного на соответствующих отрезках. В «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) величины обозначаются двумя буквами — начальной и конечной буквами соответствующего отрезка, а иногда и одной. У Архимеда (3 в. до н. э.) последний способ обозначения становится обычным. Подобное обозначение содержало в себе возможности развития буквенного исчисления. Однако в классической античной математике над буквами никаких операций не производилось, а буквенного исчисления создано не было.

Начатки буквенного обозначения и исчисления возникают в позднеэллинистич. эпоху в результате освобождения алгебры от геометрич. формы. Диофант (вероятно, 3 в.) обозначал неизвестную (x) и ее степени следующими знаками:

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
s′	$\delta^{\bar{\upsilon}}$	$\varkappa^{\bar{\upsilon}}$	$\delta\delta^{\bar{\upsilon}}$	$\delta\varkappa^{\bar{\upsilon}}$	$\varkappa\varkappa^{\bar{\upsilon}}$

($\delta^{\bar{\upsilon}}$ — от греч. термина δύναμις, обозначавшего квадрат неизвестной, $\varkappa^{\bar{\upsilon}}$ — от греч. κύβος — куб). Справа от неизвестной или ее степеней Диофант писал коэффициенты, напр. $3x^5$ обозначалось $\delta\varkappa^{\bar{\upsilon}}\bar{\gamma}$ (где $\bar{\gamma}=3$). При сложении Диофант приписывал слагаемые друг к другу, при вычитании употреблял специальный знак $\pitchfork$; равенство Диофант обозначал буквой ι (от греч. ἴσος — равный). Напр., уравнение

$$(x^3+8x)-(5x^2+1)=x$$

у Диофанта записалось бы так:

$$\varkappa^{\bar{\upsilon}}\bar{\alpha}\,s'\,\bar{\eta}\pitchfork\delta^{\bar{\upsilon}}\bar{\varepsilon}\,\mu^{o}\bar{\alpha}\,\iota\,s'\bar{\alpha}$$

(здесь $\bar{\alpha}=1$, $\bar{\eta}=8$, $\bar{\varepsilon}=5$, а $\mu^{o}\bar{\alpha}$ означает, что единица $\bar{\alpha}$ не имеет множителя в виде степени неизвестного).

Несколько веков спустя индийцы, разрабатывавшие числовую алгебру, ввели различные З. м. для нескольких неизвестных (сокращения наименований цветов, обозначавших неизвестные), квадрата, квадратного корня, вычитаемого числа. Так, уравнение

$$3x^2+10x-8=x^2+1$$

в записи Брахмагупты (7 в.) имело бы вид:

йа ва 3 йа 10 ру $\dot{8}$
йа ва 1 йа 0 ру 1

(йа — от йават — тават — неизвестное, ва — от варга — квадратное число, ру — от рупа — монета рупия — свободный член, точка над числом означает вычитаемое число).

Создание современной алгебраич. символики относится к 14—17 вв.; оно определялось успехами практич. арифметики и учения об уравнениях. В различных странах стихийно появляются З. м. для нек-рых действий и для степеней неизвестной величины. Проходят многие десятилетия и даже века, прежде чем вырабатывается тот или иной удобный для исчисления символ. Так, в конце 15 в. Н. Шюке (N. Chuquet) и Л. Пачоли (L. Pacioli) употребляли знаки сложения и вычитания $\tilde{p}$ и $\tilde{m}$ (от лат. plus и minus), немецкие математики ввели современные + (вероятно, сокращение лат. et) и — . Еще в 17 в. можно насчитать около десятка З. м. для действия умножения:

$$\sqsubset\!\sqsupset\,,\ *\ ;\ „\ ,\ ,\ ,\ ;\ \int\ ;\ \cdot\ ;\ \times.$$

Поучительна история знака радикала. Вслед за Леонардо Пизанским (Leonardo Pisano, 1220) многие обозначали (вплоть до 17 в.) квадратный корень знаком ℞ (от лат. radix — корень). Н. Шюке обозначал квадратный, кубический и т. д. корни знаками ℞^{2}, ℞^{3} и т. д. В немецкой рукописи ок. 1480 квадратный корень обозначался точкой перед числом, кубич. корень — тремя точками, а корень четвертой степени — двумя точками. У К. Рудольфа (Ch. Rudolff, 1525) корень уже обозначался $\surd$. Для обозначения корней высших степеней различные ученые то пишут этот знак несколько раз подряд, то ставят после него букву — сокращение наименования показателя, то — соответствующую цифру в кружке или с круглой или квадратной скобкой, чтобы отделить ее от подрадикального числа [горизонтальную черту над подрадикальным выражением ввел Р. Декарт (R. Descartes), 1637], и лишь в начале 18 в. входит в обиход запись показателя корня вверху над отверстием знака радикала, встречающаяся ранее у А. Жирара (A. Girard, 1629). Таким образом, эволюция знака радикала длилась почти пятьсот лет.

Весьма различны были З. м. неизвестной и ее степеней. В 16 и начале 17 вв. конкурировало более десяти обозначений для одного только квадрата неизвестной, напр. ce (от census — лат. термин, служивший переводом греч. δύναμις), Q (от quadratum), ʒ, $\frac{\text{ii}}{1}$, $A\,(2)$, $1^{\underset{\smile}{2}}$, A^{ii}, aa, a^2 и т. д. Так, уравнение

$$x^3+5x=12$$

имело бы у Дж. Кардано (G. Cardano, 1545) вид:

1. cubus p̃. 5. positionibus æquantur 12

(cubus — куб, positio — неизвестная, œquantur — равно);

у М. Штифеля (M. Stifel, 1544):

1ce + 5 ꝛe. æqu. 12

у Р. Бомбелли (R. Bombelli, 1572):

$$1\overset{3}{\smile}\ \mathrm{p.}\ 5\overset{1}{\smile}\ \text{eguale à }12$$

($\overset{3}{\smile}$ — куб неизвестной, $\overset{1}{\smile}$ — неизвестная; eguale à — равно);

у Ф. Виета (F. Viète, 1591):

1C + 5N, æquatur 12

(C — cubus — куб, N — numerus — число);

у Т. Гарриота (T. Harriot, 1631):

$$aaa + 5 . a ═══ 12$$

В 16 и начале 17 вв. входят в употребление знаки равенства и скобки: квадратные (Р. Бомбелли, 1550), круглые (Н. Тарталья, N. Tartaglia, 1556), фигурные (Ф. Виет, 1593).

Значительным шагом вперед в развитии математич. символики явилось введение Ф. Виетом (1591) З. м. для произвольных постоянных величин в виде прописных согласных букв латинского алфавита B, D, что дало ему возможность впервые записывать алгебраич. уравнения с произвольными коэффициентами и оперировать с ними. Неизвестные Ф. Виет обозначал гласными прописными буквами A, E, ... Напр., запись Ф. Виета

A cubus + B plano in A 3, æquatur Dsolido

[cubus — куб, planus — плоский, т. е. B — двумерная величина; solidus — телесный (трехмерный), размерность отмечалась для того, чтобы все члены были однородны] в наших символах выглядит так:

$$x^3+3bx=d.$$

Ф. Виет явился творцом алгебраич. формул. Р. Декарт (1637) придал знакам алгебры современный вид, обозначая неизвестные последними буквами латинского алфавита x, y, z, а произвольные данные величины — начальными буквами a, b, c. Ему же принадлежит нынешнее обозначение степени. Обозначения Р. Декарта обладали большим преимуществом по сравнению со всеми предыдущими. Поэтому они скоро получили всеобщее признание.

Дальнейшее развитие З. м. было тесно связано с созданием анализа бесконечно малых, для разработки символики к-рого основа была уже в большой мере подготовлена в алгебре. И. Ньютон (I. Newton) в своем методе флюксий и флюент (1666 и следующие годы) ввел знаки для последовательных флюксий (производных) величины x в виде $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ и для бесконечно малого приращения o. Несколько ранее Дж. Валлис (J. Wallis, 1655) предложил знак бесконечности ∞. Создателем современной символики дифференциального и интегрального исчислений является Г. Лейбниц (G. Leibniz). Ему, в частности, принадлежат употребляемые ныне З. м. дифференциалов dx, d^2x, d^3x и интеграла

$$\int y\,dx.$$

Следует подчеркнуть принципиальное преимущество знака интеграла, данного Г. Лейбницем, перед предложенным И. Ньютоном знаком $'x$. В знаке Г. Лейбница $\int ydx$, отражающем самый процесс построения интегральной суммы, явно указана и интегрируемая функция и переменная интегрирования. Благодаря этому знак $\int ydx$ годится и для записи формул замены переменных и легко может быть использован для записи кратных и криволинейных интегралов. Знак И. Ньютона $'x$ таких возможностей непосредственно не представляет. Аналогично обстоит дело с лейбницевыми знаками дифференциалов и ньютоновыми знаками флюксий и бесконечно малого приращения.

Огромная заслуга в создании символики современной математики принадлежит Л. Эйлеру (L. Euler). Он ввел в общее употребление первый знак переменной операции, именно знак функции $f(x)$ (от лат. functio — функция, 1734). Несколько ранее знак φx был применен И. Бернулли (J. Bernoulli, 1718). После работ Л. Эйлера знаки для многих индивидуальных функций, напр. тригонометрических, приобрели стандартный характер. Л. Эйлеру же принадлежат обозначения постоянных e (основание натуральных логарифмов, 1736), π (вероятно, от греч. περιφέρεια — окружность, периферия, 1736), мнимой единицы $i=\sqrt{-1}$ (от франц. imaginaire — мнимый, 1777, опубликовано в 1794), к-рые стали общеупотребительными.

В 19 в. роль символики еще более возрастает и, наряду с созданием новых З. м., математики стремятся к стандартизации основных символов. Некоторые широко употребительные ныне З. м. появляются лишь в это время: знак абсолютной величины $|x|$ (К. Вейерштрасс, K. Weierstrass, 1841), вектора $\overline{r}$ (О. Коши,

A. Cauchy, 1853), определителя $\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}$ (А. Кэли, A. Cayley, 1841) и др. Многие теории, возникшие в 19 в., напр. тензорное исчисление, не могли быть развиты без подходящей символики. Характерно при этом увеличение удельного веса З. м. для отношений, напр., сравнимости $\equiv$ (К. Гаусс, C. Gauss, 1801), принадлежности $\in$, изоморфизма $\cong$, эквивалентности $\backsim$ и т. д. Знаки переменных отношений появляются с развитием математич. логики, особенно широко применяющей З. м.

С точки зрения математической логики, среди З. м. можно наметить следующие основные группы: А) знаки объектов, Б) знаки операций, В) знаки отношений. Например, знаки 1, 2, 3, 4 изображают числа, т. е. объекты, изучаемые арифметикой. Знак операции сложения $+$ сам по себе не изображает никакого объекта; он получает предметное содержание лишь тогда, когда указано, какие числа складываются: запись $1+3$ изображает число 4. Знак $>$ (больше) есть знак отношения между числами. Знак отношения получает вполне определенное содержание, когда указано, между какими объектами отношение рассматривается. К указанным трем основным группам З. м. примыкает еще четвертая: Г) вспомогательные знаки, устанавливающие порядок сочетания основных знаков. Достаточное представление о таких знаках дают скобки, указывающие порядок производства арифметич. действий.

Знаки каждой из трех групп А), Б) и В) бывают двух родов: 1) индивидуальные знаки вполне определенных объектов, операций и отношений, 2) общие знаки «переменных», или «неизвестных», объектов, операций и отношений. Примерами знаков первого рода могут служить (см. также таблицу на кол. 462, 463):

$А_1$) Обозначения натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; трансцендентных чисел e и π; мнимой единицы $i=\sqrt{-1}$ и т. п.

$Б_1$) Знаки арифметич. действий $+$, $-$, $\cdot$, $\times$, $:$; извлечения корня $\sqrt[n]{\ }$, дифференцирования $\frac{d}{dx}$, оператора Лапласа

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Сюда же относятся знаки индивидуальных функций sin, tg, log и т. п.

$В_1$) Знаки равенства и неравенства $=$, $>$, $<$, $\neq$, знаки параллельности $\parallel$ и перпендикулярности $\perp$ и т. п.

Знаки второго рода изображают произвольные объекты, операции и отношения определенного класса или объекты, операции и отношения, подчиненные к.-л. заранее оговоренным условиям. Напр., при записи тождества

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

буквы a и b обозначают произвольные числа; при изучении функциональной зависимости

$$y=x^2$$

буквы x и y изображают произвольные числа, связанные заданным отношением; при решении уравнения

$$x^2-1=0$$

x обозначает любое число, удовлетворяющее данному уравнению (в результате решения этого уравнения мы узнаем, что этому условию соответствуют лишь два возможных значения $+1$ и -1).

С логич. точки зрения вполне законно все такого рода общие знаки наз. знаками переменных, как это принято в математич. логике («область изме-

Даты возникновения некоторых математических знаков

Знак	Значение	Кто ввел	Когда введен
Знаки индивидуальных операций			
∞	бесконечность	Дж. Валлис (J. Wallis)	1655
e	основание натуральных логарифмов	Л. Эйлер (L. Euler)	1736
π	отношение длины окружности к диаметру	У. Джонс (W. Jones) Л. Эйлер (L. Euler)	1706 1736
i	корень квадратный из -1	Л. Эйлер (L. Euler)	1777 (в печати 1794)
i, j, k	единичные векторы, орты	У. Гамильтон (W. Hamilton)	1853
$\Pi(\alpha)$	угол параллельности	Н. И. Лобачевский	1835
Знаки переменных объектов			
x, y, z	неизвестные или переменные величины	Р. Декарт (R. Descartes)	1637
$\bar{r}$	вектор	О. Коши (A. Cauchy)	1853
Знаки индивидуальных операций			
$+$ $-$	сложение вычитание	немецкие математики	конец 15 в.
$\times$	умножение	У. Оутред (W. Oughtred)	1631
$\cdot$	умножение	Г. Лейбниц (G. Leibniz)	1698
$:$	деление	Г. Лейбниц (G. Leibniz)	1684
$a^2, a^3, \ldots, a^n$	степени	Р. Декарт (R. Descartes) И. Ньютон (I. Newton)	1637 1676
$\sqrt{}, \sqrt[3]{}, \ldots$	корни	К. Рудольф (K. Rudolf) А. Жирар (A. Girard)	1525 1629
Log log	логарифм	И. Кеплер (J. Kepler) Б. Кавальери (B. Cavalieri)	1624 1632
sin cos	синус косинус	Л. Эйлер (L. Euler)	1748
tg	тангенс	Л. Эйлер (L. Euler)	1753
arc. sin	арксинус	Ж Лагранж (J. Lagrange)	1772
Sh Ch	гиперболический синус гиперболический косинус	В. Риккати (V. Riccati)	1757
$dx, ddx, \ldots,$ $d^2x, d^3x, \ldots$	дифференциал	Г. Лейбниц (G. Leibniz)	1675 (в печати 1684)
$\int y dx$	интеграл	Г. Лейбниц (G. Leibniz)	1675 (в печати 1686)
$\frac{d}{dx}$	производная	Г. Лейбниц (G. Leibniz)	1675
$f'(x), y', f'x$	производная	Ж. Лагранж (J. Lagrange)	1770, 1779
Δx	разность, приращение	Л. Эйлер (L. Euler)	1755
$\frac{\partial}{\partial x}$	частная производная	А. Лежандр (A. Legendre)	1786
$\int_a^b f(x)dx$	определенный интеграл	Ж. Фурье (J. Fourier)	1819—22
Σ	сумма	Л. Эйлер (L. Euler)	1755
Π	произведение	К. Гаусс (C. Gauss)	1812
$!$	факториал	К. Крамп (Ch. Kramp)	1808
$\lvert x \rvert$	модуль	К. Вейерштрасс (K. Weierstrass),	1841
lim $\lim\limits_{n=\infty}$ $\lim\limits_{n\to\infty}$	предел	С. Люилье (S. L'Huillier) У. Гамильтон (W. Hamilton), многие математики	1786 1853 начало 20 в.

Знак	Значение	Кто ввел	Когда введен
ζ	дзета-функция	Б. Риман (B. Riemann)	1857
Γ	гамма-функция	А. Лежандр (A. Legendre)	1808
B	бета-функция	Ж. Бине (J. Binet)	1839
Δ	дельта (оператор Лапласа)	Р. Мёрфи (R. Murphy)	1833
∇	набла (оператор Гамильтона)	У. Гамильтон (W. Hamilton)	1853
	Знаки переменных операций		
φx	функция	И. Бернулли (J. Bernoulli)	1718
$f(x)$	функция	Л. Эйлер (L. Euler)	1734
	Знаки индивидуальных отношений		
$=$	равенство	Р. Рекорд (R. Recorde)	1557
$>$ $<$	больше, меньше	Т. Гарриот (T. Harriot)	1631
$\equiv$	сравнимость	К. Гаусс (C. Gauss)	1801
$\parallel$	параллельность	У. Оутред (W. Oughtred)	1677 (в посмертном издании)
$\perp$	перпендикулярность	П. Эригон (P. Hérigone)	1634

нения» переменного может оказаться состоящей из одного единственного объекта или даже «пустой», напр., в случае уравнений, не имеющих решения). Дальнейшими примерами такого рода знаков могут служить:

А$_2$) Обозначения точек, прямых, плоскостей и более сложных геометрич. фигур буквами в геометрии.

Б$_2$) Обозначения f, F, φ для функций и обозначения операторного исчисления, когда одной буквой L обозначают, напр., произвольный оператор вида:

$$L[y]=a_0+a_1\frac{dy}{dx}+a_2\frac{d^2y}{dx^2}+\ldots+a_n\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Обозначения для «переменных отношений» менее распространены; они находят применение лишь в математич. логике и в сравнительно абстрактных, по преимуществу аксиоматических, математич. исследованиях.

Лит.: [1] Cajori F., A history of mathematical notations, v. 1—2, Chi., 1928—29.

ЗНАКОВ КРИТЕРИЙ — непараметрический критерий для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой случайная величина μ подчиняется биномиальному распределению с параметрами (n; $p=0{,}5$). Если гипотеза H_0 справедлива, то

$$\mathsf{P}\left\{\mu\leqslant k \mid n, \tfrac{1}{2}\right\}=\sum_{i=0}^{k} C_n^i\left(\tfrac{1}{2}\right)^n=$$

$$=I_{0,5}(n-k,\ k+1),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

где

$$I_z(a,\ b)=\frac{1}{\mathrm{B}(a,\ b)}\int_0^z t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt,\ 0\leqslant z\leqslant 1,$$

$\mathrm{B}(a,\ b)$ — бета-функция. Согласно З. к. с уровнем значимости α, $0<\alpha\leqslant 0{,}5$, гипотезу H_0 следует отвергнуть, если

$$\min\{\mu,\ n-\mu\}\leqslant m,$$

где $m=m(\alpha,\ n)$ — критическое значение З. к., являющееся целочисленным решением неравенств

$$\sum_{i=0}^{m} C_n^i\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\leqslant\frac{\alpha}{2},\quad \sum_{i=0}^{m+1} C_n^i\left(\tfrac{1}{2}\right)^n>\frac{\alpha}{2}.$$

З. к. можно применять для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой неизвестное непрерывное распределение независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ является симметричным относительно нуля, т. е. для любого действительного числа x выполняется равенство

$$\mathsf{P}\{X_i < -x\} = \mathsf{P}\{X_i > x\}.$$

В этом случае З. к. основан на статистике

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \delta(X_i), \quad \delta(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x < 0, \end{cases}$$

к-рая при справедливости гипотезы H_0 подчиняется биномиальному закону с параметрами (n; $p=0{,}5$).

Аналогично, З. к. используется для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой медиана неизвестного непрерывного распределения, к-рому подчиняются независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$, имеет значение ξ_0, для чего нужно перейти к случайным величинам $Y_1 = X_1 - \xi_0, \ldots, Y_n = X_n - \xi_0$.

Лит.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, [2 изд.], М., 1968; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [3] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969.

М. С. Никулин.

ЗНАКОПЕРЕМЕННАЯ ГРУППА n-й степени — подгруппа A_n *симметрической группы* S_n, состоящая из всех четных подстановок. A_n является инвариантной подгруппой индекса 2 и порядка $n!/2$ группы S_n. Подстановки из A_n, рассматриваемые как подстановки индексов переменных $x_1, \ldots, x_n$, не изменяют значения так наз. знакопеременного многочлена $\Pi\ (x_i - x_j)$, откуда и происходит назв. «З. г.». Группа A_m может быть определена и для бесконечной мощности m, как подгруппа симметрич. группы S_m бесконечной мощности m, состоящая из всех четных подстановок. При $n>3$ группа S_n будет $(n-2)$-кратно транзитивной. При любом n, конечном или бесконечном, исключая $n=4$, эта группа проста, что играет важную роль в теории разрешимости алгебраич. уравнений в радикалах.

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

Н. Н. Вильямс.

ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЙСЯ РЯД, знакопеременный ряд,— бесконечный ряд, члены к-рого попеременно положительны и отрицательны:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots, \qquad u_k > 0.$$

Если члены З. р. монотонно убывают ($u_{n+1} < u_n$) и стремятся к нулю ($\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$), то ряд сходится (теорема Лейбница). Остаток сходящегося З. р.

$$r_n = (-1)^n u_{n+1} + \ldots$$

имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине. Простейшие примеры сходящихся З. р.:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots,$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \ldots$$

Сумма первого из этих рядов есть $\ln 2$, а второго $\pi/4$.

В. И. Битюцков.

ЗНАМЕНАТЕЛЬ арифметической дроби $\frac{a}{b}$ — целое число b, показывающее (знаменующее) размеры долей единицы, из к-рых составлена дробь. З. алгебраической дроби $\frac{A}{B}$ наз. выражение B (см. *Дробь*).

С. А. Степанов.

ЗНАЧАЩАЯ ЦИФРА — термин, относящийся к приближенному заданию действительного числа. Пусть в системе счисления с основанием q для действительного числа x получено приближенное представление q-ичной дробью

$$x \approx x^* = (\alpha_n \ldots \alpha_1 \alpha_0,\ \alpha_{-1} \alpha_{-2} \ldots \alpha_{-m}).$$

Пусть при этом α_s — первая ненулевая цифра, считая слева. Тогда и все последующие цифры наз. значащими цифрами приближенного числа x^*.

З. ц. α_t наз. верной, если абсолютная погрешность $\Delta(x^*)$ числа x^*, то есть величина $|x-x^*|$, удовлетворяет неравенству

$$\Delta(x^*) \leqslant \frac{1}{2} q^t.$$

Обычно при приближенном задании числа x имеет смысл указывать только верные З. ц. *Х. Д. Икрамов.*

ЗНАЧИМОСТИ КРИТЕРИЙ — один из основных методов статистич. проверки гипотез, применяемый для проверки соответствия результатов наблюдений $x_1, \ldots, x_n$, трактуемых как реализации случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, нек-рой гипотезе H_0 о вероятностном распределении этих случайных величин. З. к. отвергает либо принимает гипотезу H_0 в зависимости от наблюденного значения нек-рой статистики $T = T(X_1, \ldots, X_n)$, конкретизация к-рой зависит от постановки задачи. При применении З. к., вообще говоря, не предполагается наличие какой-либо конкурирующей гипотезы H_1, к-рую принимают в случае отклонения H_0, но если H_1 задана, то, согласно общей теории статистич. проверки гипотез, именно конкурирующая гипотеза H_1 определяет выбор статистики T в соответствии с принципом максимизации мощности критерия.

Обычно З. к. применяют следующим образом. Выбрав статистику критерия $T(X_1, \ldots, X_n)$, по ее распределению при гипотезе H_0 и по заранее выбранному уровню значимости α, $0<\alpha<0{,}5$, определяют критическое значение критерия t_α такое, что $\mathsf{P}\{T \geqslant t_\alpha | H_0\} = \alpha$. Согласно З. к. с уровнем α гипотезу H_0 отвергают, если $T(x_1, \ldots, x_n) \geqslant t_\alpha$. Если $T(x_1, \ldots, x_n) < t_\alpha$, то считают, что гипотеза H_0 не противоречит результатам наблюдений $x_1, \ldots, x_n$, по крайней мере, до тех пор, пока новые результаты наблюдений не заставят экспериментатора принять другую точку зрения.

Пример. Если за первый час работы счетчик зарегистрировал 150 импульсов пуассоновского процесса, а за второй — 117 импульсов, то спрашивается, можно ли считать, что интенсивность поступления импульсов в единицу времени была постоянной (гипотеза H_0)? Если гипотеза H_0 верна, то наблюденные значения 150 и 117 можно трактовать как реализации двух независимых случайных величин X_1 и X_2, подчиняющихся одному и тому же закону Пуассона с параметром λ, значение к-рого нам неизвестно. Поскольку при гипотезе H_0 случайные величины

$$Y_1 = \sqrt{4X_1+1} - 2\sqrt{\lambda} \text{ и } Y_2 = \sqrt{4X_2+1} - 2\sqrt{\lambda},$$

приближенно подчиняются нормальному распределению с параметрами (0,1), то статистика

$$X^2 = \frac{1}{2}[Y_1 - Y_2]^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{4X_1+1} - \sqrt{4X_2+1}\right]^2,$$

распределена приближенно по закону χ^2 с одной степенью свободы, т. е.

$$\mathsf{P}\{X^2 > x | H_0\} \approx \mathsf{P}\{\chi_1^2 > x\}.$$

По таблицам χ^2-распределения находят критическое значение $\chi_1^2(0{,}05) = 3{,}841$, соответствующее заданному уровню значимости $\alpha=0{,}05$, т. е.

$$\mathsf{P}\{\chi_1^2 \geqslant 3{,}841\}=0{,}05.$$

Далее, по наблюденным значениям $X_1=150$ и $X_2=117$ вычисляют значение X^2 статистики критерия:

$$X^2=\frac{1}{2}\left[\sqrt{4\cdot 150+1}-\sqrt{4\cdot 117+1}\right]^2=4{,}087.$$

Поскольку $X^2=4{,}085>\chi_1^2(0{,}05)=3{,}841$, то гипотеза H_0 о сохранении интенсивности отвергается по З. к. типа χ^2 с уровнем значимости $\alpha=0{,}05$.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [3] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; [4] Девятов Б. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1969, т. 14, № 1, с. 175—78.

М. С. Никулин.

ЗНАЧИМОСТИ УРОВЕНЬ статистического критерия — вероятность ошибочно отвергнуть основную проверяемую гипотезу, когда она верна. В теории статистич. проверки гипотез З. у. наз. вероятностью ошибки первого рода. Понятие «З. у.» возникло в связи с задачей проверки согласованности теории с опытными данными. Если, напр., в результате наблюдений регистрируются значения n случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ и если требуется по этим данным проверить гипотезу H, согласно к-рой совместное распределение величин $X_1, \ldots, X_n$ обладает нек-рым определенным свойством, то соответствующий статистич. критерий конструируется с помощью подходящим образом подобранной функции $Y=f(X_1, \ldots, X_n)$; эта функция обычно принимает малые значения, когда гипотеза H верна, и большие значения, когда H ложна. В частности, если $X_1, \ldots, X_n$ — результаты независимых измерений некоторой известной постоянной a и гипотеза H представляет собой предположение об отсутствии в результатах измерений систематич. ошибок, то для проверки H разумно в качестве Y выбрать $(2m-n)^2$, где m — количество тех результатов измерений X_i, к-рые превышают истинное значение a. Наблюдаемое в опыте большое значение Y можно рассматривать как значимое статистич. опровержение гипотетич. согласия между результатами наблюдений и проверяемой гипотезой. Соответствующий критерий значимости представляет собой правило, согласно к-рому значимыми считаются значения Y, превосходящие заданное критич. значение y. В свою очередь выбор величины y определяется заданным З. у., к-рый в случае справедливости гипотезы H совпадает с вероятностью события $\{Y>y\}$.

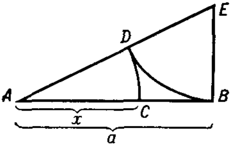
При выборе З. у. следует учитывать ущерб, неизбежно возникающий при использовании любого критерия значимости. Так, напр., если З. у. чрезмерно велик, то основной ущерб будет происходить от ошибочного отклонения правильной гипотезы; если же З. у. мал, то ущерб будет, как правило, возникать от ошибочного принятия гипотезы, когда она ложна. Практически при обычных статистич. расчетах в качестве З. у. выбирают вероятность в пределах от 0,01 до 0,1. Значения З. у., меньшие, чем 0,01, используются, напр., при статистич. выявлении токсичных медицинских препаратов, а также в других особых случаях, когда первостепенное значение приобретает гарантия от ошибочного отклонения проверяемой гипотезы. См. также *Доверительное оценивание.*

Лит.: Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *Л. Н. Большев.*

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ, гармоническое деление, деление в крайнем и среднем отношении,— деление отрезка a, при к-ром большая часть x является средней пропорциональной между

всем отрезком a и меньшей его частью $a-x$, то есть
$$a:x=x:(a-x). \qquad (*)$$
Для нахождения x получается квадратное уравнение
$$x^2+ax-a^2=0,$$
решение к-рого дает
$$x=\frac{a}{2}\left(\sqrt{}\;-1\right)\approx 0{,}62a.$$
Условие (*) можно переписать и так
$$\frac{x}{a}\left(1+\frac{x}{a}\right)=1 \quad \text{или} \quad x=\frac{a}{1+\frac{x}{a}},$$
$$x=a\,\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}},$$
т. е. x получают в виде непрерывной дроби, подходящие дроби к-рой будут:
$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21} \text{ и т. д.},$$
где 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 и т. д.— так наз. *Фибоначчи числа*.

Геометрически З. с. отрезка AB (см. рис.) строится так: в точке B восстанавливают перпендикуляр к AB, откладывают на нем отрезок $BE=\frac{1}{2}AB$, соединяют A и E, откладывают $ED=EB$ и, наконец, $AC=AD$, тогда
$$AB:AC=AC:CB.$$
З. с. было известно еще в древности. В дошедшей до нас античной литературе З. с. впервые встречается в «Началах» Евклида (3 в. до н. э.).



Термин «З. с.» ввел Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci) (кон. 15 — нач. 16 вв.). Принципы З. с. или близкие ему пропорциональные отношения легли в основу композиционного построения многих произведений мирового искусства (главным образом произведений архитектуры античности и Возрождения).

ЗОММЕРФЕЛЬДА ИНТЕГРАЛ — интегральное представление интегралом по контуру цилиндрических функций: *Ганкеля функции* 1-го рода

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{iz\cos t}\, e^{i\nu(t-\pi/2)}\,dt,$$

где C_1 — кривая, пробегаемая от $-\eta+i\infty$ до $\eta-i\infty$, $0\leqslant\eta\leqslant\pi$;
функции Ганкеля 2-го рода

$$H_\nu^{(2)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{C_2} e^{iz\cos t}\, e^{i\nu(t-\pi/2)}\,dt,$$

где C_2 — кривая, пробегаемая от $\eta-i\infty$ до $2\pi-\eta+i\infty$, $0\leqslant\eta\leqslant\pi$;
Бесселя функции 1-го рода

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{C_3} e^{iz\cos t}\, e^{i\nu(t-\pi/2)}\,dt,$$

где C_3 — кривая, пробегаемая от $-\eta+i\infty$ до $2\pi-\eta+$ $+i\infty$, $0\leqslant\eta\leqslant\infty$. Представление справедливо в области $-\eta<\arg z<\pi-\eta$. З. и. назван по имени А. Зоммерфельда (Sommerfeld A., см. [1]).

Лит.: [1] Sommerfeld A., «Math. Ann.», 1896, Bd 47, S. 317—74; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968; [3] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1., М., 1949. *А. Б. Иванов.*

ЗОММЕРФЕЛЬДА УСЛОВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ — см. *Излучения условия.*

ЗОНАЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — см. *Сферические функции.*

ЗОНОЭДРЫ — многогранники, представимые как векторная сумма конечного числа отрезков. З. в n-мерном пространстве наз. также зонотопами. З.— выпуклый многогранник, причем сам З. и его грани всех размерностей имеют центры симметрии. Наличие центров симметрии у двумерных граней выпуклого многогранника достаточно, чтобы он был З. Всякий З. есть проекция куба достаточно высокой размерности. В классе центрально симметричных выпуклых тел особую роль играют зоноиды — тела, предельные для З.; они допускают специфическое интегральное представление опорной функции и являются конечномерными сечениями сферы в банаховом пространстве L^1.

Лит.: [1] Bolker E., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 145, p. 323—45; [2] Weil W., «Math. Z.», 1976, Bd 148, № 1, S. 71—84. *В. А. Залгаллер.*

ИВАСАВЫ РАЗЛОЖЕНИЕ — однозначное представление любого элемента g некомпактной связной полупростой вещественной группы Ли G в виде произведения $g=kan$ элементов k, a, n аналитич. подгрупп K, A, N группы G соответственно, где подгруппы K, A, N определяются следующим образом. Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{P}$ *Картана разложение* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G; пусть $\mathfrak{a}$ — максимальное в $\mathfrak{P}$ коммутативное подпространство пространства $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$ — такая нильпотентная подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, что комплексификация алгебры $\mathfrak{N}$ является линейной оболочкой корневых векторов нек-рой системы положительных корней относительно комплексификации нек-рой максимальной коммутативной подалгебры Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, содержащей $\mathfrak{a}$. Разложение алгебры Ли в прямую сумму подалгебр $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{N}$ наз. разложением Ивасавы [1] полупростой вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Группы K, A и N определяются как аналитич. подгруппы группы G, отвечающие подалгебрам Ли $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{N}$ соответственно. Группы K, A и N замкнуты; группы A и N односвязны; группа K содержит центр группы G, и образ группы K в присоединенном представлении группы G является максимальной компактной подгруппой в присоединенной группе группы G. Отображение $(k, a, n)\to kan$ является аналитич. диффеоморфизмом многообразия $K\times A\times N$ на группу Ли G. И. р. играет существенную роль в теории представлений полупростых групп Ли. И. р. может быть определено также для связной полупростой алгебраич. группы над p-адическим полем (или, более общо, для группы p-адического типа) (см. [4, 5]).

Лит.: [1] Iwasawa K., «Ann. Math.», 1949, v. 50, p. 507—58; [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [4] Bruhat F., «Publ. Math. IHES», 1964, t. 23, p. 46—74; [5] Iwahori N., Matsumoto H., там же, 1965, t. 25, p. 5—48. *А. С. Феденко, А. И. Штерн.*

ИВЕРСЕНА ТЕОРЕМА: если a — изолированная существенно особая точка аналитич. функции $f(z)$ комплексного переменного z, то каждое *исключительное значение* α в смысле Пикара является *асимптотическим значением* для $f(z)$ в точке a. Напр., значения $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=\infty$ исключительные и асимптотические для функции $f(z)=e^z$ в существенно особой точке $a=\infty$. Этот результат Ф. Иверсена [1] дополняет большую *Пикара теорему* о поведении аналитич. функции в окрестности существенно особой точки.

Лит.: [1] Iversen F., Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes, Hels., 1914; [2] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971, гл. 1. *Е. Д. Соломенцев.*

ИГР ТЕОРИЯ — теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов.

Формальное определение игры. Под конфликтом понимают явление, применительно к к-рому можно говорить, кто и как в этом явлении участвует, какие у него могут быть исходы и кто и как в этих исходах заинтересован. Поэтому для формального задания конфликта необходимо указать: 1) множество $\mathfrak{K}_\partial$ участвующих в нем действующих начал (называемых коалициями действия), 2) семейство множеств $\mathfrak{x}_K$ стратегий каждой из коалиций действия, 3) множество ситуаций $\mathfrak{x} \subset \Pi_{K \in \mathfrak{K}_\partial} \mathfrak{x}_K$, 4) множество $\mathfrak{K}_U$ заинтересованных начал (называемых коалициями интересов) и 5) семейства бинарных отношений $\underset{K}{\succ}$ на $\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}$ $(K \in \mathfrak{K}_U)$, выражающих предпочтения между ситуациями для коалиций интересов. Система

$$\langle \mathfrak{K}_\partial, \{\mathfrak{x}_K\}_{K \in \mathfrak{K}_\partial}, \mathfrak{x}, \mathfrak{K}_U, \{\underset{K}{\succ}\}_{K \in \mathfrak{K}_U} \rangle$$

наз. игрой.

Содержание И. т. состоит в установлении связей между компонентами каждой игры и «оптимальными» ее исходами, и прежде всего: в уточнении самого понятия оптимальности, в доказательстве существования оптимальных исходов и в их фактич. определении. Развитие И. т. приводит к вопросам изучения взаимосвязей между различными играми, что выражается в разработке разного рода исчислений игр, и к рассмотрению классов, пространств, категорий игр.

Классификация игр. Игры, в к-рых совсем нет коалиций интересов или же имеется лишь одна такая коалиция, являются предметами изучения чисто дескриптивных или же традиционных оптимизационных теорий. Игры в собственном смысле слова имеют не менее двух коалиций интересов.

Обычно в И. т. как коалиции действия, так и коалиции интересов принято атомизировать и считать как те, так и другие подмножествами нек-рого множества I, элементы к-рого наз. игроками. Вначале множество игроков в игре принималось конечным, но позднее (1970-е гг.) начали изучаться игры и с бесконечными и притом неатомическими множествами игроков.

Для игр с одной коалицией действия множество всех ситуаций можно принять за множество стратегий этой единственной коалиции действия и далее о стратегиях не упоминать. Поэтому такие игры наз. нестратегическими. В отличие от них, все остальные игры, с двумя или более коалициями действия, наз. стратегическими.

Весьма широкий класс нестратегич. игр может быть получен следующим образом. Пусть I — множество игроков, и $\mathfrak{K}_U = 2^I$. Каждому игроку $i \in I$ ставится в соответствие координатная прямая E^i, принимаемая за шкалу его полезностей, а каждой коалиции интересов $K \in \mathfrak{K}_U$ — произведение $E^K = \Pi_{i \in K} E^i$. Наконец, вводятся множества $v(K) \subset E^K$ для каждого $K \in \mathfrak{K}_U$ и множество $H \subset E^I$ (элементы к-рого наз. дележами) и по определению принимается, что для дележей x, $y \in E^I$ имеет место $x \underset{K}{\succ} y$ («дележ x доминирует дележ y по коалиции K») тогда и только тогда, когда $x, y \in (v(K) \times E^{I \setminus K}) \cap H$ и $x_i > y_i$ для всех $i \in K$. Такие игры наз. играми без побочных платежей. Они описывают положение, при к-ром каждая коалиция интересов K может форсированно обеспечить для своих членов в качестве выигрышей компоненты любого вектора из $v(K)$, а общие соображения целесообразности делают нерациональным выбор дележей вне H. Обычно множества $v(K)$ подчиняются нек-рым естественным условиям: 1) $v(K)$ является непустым замкнутым и выпуклым множеством, 2) если $x_k \in v(K)$ и

$y_k x \geq x_k$ (неравенство векторов понимается покомпонентно), то $y_k \in v(K)$ («кто способен на большее, способен и на меньшее»), 3) если $K \cap L = \phi$, то $v(K \cup L) \supset v(K) \times v(L)$ (коалиции K и L вместе могут добиться не меньшего, чем порознь), 4) H состоит из всех таких векторов $x \in E^I$, что для каждого из них найдется вектор $y \in v(I)$, для к-рого $y \geq x$ (таким образом, $v(I)$ состоит из всех таких векторов выигрышей x, что I может дать своим членам не менее чем x; H состоит из таких векторов x, что I может дать своим членам ровно x). В частности, если

$$V(K) = \left\{x : \sum\nolimits_{i \in K} x_i \leqslant v(K)\right\},$$

где $v(K)$ — некоторое действительное число, а

$$H = \left\{x : \sum\nolimits_{i \in I} x_i = v(I),\ x_i \geqslant v(i)\ (i \in I)\right\},$$

то получится классическая *кооперативная игра*. В этом случае определение $v(K)$ означает возможность коалиции K уверенно добиться суммарного выигрыша $v(K)$ и произвольно перераспределить его между своими членами. Определение H означает, что общая распределяемая в игре сумма есть $v(I)$ (распределять меньшую сумму невыгодно; большей же просто нет!), а каждый игрок i будет соглашаться лишь на долю x_i, не меньшую, чем та сумма $v(i)$, к-рую он может уверенно получить самостоятельно.

Основной класс стратегич. игр составляют *бескоалиционные игры*, в к-рых множество игроков I совпадает с множествами коалиций действия $\mathfrak{K}_\partial$ и коалиций интересов $\mathfrak{K}_U$. Каждый игрок $i \in I$ имеет в своем распоряжении множество стратегий $\mathfrak{x}_i$, в качестве множества всех ситуаций принимается декартово произведение $\mathfrak{x} = \Pi_{i \in I} \mathfrak{x}_i$, а отношение предпочтения $\underset{i}{\succ}$ описывается ф у н к ц и е й в ы и г р ы ш а H_i: $\mathfrak{x} \to E^i$, причем $x' \underset{i}{\succ} x''$ тогда и только тогда, когда $H_i(x') > H_i(x'')$. Таким образом, бескоалиционная игра может быть описана в виде тройки $\Gamma = \langle I, \{\mathfrak{x}_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$. Если все множества стратегий $\mathfrak{x}_i$ конечны, то и бескоалиционная игра Γ наз. к о н е ч н о й. Конечные бескоалиционные игры с двумя игроками ($I = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$) наз. *биматричными играми*.

Если $I = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$ и $H_{\mathrm{I}}(x) = -H_{\mathrm{II}}(x)$ для всех $x \in \mathfrak{x}$, то игра Γ наз. *антагонистической игрой*. Всякая антагонистич. игра может быть задана в виде тройки $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, H \rangle$, где $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ — множества стратегий, соответственно, игроков I и II, а H — функция выигрыша игрока I. Конечные антагонистич. игры наз. *матричными играми*.

Если в антагонистич. игре $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = [0, 1]$, то всякая ситуация в такой игре описывается точкой из квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$; такие игры наз. *играми на единичном квадрате*.

Пусть I — множество игроков, $x_i (i \in I)$ — множества их стратегий; $\underline{X}$ — множество, элементы к-рого наз. п о з и ц и я м и; T — множество, элементы к-рого имеют смысл моментов времени; $f: \mathfrak{x} \to 2^{T \times \underline{X}}$, т. е. f ставит в соответствие каждой ситуации определяемой игры отношение, заданное на T со значениями в $\underline{X}$; всякий f-образ ситуации наз. п а р т и е й (множество всех партий обозначается через $\mathfrak{P}$) и, наконец, h_i: $\mathfrak{P} \to E^i$. Система

$$\Gamma = \langle I, \{\mathfrak{x}_i\}_{i \in I}, T, \underline{X}, f, \mathfrak{P}, \{h_i\}_{i \in I} \rangle$$

наз. о б щ е й п о з и ц и о н н о й и г р о й. В конечном счете в такой игре выигрыш каждого игрока вполне определяется складывающейся ситуацией, т. е. выбором стратегий всеми игроками. Поэтому такие игры относятся к числу бескоалиционных игр.

Пусть в общей позиционной игре Γ компонента X является конечномерным евклидовым пространством, T — множеством действительных чисел, а $\varphi: \mathfrak{x} \times X \times T \to X$. Пусть рассматриваются ситуации $x \in \mathfrak{x}$, для которых система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, x, t), \ x \in X, \ t \in T$$

(равенство понимается как векторное) имеет при данных начальных условиях единственное решение. Тогда каждая ситуация определяет некоторую партию, к-рая в данном случае наз. траекторией. Так определенная игра наз. *дифференциальной игрой*.

К числу общих позиционных игр относятся также *позиционные игры* и *динамические игры* (в том числе *стохастические игры*, *рекурсивные игры*, а также *игры на выживание*).

Основные результаты теории игр. Основная проблематика в И. т. связана с принципами оптимальности, которые, во-первых, должны в достаточной мере отражать содержательные представления об оптимальности, а во-вторых, должны быть реализуемыми на достаточно широких и естественно очерченных классах игр. Эти два требования, предъявляемые к принципам оптимальности, в известной мере противоречат друг другу, и поэтому для многих содержательно естественных классов игр И. т. еще не выработала соответствующих принципов оптимальности. Вместе с тем известны классы игр, обслуживаемые с равным успехом несколькими различными принципами оптимальности. Поэтому конструирование и анализ принципов оптимальности являются существенной составной частью И. т. Каждый принцип оптимальности реализуется (не обязательно однозначно) в виде множества ситуаций-оптимумов. Это множество (к-рое может оказаться пустым) наз. решением.

Логической основой каждого решения являются нек-рые черты обычного экстремума, сформулированные применительно к одновременной экстремизации нескольких функций. Поэтому, помимо стремления к наибольшим (в арифметическом смысле) значениям выигрышей, решения игр могут выражать нек-рые характеристики устойчивости и симметрии, а также различные комбинации того и другого.

Так, среди черт оптимальности в нестратегич. играх можно назвать недоминируемость, т. е. соглашение считать оптимальными те и только те ситуации x, для к-рых ни при какой ситуации y и коалиции интересов K не может быть $x \underset{K}{\succ} y$ (множество оптимальных в этом смысле ситуаций наз. c-ядром игры). Другой принцип оптимальности состоит в сочетании внутренней и внешней устойчивости; это означает, что множество ситуаций R объявляется решением, если при $x, y \in R$ и $K \in \mathfrak{K}_U$ не может быть $x \underset{K}{\succ} y$, а по всякому $x \notin R$ найдутся такие $z \in R$ и $K \in \mathfrak{K}_U$, что $z \underset{K}{\succ} x$ (такое R наз. решением игры по Нейману — Моргенштерну). Можно формализовать угрозы, предъявляемые одними коалициями другим, а также ответные контругрозы, и объявить устойчивой всякую ситуацию, в к-рой каждая угроза может парироваться контругрозой. Множество всех устойчивых в этом смысле ситуаций наз. k-ядром игры. Представляет также интерес понимание оптимальности как своеобразной «справедливости», задаваемой нек-рой системой аксиом. Для кооперативных игр сформулирована такая аксиоматика, приводящая к единственному дележу (ситуации), называемому *Шепли вектором*.

В стратегич. играх основой принципа оптимальности является идея равновесия. При этом оптимальными объявляются такие ситуации, отклонения от к-рых любым игроком не приводят к увеличению его выигрыша. Один и тот же принцип оптимальности, формулируемый для различных по объему классов игр, может приобретать различное содержательное выражение. Так, описанный принцип равновесия в случае антагонистич. игр превращается в *минимакса принцип*.

Формулы и алгоритмы, позволяющие находить решения игр, также можно отнести к числу принципов оптимальности (с узкой областью применимости). Напр., в *матричной игре* с диагональной матрицей выигрышей принципом оптимальности можно считать выбор игроками стратегий с вероятностями, обратно пропорциональными соответствующим диагональным элементам матрицы. Реализуемость принципа оптимальности для нек-рого класса игр состоит в существовании для всех игр этого класса соответствующих (непустых) множеств оптимумов. Их отсутствие в первоначально заданных ситуациях может преодолеваться путем расширения множеств стратегий (и тем самым — множеств конструируемых из них ситуаций). Для бескоалиционных игр плодотворно используются смешанные (рандомизированные) стратегии.

Большинство доказательств теорем существования решений в И. т. носит неэффективный характер (многие из них опираются на теоремы о неподвижной точке) и не содержат алгоритмов нахождения решений. Поэтому в И. т. важны частные аналитические и численные методы нахождения решений. При этом вопрос о фактическом нахождении решений игр нередко оказывается очень сложным, и ответ на него удается найти лишь для весьма узких классов игр.

В разработке исчислений игр можно выделить несколько направлений. Изучаются возможности нахождения и описания (хотя бы частичного) решений одной игры на основе решений другой игры, в том или ином смысле более просто устроенной. Элементарными примерами таких редукций могут служить естественное отбрасывание доминируемых стратегий игроков в бескоалиционных играх, симметризация таких игр, а также аппроксимации бесконечных игр конечными. Редукционным процессом можно считать также предложенное Дж. Нейманом (J. Neumann) построение кооперативной модели бескоалиционной игры. Известны и обратные результаты, указывающие на принципиальную несводимость решений игр того или иного класса к решению игр более узкого класса. Напр., можно указать бескоалиционные игры трех лиц, решение к-рых связано с выполнением иррациональных операций, в то время как решение биматричных игр всегда осуществимо при помощи рациональных операций.

Фиксация одних компонент в играх нек-рого класса (напр., множества игроков и множеств их стратегий в условиях класса всех бескоалиционных игр) и различение игр по остальным компонентам (в данном примере — по функциям выигрыша игроков) приводит к рассмотрению пространств игр, к-рое осуществляется средствами функционального анализа и топологии. Введение на таких пространствах игр вероятностной меры приводит к стохастич. играм.

Связи теории игр с другими разделами математики. И. т. тесно связана с различными разделами математики. Как общая теория множеств с несколькими бинарными отношениями, она близка алгебре. В И. т. используется весьма разнообразный математич. аппарат, а большое число вполне традиционных математич. задач допускает теоретико-игровые обобщения. Оптимальные поведения в стратегич. играх обычно оказываются рандомизированными, поэтому теоретико-вероятностные понятия настолько естественно входят в И. т. и употребляются в ней, что одно время даже было принято считать И. т. частью теории вероятностей.

Математич. модели *исследования операций* (являющиеся моделями принятия оптимальных решений) естественно распределяются по трем уровням: детерминированному, стохастическому и неопределенному — в зависимости от степени информированности принимающих решения субъектов. Принятие решения в условиях неопределенности можно интерпретировать как конфликт принимающего решение субъекта против «природы» и тем самым — как игру. По существу к играм относятся и все *многокритериальные задачи*.

Поэтому И. т. в ее методологич. основах и в практич. ориентированности можно считать разделом исследования операций.

И. т. является одной из составных частей математич. аппарата *кибернетики*. В динамич. играх стратегии выступают как функции «информационных состояний» игроков, причем в ходе игры игроки могут приобретать или утрачивать информацию. Это обусловливает связь И. т. с *информации теорией*.

Приложения теории игр. Помимо разнообразных связей внутри математики, И. т. имеет многочисленные приложения вне ее. Они касаются главным образом тех отраслей знаний и видов практич. деятельности, к-рые непосредственно имеют дело с конфликтами: военного дела, капиталистич. экономики (в частности, И. т. применяется в вопросах борьбы фирм за рынки, в явлениях олигополии, в планировании рекламных компаний, при формировании цен на конкурентных рынках, в биржевой игре и т. д.), права и т. п. С позиций И. т. можно рассматривать и различные явления в условиях плановой экономики (напр., вопросы централизации и децентрализации управления производством, преодоление ведомственных противоречий, оптимальное планирование по нескольким показателям, планирование в условиях неопределенности, порождаемой, напр., технич. прогрессом, и т. д.).

Исторический очерк. Зарождение И. т. как математич. дисциплины можно отнести к тому же письму Б. Паскаля (B. Pascal) к П. Ферма (P. Fermat) от 29 июля 1654, к-рое принято считать началом математич. теории вероятностей. В дальнейшем отдельные идеи, к-рые можно отнести к теоретико-игровым, высказывались Вальдегравом (Waldegrave, 1712; нахождение оптимальных смешанных стратегий в игре «проходящий туз»), Д. Бернулли (D. Bernoulli, 1732; анализ «петербургской игры»), П. Лапласом (P. Laplace, 1814; рассмотрение принципов оптимальности) и Ж. Бертраном (J. Bertrand, 1888; теоретико-игровой подход к игре в бакара). Ряд по существу теоретико-игровых утверждений был в эквивалентной форме рассмотрен в других разделах математики: в теории наилучших приближений (П. Л. Чебышев), в геометрии выпуклых многогранников [Г. Минковский (H. Minkowski)], в теории линейных неравенств [Э. Штимке (E. Stiemke)]. В 1911 Э. Цермело (E. Zermelo) описал теоретико-игровой подход к шахматной игре; в 1921 Э. Борель (E. Borel) начал систематич. изучение матричных игр, доказав для нек-рых случаев существование оптимальных смешанных стратегий. В 1928 вышла в свет работа Дж. Неймана «К теории стратегических игр», содержащая основные идеи современной И. т. Эти идеи были детально разработаны Дж. Нейманом и О. Моргенштерном (O. Morgenstern, [1]). С тех пор И. т. вошла в число разделов современной математики.

Лит.: [1] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [2] Льюс Р., Райфа Х., Игры и решения, пер. с англ., М., 1961; [3] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964; [4] Воробьев Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 15, в. 2, с. 80—140; [5] Оуэн Г., Теория игр, пер. с англ., М., 1971; [6] Партхасаратхи Т., Рагхаван Т., Некоторые вопросы теории игр двух лиц, пер. с англ., М., 1974; [7] Воробьев Н. Н., Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков, Л., 1974; [8] его же, Entwicklung der Spiel-

theorie, B., 1975; [9] Теория игр. Аннотированный указатель публикаций по 1968 г., Л., 1976; [10] Журнал «International Journal of Game Theory», Vienna (выходит с 1971). *Н. Н. Воробьев.*

ИГРА НА ВЫЖИВАНИЕ — антагонистическая *динамическая игра* с терминальным выигрышем, принимающим лишь значения 0 и 1. Таким образом, терминальное множество X^T разбивается на два подмножества X^{T+} и X^{T-}, при этом, если игра попадает в состояние $x \in X^{T+}$, то выигрывает игрок I, а если в состояние $x \in X^{T-}$, то выигрывает игрок II. В случае, если игра никогда не заканчивается, игрок I выигрывает, а игрок II проигрывает нек-рое число $h_\infty \in [0, 1]$. Если $h_\infty = 0$, то имеем дело с И. на в. игрока II, а если $h_\infty = 1$, то — с И. на в. игрока I.

Исторически понятие И. на в. восходит к классической задаче «о разорении игрока». Прямым обобщением этой задачи является игра, в к-рой на каждом шаге разыгрывается одна и та же матричная подигра, а изменения состояний выражаются в изменениях капиталов участников (см. [1]). Игрок I выигрывает, если разорятся противник (т. е. капитал противника становится отрицательным), и проигрывает, если разорятся сам. Такая игра обладает значением, не зависящим от h_∞, и оба игрока имеют стационарные ε-оптимальные стратегии, если все элементы матрицы повторяемой подигры отличны от нуля. В этом случае игра почти наверное заканчивается за конечное число шагов. Другой вариант И. на в. (с многокомпонентными капиталами) представляют так наз. «игры на истощение» (см. [2]). Дифференциальные И. на в. могут рассматриваться как обобщение описанных игр на случай непрерывного времени.

Лит.: [1] Milnor J., Shapley L. S., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 3, N. Y., 1957, p. 15—45; [2] Blackwell D., «Naval Res. Logist. Quart.», 1954, v. 1, p. 210—16; [3] Романовский И. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1961, т. 6, № 4, с. 426—29. *В. К. Доманский.*

ИГРА НА ГРАФЕ — обобщение *позиционной игры* на случай, когда граф позиций не древовидный, а произвольный. Частным случаем И. на г. является игра Ним — *антагонистическая игра* с полной информацией, в к-рой для каждой окончательной позиции указано, выигрывает или проигрывает последний ходивший игрок. В простейшем варианте игра Ним состоит в следующем: имеется несколько кучек фишек, и игроки поочередно удаляют не менее одной фишки, причем каждый раз удаляемые фишки должны быть взяты из одной кучки. Игрок, удаливший последнюю фишку, выигрывает партию. Решение игры Ним состоит в описании для каждого игрока множества выигрышных позиций, т. е. таких позиций, начиная с к-рых данный игрок может выиграть при любой стратегии противника. Множество выигрышных позиций совпадает с множеством нулей функции Гранди (функция g, сопоставляющая каждой вершине k графа Γ такое неотрицательное целое число $g(k)$, что

$$g(k) = \min\{n;\ n \neq g(i),\ i \in \Gamma(k)\}).$$

Оно обладает свойствами внутренней и внешней устойчивости и в этом отношении аналогично понятию *H-M*-решения в *кооперативных играх*.

Лит.: [1] Берж К., Общая теория игр нескольких лиц, пер. с франц., М., 1961; [2] Bouton C. L., «Ann. Math.», ser. 2, 1902, v. 3, № 1, p. 35—9. *А. Н. Ляпунов.*

ИГРА НА ЕДИНИЧНОМ КВАДРАТЕ — *антагонистическая игра*, в к-рой множеством чистых стратегий игроков I и II является сегмент [0, 1]. При надлежащей нормировке к И. на е. к. может быть сведена любая антагонистич. игра с континуальными множествами стратегий у обоих игроков. И. на е. к. задаются функцией выигрыша $K(x, y)$, определенной на единичном квадрате. Смешанными стратегиями игроков являются функции распределения на единичном интервале.

Если функция выигрыша ограничена и измерима по обеим переменным, то выигрыш игрока I, в условиях применения игроками I и II смешанных стратегий F и G соответственно, равен, по определению,

$$K(F,\ G)=\int_0^1\int_0^1 K(x,\ y)\,dF(x)\,dG(y).$$

Если функция $K(x,\ y)$ непрерывна по обеим переменным, то

$$\max_F\min_G K(F,\ G)=\min_G\max_F K(F,\ G)=v,$$

т. е. для такой игры реализуем *минимакса принцип* и существуют обозначенное через v значение игры и оптимальные стратегии у обоих игроков. В дальнейшем теоремы о существовании значения игры (теоремы о минимаксах) были доказаны при более слабых предположениях относительно функции выигрыша. Из общих теорем о минимаксах следует, напр., существование игры для И. на е. к. с ограниченной функцией выигрыша, полунепрерывной сверху по x или снизу по y. Доказаны теоремы существования значения игры для нек-рых специальных классов разрывных функций выигрыша (напр., для *игр с выбором момента времени*). Однако не все И. на е. к. обладают значением игры. Так, для функции $K(x,\ y)$, равной

$$K(x,\ y)=\begin{cases}-1, & x<y\neq 1 \quad \text{и} \quad x=1,\ y\neq 1;\\ 0, & x=y;\\ 1, & y<x\neq 1 \quad \text{и} \quad y=1,\ x\neq 1;\end{cases}$$

имеют место равенства

$$\sup_F\inf_G K(F,\ G)=-1,\quad \inf_G\sup_F K(F,\ G)=1.$$

Для И. на е. к. с непрерывной функцией выигрыша выяснена структура множества игр с единственным *решением*. Именно, множество непрерывных функций от двух переменных, для к-рых соответствующая И. на е. к. имеет единственное решение, оптимальные стратегии обоих игроков непрерывны и их носителями (см. *Носитель меры*) являются нигде не плотные совершенные замкнутые множества лебеговой меры нуль, содержит всюду плотное подмножество типа G_δ.

Общих методов решения И. на е. к. не существует. Тем не менее для нек-рых классов И. на е. к. можно либо найти решение аналитически (таковы, напр., игры с выбором момента времени, игры с функцией выигрыша, зависящей только от разности стратегий игроков и обладающие оптимальными выравнивающими стратегиями), либо доказать для таких игр существование оптимальных стратегий с конечным носителем (таковы, напр., *выпуклые игры*, *вырожденные игры*, *колоколообразные игры*) и тем самым получить возможность свести задачу нахождения решения И. на е. к. к решению нек-рой *матричной игры*. Для решения игр с непрерывной функцией выигрыша можно применять приближенные методы.

Лит.: [1] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании, экономике, пер. с англ., М., 1964.

Е. Б. Яновская.

ИГРА С ВЫБОРОМ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ — *бескоалиционная игра*, в к-рой стратегиями игроков являются моменты совершения ими нек-рых действий, выбираемые из нек-рого фиксированного интервала, а функция выигрыша игроков непрерывна на множестве ситуаций (за исключением тех ситуаций, в к-рых среди выбранных игроками моментов имеются совпадающие) и монотонно возрастает в областях непрерывности по стратегиям соответствующего игрока. Наиболее изученным классом И. с в. м. в. являются *антагонистические игры*, в к-рых каждый игрок выбирает один момент времени, т. е. *игры на единичном квадрате*, функции выигрыша к-рых имеют разрыв на диагонали квадрата, возрастают по первой переменной и убывают по второй. В таких играх существуют значение игры и оптимальные стратегии у обоих игроков. При нек-рых дополнительных предположениях решение таких игр сводится к решению интегральных уравнений. Другим классом И. с в. м. в. являются *дуэли* — антагонистич. игры, в к-рых действия игроков направлены на уничтожение противника, так что в дуэли возможны четыре различных исхода. Для дуэлей существуют аналитич. методы нахождения оптимальных (или ε-оптимальных) стратегий игроков. Теория дуэлей имеет как военное, так и экономич. приложения (конкурентная борьба за рынки, рекламная кампания и т. п.).

Лит.: [1] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании, экономике, пер. с англ., М., 1964.

Е. Б. Яновская.

ИГРА С ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ — модель конфликтной ситуации при фиксированной последовательности ходов и обмена информацией участников. Основным объектом исследования в теории И. с и. с. является задача об отыскании наибольшего гарантированного результата и оптимальной стратегии выделенного игрока. Пусть игроки I, II стремятся к увеличению, соответственно, функций выигрыша $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$, непрерывных на произведении компактов X_1, X_2; $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. В зависимости от характера информации и порядка ходов могут быть сформулированы следующие различные игры.

Игра Γ_1. Игрок I выбирает $x_1 \in X_1$ и сообщает свой выбор игроку II. Пусть

$$P(x_1) = \{x_2 \mid f_2(x_1, x_2) = \max_{y \in X_2} f_2(x_1, y)\}$$

— множество оптимальных выборов игрока II. Тогда наибольший гарантированный результат игрока I равен

$$G_1 = \sup_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in P(x_1)} f_1(x_1, x_2).$$

Игра Γ_2. Игрок I рассчитывает иметь и действительно будет иметь информацию о выборах игрока II; сообщает свою стратегию — функцию $\tilde{x}_1 = x_1(x_2)$, где $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ — множество всех отображений из X_2 в X_1, игроку II. Наибольший гарантированный результат игрока I равен

$$G_2 = \sup_{\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1} \inf_{x_2 \in P_2(\tilde{x}_1)} f_1(\tilde{x}_1, x_2),$$

где множество оптимальных выборов игрока II есть

$$P_2(\tilde{x}_1) = \{x_2 \mid f_2(\tilde{x}_1, x_2) = \sup_{y \in X_2} f_2(x_1(y), y) - \delta(\tilde{x}_1)\},$$

$\delta(\tilde{x}_1) \geqslant 0$, при этом $\delta(\tilde{x}_1) = 0$ тогда и только тогда, когда достигается $\max\limits_{y \in X_2} f_2(x_1(y), y)$.

Игра Γ_3. Игрок I рассчитывает иметь и действительно будет иметь информацию о выборах игрока II вида $\tilde{x}_2 = x_2(x_1)$, где $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ — множество всех отображений из X_1 в X_2; сообщает игроку II свою стратегию $\tilde{\tilde{x}}_1 = x_1(\tilde{x}_2)$, где $\tilde{\tilde{x}}_1 \in \tilde{\tilde{X}}_1$ — множество всех отображений из $\tilde{X}_2$ в X_1. Наибольший гарантированный результат игрока I равен

$$G_3 = \sup_{\tilde{\tilde{x}}_1 \in \tilde{\tilde{X}}_1} \inf_{\tilde{x}_2 \in P_3(\tilde{\tilde{x}}_1)} f_1(\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{x}_2),$$

где

$$P_3(\tilde{\tilde{x}}_1) = \{\tilde{x}_2 \mid f_2(\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{x}_2) = \sup_{y \in \tilde{X}_2} f_2(x_1(y), y) - \delta(\tilde{\tilde{x}}_1)\},$$

$\delta(\tilde{\tilde{x}}_1)\geqslant 0$, при этом $\delta(\tilde{\tilde{x}}_1)=0$ тогда и только тогда, когда достигается $\max\limits_{y\in X_2} f_2(x_1(y),\ y)$.

Соотношение между результатами в этих играх определяет для игрока I значимость информации о действиях игрока II: $G_1\leqslant G_3\leqslant G_2$. Пользуясь указанной схемой в построении стратегий игроков, можно формулировать игры с произвольной глубиной рекурсии. Имеет место утверждение: в играх Γ_{2m}, $m>1$, наибольший гарантированный результат игрока I равен G_2; в играх Γ_{2m+1}, $m>1$, наибольший гарантированный результат равен G_3. Задача отыскания G_1 относится к классу задач на максимин со связанными ограничениями.

Развиты методы решения игры Γ_1, использующие штрафные функции, необходимые условия оптимальности, приближение исходной игры игрой с однозначными ответами игрока II. Полностью решены частные классы игр: с близкими интересами, биматричные, билинейные и др. Задача отыскания G_1 некорректна относительно изменения функции $f_2(x_1,\ x_2)$ в равномерной метрике и множеств X_1, X_2 в метрике Хаусдорфа. Предложен общий метод регуляризации решения игры Γ_1; регуляризация задачи по функции выигрыша игрока II осуществляется за счет введения искусственной неточности определения $\max\limits_{x_2\in X_2} f_2(x_1,\ x_2)$. Отыскание величины G_2 сводится к решению ряда задач *математического программирования.*

Пусть для любого $\varepsilon>0$ определены функции, множества и величины:

$$f_2\left(x_1^H(x_2),\ x_2\right)=\min_{x_1\in X_1} f_2(x_1,\ x_2),$$

$$L_2=\max_{x_2\in X_2} f_2\left(x_1^H(x_2),\ x_2\right)=\max_{x_2\in X_2}\min_{x_1\in X_1} f_2(x_1,\ x_2),$$

$$E_2=\left\{x_2\in X_2 \mid f_2\left(x_1^H(x_2),\ x_2\right)=L_2\right\},$$

$$K=\begin{cases}\sup\limits_{(x_1,\ x_2)\in D} f_1(x_1,\ x_2), & \text{если } D\neq\varnothing,\\ -\infty, & \text{если } D=\varnothing,\end{cases}$$

$$f_1\left(x_1^\varepsilon,\ x_2^\varepsilon\right)\geqslant K-\varepsilon,\quad \left(x_1^\varepsilon,\ x_2^\varepsilon\right)\in D\neq\varnothing,$$

$$M=\inf_{x_2\in E_2}\sup_{x_1\in X_1} f_1(x_1,\ x_2),$$

$$D=\{(x_1,\ x_2)\mid f_2(x_1,\ x_2)>L_2\},$$

$$f_1\left(x_1^{a\varepsilon}(x_2),\ x_2\right)\geqslant\sup_{x_1\in X_1} f_1(x_1,\ x_2)-\varepsilon.$$

В указанных условиях $G_2=\max[K,\ M]$ и стратегия

$$\tilde{x}_1^\varepsilon=\begin{cases}x_1^\varepsilon, & \text{если } x_2=x_2^\varepsilon,\ K>M,\\ x_1^{a\varepsilon}(x_2), & \text{если } x_2\in E_2,\ K\leqslant M,\\ x_1^H(x_2) & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

гарантирует игроку I при достаточно малых ε получение $\max[K,\ M]-\varepsilon$. Как видно из определения, оптимальная стратегия состоит из нескольких ветвей, последняя играет роль с т р а т е г и и н а к а з а н и я.

Если $L_2<f_2(x_1,\ x_2)$ и у функции $f_2(x_1,\ x_2)$ нет локальных максимумов со значением L_2 на $X_1\times X_2$, то $K\geqslant M$ и оптимальная стратегия имеет простой вид:

$$\tilde{x}_1^\varepsilon=\begin{cases}x_1^\varepsilon, & \text{если } x_2=x_2^\varepsilon,\\ x_1^H(x_2), & \text{если } x_2\neq x_2^\varepsilon.\end{cases}$$

Аналогичным образом может быть найдено решение игры Γ_3, оно также сводится к решению ряда задач математич. программирования.

При введении в И. с и. с. побочных платежей со стороны игрока I, как функций от выборов игрока II, выражение для наибольшего гарантированного результата игрока I значительно упрощается. В игре Γ_2, где

$$w_1 = f_1(x_1, x_2) - z, \quad w_2 = f_2(x_1, x_2) + z,$$

$x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $0 \leqslant z \leqslant z^0$, и игрок I выбирает стратегии $x_1(x_2)$, $z(x_2)$, отыскание G_2 сводится к решению задачи математич. программирования

$$G_2 = \max_{x_1, x_2} \min [f_1(x_1, x_2); f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) - L_2],$$

$$f_2(x_1, x_2) \geqslant L_2 - z^0.$$

Вообще применение сколь угодно малых побочных платежей $z(x_2)$ в И. с и. с. позволяет игроку I реализовать наибольший гарантированный результат, рассчитанный на благожелательность партнера.

Сформулированные игры допускают обобщение на случай постепенного получения и использования информации в динамике. В случае, когда состояние игроков описывается дифференциальными или разностными уравнениями, возникает обширный класс задач, связанный с разнообразием форм информированности игроков о состоянии и течении как физич. процесса, так и процесса принятия решения. Рассмотрены обобщения игр Γ_1 и Γ_2 на случай запрещенных ситуаций, т. е. при наличии совместных ограничений на выборы игроков.

Приведенные формулировки относятся к случаю полной информированности игрока I о функции выигрыша и множестве его выборов. Если игроку I известно, что непрерывная функция выигрыша игрока II удовлетворяет неравенствам

$$f_2^-(x_1, x_2) \leqslant f_2(x_1, x_2) \leqslant f_2^+(x_1, x_2)$$

при известных непрерывных функциях $f_2^-(x_1, x_2)$, $f_2^+(x_1, x_2)$, то его наибольший гарантированный результат в игре Γ_2 определяется из условия максимизации функции от одной переменной.

Более общий вариант неполной информированности игрока I об интересах игрока II состоит в следующем: игроку I известна функция $f_2(x_1, x_2, \alpha)$, $\alpha \in A$, и известно, что при нек-ром (неизвестном) значении $\alpha = \alpha_0$ истинная функция $f_2(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2, \alpha_0)$. При такой информированности решение игры Γ_2 для конечных множеств A сводится к максимизации функции нескольких переменных; при бесконечных множествах A задача еще более сложна. Наличие неопределенных факторов в постановке игры Γ_1 не приводит к принципиальному усложнению задачи, поскольку этот случай сводится к игре без неопределенностей. Для игры Γ_2 при неопределенности рассмотрен ряд задач, когда понятие стратегии игроков расширено за счет предложения игрока I игроку II сообщить свой критерий эффективности, т. е. нек-рое $\hat{\alpha} \in A$, так чтобы окончательный выбор x_1 мог быть сделан по получении информации о x_2 и критерия эффективности игрока II. Если в этом случае игрок II осторожен, т. е. придерживается принципа наибольшего гарантированного результата, а игрок I сообщает ему параметризованную стратегию $x_{1\alpha}(x_2, \hat{\alpha})$, $\alpha \in A$, то можно показать, что наибольший гарантированный результат игрока I равен $G_2 = \inf_{\alpha \in A} G_{2\alpha}$, где $G_{2\alpha}$ — наибольший гарантированный результат игрока I в игре Γ_2 при данном $\alpha \in A$. Аналогичный результат без предположения об осторожности игрока II имеет место, когда игроку I известно параметрич. семейство множеств $X_2(\alpha)$, $\alpha \in A$, одно из к-рых совпадает с истинным.

Близка к рассмотренным задача об отыскании наибольшего гарантированного результата игрока I в игре Γ_2 при наличии в функциях выигрышей игроков параметра α, характеризующего природную неопределенность, когда игрок II при своем выборе информирован о конкретной величине α, а игрок I не информирован.

В случае, когда игра Γ_2 при неопределенности повторяется, информированность игрока I об интересах и возможностях игрока II может быть повышена за счет информации, содержащейся в откликах игрока II на действия игрока I. Построены соответствующие процедуры, позволяющие игроку I, начиная с нек-рой партии, получать результат, сколь угодно близкий к результату, гарантированному ему при полной информированности. Такие же результаты получены и в игре Γ_1 с неопределенностями. Если моменты получения игроком I информации о неопределенном факторе α не фиксированы, то игрок I может получить в остальных повторениях результат, сколь угодно близкий к гарантированному ему в условиях полной информированности, при более слабых предположениях относительно функций выигрышей участников. Кроме того, в игре Γ_1 аналогичный результат игрок I может получить, наблюдая только за значениями собственной функции выигрыша.

Формулировки рассматриваемых игр естественно переносятся на случай многих лиц, взаимодействия к-рых в смысле приоритета действий и передачи информации имеют иерархическую структуру. При анализе этих игр необходимо оговаривать также правила взаимодействий игроков одного уровня. Так, при рассмотрении игры трех лиц, где функции выигрышей игроков имеют вид

$$w_1=f_1(x_1,\ x_2,\ x_3),\ w_2=f_2(x_1,\ x_2,\ x_3),\ w_3=f_3(x_1,\ x_2,\ x_3),$$

$x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$, $x_3\in X_3$, для отыскания наибольшего гарантированного результата выделенного игрока I, обладающего приоритетом в действиях, необходимо конкретизировать его информацию о поведении игроков II и III. Если игроки II и III образуют известную игроку I жесткую коалицию, т. е. формулируют коалиционный критерий и сообща определяют свои выборы, то для игрока I данный случай эквивалентен рассмотренным ранее играм двух лиц. Обозримые результаты получаются также в случае, когда игроки II и III либо находятся в известной игроку I коалиции, либо действуют индивидуально, если таким образом могут получить результат больший, чем дает коалиция; при этом каждый из игроков II и III не имеет самостоятельной информации о ходе другого и порядок их ходов задается игроком I. Подробно проанализированы игры, имеющие «веерную» структуру: выделенный игрок (управляющий центр) Π_0 и n игроков на следующем уровне иерархии (производители продукции) стремятся к увеличению функций выигрыша $f_0(x_0,\ x)$ и $f_i(x_0^i,\ x_i)$, $i=1,\ \ldots,\ n$, соответственно, где $x_0=\{x_0^1,\ \ldots,\ x_0^n\}$ — выбор Π_0, $x_0\in X_0$, $x_0^i\in X_0^i$, $x=\{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ — совокупный выбор игроков на нижнем уровне иерархии, причем они действуют независимо, и каждый игрок номера i распоряжается выбором $x_i\in X_i$. Все множества полагаются компактными, а функции непрерывными. Игрок Π_0 рассчитывает на информацию (и будет ее иметь) о выборах $x_i\in X_i$ и сообщает каждому игроку i соответствующую стратегию функцию $\tilde{x}_0^i=x_0^i(x_i)$, определенную на X_i со значениями из X_0^i. Для И. с и. с. n лиц получены выражения наибольшего гарантированного результата выделенного игрока при различных расширениях его класса стратегий за счет передачи игрокам нижнего уровня информации о действиях партнеров, а также введения элементов блефа. Как и в играх двух лиц, возможность побочного платежа со стороны выделенного игрока значительно упрощает отыскание его гарантированного результата.

При помощи И. с и. с. получают естественную интерпретацию различные механизмы централизованного управления активными экономич. подсистемами. Игра Γ_1 описывает процесс централизованного управления при помощи цен; игра Γ_2 моделирует политику штрафов и поощрений при стимулировании производства; игрой Γ_3 моделируется процесс распределения ресурсов как функций от производственных способов использования данных ресурсов.

Лит.: [1] Гермейер Ю. Б., Игры с непротивоположными интересами, М., 1972. *И. А. Ватель, Ф. И. Ерешко.*

ИГРОВАЯ СИТУАЦИЯ, ситуация,— результат выбора всеми коалициями действия (см. *Игр теория*) своих стратегий с учетом всех связей между стратегиями различных коалиций действия. Множество всех ситуаций можно понимать как подмножество декартова произведения $\Pi_{K\in\mathfrak{K}_\partial} X_K$, где X_K — множество всех стратегий коалиции действия K, $\mathfrak{K}_\partial$ — множество всех коалиций действия. *А. С. Михайлова.*

ИГРОК — индивидуальное действующее и заинтересованное начало в игре (см. *Игр теория*).

ИДЕАЛ — специального рода подобъект в нек-рой алгебраич. структуре. Понятие И. возникло первоначально в теории колец. Название И. ведет свое происхождение от *идеальных чисел.*

Для алгебры, кольца или полугруппы A идеал I есть подалгебра, подкольцо или полугруппа, замкнутая относительно умножения на элементы из A. При этом И. I наз. левым (соответственно правым), если он замкнут относительно умножения слева (соответственно справа) на элементы из A, т. е.

$$AI = I \text{ (соответственно } IA = I),$$

где

$$AI = \left\{ ab \,\middle|\, a \in A,\ b \in I \right\},\quad IA = \left\{ ba \,\middle|\, a \in A,\ b \in I \right\}.$$

И., являющийся одновременно левым и правым (т. е. выдерживающий любые умножения на элементы из A), наз. двусторонним. В коммутативном случае все эти три понятия совпадают. Любому утверждению о левых И. отвечает двойственное утверждение о правых И. (далее формулировки будут приводиться только в «левом случае»).

Двусторонние И. в кольцах и алгебрах играют ту же роль, что и *нормальные делители* в группах. Для всякого гомоморфизма f: $A \to B$ ядром $\operatorname{Ker} f$ (т. е. множеством элементов, отображающихся f в 0) служит И., и обратно, всякий И.— ядро нек-рого гомоморфизма. Более того, И. I однозначно определяет *конгруэнцию* $\varkappa$ в A, нулевым классом к-рой он является, и, следовательно, однозначно (с точностью до изоморфизма) определяет образ Af гомоморфизма f, ядром к-рого он служит: Af изоморфно факторкольцу (факторалгебре) $A/\varkappa$, обозначаемому также A/I. Аналогичными свойствами относительно гомоморфизмов обладают И. мультиоператорных групп. В мультиоператорной Ω-группе A И. определяется как нормальный делитель ее аддитивной группы, удовлетворяющий условию: для всякой n-арной операции ω, любых элементов $b \in I$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ при всяком $i=1, 2, \ldots, n$ должно иметь место включение— $(a_1, a_2 \ldots a_n\omega) + a_1 \ldots a_{i-1}(b + a_i)a_{i+1} \ldots a_n\omega \in I$ (для колец и алгебр это понятие индуцирует понятие двустороннего И.).

Двусторонние И. полугрупп, напротив, не дают описания всех гомоморфных образов данной полугруппы. Если задан гомоморфизм f полугруппы A на полугруппу B, то только в случае, когда B — полугруппа с нулем, с гомоморфизмом f естественно связан двусторонний И. $f^{-1}(0)$, к-рый, однако, не обязан определять однозначно f. Тем не менее, если I — И. в A, то среди факторполугрупп полугруппы A, имеющих в качестве элемента класс I, существует максимальная факторполугруппа A/I (наз. идеальным фактором). Элементами этой полугруппы будут элементы множества $A \setminus I$ и сам И. I, к-рый будет нулем в A/I.

Для любого подмножества $X \subset A$ можно определить идеал I_X, порожденный X, как пересечение всех И., содержащих множество X. Множество X наз. базисом идеала I_X. Разные базисы могут порождать один и тот же И. Идеал, порожденный одним элементом, наз. главным.

Пересечение, а в случае полугрупп и объединение левых (двусторонних) И. снова будет левым (двусторонним) И. Для колец и алгебр теоретико-множественное объединение И. не обязано быть И. Пусть I_1, I_2— левые или двусторонние И. в кольце (алгебре) A. Суммой идеалов I_1 и I_2 наз. И. $I_1+I_2=\{a+b | a \in I_1, b \in I_2\}$, он является минимальным И. в A, содержащим I_1 и I_2. Относительно операций пересечения и взятия суммы все (левые или двусторонние) И. кольца (или алгебры) образуют решетку. Многие классы колец и алгебр определяются условиями на их И. или решетку И. (см. *Главных идеалов кольцо*, *Артиново кольцо*, *Нётерово кольцо*).

И. мультипликативной полугруппы кольца может и не быть И. кольца. Полугруппа A является группой тогда и только тогда, когда A не содержит (как левых, так и правых) И., отличных от самой A. Таким образом, обилие И. в полугруппе характеризует отчасти степень отличия данной полугруппы от группы.

Для k-алгебры A (алгебры над полем k) И. кольца A может, вообще говоря, не быть И. алгебры A. Напр., если A есть k-алгебра с нулевым умножением, то множество всех И. кольца A совпадает с множеством всех подгрупп аддитивной группы A, а множество всех И. алгебры A совпадает с множеством всех подпространств векторного k-пространства A. Однако в случае, когда A — алгебра с единицей, оба эти понятия И. совпадают. Поэтому многие результаты одинаково формулируются как для колец, так и для алгебр.

Кольцо, не имеющее двусторонних И., наз. простым. Кольцо без собственных односторонних И. является телом. Левые И. кольца A можно определить также, как подмодули левого A-модуля A. Нек-рые свойства колец не меняются при замене левых И. на правые. Напр., *Джекобсона радикал*, определенный с помощью левых И., совпадает с радикалом Джекобсона, определенным с помощью правых И. С другой стороны, нётерово слева кольцо может не быть нётеровым справа.

Изучение И. коммутативных колец — важная часть коммутативной алгебры. С любым коммутативным кольцом с единицей связано топологич. пространство Spec A, точками к-рого являются все простые И. кольца A, отличные от A. При этом существует взаимно однозначное соответствие между всеми И. кольца A и всеми замкнутыми подмножествами пространства Spec A.

В коммутативной алгебре встречается понятие И. поля, точнее И. поля относительно кольца. При этом кольцо A коммутативно, с единицей и без делителей нуля, а поле Q — поле частных кольца A. Идеалом поля Q наз. ненулевое подмножество $I \subset Q$, являющееся подгруппой аддитивной группы поля Q, выдерживающее умножения на элементы из A (т. е. для любых $a \in A$, $b \in I$, $ab \in I$) и такое, что существует элемент $q \in Q$, для к-рого $qI \subset A$. И. наз. целым, если он содержится в A (и тогда он служит обычным И. кольца A), в противном случае I наз. *дробным идеалом*.

Идеалом решетки наз. непустое подмножество I элементов решетки, удовлетворяющее условиям: 1) если $a, b \in I$, то $a+b \in I$; 2) если $c \leqslant a \in I$, то

$c \in I$. Дуальный идеал (или фильтр) решетки определяется двойственным образом ($a, b \in J \Rightarrow ab \in J$, $c \geqslant a \in J \Rightarrow c \in J$). И. решетки, упорядоченные включением, сами образуют решетку. Максимальный элемент в множестве всех собственных И. решетки наз. максимальным идеалом. Если f — гомоморфизм решетки в частично упорядоченное множество с нулем, то полный прообраз нуля является И. Он наз. ядерным идеалом гомоморфизма f. И. S решетки L наз. стандартным, если для любых $a, b \in L$, $s \in S$ неравенство $a < b + s$ влечет $a = x + t$, где $x \leqslant b$ и $t \in S$. Всякий стандартный И. является ядерным. Ядерный И. решетки с относительными дополнениями (см. *Решетка с дополнениями*) является стандартным. И. I наз. простым, если из $ab \in I$ следует, что $a \in I$ или $b \in I$. Каждое из следующих условий эквивалентно простоте для И. I решетки L: а) дополнение $L \setminus I$ является фильтром; б) I — полный прообраз нуля при нек-ром гомоморфизме решетки L на двухэлементную решетку. В дистрибутивной решетке каждый максимальный И. прост.

Не вполне согласовано с предыдущим определение И. в частично упорядоченном множестве. А именно, вместо условия 1) требуется выполнение более сильного условия: для всякого подмножества элементов, лежащих в И., их объединение, если оно существует в этом частично упорядоченном множестве, также лежит в I.

Идеалом объекта A категории с нулевыми морфизмами наз. *подобъект* (U, μ) объекта A такой, что $\mu = \ker \alpha$ для нек-рого морфизма $\alpha : A \to B$. Этот И. можно отождествить с совокупностью всех мономорфизмов, являющихся ядрами нек-рого морфизма (см. также *Нормальный мономорфизм*). Двойственным образом определяется коидеал объекта категории. Понятие И. для Ω-групп является частным случаем понятия И. объекта категории.

Левым идеалом категории $\mathfrak{K}$ наз. класс морфизмов $\mathfrak{J}$, содержащий вместе со всяким своим морфизмом φ все произведения $\alpha\varphi$, где $\alpha \in \mathfrak{M}$, если они определены в категории $\mathfrak{K}$. Двойственным образом определяется правый идеал категории. Двусторонний идеал — класс морфизмов, являющийся как левым, так и правым И.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [3] Ван-дер-Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [4] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [5] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [6] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [7] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970; [8] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

Л. В. Кузьмин, Т. С. Фофанова, М. Ш. Цаленко.

Т-ИДЕАЛ свободной ассоциативной алгебры — вполне характеристич. идеал этой алгебры, т. е. идеал, инвариантный относительно всех эндоморфизмов. Совокупность полиномиальных тождеств произвольной ассоциативной алгебры над полем F образует Т-И. в счетно порожденной свободной алгебре $F[X]$, $X = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$. Поэтому существует взаимно однозначное соответствие между Т-И. алгебры $F[X]$ и многообразиями ассоциативных алгебр над полем F. Если поле F имеет характеристику 0, то для любого Т-И. $T \subseteq F[X]$ существует такое натуральное число $n = n(T)$, что элементами T являются нек-рые степени элементов $M_n(F)$ и только они, где $M_n(F)$ — идеал тождеств алгебры квадратных матриц F_n порядка n над F. В этом случае Т-И. можно определить также как (односторонний) идеал, замкнутый относительно всех дифференцирований свободной алгебры. Фактор-алгебра $F[X]/T$ является PI-*алгеброй*, совокупность полиномиальных тождеств к-рой совпадает с T. Она наз. **относительно свободной алгеброй** Т-И. тождеств T (и является свободной алгеброй многообразия алгебр, определяемого тождествами из T). Алгебра $F[X]/T$ не имеет делителей нуля тогда и только тогда, когда $T=M_n(F)$ для некоторого натурального числа n. Всякий Т-И. T свободной ассоциативной алгебры является примарным идеалом.

Т-И. свободной ассоциативной алгебры с бесконечным множеством порождающих над полем нулевой характеристики образуют свободную полугруппу относительно операции умножения идеалов. В этом случае Т-И. можно определить как идеалы, инвариантные относительно всех автоморфизмов свободной алгебры.

Вопрос о том, обладает ли всякий Т-И. алгебры $F[X]$ конечным числом образующих как вполне характеристич. идеал (**проблема Шпехта**), открыт (1977). См. также *Колец многообразие*.

По аналогии с ассоциативным случаем Т-И. можно определить в неассоциативных алгебрах (лиевых, альтернативных и др.).

Лит.: [1] Procesi C., Rings with polynomial identities, N.Y., 1973; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [4] Amitsur S., «J. London. Math. Soc.», 1955, v. 30, p. 470—75; [5] Specht W., «Math. Z.», 1950, Bd 52, S. 557—89; [6] Bergman G., Lewin J., «J. London. Math. Soc.», 1975, ser. 2, v. 11, № 1, p. 21—31.

В. Н. Латышев.

ИДЕАЛЬНАЯ ТОЧКА, несобственная точка, бесконечно удаленная точка,— точка, к-рой пополняется плоскость для описания некоторых геометрич. соотношений и систем. Напр., *инверсия* является взаимно однозначным отображением евклидовой плоскости, пополненной И. т.; пополнение аффинной плоскости идеальными точками приводит к понятию *проективной плоскости*. См. также *Бесконечно удаленные элементы*. *А. Б. Иванов.*

ИДЕАЛЬНОЕ ЧИСЛО — элемент полугруппы D *дивизоров* кольца A целых чисел нек-рого поля алгебраич. чисел. Полугруппа D — коммутативная свободная полугруппа с единицей; ее свободные образующие наз. **простыми идеальными числами**. В современной терминологии И. ч. наз. **целыми дивизорами** кольца A. Они допускают естественное отождествление с *идеалами* кольца A.

И. ч. были введены в связи с отсутствием однозначности разложения на простые множители в кольцах целых алгебраич. чисел. Для каждого $a \in A$ разложение соответствующего дивизора $\varphi(a)$ в произведение простых И. ч. можно рассматривать как нек-рую замену однозначности разложения на простые множители в случае, когда такое разложение в кольце A неоднозначно.

Напр., кольцо A всех целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ состоит из всех чисел вида $a+b\sqrt{-5}$ с целыми a и b. В этом кольце число 6 допускает два различных разложения на множители:

$$6=2\cdot 3=(1-\sqrt{-5})(1+\sqrt{-5}),$$

причем числа 2, 3, $1-\sqrt{-5}$ и $1+\sqrt{-5}$ — простые попарно неассоциированные элементы кольца A; таким образом, разложение на простые множители в A неоднозначно. Однако в полугруппе D элементы $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(1+\sqrt{-5})$, $\varphi(1-\sqrt{-5})$ не будут простыми, а именно: $\varphi(2)=\mathfrak{p}_1^2$, $\varphi(3)=\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$, $\varphi(1-\sqrt{-5})=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\varphi(1+\sqrt{-5})=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3$, где $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ — простые И. ч. в D. Таким образом, два разложения числа 6 на простые множители в кольце A продолжаются до одного и того же разложения $\varphi(6)=\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ в D.

Понятие И. ч. было введено Э. Куммером (E. Kummer) в связи с исследованием арифметики круговых полей (см. [1] — [2]). Пусть $K=\mathbb{Q}(\zeta)$ — поле деления круга на p частей и $A=\mathbb{Z}(\zeta)$ — кольцо целых чисел поля K. И. ч. для кольца A определялись как произведение простых И. ч., а эти последние — как «идеальные» простые делители простых натуральных чисел. Для построения всех простых И. ч., делящих заданное простое натуральное q, использовалась *Куммера теорема*. Пользуясь тем, что A имеет степенной базис 1, ζ, $\zeta^2, \ldots, \zeta^{p-2}$ над $\mathbb{Z}$, Э. Куммер рассматривал разложение кругового многочлена $F_p(X)$ в кольце $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}[X]$. И. ч., делящими число q, объявлялись элементы, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми множителями $F_p(X)$ в $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}[X]$ (несколько другого подхода требовал случай $p=q$). Специальный метод применялся для определения показателя степени, с к-рым данное простое И. ч. входит в данное $a\in A$. Аналогичный метод он разработал для создания теории делимости в полях вида $\mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[p]{m})$, где $m\in\mathbb{Q}(\zeta)$.

Перенесение теории И. ч. на случай произвольного поля алгебраических чисел принадлежит в основном Л. Кронекеру (L. Kronecker) и Р. Дедекинду (R. Dedekind). Уже в их работах наметилось разделение теории И. ч. на теорию дивизоров (подход Л. Кронекера) и теорию идеалов. Р. Дедекинд каждому И. ч. взаимно однозначно сопоставлял и д е а л кольца A, к-рый определялся им как подмножество в A, состоящее из 0 и всех таких a, что a делится на это И. ч. При этом, если $a_1, \ldots, a_n$ — образующие идеала I, то соответствующее I И. ч. является наибольшим общим делителем И. ч. $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$.

Впоследствии понятие идеала было распространено на случай произвольного кольца A; кольца, для к-рых понятия идеала и дивизора совпадают, наз. теперь дедекиндовыми.

Лит.: [1] K u m m e r E., «J. reine und angew. Math.», 1847, Bd 35, S. 319—26, 327—67; [2] е г о ж е, «J. math. pures et appl.», 1851, t. 16, p. 377—498; [3] E d w a r d H a r o l d M., «Arch. Hist. Exact. Sci.», 1975, v. 14, № 3, p. 219—36; [4] Б у р б а к и Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [5] е г о ж е, Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963. *Л. В. Кузьмин.*

ИДЕАЛЬНЫЙ РЯД п о л у г р у п п ы S — такая последовательность подполугрупп

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_m = S, \qquad (*)$$

что A_i есть (двусторонний) идеал в A_{i+1}, $i=1, 2, \ldots, m-1$. Подполугруппа A_1 и факторполугруппы Риса A_{i+1}/A_i (см. *Полугруппа*) наз. ф а к т о р а м и ряда (*). Два И. р. наз. и з о м о р ф н ы м и, если между их факторами можно установить взаимно однозначное соответствие, при к-ром соответствующие факторы изоморфны. И. р.

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n = S$$

наз. у п л о т н е н и е м ряда (*), если каждое A_i совпадает с некоторым B_j. И. р. наз. к о м п о з и ц и о н н ы м р я д о м, если он не обладает отличными от него самого уплотнениями. Для любых двух И. р. полугруппы существуют изоморфные уплотнения; в частности, в полугруппе, обладающей композиционным рядом, все такие ряды изоморфны (аналоги теорем Шрейера и Жордана — Гёльдера о нормальных рядах групп, см. [1], [2]). И. р. наз. г л а в н ы м р я д о м, если его члены суть идеалы всей полугруппы и он не обладает отличными от него уплотнениями, состоящими из идеалов полугруппы. Если полугруппа обладает композиционным рядом, то она имеет и главный ряд; обратное неверно. В полугруппе S с главным рядом факторы его изоморфны *главным факторам* S.

Как и для нормальных рядов групп, приведенные понятия (и их свойства) естественным образом обобщаются на случай бесконечных систем вложенных подполугрупп. В частности, в о з р а с т а ю щ и й

И. р. полугруппы S — это вполне упорядоченная последовательность

$$A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \ldots \subset A_\beta = S,$$

где на предельных местах стоят объединения предыдущих членов, и A_α есть идеал в $A_{\alpha+1}$ для любого $\alpha<\beta$.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972. *Л. Н. Шеврин.*

ИДЕЛЬ — обратимый элемент кольца *аделей*. Совокупность всех И. образует по умножению группу, наз. группой иделей. Элементами группы И. поля рациональных чисел являются последовательности вида

$$a=(a_\infty,\ a_2,\ \ldots,\ a_p,\ \ldots),$$

где a_∞— ненулевое действительное число, a_p— отличное от нуля p-адическое число, $p=2, 3, 5, 7, \ldots$ и $|a_p|_p=1$ при всех p, кроме конечного числа (здесь $|x|_p$— p-адическая норма). Последовательность И.

$$a^{(n)}=(a_\infty^{(n)},\ a_2^{(n)},\ \ldots,\ a_i^{(n)},\ \ldots)$$

считается сходящейся к И. a, если она сходится к a покомпонентно и если существует такое N, что при $n>N$ $|a_p^{-1}a_p^{(n)}|_p=1$ для всех p. Группа И. с такой топологией является локально компактной топологич. группой. Аналогично строится группа И. произвольного числового поля.

Мультипликативная группа поля рациональных чисел изоморфно вкладывается в группу И. этого поля. Именно, каждому рациональному числу $r\neq 0$ сопоставляется последовательность

$$(r,\ r,\ \ldots,\ r,\ \ldots),$$

являющаяся И. Такой И. наз. главным. Подгруппа главных И. дискретна в группе всех И.

Понятия аделей и И. были введены К. Шевалле (C. Chevalley) в 1936 для целей алгебраич. теории чисел. Новый язык показал свою плодотворность при изучении арифметич. аспектов теории алгебраич. групп. Для этих целей А. Вейль (A. Weil) обобщил определения аделей и И. на случай любой линейной алгебраической группы, определенной над числовым полем.

Лит.: [1] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969. *В. Л. Попов.*

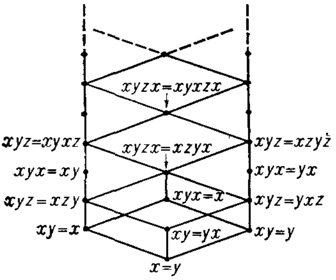
ИДЕМПОТЕНТ, идемпотентный элемент,— элемент e кольца, полугруппы или группоида, равный своему квадрату: $e^2=e$. Говорят, что И. e содержит И. f (обозначается $e\geqslant f$), если $ef=e=fe$. Для ассоциативных колец и полугрупп отношение $\geqslant$ является отношением частичного порядка в множестве E идемпотентных элементов и наз. естественным частичным порядком на множестве E. Два И. u и v кольца наз. ортогональными, если $uv=0=vu$. С каждым И. кольца (а также с каждой системой ортогональных И.) связано так наз. *пирсовское разложение* кольца. Для n-арной алгебраич. операции ω И. наз. такой элемент e, что $\underbrace{(e\ldots e)}_{n}\omega=e$.

О. А. Иванова.

ИДЕМПОТЕНТОВ ПОЛУГРУППА, идемпотентная полугруппа, — полугруппа, каждый элемент к-рой есть *идемпотент*. И. п. наз. также связкой (это согласуется с понятием *связки полугрупп*: И. п. есть связка одноэлементных полугрупп). Коммутативная И. п. наз. полуструктурой, или полурешеткой; этот термин согласуется с его употреблением в теории частично упорядоченных множеств: если коммутативную И. п. S рассмотреть относительно естественного частичного порядка, то ab будет наибольшей нижней гранью элементов $a, b\in S$. Всякая полурешетка есть подпрямое произведение двухэлементных полурешеток. Полугруппа S наз.

сингулярной, если S удовлетворяет одному из тождеств $xy=x$, $xy=y$; в первом случае S наз. левосингулярной, или полугруппой левых нулей, во втором — правосингулярной, или полугруппой правых нулей.

Полугруппа наз. прямоугольной, если она удовлетворяет тождеству $xyx=x$ (этот термин используется иногда и в более широком смысле, см. [1]).



Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: 1) S прямоугольна, 2) S есть идеально простая И. п. (см. *Простая полугруппа*), 3) S есть *вполне простая полугруппа* идемпотентов, 4) S изоморфна прямому произведению $L \times R$, где L — левосингулярная, а R — правосингулярная полугруппы. Всякая И. п. является *клиффордовой полугруппой* и разлагается в полурешетку (см. *Связка полугрупп*) прямоугольных полугрупп. Это разложение служит исходным пунктом при изучении многих свойств И. п. Любая И. п. локально конечна.

И. п. изучались с разных точек зрения, в том числе с точки зрения теории многообразий. Решетка всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{B}$ всех И. п. полностью описана в [4] — [6]; она счетна и дистрибутивна, каждое подмногообразие ее может быть задано внутри $\mathfrak{B}$ одним тождеством. Диаграмму этой решетки см. на рис.; там же указаны тождества, задающие в $\mathfrak{B}$ многообразия из нескольких нижних «этажей».

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] McLean D., «Amer. Math. Monthly», 1954, v. 61, № 2, p. 110—13; [3] Kimura N., «Pacif. J. Math.», 1958, v. 8, p. 257—75; [4] Бирюков А. П., «Алгебра и логика», 1970, т. 9, № 3, с. 255—73; [5] Gerhard J., «J. Algebra», 1970, v. 15, № 2, p. 195—224; [6] Fennemore Ch., «Math. Nachr.», 1971, Bd 48, № 1—6, S. 237—62.

Л. Н. Шеврин.

ИЕНСЕНА НЕРАВЕНСТВО в простейшей дискретной форме:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n), \qquad (1)$$

где $f(x)$ — выпуклая (см. *Выпуклая функция*) на нек-ром множестве C функция, $x_i \in C$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, n$,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда либо $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, либо $f(x)$ — линейная функция. Интегральное И. н. для выпуклой функции $f(x)$:

$$f\left(\int_D \lambda(t)\, x(t)\, dt\right) \leqslant \int_D \lambda(t)\, f(x(t))\, dt, \qquad (2)$$

где $x(D) \subset C$, $\lambda(t) \geqslant 0$ при $t \in D$,

$$\int_D \lambda(t)\, dt = 1.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда либо $x(t) = \mathrm{const}$ на D, либо $f(x)$ линейна на $x(D)$. Если $f(x)$ — вогнутая функция, знаки неравенств (1) и (2) меняются на противоположные. Неравенство (1) установлено О. Гёльдером [1], неравенство (2) — И. Иенсеном [2].

При соответствующем подборе выпуклой функции $f(x)$ и весов λ_i или весовой функции $\lambda(t)$ неравенства (1) и (2) переходят в конкретные неравенства, среди которых большинство классич. неравенств. Например, если в (1) положить $f(x) = -\ln x$, $x > 0$, то получается неравенство между взвешенными средним арифметическим и средним геометрическим:

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}\leqslant \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_n x_n; \qquad (3)$$

при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=1/n$ неравенство (3) принимает вид

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leqslant (x_1+x_2+\ldots+x_n)/n.$$

Лит.: [1] Hölder O., «Gött. Nachr.», 1889, S. 38—47; [2] Jensen J. L., «Acta math.», 1906, v. 30, p. 175—93; [3] Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948, с. 90—91, 182—83. *Е. К. Годунова.*

ИЕНСЕНА ФОРМУЛА — соотношение, связывающее значения *мероморфной функции* внутри круга с ее граничными значениями на окружности и с ее нулями и полюсами. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в круге $|z|\leqslant R$; a_μ, $|a_\mu|\leqslant R$, и b_ν, $|b_\nu|\leqslant R$,— соответственно все нули и полюсы $f(z)$, причем каждый нуль или полюс считается столько раз, какова его кратность или порядок. Если $f(0)\neq 0$, то справедлива И. ф.:

$$\ln|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi+$$

$$+\sum_{|b_\nu|<R}\ln\frac{R}{|b_\nu|}-\sum_{|a_\mu|<R}\ln\frac{R}{|a_\mu|}, \qquad (1)$$

в к-рой суммы распространены на все нули и полюсы $f(z)$ внутри круга $|z|<R$; формула (1) получена И. Иенсеном [1]. Небольшое видоизменение позволяет приспособить формулу (1) и для случая $f(0)=0$.

Справедлива и более общая формула, названная Р. Неванлинной формулой Пуассона — Иенсена и дающая значения $\ln|f(z)|$ в любой точке $z=re^{i\theta}$, отличной от нулей и полюсов:

$$\ln|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|\,P(z,\ Re^{i\varphi})\,d\varphi+$$

$$+\sum_{|b_\nu|<R}\ln\left|\frac{R^2-\bar b_\nu z}{R(z-b_\nu)}\right|-\sum_{|a_\mu|<R}\ln\left|\frac{R^2-\bar a_\mu z}{R(z-a_\mu)}\right|, \qquad (2)$$

$$P(z,\ Re^{i\varphi})=\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)},\quad r<R.$$

Формулу (2) можно рассматривать как обобщение *Пуассона интеграла* для круга. Точно так же, обобщая *Шварца интеграл* для круга, получают формулу Шварца — Иенсена:

$$\ln f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|\,\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi+$$

$$+\sum_{|b_\nu|<R}\ln\frac{R^2-\bar b_\nu z}{R(z-b_\nu)}-\sum_{|a_\mu|<R}\ln\frac{R^2-\bar a_\mu z}{R(z-a_\mu)}, \qquad (3)$$

$$r<R.$$

Возможно также построение формул типа (1) — (3) для полуплоскости и других областей. Формулы (1) — (3) играют важную роль в *распределения значений теории.*

Широкое обобщение формул (1) — (3) получено М. М. Джрбашяном в его теории классов мероморфных функций (см. [3]). Ему удалось получить целое семейство таких формул, зависящее от нек-рого непрерывного параметра α, $-1<\alpha<+\infty$, связанного с интегро-дифференциальным оператором D^α, причем, напр., формула (3) оказывается частным случаем при $\alpha=0$.

Формулы (1) и (2) обобщаются для субгармонич. функций (см. [4]) $u(x)$ в шаре $|x|\leqslant R$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, следующим образом:

$$u(x)=\frac{1}{\sigma(R)}\int_{|y|=R}u(y)\,\frac{R^{n-2}(R^2-|x|^2)}{|x-y|^n}\,d\sigma(y)-$$

$$-\int_{|y|<R}G(x,\ y)\,d\mu(y), \qquad (4)$$

где $\sigma(R)$ — площадь сферы $|y|=R$ в $\mathbb{R}^n$, $G(x, y)$ — *Грина функция* для шара $|y|<R$ с полюсом в точке x, μ — положительная мера, ассоциированная с субгармонич. функцией $u(x)$. Первое слагаемое в формуле (4) — наименьшая *гармоническая мажоранта* функции $u(x)$ в шаре $|x|\leqslant R$, выраженная в виде интеграла Пуассона от граничных значений; второе слагаемое — потенциал Грина, в частных случаях вырождающийся в логарифмы модуля *Бляшке произведений*, фигурирующие в формуле (2). Формула (2) получается из (4) с учетом того, что $\ln|f(z)|$ для мероморфной функции $f(z)$ есть разность двух субгармонических функций; для функций последнего типа формула (4) также применима.

Пусть теперь $f(z)$ — голоморфная функция многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 1$, в замкнутом поликруге

$$\overline{U}^n=\{z;\ |z_j|\leqslant R_j,\quad j=1,\ \ldots,\ n\}.$$

Большое значение имеет также легко выводимое из свойств *плюрисубгармонических функций* неравенство Иенсена, в случае $n=1$ непосредственно вытекающее из формулы (2):

$$\ln|f(z)|\leqslant\int \ln\left|f\left(R_1e^{i\varphi_1}, \ldots, R_ne^{i\varphi_n}\right)\right| P_n\left(z, Re^{i\varphi}\right) dm_n(\varphi),$$

где

$$P_n\left(z,\ Re^{i\varphi}\right)=P\left(z_1,\ R_1e^{i\varphi_1}\right)\ldots P\left(z_n,\ R_ne^{i\varphi_n}\right)$$

— ядро Пуассона для поликруга U^n, $m_n(\varphi)$ — нормированная мера Хаара на остове

$$T^n=\{z;\ |z_j|=R_j,\ j=1,\ \ldots,\ n\},\ m_n(T^n)=1$$

(см. [5], [6]). Неравенство (5) и нек-рые многомерные аналоги формулы (2) находят применения в современной многомерной теории распределения значений (см. [7]).

Лит.: [1] Jensen J. L., «Acta math.», 1899, v. 22, p. 359—64; [2] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [3] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966; [4] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.— Л., 1937; [5] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [6] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [7] Гриффитс Ф., Кинг Дж., Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий, пер. с англ., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

ИЕРАРХИЯ — классификация тех или иных математич. объектов в соответствии с их сложностью.

Первые И. были построены в *дескриптивной теории множеств* (см. [3]). В этих И. переход к более сложному классу множеств осуществляется путем применения теоретико-множественных и топологич. операций к элементам более простых классов. Важнейшие И. дескриптивной теории множеств определяются следующим образом. Если T — некоторое семейство подмножеств множества X, то через CT обозначается семейство всех дополнений в X к элементам из T, через T_σ — семейство всех счетных объединений элементов из T, через T_δ — семейство всех счетных пересечений элементов из T. Для фиксированного *топологического пространства* X через F обозначается семейство всех замкнутых подмножеств пространства X, через G — семейство всех открытых подмножеств пространства X. По *трансфинитной индукции* определяется последовательность F, F_σ, $F_{\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$, ..., классы, стоящие в ней на местах, отвечающих предельным ординалам, получаются в результате применения операции δ к объединению всех предшествующих классов. Аналогично, с заменой всюду операций σ и δ на операции δ и σ, соответственно, определяется последовательность классов G, G_δ, $G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$, ... При этом $G=CF$, $G_\delta=CF_\sigma$ и т. д. Построенные последовательности образуют б о р е л е в с к у ю И. подмножеств пространства X. Объединение всех классов этой И. наз. классом борелевских подмножеств пространства X и обозначается B. Если T — некоторое семейство подмножеств топологич. пространства X, то через PT обозначается семейство всех образов элементов семейства T при непрерывных отображениях X в X. Классы B, PB, CPB, $PCPB$ и т. д. образуют п р о е к т и в н у ю И. подмножеств пространства X. При этом *аналитические множества* (A-множества) составляют класс PB, дополнения к ним (CA-множества) — класс CPB и т. д.

В математич. логике рассматриваются И. множеств и отношений, задаваемых формулами логич. языков (см. [1], [2], [5]). Важнейшими примерами таких И. являются И., основанные на представлении отношения $P(x_1, \ldots, x_k)$ в виде

$$P(x_1, \ldots, x_k) \Leftrightarrow Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n R(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n). \quad (*)$$

Здесь $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_n$ — переменные, одни из к-рых пробегают множество натуральных чисел (числовые переменные), другие — множество всех подмножеств натуральных чисел (множественные переменные); $Q_1 y_1, \ldots, Q_n y_n$ — последовательность кванторов, в к-рой кванторы всеобщности и существования чередуются, т. е. из любых двух соседних кванторов один является квантором всеобщности, а другой — квантором существования; $R(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ — произвольное *рекурсивное отношение* с числовыми и множественными переменными. Класс Σ_n^0 (соответственно Π_n^0) состоит из всех отношений $P(x_1, \ldots, x_k)$, представимых в виде (*), где переменные $y_1, \ldots, y_n$ — числовые и символ Q_1 — это $\exists$ (соответственно $\forall$). Классы Σ_n^0 и Π_n^0, $n=0, 1, \ldots$ образуют а р и ф м е т и ч е с к у ю и е р а р х и ю К л и н и — М о с т о в с к о г о (см. *Клини — Мостовского классификация*). Объединение всех этих классов наз. классом арифметич. отношений. Классы Σ_{n-1}^1 (соответственно Π_{n-1}^1), $n>1$, состоят из отношений $P(x_1, \ldots, x_k)$, представимых в виде (*), где все переменные $y_1, \ldots, y_{n-1}$ — множественные, переменная y_n — числовая и символ Q_1 — это $\exists$ (соответственно $\forall$). Через Σ_0^1 и Π_0^1 обозначается класс арифметич. отношений. Классы Σ_n^1, Π_n^1, $n=0$, $1, \ldots$, образуют а н а л и т и ч е с к у ю и е р а р х и ю К л и н и. Продолжением иерархии Клини — Мостовского можно считать гиперарифметич. И. множеств из класса $\Delta_1^1 = \Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$(см. [2], [5]).

Различные И. могут рассматриваться единым образом с точки зрения определимости в логич. языках. В частности, начальные классы борелевской И. можно задать аналогично классам иерархии Клини — Мостовского, аналитич. И. аналогична проективной. При этом ряд утверждений, касающихся строения классов И., получает общую формулировку, а часто, и сходное доказательство (см. [1]). Примером такого утверждения является принцип редукции, состоящий в следующем. Пусть U — класс некоторой И., X и Y — его элементы, тогда существуют такие X' и Y' из U, что $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$, $X \cup Y = X' \cup Y'$ и $X' \cap Y' = \phi$. Этот принцип выполняется, в частности, когда U совпадает с Π_1^1, Σ_2^1 или CPB, $PCPB$. В *моделей теории* также строятся И. классов моделей по виду формул, задающих эти классы; имеются аналогии между этими И. и упомянутыми выше (см. [1]).

Построение И. *рекурсивных функций* осуществляется в теории алгоритмов. Один из общих методов построения таких И. основан на задании рекурсивных функций с помощью нек-рых исходных функций и операций (подстановки, примитивной рекурсии и др.). Переход к более сложному классу некоторой И. может осуществляться, напр., в результате добавления к предыдущему классу элемента нек-рой фиксированной последовательности рекурсивных функций и замыкания полученного множества относительно операций подстановки и ограниченной рекурсии. Для получения более сложного класса, наряду с замыканием относительно каких-либо операций (как в предыдущем примере), используется однократное применение, напр., операции примитивной рекурсии к элементам более простого класса (см. [4]). Другой метод построения И. рекурсивных функций основан на их классификации по сложности вычислений (см. [4]). Рассмотрение характеристич. функций множеств позволяет строить И. разрешимых множеств, исходя из И. рекурсивных функций.

Лит.: [1] Аддисон Дж., Математическая логика и ее применения, пер. с англ., М., 1965, с. 23—36; [2] Hinman P., Recursion-theoretic hierarhies, В., 1976; [3] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [4] Проблемы математической логики, сб. переводов, М., 1970; [5] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

А. Л. Семенов.

ИЗБЫТОК ТРЕУГОЛЬНИКА, сферический избыток, эксцесс,— разность между суммой углов сферич. треугольника и двумя прямыми углами. И. т. пропорционален площади сферич. треугольника.

А. Б. Иванов.

ИЗБЫТОЧНОСТЬ — мера возможного увеличения скорости передачи информации за счет использования статистич. зависимостей между компонентами сообщения, вырабатываемого источником сообщений. И. стационарного источника сообщений с дискретным временем, вырабатывающего сообщение $\xi=(\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots)$, образованное стационарным случайным процессом

$$\xi_k,\ k=\ldots -1, 0, 1, \ldots ,$$

где ξ_k принимает значения из нек-рого конечного множества X с числом элементов N, определяется разностью

$$1-\frac{\overline{H}(U)}{\overline{H}_{\max}},$$

здесь $\overline{H}(U)$ — скорость создания сообщений данным источником U (см. *Сообщений скорость создания*), а $H_{\max}=\log N$ — максимально возможная скорость создания сообщений источником с дискретным временем, компоненты к-рого принимают N различных значений.

Лит. см. [4], [5] при ст. *Канал связи.*

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ИЗВИВАНИЕ КРИВОЙ, собственный поворот кривой,— часть вариации поворота кривой на нерегулярной поверхности, не вызванная сосредоточением интегральной кривизны поверхности на множестве точек кривой. Для простой дуги L И. к. равно $(\sigma_r+\sigma_l-\Omega)/2$, где σ_r, σ_l— вариации правого и левого поворотов L, а Ω — вариация кривизны L как множества. Кривые с нулевым извиванием наз. *квазигеодезическими линиями.*

Лит.: [1] Александров А. Д., Стрельцов В. В., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 76, с. 67—80.

Ю. Д. Бураго.

ИЗГИБАНИЕ — изометрическая деформация подмногообразия M в римановом пространстве V, т. е. деформация, при к-рой длины кривых на M не изменяются. Задача об И. поверхностей ведет свое начало от К. Гаусса (C. Gauss) и принадлежит к числу основных проблем дифференциальной геометрии.

Помимо общего случая, было достаточно широко исследовано И. поверхности с сохранением нек-рой внешнегеометрич. характеристики; при этом обычно оказывалось, что лишь поверхности определенного класса допускают такого рода И. Сюда относятся, напр.: 1) поверхности, изгибающиеся с сохранением средней кривизны (поверхности постоянной средней кривизны и, в частности, минимальные поверхности, нек-рые поверхности, наложимые на поверхность вращения); 2) поверхности, изгибающиеся с сохранением одного семейства асимптотич. линий (этот класс составляют *линейчатые поверхности*); 3) поверхности, допускающие *изгибание на главном основании*, и т. д.

По своему характеру задачу об И. поверхности в евклидовом пространстве условно можно разделить на изгибание в малом, т. е. И. какой-нибудь достаточно малой окрестности U_P нек-рой точки P поверхности, и изгибание в целом, т. е. И. произвольного заранее заданного куска поверхности или полной поверхности. Как правило, любая поверхность допускает И. в малом; однако если P является точкой уплощения, то при нек-рых условиях и при сильных предположениях регулярности допускаемых деформаций U_P оказывается неизгибаемой даже в малом.

Первыми утверждениями, касающимися И. в целом, были теорема Э. Либмана (E. Liebmann) о неизгибаемости сферы, а также результат Д. Гильберта (D. Hilbert): максимум изгиба куска сферы достигается на границе. Дальнейшими исследованиями установлено, что любая замкнутая выпуклая поверхность неизгибаема в классе выпуклых поверхностей без всяких дополнительных условий регулярности. Найдены также теоремы типа принципа максимума, относящиеся к И. произвольного куска выпуклой поверхности класса C^3, из к-рых следует неизгибаемость замкнутой выпуклой поверхности. Однако доказано, что, напр., сфера в классе C^1 допускает изгибания того же класса.

Относительно И. замкнутых поверхностей положительного рода установлены лишь частные результаты; так, напр., поверхности типа T (тора), т. е. поверхности, состоящие из конечного числа областей с кусочно гладкими границами, в каждой из к-рых гауссова кривизна K не меняет знака и обращается в нуль только на границе, причем полная кривизна всех областей с $K>0$ равна 4π,— неизгибаемы при нек-рых дополнительных условиях (аналитичность, отсутствие двух замкнутых асимптотических), в частности, обыкновенный тор неизгибаем.

Полные незамкнутые поверхности, как правило, изгибаемы. Полная выпуклая поверхность S неизгибаема, если $\int\int K dS=2\pi$, и допускает И., если $\int\int K dS<2\pi$; произвол допускаемых ею И. определяется И. ее предельного конуса. Нек-рые классы полных поверхностей отрицательной кривизны также допускают И., таковы, напр., минимальные поверхности, в частности катеноид изгибания в геликоид.

Исследования И. незамкнутых поверхностей с границей также относятся главным образом к поверхностям знакопостоянной гауссовой кривизны, причем детально рассмотрен случай, когда И. определяется единственным образом различного рода граничными условиями. Так, напр., при любом И. выпуклой поверхности F хотя бы одна точка ее края ∂F изменяет свое расстояние от нек-рой фиксированной точки O, из к-рой F видна изнутри и к-рая расположена вне выпуклой оболочки (так что F неизгибаема, если расстояние любой точки края ∂F от O неизменно); аналогично, при любом И. выпуклой поверхности F, однозначно проектирующейся на плоскость π и ограниченной плоским контуром, хотя бы одна точка края ∂F изменяет свое расстояние от π (так что F не допускает изгибаний скольжения— таких И., при к-рых точки края движутся параллельно нек-рой плоскости π); при И. поверхности этого типа хотя бы в одной точке кривизна $\varkappa$ края ∂F меняется, причем число перемен знака разности кривизн краев поверхности F и ее изгибания F' не менее четырех (так что если кривизна края не изменяется, то F неизгибаема). Что касается поверхностей отрицательной кривизны, то достаточно широкий класс их И. получается при решении задачи Коши для уравнений Гаусса и Петерсона — Кодацци, так, напр., И. куска поверхности с $K<0$, ограниченного отрезками a_0, a_1 геодезических и двумя отрезками b_0, b_1 их ортогональных траекторий однозначно определяется И. края b_0. Относительно И. поверхностей знакопеременной кривизны ряд результатов получен лишь для поверхностей вращения.

Для изучения И. поверхностей применяются методы теории уравнений с частным производными, напр., эллиптич. типа, к-рыми описываются И. поверхностей положительной гауссовой кривизны, а также И. поверхностей с сохранением средней кривизны; кроме того, для выпуклых поверхностей особую роль играют методы прямых предельных переходов от многогранников (см. *Склеивания метод*) в комбинации с теоремами о регулярности поверхности, имеющей регулярную метрику. При достаточной близости выпуклой поверхности $F=F_0$ к ее изгибанию F_1 исследование И. сводится с помощью *Кон-Фоссена преобразования* к аналогичным задачам теории *бесконечно малых изгибаний* так наз. серединной поверхности

$$F_{1/2}=(F_0+F_1)/2.$$

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей, ч. 2, М.— Л., 1948; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия, М., 1963; [3] Ефимов Н. В., Качественные вопросы деформаций поверхностей «в малом», «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1949 т. 30; [4] его же, «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 2, с. 47—158; [5] Погорелов А. В., Изгибание выпуклых поверхностей, М.— Л., 1951; [6] Бляшке В., Дифференциальная геометрия, пер. с нем., т. 1, М.— Л., 1935; [7] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959.

М. И. Войцеховский.

ИЗГИБАНИЕ НА ГЛАВНОМ ОСНОВАНИИ — изгибание F_t поверхности $F=F_0$, при к-ром направления экстремального изгиба остаются неизменными. Сеть, образованная линиями, имеющими направление экстремального изгиба, является сопряженной на каждой из поверхностей F_t и наз. главным основанием изгибания. Напр., геликоид имеет бесконечное число главных оснований; вращения поверхности и каналовые поверхности допускают И. на г. о., одно из семейств к-рого состоит из геодезич. линий (см. также *Фосса поверхности*). Задача исследования И. на г. о. была поставлена К. М. Петерсоном [1] в 1866; он же установил, что если нек-рая поверхность F изометрично преобразована в две другие поверхности F' и F'' так, что направления экстремального изгиба (и, следовательно, *основание изгибания*) F в F' совпадают с направлениями экстремального изгиба F в F'', то существует изгибание F_t поверхности F, включающее F' и F'', с теми же направлениями экстремального изгиба; другими словами, если нек-рая *сопряженная сеть* на F служит основанием двух различных ее изгибаний F' и F'', то она является главным основанием изгибания.

Если известны поверхности F, F', F'', то все остальные поверхности F_t, получаемые при изгибании F на главном основании, определяются теоремой: пусть $\varkappa$ — нормальная кривизна F в направлении одного из двух семейств главного основания σ в произвольной точке $M\in F$, а $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa_t$ — нормальные кривизны поверхностей F', F'' и F_t в соответствующих точках и направлениях, тогда двойное отношение $t=(\varkappa^2, \varkappa'^2, \varkappa''^2, \varkappa_t^2)$ сохраняет постоянную величину для всех положений M на F.

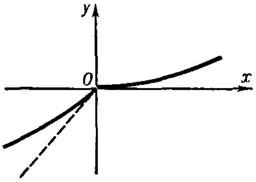
Поверхность, допускающая И. на г. о., может быть охарактеризована только *сферическим изображением* главного основания: уравнения, описывающие И. на г. о., преобразуются так, что содержат только коэффициенты линейного элемента сферич. изображения поверхности и получают вид: $\frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u} = \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial v} = 2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}$ (уравнения Коссера), где Γ^1_{12}, Γ^2_{12} — символы Кристоффеля третьей квадратичной формы поверхности, а дифференцирование ведется вдоль координатных линий u, v, составляющих главное основание изгибания. Сферич. изображение главного основания изгибания совпадает со сферич. изображением асимптотич. линий *Бианки поверхности*, к-рая является *вращений индикатрисой* (или присоединенной поверхностью) бесконечно малого изгибания F, соответствующего И. на г. о., а также с изображением в смысле Клиффорда асимптотич. линий нек-рой поверхности в эллиптич. пространстве (являющейся *поворотов диаграммой* И. на г. о. поверхности F).

Не все поверхности обладают главным основанием, т. е. поверхности, допускающие И. на г. о., образуют специальный класс поверхностей [4]. Обобщением И. на г. о. является изгибание на кинематическом основании, к-рое определяется тем, что коэффициенты второй квадратичной формы b_{ij} удовлетворяют уравнению $b_{ij}A^{ij}=c$, где A^{ij} — некоторый невырожденный тензор, c — функция, зависящая от метрики g_{ij} поверхности F и ее производных.

Лит.: [1] Петерсон К. М., «Матем. сб.», 1866, т. 1, с. 391—438; [2] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей, ч. 2, М.—Л., 1948; [3] Фиников С. П., Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М.—Л., 1937; [4] Лузин Н. Н., «Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук», 1939, № 2, с. 81—106; № 7, с. 115—32; № 10, с. 65—84.

М. И. Войцеховский.

ИЗЛОМА ТОЧКА, угловая точка,— особая точка плоской кривой, обладающая тем свойством, что в ней прекращаются две ветви кривой, причем каждая из них имеет в этой точке (одностороннюю) касательную, отличную от другой. Напр., у кривой $y=x/(1+e^{1/x})$ И. т. — начало координат (см. рис.). В И. т. правая и левая производные не совпадают.



А. Б. Иванов.

ИЗЛУЧЕНИЯ УСЛОВИЯ — условия на бесконечности единственности решения внешних краевых задач для уравнений эллиптич. типа, являющихся математич. моделью установившихся колебаний различной физич. природы. Физич. смысл И. у. заключается в выделении решения краевой задачи, описывающей расходящиеся волны, источники (действительные или фиктивные) к-рых находятся в ограниченной области (см. [1]). Решения уравнения установившихся колебаний, описывающие волны, источники к-рых находятся на бесконечности (напр., плоская волна), не удовлетворяют И. у.

Впервые аналитич. форма И. у. для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = -f \qquad (1)$$

была предложена А. Зоммерфельдом [2]. Если (1) соответствует задаче об установившихся колебаниях при временной зависимости $e^{-i\omega t}$, то соответствующие И. у., получившие название условий излучения Зоммерфельда, в случае пространства трех измерений имеют вид

$$u = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r \longrightarrow \infty, \qquad (2)$$

в случае двух измерений условия излучения Зоммерфельда имеют вид

$$u = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \text{ при } r \longrightarrow \infty. \qquad (3)$$

Первое условие в (2) и (3), как показано в [3], является следствием второго и требования удовлетворения уравнению (1).

Условия (2), (3) могут быть ослаблены. В частности, условия (2) в ряде случаев могут быть заменены нелокальным интегральным условием

$$\lim_{R \to \infty} \int_{r=R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 d\sigma = 0. \tag{4}$$

Условия (2) — (4) в тех случаях, когда граница внешней области имеет бесконечно удаленные точки, не являются универсальными в том смысле, что они не всегда определяют класс функций, в к-ром соответствующая краевая задача однозначно разрешима. Напр., в слое между двумя параллельными плоскостями, на к-рых ставятся однородные граничные условия Дирихле или Неймана, не существует классич. решения уравнения (1) с локальной правой частью, удовлетворяющего условиям излучения Зоммерфельда (2) или (4) (см. [4]). Для разрешимости задачи эти условия должны быть заменены на так наз. парциальные И. у. (см. [4]).

В отличие от условий (2) — (4), парциальные И. у. можно формулировать уже не в виде асимптотич. выражений, а в виде точных соотношений, к-рым должны удовлетворять компоненты разложения решения по нек-рой системе базисных функций. Соответствующая система базисных функций вводится различным образом в зависимости от специфики исходной краевой задачи. Так, в случае краевой задачи для уравнения (1) с локальной правой частью в бесконечном цилиндре с осью z при однородных граничных условиях Дирихле или Неймана на боковой поверхности цилиндра парциальные И. у. могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \int_S \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z \leqslant z_1} \nu_n \, d\sigma &= i\gamma_n \int_S u\Big|_{z \leqslant z_1} \nu_n \, d\sigma, \\ \int_S \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z \geqslant z_2} \nu_n \, d\sigma &= -i\gamma_n \int_S u\Big|_{z \geqslant z_2} \nu_n \, d\sigma, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где S — поперечное сечение цилиндра, ν_n — нормированные собственные функции краевой задачи для уравнения Лапласа в S:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_2 \nu_n + \lambda_n \nu_n = 0, \\ &\nu_n\Big|_{\partial S} = 0 \quad \text{в случае условий Дирихле}, \\ &\frac{\partial \nu_n}{\partial n}\Big|_{\partial S} = 0 \quad \text{в случае условий Неймана}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$\gamma_n^2 = k^2 - \lambda_n$, $\operatorname{Im} \gamma_n \geqslant 0$ и носитель правой части лежит в области, ограниченной сечениями z_1, z_2.

Поскольку аналитич. вид И. у. (2) — (5) различен, то естественно возникает проблема формулировки общего принципа излучения, не зависящего от вида той неограниченной области, в к-рой ищется решение задачи об установившихся колебаниях. Возможны два различных подхода к решению данной проблемы. В [5] сформулирован так наз. принцип предельной амплитуды, согласно к-рому решение уравнения установившихся колебаний однозначно определяется требованием, чтобы это решение являлось пределом при $t \to \infty$ амплитуды решения задачи Коши с нулевыми начальными условиями для волнового уравнения с периодической правой частью, и дано обоснование принципа предельной амплитуды для задачи об установившихся колебаниях во всем неограниченном пространстве. Обобщение принципа предельной амплитуды на внешние задачи для достаточно общего класса дифференциальных операторов при нек-рых дополнительных условиях на внутреннюю границу неограниченной области см., напр., в [6].

Другой подход при формулировке общего принципа излучения, носящий название принципа предельного поглощения, заключается в том, что решение внешней краевой задачи об установившихся колебаниях в среде без поглощения ищется как предел ограниченного решения соответствующей краевой задачи в среде, обладающей поглощением, при стремлении последнего к нулю. Впервые этот метод был использован при решении конкретной задачи дифракции электромагнитных волн на бесконечно длинной проволоке (см. [7]). Имеются обобщения принципа предельного поглощения, как условия единственности решения внешних краевых задач для общих эллиптич. операторов и для достаточно широкого класса внутренних границ неограниченной области (см., напр., [8]).

Принципы предельной амплитуды и предельного поглощения широко используются при исследовании общих свойств решений внешних краевых задач, однако, поскольку они так же, как и условия излучения Зоммерфельда (2) — (4), имеют асимптотич. характер, их использование при численном решении внешних краевых задач оказывается в ряде случаев недостаточно эффективным. В этих случаях обычно применяются парциальные И. у., к-рые в сочетании с проекционными методами дали возможность провести полное численное исследование большого числа практически важных задач (см., напр., [9]).

Лит.: [1] Смирнов В. И., *Курс высшей математики*, т. 4, ч. 1, 6 изд., 1974; [2] Sommerfeld A., «Jahresber. Dtsch. Math.—Ver.», 1912, Bd 21, S. 309—53; [3] Векуа И. Н., «Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР», 1943, т. 12, с. 105—74; [4] Свешников А. Г., «Докл. АН СССР», 1950, т. 73, № 5, с. 917—920; [5] Тихонов А. Н., Самарский А. А., «Ж. эксперимент. и теоретич. физики», 1948, т. 18, № 2, с. 243—48; [6] Лакс П. Д., Филлипс Р. С., Теория рассеяния, пер. с англ., М., 1971; [7] Игнатовский В. С., «Ann. phys.», 1905, Bd 18, № 13, S. 495—522; № 15, S. 1078; [8] Эйдус Д. М., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 3, с. 91—156; [9] Свешников А. Г., Проблемы математической физики и примыкающие к ним вопросы вычислительной математики и дифференциальных уравнений, М., 1977.

А. Г. Свешников.

ИЗМЕЛЬЧЕНИЕ, измельчающееся семейство множеств,— множество F в топологич. пространстве X такое, что для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности O_x найдется $\gamma \in F$, обладающее свойством: объединение всех элементов семейства γ, содержащих x и наз. звездой $\mathrm{St}_\gamma(x)$ точки x относительно семейства γ, содержится в O_x.

Важны И. открытых покрытий. Они играют существенную роль в теории размерности, в теории бикомпактных расширений, теории равномерных пространств, теории непрерывных отображений, метризационной проблематике. Измельчаемость множества открытых покрытий означает, говоря неформальным языком, что это множество покрытий своими элементами сколь угодно точно аппроксимирует данное пространство вблизи каждой точки. Часто требование измельчаемости соединяется с ограничениями, обеспечивающими определенные соотношения между покрытиями семейства — типа вписанности, звездной вписанности или направленности. Так, на этом пути получается определение равномерной структуры, совместимой с данной топологией. В связи с теорией паракомпактных пространств рассматриваются И. локально конечных покрытий, а в теории бикомпактных пространств — И. конечных открытых покрытий. В теории размерности особое значение имеют направленные отношением вписанности И. открытых покрытий данной кратности. И. замкнутых покрытий, на к-рые не наложено заранее ограничений типа локальной конечности, не представляют интереса, напр. покрытие любого T_1-пространства всеми его одноточечными подмножествами образует И., к-рое не несет никакой информации о топологии пространства.

Важную роль играют счетные И. открытых покрытий, записываемые часто при произвольной нумерации их элементов натуральными числами в виде измельчающихся последовательностей. Такие И. выдвинулись на первый план в проблеме метризации пространств, наличие их является необходимым признаком метризуемости. Этот признак не достаточен в классе всех вполне регулярных пространств, но добавление паракомпактности (также являющейся следствием метризуемости) уже делает его таковым. Точнее, T_1-пространство метризуемо в том и только том случае, если оно коллективно нормально и обладает счетным И. В частности, бикомпакт со счетным И. метризуем. Существует ли без дополнительных аксиоматич. предположений неметризуемое нормальное пространство со счетным И., неизвестно (1978), однако известно, что существование такого пространства совместимо с аксиоматикой Цермело — Френкеля, хотя и «наивного» примера до сих пор не построено.

Класс пространств со счетным И. сам по себе обладает хорошими свойствами. Он замкнут относительно операций перехода к произвольному подпространству и счетного перемножения, устойчив относительно совершенных отображений в сторону образа. Однако целый ряд закономерностей, действующих в классе метризуемых пространств, для пространств со счетным И. нарушается. Так, сепарабельное пространство со счетным И. уже не обязано иметь счетной базы. Пространство со счетными И. паракомпактно в том и только в том случае, если оно метризуемо. Не будучи, вообще говоря, метризуемыми, пространства со счетными И. допускают обобщенную метризацию посредством симметрик, удовлетворяющих условию Коши. Имеется также удобная характеристика пространств со счетным И., как образов метрич. пространств при непрерывных открытых отображениях, подчиненных требованию: прообраз каждой точки лежит на положительном расстоянии от дополнения к прообразу любой ее окрестности.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974. *А. В. Архангельский.*

ИЗМЕРИМАЯ ФУНКЦИЯ — 1) В первоначальном понимании И. ф.— функция $f(x)$ действительного переменного, обладающая тем свойством, что для любого a множество E_a точек x, для к-рых $f(x)<a$ есть *измеримое множество* (по Лебегу). И. ф. на отрезке $[x_1, x_2]$ может быть сделана непрерывной на $[x_1, x_2]$ путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры; это — так наз. C-свойство И. ф. (Н. Н. Лузин, 1913).

2) И. ф. на пространстве X определяется относительно выбранной системы измеримых множеств A в X. Если A есть σ-кольцо, то действительная функция f, заданная на пространстве X, наз. измеримой функцией, если

$$R_f \cap E_a \in A$$

для любого действительного a, где

$$E_a = \{x:\ x \in X,\ f(x) < a\},$$
$$R_f = \{x:\ x \in X,\ f(x) \neq 0\}.$$

Это определение равносильно следующему: действительная функция f измерима, если

$$R_f \cap \{x:\ x \in X,\ f(x) \in B\} \in A$$

для любого борелевского B. В случае, когда A есть σ-алгебра, функция f является измеримой, если измеримы множества E_a (или $\{x : x \in X,\ f(x) \in B\}$). Класс И. ф. замкнут относительно арифметических и структурных операций, т. е., если f_n, $n=1, 2, \ldots$ измеримы, то f_1+f_2, $f_1 f_2$, $\max(f_1, f_2)$, $\min(f_1, f_2)$, af, где a действительно, измеримы; $\overline{\lim}\, f_n$, $\underline{\lim}\, f_n$ тоже измеримы. Комплексная функция измерима, если измеримы ее действительная и мнимая части. Обобщением понятия И. ф. является понятие *измеримого отображения* одного *измеримого пространства* в другое.

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 1, М., 1962; [3] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976. *В. В. Сазонов.*

ИЗМЕРИМОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество *измеримого пространства* (X, A), принадлежащее A-кольцу или σ-кольцу его подмножеств. Понятие возникло и развивалось в процессе решения и обобщения проблемы измерения площадей (длин, объемов) различных множеств, т. е. проблемы продолжения площади (длины, объема) как аддитивной функции многоугольников (отрезков, многогранников) на более широкую систему множеств. И. м. определялось как множество той системы, на к-рую осуществлено продолжение; последнее называлось мерой. Так были определены *Жордана мера*, *Бореля мера* и *Лебега мера* с множествами, измеримыми соответственно по Жордану, Борелю и Лебегу. Решение задачи продолжения произвольной фиксированной меры в R^n привело к *Радона мере* (мере Лебега — Стилтьеса) и множествам, измеримым по данной мере Радона (Лебега—Стилтьеса). И. м., связанные с мерой, определенной в абстрактном множестве,— это множества, на к-рых определена рассматриваемая мера.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976. *А. П. Терехин.*

ИЗМЕРИМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение f измеримого пространства $(X_1, \mathcal{A}_1)$ в измеримое пространство $(X_2, \mathcal{A}_2)$ такое, что

$$f^{-1}(A)=\{x\colon f(x)\in A\}\in\mathcal{A}_1,\ \forall A\in\mathcal{A}_2.$$

В случае, когда $\mathcal{A}_1$ есть σ-алгебра, а $(X_2, \mathcal{A}_2)$ — действительная прямая с σ-алгеброй A_2 борелевских множеств, понятие И. о. сводится к понятию измеримой функции (однако, когда $\mathcal{A}_1$ есть лишь σ-кольцо, определение измеримой функции обычно видоизменяется в связи с нуждами теории интегрирования). Суперпозиция И. о. измерима. Если $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$— кольца, и $f^{-1}(B)\in\mathcal{A}_1$ для любого B из нек-рого класса множеств $B\in\mathcal{A}_2$ такого, что кольцо, им порожденное, совпадает с $\mathcal{A}_2$, то f измеримо. Аналогичное утверждение верно и для случая σ-колец, алгебр и σ-алгебр. Если $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ — топологич. пространства с σ-алгебрами борелевских множеств, то всякое непрерывное отображение X_1 в X_2 измеримо. Пусть X — топологич. пространство, $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра его борелевских подмножеств и μ —конечная неотрицательная регулярная мера на $\mathcal{A}$ (регулярность означает. что $\mu(A)=\sup\ \{\mu(F) : F\subset A,\ F$ замкнуто$\}$). Пусть, далее, S — сепарабельное метрич. пространство, $\mathcal{B}$ есть σ-алгебра его борелевских подмножеств и f — измеримое отображение $(X, \mathcal{A})$ и $(Y, \mathcal{B})$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется замкнутое подмножество $F\subset X$ такое, что $\mu(X\setminus F)<\varepsilon$ и f непрерывно на F (теорема Лузина).

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер, пер. с франц., М., 1967; [4] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962. *В. В. Сазонов.*

ИЗМЕРИМОЕ ПРОСТРАНСТВО (X, A) — множество X с выделенным кольцом или σ-кольцом $\mathcal{A}$ (в частности, алгеброй или σ-алгеброй) его подмножеств.

Примеры: $\mathbb{R}^n$ с кольцом измеримых по Жордану (см. *Жордана мера*) множеств, $\mathbb{R}^n$ с σ-кольцом множеств конечной *Лебега мерой*, топологич. пространство E с σ-алгеброй борелевских множеств.

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953. *В. В. Сазонов.*

ИЗМЕРИМОЕ РАЗБИЕНИЕ пространства с мерой (M, μ) — разбиение ξ этого пространства на непересекающиеся подмножества (именуемые элементами разбиения), к-рое можно получить как разбиение на множества уровня нек-рой измеримой функции (с числовыми значениями) на M. Это определение можно переформулировать в терминах «внутренних» свойств разбиения (см. [1]). В соответствии с общей тенденцией пренебрегать в вопросах теории меры множествами меры нуль часто под И. р. понимают разбиение, измеримое по mod 0, т. е. эквивалентное по mod 0 нек-рому И. р. (два разбиения ξ, η пространства с мерой M эквивалентны по mod 0, если существует такое множество N меры 0, что разбиения пространства $M \setminus N$, состоящие из пересечений с $M \setminus N$ элементов разбиений ξ и η, совпадают).

Хотя приведенное определение имеет смысл для любого пространства с мерой, фактически И. р. рассматривают почти исключительно для *Лебега пространства* (и иногда для пространств, в какой-то степени обладающих свойствами последних, напр. для пространств с совершенной мерой, см. [2], [3]), так как именно в этих пространствах И. р. обладают рядом «хороших» свойств. Так, в этом случае существует система условных мер (или, как говорили раньше [1], каноническая система мер), принадлежащая И. р. Это есть система мер $\mu(\cdot|C)$ на элементах C разбиения ξ, позволяющая представить интегрирование по μ в виде повторного интегрирования: сначала на элементах C осуществляется интегрирование по соответствующим мерам $\mu(\cdot|C)$, а затем полученный результат, к-рый можно рассматривать как функцию на факторпространстве M/ξ, надо проинтегрировать по имеющейся в последнем естественной мере μ_ξ (M/ξ, по определению, имеет своими точками элементы разбиения ξ, а своими измеримыми подмножествами — те, прообразы к-рых при естественной проекции $\pi : M \to M/\xi$ измеримы; мера $\mu_\xi(A) = \mu(\pi^{-1}(A))$). Интерпретируя (M, μ) как пространство элементарных событий в теории вероятностей, можно сказать, что система условных мер является нек-рым «усовершенствованием» условной вероятности, тесно связанным со спецификой пространства Лебега: для произвольных пространств элементарных событий условную вероятность, вообще говоря, нельзя интерпретировать с помощью набора каких-то мер на элементах каких-то разбиений.

Неизмеримые (и неизмеримые по mod 0) разбиения отнюдь не всегда являются «патологическими» объектами, как неизмеримые множества или функции. Напр., разбиение фазового пространства эргодической динамич. системы на ее траектории может иметь вполне «классическое» происхождение; просто его свойства отличны от свойств И. р.

Лит.: [1] Рохлин В. А., «Матем. сб.», 1949, т. 25, № 1, с. 107—50; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [3] Сазонов В. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 3, с. 391—414.

Д. В. Аносов.

ИЗМЕРИМЫЙ ПОТОК в пространстве с мерой (M, μ) — семейство $\{T^t\}$ (t пробегает совокупность действительных чисел $\mathbb{R}$) автоморфизмов этого пространства такое, что: 1) $T^t(T^s(x)) = T^{t+s}(x)$ для всех t, $s \in \mathbb{R}$, $x \in M$; 2) отображение $M \times \mathbb{R} \to M$, переводящее (x, t) в $T^t x$, измеримо (мера в $M \times \mathbb{R}$ вводится как прямое произведение меры μ в M и меры Лебега в $\mathbb{R}$). «Автоморфизмы» здесь понимаются в строгом смысле слова (а не по mod 0), т. е. T^t должны быть биекциями $M \to M$, переводящими измеримое множество в измеримое множество той же меры. При использовании автоморфизмов по mod 0 оказывается целесообразным заменить условие 2) условием иного характера, что приводит к понятию *непрерывного потока*. И. п. изучаются в *эргодической теории*. *Д. В. Аносов.*

ИЗОБРАЖЕНИЙ МЕТОД, отображений метод,— метод теории потенциала для решения некоторых краевых (граничных) задач для дифференциальных уравнений с частными производными в области D, при к-ром выполнение краевых (граничных) условий на границе $\partial D = \Gamma$ достигается путем соответствующего подбора нек-рых дополнительных источников поля, расположенных вне D и называемых **источниками-изображениями**.

Наибольшее развитие И. м. получил в электростатике. Пусть, напр., требуется решить *Дирихле задачу* для *Пуассона уравнения* $\Delta u = -2\pi\rho(x, y)$ в полуплоскости $D = \{(x, y): y > 0, -\infty < x < +\infty\}$ с заданной на границе $\Gamma = \{(x, y): y = 0, -\infty < x < +\infty\}$ функцией $\psi(x)$, т. е. требуется найти потенциал электрич. зарядов плотности $\rho(x, y)$, расположенных в D, при условии, что на Γ поддерживается потенциал $\psi(x)$. Известно, что для решения этой задачи достаточно знать *Грина функцию* $G(x, y; x_0, y_0)$, представляющую собой потенциал единичного точечного заряда в точке $(x_0, y_0) \in D$, когда граница Γ заземлена, т. е. $G(x, 0; x_0, y_0) = 0$. При этом решение $u(x, y)$ исходной задачи выражается через $G(x, y; x_0, y_0)$ следующим образом:

$$u(x, y) = \iint_D \rho(x_0, y_0)\, G(x, y; x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0 + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \psi(x_0)\, \frac{\partial G(x, y; x_0, 0)}{\partial y_0}\, dx_0. \quad (1)$$

Потенциал точечного заряда при отсутствии границ записывается в виде фундаментального решения *Лапласа уравнения* $\ln\left(1/\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$. Добавляя отрицательный единичный заряд-изображение в точке $(x_0, -y_0)$ и составляя сумму потенциалов этих двух зарядов, получают искомую функцию Грина:

$$G(x, y; x_0, y_0) = \ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}. \quad (2)$$

В случае полосы $D = \{(x, y): 0 < y < b, -\infty < x < +\infty\}$, отражая единичный заряд $(x_0, y_0) \in D$ от прямых $y = 0$ и $y = b$, получают бесконечную последовательность зарядов-изображений $-1, -1, +1, +1, \ldots$, расположенных, соответственно, в точках $(x_0, -y_0)$, $(x_0, 2b-y_0)$, $(x_0, -2b+y_0)$, $(x_0, 2b+y_0)$, ... Функция Грина в этом случае будет выражаться в виде бесконечного ряда потенциалов точечных зарядов.

Для области D в виде круга $D = \{(\rho, \varphi): 0 \leqslant \rho < a, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ изображением единичного заряда в точке (ρ_0, φ_0) будет отрицательный единичный заряд, расположенный в точке $(a^2/\rho_0, \varphi_0)$, являющейся отображением точки (ρ_0, φ_0) при помощи *инверсии* относительно окружности $\rho = a$.

Возможны и другие конфигурации границ, составленных из прямых и окружностей, когда решение достигается построением соответствующей последовательности зарядов-изображений.

При решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = -4\pi\rho(x, y, z)$ в полупространстве

$$D = \{(x, y, z): z > 0, -\infty < x, y < +\infty\},$$

отражая единичный заряд $(x_0, y_0, z_0) \in D$ от плоскости $z = 0$, вместо (2) получают формулу

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}.$$

В случае шара $D = \{(r, \theta, \varphi): 0 \leqslant r < a, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ следует применить *Кельвина преобразование*, и изображением единичного заряда в точке $(r_0, \theta_0, \varphi_0) \in D$ будет заряд величины $-a/r_0$, расположенный в точке $(a^2/r_0, \theta_0, \varphi_0)$, являющейся отображением точки $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ при помощи инверсии относительно сферы

$r=a$. Отсюда получается, что если известно решение уравнения Пуассона $\Delta u=-4\pi\rho(r, \theta, \varphi)$ в нек-рой области D, то функция $v(r, \theta, \varphi)=(a/r)u(a^2/r, \theta, \varphi)$ дает решение уравнения Пуассона $\Delta v=-4\pi\rho'(r, \theta, \varphi)$ с плотностью $\rho'(r, \theta, \varphi)=(a/r)^5\rho(a^2/r, \theta, \varphi)$ в области D', являющейся отображением D при инверсии относительно сферы $r=a$. В такой форме И. м. иногда наз. методом инверсии. При применении метода инверсии необходимо обращать внимание на то, что краевые (граничные) условия, вообще говоря, также преобразуются.

Для более сложных пространственных областей, граница к-рых состоит из нескольких плоскостей или сфер, возможно также применение бесконечных последовательностей зарядов-изображений. В комбинации с предельными переходами, когда один или несколько источников удаляются в бесконечность, И. м. допускает решение и более сложных задач таких, напр., как отыскание потенциала электростатич. поля в случае проводящего шара, помещенного в однородном на бесконечности поле.

В случае уравнения Гельмгольца $\Delta u+k^2u=0$ И. м. применим только для областей, ограниченных прямыми, или для пространственных областей, ограниченных плоскостями, с использованием соответствующих фундаментальных решений $H_0^{(1)}(k\rho)$, $H_0^{(2)}(k\rho)$ или e^{ikr}/r, e^{-ikr}/r.

Лит.: [1] Гринберг Г. А., Избр. вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, М.— Л., 1948; [2] Смайт В., Электростатика и электродинамика, пер. с англ., М., 1954; [3] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. 1, М.— Л., 1963.

Е. Д. Соломенцев.

ИЗОГЕНИЯ — эпиморфизм *групповых схем* с конечным ядром. Морфизм групповых схем $f: G \to G'$ над базисной схемой S наз. изогенией, если f сюръективен и его ядро $\mathrm{Ker}(f)$ есть плоская конечная групповая S-схема.

В дальнейшем предполагается, что S есть спектр поля k характеристики $p \geqslant 0$. Пусть G групповая схема конечного типа над k и H ее конечная групповая подсхема. Тогда фактор $G|H$ существует, а естественное отображение $G \to G|H$ является И. Обратно, если $f: G \to G'$ — И. групповых схем конечного типа и $H=\mathrm{Ker}(f)$, то $G'=G|H$. Для любой И. $f: G \to G'$ связных коммутативных групповых схем конечного типа существует И. $g: G' \to G$ такая, что композиция $g \circ f$ совпадает с гомоморфизмом n_G умножения на n групповой схемы G. Композиция И. является И. Две групповые схемы G и G' наз. изогенными, если существует И. $f: G \to G'$. Изогения $f: G \to G'$ наз. сепарабельной, если $\mathrm{Ker}(f)$ является этальной групповой схемой над k. Последнее эквивалентно тому, что f есть конечное этальное накрытие. Примером сепарабельной И. служит гомоморфизм n_G, где $(n, p)=1$. Если k — конечное поле, то каждая сепарабельная И. связных коммутативных групповых схем конечного типа $f: G \to G'$ пропускается через И. $\mathfrak{p}$: $G \to G$, где $\mathfrak{p} = F-\mathrm{id}_G$, а F — *Фробениуса эндоморфизм*. Примером несепарабельной И. является гомоморфизм умножения на $n=p^r$ абелева многообразия A.

Локализация аддитивной категории $A(k)$ абелевых многообразий над полем k относительно И. определяет абелеву категорию $M(k)$, ее объекты наз. абелевыми многообразиями с точностью до изогении. Каждый такой объект можно отождествить с абелевым многообразием A, а морфизмами $A \to A'$ в $M(k)$ служат элементы векторного пространства над полем рациональных чисел $\mathrm{Hom}_{A(k)}(A, A)' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. И. $f: A \to A'$ определяет изоморфизм соответствующих объектов в $M(k)$. Категория $M(k)$ полупроста: каждый ее объект изоморфен произведению неразложимых объектов. В случае, когда k — конечное поле, имеется полное описание категории $M(k)$ (см. [4]).

Понятие И. определяется также и для формальных групп. Морфизм $f: G \to G'$ формальных групп над полем k наз. И., если его образ в факторкатегории $\Phi(k)$ категории формальных групп над k относительно подкатегории артиновых формальных групп является изоморфизмом. И. групповых схем определяет И. соответствующих формальных пополнений. Имеется описание категории $\Phi(k)$ формальных групп с точностью до И. (см. [1], [5]).

Лит.: [1] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 3—90; [2] Мамфорд Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [3] Серр Ж., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [4] Тейт Дж., «Математика», 1970, т. 14, в. 6, с. 129—37; [5] Dieudonné J., «Comment. math. helv.», 1954, t. 28, № 1, p. 87—118.

И. В. Долгачев.

ИЗОГОНАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ — плоская линия, пересекающая кривые заданного на плоскости однопараметрич. семейства под одним и тем же углом. Если

$$F(x, y, y')=0 \qquad (1)$$

— дифференциальное уравнение заданного семейства кривых, то И. т., пересекающая кривые этого семейства под углом α, где $0<\alpha<\pi$, $\alpha\neq\pi/2$, удовлетворяет одному из двух уравнений:

$$F\left(x, z, \frac{z'-\operatorname{tg}\alpha}{1+z'\operatorname{tg}\alpha}\right)=0, \quad F\left(x, z, \frac{z'+\operatorname{tg}\alpha}{1-z'\operatorname{tg}\alpha}\right)=0.$$

В частности, уравнению

$$F\left(x, z, -\frac{1}{z'}\right)=0 \qquad (2)$$

удовлетворяет ортогональная траектория, т. е. плоская линия, образующая в каждой своей точке прямой угол с проходящей через эту же точку кривой семейства (1). Ортогональные траектории для заданного семейства (1) образуют однопараметрич. семейство плоских кривых — общий интеграл уравнения (2). Напр., если рассмотреть семейство силовых линий плоского электростатич. поля, то семейство ортогональных траекторий будет представлять собой эквипотенциальные линии.

Лит.: [1] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 9 изд., М., 1966. *Н. Х. Розов.*

ИЗОГОНЫ И ИЗОЭДРЫ — выпуклые трехмерные многогранники, все многогранные углы к-рых равны (изогоны), или равны все грани (изоэдры); причем группа поворотов (с отражениями) изогона (изоэдра) вокруг центра тяжести переводит любую его вершину (грань) в любую другую его вершину (грань). Каждому изогону соответствует дуальный изоэдр, и обратно. Если выпуклый многогранник является и изогоном и изоэдром, то он правильный многогранник. Комбинаторно разных изогонов имеется 13 специальных и две бесконечные серии, которые могут быть реализованы как полуправильные многогранники.

В. А. Залгаллер.

ИЗОКЛИНА обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$y'=f(x, y) \qquad (*)$$

— множество точек плоскости x, y, в к-рых наклон *направлений поля*, определяемого уравнением (*), один и тот же. Если k — произвольное действительное число, то k-изоклина уравнения (*) есть множество

$$\{(x, y) | f(x, y)=k\}$$

(в общем случае — кривая); в каждой ее точке (ориентированный) угол между осью x и касательной к проходящему через эту точку решению уравнения (*) равен $\operatorname{arctg} k$. Напр., 0-изоклина определяется уравнением $f(x, y)=0$ и включает в себя те и только те точки плоскости x, y, в к-рых решения уравнения (*)

имеют горизонтальную касательную. k-изоклина уравнения (*) является одновременно решением этого уравнения тогда и только тогда, когда она представляет собой прямую с угловым коэффициентом k.

Приближенное качественное представление о картине поведения интегральных кривых уравнения (*) можно составить, если построить И. данного уравнения для достаточно частого набора значений параметра k и отметить на каждой И. соответствующий наклон интегральных кривых (м е т о д и з о к л и н). Полезно также построить ∞-изоклину, определяемую уравнением $1/f(x, y)=0$; в точках ∞-изоклины интегральные кривые уравнения (*) имеют вертикальную касательную. Точки (локального) экстремума решений уравнения (*) могут лежать только на 0-изоклине, а точки перегиба решений — только на линии

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}+f(x, y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=0.$$

Для уравнения 1-го порядка, не разрешенного относительно производной

$$F(x, y, y')=0,$$

k-изоклина определяется как множество

$$\{(x, y)|F(x, y, k)=0\}.$$

В случае автономной системы 2-го порядка

$$\dot{x}=f(x, y),\ \dot{y}=g(x, y)$$

совокупность точек фазовой плоскости, в к-рых векторы фазовой скорости коллинеарны, есть И. уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Лит.: [1] С т е п а н о в В. В., Курс дифференциальных уравнений, 9 изд., М., 1966. *Н. Х. Розов.*

ИЗОЛИРОВАННАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА д л я э л е м е н т а а н а л и т и ч е с к о й ф у н к ц и и $f(z)$ — точка a комплексной плоскости z, относительно к-рой выполняются условия: 1) этот элемент функции $f(z)$ не допускает *аналитического продолжения* по какому-либо пути в точку a; 2) существует такое число $R>0$, что в проколотой окрестности $U=\{z\in\mathbb{C} : 0<|z-a|<R\}$ точки a аналитич. продолжение элемента $f(z)$ возможно по любому пути.

Если при аналитич. продолжении $f(z)$ вдоль замкнутого пути, расположенного в U и окружающего a, напр. вдоль окружности $|z-a|=\rho$, $0<\rho<R$, получается новый элемент, отличный от исходного, то a наз. *ветвления точкой*, или И. о. т. м н о г о з н а ч н о г о х а р а к т е р а. В противном случае элемент $f(z)$ определяет однозначную аналитич. функцию в U и a наз. И. о. т. о д н о з н а ч н о г о х а р а к т е р а. В проколотой окрестности U И. о. т. a однозначного характера функция $f(z)$ разлагается в *Лорана ряд*:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-a)^k \qquad (1)$$

с правильной частью $f_1(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k(z-a)^k$ и главной частью $f_2(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}c_k(z-a)^k$. Поведение аналитич. функции $f(z)$ в проколотой окрестности U И. о. т. однозначного характера определяется в основном главной частью ряда Лорана. Если все коэффициенты главной части равны нулю, то, полагая $f(a)=c_0$, получим однозначную аналитич. функцию в полной окрестности a. Этот случай фактического отсутствия особенности характеризуется также тем, что $f(z)$ ограничена в проколотой окрестности U, или тем, что существует конечный предел $\lim_{z\to a} f(z)=c_0$, $z\in U$.

Если среди коэффициентов главной части имеется лишь конечное число отличных от нуля и наименьший номер среди них имеет $c_{-m}\neq 0$, то a есть *полюс* порядка m. Полюс a характеризуется также тем, что

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty, \ z \in U.$$

Наконец, если среди коэффициентов главной части имеется бесконечное множество отличных от нуля, то a — *существенно особая точка*. В этом случае не существует конечного или бесконечного предела

$$\lim_{z \to a} f(z), \ z \in U.$$

Для бесконечно удаленной И. о. т. $a=\infty$ элемента $f(z)$ проколотая окрестность имеет вид $U=\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < \infty\}$, а ряд Лорана —

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k.$$

Здесь правильная часть $f_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k$, а главная часть $f_2(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k$. С этими условиями описанные выше классификация и признаки типов И. о. т. без дальнейших изменений переносятся на случай $a=\infty$ (см. также *Вычет*). Следует отметить, что элементы различных ветвей *полной аналитической функции* $f(z)$ в одной и той же точке $a \in \mathbb{C}$ могут иметь особенности совершенно различных типов.

Голоморфные функции $f(z)$ многих комплексных переменных, $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, при $n \geqslant 2$ не могут иметь И. о. т. При $n \geqslant 2$ особые точки составляют бесконечные множества особенностей.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

ИЗОЛИРОВАННАЯ ПОДГРУППА — подгруппа A группы G такая, что из $g^n \in A$, $g^n \neq 1$, следует $g \in A$; другими словами, если уравнение $x^n = a$ (где $1 \neq a \in A$) разрешимо в G, то его решение принадлежит A. Подгруппа A наз. сильно изолированной, если из $a \in A$ следует, что централизатор элемента a во всей группе лежит в подгруппе A. Изолятором множества M элементов группы наз. минимальная И. п., содержащая M.

В R-группах (т. е. *группах с однозначным извлечением корня*) понятие И. п. соответствует понятию *сервантной подгруппы* абелевой группы. Пересечение изолированных подгрупп в R-группе — И. п. Нормальный делитель H R-группы G изолирован тогда и только тогда, когда факторгруппа G/H является группой без кручения. Центр R-группы изолирован.

В отличие от общей теории групп, в теории упорядоченных групп И. п. называют иногда *выпуклые подгруппы*. *О. А. Иванова.*

ИЗОЛИРОВАННАЯ ТОЧКА подпространства A топологического пространства X — такая точка $a \in A$, что пересечение нек-рой ее окрестности с A состоит из единственной точки a. *А. А. Мальцев.*

ИЗОЛЬ — *рекурсивной эквивалентности тип* изолированного (т. е. конечного или иммунного) множества натуральных чисел. Множество всех И. континуально и является полукольцом относительно операций сложения и умножения, определяемых для произвольных типов рекурсивной эквивалентности. Это полукольцо наз. арифметикой И. Последняя обладает рядом свойств арифметики натуральных чисел, в частности в ней выполнены все универсальные хорновские формулы, элементарные подформулы к-рых представляют собой равенство так наз. комбинаторных функций. Примером такой формулы является закон сокращения: $X+Z=Y+Z \Rightarrow X=Y$. И. рассматриваются как рекурсивные аналоги мощностей конечных по Дедекинду множеств, т. е. множеств, не равномощных никакому своему собственному подмножеству.

А. Л. Семенов.

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР — отображение U метрич. пространства (X, ρ_X) в метрич. пространство (Y, ρ_Y) такое, что

$$\rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(Ux_1, Ux_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in X$. Если X и Y — действительные линейные нормированные пространства, $U(X) = Y$ и $U(0) = 0$, то U — линейный оператор.

И. о. U отображает X на $U(X)$ взаимно однозначно, так что существует обратный оператор U^{-1}, также являющийся И. о. Оператор, сопряженный с линейным И. о., действующим из одного линейного нормированного пространства в другое, также будет изометрическим. Линейный И. о., отображающий X на все Y, наз. у н и т а р н ы м о п е р а т о р о м. Условием унитарности линейного оператора, действующего в гильбертовом пространстве H, является равенство $U^* = U^{-1}$. Спектр унитарного оператора расположен на единичной окружности, и имеет место представление

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\, dE_\varphi,$$

где $\{E_\varphi\}$ — соответствующее разложение единицы. И. о., определенный на подпространстве гильбертова пространства со значениями в таком же пространстве, может быть продолжен до унитарного, если ортогональные дополнения области его определения и области его значений имеют одинаковую размерность.

Каждому симметрич. оператору A с областью определения $D_A \subset H$ соответствует И. о.

$$U_A = (A - iI)(A + iI)^{-1},$$

наз. п р е о б р а з о в а н и е м К э л и оператора A. Если A — самосопряженный оператор, то оператор U_A унитарен.

Операторы A и B с общей областью определения D наз. м е т р и ч е с к и р а в н ы м и, если $B = UA$, где U — И. о., то есть если $\|Bx\| = \|Ax\|$ для всех $x \in D$. Такие операторы обладают рядом общих свойств. Для любого ограниченного линейного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве, существует один и только один положительный метрически равный ему оператор, определяемый равенством $B = \sqrt{A^*A}$.

Лит.: [1] А х и е з е р Н. И., Г л а з м а н И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [2] П л е с н е р А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965; [3] M a z u r S., U l a m S., «C.r. Acad. sci.», 1932, t. 194, p. 946—48. *В. И. Соболев.*

ИЗОМЕТРИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение f метрического пространства A в метрич. пространство B, сохраняющее расстояние между точками: если $x, y \in A$ и $f(x), f(y) \in B$, то

$$\rho_A(x, y) = \rho_B(f(x), f(y)).$$

И. о. является инъективным отображением специального вида, а именно — *погружением*. Если $f(A) = B$, т. е. биективное И. о. наз. и з о м е т р и е й A на B, а про A и B говорят, что они находятся в и з о м е т р и ч е с к о м с о о т в е т с т в и и, или изометричны друг другу. Изометричные пространства гомеоморфны. Если, кроме того, B совпадает с A, то И. о. наз. и з о м е т р и ч е с к и м п р е о б р а з о в а н и е м, а также д в и ж е н и е м пространства A.

Если метрич. пространства A_0 и A_1 являются подмножествами нек-рого топологич. пространства M и существует *деформация* $F_t : A \to B$ такая, что при каждом t отображение F_t является И. о. A_0 на A_t, то $\{A_t\}$ наз. и з о м е т р и ч е с к о й д е ф о р м а ц и е й, или и з г и б а н и е м, A_0 в A_1.

И. о. метрич. линейных пространств является линейным отображением; оно осуществляется (а также и называется) *изометрическим оператором*.

М. И. Войцеховский.

ИЗОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОГРУЖЕНИЕ — погружение k-мерного метрич. многообразия M^k в n-мерное риманово пространство V^n, $n \geqslant k$, в виде k-мерной поверхности Φ, при к-ром расстояние между любыми двумя точками на M^k совпадает с расстоянием между их образами, измеренным по поверхности Φ в пространстве V^n. Это определение можно обобщить, если риманово пространство заменить более общим метрич. пространством. Частным случаем И. п. является изометрическое вложение — взаимно однозначное погружение.

Основными вопросами теории И. п. являются: 1) проблема возможности И. п. данного многообразия в данное пространство; 2) в случае существования И. п.— проблема его единственности. Эти проблемы рассматриваются при различных условиях на многообразие и его изометрич. образ — гладкости, регулярности, аналитичности, выпуклости и т. д. При каждом из перечисленных условий конкретизация основных вопросов теории И. п. производится в следующих аспектах: а) вопрос глобального И. п. M^k в V^n; б) вопрос локального И. п. M^k в V^n (отыскание И. п. в V^n достаточно малой окрестности отмеченной точки $v \in M^k$); в) в локальном и глобальном случаях отыскание минимального p такого, что M^k погружаемо в евклидово пространство E^{k+p} размерности $k+p$ (число p наз. классом погружения многообразия M^k); г) вопросы изгибания И. п.

С аналитич. точки зрения задача нахождения И. п. M^k в V^n равносильна решению системы нелинейных уравнений с частными производными. Для И. п. в E^n эта система имеет вид:

$$\sum\nolimits_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{i}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{j}} = g_{ij},$$

где $x = \{x^{\alpha}(u^s)\}$ — искомое И. п., g_{ij} — метрический тензор многообразия M^k в локальных координатах $u^1, \ldots, u^k$. При решении этой системы в глобальном случае используются так наз. свободные отображения x в E^n (см. *Нэша теорема* о неявной функции). В локальных аналитич. задачах место теоремы о неявной функции занимает *Коши — Ковалевской теорема*. Роль свободного отображения и теоремы о неявной функции сохраняется и в общем случае для погружений класса C^r, $s \leqslant r \leqslant \infty$, $r = a$, в римановы и псевдоримановы пространства. И. п. класса C^1 используют иные методы, основанные на деформации погружения, позволяющей менять погружения и следить за изменением метрики. При исследованиях И. п. в E^n используется также система уравнений Гаусса — Петерсона — Кодацци.

Глобальные изометрические погружения. Всякое компактное риманово многообразие M^k класса $C^r (3 \leqslant r \leqslant \infty)$ допускает изометрич. вложение класса C^r в любой шар пространства E^n, где $n \leqslant (3k^2 + 11k)/2$; если M^k некомпактно, то оно допускает вложение класса C^r в любую часть пространства E^n, где $3 \leqslant r \leqslant \infty$ и $n \leqslant (3k^2 + 11k)(k+1)/2$ (см. [6]). Размерность пространства E^n снижается в случаях $r = \infty$ и $r = a$: всякое риманово многообразие M^k (компактное или нет, с краем или без края) класса $C^{\infty}(C^a)$ допускает изометрич. вложение класса $C^{\infty}(C^a)$ в E^n, где $n \leqslant k(k+1)/2 + 3k + 5$.

Для k-мерного гиперболич. пространства $(k > 2)$ получено в явном виде изометрич. вложение класса C^{∞} в E^{6k-5}, а для k-мерного эллиптич. пространства $(k > 2)$ — изометрич. вложение класса C^a в E^n, $n = k(k+3)/2$.

В перечисленных результатах гладкость поверхности Φ не выше, чем гладкость погружаемой метрики. Этот факт не является случайным: именно, всякая k-мерная $(\alpha \leqslant k \leqslant n-1)$ поверхность Φ класса $C^{r,\alpha}, r \geqslant 2$,

$0 \leqslant \alpha < 1$, в E^n является И. п. класса $C^{r, \alpha}$ нек-рого риманова многообразия M^k класса $C^{r, \alpha}$ (см. [8]).

Нижняя граница для размерности пространства E^n, в к-рое можно осуществить И. п. риманова многообразия, дается теоремой: пусть компактное риманово многообразие M^k класса C^4 обладает следующим свойством: в каждой точке M^k существует q-плоскость такая, что в ней все кривизны по всем двумерным направлениям неположительны; тогда M^k не допускает И. п. класса C^4 в любое E^n с $n \leqslant k+q-1$; если условие, наложенное на кривизну многообразия M^k, распространяется на одну точку и $q=n$, то существует И. п. класса C^4 в E^{2k-2}. Так, напр., плоский k-мерный тор не допускает И. п. класса C^4 в E^{2k-1}; если k — степень двойки, то действительное проективное пространство $\mathbb{R}P^k$, снабженное метрикой со всюду положительной скалярной кривизной, в частности k-мерное эллиптич. пространство, не допускает изометрич. вложения класса C^2 в E^{2k}.

Результаты, относящиеся к И. п. класса C^1, резко отличаются от предыдущих. Они формулируются в следующем виде: если компактное риманово многообразие M^k класса C^0 (с границей или без нее) допускает погружение класса C^1 в E^n при $n \geqslant k+1$, то оно также допускает И. п. класса C^1 в E^n; если некомпактное риманово многообразие M^k класса C^0 допускает короткое погружение (т. е. не удлиняющее в каждой точке линейный элемент) класса C^1 в E^n, $n \geqslant k+1$, не пересекающее свое предельное множество, то оно допускает также И. п. класса C^1 в E^n (см. [7]) (здесь предельное множество погружения многообразия M^k в E^n есть совокупность точек x пространства E^n, для каждой из к-рых в M^k существует расходящаяся последовательность, образ к-рой сходится в E^n к x). В частности, любое компактное риманово многообразие M^k класса C^0 (с границей или без нее) допускает И. п. класса C^1 в E^{2k}; любое некомпактное риманово многообразие класса C^0 допускает И. п. класса C^1 в E^{2k+1}.

Если И. п. (изометрич. вложения) класса C^1 риманова многообразия M^k в E^n с $n > k$ можно соединить короткой регулярной гомотопией (короткой диффеотопией), то их можно соединить изгибанием, составленным из И. п. (изометрич. вложений) класса C^1. В частности, в компактном случае И. п. (изометрич. вложения) класса C^1 тогда и только тогда можно соединить изгибанием, составленным из И. п. (изометрич. вложений) класса C^1, когда они регулярно гомотопны (диффеотопны).

Локальные изометрические погружения. В 1873 Л. Шлефли (L. Schläfli) высказал гипотезу, согласно к-рой всякое риманово многообразие размерности k допускает локальное И. п. в евклидово пространство E^n, где $n = k(k+1)/2$. Эта гипотеза доказана лишь для аналитич. многообразий (см. *Жане теорема*); более того, во всяком римановом многообразии M^k класса C^a с отмеченной точкой существует окрестность отмеченной точки, допускающая изометрич. вложение класса C^a в E^n, $n = k(k+1)/2$. В римановом пространстве M^k класса C^∞ с отмеченной точкой существует окрестность отмеченной точки, допускающая изометрич. вложение класса C^∞ в E^n, где $n = k(k+1)/2 + k$ (см. [7]). С другой стороны, у всякого риманова многообразия класса C^0 с отмеченной точкой существует окрестность ее, допускающая изометрич. вложение класса C^1 в E^{k+1}.

Несколько иное направление составляет отыскание условий, при к-рых данное многообразие M имеет И. п. в E^n, где $n < k(k+1)/2$. Это связано с тем, что не всякое риманово многообразие M^k допускает И. п. в E^n: при $r \geqslant k^2(k+1)/2 - k$, $r-1 \leqslant l \leqslant \infty$, множество римановых метрик, локально индуцируемых на гладком многообразии M^k с отмеченной точкой локальными вложениями класса C^r в E^n, $n < k(k+1)/2$, нигде не плотно во множестве всех римановых метрик класса

C^l на M^k, снабженном обычной C^l-топологией; при $r=2$ и $2\leqslant l\leqslant\infty$ утверждение остается верным, если n и k связаны неравенством $n<\frac{1}{3}\{k(k+1)/2+k+1\}$.

При решении задачи об определении класса (см. выше) И. п. многообразия минимальное p, найденное в локальной постановке, оценивает снизу значение p и для глобального И. п. Однако точное значение наименьшего p, при к-ром любое многообразие M^k, $k>2$, класса C^r, $2\leqslant r\leqslant\infty$ допускает И. п. класса C^r в E^{k+p}, неизвестно. Имеются нек-рые частные приемы вычисления класса И. п. данного риманова многообразия M^k в пространство E^n. Так, $p=0$ в том и только в том случае, если тензор кривизны многообразия M^k тождественно равен нулю. Существует алгебраич. критерий, позволяющий установить, будет ли класс И. п. данного многообразия равен 1, и основанный на том факте, что для метрик класса 1 при нек-рых дополнительных условиях уравнения Петерсона — Кодацци являются следствием уравнений Гаусса [11]. В частности, метрики постоянной положительной кривизны имеют класс 1 и реализуются при $k>3$ в виде гиперсфер евклидова пространства. Но если *Риччи кривизна* для M^k равна нулю, то $p\neq 1$.

Почти все изложенные результаты обобщаются на И. п. одного риманова пространства в другое. Так, напр., обстоит дело с погружениями класса C^1, с локальными И. п., с достаточно гладкими И. п. k-мерных многообразий в V^n большой размерности, со связями между порядками гладкости поверхности и ее метрики и т. д.

Задачи И. п. переносятся на псевдоримановы многообразия. В этом случае кроме размерностей k и n учитываются размерности k_+ и $k_-=k-k_+$ положительной и отрицательной части метрич. тензора на погружаемом многообразии M^k и соответствующие размерности n_+ и $n_-=n-n_+$ объемлющего пространства V^n. Так, теорема Жане сохраняется в псевдоримановом случае при $n\geqslant k(k+1)/2$, $n_+\geqslant k_+$, $n_-\geqslant k_-$.

Изометрические погружения двумерных многообразий. Многие задачи этого типа получили законченное решение в том смысле, что пространство, в к-ром строится погружение, имеет минимальную размерность. Здесь разработаны специальные методы решения, основанные на общей теории нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными и топологогеометрич. соображениях.

Вейля проблема, поставленная в 1916, гласит: допускает ли двумерное риманово многообразие M^2 И. п. в E^3, если оно гомеоморфно сфере и имеет положительную гауссову кривизну? Полное решение проблемы Вейля, обобщенной в том смысле, что речь идет об И. п. M^2 в трехмерное риманово пространство V^3, дано А. В. Погореловым [3]: пусть V^3 — полное трехмерное риманово пространство, M_+^2 — замкнутое гомеоморфное сфере риманово многообразие с гауссовой кривизной, всюду большей нек-рой постоянной k_0 (большей, меньшей или равной нулю); тогда, если кривизна пространства всюду меньше k_0, то M_+^2 допускает И. п. в виде регулярной поверхности Ф. Это погружение можно осуществить так, чтобы данный двумерный элемент α многообразия M^k (точка и пучок направлений в ней) совпал бы с данным изометричным α двумерным элементом α' в пространстве V^3, и поверхность располагалась бы по заданную сторону от площадки элемента α'. Если метрика пространства V^3 и многообразия M_+^2 принадлежат классу C^r, $r\geqslant 3$, то поверхность Ф принадлежит по крайней мере классу $C^{r-1,\nu}$, $0<\nu<1$. Поверхность двумерным элементом определяется однозначно. Любые два И. п. класса C^r, $r\geqslant 3$, $r=a$, в V^3 можно соединить изгибанием, составленным из И. п. того же класса.

С совершенно иной точки зрения проблема Вейля исследована А. Д. Александровым, к-рый построил теорию (нерегулярных) двумерных многообразий с *выпуклой метрикой* [4] (такие многообразия можно определить путем предельного перехода от регулярных многообразий с положительной гауссовой кривизной) и наметил следующий план решения проблемы Вейля: 1) обобщить постановку проблемы, беря в качестве M^2 многообразие с произвольной, вообще говоря, нерегулярной выпуклой метрикой; 2) затем установить регулярность И. п. в зависимости от регулярности метрики M^2. Осуществление (им же) первой части этого плана привело к исчерпывающему результату: всякое гомеоморфное сфере многообразие с выпуклой метрикой допускает И. п. в E^3 в виде замкнутой выпуклой поверхности. Реализация второй части плана проведена А. В. Погореловым в [3], где полностью решен вопрос о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой: если выпуклая поверхность $\Phi \subset E^3$ имеет метрику класса $C^{k,\alpha}$, $k \geqslant 2$, $0<\alpha<1$, и положительную гауссову кривизну, то Φ принадлежит классу $C^{k,\alpha}$. Если метрика поверхности Φ — аналитическая, то и поверхность Φ — аналитическая. Сходные теоремы имеют место для выпуклых поверхностей в пространстве постоянной кривизны. При определенных условиях существуют И. п. двумерных римановых многообразий положительной гауссовой кривизны, гомеоморфных плоскости или кругу. Наряду с этим построены примеры аналитич. метрик положительной кривизны, заданных в круге и не допускающих И. п. класса C^2 в E^3.

Теорема Гильберта о непогружаемости класса C^2 в E^3 плоскости Лобачевского естественно привела к вопросу, погружаются ли в E^3 какие-либо полные двумерные метрики с кривизной, ограниченной сверху отрицательной константой (так наз. метрики типа Λ)? Решение этой проблемы дано Н. В. Ефимовым [14]: если Φ — полная поверхность класса C^2 в E^3 с гауссовой кривизной $K(x)$, то $\sup\limits_{x \in \Phi} K(x) \geqslant 0$, так что, в частности, метрики типа Λ не допускают И. п. в E^3. В связи с этой теоремой представляет интерес вопрос о том, какие части метрик типа Λ (т. е. области двумерного многообразия, на к-ром задается двумерная метрика) могут быть погружены в E^3. Определенный ответ на этот вопрос получен в [15]. Пусть в бесконечной полосе

$$\Pi_a = \{0 \leqslant x \leqslant a, \quad -\infty < y < +\infty\}$$

плоскости E^2 с декартовыми координатами x, y задана форма $ds^2 = dx^2 + B^2(x, y)\, dy^2$, причем функция $B \in C^{r,1}$, $r \geqslant 3$, и обладает следующими свойствами: а) она сама, все ее производные до r-го порядка, а также константы Липшица по y для производных по y от производных $(r-1)$-го порядка ограничены в Π_a; б) $\inf B > 0$; в) гауссова кривизна $K = -B_{xx}/B \leqslant -\beta^2 = \text{const} < 0$. Тогда форма ds^2 порождает на многообразии с краем Π_a риманову структуру класса $C^{r,1}$, и полученное риманово многообразие допускает И. п. класса $C^{r,1}$, $r \geqslant 3$, в E^3. В частности, существует И. п. любого геодезич. круга с произвольной (регулярной) метрикой отрицательной кривизны. Имеется ряд теорем об И. п. в E^3 некомпактных частей метрик отрицательной кривизны [5]. Даны также оценки размеров области, на к-рую однозначно проектируется поверхность отрицательной (и отделенной от нуля) кривизны.

Так как метрики типа Λ в целом в E^3 не погружаются, то ставится вопрос об И. п. этих метрик в евклидовы пространства больших размерностей. В этом направлении имеются лишь частные результаты; так, напр., существует изометрич. вложение класса C^∞ плоскости Лобачевского в E^6 и И. п. в E^5; дан пример регулярной метрики типа Λ, допускающей И. п. в E^4; неизвестно, однако, допускает ли плоскость Лобачевского И. п. класса C^r, $r \geqslant 2$, в E^4.

Вопрос И. п. в E^3 метрик знакопеременной кривизны остается открытым даже в случае локальной проблемы. Так, напр., построен [16] пример двумерного риманова многообразия класса $C^{2,1}$, не допускающего локального И. п. класса $C^{2,1}$ в E^3. Вместе с тем задача о реализации аналитич. метрик знакопеременной кривизны решается следующей теоремой [17]: пусть в прямоугольнике $\Pi_{ab} = \{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$ плоскости E^2 задана метрика $ds^2 = dx^2 + B^2(x, y)\, dy^2$ и пусть $B(x, y)$ — аналитич. функция в нек-ром открытом прямоугольнике, содержащем $\Pi_{a,b}$; тогда аналитическое риманово многообразие с краем, порожденное на Π_{ab} заданной метрикой, допускает аналитич. И. п. в E^3. Имеется ряд результатов, касающихся И. п. регулярных метрик знакопеременной кривизны в евклидово пространство более высокой (но близкой к трем) размерности. Так, если M^2 — полное риманово многообразие класса $C^{3,\alpha}$, гомеоморфное плоскости, то любая его компактная часть допускает И. п. класса $C^{2,\alpha}$ в E^4; гомеоморфное тору риманово многообразие также допускает И. п. в E^4. Всякое компактное двумерное риманово многообразие класса $C^\infty(C^a)$ допускает И. п. (и даже вложение) класса $C^\infty(C^a)$ в E^{10}, а если оно не имеет замкнутых компонент, то — в E^9. Двумерная сфера с произвольной римановой метрикой класса C^∞ допускает И. п. класса C^∞ в E^7, а поверхность Клейна и лист Мёбиуса — И. п. в E^4.

Если отказаться от регулярности погружения, то всякая двумерная риманова метрика класса C^r, $r \geqslant 0$, допускает И. п. класса C^1 в E^3. Однако при этом будут нарушены обычные связи между внутренней и внешней геометрией поверхности, реализующей метрику. Построено локальное И. п. метрики двумерной сферы в виде локально невыпуклой поверхности в E^3 класса $C^{1,\alpha}$ при любом $\alpha < {}^1/_{13}$ и аналогичное И. п. в целом при $\alpha < {}^1/_{25}$. С другой стороны, если поверхность Φ принадлежит классу $C^{1,\alpha}$, $\alpha > {}^2/_3$, то поверхность Φ, имеющая знакопостоянную внутреннюю кривизну, будет иметь ограниченную внешнюю кривизну. В частности, если внутренняя кривизна Φ положительна, то Φ будет локально выпуклой поверхностью, и если сверх того метрика поверхности регулярна, то регулярна и сама поверхность. Таким образом, нижняя грань значений α, при к-рых сохраняются связи между внутренней и внешней геометрией поверхности Φ класса $C^{1,\alpha}$ со знакопостоянной внутренней кривизной, принадлежит отрезку $[{}^1/_{13}, {}^2/_3]$. Наконец, все ориентируемые многообразия ограниченной внешней кривизны, не имеющие точек с кривизной 2π, допускают изометрич. вложения в E^3 в виде дифференцируемых поверхностей. При исследовании нерегулярных И. п. изучались также кусочно линейные И. п. кусочно линейных метрик: так, всякая развертка, гомеоморфная замкнутой области на ориентируемой замкнутой поверхности, может быть изометрич. вложена в E^3 в виде многогранника.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., в кн.: Тр. 4 Всесоюзного математического съезда, т. 1, Л., 1963, с. 86—99; [2] Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию «в целом», М., 1973; [3] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969; [4] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948; [5] Позняк Э. Г., Шикин Е. В., в сб.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 171—207; [6] Нэш Дж., «Успехи матем. наук», 1971, т. 36, в. 4, с. 173—216; [7] Громов М. Л., Рохлин В. А., там же, 1970, т. 25, в. 5, с. 3—62; [8] Сабитов И. Х., Шефель С. З., «Сиб. матем. ж.», 1976, т. 17, № 4, с. 916—25; [9] Ôtsuki T., «J. Math. Soc. Japan», 1954, v. 6, p. 221—34; [10] Нэш Дж., «Математика», 1957, т. 1, № 2, с. 3—16; [11] Розенсон Н. А., «Изв. АН СССР. Сер. Матем.», 1943, т. 7, с. 253—84; [12] Friedman A., «J. Math., Mech.», 1961, v. 10, p. 625—49; [13] Сабитов И. Х., «Сиб. матем. ж.», 1976, т. 17,

№ 4, с. 907—15; [14] Ефимов Н. В., «Матем. сб.», 1964, т. 64, № 2, с. 286—320; [15] Позняк Э. Г., «Укр. геометр. сб.», 1966, в. 3, с. 78—92; [16] Погорелов А. В., «Докл. АН СССР», 1971, т. 198, № 1, с. 42—43; [17] Позняк Э. Г., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4, с. 47—76; [18] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., «Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ. и астрон.», 1960, т. 7, № 2, с. 66—80.

В. Т. Фоменко.

ИЗОМЕТРИЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ — поверхности в евклидовом или римановом пространстве такие, что между ними можно установить взаимно однозначное точечное соответствие, при к-ром каждая спрямляемая кривая одной из поверхностей имеет своим образом тоже спрямляемую кривую и той же длины. Другими словами, И. п. характеризуются (попарным) изометрич. соответствием — изометрией (см. *Изометрическое отображение*) относительно *внутренних метрик*, индуцированных на них метрикой объемлющего пространства. Важнейший пример И. п. — совокупность поверхностей, полученных *изгибанием* данной поверхности.

Если изометрия поверхностей влечет их равенство, точнее, если для любой поверхности F из нек-рого класса K, изометричной поверхности F_0, пространственные расстояния между соответствующими по изометрии точками F и F_0 равны, то F_0 наз. однозначно определенной, или для F_0 имеет место однозначная определенность (внутренней метрикой) в классе K. Понятие И. п. обобщается на более общие категории метрич. пространств и их подмножеств.

М. И. Войцеховский.

ИЗОМОРФИЗМ — соответствие (отношение) между объектами или системами объектов, выражающее в некотором смысле тождество их строения. И. в произвольной категории есть обратимый морфизм, т. е. морфизм φ, для к-рого существует такой морфизм φ^{-1}, что произведение $\varphi^{-1}\varphi=\varphi\varphi^{-1}=\varepsilon$ — единичный морфизм.

Понятие И. возникло в математике применительно к конкретным алгебраич. системам (прежде всего к группам) и было естественным образом распространено на более широкий класс математич. структур. Классич. примером изоморфных, «одинаково устроенных» систем могут служить множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел с определенной на нем операцией сложения и множество P положительных действительных чисел с заданной на нем операцией умножения.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ произвольные однотипные *алгебраические системы*, записанные в сигнатуре

$$\{F_i\colon\ i\in I\}\cup\{P_j,\ j\in J\}$$

с функциональными символами F_i, $i\in I$ и предикатными символами P_j, $j\in J$:

$$\mathbf{A}=\langle A;\ \{F_i\colon\ i\in I\},\ \{P_j\colon\ j\in J\}\rangle,$$
$$\mathbf{A}'=\langle A';\ \{F_i\colon\ i\in I\},\ \{P_j\colon\ j\in J\}\rangle.$$

Изоморфизмом, или изоморфным отображением, системы $\mathbf{A}$ на систему $\mathbf{A}'$ наз. взаимно однозначное отображение φ множества A на множество A', обладающее свойствами:

$$\varphi\left(F_i\left(a_1,\ \ldots,\ a_{n_i}\right)\right)=F_i\left(\varphi\left(a_1\right),\ \ldots,\ \varphi\left(a_{n_i}\right)\right),$$

$$P_j\left(a_1,\ \ldots,\ a_{m_j}\right)\Leftrightarrow P_j\left(\varphi\left(a_1\right),\ \ldots,\ \varphi\left(a_{m_j}\right)\right)$$

для всех элементов $a_1, a_2, \ldots$ из A и всех $i\in I$, $j\in J$. Таким образом, во всякой категории алгебраич. систем И. есть *гомоморфизм*, являющийся *биекцией*. И. алгебраич. системы на себя наз. автоморфизмом.

Отношение И. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, т. е. является отношением эквивалентности, разбивающим любое множество, на к-ром оно определено, на непересекающиеся классы эквивалентности — классы попарно изоморфных систем. Класс алгебраич. систем, содержащий вместе со всякой системой все ей изоморфные, наз. абстрактным классом.

О. А. Иванова, Д. М. Смирнов.

ИЗОМОРФИЗМА ПРОБЛЕМА — задача отыскания *алгоритма*, позволяющего по любой паре эффективно заданных *алгебраических систем* из данного класса установить, изоморфны они или нет. Частная И. п. для фиксированной алгебраич. системы A состоит в отыскании алгоритма, распознающего по эффективному заданию алгебраич. системы из рассматриваемого класса, изоморфна она системе A или нет. Положительное решение (частной) И. п. состоит в указании искомого алгоритма (И. п. разрешима), отрицательное — в доказательстве того, что искомого алгоритма нет (И. п. неразрешима). Обычно И. п. ставится для алгебр, задаваемых образующими и определяющими соотношениями.

Для многих важных классов алгебр И. п. неразрешима. Доказана неразрешимость частной И. п. для произвольной конечно определенной полугруппы в классе всех конечно определенных полугрупп [2] и частной И. п. для произвольной конечно определенной группы в классе всех конечно определенных групп [1]. В классе всех групп из многообразия n-ступенно разрешимых групп, задаваемых в этом многообразии конечным числом образующих и определяющих ссотношений, при $n \geqslant 7$ И. п. также неразрешима [3].

И. п. разрешима в классе всех конечных конечно определенных алгебр фиксированной сигнатуры, в классе абелевых групп.

Открытыми остаются пока (к 1978) И. п. для нильпотентных групп ступени 2, групп с одним определяющим соотношением. И. п. для групп связана с алгоритмич. проблемами топологии.

Лит.: [1] Адян С. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1957, т. 6, с. 231—98; [2] Марков А. А., Теория алгорифмов, М.— Л., 1954 (Тр. матем. ин-та АН СССР, т. 42); [3] Киркинский А. С., Ремесленников В. Н., «Матем. заметки», 1975, т. 18, № 3, с. 437—43. *А. Л. Семенов.*

ИЗООПТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ — плоская кривая, представляющая собой траекторию вершины данного угла γ, к-рый перемещается в плоскости так, что стороны его при любом положении угла касаются заданной кривой. Если $\gamma=\pi/2$, то И. к. наз. ортооптической кривой. Напр., ортооптич. кривая эллипса — окружность.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА — одна из основных задач классического вариационного исчисления. И. з. состоит в минимизации функционала:

$$J_0(y)=\int_{x_1}^{x_2} f_0(x,\ y,\ y')\,dx$$

при ограничениях вида

$$J_i(y)=\int_{x_1}^{x_2} f_i(x,\ y,\ y')\,dx=c_i;\quad f_i\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},$$
$$i=1,\ \ldots,\ m,$$

и нек-рых краевых условиях.

И. з. приводится к *Лагранжа задаче* при помощи введения новых переменных z_i, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\dot{z}_i=f_i(x,\ y,\ y'),\ i=1,\ \ldots,\ m,$$

и граничным условиям

$$z_i(x_1)=0,\ z_i(x_2)=c_i,\ i=1,\ \ldots,\ m.$$

Необходимые условия оптимальности И. з. имеют тот же вид, что и для простейшей задачи вариационного исчисления относительно *Лагранжа функции*:

$$L(x,\ y,\ y',\ \lambda_0,\ \ldots,\ \lambda_m)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(x,\ y,\ y').$$

Название «И. з.» происходит от следующей классической задачи: среди всех замкнутых линий на плоскости с заданным периметром найти линию, к-рая ограничивает наибольшую площадь.

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Цлаф Л. Я., Вариационное исчисление и интегральные уравнения, 2 изд., М., 1970; [3] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950.

И. Б. Вапнярский.

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО (в геометрии и физике) — общий термин для обозначения неравенства $4\pi V \leqslant F^2$ между площадью V и периметром F плоской области, для разнообразных его обобщений и для других неравенств между геометрич. характеристиками фигур, множеств, многообразий. К И. н. относят также оценки величин физич. происхождения (моменты инерции, жесткость кручения упругой балки, основная частота мембраны, электростатич. емкость и др.) через геометрич. характеристики. Точное И. н. эквивалентно решению нек-рой экстремальной задачи. И. н. могут связывать как две, так и большее число величин.

О наиболее известном И. н.— классическом, его аналогах в пространствах Минковского M^n, Лобачевского L^n, сферическом S^n и его уточнениях см. статью *Изопериметрическое неравенство классическое.*

Обширная сводка И. н. между элементами простейших фигур — главным образом многоугольников — имеется в [1]. Такие И. н. наз. геометрическими неравенствами.

Элементарные И. н. между такими параметрами множеств в R^n, как объем V, диаметр D, радиус R наименьшего описанного шара и т. п., см. в [2], [3]. Среди них: неравенство Юнга:

$$R \leqslant \left(\frac{n}{2n+2}\right)^{1/2} D;$$

неравенство Гейла:

$$l \leqslant \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{1/2} D,$$

где l — длина ребра наименьшего описанного правильного симплекса; неравенство Бибербаха:

$$V \leqslant 2^{-n} v_n D^n;$$

неравенство Лумиса — Уитни:

$$V \leqslant \prod_{i=1}^{\lambda} V_i^{n/k\lambda},$$

где V_i— k-мерный объем проекции множества на i-ю из $\lambda = C_n^k$ попарно различных k-мерных координатных плоскостей для декартовых координат. Первые три неравенства допускают обобщения на пространства M^n, L^n, S^n (см. [4], [5]). В неравенстве Бибербаха диаметр может быть заменен средней шириной (см. [5]).

В связи с задачами *размещения* и *покрытия* рассматривались И. н., специфичные для многогранников, с привлечением числа или суммы длин ребер и т. п. (см. [6]).

Для выпуклых тел многие И. н. (в том числе классическое И. н. и серия неравенств между интегралами от симметрич. функций главных кривизн) являются частными случаями неравенств между смешанными объемами (см. *Смешанных объемов теория*, *Минковского неравенство*).

Использование И. н., как оценок одних параметров фигур через другие, вышло за рамки геометрии. При этом в математич. физике, теории функций комплексного переменного, функциональном анализе, теории приближений функций, вариационном исчислении обогатился сам класс И. н. Заметно усложняются И. н. в римановой геометрии.

В математич. физике И. н. возникли (сначала в виде предположений) в работах А. Сен-Венана (A. Saint-Venant, 1856):

$$2\pi P \leqslant V^2,$$

где P — жесткость кручения призматической упругой балки; Рэлея (Rayleigh, 1877):

$$\Lambda^2 \leqslant \pi j^2 V^{-1},$$

где Λ — основная частота мембраны, j — первый положительный корень бесселевой функции $J_0(x)$; в работах А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1903):

$$3V \leqslant 4\pi c^3,$$

где c — электростатич. емкость тела. V в этих неравенствах, соответственно, площадь сечения балки, площадь мембраны, объем тела. Многочисленные результаты такого рода подытожены в [7] и [8]. Нек-рые оценки для первого собственного числа Λ^{-1} оператора Лапласа на замкнутых римановых многообразиях имеются в [9].

В функциональном анализе в терминах И. н. (связывающих меры и емкости) были даны (см. [10], [11]) условия ограниченности и компактности операторов вложения (см. *Вложения теоремы*) для пространств Соболева.

Например, оценка

$$\left(\int_{R^n} |u|^q \, d\mu\right)^{n/q} \leqslant c \int_{R^n} (\nabla u)^2 \, dx,$$

где μ — неотрицательная мера, $q \geqslant 2$, $n > 2$, справедлива для всех $u \in C_0^\infty(R^n)$ в том и только в том случае, когда для всех компактов $e \subset R^n$ выполняется И. н.:

$$\mu^{2/q}(e) \leqslant c_1 \operatorname{cap}(e).$$

Здесь cap $(\cdot)$ — емкость Винера (см. *Емкость множества*).

И. н. для объема и площади применяются при доказательстве априорных оценок решений линейных и квазилинейных эллиптич. уравнений (см. [12], [26]).

Специфич. И. н. возникают для выпуклых тел пространства Минковского в связи с теорией приближения функций (см. *Самопериметр*, *Поперечник*).

В теории конформных и квазиконформных отображений применение И. н. является обычным приемом. Примером конформно-инвариантного И. н. служит приводимое ниже неравенство (4).

И. н., включающие среднюю кривизну подмногообразия, в частности для минимальных поверхностей, играют важную роль при решении *Плато задачи*.

В римановой геометрии неоднородных пространств обобщения классического И. н. детально изучены только в двумерном случае. Пусть M — односвязное компактное двумерное многообразие с краем и положительная часть ω^+ интегральной кривизны M меньше, чем 2π.

Тогда (см. [13]):

$$2(2\pi - \omega^+) V \leqslant F^2. \tag{1}$$

И. н. (1) справедливо и для более общих, чем римановы, *двумерных многообразий ограниченной кривизны*. Равенство в (1) достигается на нерегулярном объекте — области, изометричной боковой поверхности прямого кругового конуса с полным углом $2\pi - \omega^+$ вокруг вершины. С помощью (1) устанавливаются оценки длины кривой, умещающейся в области, в зависимости от F, ω^+ и собственного поворота (*извивания кривой*). В частности, для геодезической длины L

$$L\left(1 + \cos\frac{1}{2}\omega^+\right) \leqslant F \text{ при } \omega^+ \leqslant \pi,$$

$$L \sin\frac{1}{2}\omega^+ \leqslant F \text{ при } \pi \leqslant \omega^+ < 2\pi.$$

И. н. (1) является частным случаем оценки

$$F^2 + 2\left(\omega_a^+ - 2\pi\chi\right) V + aV^2 \geqslant 0, \tag{2}$$

где a — любое действительное число, χ — эйлерова характеристика компактной области с краем, $\omega^+ = \int (K-a)^+ dV$, а K — гауссова кривизна. К И. н. (2) примыкают оценки для площади t-окрестности границы области и для наибольшего удаления точек области от границы (см. [14]). Если поверхность M является гладким подмногообразием в R^3, то оценки (1), (2) дополняются И. н., включающими внешние характеристики поверхности. Для замкнутых поверхностей из интегральных тождеств (см. [15]) следует точное И. н.

$$V \leqslant 2R^2(\omega^+ - \pi\chi),$$

где R — радиус шара в R^3, содержащего M. Сходные неравенства (не точные) получены и для поверхностей с краем (см. [16]). В частности, для односвязной седловой поверхности в $\mathbb{R}^n$ с границей длины F:

$$V \leqslant CF^2,\ V \leqslant CF^{2-\varepsilon}R^{\varepsilon},$$

$$\frac{1}{7} > \varepsilon = \mathrm{const} > 0.$$

Упомянутые неравенства остаются справедливыми и для общих (нерегулярных) поверхностей в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, если вместо ω^+ ввести в рассмотрение внешнюю положительную кривизну — меру в множестве локально опорных плоскостей (см. [16]).

Для n-мерного риманова пространства V^n И. н., как правило, связаны с односторонними ограничениями на секционную кривизну или кривизну Риччи. Простейшей является оценка объема $V(t)$ шара радиуса t в V^n через объем $v(t, K)$ шара того же радиуса в полном односвязном пространстве постоянной кривизны K:

$$V(t) \leqslant v(t, K), \tag{3}$$

где $(n-1)K$ есть минимальное значение кривизны Риччи в V^n; если $K>0$, то предполагается, что $t \leqslant \pi/\sqrt{K}$ (см. [17]). Аналогичное И. н. справедливо для трубчатой t-окрестности p-мерного подмногообразия в V^n, $0 \leqslant p < n$; в таком И. н. (вместо кривизны Риччи) участвуют минимум секционных кривизн V^n и максимум нормальных кривизн подмногообразия (см. [18]).

Если верхняя грань $\bar{K}$ секционных кривизн отрицательна, то объем V замкнутого многообразия оценивается снизу через $\bar{K}$ (см. [19]). Для области M в полном односвязном V^n при этом имеет место линейное И. н.

$$(n-1)\sqrt{-\bar{K}}\, V \leqslant F,$$

где F есть $(n-1)$-мерная площадь границы M, а также И. н.

$$V^{\frac{n-1}{n}} \leqslant c(n)\, F,$$

точное значение $c(n)$ неизвестно.

В пространствах неотрицательной кривизны для выпуклых областей M получен ряд оценок, обобщающих И. н. для выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$ (см. [20], [21]). Так,

$$n^{-1}rF \leqslant V \leqslant rF,$$

где r — наибольшее удаление точек M до границы. Если в M нижняя грань секционных кривизн $\underline{K} > 0$, то $r\sqrt{\underline{K}} < \pi$ и левое неравенство уточняется:

$$F \sin^{1/n} r\sqrt{\underline{K}} \int_0^r \sin^{n-1} t\sqrt{\underline{K}}\, dt \leqslant V.$$

Справедлива оценка $rH \leqslant F$, где H — интегральная средняя кривизна. Для трехмерного случая верно И. н.:

$$2\pi\chi r \leqslant H + \Omega,$$

где χ — эйлерова характеристика границы M, а Ω — интегральная скалярная кривизна M.

В классическом И. н. площадь оценивается сверху. Для замкнутых неодносвязных поверхностей площадь может быть оценена снизу через длину λ кратчайшей негомотопной нулю петли

$$\lambda^2 C(\chi) \leqslant V. \tag{4}$$

Точное значение $C(\chi)$ известно лишь для тора ($=\sqrt{3}/2$) и проективной плоскости ($=2/\pi$). Неравенство (4) является следствием И. н. (см. [22]):

$$\lambda_e \leqslant C^{-1}(\chi) \tag{4'}$$

для экстремальной длины λ_e семейства негомотопных нулю петель.

Вопрос об аналогичных неравенствах для V^n при $n>2$ обсуждается в [22]. Если M — топологический n-мерный куб с внутренней метрикой g, то его n-объем

$$V \geqslant \prod_{i=1}^{n} g_i,$$

где g_i — расстояние в метрике g между i-й парой противоположных $(n-1)$-мерных граней. Подробнее см. [24], [25].

В теории минимальных и родственных им поверхностей получен ряд И. н., к-рые справедливы не только для гладких k-мерных подмногообразий в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant k \geqslant 2$, но и для более общих k-мерных «пленок»: подмногообразий с особенностями, потоков и др. Так, в [26], [27] установлено неравенство

$$V \leqslant C(k)\,(F+H)^{k/(k-1)}, \tag{5}$$

где F — $(k-1)$-площадь границы, а H — интеграл от модуля средней кривизны h пленки. Если $k=2$, то при условии $\alpha=2-\max|h|\operatorname{diam} M>0$ выполняется следующее И. н.:

$$4\pi V \leqslant (1-\alpha)^{-1} F^2.$$

К И. н. (5) по методам доказательств и применениям примыкают оценки снизу для объема $V(t)$ пересечения k-пленки M с шаром радиуса t с центром $p \in M$. Так, для минимальной поверхности M функция $t^{-k}V(t)$ возрастает при всех $t<d(x, \partial M)$. Нек-рые обобщения для минимальных пленок в V^n (и для пленок при условии $|h| \leqslant \text{const}$) см. [27], [28].

Лит.: [1] Bottema O., Geometric inequalities, Groningen, 1969; [2] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., М., 1966; [3] Bonnesen T., Fenchel W., Theorie der konvexen Körper, B., 1934; [4] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли и ее применения, пер. с англ., М., 1968; [5] Мельников М. С., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 4, с. 165—70; [6] Тот Л. Ф., Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, пер. с нем., М., 1958; [7] Полиа Г., Сеге Г., Изопериметрические неравенства в математической физике, [пер. с англ.], М., 1962; [8] Payne L. E., «Siam Rev.», 1967, v. 9, № 3, p. 453—88; [9] Berger M., Gauduchon P., Mazet E., Le spectre d'une variété riemannienne, B., 1971; [10] Мазья В. Г., в кн.: Проблемы математического анализа, в. 3, Л., 1972, с. 33—68; [11] его же, в кн.: Теоремы вложения и их приложения, М., 1970, с. 142—59; [12] его же, «Тр. Моск. матем. об-ва», 1969, т. 20, с. 137—72; [13] Александров А. Д., Стрельцов В. В., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 76, с. 67—80; [14] Бураго Ю. Д., «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 3, с. 666—68; [15] Shahin J. K., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 19, № 3, p. 609—13; [16] Бураго Ю. Д., Неравенства изопериметрического типа в теории поверхностей ограниченной внешней кривизны, Л., 1968; [17] Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [18] Cheeger I. H., «Amer. J. Math.», 1970, v. 92, № 1, p. 61—74; [19] Маргулис Г. А., в кн.: VI Всесоюзная топологическая конференция. Тезисы, Тб., 1972; [20] Декстер Б. В., «Матем. сб.», 1972, т. 88, № 1, с. 61—87; [21] Волков Ю. А., Декстер Б. В., «Матем. сб.», 1970, т. 83, в. 4, с. 616—38; [22] Berger M., «Ann. sci. Ecole norm. supér», sér. 4, 1972, t. 5, № 1, p. 1—44; [23] его же, там же, 1972, t. 5, № 2, p. 241—60; [24] Derrick W. R., «J. Math. and Mech.», 1968, v. 18, № 5, p. 453—72; [25] Almgren F., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1964, v. 15, № 2, p. 285; [26] Michal J., Simon L., «Communs Pure and Appl. Math.», 1973, v. 26, № 3, p. 361—79; [27] Allard W., «Ann. Math.», 1972, v. 95, p. 417—91; [28] Фоменко А. Т., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 5, с. 1049—79. *Ю. Д. Бураго.*

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО КЛАССИЧЕСКОЕ — неравенство между объемом V области в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $(n-1)$-мерной площадью F, ограничивающей область гиперповерхности:

$$n^n v_n V^{n-1} \leqslant F^n,$$

где v_n— объем единичного n-мерного шара. Равенство в И. н. к. имеет место только для шара. И. н. к. дает решение *изопериметрической задачи.* Для $n=2, 3$ И. н. к. известно с глубокой древности. Строгое доказательство И. н. к. для $n=2$ дано Ф. Эдлером (F. Edler) в 1882, для $n=3$ — Г. Шварцем (H. Schwarz) в 1890 и для всех $n \geqslant 2$ — Л. А. Люстерником в 1935 и Э. Шмидтом (E. Schmidt) в 1939 (см. [1], [2], [3]).

В двумерном случае есть много доказательств И. н. к. (см. [4]), при $n>2$ известно лишь два подхода. Первый — метод симметризации, предложенный Я. Штейнером (J. Steiner). Э. Шмидт, используя этот метод, получил аналоги И. н. к. (и неравенства Брунна — Минковского) для сферического и гиперболического n-мерных пространств (см. [5]). Второй подход состоит в сведении И. н. к. к Брунна — Минковского неравенству (см. *Брунна — Минковского теорема*) и использовании метода пропорционального деления объемов. При таком подходе естественно возникает более общее неравенство

$$n^n V^{n-1}(A)\, V(B) \leqslant F^n\,(A,\ B) \qquad (*)$$

для объемов $V(A)$, $V(B)$ двух множеств и площади $F(A, B)$ по Минковскому множества A по отношению к B. Неравенство (*) допускает интерпретацию как И. н. к. в пространстве Минковского; равенство при фиксированном «шаре» Минковского B достигается, вообще говоря, не для единственного тела A, причем эти тела отличны от «шара» (см. [6]).

Имеется ряд обобщений И. н. к., при к-рых рассматриваются не области с кусочно гладкой границей, а более широкие классы множеств, причем площадь границы понимается в обобщенном смысле (площадь Минковского, площадь по Лебегу, *периметр* множества по Каччопполи — Де Джорджи, масса *потока*, см. [7], [8]). И. н. к. остается справедливым во всех этих случаях, а также для гиперповерхностей с самопересечениями и соответствующего им ориентированного объема (см. [9]). Эти обобщения получаются из И. н. к. предельным переходом при различных вариантах понятия сходимости.

Для изопериметрич. разности $F^n - n^n v_n V^{n-1}$, как и для изопериметрич. отношения $F^n V^{1-n}$, известны оценки, усиливающие И. н. к. (см. [2]). Часть таких оценок получена для множеств специального вида, в первую очередь для *выпуклых множеств* и многогранников (см. [10]). Напр., *Боннезена неравенство* для плоских фигур:

$$F^2 - 4\pi V \geqslant (F - 4\pi r)^2,$$

где r — радиус наибольшего вписанного круга, и его обобщение (см. [11]) для выпуклых тел в R^n:

$$F^{n/(n-1)}\,(A,\ B) - n^{n/(n-1)}\,V\,(A)\,V^{1/(n-1)}\,(B) \geqslant$$
$$\geqslant \left[F\,(A,\ B) - n^{n/(n-1)}\,qV\,(B)^{1/(n-1)}\right]^n.$$

Здесь $q = \max\,\{\lambda | \lambda B$ можно поместить в $A\}$. Относительная изопериметрич. разность выпуклых тел

$$F^n\,(A,\ B) - n^n V^{n-1}\,(A)\,V\,(B)$$

может служить мерой их негомотетичности (см. [12]). Это используется, напр., при доказательстве теоремы устойчивости в проблеме Минковского (см. [13]). Об обобщениях И. н. к. на пространства переменной кривизны и родственных им неравенствах см. ст. *Изопериметрическое неравенство.*

Лит.: [1] Крыжановский Д. А., Изопериметры, 3 изд., М., 1959; [2] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., М., 1966; [3] Люстерник Л. А., «Успехи матем. наук», 1936, в. 2, с. 47—54; [4] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957; [5] Schmidt E., «Math. Nachr.», 1948, Bd 1, S. 81—157; [6] Busemann H., «Amer. J. Math.», 1949, v. 71, p. 743—62; [7] De Giorgi E., «Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. sci fis., mat. e natur. Ser. 8», 1958, № 5, № 2, p. 33—44; [8] Федерер Г., Флеминг У. Х., в сб.: Целочисленные потоки и минимальные поверхности, М., 1973, с. 9—90; [9] Radó T., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 61, № 3, p. 530—55; [10] Тот Л. Ф., Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, пер. с нем., М., 1958; [11] Дискант В. И., «Докл. АН СССР», 1973, т. 213, № 3, с. 519—21; [12] его же, «Сиб. матем. журнал», 1972, т. 13, № 4, с. 767—72; [13] Волков Ю. А., «Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем. и астроном.», 1963, в. 1, с. 33—43. *Ю. Д. Бураго.*

ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, линии кривизны к-рой образуют *изотермическую сеть*. Напр., И. п. являются *квадрики*, *вращения поверхности*, поверхности постоянной средней кривизны и, в частности, *минимальные поверхности*. Инвариантный признак И. п.— градиентность чебышевского вектора сети линий кривизны. Для каждой И. п. определяется с точностью до гомотетии другая И. п., находящаяся с первой в конформном *Петерсона соответствии*. *Инверсия* пространства сохраняет класс И. п.

И. Х. Сабитов.

ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ СЕТЬ — ортогональная сеть на поверхности V_2 евклидова пространства, малые четырехугольники к-рой, образованные двумя парами линий из различных семейств, с точностью до бесконечно малых 1-го порядка являются квадратами. Линии И. с. суть линии уровня двух сопряженных гармонич. функций. В параметрах И. с. линейный элемент поверхности имеет вид:

$$ds^2=\lambda^2(du^2+dv^2),$$

где $\lambda=\lambda(u, v)$. И. с.— частный случай *ромбической сети*. На поверхности вращения меридианы и параллели образуют И. с., *асимптотическая сеть* на минимальной поверхности — И. с. *В. Т. Базылев.*

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — координаты двумерного риманова пространства, в к-рых квадрат линейного элемента имеет вид:

$$ds^2=\lambda(\xi,\eta)(d\xi^2+d\eta^2).$$

И. к. задают конформное отображение двумерного риманова многообразия на евклидову плоскость. И. к. всегда можно ввести в компактной области регулярного двумерного многообразия. В И. к. гауссова кривизна может быть вычислена по формуле:

$$k=-\frac{\Delta\ln\lambda}{\lambda},$$

где Δ — оператор Лапласа.

И. к. рассматриваются и в двумерных псевдоримановых пространствах; квадрат линейного элемента имеет при этом вид:

$$ds^2=\psi(\xi, \eta)(d\xi^2-d\eta^2).$$

Часто используются естественно связанные с И. к. координаты μ, ν, в к-рых квадрат линейного элемента имеет вид:

$$ds^2=\lambda(\mu, \nu)\, d\mu d\nu.$$

В этом случае линии $\mu=\text{const}$ и $\nu=\text{const}$ — изотропные геодезические, в связи с чем система координат μ, ν наз. **изотропной**. Изотропные координаты находят широкое применение в общей теории относительности.

Д. Д. Соколов.

ИЗОТОННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — однозначное отображение φ частично упорядоченного множества A в частично упорядоченное множество B, сохраняющее порядок. И. о. играют роль гомоморфизмов частично упорядоченных множеств (рассматриваемых как *алгебраические системы* с одним отношением). И. о. наз. также монотонными отображениями.

О. А. Иванова.

ИЗОТОПИЯ — отношение на классе всех группоидов, определенных на одном и том же множестве G. А именно, два группоида на G наз. изотопными, если существуют такие подстановки ρ, σ и τ множества G, что для любых $a, b \in G$

$$a \circ b = (a\rho \cdot b\sigma)\ \tau,$$

где $\cdot$ и $\circ$ обозначают операции в этих группоидах. Отношение И. является отношением эквивалентности для бинарных операций на множестве G. Изоморфизм двух бинарных операций, заданных на одном и том же множестве — частный случай И. (при $\rho=\sigma=\tau^{-1}$). И. наз. главной, если τ является тождественной подстановкой. Всякий изотоп группоида изоморфен его главному изотопу. Всякий группоид, изотопный квазигруппе, сам будет квазигруппой. Всякая квазигруппа изотопна нек-рой лупе (теорема Алберта). Если лупа (в частности, группа) изотопна нек-рой группе, то они изоморфны. Если группоид с единицей изотопен полугруппе, то они изоморфны, т. е. оба являются полугруппами с единицей.

Лит.: [1] Курош А. Г., Общая алгебра, М., 1974.

ИЗОТОПИЯ — гомотопия топологич. пространства X по топологич. пространству $Y: f_t: X \to Y$ (здесь и всюду далее $t \in [0,1] = I$), в к-рой при любом t отображение f_t является гомеоморфизмом X на нек-рое подмножество Y. Эквивалентно, И.— послойное непрерывное отображение $f: X \times I \to Y \times I$ такое, что f гомеоморфно переводит слой $X \times t$ на подмножество слоя $Y \times t$. И. $F_t: Y \to Y$, при к-рой $F_t(Y) = Y$ для любого t, наз. изотопией пространства Y.

Накрывающей (или объемлющей) изотопией для И. $f_t: X \to Y$ наз. И. пространства $F_t: Y \to Y$ такая, что $F_t|_X = f_t$. Два вложения $f_0, f_1: X \to Y$ пространства X в пространство Y наз. изотопными, если существует накрывающая И. $F_t: Y \to Y$, для к-рой $F_0 = \mathrm{id}$, $F_1(f_0(X)) = f_1(X)$. Пространства X, Y наз. изотопически эквивалентными, если существуют вложения $f: X \to Y$ и $g: Y \to X$ такие, что композиции $g \circ f: X \to X$ и $f \circ g: Y \to Y$ изотопны тождественному отображению. Изотопически эквивалентные пространства наз. также (по аналогии с гомотопич. типом) пространствами одного и того же изотопического типа. Если пространства гомеоморфны, то они изотопически эквивалентны, однако есть негомеоморфные пространства одного изотопич. типа, напр. n-мерный шар и такой же шар с приклеенным к его поверхности (своим концом) отрезком. Любой гомотопич. инвариант является изотопич. инвариантом, но существуют изотопич. инварианты, напр. размерность, не являющиеся гомотопическими.

Основным вопросом в теории И. является задача продолжения изотопии, т. е. вопрос о существовании И. F_t, накрывающей данную И. f_t. Этот вопрос, равно как и общая задача нахождения полной системы изотопич. инвариантов для вложений, чаще всего рассматривается в категории топологич. многообразий и ее подкатегориях кусочно линейных и дифференцируемых многообразий.

Топологич. И. f_t многообразия M^k по многообразию M^n, $k \leqslant n$, продолжается до накрывающей И. $F_t: M^n \to M^n$ тогда и только тогда, когда соответствующее прослойное вложение $f(M^k \times [a, b]) \subset M^n \times I$ является локально плоским, здесь $[a, b]$ — подотрезок интервала $(0, 1)$. Если $n-k \neq 2$ и $n \neq 4$, то И. f_t накрывается И. F_t при условии, что вложение $f_t(M^k) \subset M^k$ является локально плоским для любого $t \in [0,1]$. В коразмерности 2 это неверно (пример — «затягивание узелка» на окружности в E^3), и потому для существования накрывающей И. необходимы дополнительные гомотопич. предположения. Достаточно близкие локально плоские вложения при $n-k\neq 2$ изотопны.

Теорема о продолжении кусочно линейной И. в общем случае формулируется аналогично (при естественном условии, что соответствующее послойное вложение является локально плоским в кусочно линейном смысле). Если $n-k\geqslant 3$, то кусочно линейная И. продолжается всегда, так как в этих коразмерностях кусочно линейное вложение является локально плоским в кусочно линейном смысле. Для $n-k=2$ или 1 необходимо дополнительное предположение, что вложения $f_t(M^k)\subset\subset M^n$ являются в кусочно линейном смысле локально плоскими, поскольку в этих коразмерностях кусочно линейное вложение может не быть локально плоским даже в топологич. смысле, напр. конус над узлом.

Дифференцируемая И. всегда продолжается до дифференцируемой накрывающей И.

Задача нахождения полной системы изотопич.инвариантов расположения многообразий M^k в M^n решена только в небольшом числе частных случаев. Так, всякое локально плоское (в топологич. смысле) вложение сфер $S^k\subset S^n$ при $n-k\geqslant 3$ или при $n-k=1$, $n\neq 4$, изотопно стандартному, а если $n-k=2$, $n\neq 4$, то локально плоская сфера S^{n-2} в S^n тогда и только тогда изотопна стандартной, когда дополнение $S^n\setminus S^{n-2}$ имеет гомотопич. тип окружности (теоремы Столлингса и Брауна). В коразмерности 2 могут существовать неизотопные узлы. Точно так же формулируется теорема Зимана—Столлингса о кусочно линейной И. (незаузленности) кусочно линейных сфер.

Инвариант кусочно линейной И. является более тонким по сравнению с топологич. И. Так, вопрос о топологич. изотопности произвольного гомеоморфизма сферы S^n тождественному решен в положительном смысле для $n\neq 4$, при этом же ограничении доказана изотопность любых двух гомеоморфизмов сферы S^n на себя, сохраняющих ориентацию. В кусочно линейной ситуации эти утверждения получаются элементарными методами без всяких ограничений. Достаточно близкие гомеоморфизмы топологич. многообразия на себя изотопны, однако существуют как угодно близкие кусочно линейно неизотопные кусочно линейные гомеоморфизмы кусочно линейных многообразий, напр. n-мерных торов при $n\geqslant 5$.

В отличие от топологического и кусочно линейного случая далеко не всегда два диффеоморфизма n-мерной сферы на себя дифференцируемо изотопны. Изотопич. классы дифференцируемых вложений сфер S^k в S^n подробно изучены для любого $k<n$. Если $k\geqslant n-3$, то существует нек-рое топологич. пространство C_q, $q==n-k$ такое, что гомотопич. группы $\pi_k(C_q)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами вложений S^k в S^n; при этом $\pi_k(C_q)=0$ для $k<2q-3$, а $\pi_{2q-3}(C_q)$ есть $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_2$ в зависимости от того, является ли q четным или нечетным числом. Таким образом, k-мерная стандартная сфера S^k, вложенная в S^n, может при $k\leqslant n-3$ заузливаться в дифференцируемом смысле, т. е. существуют такие вложения $S^k\subset S^n$, к-рые дифференцируемо не изотопны стандартному. Эти узлы наз. узлами Хефлигера. Если $k=n-2$, то дифференцируемые узлы $S^{n-2}\subset S^n$ могут заузливаться в топологич. смысле, однако их намного больше, чем топологических или кусочно линейных; когда n нечетно, имеется их полная классификация. Если $k=n-1$, $n\neq 4$, то любое дифференцируемое вложение $S^{n-1}\subset S^n$ дифференцируемо изотопно стандартному вложению.

Тот факт, что существуют диффеоморфизмы сферы S^n на себя, неизотопные тождественному, приводит к существованию нетривиальных дифференциальных структур на сферах размерности $n+1$. Хотя всякий гомеоморфизм сферы S^n, $n \neq 4$, на себя аппроксимируется диффеоморфизмом, не всегда близкие диффеоморфизмы сферы дифференцируемо изотопны, т. е. диффеоморфизм сферы на себя можно как угодно малым возмущением превратить в неизотопный ему.

Лит.: [1] Келдыш Л. В., Топологические вложения в евклидово пространство, М., 1966 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 81); [2] Рурк К., Сандерсон Б., Введение в кусочно линейную топологию, пер. с англ., М., 1974; [3] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, № 1, с. 71—96; [4] Чернавский А. В., «Матем. сб.», 1969, т. 79, № 3, с. 307—56; [5] Rushing T., Topological Embeddings, N.Y.—L., 1972; [6] Kirby R., Siebenmann L., Foundational essays on topological manifolds, smootings and triangulations, N.Y., 1977.

М. А. Штанько.

ИЗОТРОПИИ ГРУППА — множество G_x таких элементов заданной группы G, действующей на нек-ром множестве M как группа преобразований, к-рые оставляют неподвижной точку x. Это множество оказывается подгруппой в G и наз. группой изотропии точки x. В этом же смысле употребляются термины: стационарная подгруппа, стабилизатор, G-централизатор. Если M является топологич. хаусдорфовым пространством и G — топологич. группой, непрерывно действующей на M, то G_x есть замкнутая подгруппа. Если при этом M и G локально компактны, G имеет счетную базу и действует на M транзитивно, то существует естественный гомеоморфизм между пространством M и топологич. фактор-пространством G/H, где H — одна из И. г.; с ней изоморфны все G_x, $x \in M$.

Пусть M — гладкое многообразие и G — группа Ли, гладко действующая на M. Тогда И. г. G_x точки $x \in M$ индуцирует нек-рую группу линейных преобразований касательного векторного пространства $T_x(M)$; эта последняя группа наз. линейной группой изотропии в точке x. При переходе к касательным пространствам высшего порядка в точке x получаются естественные представления И. г. в структурных группах соответствующих касательных расслоений высшего порядка; они наз. группами изотропии высшего порядка (см. также *Изотропии представление*).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [3] Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975.

Ю. Г. Лумисте.

ИЗОТРОПИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — естественное линейное представление *изотропии группы* в касательном пространстве к многообразию. Если G — группа дифференцируемых преобразований многообразия M и G_x— соответствующая группа изотропии в точке $x \in M$, то И. п. Is_x: $G_x \to GL(T_xM)$ сопоставляет каждому $h \in G_x$ дифференциал $\mathrm{Is}_x(h) = dh_x$ преобразования h в точке x. Образ И. п. $\mathrm{Is}_x(G_x)$ наз. линейной группой изотропии в точке x. В случае, когда G — группа Ли со счетной базой, гладко и транзитивно действующая на M, касательное пространство T_xM естественно отождествляется с пространством $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x$, где $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_x$— алгебры Ли групп $G \supset G_x$. И. п. Is_x отождествляется при этом с представлением $G_x \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)$, к-рое индуцируется ограничением присоединенного представления Ad_G группы G на G_x.

Если однородное пространство M редуктивно, т. е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x \dotplus m$, где m — подпространство, инвариантное относительно $\mathrm{Ad}_G(G_x)$, то T_xM отождествляется с m, а Is_x — с представлением $h \to (\mathrm{Ad}_G h)|_m$ (см. [3]). В этом случае И. п. является точным, если G действует эффективно.

И. п. и линейная группа изотропии играют важную роль при изучении *инвариантных объектов* на однородных пространствах. Инвариантные тензорные поля на однородном пространстве M находятся во взаимно однозначном соответствии с тензорами в пространстве T_xM, инвариантными относительно И. п. В частности,

M обладает римановой инвариантной метрикой тогда и только тогда, когда в $T_x M$ существует евклидова метрика, инвариантная относительно линейной группы изотропии. Существование на однородном пространстве M положительной *инвариантной меры* равносильно условию $|\det A| = 1$ для всех $A \in \mathrm{Is}_x(G_x)$. Однородное пространство ориентируемо тогда и только тогда, когда $\det A > 0$ $(A \in \mathrm{Is}_x(G_x))$. Инвариантные линейные связности на M находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными отображениями $\Lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(T_x M)$, обладающими следующими свойствами:

$$\Lambda \Big|_{\mathfrak{g}_x} = (d\mathrm{Is}_x)_e,$$

$$\Lambda((\mathrm{Ad}h)X) = \mathrm{Is}_x(h)\ \Lambda(X)\ \mathrm{Is}_x(h)^{-1} \quad (h \in G_x).$$

Обобщением понятия И. п. является понятие И. п. порядка r. Это гомоморфизм $h \to j_x^r h$ группы G_x в группу $L^r(T_x M)$ обратимых r-струй диффеоморфизмов пространства $T_x M$, переводящих в себя нуль. Это понятие применяется при изучении инвариантных объектов высших порядков.

Лит.: [1] Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975; [2] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [3] Рашевский П. К., в кн.: Тр. семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике, в. 9, М.—Л., 1952, с. 49—74; [4] Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, пер. с франц., М., 1949.

А. Л. Онищик.

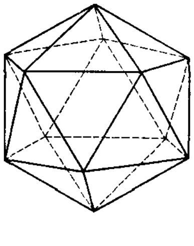
ИЗОТРОПНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ — конгруэнция с неопределенными главными поверхностями.

ИЗОТРОПНЫЙ ВЕКТОР — вектор, ортогональный сам себе. Пусть E — векторное пространство над полем действительных или комплексных чисел, Φ — невырожденная билинейная форма с сигнатурой (p, q), $p \neq 0$, $q \neq 0$ на $E \times E$. Изотропным вектором наз. ненулевой вектор $x \in E$, для к-рого $\Phi(x, x) = 0$. Иногда говорят, что И. в. имеет нулевую длину (или норму). Множество всех И. в. наз. изотропным конусом. Подпространство $V \subset E$ наз. изотропным, если существует ненулевой вектор $z \in V$, ортогональный V (т. е. сужение формы Φ на $V \times V$ вырождено: $V \cap V^{\perp} \neq \{0\}$). Векторное подпространство V наз. вполне изотропным, если все его векторы суть И. в. В релятивистской интерпретации Вселенной пространство-время локально рассматривается как четырехмерное векторное пространство с формой сигнатуры (3, 1), траектории фотонов — как изотропные прямые, а изотропный конус наз. световым конусом.

А. Б. Иванов.

ИКОСАЭДР — один из пяти правильных многогранников. И. имеет 20 граней (треугольных), 30 ребер, 12 вершин (в каждой вершине сходятся 5 ребер). Если a — длина ребра И., то его объем

$$V = \frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5}) \cong 2{,}1817 a^3.$$



ИКОСАЭДРА ПРОСТРАНСТВО — трехмерное пространство, являющееся пространством орбит действия бинарной группы икосаэдра на трехмерной сфере. Открыто А. Пуанкаре как пример гомологич. сферы рода 2 при рассмотрении *Хегора диаграмм.* И. п. является разветвленным p-листным накрытием S^3 с ветвлением вдоль торического узла типа (q, r), где p, q, r любая перестановка чисел 2, 3, 5. Аналитически И. п. может быть задано как пересечение поверхности

$$z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0$$

в $\mathbb{C}^2$ с единичной сферой. Наконец, И. п. может быть отождествлено с *додекаэдра пространством.*

А. В. Чернавский.

ИММЕРСИЯ — то же, что *погружение.*

ИММУННОЕ МНОЖЕСТВО — бесконечное множество натуральных чисел, не содержащее бесконечных рекурсивно перечислимых подмножеств. В частности, само И. м. не является рекурсивно перечислимым. И. м. по своей насыщенности рекурсивно перечислимыми подмножествами в известном смысле противоположны *продуктивным множествам.* Рекурсивно перечислимые множества с иммунными дополнениями наз. простыми и образуют один из важных классов нерекурсивных рекурсивно перечислимых множеств. Типы рекурсивной эквивалентности иммунных и конечных множеств, называемые изолями, представляют интерес с точки зрения рекурсивного аналога теории кардинальных чисел. В *рекурсивной теории множеств* и ее приложениях используются также некоторые специальные подклассы класса И. м., особенно гипериммунные (гипериммунным наз. множество натуральных чисел, последовательность элементов к-рого, расположенных в порядке возрастания, не мажорируется никакой общерекурсивной функцией; рекурсивно перечислимое множество с гипериммунным дополнением наз. гиперпростым).

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

В. А. Душский.

ИМПЛИКАТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — *пропозициональная форма* вида

$$C_1 \supset (C_2 \supset \ldots (C_n \supset \bot) \ldots),$$

где все C_i, $i = 1, \ldots, n$, имеют вид

$$C_{i1} \supset (C_{i2} \supset \ldots (C_{im_i} \supset \bot) \ldots),$$

каждое C_{ij}, $i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, m_i$, есть либо переменная, либо отрицание переменной, и $\bot$ есть логич. символ, обозначающий ложь. Для всякой пропозициональной формулы A можно построить классически эквивалентную ей И. н. ф. B, содержащую те же переменные, что и A. Такая формула B наз. И. н. ф. формулы A.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960.

С. К. Соболев.

ИМПЛИКАТИВНОЕ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — пропозициональное исчисление, использующее единственную исходную связку $\supset$ (импликацию). Примерами И. п. и. являются полное (или классическое) И. п. и., задаваемое аксиомами

$$p \supset (q \supset p), \quad ((p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))),$$
$$((p \supset q) \supset p) \supset p$$

и правилами вывода: *модус поненс* и подстановка, а также позитивное И. п. и., задаваемое аксиомами

$$p \supset (q \supset p), \quad (p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$$

и теми же правилами вывода. Всякая импликативная формула, т. е. формула, содержащая только связку $\supset$, выводима в полном (или позитивном) И. п. и. тогда и только тогда, когда она выводима в классическом (соответственно интуиционистском) пропозициональном исчислении. Для любого конечного множества V переменных среди импликативных формул с переменными из V существует лишь конечное число попарно не эквивалентных в позитивном И. п. и. (см. [3]). Существуют конечно аксиоматизируемые И. п. и. с неразрешимой проблемой выводимости (см. [4]).

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [2] Lukasiewicz J., Tarski A., «C. r. Soc. Sci. Lettres Varsovie, Cl. III», 1930, v. 23, p. 30—50; [3] Diego A., Sur les algèbres de Hilbert, P., 1966; [4] Gladstone M. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 118, p. 192—210.

С. К. Соболев.

ИМПЛИКАЦИЯ — логическая операция, соответствующая образованию высказывания «если A, то B» из высказываний A и B. В формализованных языках И. чаще всего обозначается символами $\supset$, $\rightarrow$, $\Rightarrow$. Высказывание A наз. посылкой высказывания $A \supset B$, а высказывание B — его заключением. Точный смысл высказывания $A \supset B$ различен при классическом, конструктивном и других подходах к построению семантики языка. В языках с классич. семантикой употребление И. согласовано с истинностной таблицей:

A	B	$A \supset B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Так понимаемая И. наз. материальной импликацией. *В. Е. Плиско.*

ИМПРИМИТИВНАЯ ГРУППА — группа G взаимно однозначных отображений на себя (*подстановок*) нек-рого множества S, для к-рой существует разбиение множества S в объединение непересекающихся подмножеств $S_1, \ldots, S_m$, $m \geqslant 2$, обладающее следующими свойствами: число элементов хотя бы в одном из S_i больше единицы; для любой подстановки $g \in G$ и любого номера i, $1 \leqslant i \leqslant m$, существует такой номер j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что g отображает S_i на S_j.

Набор подмножеств $S_1, \ldots, S_m$ наз. системой импримитивности, а сами подмножества S_i — областями импримитивности группы G. Не импримитивная группа подстановок наз. примитивной.

Примером И. г. может служить нетривиальная интранзитивная группа G подстановок множества S (см. *Транзитивная группа*): в качестве системы импримитивности можно взять набор всех *орбит* (областей транзитивности) G на S. Транзитивная группа подстановок G множества S примитивна тогда и только тогда, когда для какого-либо (а, значит, и для любого) элемента $y \in S$ множество подстановок из G, оставляющих y на месте, является максимальной подгруппой в G.

Понятие И. г. подстановок имеет аналог для групп линейных преобразований векторных пространств. Именно, линейное представление ρ группы G наз. импримитивным, если существует разложение пространства V представления ρ в прямую сумму собственных подпространств $V_1, \ldots, V_m$, обладающее следующим свойством: для любого элемента $g \in G$ и любого номера i, $1 \leqslant i \leqslant m$, найдется такой номер j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что

$$\rho(g)(V_i) = V_j.$$

Набор подпространств $V_1, \ldots, V_m$ наз. системой импримитивности представления ρ. Если V не обладает разложением указанного типа, то представление ρ наз. примитивным. Импримитивное представление ρ наз. транзитивным импримитивным, если для любой пары подпространств V_i и V_j из системы импримитивности существует такой элемент $g \in G$, что $\rho(g)(V_i) = V_j$. Группа $\rho(G)$ линейных преобразований пространства V и G-модуль V, определяемый представлением ρ, также наз. импримитивными (примитивными), если представление ρ является импримитивным (примитивным).

Примеры. Представление ρ симметрич. группы S_n в n-мерном векторном пространстве над полем k, переставляющее элементы базиса $e_1, \ldots, e_n$, является транзитивным импримитивным; одномерные подпространства $\{ke_1, \ldots, ke_n\}$ образуют для ρ систему импримитивности. Транзитивным импримитивным является также *регулярное представление* конечной группы G над полем k; набор одномерных подпространств kg, где g пробегает всю G, образует систему импримитивности. Более общо, любое *мономиальное представление* конечной группы является импримитивным. Представление циклич. группы порядка $m \geqslant 3$ поворотами действительной плоскости на углы, кратные $2\pi/m$, примитивно.

Понятие импримитивного представления тесно связано с понятием *индуцированного представления.* А именно, пусть ρ — импримитивное конечномерное представление конечной группы G с системой импримитивности $\{V_1, \ldots, V_n\}$. Множество $\{V_1, \ldots, V_n\}$ разбивается в объединение орбит относительно действия группы G, определенного представлением ρ. Пусть $\{V_{i_1}, \ldots, V_{i_s}\}$ — полный набор представителей различных орбит этого действия,

$$H_m = \left\{ g \in G \,\middle|\, \rho(g)(V_{i_m}) = V_{i_m} \right\}, \quad m = 1, \ldots, s,$$

φ_m — представление группы H_m в V_{i_n}, определенное сужением представления ρ на H_m, и ρ_m — представление группы G, индуцированное φ_m. Тогда ρ эквивалентно прямой сумме представлений $\rho_1, \ldots, \rho_s$. Обратно, пусть $H_1, \ldots, H_s$ — какой-либо набор подгрупп группы G, φ_m — представление группы H_m в конечномерном векторном пространстве W_m, $m=1, \ldots, s$, и ρ_m — представление группы G, индуцированное φ_m. Пусть также $\{g_{m,j}\}_{j=1}^{r_m}$ — система представителей левых смежных классов группы G по H_m. Тогда прямая сумма представлений $\rho_1, \ldots, \rho_s$ импримитивна, а $\rho(g_{m,j})(W_m)$, $j=1, \ldots, r_m$, $m=1, \ldots, s$, является системой импримитивности (здесь W_m канонически отождествляется с подпространством в V).

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962; [2] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969.

Н. Н. Вильямс, В. Л. Попов.

ИМЯ — языковое выражение, служащее для обозначения определенного объекта. Объект, обозначаемый данным И., наз. денотатом. В математике широко используются И. для конкретных математических объектов, напр. e, π — для известных трансцендентных чисел, $\sin$ — для функции синус, $\varnothing$ — для пустого множества и т. д. Из таких простейших И. могут быть образованы составные имена, к-рые называют объект, используя И. других объектов. Напр., $\sin \pi$ есть другое И. числа 0. Имя не только называет денотат, но и выражает определенный смысл. Так, выражения

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\pi}{2}$$

суть И. числа 1, однако смысл их различен. Смыслом И. однозначно определяется его денотат. Если в составном И. нек-рое входящее в него И. заменить на И., имеющее тот же денотат, то денотат составного И. не изменится. Если в составном И. нек-рое входящее в него И. заменить на его синоним (т. е. И., имеющее тот же смысл), то смысл составного И. не изменится.

Наряду с И. в математике употребляются выражения, содержащие переменные и превращающиеся в И. после подстановки вместо переменных И. объектов из области значений переменных. Такие выражения наз. именными формами. Выражения e^x, $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, где x — переменная для действительных чисел, являются примерами именных форм.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960.

В. Е. Плиско.

ИНВАРИАНТ — отображение φ рассматриваемой совокупности M математич. объектов, снабженной фиксированным отношением эквивалентности ρ, в другую совокупность N математич. объектов, постоянное на классах эквивалентности M по ρ (точнее: И. отношения эквивалентности ρ на M). Если X — объект из M, то весьма часто говорят, что $\varphi(M)$ — И. объекта X. Концепция И. является одной из важнейших в математике, поскольку изучение И. непосредственно связано с задачами классификации объектов того или иного типа. По существу, целью всякой математич. классификации является построение нек-рой полной системы И. (по возможности, наиболее простой), то есть такой системы, к-рая разделяет любые два неэквивалентных объекта из рассматриваемой совокупности.

Простейшим примером И. могут служить так наз. И. действительных плоских *линий второго порядка*. А именно, пусть M — множество всех таких линий, а ρ — отношение эквивалентности на M, определенное правилом: $\Gamma \in M$ эквивалентна $\Gamma' \in M$ тогда и только тогда, когда Γ' получается из Γ движением (т. е. изометрией) плоскости. Если $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ — уравнение линии $\Gamma \in M$ в какой-либо декартовой системе координат, то числа $\sigma(\Gamma)=A+C$, $\delta(\Gamma)=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ и $\Delta(\Gamma)=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ не зависят от выбора системы координат (хотя само уравнение линии Γ — зависит). Если две линии Γ и $\Gamma' \in M$ эквивалентны, то $\sigma(\Gamma)=\sigma(\Gamma')$, $\delta(\Gamma)=\delta(\Gamma')$ и $\Delta(\Gamma)=\Delta(\Gamma')$. Иначе говоря, отображения σ, δ и Δ множества M в множество N всех действительных чисел являются И. отношения эквивалентности ρ — эти отображения и называют И. действительных плоских линий второго порядка. Значения этих И. на конкретной линии позволяют определить тип этой линии (эллипс, гипербола, парабола, пара прямых, мнимая кривая).

Другой классич. пример — *двойное отношение* упорядоченного набора четырех точек, лежащих на одной прямой в действительном проективном пространстве. Двойное отношение не изменится, если подвергнуть эти точки проективному преобразованию всего пространства. В этом примере: M — это множество упорядоченных четверок точек проективного пространства, лежащих на одной прямой; отношение эквивалентности ρ на M определяется по правилу: наборы F и $F' \in M$ эквивалентны тогда и только тогда, когда F переводится в F' проективным преобразованием пространства; N — множество действительных чисел. Взятие двойного отношения определяет отображение M в N, являющееся И. отношения ρ; именно в этом смысле говорят, что двойное отношение — И. четырех точек (относительно проективной группы).

Сопоставление *квадратичной форме* от n переменных ее ранга также доставляет пример И.: ранг не меняется при замене формы на эквивалентную (коротко: ранг есть И. квадратичной формы). Более того, если формы рассматриваются над полем комплексных чисел, то ранг составляет полную систему И. форм от n переменных — две формы эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги равны. Если же рассматривать формы над полем действительных чисел, то появляется еще один И.— сигнатура формы; ранг и сигнатура составляют полную систему И. В этих примерах M — множество квадратичных форм от n переменных, ρ — отношение эквивалентности, определенное невырожденными линейными преобразованиями переменных, N — множество целых чисел.

Общая черта, объединяющая эти (и многие другие) примеры, состоит в том, что отношение эквивалентности ρ определяется с помощью нек-рой группы G преобразований множества M (т. е. X и $Y \in M$ ρ-эквивалентны тогда и только тогда, когда $Y=g(X)$ для нек-рого $g \in G$); И., возникающие в таких случаях, наз. И. группы G. В первом примере — это преобразования M, индуцированные группой изометрий плоскости, во втором — проективной группой, в третьем — полной линейной группой невырожденных преобразований переменных. Эти примеры иллюстрируют общую концепцию, выдвинутую Ф. Клейном (F. Klein) (так наз. эрлангенская программа), согласно к-рой всякая группа преобразований может служить группой «преобразований систем координат» (автоморфизмов) в некоторой геометрии; величины, определяемые объектами этой геометрии и не меняющиеся при «смене координат» (инварианты), описывают внутренние свойства рассматриваемой геометрии и дают «структурную» классификацию ее теорем. Так, напр., задача проективной геометрии — нахождение И. (и соотношений между ними) для проективной группы, евклидовой геометрии — для группы движений (изометрий) евклидова пространства и т. д. На этом пути возникла классическая *инвариантов теория*, в к-рой рассматриваются лишь И. специального вида (полиномиальные или рациональные И. для групп линейных преобразований или, шире, числовые функции, постоянные на орбитах нек-рой группы).

Однако общее понятие И. является более широким и не может быть ограничено рамками И. групп преобразований, поскольку не всегда отношение эквивалентности ρ на рассматриваемом множестве M математич. объектов определено действием группы. Примеры И. такого типа можно указать во многих областях математики. В алгебраич. и гомотопич. топологии каждому топологич. пространству сопоставляют его гомотопич. группы, а также группы сингулярных гомологий (с коэффициентами в нек-рой группе); эти группы являются И. относительно гомотопич. эквивалентности пространств. В алгебраич. геометрии рассматривается отношение бирациональной эквивалентности алгебраич. многообразий; размерность многообразия и, если ограничиться рассмотрением гладких полных многообразий, арифметич. род дают примеры И. этого отношения эквивалентности. В дифференциальной топологии многообразия рассматриваются с точностью до диффеоморфизма; классы Штифеля — Уитни многообразия являются И. относительно этого отношения эквивалентности. В классической дифференциальной геометрии рассматривается полная кривизна поверхности; она является И. изгибания. В теории абелевых групп рассматриваются так наз. И. конечно порожденных групп — ранг и порядки примарных компонент; они составляют полный набор И. для множества таких групп, рассматриваемых с точностью до изоморфизма.

В. Л. Попов.

Arf-ИНВАРИАНТ, инвариант Арфа,— инвариант квадратичной формы по модулю 2, заданной на целочисленной решетке, снабженной билинейной кососимметрич. формой. Пусть Π — целочисленная решетка размерности $k=2m$ и $\psi(x, y)$ — форма, для к-рой $\psi(x, y)=-\psi(y, x)$. Имеются базисы вида $\{e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m\}$, наз. симплектическими, в к-рых матрица формы $\psi(x, y)$ приводится к блочнодиагональному виду: по диагонали стоят блоки $\left\|\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right\|$, т. е.

$$\psi(e_i, f_i)=-\psi(f_i, e_i)=1,$$

а в других местах — нули.

Пусть на Π задано отображение

$$\psi_0 : \Pi \to \mathbb{Z}_2,$$

для к-рого

$$\psi_0(x, y)=\psi_0(x)+\psi_0(y)+\psi(x, y) \bmod 2$$

— «квадратичная форма по модулю 2». Выражение

$$\sum_i \psi_0(e_i)\psi_0(f_i)$$

и наз. инвариантом Арфа [1]. Если это

выражение равно нулю, то существует симплектический базис, на всех элементах к-рого форма ψ_0 равна нулю, если же это выражение равно единице, то существует симплектический базис, на всех элементах к-рого, кроме e_1 и f_1, форма равна нулю, в то время как

$$\psi_0(e_1)=\psi_0(f_1)=1.$$

Лит.: [1] Arf C., «J. reine und angew. Math.», 1941, Bd 183, S. 148—67. *А. В. Чернавский.*

ИНВАРИАНТНАЯ МЕРА — 1) И. м. в измеримом пространстве $(X, \mathfrak{B})$ относительно измеримого преобразования T этого пространства — такая мера μ на $\mathfrak{B}$, что $\mu(A)=\mu(T^{-1}A)$ для всех $A\in\mathfrak{B}$. Обычно подразумевается, что мера конечная (т. е. $\mu(X)<\infty$) или по крайней мере σ-конечная (т. е. X можно представить в виде счетного объединения $\bigcup X_n$, где $\mu(X_n)<\infty$. В наиболее важном случае, когда T — биекция и отображение T^{-1} тоже измеримо (тогда говорят, что T обратимо, имея в виду обратимость в классе измеримых преобразований), инвариантность меры μ эквивалентна тому, что $\mu(A)=\mu(TA)$ для всех $A\in\mathfrak{B}$. Наконец, И. м. для семейства (измеримых) преобразований — полугруппы, группы, потока и т. д.— называется мера, инвариантная относительно всех преобразований из этого семейства. Понятие И. м. играет важную роль в теории динамич. систем и эргодич. теории. В последней рассматриваются различные свойства динамич. систем в пространстве с мерой $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, имеющих μ своей И. м. Если динамич. система имеет несколько И. м., напр. μ и ν, то ее свойства как системы в $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ (свойства по отношению к И. м. μ) могут отличаться от ее же свойств как системы в $(X, \mathfrak{B}, \nu)$ (свойств по отношению к ν). Когда у фиксированной динамич. системы рассматриваются разные И. м., то о свойствах системы относительно И. м. μ часто говорят короче как о свойствах меры μ (напр., «эргодичность μ» означает эргодичность данной системы как системы в $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, т. е. отсутствие инвариантных множеств

$$A\in\mathfrak{B} \text{ с } \mu(A)>0$$

и

$$\mu(X\setminus A)>0).$$

Исторически первые примеры И. м. связаны с дифференциальными свойствами преобразований, образующих потоки нек-рых специальных типов на гладких многообразиях (см. *Гамильтонова система*, *Интегральный инвариант*). В терминах (локальных) координат $x_1, \ldots, x_n$ эти меры μ представляются в виде $d\mu=\rho dx_1 \ldots dx_n$, причем имеются явные выражения для плотности $\rho=\rho(x_1, \ldots, x_n)$. В примерах алгебраич. происхождения (групповые сдвиги и т. д.) И. м. часто является мера Хаара или мера, получающаяся из нее с помощью какой-нибудь естественной конструкции.

В топологич. динамике Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым ([1], см. также [2], [3]) доказано существование конечных эргодич. И. м. для непрерывных потоков и каскадов на метрич. компакте X (возможны нек-рые обобщения [4], [5], [6]). Неэргодические конечные И. м. являются, в нек-ром смысле, линейными комбинациями эргодических; носители конечных И. м. определенным образом связаны с поведением траекторий в X (все эти И. м. сосредоточены на так наз. минимальном центре притяжения [3]). Не приходится рассчитывать на более подробные утверждения о свойствах И. м. в общем случае — они могут быть совсем различными. Так, в одном случае эргодич. И. м. может быть сосредоточена в одной точке, в другом — быть положительной для всех открытых подмножеств X и обладать свойствами «квазислучайного» характера (перемешивание, положительная энтропия и т. д.), описание и исследование к-рых относится к эргодич. теории (тогда как обращение к последней в предыдущем случае было бы бессодержательным). Поэтому имеется ряд исследований о существовании И. м. с теми или иными интересными свойствами у динамич. систем того или иного специального типа.

Наконец, возможна чисто метрич. постановка вопроса об И. м. Пусть динамич. система имеет квазиинвариантную меру μ; существует ли у нее И. м. ν, эквивалентная μ? (Обсуждение этой постановки вопроса см. в [7]. О другой постановке см. [8]). Ответ в общем случае отрицательный, даже если требовать только σ-конечности ν, а $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ — Лебега пространство [9]. Известны различные варианты необходимых и достаточных условий существования конечной И. м.; наиболее удачными представляются условия Хаджана и Какутани [10], [8]. *Д. В. Аносов.*

2) И. м. в теории вероятностей определяется относительно переходной вероятности. Пусть $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, где $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра, и $P(x, A)$, $x \in X$, $A \in \mathcal{A}$ — переходная вероятность (т. е. $P(x, \cdot)$, есть вероятностная мера на $\mathcal{A}$ при каждом $x \in X$ и $P(\cdot, A)$ — измерима относительно $\mathcal{A}$ при каждом $A \in \mathcal{A}$). Счетно-аддитивная мера μ на $(X, \mathcal{A})$ наз. инвариантной относительно P, если

$$\mu(A) = \int_X P(x, A)\, \mu(dx), \ \forall A \in \mathcal{A}.$$

Если T — измеримое отображение $(X, \mathcal{A})$ в себя, то мера μ инвариантна относительно T тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно переходной вероятности $P(x, A) = \chi_{T(x)}(A)$, где $\chi_y(A) = 1$ при $y \in A$ и $\chi_y(A) = 0$ при $y \notin A$. *В. В. Сазонов.*

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969, с. 411—463; [2] Окстоби Дж., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, в. 3, с. 75—97; [3] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [4] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969, с. 561—69; [5] Фомин С. В., «Матем. сб.», 1943, т. 12, № 1, с. 99—108; [6] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 3, с. 261—74; [7] Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [8] Владимиров Д. А., Булевы алгебры, М., 1969; [9] Ornstein D. S., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1960, v. 66, № 4, p. 297—300; [10] Hayian A., Kakutani Sh., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1964, v. 110, p. 136—51; [11] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [12] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [13] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967.

ИНВАРИАНТНАЯ МЕТРИКА — риманова метрика m на многообразии M, не изменяющаяся при всех преобразованиях из данной группы Ли G преобразований. Сама группа G при этом наз. группой движений (изометрий) метрики m (или риманова пространства (M, m)).

Группа Ли G преобразований многообразия M, действующая на M совершенно (т. е. так, что отображение $G \times M \to M \times M$, $(g, x) \to (gx, x)$ является собственным), обладает инвариантной метрикой. Обратно, группа всех движений любой римановой метрики (а также любая ее замкнутая подгруппа) является совершенной группой Ли преобразований. В этом случае стабилизатор

$$G_x = \{g \in G, \ gx = x\}$$

любой точки $x \in M$ — компактная подгруппа в G. Если сама группа G компактна, то G-инвариантную метрику m_0 на M можно построить, усреднив произвольную метрику m на M по группе G:

$$m_0 = \int_G (g^* m)\, dg,$$

где интеграл берется по мере Хаара.

В случае, когда группа G транзитивна, многообразие M отождествляется с пространством смежных классов G/H группы G по стабилизатору $H = G_{x_0}$ фиксированной точки $x_0 \in M$, и для существования G-инвариантной метрики на M необходимо и достаточно, чтобы линейная группа изотропии (см. *Изотропии представление*) имела компактное замыкание в $GL(T_{x_0}(M))$ (в частности, достаточно, чтобы H была компактна). В этом случае пространство G/H редуктивно, т. е. алгебра Ли $\mathfrak{G}$ группы G допускает разложение $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}+\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}$ — подалгебра, отвечающая H, $\mathfrak{M}$ — подпространство, инвариантное относительно $\mathrm{Ad}H$, где Ad — *присоединенное представление* группы G. Если отождествить m с $T_{x_0}(M)$, то любая G-инвариантная метрика m на M получается из нек-рой $\mathrm{Ad}H$-инвариантной евклидовой метрики $\langle\ ,\rangle$ на $\mathfrak{M}$ следующим образом:

$$m_x(X,\ Y)=\langle g^{-1}X,\ g^{-1}Y\rangle,\ X,\ Y\in T_xM,$$

где $g\in G$ — такой элемент, что $gx_0=x$.

Тензорные поля, связанные с G-инвариантной метрикой (тензор кривизны, его ковариантные производные и т. п.), суть G-инвариантные поля. В случае однородного пространства $M=G/H$ их значение в точке x_0 выражается через операторы Номидзу $L_X\in\mathrm{End}(\mathfrak{M})$, задаваемые формулой

$$L_XY=-\nabla_YX^*=(\mathscr{L}_{X^*}-\nabla_{X^*})_{x_0}Y,\ Y\in\mathfrak{M},\ X\in\mathfrak{G},$$

где X^*— поле скоростей однопараметрич. группы преобразований $\exp tX$, ∇ — оператор ковариантного дифференцирования римановой связности, а $\mathscr{L}$ — оператор производной Ли. В частности, для оператора кривизны $\mathrm{Riem}\,(X,\ Y)$ и для секционной кривизны $K(X,\ Y)$ по направлению, задаваемому ортонормальным базисом $X,\ Y\in\mathfrak{M}$, справедливы следующие формулы:

$$\mathrm{Riem}\,(X,\ Y)=[L_X,\ L_Y]-L_{[X,\ Y]},$$

$$K(X,\ Y)\equiv-\langle\mathrm{Riem}\,(X,\ Y)\,X,\ Y\rangle=$$
$$=\langle L_XY,\,L_XY\rangle-\langle[X,\,Y]_m,\,[X,\,Y]_m\rangle-\langle[Y,\,[Y,\,X]]_m,\,X\rangle-$$
$$-\langle L_XX,\ L_YY\rangle,$$

где Z_m— проекция $Z\in\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{M}$ вдоль $\mathfrak{H}$.

Операторы Номидзу выражаются в терминах алгебры Ли $\mathfrak{G}$ и метрики $\langle\ ,\rangle$ формулой

$$2\langle L_XY,\ Z\rangle=$$
$$=\langle[X,\ Y]_m,\ Z\rangle-\langle X,\ [Y,\ Z]_m\rangle-\langle Y,\ [X,\ Z]_m\rangle,$$

где $X\in\mathfrak{G}$, $Y,\,Z\in\mathfrak{M}$. Из определения операторов Номидзу следует, что их действие на G-инвариантные поля отличается только знаком от действия ковариантной производной в точке x_0. Если риманово пространство $(G/H,\ m)$ не содержит плоских сомножителей в разложении де Рама, то линейная алгебра Ли, порожденная операторами Номидзу L_X, $X\in\mathfrak{G}$, совпадает с алгеброй голономии пространства $(G/H,\ m)$ в точке x_0.

Описание геодезических инвариантной метрики на однородном пространстве можно дать следующим образом. Пусть сначала $M=G$ — группа Ли, действующая на себе при помощи левых сдвигов. Пусть γ_t— геодезическая левоинвариантной метрики m на группе Ли G и $X_t=\gamma_t^{-1}\dot{\gamma}_t$ — соответствующая ей кривая в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ (годограф скорости). Кривая X_t удовлетворяет уравнению годографа

$$\dot{X}_t-L_{X_t}X_t=\dot{X}_t-(\mathrm{ad}^*X_t)\,X_t=0,$$

где ad^*X — оператор, сопряженный оператору присоединенного представления adX. Геодезическая γ_t восстанавливается по своему годографу скорости χ_t из дифференциального уравнения $\dot{\gamma}_t=\gamma_tX_t$ (линейного, если группа G линейна) или из функциональных соотношений

$$\langle X_t,\ (\mathrm{Ad}\,\gamma\,(t))\,Y\rangle=\mathrm{const},\ Y\in\mathfrak{G},$$

задающих первые интегралы этого уравнения. Таким образом, описание геодезических метрики m сводится к интегрированию уравнения годографа, к-рое иногда удается полностью проинтегрировать. Напр., в случае, когда метрика m инвариантна и относительно правых сдвигов, геодезические, проходящие через точку e, суть однопараметрич. подгруппы группы G. Такая метрика существует на любой компактной группе Ли. В случае произвольного однородного пространства $M=G/H$ инвариантную метрику m на G можно «поднять» до такой левоинвариантной метрики $\tilde{m}$ на G, что естественное расслоение $G \to G/H$ риманова пространства $(G, \tilde{m})$ над римановым пространством $(G/H, m)$ является римановым расслоением, т. е. при проектировании длина касательных векторов, ортогональных к слою, не меняется. Для этого достаточно продолжить метрику $\langle \ , \rangle$ на всю алгебру $\mathfrak{G}$, полагая

$$\langle \mathfrak{H}, \mathfrak{M} \rangle = 0 \text{ и } \langle X, Y \rangle = -\operatorname{Tr} L_X L_Y \, (X, Y \in \mathfrak{H}),$$

и разнести ее левыми сдвигами до метрики $\tilde{m}$ на G. Геодезические риманова пространства $(G/H, m)$ являются проекциями ортогональных к слоям геодезических риманова пространства $(G, \tilde{m})$.

Поскольку функция $X \to \langle X, X \rangle$ на $\mathfrak{G}$ всегда является первым интегралом уравнения годографа (и н т е г р а л о м э н е р г и и), соответствующее уравнению векторное поле на $\mathfrak{G}$ касается сфер $\langle X, X \rangle = \mathrm{const}$. Это влечет за собой полноту уравнения годографа, а тем самым и полноту любой инвариантной римановой метрики на однородном пространстве. Для псевдоримановых метрик свойство полноты, вообще говоря, уже не имеет места. Однако любая инвариантная псевдориманова метрика на компактном однородном пространстве полна.

См. также *Симметрическое пространство.*

Лит.: [1] Х е л г а с о н С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [2] П е т р о в А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966; [3] K o b a y a s h i S., N o m i z u K., Foundation of differential geometry, v. 2, N.Y., 1969; [4] K o b a y a s h i S., Transformation groups in differential geometry, B.—Hdlb.—N.Y., 1972; [5] W o l f J. A., Spaces of constant curvature, N. Y., 1967; [6] L i c h n e r o w i c z A., Géométrie des groupes de transformations, P., 1958. *Д. В. Алексеевский.*

ИНВАРИАНТНАЯ ПОДГРУППА — то же, что *нормальный делитель*, т. е. подгруппа H группы G, переходящая в себя при любом *внутреннем автоморфизме* группы G.

ИНВАРИАНТНАЯ СТАТИСТИКА — статистика, принимающая постоянные значения на орбитах, порожденных группой взаимно однозначных измеримых преобразований выборочного пространства. Таким образом, если $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ — выборочное пространство, $G=\{g\}$ — группа взаимно однозначных $\mathfrak{B}$-измеримых преобразований $\mathfrak{X}$ на себя, а $t(x)$ — И. с., то $t(gx)=t(x)$ для всех $x \in \mathfrak{X}$ и $g \in G$. И. с. играют важную роль при построении *инвариантных критериев.*

Лит.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [2] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [3] К л и м о в Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973. *М. С. Никулин.*

ИНВАРИАНТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ н а г р у п п е — интегрирование функций на топологич. группе, обладающее нек-рым определенным свойством инвариантности относительно групповых операций. А именно, пусть G — локально компактная топологич. группа, $C_0(G)$ — векторное пространство всех непрерывных финитных (с компактными носителями) комплексно-значных функций на G, I — интеграл на $C_0(G)$, т. е. линейный положительный ($If \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$) функционал на $C_0(G)$. Интеграл I наз. л е в о и н в а р и а н т н ы м (п р а в о и н в а р и а н т н ы м), если $I(gf)=If$ (соответственно $I(fg)=If$) для всех $g \in G$, $f \in C_0(G)$; здесь

$$(gf)(x)=f(g^{-1}x), \quad (fg)(x)=f(xg^{-1}).$$

Интеграл I наз. д в у с т о р о н н е и н в а р и а н т н ы м, если он одновременно лево- и правоинвариантен.

Отображение $I \to \hat{I}$, где $\hat{I}f = I\hat{f}$, $\hat{f}(x) = f(x^{-1})$, определяет взаимно однозначное соответствие между классами левоинвариантных и правоинвариантных интегралов в $C_0(G)$. Если $I = \hat{I}$, то интеграл I наз. инверсионно инвариантным.

На всякой локально компактной группе G существует ненулевой левоинвариантный интеграл, единственный с точностью до числового множителя (теорема Хаара — Неймана — Вейля). Этот интеграл наз. левым интегралом Хаара. Имеет место равенство

$$I(fg) = \Delta(g)\, If,$$

где $g \in G$, $f \in C_0(G)$, а Δ — непрерывный гомоморфизм группы G в мультипликативную группу положительных действительных чисел (положительный характер). При этом $\hat{I}f = I(f/\Delta)$. Характер Δ наз. модулем группы G. Если $\Delta(g) \equiv 1$, то группа G наз. унимодулярной. В этом случае I является двусторонне инвариантным интегралом.

В частности, унимодулярна всякая компактная группа (причем $I1 < \infty$, $\hat{I} = 1I$) и всякая дискретная группа (причем $If = \sum_g f(g)$, $f \in C_0(G)$).

Согласно теореме Рисса, всякий интеграл на $C_0(G)$ является интегралом Лебега по нек-рой борелевской *мере* μ, определяемой однозначно в классе регулярных борелевских мер, конечных на каждом компактном подмножестве $K \subset G$. Лево- (право-) инвариантная мера μ, отвечающая левому (правому) интегралу Хаара в $C_0(G)$, наз. левой (правой) *Хаара мерой* на G.

Пусть H — замкнутая подгруппа в G, Δ_0 — модуль группы H. Если Δ_0 продолжается до непрерывного положительного характера группы G, то на левом однородном пространстве $X = G/H$ существует относительно инвариантный интеграл J, т. е. положительный функционал на пространстве $C_0(X)$ непрерывных финитных функций на X, удовлетворяющий тождеству

$$J(gf) = \delta(g) Jf$$

для всех $g \in G$, $f \in C_0(X)$; здесь

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x),\ \delta(g) = \Delta_0(g)/\Delta(g),$$

Δ — модуль группы G. Этот интеграл определяется по правилу $Jf = I(\delta\tilde{f})$, где I — левый интеграл Хаара на G, $\tilde{f}$ — функция на G такая, что

$$f(gH) = I_0((g\tilde{f})_H),$$

(I_0 — левый интеграл Хаара на H, а φ_H — сужение функции φ на подгруппу H). Это определение корректно, поскольку $\tilde{f} \to f$ является отображением $C_0(G)$ на $C_0(X)$ и $Jf = 0$ при $f = 0$. С И. и. тесно связано понятие *инвариантного среднего*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления, пер. с франц., М., 1970; [2] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с франц., М., 1950; [3] Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., М., 1956; [4] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, т. 1, пер. с англ., М., 1975.

Д. П. Желобенко.

ИНВАРИАНТНОЕ МНОЖЕСТВО фазового пространства R динамической системы $f(p, t)$ — множество M, заполненное целыми траекториями, т. е. множество, удовлетворяющее условию

$$f(M, t) = M,\ t \in \mathbb{R},$$

где $f(M, t)$ — образ множества M при преобразовании группы $f(p, t)$, соответствующем данному t.

Как множество метрич. пространства R И. м. M может иметь определенную топологич. структуру:

быть, напр., топологическим или гладким многообразием, поверхностью, замкнутой жордановой кривой, отдельной точкой. Об И. м. M говорят тогда как об инвариантном многообразии, инвариантной поверхности, инвариантной кривой или инвариантной точке.

Инвариантную точку наз. обычно точкой покоя динамич. системы, поскольку для этой точки движение сводится к покою: $f(p, t)=p$ для всех значений t. Замкнутая инвариантная кривая, не содержащая точек покоя динамич. системы, всегда образована траекторией периодич. движения, т. е. движения, удовлетворяющего условию

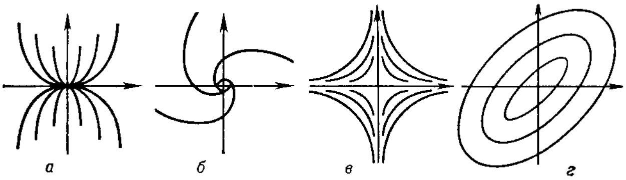
$$f(p, t+T)=f(p, t)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ и нек-рого $T>0$ и наз. в силу этого периодической траекторией. Примерами инвариантных многообразий могут служить сфера, тор, диск; инвариантных поверхностей — конус, лист Мёбиуса, сфера с ручками; инвариантных множеств — множество всех точек покоя, множества Ω_p и A_p всех, соответственно, ω- и α-предельных точек движения $f(p, t)$, а также множество всех блуждающих W или неблуждающих $R \setminus W$ точек.

Инвариантная точка динамич. системы на плоскости

$$\frac{dx}{dt}=f(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=g(x, y) \tag{1}$$

по характеру поведения траекторий в ее окрестности принадлежит к одному из 4 типов: узел, фокус, седло,



а б в г

центр (см. рис.). Узел и фокус бывают асимптотически устойчивыми или неустойчивыми, седловина — неустойчива, центр — устойчив. Индекс Пуанкаре узла, центра и фокуса равен $+1$, седла -1.

В случае, когда матрица Якоби

$$J(x, y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

правой части системы (1) в точке покоя $x=x_0$, $y=y_0$ имеет собственные значения λ_1, λ_2 с ненулевой действительной частью, инвариантная точка является: узлом, если значения λ_1, λ_2 действительны и одного знака; седлом, если значения λ_1, λ_2 действительны и разных знаков; фокусом, если значения λ_1, λ_2 комплексно сопряженные.

Во всех этих случаях тип особой точки системы (1) такой же, как у линейной системы, получаемой из (1) разложением ее правой части в ряд Тейлора в точке $x=x_0$, $y=y_0$, т. е. как тип точки $x_1=0$, $y_1=0$ системы

$$\frac{dx_1}{dt}=ax_1+by_1, \quad \frac{dy_1}{dt}=cx_1+dy_1, \tag{2}$$

матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ к-рой равна $J(x_0, y_0)$. Между траекториями системы (1) в окрестности особой точки рассматриваемых типов и траекториями системы (2) существует более глубокая, чем отмечено выше, связь. Именно, всякий раз, когда в окрестности инвариантной точки $x=x_0=0$, $y=y_0=0$ функции f и g голоморфны и матрица $J(x_0, y_0)$ имеет ненулевые действительные части собственных значений, существует непрерывно дифференцируемая в нек-рой окрестности U точки $x=0$, $y=0$ замена переменных

$$x_1 = x + F_1(x, y), \quad y_1 = y + F_2(x, y),$$
$$F_i(0, 0) = \frac{\partial F_i(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial F_i(0, 0)}{\partial y} = 0, \ i = 1, 2,$$

приводящая систему уравнений (1) к системе (2).

Если значения λ_1, λ_2 мнимые, то инвариантная точка x_0, y_0 может быть либо фокусом, либо центром. Вопрос выяснения типа особой точки в этом случае представляет собой отдельную и трудную проблему — проблему центра и фокуса — и требует для отличения центра от фокуса привлечения более тонких критериев (см. [1], [7]). Аналогичные трудности возникают при определении типа особой точки и в случае, когда матрица $J(x_0, y_0)$ вырождена.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [2] Биркгоф Дж., Динамические системы, пер. с англ., М.— Л., 1941; [3] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959; [4] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [5] Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966; [6] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956; [7] Сибирский К. С., Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц, Киш., 1976.

А. М. Самойленко.

ИНВАРИАНТНОЕ ПОДМНОЖЕСТВО группы G — подмножество H группы G, содержащее вместе с каждым своим элементом h все сопряженные с h в G элементы, т. е. все элементы вида $g^{-1}hg$. Инвариантная подполугруппа — подполугруппа, являющаяся одновременно инвариантным подмножеством.

О. А. Иванова.

ИНВАРИАНТНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО, допустимое подпространство, векторного пространства V относительно данного множества M линейных отображений пространства V в себя — подпространство U, удовлетворяющее условию $ug \subset U$ для всех $u \in U$, $g \in M$ (иначе M-инвариантное, M-допустимое подпространство).

Ю. И. Мерзляков.

ИНВАРИАНТНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО представления π группы (алгебры, кольца, полугруппы) X в векторном пространстве (соответственно в топологич. векторном пространстве) E — векторное (соответственно замкнутое векторное) подпространство $F \subset E$ такое, что для любого $\xi \in F$ и любого $x \in X$ выполняется соотношение: $\pi(x)\xi \in F$. Если P — проектор в E на F, то F тогда и только тогда является И. п. представления π, когда $P\pi(x)P = \pi(x)P$ для всех $x \in X$. Подпространства $\{0\}$ и E являются И. п. для любого представления в пространстве E; они наз. тривиальными И. п.; остальные И. п. (если они есть) наз. нетривиальными. См. также *Сужение представления*, *Вполне приводимое множество*, *Неприводимое представление.*

А. И. Штерн.

ИНВАРИАНТНОЕ СРЕДНЕЕ на группе или полугруппе G, точнее, инвариантное среднее на пространстве X функций на G,— непрерывный линейный функционал m на замкнутом подпространстве X пространства $B(G)$ всех ограниченных комплекснозначных функций на G, снабженном равномерной нормой, содержащем постоянные функции и инвариантном относительно операций комплексного сопряжения, причем m и X удовлетворяют следующим условиям: 1) пространство X инвариантно относительно левого сдвига, т. е. если $f \in X$, то и ${}_xf \in X$, где ${}_xf(t) = f(xt)$ для всех $x, t \in G$, $f \in X$; 2) m — среднее на X, т. е. $m(\bar{f}) = \overline{m(f)}$ для всех $f \in X$ и $\inf\{f(x)\} \leqslant \leqslant m(f) \leqslant \sup\{f(x)\}$ для всех действительнозначных $f \in X$; 3) $m({}_xf) = m(f)$ для всех $f \in X$ и всех $x \in G$. В этом случае И. с. m наз. левоинвариантным средним; аналогично определяется правоинвариантное среднее и двустороннее И. с. на G.

Если на $X=B(G)$ существует двустороннее И. с., то группа G наз. **аменабельной**. Аменабельность группы G связана с существованием *инвариантных мер* относительно нек-рых групп преобразований, связанных с G (см. [1]). Если G — локально компактная топологич. группа, то на пространствах почти периодич. функций и слабо почти периодич. функций на G существует нетривиальное левое И. с. С другой стороны, следующие условия эквивалентны: 1) существует левое И. с. на пространстве $X=L^\infty(G)$; 2) существует левое И. с. на пространстве $X=CB(G)$ ограниченных непрерывных комплексных функций на G; 3) существует левое И. с. на пространстве $X=UCB(G)$ двусторонне непрерывных ограниченных комплексных функций; 4) существует двустороннее И. с. на одном из пространств $L^\infty(G)$, $CB(G)$, $UCB(G)$; 5) группа G не имеет *дополнительной серии* представлений; 6) носитель регулярного представления группы G совпадает с дуальным пространством этой группы; 7) единичная функция на группе G может быть на любом компакте $K\subset G$ равномерно аппроксимирована конечными линейными комбинациями матричных элементов регулярного представления группы G; 8) если μ — левая мера *Хаара* на G, ν — такая ограниченная комплексная регулярная борелевская мера на G, что

$$\iint f(s)\,\overline{f(t^{-1}s)}\,d\mu(s)\,d\nu(t)\geqslant 0$$

для всех финитных непрерывных функций f на G, то $\int_G d\nu\geqslant 0$; 9) для нек-рого $q>1$, $q\neq\infty$ любого $\varepsilon>0$ и любого компакта $K\subset G$ существует неотрицательная функция $\varphi\in L^q(G)$, $\|\varphi\|_q=1$, удовлетворяющая условию $\|_x\varphi-\varphi\|_q<\varepsilon$ для всех $x\in K$; 10) предыдущее условие выполняется для всех $q>1$, $q\neq\infty$; 11) для любого $\varepsilon>0$ и любого компакта $K\subset G$ существует такое борелевское множество $U\subset G$, что $0<\mu(U)<\infty$ и $\mu^{-1}(U)\,\mu(xU\Delta U)<$ $<\varepsilon$ для всех $x\in K$; 12) любое непрерывное действие группы G на компактном выпуклом множестве в локально выпуклом пространстве непрерывными аффинными преобразованиями имеет неподвижную точку. Локально компактная группа, удовлетворяющая любому из равносильных условий 1) — 12), наз. **аменабельной**. Непрерывные образы аменабельных групп, замкнутые подгруппы аменабельных групп, расширения аменабельных групп с помощью аменабельных, индуктивные пределы аменабельных групп — аменабельны. Равномерно ограниченное представление аменабельной группы в гильбертовом пространстве эквивалентно унитарному представлению в том же пространстве. Нек-рые из перечисленных результатов могут быть распространены на случай общих топологич. групп, допускающих И. с. на пространстве ограниченных непрерывных комплексных функций. Теория И. с. и аменабельных групп имеет существенные приложения в теории динамич. систем, эргодич. теории, теории алгебр Неймана и в абстрактном гармонич. анализе.

Лит.: [1] von Neumann J., «Fundam. math.», 1929, v. 13, p. 73—116; [2] Гринлиф Ф., Инвариантные средние на топологических группах и их приложения, пер. с англ., М. 1973; [3] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974.

А. И. Штерн.

ИНВАРИАНТНОСТИ ПРИНЦИП: пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные действительные случайные величины с нулевым математич. ожиданием и дисперсией σ^2; пусть построена случайная ломаная

$$Y_n(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\{S_{[nt]}+(nt-[nt])\,X_{[nt]+1}\},\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

где $S_m=\sum_{i=1}^m X_i$; если f — непрерывная действительная функция на пространстве $C\,[0,\ 1]$ непрерывных функций на [0, 1] с равномерной нормой (или хотя бы непрерывная всюду за исключением множества винеровской меры нуль), то $f(Y_n)$ по распределению сходится к $f(W)$, где W — винеровская случайная функция. Таким образом, предельное распределение для $f(Y_n)$ не зависит от каких-либо специальных свойств величин $X_1, X_2, \ldots$

Типичная схема использования И. п. состоит в отыскании предельного распределения для $f(Y_n)$ путем нахождения предельного распределения для $f(Y'_n)$, где Y'_n — такая же, как Y_n, случайная ломаная, построенная по нек-рой другой специальным образом подобранной последовательности $X'_1, X'_2, \ldots$ Напр., если

$$f(x)=\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t),$$

то f непрерывна на C, и так как

$$f(Y_n)=\frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \max_{1 \leqslant m \leqslant n} S_m,$$

то

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \max_{1 \leqslant m \leqslant n} S_m$$

по распределению сходится к $\sup_t W(t)$. Для нахождения распределения $\sup_t W(t)$ используется последовательность $\{X'_n\}: \mathsf{P}\{X'_n=1\}=\mathsf{P}\{X'_n=-1\}={}^1/_2$, и в результате вычислений получается

$$\mathsf{P}\{\sup_t W(t) \leqslant a\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a e^{-u^2/2} du, \quad a \geqslant 0.$$

Лит.: [1] Donsker M., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1951, v. 6, p. 1—12; [2] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, № 2, с. 177—238; [3] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

В. В. Сазонов.

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОЦЕДУРЫ — эквивариантность (см. ниже) какого-либо решающего правила в статистич. задаче, постановка к-рой допускает группу G симметрий, относительно этой группы G. Понятие И. с. п. возникает в первую очередь в так наз. параметрич. задачах математич. статистики, когда имеется априорная информация: распределение вероятностей $P(d\omega)$ исходов ω наблюдений принадлежит известному семейству $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$. Говорят, что статистич. проблема решения G-**эквивариантна** относительно группы G измеримых преобразований g измеримого пространства (Ω, B_Ω) исходов, если выполнены условия: 1) существует гомоморфизм f группы G на нек-рую группу $\bar{G}$ преобразований пространства Θ параметров

$$f: g \to \bar{g} \in \bar{G}, \quad \forall g \in G,$$

со свойством

$$(P_\theta g)(\cdot)=P_{\bar{g}(\theta)}(\cdot), \quad \forall g \in G;$$

2) существует гомоморфизм h группы G на нек-рую группу $\hat{G}$ измеримых преобразований измеримого пространства (D, B_D) решений d,

$$h: g \to \hat{g} \in \hat{G}, \quad \forall g \in G,$$

со свойством

$$L(\bar{g}(\theta), \hat{g}(d))=L(\theta, d),$$

где $L(\theta, d)$ — функция потерь; 3) вся дополнительная априорная информация о возможных значениях параметра (априорная плотность $p(\theta)$, разбиение на альтернативы $\Theta=\Theta_1 \cup \ldots \cup \Theta_s$ и т. п.) G-инвариантна или G-эквивариантна. При этих условиях решающее правило $\delta: \omega \to \delta(\omega) \in D$, безразлично детерминированное или рандомизированное, наз. **инвариантной** (точнее G-**эквивариантной**) **процедурой**, если

$$\delta(g(\omega)) = \hat{g}(\delta(\omega)), \ \forall \omega \in \Omega, \ \forall g \in G.$$

Риск

$$r_{\delta}(\theta) = \mathsf{E}_{\theta} L(\theta, \delta(\omega))$$

эквивариантной решающей процедуры δ является G-инвариантом, в частности он не зависит от θ, если группа G действует на Θ транзитивно.

Как правило, в параметрич. задачах не существует гарантированно наилучшей решающей процедуры, к-рая минимизировала бы риск при каждом значении параметра $\theta \in \Theta$. В частности, процедура может приводить к очень малым значениям риска для нек-рых θ за счет ухудшения качества при других априори столь же возможных значениях параметра. Эквивариантность в какой-то степени обеспечивает беспристрастность подхода. Когда группа G достаточно богата, существует оптимальная инвариантная процедура с равномерно наименьшим среди инвариантных процедур риском.

Инвариантные процедуры широко применяются в проверке гипотез (см. также *Инвариантный критерий*) и в оценивании параметра закона распределения. Так, в задаче оценки неизвестного вектора средних для семейства m-мерных нормальных законов

$$p(x, \alpha) = (2\pi)^{-m/2} \exp\left[-\sum_j (x_j - \alpha_j)^2/2\right]$$

с единичной матрицей ковариаций и гауссовой функцией потерь $\sum_j (\delta_j - \alpha_j)^2$ оптимальной эквивариантной оценкой будет обычное выборочное среднее

$$x^* = N^{-1}(x^{(1)} + \ldots + x^{(N)}).$$

Группой G здесь служит произведение группы S_N перенумерации наблюдений и группы $\mathrm{Ort}(m)$ движений евклидова пространства $\mathbb{R}^m$; $\bar{G} = \tilde{G} = \mathrm{Ort}(m)$. При $m \geqslant 3$ в задаче существуют неэквивариантные оценки, приводящие к меньшему, чем у x^*, риску при всех α, однако область существенной «сверхэффективности» оказывается незначительной и безгранично уменьшается с ростом объема N выборки. Возможность сверхэффективных процедур связана с некомпактностью G.

Эквивариантные статистич. процедуры возникают также в ряде непараметрич. задач статистики, когда априорное семейство распределений P исходов существенно бесконечномерно, а также при построении доверительных множеств для параметра θ распределения при наличии мешающих параметров.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964. *Н. Н. Ченцов.*

ИНВАРИАНТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — оператор, не меняющий своего вида при тех или иных преобразованиях пространства, в к-ром он определен. Напр., если $L\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$ — оператор с частными производными, записанный в некоторой системе координат $(x_1, \ldots, x_n)$, а $x_k = \varphi_k(y)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — некоторое преобразование координат, порождающее соответствующее отображение φ^* в множестве функций $u(x)$ (каждой функции $u(x)$ сопоставляется естественным образом функция $\varphi^* u(y)$), и

$$\varphi^* L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = L\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi^* u,$$

причем оператор L в правой части этого равенства выражается через $\partial/\partial y_k$ так же, как оператор L через $\partial/\partial x_k$ в левой, то говорят, что L инвариантен относительно преобразования φ (или L перестановочен с оператором преобразования φ^*). Наиболее важен случай, когда И. д. о. инвариантен относительно нек-рой совокупности преобразований, образующей группу. Определение И. д. о. существенно усложняется при рассмотрении систем функций, преобразующихся по нек-рому представлению этой группы преобразований. И. д. о., связанные с группой Лоренца и ортогональной группой (волновой оператор, операторы Клейна — Гордона, Лапласа и др.) играют важнейшую роль в математич. физике. В анализе на дифференцируемых многообразиях широко используются оператор внешнего дифференцирования d, инвариантный относительно диффеоморфизмов, и метрически сопряженный с ним оператор δ, инвариантный относительно гладких преобразований, сохраняющих метрический тензор. В теории групп Ли весьма важны так наз. лево- или правоинвариантные операторы относительно соответствующих сдвигов на группе.

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [2] Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, М., 1958; [3] Де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956; [4] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.

А. А. Дезин.

ИНВАРИАНТНЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий, построенный на *инвариантной статистике*. Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P_\theta, \theta \in \Theta)$ — выборочное пространство и пусть проверяется гипотеза $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против альтернативы $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, причем гипотеза H_0 инвариантна относительно группы $G = \{g\}$ взаимно однозначных $\mathfrak{B}$-измеримых преобразований пространства $\mathfrak{X}$ на себя, т. е.

$$\bar{g}\Theta_0 = \Theta_0 \text{ и } \bar{g}\Theta_1 = \Theta_1 \text{ для любого } g \in G,$$

где $\bar{g}$ — элемент индуцированной группы $\bar{G} = \{\bar{g}\}$ взаимно однозначных преобразований вероятностных мер $P_\theta : P_\theta \to P_{\bar{g}\theta}$, определяемых для всех $\theta \in \Theta$ и $g \in G$ по формуле $P_{\bar{g}\theta}(B) = P_\theta(g^{-1}B)$, $B \in \mathfrak{B}$. Так как гипотеза H_0 инвариантна относительно группы G, то представляется естественным для проверки гипотезы H_0 использовать критерий, построенный на инвариантной статистике относительно этой же группы G. Такой критерий называется И. к., причем класс всех И. к. совпадает с классом критериев, построенных на максимальном инварианте. В теории И. к. важную роль играет теорема Ханта — Стейна: если гипотеза H_0 инвариантна относительно группы G, то в классе И. к., построенных для проверки гипотезы H_0, существует максиминный критерий. И. к. является частным случаем инвариантной статистической процедуры (см. *Инвариантность статистической процедуры*).

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [2] Шметтерер Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976; [3] Hall W., Wijsman R., Ghosh J., «Ann. Math. Statistics», 1965, v. 36, p. 575; [4] Климов Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973; [5] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975. *М. С. Никулин.*

ИНВАРИАНТНЫЙ ОБЪЕКТ на однородном пространстве — поле геометрич. величин на однородном пространстве $M = G/H$ группы Ли G, не меняющееся при всех преобразованиях из G. Более строгое определение И. о. состоит в следующем. Пусть

$$\pi : E \to M = G/H$$

— локально тривиальное однородное расслоение над однородным пространством $M = G/H$ группы Ли G. Сечение расслоения π наз. И. о. (типа π) на M, если оно инвариантно относительно действия L^E группы G в пространстве $\Gamma(E)$ сечений этого расслоения. Множество И. о. типа π находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством H-инвариантных элементов слоя рассматриваемого расслоения над точкой $m \in M$, соответствующей смежному классу eH.

Важнейший и наиболее изученный частный случай: π есть векторное расслоение. Тогда H действует в слое над точкой m линейно, и И. о. типа π находятся во взаимно однозначном соответствии с H-инвариантными векторами этого слоя, что сводит их классификацию к классич. задаче теории инвариантов. Для тензорных расслоений (ассоциированных с касательным расслоением) задача классификации И. о. сводится к нахождению инвариантов линейной группы изотропии.

И. о. часто возникают в следующем контексте. Пусть s — поле геометрич. величин (геометрич. объект) на гладком многообразии M, а $\mathrm{Aut}\,(s)$ — его группа симметрий, т. е. множество таких диффеоморфизмов φ многообразия M, что $\varphi^*s=s$, где φ^*— индуцированное φ преобразование s. И пусть группа $\mathrm{Aut}\,(s)$ содержит транзитивную на M подгруппу G, являющуюся группой Ли. Тогда M отождествляется с однородным пространством G/H, где H — стационарная подгруппа произвольной точки $m \in M$, а объект s становится И. о. на однородном пространстве G/H. Классич. примерами И. о. являются инвариантные риманова метрика, комплексная структура, симплектич. структура, контактная структура, обыкновенное дифференциальное уравнение (в частности, пульверизация и связность), дифференциальный оператор. Широкий класс И. о. допускает единообразное описание в рамках теории G-структур.

И. о. появляются естественным образом в различных областях математики и физики. Напр., линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами есть И. о. на евклидовом пространстве, рассматриваемом как однородное пространство векторной группы. Эйлерово движение твердого тела происходит по геодезическим левоинвариантной римановой метрики на группе $SO(3)$. Однородность пространства Ньютона и пространства-времени Минковского вместе с принципом относительности Галилея приводят к разнообразным И. о. в ньютоновской и релятивистской физике, причем требование инвариантности часто позволяет почти однозначно определить рассматриваемый объект (уравнение, лангранжиан и т. п.) (см. [9]). Изучение свойств И. о. обычно легко сводится к тем или иным вопросам линейной алгебры (часто допускающим полное решение). Это определяет важную роль И. о. как простых модельных примеров, проясняющих общую ситуацию. Часто И. о. устроены проще, чем произвольные объекты данного типа. Напр., в отличие от произвольных римановых метрик, любая инвариантная риманова метрика на однородном пространстве полна (так же как и любая инвариантная псевдориманова метрика на компактном однородном пространстве), а любая ее самопересекающаяся геодезическая замкнута.

Вопросы классификации И. о. продвинуты в основном для небольшого числа классических тензорных И. о. Наиболее полные результаты получены для однородных пространств компактных групп Ли.

Большой интерес с различных точек зрения представляет изучение И. о. на неоднородных G-пространствах, т. е. геометрич. объектов, инвариантных относительно данной нетранзитивной группы Ли G преобразований многообразия M. В случае компактной группы G для построения И. о. здесь часто используется метод усреднения по группе (пример — теорема о существовании G-инвариантной римановой метрики). Другой более тонкий метод (применимый для более широкого класса групп Ли преобразований — так наз. совершенных групп преобразований) основан на существовании слайса (среза), наличие к-рого означает «почти локальную тривиальность» расслоения многообразия M на орбиты группы G.

Важным обобщением понятия И. о. является понятие ковариантного объекта: пусть на слоях F_m расслоения π задана дополнительная структура t_m, гладко зависящая от точки $m \in M$ (например, структура векторного пространства) и $A_m = \mathrm{Aut}(t_m)$ — группа автоморфизмов структуры t_m слоя F_m. Множество сечений $k: m \to S_m \in A_m$ расслоения ψ: $A = \bigcup_{m \in M} A_m \to M$ образует нек-рую группу автоморфизмов расслоения π, называемую калибровочной группой. Пусть K — некоторая ее подгруппа. Сечение s расслоения π наз. K-ковариантным объектом типа π на $M = G/H$, если $\left(L_g^E s\right)(m) = k_g(m)\, s(m)$ $\forall g \in G$, $m \in M$, где $g \to k_g$ — некоторый гомоморфизм $G \to K$. Важнейший частный случай получается, если π: $E \to M = G/H$ — векторное расслоение, K — группа положительных функций на M, рассматриваемая как группа автоморфизмов расслоения π, $ke = k(m)\, e$, где $k \in K$, $m = \pi(e)$, $e \in E$. В этом случае K-ковариантный объект наз. также конформно инвариантным объектом, а определяемое им сечение соответствующего проективного расслоения является И. о.

Лит.: [1] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, v. 2, N.Y., 1969; [2] Lichnerowicz A., Géométrie des groupes de transformations, P., 1958; [3] Wolf J. A., Spaces of constant curvature, N.Y., 1967; [4] Kobayashi S., Transformation groups in differential geometry, B.—Hdlb.—N.Y., 1972; [5] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [6] Комраков Б. П., Дифференциально-геометрические структуры и однородные пространства, ч. 1, Минск, 1977; [7] Итоги науки. Алгебра. Топология. 1962, М., 1963; [8] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967; [9] Lévy-Leblond J. M., «Commun. Math. Ph.», 1969, v. 12, № 1, p. 64—79. *Д. В. Алексеевский.*

ИНВАРИАНТОВ ТЕОРИЯ в классическом определении — алгебраическая теория (иногда называемая также алгебраической И. т.), изучающая алгебраич. выражения (многочлены, рациональные функции или их совокупности), изменяющиеся определенным образом при невырожденных линейных заменах переменных. При этом, вообще говоря, рассматривается не полная линейная группа (т. е. не все множество невырожденных линейных замен переменных), а нек-рая ее подгруппа (напр., ортогональная, симплектическая и др.). И. т. возникла под влиянием ряда задач теории чисел, алгебры и геометрии. Еще К. Гаусс (C. Gauss), занимаясь теорией бинарных квадратичных форм, поставил задачу изучения многочленов от коэффициентов формы $ax^2 + 2bxy + cy^2$, не меняющихся при преобразовании этих коэффициентов, определяемом подстановкой вида $x \to \alpha x + \beta y$, $y \to \gamma x + \delta y$, где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ и α, β, γ, δ — целые. С другой стороны, в проективной геометрии при внутренней характеризации конфигураций и связей появляются алгебраич. выражения от проективных координат, не меняющиеся при проективной коллинеации. Предшествующей ступенью И. т. являлось также учение о детерминантах. Арифметич. и алгебраич. вопросами, так или иначе связанными с И. т., занимались К. Якоби (K. Jacobi), Ф. Эйзенштейн (F. Eisenstein), Ш. Эрмит (Ch. Hermite). Собственно И. т. как математич. дисциплина сложилась к сер. 19 в. Этот период характеризуется интересом к формально-алгебраич. проблемам и их приложениям к геометрии. Понятия группы, инварианта и основные задачи теории формулируются к этому времени точным образом, и постепенно становится ясно, что факты классич. и проективной геометрии есть просто выражение тождеств (сизигий) между инвариантами или ковариантами соответствующей группы преобразований. Первой работой по И. т. следует, видимо, считать «Мемуар о гипердетерминантах» А. Кэли (A. Cayley, 1846). Все обычные термины И. т. — инвариант, ковариант, комитант, дискриминант и т. д. — были введены Дж. Сильвестром (J. Sylvester).

Одним из первых объектов изучения И. т. были так наз. инварианты форм. Рассматривается форма степени r от n переменных с неопределенными коэффициентами:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = r} a_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

после линейной замены переменных

$$x_i \to \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

где α_{ij} — действительные или комплексные числа, она преобразуется в форму

$$f'(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=r} a'_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

так что указанное линейное преобразование переменных определяет нек-рое преобразование коэффициентов формы:

$$a_{i_1, \ldots, i_n} \to a'_{i_1, \ldots, i_n}.$$

Многочлен $\varphi(\ldots, a_{i_1}, \ldots, {}_{i_n}, \ldots)$ от коэффициентов формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ наз. (относительным) инвариантом формы, если при всех невырожденных линейных заменах переменных выполнено соотношение

$$\varphi\left(\ldots, a'_{i_1, \ldots, i_n}, \ldots\right) = |\alpha_{ij}|^q \varphi(\ldots, a_{i_1, \ldots, i_n}, \ldots),$$

где $|\alpha_{ij}|$ — определитель линейного преобразования, а g — константа (вес). Если $g=0$, инвариант наз. абсолютным. Так, простейшим примером инварианта является дискриминант $D=b^2-ac$ бинарной квадратичной ($n=r=2$) формы $f(x, y)=ax^2+2bxy+cy^2$, или дискриминант $\Delta=3b^2c^2+6\,abcd-4b^3d-4ac^3-a^2d^2$ тернарной ($n=2$, $r=3$) формы $f(x, y)=ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3$. Если задана не одна, а несколько форм от одних и тех же переменных, то можно рассматривать многочлены φ от коэффициентов всех этих форм, преобразующиеся указанным выше способом при линейной замене переменных,— так получается понятие совместного инварианта системы форм. Напр., определитель $|a_{ij}|$ есть совместный инвариант системы n линейных форм $f_i(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Аналогичным образом может быть определен *ковариант* и, более общим образом,— *комитант*.

Классич. постановка основной задачи И. т.— фактически вычислить инварианты, а также дать полное их описание (то же для ковариантов). С этой целью были разработаны всевозможные формальные процессы, позволяющие строить инварианты (поляризация, реституция, тождество Капелли, Ω-процесс Кэли и т. п.). Кульминацией этой деятельности является создание так наз. символич. метода в И. т.— некоторого формального способа вычислять все инварианты степени не выше заданной (см. [3], [6], [11]).

Развившаяся к 30-м гг. 20 в. глобальная теория полупростых групп и их представлений позволила дать следующую наиболее общую постановку основной задачи классич. И. т. [6]. Задана произвольная группа G и ее конечномерное линейное представление ρ в линейном пространстве V над полем k. Если $x_1, \ldots, x_n$— координаты в V (в каком-либо базисе), то каждый элемент $g \in G$ определяет линейную замену переменных $x_1, \ldots, x_n$; производя эту замену переменных в произвольном многочлене $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, получают новый многочлен, так что g индуцирует нек-рое преобразование (автоморфизм) кольца всех многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ над полем k. Многочлен $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, не меняющийся при всех таких преобразованиях (т.е. когда g пробегает всю G), называется инвариантом представления ρ группы G. Все инварианты образуют k-алгебру, и цель И. т.— описание этой алгебры. Так, инварианты форм — это инварианты полной линейной группы относительно ее представления в пространстве симметрич. тензоров фиксированного ранга основного (или сопряженного) пространства (коэффициенты исходной формы f и есть компоненты этого тензора), рассмотрение ковариантов сводится к изучению алгебры инвариантов для представления в пространстве тензоров смешанной валентности.

В такой постановке задача описания инвариантов есть частный случай следующей общей задачи теории линейных представлений: разложить пространство тензоров заданной валентности на неприводимые инвариантные подпространства относительно заданной группы линейных преобразований основного линейного пространства (отыскание инвариантов может быть сведено к выделению одномерных инвариантных подпространств).

Уже на первых этапах развития И. т. было обнаружено следующее обстоятельство, позволившее обозреть всю систему инвариантов в целом: во всех разобранных случаях удавалось выделить конечное число б а з и с н ы х и н в а р и а н т о в $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, т. е. таких инвариантов, что всякий другой инвариант φ заданного представления может быть выражен в виде многочлена от них: $\varphi=F(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. Иначе говоря, алгебра инвариантов оказывалась конечно порожденной. Выяснилось также, что эти базисные инварианты, вообще говоря, не являются независимыми (т. е. алгебра инвариантов не является свободной алгеброй): могут существовать нетривиальные многочлены $P(t_1, \ldots, t_m)$, называемые с о о т н о ш е н и я м и, или с и з и г и я м и, к-рые после подстановки $t_i=\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, тождественно обращаются в нуль. В самом множестве соотношений можно снова указать конечное число базисных соотношений, алгебраич. следствиями к-рых являются все остальные (соотношения образуют идеал в кольце многочленов от переменных $t_1, \ldots, t_m$ и базисные соотношения — его образующие). В свою очередь, базисные соотношения сами, вообще говоря, не независимы — так могут быть определены вторые сизигии и т. д. Построенная цепь сизигий всегда оказывалась конечной. Напр., если G — *симметрическая группа* всех перестановок координат $x_1, \ldots, x_n$, то алгебра инвариантов есть алгебра всех симметрических многочленов от $x_1, \ldots, x_n$; элементарные симметрич. многочлены являются базисными инвариантами, к-рые алгебраически независимы (в этом случае сизигий нет).

Эти факты привели к формулировке двух основных проблем в классич. И. т.:

1. Доказать конечную порожденность алгебры инвариантов заданного представления заданной группы (первая основная теорема И. т.) и определить систему базисных инвариантов.

2. Доказать существование конечного базиса сизигий (вторая основная теорема И. т.) и найти его.

Первая основная теорема И. т. для инвариантов формы произвольной степени от произвольного конечного числа неизвестных была доказана Д. Гильбертом (D. Hilbert) [1] (см. также *Гильберта теорема* об инвариантах). Им же доказано, что вторая основная теорема И. т. справедлива во всех случаях, когда справедлива первая основная теорема И. т., а также, что в этом случае цепь сигизий всегда конечна. Д. Гильберт получил доказательства основных теорем классич. И. т. на базе доказанных им (специально с этой целью) общих абстрактных алгебраич. утверждений, составивших позднее фундамент современной коммутативной алгебры (*Гильберта теорема* о базисе, *Гильберта теорема* о сизигиях, *Гильберта теорема* о корнях). Первоначальное доказательство первой основной теоремы И. т. было неконструктивным и не давало оценки сверху на степени базисных инвариантов, однако позднее такие оценки были получены [2] (см. также [11]). Указанные выше формальные вычислительные методы И. т. позволяют, по крайней мере, в принципе, найти с использованием этих оценок все базисные инварианты. В 30-х гг. 20 в. Г. Вейль (H. Weyl), развивая идею Д. Гильберта и А. Гурвица (A. Hurvitz, см. [14]), доказал первую основную теорему И. т. для конечномерных представлений любых компактных групп Ли и для конечномерных представлений любых комплексных полупростых групп Ли [6]. Книга [6], подводящая итог развития классич. И. т., содержит описание базисных инвариантов и сизигий для представлений классических групп, а также нек-рых других групп. Одним из важных приложений методов И. т. явилось описание чисел Бетти классических компактных групп Ли.

Доказательство второй основной теоремы И. т. вскрыло общую алгебраич. природу этой теоремы (она является следствием теоремы Гильберта о базисе). Пытаясь выяснить, справедливо ли это же в отношении первой основной теоремы И. т., Д. Гильберт сформулировал следующую проблему (14-я проблема Гильберта): пусть k — поле, $A=k[x_1, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленов над k от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и L — произвольное подполе поля частных алгебры A, содержащее k; будет ли алгебра $A \cap L$ конечно порождена над k? Из положительного ответа на этот вопрос вытекала бы справедливость первой основной теоремы И. т. для любых групп. Отрицательное решение 14-й проблемы Гильберта было получено в [9], где приведен пример представления коммутативной унипотентной группы, для к-рого алгебра инвариантов не имеет конечного числа образующих. В 50-х гг. 20 в. получен ряд результатов об инвариантах конечных групп, в особенности групп, порожденных отражениями (см. *Отражений группа*, *Кокстера группа*). Было доказано [13], [14], что конечные линейные комплексные группы, порожденные унитарными отражениями, могут быть охарактеризованы как конечные линейные группы, алгебра инвариантов к-рых не имеет сизигий.

Новый этап развития И. т. связан с расширением круга задач и геометрич. приложений этой теории. Современная И. т. (или геометрическая И. т.) стала частью общей теории алгебраич. групп преобразований; ее фундаментом является теория алгебраич. групп, построенная в 50-х гг. 20 в., а языком — язык алгебраич. геометрии. В отличие от классич. И. т., основным объектом к-рой являлось кольцо многочленов от n переменных над полем k вместе с группой автоморфизмов, индуцированных линейными заменами переменных, современная И. т. рассматривает произвольную конечно порожденную k-алгебру R и алгебраич. группу G ее k-автоморфизмов. Вместо линейного пространства V и представления ρ рассматривается произвольное аффинное алгебраич. многообразие X и алгебраич. группа G его алгебраич. преобразований (автоморфизмов), так что R — это кольцо регулярных функций на X, а действие G на R индуцировано действием G на X. Элементы из R, неподвижные относительно G, есть инварианты; все их множество образует k-алгебру R^G.

Обобщаются и другие понятия классич. И. т., напр. комитант — это регулярное отображение одного такого многообразия в другое, коммутирующее с действием группы; если R^G конечно порождена, то говорят, что выполнена первая основная теорема И. т. Устанавливается, что R^G будет конечно порождена, если G — геометрически редуктивная группа (см. *Мамфорда гипотеза*). Во многих важных случаях, напр. в приложении к проблеме модулей, G является именно такой группой. Если R^G конечно порождена, то существует аффинное алгебраич. многообразие W, для к-рого R^G является алгеброй регулярных функций; включение $R^G \subset R$ индуцирует морфизм $\pi: X \to W$. Если G геометрически редуктивна, то многообразие W классифицирует замкнутые орбиты G в W: отображение π сюръективно, и в каждом его слое лежит ровно одна замкнутая орбита. Необходимое условие существования фактормногообразия X по G — замкнутость всех орбит — оказывается в этом случае и достаточным, и этим фактормногообразием оказывается W. Отсюда видна роль R^G в решении геометрич. проблем классификации и построении фактормногообразий; вместе с тем изучение R^G (к-рое было конечной целью классич. И. т.) есть лишь начальный этап решения этих геометрич. проблем, ибо значение R^G не дает, вообще говоря, полной информации об орбитах G в X и потому должно сочетаться с рассмотрением незамкнутых орбит, их замыканий и стабилизаторов (так наз. орбитальных разложений). Более того, изучение действий алгебраич. групп на аффинных алгебраич. многообразиях есть лишь «локальная часть» общей теории алгебраич. групп преобразований (так же, как теория аффинных многообразий — «локальная часть» общей теории алгебраич. многообразий).

В общем случае рассматривается алгебраическое (регулярное) действие G на произвольном алгебраич. многообразии X (склеенном из аффинных кусков), так что, напр., решение задачи о построении фактормногообразия X (или подходящего открытого подмножества в X) по действию G сводится к рассмотрению G-инвариантного аффинного покрытия X и применению указанной выше конструкции к каждому элементу этого покрытия с последующей «склейкой» полученных аффинных фактормногообразий. Для успешного применения этой процедуры следует, вообще говоря, заменить X на нек-рое его инвариантное открытое подмножество (само X может и не допускать инвариантного аффинного покрытия).

В настоящее время исследования по теории алгебраич. групп преобразований ведутся в различных направлениях, из к-рых можно выделить следующие. Получение информации о свойствах общего положения точек многообразия X, на к-ром регулярно действует алгебраич. группа G. Описание орбитальных разложений различных конкретных действий (в основном, линейных представлений). Теоремы стратификации общих пространств преобразований на более простые, стандартные пространства. Теоремы о фактормногообразиях, пространствах *орбит*, сечениях, квазисечениях и «слайсах»; многообразия неподвижных точек. Теоремы об эквивариантных вложениях. Критерии аффинности и квазиаффинности орбит (см. *Мацусимы критерий*). Структура замыканий орбит различных специальных видов, теория квазиоднородных многообразий (т. е. многообразий с плотной орбитой), действия с тривиальной алгеброй инвариантов. Алгебраич. свойства колец инвариантов, алгебро-геометрич. свойства пространств преобразований и фактормногообразий. Связь с теорией особенностей [16]. Проблема рациональности полей инвариантов, связь с теорией алгебраич. торов и алгебраич. теорией чисел [17].

Лит.: [1] Hilbert D., «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 473—534; [2] его же, там же, 1893, Bd 42, S. 313—73; [3] Weitzenböck R., Invarianten-Theorie, Groningen, 1923; [4] Hurvitz A., «Gött. Nachr.», 1897, S. 71—90; [5] Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.— Л., 1937; [6] Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М.— Л., 1948; [7] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [8] Проблемы Гильберта, М., 1969; [9] Nagata M., в кн.: Procledings of the International Congress of Mathematics (Edinburgh, 1958), Camb., 1960, p. 459—62; [10] его же, «Amer. J. Math.», 1959, v. 81, p. 766—72; [11] Mumford D., Geometric Invariant Theory, B.—Hdlb.—N. Y., 1965; [12] Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974; [13] Fogarty S., Invariant theory, N.Y.—Amst., 1969; [14] Chevalley C., «Amer. J. Math.», 1955, v. 77, p. 778—82; [15] Chephard G. C., Todd J. A., «Canad. J. Math.», 1954, v. 6, p. 274—304; [16] «Proc. Symp. Pure Math.», 1975, v. 29, p. 633—42; [17] Воскресенский В. Е., «Успехи матем. наук», 1972, т. 28, в. 4, с. 77—102

В. Л. Попов.

ИНВЕРСИЯ — преобразование, переводящее каждую точку A плоскости в такую точку A', лежащую на луче OA, что $OA' \cdot OA = k$, где k — некоторое постоянное действительное число. Точка O наз. центром, или полюсом И., k — степенью, или коэффициентом И. Если $k=a^2$, то точки окружности S с центром O и радиусом a переходят при И. сами в себя; внешние по отношению к S точки переходят во внутренние, а внутренние — во внешние (иногда И. наз. *симметрией относительно окружности*). Центр И. не имеет образа. И. с отрицательной степенью k равносильна И. с тем центром O и положительной степенью $|k|$, сопровождаемой симметрией относительно точки O. Иногда И. с положительной степенью наз. *гиперболической* И., а с отрицательной степенью — *эллиптической* И., или *антиинверсией*. Прямая, проходящая через центр И., переходит при И. сама в себя. Прямая, не проходящая через центр И., переходит в окружность, проходящую через центр И. Окружность, проходящая через центр И., переходит в прямую, не проходящую через центр И. Окружность, не проходящая через центр И., переходит в окружность, не проходящую через центр И. В декартовых прямоугольных координатах И. может быть задана формулами:

$$x'=\frac{kx}{x^2+y^2},\quad y'=\frac{ky}{x^2+y^2}$$

или в плоскости комплексного переменного: $z=k/\bar{z}$. И. является антиконформным преобразованием, т. е. сохраняет углы между линиями и меняет ориентацию. Аналогично определяется И. в пространстве.

Иногда И. определяется как отображение плоскости, сопоставляющее каждой точке A, отличной от центра заданной связки окружностей, точку A' пересечения окружностей связки, проходящих через точку A.

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969. *А. Б. Иванов.*

ИНВЕРСИЯ в комбинаторике, *беспорядок*, — перестановка из n элементов, в к-рой элемент i не может занимать i-ю позицию, $i=1, 2, \ldots, n$. Задача подсчета числа D_n инверсий известна как «задача о встречах». Справедлива следующая формула:

$$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

И.— частный случай перестановок, удовлетворяющих заданным ограничениям на позиции переставляемых элементов. Напр., известная задача «о супружеских парах» состоит в подсчете числа перестановок U_n, противоречивых двум перестановкам: $(1, 2, \ldots, n)$ и $(n, 1, 2, \ldots, n-1)$. (Две перестановки из n элементов *противоречивы*, если i-й элемент, $i=1, 2, \ldots, n$, занимает в них разные позиции.) Числа U_n вычисляются по формуле:

$$U_n=\sum\nolimits_{k=0}^{n}\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Через D_n и U_n подсчитывается число $L(r, n)$ *латинских прямоугольников* размера $r\times n$ при $r=2, 3$, а именно

$$L(2, n)=n!\,D_n,$$

$$L(3, n)=n!\sum\nolimits_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{k}D_{n-k}D_kU_{n-2k}.$$

Лит.: [1] Райзер Г. Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [2] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963. *В. М. Михеев.*

ИНВЕРСНАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, в к-рой для любого элемента a существует единственный инверсный к нему элемент a^{-1} (см. *Регулярный элемент*). Свойство полугруппы S быть инверсной эквивалентно каждому из следующих: S *регулярная полугруппа* и любые два ее идемпотента перестановочны (таким образом, множество всех идемпотентов И. п. есть полурешетка, см. *Идемпотентов полугруппа*); каждый левый и каждый правый *главные идеалы* полугруппы S

имеют единственный порождающий идемпотент. Всякая группа будет И. п., группы и только они являются И. п. с единственным идемпотентом. Важную роль при изучении И. п. играет следующее отношение е с т е с т в е н н о г о   ч а с т и ч н о г о   п о р я д к а $\leqslant$ на произвольной И. п. S : $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $ab^{-1}=aa^{-1}$ $(a,\ b \in S)$. На полурешетке идемпотентов И. п. оно совпадает с естественным частичным порядком этой полурешетки (см. *Идемпотент*). Полурешетка инверсных полугрупп (см. *Связка полугрупп*) будет И. п. Сдвиговая оболочка И. п. (см. *Сдвиги полугрупп*) также будет И. п. [7]. Всякая конгруэнция на И. п. определяется своими классами, содержащими идемпотенты.

Пусть J_X — множество всех взаимно однозначных частичных преобразований множества X (включая и «пустое преобразование» — отображение пустого множества на себя). Относительно операции суперпозиции множество J_X является И. п., к-рая наз. с и м м е т р и ч е с к о й И. п. на множестве X. Принципиальное значение имеет следующая т е о р е м а   В а г н е р а — П р е с т о н а: произвольная И. п. S изоморфно вложима в симметрическую И. п. J_S.

Теория И. п. представляет собой один из важных и глубоко разработанных разделов теории полугрупп. Изучены представления И. п. взаимно однозначными частичными преобразованиями и матрицами над полем (см. [1]). Исследуются конгруэнции на И. п. Изучаются И. п. с условиями конечности. Выделен целый ряд важных специальных типов И. п. Накладываемые при этом ограничения по большей части либо носят характер простоты в нек-ром смысле (напр., бипростота, см. *Простая полугруппа*), либо относятся к полурешетке идемпотентов E, либо являются комбинациями условий обоих типов. Ограничения на E могут касаться абстрактных свойств E как полурешетки (например, E — цепь специального вида), либо тех или иных относительных свойств E в полугруппе, в частности поведения E относительно нек-рых конгруэнций. На любой И. п. S существует наименьшая конгруэнция σ с тем свойством, что S/σ есть группа (н а и м е н ь ш а я   г р у п п о в а я   к о н г р у э н ц и я), причем

$$\sigma=\{(a,\ b)\ |\ ae=be \text{ для некоторого } e \in E\}.$$

И. п. наз. с о б с т в е н н о й, если E составляет σ-класс. На любой И. п. S существует наибольшая конгруэнция μ, разделяющая идемпотенты, причем

$$\mu=\{(a,\ b)\ |\ a^{-1}ea=b^{-1}eb \text{ для любого } e \in E\}$$

и μ содержится в отношении $\mathcal{H}$ (см. *Грина отношения эквивалентности*); И. п. наз. ф у н д а м е н т а л ь н о й, если μ совпадает с отношением равенства. Для упомянутых типов И. п. получено немало структурных теорем. При этом во многих случаях описание И. п. осуществляется «по модулю групп»: группы выступают в качестве блоков различных конструкций, в к-рых участвуют также полурешетки, гомоморфизмы групп и т. п. Таковы, напр., типичные описания клиффордовых И. п. (см. *Клиффордова полугруппа*) и вполне 0-простых И. п. (см. *Брандта полугруппа*).

И. п. можно рассматривать и как универсальные алгебры с двумя операциями: бинарной — умножением и унарной — взятием инверсного элемента. Получена классификация м о н о г е н н ы х (т. е. порожденных одним элементом) И. п. как таких алгебр [6], [9]. Относительно указанных операций класс всех И. п. является многообразием; он может быть задан, напр., следующей системой тождеств [8]:

$$(xy)\,z=x\,(yz),\ (x^{-1})^{-1}=x,\ xx^{-1}x=x,$$

$$(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1},\ xx^{-1}yy^{-1}=yy^{-1}xx^{-1}.$$

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Курош А. Г., Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года, М., 1974; [4] Вагнер В. В., «Докл. АН СССР», 1952, т. 84, № 6, с. 1119—22; [5] Preston G., «J. Lond. Math. Soc.», 1954, v. 29, № 4, p. 396—403; [6] Глускин Л. М., «Матем. сб.», 1957, т. 41, № 1, с. 23—36; [7] Понизовский И. С., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, № 6, с. 147—48; [8] Теория полугрупп и ее приложения, в. 1, Саратов, 1965, с. 286—324; [9] Ершова Т. И., «Матем. зап. Уральского ун-та», 1971, т. 8, № 1, с. 30—33; [10] Munn W. D., в кн.: Semigroups, N.Y.—L., 1969, p. 107—23; [11] O'Carrol L., «J. Algebra», 1976, v. 42, p. 26—40. *Л. Н. Шеврин.*

ИНВОЛЮТИВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — геометрическая интерпретация вполне интегрируемой дифференциальной системы на n-мерном дифференцируемом многообразии M^n класса C^k, $k \geqslant 3$. p-мерным распределением (или дифференциальной системой размерности p) класса C^r, $1 \leqslant r < k$, на M^n наз. функция, относящая каждой точке $x \in M^n$ p-мерное линейное подпространство $D(x)$ касательного пространства $T_x(M^n)$, так что x имеет окрестность U с p такими C^r-векторными полями $X_1, \ldots, X_p$ на ней, что векторы $X_1(y), \ldots, X_p(y)$ образуют базис пространства $D(y)$ для каждой точки $y \in U$. Распределение D наз. инволютивным, если для всех точек $y \in U$

$$[X_i, X_j](y) \in D(y), \ 1 \leqslant i, \ j \leqslant p.$$

Это же условие формулируется и в терминах дифференциальных форм. Распределение D характеризуется тем, что

$$D(y) = \{X \in T_y(M^n) : \omega^\alpha(y)(X) = 0\}, \ p < \alpha \leqslant n,$$

где $\omega^{p+1}, \ldots, \omega^n$ суть 1-формы класса C^r, линейно независимые в каждой точке $x \in U$, т. е. D локально эквивалентно системе дифференциальных уравнений $\omega^\alpha = 0$. Тогда D является И. р., если на U существуют 1-формы ω^α_β такие, что

$$d\omega^\alpha = \sum_{\beta=p+1}^n \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta,$$

т. е. внешние дифференциалы $d\omega^\alpha$ принадлежат идеалу, порожденному формами ω^β.

Распределение D класса C^r на M^n инволютивно тогда и только тогда, когда оно (как дифференциальная система) есть *интегрируемая система* (теорема Фробениуса).

Лит.: [1] Шевалле К., Теория групп Ли, т. 1, пер. с англ., М., 1948; [2] Нарасимхан Р., Анализ на действительных и комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1971. *Ю. Г. Лумисте.*

ИНВОЛЮЦИОННАЯ СИСТЕМА — система дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка

$$F_i(x, u, p) = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant m, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, для к-рой все *Якоби скобки* равны нулю

$$[F_i, F_j] = 0, \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant m, \quad (2)$$

тождественно по (x, u, p). Равенства (2) наз. условиями разрешимости.

Для квазилинейных систем это определение несколько видоизменяется. Пусть все функции $\frac{\partial F_i}{\partial p_k}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$, не зависят от $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Тогда этим свойством обладают и функции

$$[F_i, F_j] - F_i \frac{\partial F_j}{\partial u} + F_j \frac{\partial F_i}{\partial u}.$$

В классе квазилинейных уравнений условие инволюционности системы определяется равенствами

$$[F_i, F_j] - F_i \frac{\partial F_i}{\partial u} + F_j \frac{\partial F_i}{\partial u} = 0, \ 1 \leqslant i, \ j \leqslant m.$$

Когда F_i не зависят от u, это определение совпадает с предыдущим. Иногда последнее определение инволюционности распространяют на все системы вида (1).

Если система (1) линейна, однородна и записана в виде

$$P_i(u)=0,\ 1\leqslant i\leqslant m,$$

где P_i — линейные дифференциальные операторы 1-го порядка, то ее инволюционность можно определить как условие коммутируемости $P_iP_j=P_jP_i$ для всех $1\leqslant i$, $j\leqslant m$.

Всякая И. с. является *полной системой*. Обратно, если (1) полная система и имеет нормальную форму, т. е. $1\leqslant m\leqslant n$ и

$$F_i(x,\ u,\ p)=p_i-f_i(x,\ u,\ p_{m+1},\ \ldots,\ p_n),\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

то она инволюционна. Это позволяет привести полную систему к И. с., если $m\leqslant n$, и ее можно разрешить неособым преобразованием относительно нек-рых m переменных $p=(p_1,\ldots,p_n)$.

Если система (1) не зависит от u, $m=n$, определитель $\left|\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right|\neq 0$ и $p_i=p_i(x)$ разрешены из уравнений $F_i(x,p)=0, 1\leqslant i\leqslant n$, то инволюционность этой системы означает, что выражение

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,dx_i$$

является полным дифференциалом. На этом основано применение метода Якоби [2] решения И. с., не зависящих от u и состоящих из m функционально независимых уравнений, $m<n$. В соответствии с этим методом исходную систему расширяют до И. с. из n уравнений с вышеуказанными свойствами. Расширение идет в несколько этапов, каждая последующая система получается из предыдущей добавлением ее независимых первых интегралов в инволюции. Этот метод допускает применение и для системы уравнений, зависящей от u (см. [3]).

Лит.: [1] Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, 2 Aufl., Lpz., 1956; [2] Jacobi C., «J. reine und angew. Math.», 1862, Bd 60, S. 1—181; [3] Goursat E., Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, P., 1891; [4] Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.— М., 1934; [5] Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966.

А. П. Солдато

ИНВОЛЮЦИЯ — 1) *Эндоморфизм* второго порядка т. е. отображение объекта на себя, квадрат к-рого является единичным морфизмом (см. также *Категория инволюцией*). Иногда инволюцией наз. также периодическое отображение, т. е. морфизм нек-рая ненулевая степень к-рого является единичным морфизмом. Минимальная из таких степеней наз. периодом И.

Часто под И. группы понимают ее элементы второго порядка.

И. в алгебре E над полем действительных или комплексных чисел — отображение $x\to x^*$ алгебры E на себя, удовлетворяющее следующим аксиомам инволюции: 1) $x^{**}=x$ для всех $x\in E$; 2) $(x+y)^*=x^*+y^*$ для всех $x, y\in E$; 3) $(\lambda x)^*=\bar\lambda x^*$ для всех $x\in E$ и всех чисел λ из соответствующего поля; 4) $(xy)^*=y^*x^*$ для всех $x, y\in E$. Алгебра E над полем комплексных чисел, снабженная И., наз. симметричной алгеброй.

Лит.: [1] Коннер П., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969.

2) И. в проективной геометрии — проективное преобразование, квадрат к-рого есть тождественное преобразование. Не тождественная И. действительной проективной прямой имеет только две неподвижные точки (гиперболическая И.) либо не

имеет неподвижных точек (эллиптическая И.). Если A и B — неподвижные точки гиперболической И., то соответствующие друг другу точки M и M' гармонически разделяют пару A, B. На проективной плоскости всякая И. есть гиперболическая *гомология*.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1977.

3) И. на алгебраическом многообразии — автоморфизм конечного порядка алгебраич. многообразия. Если X — неособое проективное алгебраич. многообразие над алгебраически замкнутым полем k и g — И. многообразия X, то фактор-многообразие $X|\{g\}$ по действию циклич. группы $\{g\}$ является проективным многообразием и наз. образом инволюции g. Множество неподвижных точек $F(g)$ инволюции g образует неособое подмногообразие в X. В случае, когда $F(g)$ имеет в каждой своей точке коразмерность, равную 1, образ инволюции g является неособым многообразием. Численные инварианты неособой модели $\overline{X}$ многообразия $X|\{g\}$ могут быть вычислены с помощью *Лефшеца формулы*.

Лит.: [1] Атья М., Зингер И., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 1, с. 127—82; [2] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1975, с. 77—170; [3] Godeaux L., Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications, Roma, [1963].

ИНДЕКС числа a по модулю m — показатель γ в *сравнении* $a \equiv g^{\gamma} \pmod{m}$, где a и m взаимно просты, а g — некоторый фиксированный *первообразный корень* по модулю m. И. числа a по модулю m обозначается через $\gamma = \mathrm{ind}_g\, a$ или, более кратко, $\gamma = \mathrm{ind}\, a$. Первообразные корни существуют только для модулей вида $m=2$, 4, p^{α}, $2p^{\alpha}$, где $p>2$ — простое число, и следовательно, только для таких модулей определено понятие И.

Если g — первообразный корень по модулю m и γ пробегает значения $0, 1, \ldots, \varphi(m)-1$, где $\varphi(m)$ — *Эйлера функция*, то g^{γ} пробегает приведенную систему вычетов по модулю m. Следовательно, каждому числу a, взаимно простому с m, соответствует единственный индекс γ такой, что $0 \leqslant \gamma \leqslant \varphi(m)-1$. Любой другой индекс γ' числа a удовлетворяет сравнению $\gamma' \equiv \gamma \bmod \varphi(m)$. Поэтому И. числа a образуют класс вычетов по модулю $\varphi(m)$.

Понятие И. аналогично понятию *логарифма* и И. обладает рядом свойств логарифма, а именно:

$$\mathrm{ind}\,(ab) \equiv \mathrm{ind}\, a + \mathrm{ind}\, b \pmod{\varphi(m)},$$

$$\mathrm{ind}\,(a^n) \equiv n\, \mathrm{ind}\, a \pmod{\varphi(m)},$$

$$\mathrm{ind}\, \frac{a}{b} \equiv \mathrm{ind}\, a - \mathrm{ind}\, b \pmod{\varphi(m)},$$

где a/b означает корень сравнения

$$bx \equiv a \pmod{m}.$$

Если $m = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение произвольного натурального числа m и $g_1, \ldots, g_s$ — первообразные корни по модулям $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_s^{\alpha_s}$ соответственно, то для всякого a, взаимно простого с m, существуют целые числа $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ такие, что

$$a \equiv (-1)^{\gamma}\, 5^{\gamma_0} \pmod{2^{\alpha}},$$

$$a \equiv g_1^{\gamma_1} \left(\mathrm{mod}\ p_1^{\alpha_1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a \equiv g_s^{\gamma_s} \left(\mathrm{mod}\ p_s^{\alpha_s}\right).$$

Указанная система $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ наз. системой индексов числа a по модулю m. Каждому числу a, взаимно простому с m, соответствует единственная система индексов $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ такая, что

$$0 \leqslant \gamma \leqslant c-1,\ 0 \leqslant \gamma_0 \leqslant c_0 - 1,\ 0 \leqslant \gamma_1 \leqslant c_1,\ \ldots,$$
$$0 \leqslant \gamma_s \leqslant c_s,$$

где $c_i=\varphi(p_1^{\alpha_i})$, $i=1, 2, \ldots, s$, а c и c_0 определены следующим образом:

$$c=1,\ c_0=1 \text{ при } \alpha=0 \text{ или } \alpha=1,$$
$$c=2,\ c_0=2^{\alpha-2} \text{ при } \alpha\geqslant 2.$$

Всякая другая система $\gamma', \gamma_0', \gamma_1', \ldots, \gamma_s'$ И. числа a удовлетворяет сравнениям

$$\gamma'\equiv\gamma \pmod c,\ \gamma_0'\equiv\gamma_0 \pmod{c_0},$$
$$\gamma_1'\equiv\gamma_1 \pmod{c_1},\quad \gamma_s'\equiv\gamma_s \pmod{c_s}.$$

Понятие системы И. числа a по модулю m удобно для явного построения характеров мультипликативной группы приведенных классов вычетов по модулю m.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972. *С. А. Степанов.*

ИНДЕКС ОПЕРАТОРА — разность размерностей *дефектных подпространств* линейного оператора $A: L_0\to L_1$ — его ядра $\mathrm{Ker}\,A=A^{-1}(0)$ и его коядра $\mathrm{Coker}\,A=L_1/A(L_0)$, если эти пространства конечномерны. И. о. является гомотопич. инвариантом, характеризующим разрешимость уравнения $Ax=b$.

ИНДЕКСА ФОРМУЛЫ — соотношения между аналитич. и топологич. инвариантами операторов нек-рого класса. Именно, И. ф. устанавливают связь между аналитич. индексом линейного оператора

$$D: L_0\to L_1$$

(L_0, L_1 — топологич. векторные пространства), определяемым формулой

$$i_a(D)=\dim\mathrm{Ker}\,D-\dim\mathrm{Coker}\,D\in\mathbb{Z}$$

и измеряющим таким образом «разность» между дефектными подпространствами D: его ядром $\mathrm{Ker}\,D=D^{-1}(0)$ и его коядром $\mathrm{Coker}\,D=L_1/D(L_0)$, и топологич. индексом — нек-рой топологич. характеристикой оператора D и пространств L_0, L_1. Для общего эллиптического дифференциального оператора на замкнутом многообразии задача нахождения И. ф. поставлена в конце 50-х гг. 20 в. [1] и решена в 1963 (см. [2]), хотя частные виды И. ф. были известны и ранее: такова, напр., *Гаусса — Бонне теорема* и ее многомерные варианты. В дальнейшем был получен ряд обобщений И. ф. на объекты более сложной природы; в этих случаях вместо индекса — целого числа — могут фигурировать произвольные комплексные числа и даже функции.

Элементарные формулы индекса. 1) Пусть M — дифференцируемая граница ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^{n+1}$, A — эллиптический псевдодифференциальный оператор, отображающий пространство $C^\infty(M, \mathbb{C}^p)$ дифференцируемых комплекснозначных вектор-функций на M со значениями в $\mathbb{C}^p$ в себя. Пусть $B(M)$ — многообразие касательных векторов к M длины $\leqslant 1$, ориентированное посредством $2n$-формы

$$(dx^1\wedge d\xi_1)\wedge\ldots\wedge(dx^n\wedge d\xi_n),$$

где $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты на M, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — соответствующие координаты в касательном пространстве, $S(M)$ — ориентированная граница $B(M)$, образованная единичными касательными векторами. В силу эллиптичности A его символ a является невырожденной $(p\times p)$-матричной функцией на $S(M)$. Оказывается, что для индекса оператора A имеет место формула [7]:

$$\mathrm{ind}\,A=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2\pi i)^n\,(2n-1)!}\int_{S(M)}\mathrm{Tr}\,(a^{-1}da)^{\wedge 2n-1},\quad (1)$$

где $(a^{-1}da)^{\wedge 2n-1}$ — внешняя степень матричной дифференциальной формы $a^{-1}da$, а через Tr обозначен след $(p\times p)$-матричной формы. В частности, если $p<n$ или если A — дифференциальный оператор на нечет-

номерном многообразии, то ind $A=0$ (для псевдодифференциального оператора последнее, вообще говоря, неверно).

2) Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор вида (здесь α — мультииндекс)

$$A=\sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant m} A_\alpha(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

в пространстве $C^\infty(\Omega)$, $B_1, \ldots, B_{m/2}$ — краевые дифференциальные операторы из $C^\infty(\Omega)$ в $C^\infty(M)$ вида

$$B_j=\sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant m_j} B_{j\alpha}(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha.$$

Набор операторов $\{A, B_1, \ldots, B_{m/2}\}$ задает эллиптическую краевую задачу, если не вырождается на $S(M)$ функция $\xi\to r_{jk}(\xi)$. Здесь r_{jk} — коэффициенты полиномов

$$r_j(\xi, \lambda)=\sum\nolimits_{k=0}^{m/2-1} r_{jk}(\xi)\lambda^k,$$

являющихся остатками от деления λ-полиномов $b_j(\xi, \lambda)$ на λ-полином $a^+(\xi, \lambda)$, где

$$b_j(\xi, \lambda)=\sum\nolimits_{|\alpha|=m_j} B_{j\alpha}(x)(\xi+\lambda\nu)^\alpha,$$

а a^+ определяется из разложения $a=a^+a^-$, где

$$a(\xi, \lambda)=\sum\nolimits_{|\alpha|=m} A_\alpha(x)(\xi+\lambda\nu)^\alpha,$$

$x\in M$; ξ, ν — единичные касательный вектор и внутренняя нормаль к M соответственно; a^+ (соответственно a^-) — λ-полином, не имеющий нулей в верхней (соответственно, нижней) λ-полуплоскости. Индексом описанной краевой задачи наз. индекс соответствующего ей линейного оператора $\mathfrak{A}$ из $C^\infty(\Omega)$ в $C^\infty(\Omega)\times C^\infty(M)^{m/2}$, переводящего $u\in C^\infty(\Omega)$ в набор $\{Au, B_1u|_M, \ldots, B_{m/2}u|_M\}$. Оказывается, что индекс эллиптической краевой задачи совпадает с индексом эллиптического псевдодифференциального оператора на M, символом к-рого служит матрица $r=(r_{jk})$. В частности, индекс задачи Дирихле $\left\{A, 1, \frac{\partial}{\partial\nu}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{m/2-1}\right\}$ равен нулю. Имеются общие И. ф. для граничных задач [16], [17].

Ф о р м у л ы А т ь и — З и н г е р а. Пусть $C^\infty(\xi)$ и $C^\infty(\eta)$ — пространства бесконечно дифференцируемых сечений векторных расслоений ξ и η над дифференцируемым замкнутым n-мерным многообразием M, D — (псевдодифференциальный) эллиптич. оператор, действующий из $C^\infty(\xi)$ в $C^\infty(\eta)$. Топологич. индекс $i_t(D)$ оператора D определяется следующим образом. Вследствие эллиптичности символ $\sigma(D)$ оператора D определяет изоморфизм поднятий векторных расслоений на $S(M)$:

$$\sigma(D): \pi^*(\xi)\to\pi^*(\eta),$$

где $\pi: S(M)\to M$ — расслоение единичных сфер кокасательного расслоения T^*M многообразия M. Пусть $B(M)$ — пространство расслоения единичных шаров в T^*M, это — $2n$-мерное многообразие с краем $S(M)$. Склейкой двух экземпляров $B^+(M)$ и $B^-(M)$ многообразия $B(M)$ по их общей границе получается замкнутое $2n$-мерное многообразие $\Sigma(M)=B^+\cup_{S(M)}B^-$, над к-рым строится векторное расслоение

$$V(\sigma)=\pi^{+*}(\xi)\cup_{\sigma(D)}\pi^{-*}(\eta),$$

где $\pi^\pm: B^\pm(M)\to M$, а $\sigma(D)$ использовано для отождествления ξ и η вдоль $S(M)$. Это векторное расслоение $V(\sigma)$ несет всю топологич. информацию, нужную для определения топологич. индекса. Именно:

$$i_t(D)=\{\operatorname{ch} V(\sigma)\cdot\pi_\Sigma^*\mathcal{T}(M)\}[\Sigma(M)], \qquad (2)$$

где $\mathrm{ch}\, V(\sigma)$ — когомологический *Чжэня характер* расслоения $V(\sigma)$, $\mathcal{T}(M)$ — когомологический *Тодда класс* комплексифицированного кокасательного расслоения $T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $\pi_{\Sigma}: \Sigma(M) \to M$, $\pi^* \mathcal{T}(M) = \mathcal{T}(\Sigma(M))$, и справа стоит значение $2n$-мерной компоненты элемента $\mathrm{ch}\, V(\sigma) \cdot \pi_{\Sigma}^* \mathcal{T}(M)$ на *фундаментальном цикле* многообразия $[\Sigma(M)]$. Таким образом, отображение $V(\sigma(D)) \to i_t(D)$ определяет гомоморфизм $K(\Sigma(M)) \to \mathbb{Z}$, тривиальный на образе $K(M)$, здесь $K(X)$ — *Гротендика группа*, порожденная комплексными векторными расслоениями над X.

Теорема об индексе Атьи — Зингера:

$$i_a(D) = i_t(D). \tag{3}$$

Формула (2) допускает ряд модификаций. Вводится следующим образом зависящий от символа $\sigma(D)$ рациональный класс когомологий $\mathrm{ch}\,[\sigma(D)]$: тройке $\{\pi^*(\xi), \pi^*(\eta), \sigma(D)\}$ сопоставляется *различающий элемент*, к-рый можно рассматривать как первое *препятствие* к распространению изоморфизма σ на все $B(M)$,

$$[\sigma(D)] \in K(B(M)/S(M)) = K(TM),$$

где TM — касательное расслоение, к-рое (с помощью римановой метрики на M) можно отождествить с T^*M, $K(B/S)$ — относительная группа Гротендика векторных расслоений над B/S, и следовательно — характер Чжэня $[\sigma(D)]$: $\mathrm{ch}\,[\sigma(D)] \in H^*(B/S;\, \mathbb{Q})$. Теперь формула для топологич. индекса D принимает вид:

$$i_t(D) = (-1)^n \{\mathrm{ch}\,[\sigma(D)] \cdot \pi^* \mathcal{T}(M)\}\,[TM], \tag{4}$$

где $\pi: TM \to M$, $\pi^* \mathcal{T}(M) = \mathcal{T}(TM)$.

Тома изоморфизм

$$\varphi_*: H^*(B/S) = H^*(TM) \to H^*(M)$$

позволяет записать (4) в виде

$$i_t(D) = (-1)^{n(n+1)/2} \{\varphi_*\, \mathrm{ch}\,[\sigma(D)] \cdot \mathcal{T}(M)\}\,[M] \tag{5}$$

(в (4) и (5) справа по-прежнему, как и в (2), значения соответствующих элементов на фундаментальных циклах.)

В терминах K-теории топологич. индекс выражается следующим образом. Пусть $i: M \to E$ — дифференцируемое вложение M в евклидово пространство, W — трубчатая окрестность M в E, к-рую можно рассматривать как действительное векторное расслоение над M, причем TW изоморфно (над $\mathbb{R}$) $\pi^*(W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ — комплексификации расслоения W, поднятой на TM проекцией $\pi: TM \to M$. Композиция изоморфизма Тома $\varphi: K(TM) \to K(TW)$ с естественным гомоморфизмом $K(TW) \to K(TE)$, индуцированным вложением $W \to E$, определяет гомоморфизм $i_!: K(TM) \to K(TW)$. Пусть $\beta: K(TE) \to \mathbb{Z}$ — изоморфизм периодичности Ботта. Тогда гомоморфизм $\beta \circ i_!: K(TM) \to \mathbb{Z}$ не зависит от вложения, и

$$i_t(D) = \beta \circ i_!([\sigma(D)]).$$

Примеры. 3) Пусть M — замкнутое ориентированное риманово многообразие, $\xi^k = \Lambda^k(T^*M) \otimes \mathbb{C}$ — расслоение комплексных дифференциальных k-форм над M,

$$d: C^\infty(\xi^k) \to C^\infty(\xi^{k+1}),\quad d^*: C^\infty(\xi^{k+1}) \to C^\infty(\xi^k)$$

— оператор внешнего дифференцирования и его сопряженный, соответственно. Оператор

$$d + d^*: C^\infty(\xi^e) \to C^\infty(\xi^0),$$

где $\xi^e = \bigoplus_p \xi^{2p}$, $\xi^0 = \bigoplus_p \xi^{2p+1}$, эллиптичен, для него справедлива И. ф. (3), причем топологич. индекс равен *эйлеровой характеристике* $\chi(M)$ (Ходжа — де Рама теорема). При $\dim M=2$ получается теорема Гаусса — Бонне.

4) Пусть $\xi^{\pm}$ — собственные ($\pm$)-пространства инволюции $I(\alpha)=i^{p(p-1)+k}*\alpha$, $\alpha\in\xi^p$, где $*$ есть оператор двойственности, определяемой метрикой на M, $\dim M=2k$. Сужение оператора $d+d^*$ до оператора из $C^\infty(\xi^+)$ в $C^\infty(\xi^-)$, называемое сигнатурным оператором δ_M,— эллиптический оператор, для него справедлива И. ф. (3), причем аналитич. индекс равен *сигнатуре* многообразия M, а топологич. индекс равен *L-роду* (теорема Хирцебруха).

5) Пусть η — голоморфное векторное расслоение над компактным комплексным многообразием M, $\xi^{0,q}$ — расслоение дифференциальных форм типа $(0, q)$, $\eta\otimes\xi^{0,q}$ — расслоение форм типа $(0, q)$ с коэффициентами в η, $\zeta^{0,q}$ — $\mathbb{C}$-модуль гладких сечений этого расслоения. Пусть $\bar\partial:\zeta^{0,q}\to\zeta^{0,q+1}$ — оператор Коши — Римана — Дольбо, $\bar\partial^*$ — его сопряженный, $\zeta^e=\oplus_p\zeta^{0,2p}$, $\zeta^0=\oplus_p\zeta^{0,2p+1}$. Тогда оператор $\bar\partial+\bar\partial^*:\zeta^e\to\zeta^0$ является эллиптическим, и для него справедливо (3), причем аналитич. индекс равен эйлеровой характеристике M с коэффициентами в пучке ростков голоморфных сечений расслоения η, а топологический индекс — $\{\operatorname{ch}\eta\times\mathcal{T}(M)\}[M]$, где $\operatorname{ch}\eta$ — характер Чжэня расслоения η, $\mathcal{T}(M)$ — класс Тодда касательного расслоения к M (теорема Римана — Роха — Хирцебруха).

Эллиптические комплексы. В более общей ситуации, естественно возникающей, напр., в дифференциальной геометрии, вместо одного оператора D рассматривается комплекс (псевдодифференциальных) операторов

$$A:0\to C^\infty(\xi_0)\xrightarrow{D_0}C^\infty(\xi_1)\xrightarrow{D_1}\dots\xrightarrow{D_{N-1}}C^\infty(\xi_N)\to 0,$$

где ξ_j — дифференцируемые векторные расслоения над замкнутым многообразием M, $D_{j+1}D_j=0$. Символом комплекса A наз. соответствующая последовательность главных символов

$$\sigma(A):0\to\pi^*(\xi_0)\xrightarrow{\sigma_0}\pi^*(\xi_1)\xrightarrow{\sigma_1}\dots\xrightarrow{\sigma_{N-1}}\pi^*(\xi_N)\to 0,$$

где $\pi^*(\xi_j)$ — поднятие расслоений ξ_j на $S(M)$ с помощью проекции $\pi: T^*M\to M$. Комплекс A наз. эллиптическим, если его символ является ациклическим комплексом, т. е. точен всюду вне нулевого сечения. Аналитическим индексом комплекса A наз. его эйлерова характеристика:

$$i_a(A)=\chi(A)=\sum\nolimits_{j=0}^{N}(-1)^j\dim H^j(A),$$

где $H^j(A)$ — группы когомологий комплекса A. Двумя важными примерами эллиптич. комплексов являются комплекс де Рама и его комплексный аналог — комплекс Дольбо. Проблема вычисления $\chi(A)$ через класс комплекса $\sigma(A)$ в $K(TM)$ может быть сведена к вычислению индекса для одного оператора [3].

Если компактная группа G действует на A (и коммутирует с действием D_j, т. е. A есть G-комплекс), то $H^j(A)$ будут G-модулями, и $\chi(A)$ определяется как элемент кольца характеров группы G. Это — функция из $C^\infty(G)$. Оказывается при этом, что теорема об индексе может рассматриваться как обобщение *Лефшеца теоремы* о неподвижных точках, поскольку топологич. индекс в точке $g\in G$ может быть выражен через индекс сужения символа на подмножество $M^g\subset M$ неподвижных точек отображения, задаваемого элементом g.

Пусть G — топологическая циклическая группа, т. е. в G существует элемент g, степени к-рого плотны в G, N^g — нормальное расслоение к M^g в M, и $[\sigma(A)]\in K_G(TM)$ — класс символа A. Пусть $i^*[\sigma(A)](g)\in$

$\in K_G(TM^g)$ и $\lambda_{-1}(N^g \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(g)$ — ограничение на M^g его и класса, порожденного стандартным комплексом внешних степеней расслоения $\pi^*(N^g \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ соответственно (здесь $i: M^g \to M$, $\pi: TM^g \to M^g$). Тогда число Лефшеца $L(g, A)$, равное $\Sigma(-1)^j \operatorname{Tr}(g|H^j(A))$, задается формулой:

$$L(g, A) = \operatorname{ind}\left\{\frac{i^*[\sigma(A)](g)}{\lambda_{-1}\left(N^g \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\right)(g)}\right\} = \operatorname{ind}_G A(g),$$

где $\operatorname{ind}: K(TM^g) \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — естественное расширение топологич. индекса $K(TM^g) \to \mathbb{Z}$. Когомологический вариант этой формулы:

$$\operatorname{ind}_G A(g) = \left\{\frac{\operatorname{ch} i^*[\sigma(A)](g)}{\operatorname{ch} \lambda_{-1}\left(N^g \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\right)(g)} \cdot \pi^* \mathcal{T}(M^g)\right\}[M]. \quad (6)$$

Без условия компактности G, но в предположении, что M^g — нульмерное подмногообразие и действие G является невырожденным (т. е. график g трансверсален диагонали в $M \times M$), имеет место аналогичная формула. Она может быть выражена таким образом. Если $P \in M^g$, то $dg(P)$ оставляет на месте $TM|_P$, а g индуцирует в слое $\xi_j|_P$ линейное преобразование $l_j(g, P)$, и

$$\operatorname{ind}_G A(g) = \sum_{P \in M^g} \sum_j (-1)^j \operatorname{Tr} l_j(g, P)/\det(1 - \mathrm{dg}(P)).$$

Возможно, наконец, ослабление условия эллиптичности G-комплекса A рассмотрением так наз. трансверсально эллиптических комплексов; в этом случае индекс оказывается обобщенной функцией на группе G (см. [8]). В частности, если G — конечна, то трансверсальная эллиптичность эквивалентна эллиптичности, так что применимы прежние формулы. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то все комплексы операторов трансверсально эллиптичны, и здесь И. ф. по существу совпадает с Фробениуса формулой взаимности для индуцированных представлений группы G.

Нефредгольмовы операторы. В этом случае также иногда удается дать другое определение аналитич. индекса и получить соответствующие И. ф.

Примеры: 6) Пусть D — равномерно эллиптич. оператор на $\mathbb{R}^n$ с почти периодич. коэффициентами. Аналитич. индекс $i_a(D)$ вводится с помощью относительной размерности в II_∞-факторе (см. *Неймана алгебра*) и является действительным числом (см. [11]). Имеет место формула, аналогичная (1), но вместо интеграла по $\mathbb{R}^n$ в ней используется среднее значение почти периодич. функции.

7) Пусть на многообразии M свободно действует дискретная группа Γ и факторпространство $\tilde{M} = M/\Gamma$ компактно; пусть ξ, η — векторные расслоения над M и Γ действует на них согласованно с ее действием на M. Для эллиптич. оператора $D: C^\infty(\xi) \to C^\infty(\eta)$ на M, перестановочного с действием Γ, аналитич. индекс определяется формулой

$$i_a(D) = \operatorname{Tr}_\Gamma P_1 - \operatorname{Tr}_\Gamma P_2, \quad (7)$$

где P_1, P_2 — ортогональные проекторы на $\operatorname{Ker} D$ и на $\operatorname{Ker} D^*$ в $L^2(M, d\mu)$, $d\mu$ — любая Γ-инвариантная гладкая плотность на M, а $\operatorname{Tr}_\Gamma P$ для оператора P, перестановочного с Γ и имеющего гладкое ядро $P(x, y)$, определяется формулой

$$\operatorname{Tr}_\Gamma P = \int_{M_0} \operatorname{tr} P(x, y)\, d\mu$$

(здесь M_0 — любая фундаментальная область группы Γ на M, tr — след матрицы). Оказывается, что $i_a(D) = i_a(\tilde{D})$, где $\tilde{D}$ — оператор на $\tilde{M}$, символ к-рого $\sigma(\tilde{D})$ индуцирует $\sigma(D)$ при поднятии на M с помощью канонической проекции $\pi : M \to \tilde{M}$ [12]. Таким образом И. ф. для оператора D может быть получена из И. ф. для оператора $\tilde{D}$ на компактном многообразии $\tilde{M}$. Этот результат позволяет обнаруживать нетривиальность пространств, в к-рых реализуются представления дискретных серий [13].

8) Если коэффициенты равномерно эллиптического оператора D на $\mathbb{R}^n$ образуют однородное измеримое случайное поле, то можно ввести аналитич. индекс $i_a(D)$, являющийся случайной величиной (в эргодическом случае — действительным числом), определяемой по формуле (7) с заменой $\mathrm{Tr}_\Gamma P$ на $\mathrm{Tr}P$, где $\mathrm{Tr}P$ строится по ядру $P(x, y)$ оператора P через среднее значение по x: $\mathrm{Tr}\, P = M_x\{\mathrm{tr}\, P(x, x)\}$. Этот пример — обобщение (x 6) и для него имеет место [14] аналогичная И. ф.

Если дано семейство эллиптических операторов, параметризованное точками y компактного пространства Y, то определен его аналитич. индекс $i_a(D) \in K(Y)$ (см. [15]). Топологич. индекс $i_t(D)$ строится аналогично формуле (6) (все построения делаются «послойно» над Y) и имеет место теорема об индексе.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 3, с. 121—32; [2] Атья М. Ф., Зингер И. М., «Математика», 1966, т. 10, № 3, с. 29—38; [3] их же, «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 5, с. 99—142; [4] Атья М. Ф., Сегал Г. Б., там же, в. 6, с. 135—49; [5] Атья М. Ф., Зингер И. М., там же, 1969, т. 24, в. 1, с. 127—82; [6] их же, там же, 1972, т. 27, в. 4, с. 161—88; [7] Федосов Б. В., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1974, т. 30, с. 159—241; [8] Atiyah M., Elliptic operators and compact groups, B.—Hdlb.—N.Y., 1974; [9] Пале Р., Семинар по теореме Атьи — Зингера об индексе, пер. с англ., М., 1970; [10] Атья М. Ф., Ботт Р., Патоди В. К., «Математика», 1973, т. 17, № 6, с. 3—48; [11] Coburn L., Moyer R., Singer I. M., «Acta Math.», 1973, v. 130, № 3—4, p. 279—307; [12] Atiyah M. F., «Astérisque», 1976, v. 32—33, p. 43—72; [13] Atiyah M. F., Schmid W., «Inventiones math.», 1977, v. 42, p. 1—62; [14] Федосов Б. В., Шубин М. А., «Докл. АН СССР», 1977, т. 236, № 4, с. 812—5; [15] Атья М. Ф., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [16] Boutet de Monvel L., «Acta math.», 1971, v. 126, № 1—2, p. 11—51; [17] Федосов Б. В., «Матем. сб.», 1974, т. 93, № 1, с. 62—89; т. 95, № 4, с. 525—50; 1976, т. 101, № 3, с. 380—401.

М. И. Войцеховский, М. А. Шубин.

ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА — термин, используемый в теории *пространств с индефинитной метрикой* для обозначения (в зависимости от типа пространства) либо *билинейной формы*, либо *полуторалинейной формы*, либо (нелинейного) функционала нек-рой степени однородности, заданного в рассматриваемом пространстве. И. м. не является метрикой (т. е. расстоянием), а эпитет «индефинитная» означает, что либо рассматриваемая полуторалинейная форма не является положительно определенной, либо рассматриваемый функционал не является степенью нормы в пространстве. Различные типы И. м. носят название G-метрики, I-метрики, J-метрики (см. *Гильбертово пространство с индефинитной метрикой, Понтрягина пространство*).

А. И. Штерн.

ИНДИВИДНАЯ КОНСТАНТА, предметная константа,— символ *формального языка*, служащий для обозначения нек-рого выделенного, фиксированного элемента (индивида) в структурах, описываемых этим языком. Всякую И. к. можно рассматривать как 0-местную функциональную *константу*. Напр., язык теории полей содержит две И. к.: 0 и 1, а язык проективной геометрии совсем не содержит И. к.

С. К. Соболев.

ИНДИВИДНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ, предметная переменная, — символ *формального языка*, служащий для обозначения произвольного элемента (индивида) в структурах, описываемых этим языком. Всякий формальный язык содержит один или несколько сортов И. п., причем переменных каждого сорта — бесконечное множество. Напр., язык теории векторного пространства содержит два сорта И. п.: для векторов и для скаляров, а язык арифметики — один сорт: для неотрицательных целых чисел. *С. К. Соболев.*

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — другое название *Биркгофа эргодической теоремы* и ее обобщений. *Д. В. Аносов.*

ИНДУКТИВНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ, большая $\operatorname{Ind} X$ и малая $\operatorname{Ind} X$ — *размерностные инварианты* топологического пространства X, определяемые параллельно с помощью понятия перегородки между двумя множествами следующим образом по индукции. Для пустого пространства $X=\phi$ полагается $\operatorname{Ind}\phi=\operatorname{ind}\phi=-1$. В предположении, что уже известны те пространства X, для к-рых $\operatorname{Ind} X<n$, где n — неотрицательное целое число, для пространства X считается $\operatorname{Ind} X<n+1$, если для любых двух дизъюнктных замкнутых множеств A и B в X имеется перегородка C между ними, для к-рой $\operatorname{Ind} C<n$. При этом замкнутое множество C наз. перегородкой между множествами A и B в пространстве X, если открытое множество $X \setminus C$ есть сумма двух открытых дизъюнктных множеств H_A и H_B, содержащих, соответственно, A и B. Это определение переходит в определение малой И. р. $\operatorname{ind} X$, если считать одно из множеств A и B состоящим из одной лишь точки, а другое — произвольным замкнутым множеством, не содержащим эту точку.

Большая И. р. была определена для достаточно широкого класса (метрических) пространств Л. Брауэром [1]. Малая И. р. определена независимо П. С. Урысоном [2] и К. Менгером [3].

Исследование И. р. и вообще размерностных инвариантов содержательно лишь в предположении, что пространство X удовлетворяет достаточно сильным *отделимости аксиомам*, в основном аксиоме нормальности.

Лит.: [1] Brouwer L. E. J., «J. reine und angew. Math.», 1913, Bd 142, S. 146—52; [2] Урысон П. С., «C. r. Acad. sci.», 1922, t. 175, p. 440—42; [3] Menger K., «Monatsh. Math. und Phys.», 1923, Bd 13, S. 148—60; [4] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973. *В. И. Зайцев.*

ИНДУКТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ — определение какого-либо понятия $A(n)$, зависящего от неотрицательного целого параметра n, протекающее по следующей схеме: а) задается значение $A(0)$; б) задается правило получения значения $A(n+1)$ по n и по значению $A(n)$. Типичным И. о. является определение функции $n!$: а) $0!=1$; б) $(n+1)!=n!(n+1)$. Более общим И. о. является определение по *трансфинитной индукции*, с помощью к-рого вводится какое-либо понятие $A(\alpha)$, зависящее от ординального (трансфинитного) числа α. Такое определение осуществляется заданием нек-рого правила, позволяющего получать значение $A(\alpha)$ по известным значениям $A(\beta)$ для всех $\beta<\alpha$. Напр., сумма $\gamma+\alpha$ ординалов γ и α определяется так:

$$\gamma+0=\gamma,\quad \gamma+\alpha=\sup_{\beta<\alpha}(\gamma+\beta)\ \text{для}\ \alpha>0.$$

Другим расширением понятия И. о. является так наз. обобщенное И. о., к-рым задается класс каких-либо объектов. Оно протекает по следующей схеме: 1) задаются нек-рые (исходные) объекты определяемого класса; 2) задаются нек-рые правила, позволяющие из уже определенных объектов получать другие объекты определяемого класса; 3) объектами определяемого класса являются только те, к-рые получены согласно пп. 1) и 2) этого определения (этот пункт всегда подразумевается и поэтому часто опускается). Примером обобщенного И. о. является определение понятия теоремы для данной аксиоматич. системы S: всякая аксиома системы S является теоремой; если посылки какого-нибудь правила вывода системы S — теоремы, то заключение этого правила вывода также является теоремой.

Чтобы доказать, что любой объект из класса, заданного нек-рым обобщенным И. о., напр. всякая теорема какой-нибудь аксиоматич. системы S, обладает нек-рым свойством P, достаточно показать следующее: всякая аксиома системы S обладает свойством P; если посылки какого-нибудь правила вывода обладают свойством P, то заключение этого правила вывода также обладает свойством P. Доказательства такого рода наз. доказательствами индукцией по определению соответствующего понятия (в данном примере — теоремы) или по построению соответствующего объекта, в зависимости от контекста.

Лит.: [1] Шенфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [2] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970.

С. К. Соболев.

ИНДУКТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ — конструкция, к-рая впервые появилась в теории множеств, а затем стала широко использоваться в алгебре, топологии и других областях математики. Важный частный случай И. п. — это И. п. направленного семейства однотипных математических структур. Пусть C — направленное по возрастанию предупорядоченное множество, т. е. в C задано рефлексивное и транзитивное отношение $\precsim$ и для любых элементов α, $\beta \in C$ найдется такой элемент $\gamma \in C$, что $\alpha \precsim \gamma$ и $\beta \precsim \gamma$. И пусть каждому $\alpha \in C$ сопоставлена некоторая структура A_α (для определенности можно считать, что A_α — группы) и при $\alpha \precsim \beta$ заданы гомоморфизмы $\varphi_{\alpha\beta}: A_\alpha \to A_\beta$, удовлетворяющие двум условиям: $\varphi_{\alpha\alpha} = 1_{A_\alpha}$ для любого $\alpha \in C$ и $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$ для любых $\alpha \precsim \beta \precsim \gamma$ из C. На множестве $\overline{A} = \bigcup_{\alpha \in C} A_\alpha$ вводится отношение эквивалентности $\sim$: элемент $x \in A_\alpha$ эквивалентен элементу $y \in A_\beta$, если $x\varphi_{\alpha\gamma} = y\varphi_{\beta\gamma}$ для некоторого γ. Фактормножество $A = \overline{A}/\sim$ можно снабдить структурой группы: если $x \in A_\alpha$, $y \in A_\beta$ и $\alpha \precsim \gamma$, $\beta \precsim \gamma$, то произведением классов эквивалентности с представителями x и y считается класс эквивалентности с представителем $(x\varphi_{\alpha\gamma})(y\varphi_{\beta\gamma})$. Построенная группа A наз. И. п. семейства групп A_α. Для каждого $\alpha \in C$ существует естественный гомоморфизм $\varphi_\alpha: A_\alpha \to A$, который элементу $x \in A_\alpha$ сопоставляет его класс эквивалентности. Группа A, вместе с гомоморфизмами φ_α, обладает следующим универсальным свойством: для любой системы гомоморфизмов $\psi_\alpha: A_\alpha \to B$, $\alpha \in C$, для которой $\psi_\alpha = \psi_{\alpha\beta}\psi_\beta$ при $\alpha \precsim \beta$, существует такой единственный гомоморфизм $\psi: A \to B$, что $\psi_\alpha = \varphi_\alpha\psi$ для любого $\alpha \in C$.

Обобщением данной конструкции И. п. является индуктивный предел (прямой предел, копредел) функтора. Объект A категории $\mathfrak{K}$ наз. индуктивным пределом ковариантного функтора $F: \mathfrak{D} \to \mathfrak{K}$, если:

1. существуют такие морфизмы $\varphi_D: F(D) \to A$, где $D \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$, что $F(\alpha)\varphi_{D_1} = \varphi_D$ для любого морфизма $\alpha: D \to D_1$ из $\mathfrak{D}$;
2. для любого семейства морфизмов $\psi_D: F(D) \to B$, где $D \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$, для к-рого $F(\alpha)\psi_{D_1} = \psi_D$ при любом $\alpha: D \to D_1$ из $\mathfrak{D}$, существует такой единственный морфизм $\gamma: A \to B$, что $\psi_\alpha = \varphi_D\gamma$, $D \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$.

И. п. обозначается $(A, \varphi_D) = \varinjlim F$ или $A = \varinjlim F$ или $A = \varinjlim F(D)$. И. п. контравариантного функтора $F: \mathfrak{D} \to \mathfrak{K}$ определяется как индуктивный предел ковариантного функтора F^* из двойственной к $\mathfrak{D}$ категории $\mathfrak{D}^*$ в категорию $\mathfrak{K}$.

Всякое предупорядоченное множество C можно рассматривать как категорию, объектами к-рой являются элементы множества C, а морфизмами — всевозможные пары (α, β), где α, $\beta \in C$ и $\alpha \precsim \beta$ с очевидным законом композиции. В произвольной категории $\mathfrak{K}$ семейство объектов A_α, $\alpha \in C$, и морфизмов $\varphi_{\alpha\beta}: A_\alpha \to A_\beta$, где $\alpha \prec \beta$, можно рассматривать как образ функтора $F: C \to \mathfrak{K}$, если $\varphi_{\alpha\alpha}=1$ и $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma}=\varphi_{\alpha\gamma}$ при $\alpha \prec \beta \prec \gamma$. Если $\mathfrak{K}$ — категория множеств (групп, топологич. пространств и т. п.), то И. п. функтора $F: C \to \mathfrak{K}$ совпадает с приведенной выше конструкцией индуктивного предела.

Если $\mathfrak{D}$ — малая дискретная категория, то И. п. любого функтора F из $\mathfrak{D}$ в произвольную категорию $\mathfrak{K}$ есть копроизведение объектов $F(D)$, $D \in \mathfrak{D}$. В частности, если категория $\mathfrak{D}$ пуста, то И. п. есть левый нуль, или инициальный объект категории $\mathfrak{K}$. Коядра пар морфизмов любой категории $\mathfrak{K}$ являются И. п. функторов со значениями в $\mathfrak{K}$, к-рые определены на категории с двумя объектами X и Y и четырьмя морфизмами 1_X, 1_Y и α, $\beta: X \to Y$.

Всякий ковариантный функтор F из произвольной малой категории $\mathfrak{D}$ в категорию $\mathfrak{K}$ обладает И. п. тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}$ — категория с копроизведениями и коядрами пар морфизмов.

Лит.: [1] Александров П. С., Топологические теоремы двойственности, ч. 1, М., 1955 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 48); [2] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

М. Ш. Цаленко.

ИНДУКЦИИ АКСИОМА — утверждение о справедливости для всех x нек-рого предиката $P(x)$, определенного на множестве всех неотрицательных целых чисел, если выполняются следующие условия: 1) справедливо $P(0)$, 2) для любого x, если верно $P(x)$, то верно и $P(x+1)$. И. а. записывается в виде

$$P(0) \,\&\, \forall x\,(P(x) \supset P(x+1)) \supset \forall x P(x).$$

В применениях И. а. $P(x)$ наз. индукционным предикатом, или индукционным предложением, а x — индукционной переменной, или переменной, по к-рой производится индукция (в тех случаях, когда $P(x)$ содержит, кроме x, и другие параметры). При этом проверка выполненности условия 1) наз. базисом индукции, а проверка условия 2) — индукционным шагом. Допущение внутри 2) справедливости $P(x)$, из к-рого затем выводится $P(x+1)$, наз. индуктивным предположением.

Принципом (математической) индукции в содержательной математике наз. схема всех И. а. для всевозможных предикатов $P(x)$. В системе FA *арифметики формальной* схема индукции состоит лишь из тех И. а., к-рые соответствуют выразимым в FA предикатам (таких предикатов счетное множество). Этим обстоятельством, т. е. невозможностью выразить в FA индукцию в полном объеме, объясняется неполнота системы FA (см. *Гёделя теорема о неполноте*).

Иногда вместо И. а. рассматривается аксиома: пусть $P(x)$ — некоторое свойство неотрицательных целых чисел; если для любого x из допущения, что $P(y)$ верно для всех y, меньших x, следует, что верно и $P(x)$, то $P(x)$ справедливо для всех x, т. е.

$$\forall x\,((\forall y < x)\, P(y) \supset P(x)) \supset \forall x P(x).$$

Эта аксиома носит название полной, или возвратной, И. а. Принцип полной индукции эквивалентен принципу обычной индукции. См. также *Трансфинитная индукция.*

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

С. К. Соболев.

ИНДУЦИРОВАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — представление π локально компактной группы G, индуцированное представлением ρ ее замкнутой подгруппы H, точнее, представление π группы G в нек-ром пространстве E функций f на группе G, принимающих значения в пространстве V представления ρ и удовлетворяющих условию $f(hg)=\rho(h)f(g)$ для всех $g \in G$, $h \in H$, причем $[\pi(g_1)f](g)=f(gg_1)$ для всех $f \in E$, g, $g_1 \in G$. И. п. π

обычно обозначается Indρ, U^{ρ}, ${}_HU^{\rho}$, ${}_HU^{\rho}_G$. Операция построения И. п. является простейшим и важнейшим приемом построения представлений более сложных групп, исходя из представлений более простых групп, и для широких классов групп полное описание неприводимых представлений может быть дано в терминах И. п. или их обобщений.

Если G — конечная группа, то индуцирующее представление ρ предполагается конечномерным, а в качестве пространства V рассматривается пространство всех функций f на группе G, принимающих значения в V и удовлетворяющих условию $f(hg)=\rho(h)f(g)$. Представление ${}_{\{e\}}U^{\rho}_G$, где ρ — единичное представление единичной подгруппы $\{e\}$, есть правое *регулярное представление* группы G; представление ${}_GU^{\rho}_G$ эквивалентно представлению ρ. Представление ${}_HU^{\rho}_G$ эквивалентно представлению σ в пространстве W всех функций на однородном пространстве $X=G\diagdown H$ со значениями в V, определенному формулой вида $[\sigma(g)f](x)=a(g,\ x)\ f(xg)$, причем функция a определяется следующим образом: если $s: X\to G$ — некоторое отображение, удовлетворяющее условию $s(x)\in x$ для всех $x\in X$, то $a(g,\ x)=$ $=\rho(h)$, где $s(x)g=hs(xg)$ для всех $x\in X$, $g\in G$. Функция a является одномерным коциклом группы G с коэффициентами в группе функций на X со значениями в обратимых операторах в V. Если ρ_1 эквивалентно представлению ρ_2, то Ind ρ_1 эквивалентно Ind ρ_2; представление Ind$(\rho\oplus\sigma)$ эквивалентно представлению Ind $\rho\oplus$ Ind σ. Если K, H — подгруппы группы G, $K\subset H$, и ρ — представление группы K, то представление группы G, индуцированное представлением ${}_KU^{\rho}_H$ группы H, эквивалентно представлению ${}_KU^{\rho}_G$ (т е о р е м а о с к в о з н о м и н д у ц и р о в а н и и). Если π, ρ — представления группы G и ее подгруппы H соответственно, то пространства *сплетающих операторов* Hom $(\pi,\ {}_HU^{\rho}_G)$ и Hom$(\pi|_H\rho)$ изоморфны, где $\pi|_H$ — сужение представления π на подгруппу H (т е о р е м а д в о й с т в е н н о с т и Ф р о б е н и у с а); в частности, если π и ρ неприводимы, то π входит в U^{ρ} с той же кратностью, с к-рой ρ входит в $\pi|_H$. Характер χ_{π} И. п. $\pi=U^{\rho}$ группы G определяется формулой:

$$\chi_{\pi}(g)=\sum\nolimits_{\{\delta:\,\delta y\in H\delta\}}\chi_{\rho}\ (\delta g\delta^{-1}),$$

где χ_{ρ} — характер представления ρ группы H, продолженный нулем на всю группу G, а δ пробегает набор представителей правых смежных классов группы G по подгруппе H. Пусть H, K — подгруппы группы G, ρ — представление группы H, $G_g=K\cap g^{-1}Hg$ для всех $g\in G$ и π^g — представление группы K, индуцированное представлением ρ^g группы G_g, определяемым формулой $\rho^g(x)=\rho(gxg^{-1})$, $x\in G_g$; тогда представление π^g однозначно определяется двойным классом HgK, содержащим элемент g, и сужение И. п. ${}_HU^{\rho}_G$ на подгруппу K эквивалентно прямой сумме представлений π^g, где сумма берется по множеству представителей всевозможных двойных классов HgK, $g\in G$ (т е о р е м а о б о г р а н и ч е н и и И. п. н а п о д г р у п п у). Эта теорема может быть применена, в частности, к разложению тензорного произведения И. п. Пространство операторов, сплетающих данные И. п., допускает явное описание. Представление π группы G тогда и только тогда эквивалентно И. п. вида ${}_HU^{\rho}_G$ для нек-рых H и ρ, когда существует такое отображение P множества подмножеств пространства $H\diagdown G$ в множество проекторов в пространстве E представления π, что 1) $P(\phi)=$ $=0$, $P(H\diagdown G)=1$; 2) если M, $N\subset H\diagdown G$ и $M\cap N=\phi$, то $P(M\cup N)=P(M)+P(N)$; 3) $P(M\cap N)=P(M)P(N)$ для всех M, $N\subset H\diagdown G$; 4) $P(Mg)=\pi^{-1}(g)P(M)\pi(g)$ для всех $M\subset H\diagdown G$, $g\in G$ (такое отображение P наз. с и с т емой импримитивности для представления π с базой $H \diagdown G$. И. п. конечной группы может быть непосредственно описано в терминах модулей над групповой алгеброй, а также может быть определено в категорных терминах. Конечная группа наз. **мономиальной**, если любое ее неприводимое представление индуцировано одномерным представлением нек-рой подгруппы. Всякая мономиальная группа разрешима; всякая нильпотентная группа мономиальна.

Определение И. п. локально компактной группы G существенно зависит от выбора пространства E; напр., в качестве E часто рассматривается пространство всех непрерывных функций на G, удовлетворяющих условию $f(hg)=\rho(h)f(g)$, или (если G — группа Ли) пространство всех дифференцируемых функций на G, удовлетворяющих тому же условию. С другой стороны, пусть ρ — непрерывное унитарное представление замкнутой подгруппы $H \subset G$ в гильбертовом пространстве V, пусть s— измеримое отображение локально компактного пространства $X=H \diagdown G$ в G, удовлетворяющее условию $s(x) \in x$ для всех $x \in X$; пусть Δ_G, Δ_H — модули групп (см. *Хаара мера*) G и H соответственно и ν_s — такая G-квазиинвариантная мера на X, что

$$d\nu_s(xg)/d\nu_s(x)=\Delta_H(h^{x,g})\,\Delta_G^{-1}(h^{x,g}),$$

где $s(x)g=h^{x,g}s(xg)$ для всех $x \in X$, $g \in G$; пусть $L^2(G, H, \rho)$ — гильбертово пространство измеримых вектор-функций F на группе G со значениями в V, удовлетворяющих условию

$$F(hg)=[\Delta_H(h)/\Delta_G(h)]^{1/2}\cdot\rho(h)\,F(g)$$

для всех $h \in H$, $g \in G$ и таких, что интеграл

$$\int_X \|F(s(x))\|_V^2 d\nu_s(x)$$

сходится; непрерывное унитарное представление π группы G в $L^2(G, H, \rho)$, определенное формулой

$$[\pi(g_1)F](g)=F(gg_1)$$

для всех $g, g_1 \in G$, $F \in L^2(G, H, \rho)$, наз. **унитарным индуцированным представлением** локально компактной группы G. Бóльшая часть результатов об И. п. конечных групп допускает обобщение на случай унитарных И. п. локально компактных групп, в том числе свойства представлений $\mathrm{Ind}(\rho_1 \oplus \rho_2)$ и $\mathrm{Ind}(\rho_1 \otimes \rho_2)$, связь И. п. с коциклами на группе G, теоремы о сквозном индуцировании и об ограничении И. п. на подгруппу, формула для характера И. п., критерий индуцированности представления, свойства мономиальных групп и теорема двойственности Фробениуса допускают более или менее непосредственное обобщение на случай унитарных И. п. И. п. локально компактной группы G связаны с представлениями нек-рых обобщенных групповых алгебр этой группы. Если G — группа Ли, то понятие И. п. группы G допускает различные обобщения, в том числе понятие голоморфно И. п., пространство к-рого E является пространством функций на G, аналитических по нек-рым переменным, и понятие представления в когомологиях векторных расслоений над однородными пространствами группы G (представления в нулевых когомологиях суть И. п.). Понятие И. п. и его обобщения играют плодотворную роль в теории представлений; в частности, в терминах унитарных И. п. описываются представления расширений групп; основная серия непрерывных унитарных представлений связной действительной полупростой группы Ли G образована И. п., а именно — индуцированными конечномерными унитарными представлениями борелевской подгруппы группы G; дискретная серия представлений линейной действительной полупростой группы Ли реализуется в когомологиях нек-рых векторных расслоений над однородными пространствами этой группы; неприводимые непрерывные унитарные представления разрешимых связных групп Ли типа I описаны в терминах голоморфно И. п. [7]. Операция И. п. допускает обобщение на случай неунитарных представлений локально компактных групп, а также топологич. групп, не являющихся локально компактными. Изучен [6] аналог И. п. для C^*-алгебр.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [3] Серр Ж.-П., Линейные представления конечных групп, пер. с франц., М., 1970; [4] Макки Г. Дж., «Математика», 1962, т. 6, № 6, с. 57—103; [5] Schmid W., «Ann. of Math.», 1976, v. 103, p. 375—94; [6] Rieffel M., «Advances in Math.», 1974, v. 13, № 2, p. 176—257; [7] Auslander L., Konstant B., «Invent. math.», 1971, v. 14, № 4, p. 255—354; [8] Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 6, с. 3—50; [9] Менский М. Б., Метод индуцированных представлений. Пространство — время и концепция частиц, М., 1976. *А. И. Штерн.*

ИНДУЦИРОВАННОЕ РАССЛОЕНИЕ — расслоение $f^*(\pi): X' \to B'$, индуцированное отображением $f: B' \to B$ и расслоением $\pi: X \to B$, где X' — подпространство прямого произведения $B' \times X$, состоящее из пар (b', x), для которых $f(b') = \pi(x)$, а $f^*(\pi)$ — отображение, определяемое соответствием $(b', x) \to b'$. Отображение $F: f^*(X) \to X$ И. р. в исходное расслоение, определенное формулой $F(b', x) = x$, является морфизмом расслоений, накрывающим f. Для каждой точки $b' \in B$ ограничения

$$F_{b'}: (f^*(\pi))^{-1}(b') \to \pi^{-1}(f(b'))$$

являются гомеоморфизмами. Кроме того, для любого расслоения $\eta: Y \to B'$ и морфизма $H: \eta \to \pi$, накрывающего f, существует один и только один B'-морфизм $K: \eta \to f^*(\pi)$, удовлетворяющий соотношениям $FK = H$, $f^*(\pi)K = \eta$, так что имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "H"] \arrow[ddr, "\eta"'] & & \\ & f^*(X) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f^*(\pi)"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ & B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Расслоения, индуцированные изоморфными расслоениями, изоморфны, расслоение, индуцированное постоянным отображением, изоморфно тривиальному.

Для любого сечения s расслоения π отображение $\sigma: B' \to f^*(x)$, определенное формулой $\sigma(b') = (b', sf(b'))$, является сечением И. р. $f^*(\pi)$ и удовлетворяет соотношению $F\sigma = sf$. Напр., отображение $\pi: X \to B$ индуцирует расслоение π^2 с пространством $\pi^*(x)$ и базой X — квадрат расслоения π, оно обладает единственным сечением $s(x) = (x, x)$.

Лит.: [1] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [2] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [3] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970. *М. И. Войцеховский.*

ИНЕРТНОЕ ПРОСТОЕ ЧИСЛО в расширении $K/\mathbb{Q}$ — такое простое число p, для к-рого главный идеал, порожденный p, остается простым в $K/\mathbb{Q}$, где K — конечное расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$; другими словами, идеал (p) прост в B, где B — кольцо целых чисел поля K. В этом случае говорят также, что p *остается инертным* в расширении $K/\mathbb{Q}$. Аналогично, говорят, что простой идеал $\mathfrak{P}$ дедекиндова кольца A *остается инертным* при расширении K/k, где k — поле частных кольца A и K — некоторое конечное расширение k, если идеал $\mathfrak{P}B$, где B — целое замыкание кольца A в K, прост.

Если K/k — расширение Галуа с группой Галуа G, то для любого идеала $\mathfrak{P}$ кольца $B \subset K$ определена подгруппа $T_{\mathfrak{P}}$ в группе $G_{\mathfrak{P}}$ разложения идеала $\mathfrak{P}$, наз. *подгруппой инерции* (см. *Критический идеал*). Расширение $K^{T_{\mathfrak{P}}}/K^{G_{\mathfrak{P}}}$ — это максимальное промежуточное подрасширение в K/k, в к-ром идеал $\mathfrak{K} \cap K^{G_{\mathfrak{K}}}$ остается инертным.

В циклических расширениях полей алгебраич. чисел всегда существует бесконечно много инертных простых идеалов.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [2] Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1947; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969. *Л. В. Кузьмин.*

ИНЕРЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА — система отсчета в классической механике и в специальной теории относительности, в к-рой справедлив первый закон Ньютона. Понятие И. с. о.— абстракция, однако в весьма широком классе физич. явлений (в их круг не входит описание сильных гравитационных полей) существуют системы отсчета с высокой точностью, близкие к И. с. о. В том случае, когда в целом И. с. о. не существует (напр., в общей теории относительности), в каждой точке можно построить такую систему отсчета, к-рая в малой окрестности этой точки является приближенно инерциальной. В случае общей теории относительности такие системы отсчета наз. локально галилеевыми системами отсчета. Существование локально галилеевой системы отсчета означает то, что касательное пространство в данной точке аппроксимирует искривленное пространство-время.

Всякая система отсчета, к-рая движется относительно И. с. о. прямолинейно и равномерно, является И. с. о. Различные И. с. о. в классич. механике связаны преобразованиями из неоднородной группы *Галилея преобразований*; в специальной теории относительности — преобразованиями из группы Пуанкаре (см. *Лоренца преобразование*). Законы классич. механики и законы специальной теории относительности инвариантны относительно, соответственно, неоднородной группы Галилея и группы Пуанкаре (см. *Относительности принцип*). Следствием принципов относительности являются различные законы сохранения (энергии, импульса, момента импульса), к-рые имеют место лишь в И. с. о. В специальной теории относительности И. с. о. обычно задаются *галилеевой системой координат*, в классической механике — декартовой системой координат.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1971. *Д. Д. Соколов.*

ИНЕРЦИИ ЗАКОН квадратичных форм — теорема, утверждающая, что при любом способе приведения квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij} x_i x_j$$

с действительными коэффициентами к сумме квадратов

$$\sum_{i=1}^{s} b_i y_i^2$$

посредством линейной замены переменных

$$(x_1, \ldots, x_s) = (y_1, \ldots, y_s)\, Q,$$

где Q — невырожденная матрица с действительными коэффициентами, число p (соответственно n) таких индексов i, что $b_i > 0$ (соответственно $b_i < 0$), остается неизменным. В этой классич. форме И. з. установлен Дж. Дж. Сильвестром (J. J. Sylvester). Это утверждение иногда называют также теоремой Сильвестра.

В современной форме И. з.— это следующее утверждение о свойствах симметрических билинейных форм над упорядоченными полями. Пусть E — конечномерное векторное пространство над упорядоченным полем k, снабженное невырожденной симметрич. билинейной формой f. Тогда существует такое целое число $p \geqslant 0$, что для любого ортогонального относительно f базиса $e_1, \ldots, e_s$ в E среди s элементов

$$f(e_i, e_i), \quad i=1, \ldots, s,$$

имеется в точности p положительных и в точности $n=s-p$ отрицательных. Пара (p, n) наз. **сигнатурой** билинейной формы f, а число n — ее **индексом инерции**. Две эквивалентные формы имеют одинаковую сигнатуру. Если k — *евклидово поле*, то равенство сигнатур является достаточным условием для эквивалентности билинейных форм. Если индекс инерции $n=0$, форма наз. **положительно определенной**, а при $p=0$ — **отрицательно определенной**. Эти случаи характеризуются тем, что $f(x, x)>0$ (соответственно $f(x, x)<0$) для любого ненулевого вектора $x \in E$. Из И. з. вытекает, что E есть ортогональная относительно f прямая сумма подпространств

$$E=E_+ \oplus E_-,$$

таких, что сужение f на E_+ является положительно определенной, а сужение f на E_- — отрицательно определенной билинейной формой и

$$\dim E_+=p, \ \dim E_-=n$$

(так что размерности пространств E_+ и E_- не зависят от способа разложения).

Иногда сигнатурой формы f наз. разность

$$\sigma(f)=p-n.$$

Если формы f и g определяют один и тот же элемент кольца Витта $W(k)$ поля k, то $\sigma(f)=\sigma(g)$. Более того, $\sigma(f_1 \oplus f_2)=\sigma(f_1)+\sigma(f_2)$, $\sigma(f_1 \otimes f_2)=\sigma(f_1)\sigma(f_2)$ для любых невырожденных форм f_1 и f_2, и $\sigma(<1>)=1$, так что отображение $f \to \sigma(f)$ определяет гомоморфизм кольца $W(k)$ в кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Если k — евклидово поле, то этот гомоморфизм является изоморфизмом.

И. з. обобщается на случай эрмитовой билинейной формы над максимальным упорядоченным полем k, над квадратичным расширением k или над телом кватернионов над k (см. [1], [4]).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [4] Milnor J., Husemoller D., Symmetric bilinear forms, B.—Hdlb.—N.Y., 1973. *В. Л. Попов.*

ИНИЦИАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО континуума K — совокупность таких точек, в к-рых K — *гладкий континуум*. *А. А. Мальцев.*

ИНТЕГРАЛ — одно из центральных понятий математич. анализа и всей математики, возникновение к-рого связано с двумя задачами: о восстановлении функции по ее производной (напр., с задачей об отыскании закона движения материальной точки вдоль прямой по известной скорости этой точки); о вычислении площади, заключенной между графиком функции $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и осью абсцисс (к этой же задаче приводит вычисление работы, произведенной силой за промежуток времени $a \leqslant t \leqslant b$, и другие вопросы).

Указанные две задачи приводят к двум видам И.: неопределенному и определенному. Изучение свойств и вычисление этих связанных между собой видов И. составляет задачу *интегрального исчисления*.

В ходе развития математики и под влиянием потребностей естествознания и техники понятия неопределенного и определенного И. подвергались ряду обобщений и изменений.

Неопределенный интеграл. **Первообразной функции** $f(x)$ одного переменного x на интервале $a<x<b$ наз. любая функция $F(x)$, производная к-рой для любого x из этого интервала равна $f(x)$. Очевидно, что если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале $a<x<b$, то и функция $F_1(x)=F(x)+C$,

где C — любая постоянная, также является первообразной $f(x)$ на этом интервале. Верно и обратное: любые две первообразные одной и той же функции $f(x)$ на интервале $a<x<b$ могут отличаться лишь на постоянную. Следовательно, если $F(x)$ — одна из первообразных $f(x)$ на интервале $a<x<b$, то любая первообразная $f(x)$ на этом интервале имеет вид $F(x)+C$, где C — постоянная. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале $a<x<b$ наз. неопределенным интегралом функции $f(x)$ (на этом интервале) и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx.$$

Согласно основной теореме интегрального исчисления, для каждой непрерывной на интервале $a<x<b$ функции $f(x)$ существует на этом интервале первообразная и, следовательно, неопределенный И.

Определенный интеграл. Понятие определенного И. вводится либо как предел интегральных сумм (см. *Коши интеграл*, *Римана интеграл*, *Лебега интеграл*, *Колмогорова интеграл*, *Стилтьеса интеграл*), либо в случае, когда заданная функция $f(x)$ определена на нек-ром отрезке $[a, b]$ и имеет на нем первообразную F, как разность ее значений на концах рассматриваемого отрезка $F(b)-F(a)$. Определенный И. от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ обозначают $\int_a^b f(x)dx$. Определение И. как предела интегральных сумм в случае непрерывных функций было сформулировано О. Коши (A. Cauchy) в 1823. Случай произвольных функций был изучен Б. Риманом (B. Riemann, 1853). Существенное продвижение в теории определенного И. принадлежит Г. Дарбу (G. Darboux, 1879), к-рый ввел в рассмотрение наряду с интегральной суммой Римана верхнюю и нижнюю суммы (см. *Дарбу сумма*). Необходимое и достаточное условие интегрируемости по Риману разрывных функций в законченной форме установил (1902) А. Лебег (H. Lebesgue).

Между определенным И. от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и неопределенным И. (или первообразной) этой функции существует следующая связь: 1) если $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$, то справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a);$$

2) для любого x из отрезка $[a, b]$ неопределенный И. непрерывной функции $f(x)$ записывается в виде

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C,$$

где C — произвольная постоянная. В частности, определенный И. с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (1)$$

представляет собой первообразную функцию $f(x)$. Для введения определенного И. от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ в смысле Лебега разбивают множество значений y на частичные отрезки точками $\ldots<y_{-2}<<y_{-1}<y_0<y_1<y_2<\ldots$ и обозначают через M_i множество всех значений x из отрезка $[a, b]$, для к-рых $y_{i-1}\leqslant\leqslant f(x)<y_i$, а через $\mu(M_i)$ — меру множества M_i в смысле Лебега. Интегральную сумму Лебега функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ определяют равенством

$$\sigma = \sum_i \eta_i \mu(M_i), \qquad (2)$$

где η_i — любое число из отрезка $y_{i-1}\leqslant\eta_i\leqslant y_i$.

Функцию $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле Лебега на отрезке $[a, b]$, если существует предел ее интегральных сумм (2) при стремлении к нулю максимальной из разностей $y_i - y_{i-1}$, т. е. если существует такое число I, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при единственном условии $\max_i (y_i - y_{i-1}) < \delta$ справедливо неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$. При этом указанный предел I наз. **определенным интегралом Лебега** от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$.

Вместо отрезка $[a, b]$ можно рассматривать произвольное множество, измеримое относительно некоторой неотрицательной полной счетно аддитивной меры. Возможно и другое введение интеграла Лебега, когда этот И. первоначально определяют на множестве так наз. простых функций (т. е. измеримых функций, принимающих не более счетного множества значений), а затем с помощью операции предельного перехода вводят для произвольной функции, представляющей собой предел равномерно сходящейся последовательности простых функций (см. *Лебега интеграл*).

Каждая интегрируемая в смысле Римана функция является интегрируемой и в смысле Лебега. Обратное неверно, ибо существуют разрывные на множестве положительной меры и вместе с тем интегрируемые в смысле Лебега функции (напр., функция Дирихле).

Для интегрируемости по Лебегу ограниченной функции необходимо и достаточно, чтобы эта функция принадлежала классу *измеримых функций*. Функции, встречающиеся в математич. анализе, как правило, измеримы. Это означает, что интеграл Лебега обладает общностью, исчерпывающей потребности анализа.

Интеграл Лебега охватывает и все случаи абсолютно сходящихся *несобственных интегралов*.

Общность, достигнутая определением И. в смысле Лебега, весьма существенна во многих вопросах современного математич. анализа (теория обобщенных функций, определение обобщенных решений дифференциальных уравнений, изоморфизм гильбертовых пространств L_2 и l_2, эквивалентный так наз. теореме Рисса — Фишера в теории тригонометрических или произвольных ортогональных рядов,— все эти теории оказались возможными только при понимании И. в смысле Лебега).

Первообразную в смысле Лебега естественно определить с помощью равенства (1), в к-ром И. понимается в смысле Лебега. При таком понимании соотношение $F'(x) = f(x)$ будет справедливо всюду, кроме, может быть, множества, имеющего меру, равную нулю.

Другие обобщения понятия интеграла. В 1894 Т. Стилтьесом (T. Stieltjes) было дано другое важное для приложений обобщение интеграла Римана (получившее название интеграла Стилтьеса), в к-ром рассматривается интегрируемость одной функции $f(x)$, определенной на некотором отрезке $[a, b]$, относительно другой функции, определенной на том же отрезке. **Интеграл Стилтьеса** функции $f(x)$ относительно функции $U(x)$ обозначают символом

$$I = \int_a^b f(x)\, dU(x). \qquad (3)$$

Если $U(x)$ имеет ограниченную и интегрируемую в смысле Римана производную $U'(x)$, то интеграл Стилтьеса сводится к интегралу Римана по формуле

$$\int_a^b f(x)\, dU(x) = \int_a^b f(x)\, U'(x)\, dx,$$

в частности при $u(x) = x + C$ интеграл Стилтьеса (3) является интегралом Римана $\int f(x) dx$.

Однако для приложений интересен случай, когда интегрирующая функция $U(x)$ не имеет производной. Примером может служить рассмотрение в качестве $U(x)$ спектральной меры при изучении спектральных разложений.

Криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma} f(x, y)\, dx$$

вдоль кривой Г, определяемой уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, представляет собой частный случай интеграла Стилтьеса, так как может быть записан в виде

$$\int_a^b f[\varphi(t), \psi(t)]\, d\varphi(t).$$

Дальнейшим обобщением понятия И. послужило интегрирование по произвольному множеству в пространстве любого числа измерений. В самом общем случае удобно рассматривать И. как функцию от того множества M, по к-рому производится интегрирование (см. *Функции множеств*) вида

$$F(M) = \int_M f(x)\, dU(x),$$

где U — также некоторая функция множества M (в частном случае его мера), а точка принадлежит множеству M, по к-рому идет интегрирование. Частными случаями такого рассмотрения являются *кратные интегралы* и *поверхностные интегралы*.

Другим обобщением понятия И. является понятие *несобственного интеграла*.

В 1912 А. Данжуа (A. Denjoy) ввел понятие И. (см. *Данжуа интеграл*), применимое ко всякой функции $f(x)$, являющейся производной нек-рой функции $F(x)$. Это позволило привести конструктивное определение И. к такой степени общности, при к-рой оно целиком отвечает задаче разыскания неопределенного И., понимаемого в смысле первообразной.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1—2, М., 1971—73; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976; [3] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1—2, 2 изд., М., 1973; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 1—2, 2 изд., 1975; [5] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959; [6] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.—Л., 1934.

В. А. Ильин.

***A*-ИНТЕГРАЛ** — одно из обобщений интеграла Лебега, данное Е. Титчмаршем [1] для интегрирования функций, сопряженных к суммируемым. Измеримую функцию $f(x)$ наз. *A*-интегрируемой на $[a, b]$, если

$$m\{x, |f(x)| > n\} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

и существует предел

$$I = \lim_{n \to \infty} \int_a^b [f(x)]_n\, dx,$$

где

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant n \\ 0, & |f(x)| > n. \end{cases}$$

Число I наз. *A*-интегралом и обозначают

$$(A) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Лит.: [1] Titchmarsh E. G., «Proc. London Math. Soc.», 1929, № 29, с. 49—80; [2] Виноградова И. А., Скворцов В. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971, с. 65—107.

И. А. Виноградова.

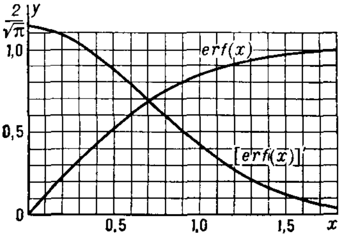
ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТИ, интеграл ошибок,— функция

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt, \quad |x| < \infty.$$

В теории вероятностей используется не И. в., а функция нормального распределения:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

— так наз. **интеграл вероятности Гаусса**. Для случайной величины X, имеющей нормальное распределение с математич. ожиданием 0 и дисперсией σ^2, вероятность неравенства $|X| \leqslant t$ равна $\operatorname{erf}(t/\sqrt{2})$. Для действительного x И. в. принимает действительные значения, в частности



$$\operatorname{erf}(0)=0, \lim_{x \to +\infty} \operatorname{erf}(x)=1.$$

График И. в. и его производной см. на рис. Рассматриваемый и как функция комплексного переменного z, И. в. $\operatorname{erf}(z)$ есть целая функция от z.

Асимптотич. представление при больших z, $\operatorname{Re} z>0$:

$$1-\operatorname{erf}(z) \sim \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot(2k-1)}{2k} \frac{1}{z^{2k}}\right).$$

В окрестности $z=0$ И. в. представляется в виде ряда

$$\operatorname{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(z-\frac{z^3}{1!\,3}+\ldots+\frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} z^{2k+1}+\ldots\right).$$

С *Френеля интегралами* $C(z)$ и $S(z)$ И. в. связан соотношениями:

$$\frac{1+i}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} z\right)=C(z)+i S(z),$$

$$\frac{1-i}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} z\right)=C(z)-i S(z).$$

Производная И. в.:

$$[\operatorname{erf}(z)]'=\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}.$$

Иногда используются следующие обозначения:

$$\Theta(x)=H(x)=\Phi(x)=\operatorname{erf}(x),$$

$$\operatorname{Erf}(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x),$$

$$\operatorname{Erfi}(x)=-i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(ix)=\int_0^x e^{t^2} dt,$$

$$\operatorname{Erfc}(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\operatorname{Erf} x=\int_x^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

$$\alpha(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt-1=\frac{2}{\pi} \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968; [3] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [4] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М., 1963. *А. Б. Иванов.*

ИНТЕГРАЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ — решение дифференциального уравнения. И. д. у. наз. преимущественно соотношение вида $\Phi(x, y)=0$, определяющее решение y обыкновенного дифференциального уравнения

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0 \tag{1}$$

как неявную функцию независимой переменной x. В этом случае говорят также о **частном интеграле** в противоположность **общему интегралу** уравнения (1), т. е. соотношению

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n)=0, \tag{2}$$

из к-рого при соответствующем выборе постоянных $C_1, \ldots, C_n$ получается любая *интегральная кривая* уравнения (1), проходящая в рассматриваемой области G плоскости (x, y). Если из соотношения (2) и из n соотношений, получающихся из него последовательным дифференцированием по x (причем y рассматривается как функция x), исключить произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$, то в результате приходят к уравнению (1). Возникающее в процессе интегрирования уравнения (1) соотношение вида

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(k)}, C_1, \ldots, C_{n-k})=0, \qquad (3)$$

содержащее производные до k-го порядка, $1 \leqslant k < n$, и $n-k$ произвольных постоянных, иногда наз. промежуточным интегралом уравнения (1). Знание промежуточного интеграла (3) сводит решение уравнения (1) порядка n к решению уравнения (3) порядка k. Если соотношение (3) содержит лишь одну произвольную постоянную, т. е. $k=n-1$, то оно наз. первым интегралом уравнения (1). Это уравнение имеет ровно n независимых первых интегралов; знание n таких интегралов позволяет получить общее решение уравнения (1) путем исключения из них величин $y', \ldots, y^{(n-1)}$.

Если рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i=1, \ldots, n, \qquad (4)$$

то под ее общим интегралом имеют в виду совокупность соотношений

$$\Phi_i(t, x_1, \ldots, x_n)=C_i, \quad i=1, \ldots, n, \qquad (5)$$

где C_i — произвольные постоянные, в неявном виде описывающую все решения системы (4) в нек-рой области G пространства $(t, x_1, \ldots, x_n)$. Каждое из соотношений (5) в отдельности наз. первым интегралом системы (4). Чаще под первым интегралом системы (4) понимают функцию $u(t, x_1, \ldots, x_n)$, обладающую тем свойством, что она принимает постоянное значение вдоль любого решения системы (4) в области G. Система (4) имеет ровно n независимых первых интегралов, знание к-рых дает возможность найти общее решение без интегрирования системы; знание k независимых первых интегралов позволяет свести решение системы (4) порядка n к решению системы порядка $n-k$. Гладкая функция $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ является первым интегралом системы (4) с гладкой правой частью тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} f_i(t, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0.$$

Аналогичная терминология иногда употребляется в теории дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка. Так, под И. д. у.

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \qquad (6)$$

или под его частным интегралом, понимают решение этого уравнения (*интегральную поверхность*). Полным интегралом уравнения (6) наз. семейство решений $\Phi(x, y, z, a, b)=0$, зависящее от двух произвольных постоянных. Общий интеграл уравнения (6) — соотношение, содержащее одну произвольную функцию и при каждом выборе этой функции дающее решение уравнения.

Лит.: [1] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959. *Н. Х. Розов.*

ИНТЕГРАЛ ПО ТРАЕКТОРИЯМ, континуальный интеграл, функциональный интеграл,— интеграл, областью интегрирования к-рого служит то или иное функциональное пространство. Чаще всего И. по т. определяется как обычный интеграл Лебега от функционала, заданного на пространстве функций (возможно, обобщенных) по нек-рой мере (быть может, комплексной) в этом пространстве.

В тех случаях, когда лебеговская конструкция интеграла оказывается неприменимой, рассматриваются и другие способы континуального интегрирования. Напр., вместо мер используются *предмеры* (или квазимеры), т. е. аддитивные функции множества, определенные на алгебре всех цилиндрич. подмножеств функционального пространства и такие, что их сужения на любую σ-подалгебру цилиндрич. множеств с фиксированным носителем являются уже мерами. Иногда И. по т. определяется как предел при $n \to \infty$ n-кратных интегралов (вычисляемых по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$), возникающих при подходящей аппроксимации пространства функций (области интегрирования) n-мерным пространством, а интегрируемого функционала — функцией от n переменных. Эти и другие определения И. по т. применимы каждое к своему специальному классу функционалов, причем в тех случаях, когда эти определения пригодны одновременно, они могут, вообще говоря, приводить к различным значениям интеграла. Наконец, И. по т., встречающиеся в литературе по физике, подчас вообще не имеют точного смысла, а рассматриваются как формальные выражения, с к-рыми оперируют как с обычными интегралами (замена переменных, мажорирование, дифференцирование по параметру, предельный переход и т. д.), часто, однако, получая при этом серьезные и эвристически ценные результаты.

И. по т., появившиеся первоначально в теории случайных процессов, позднее были использованы для представления группы

$$\exp\{itH\}, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

а также полугруппы операторов

$$\exp\{-tH\}, \; t > 0,$$

где H — *Штурма — Лиувилля оператор* в пространстве $\mathbb{R}^n$ (оператор энергии для системы квантовых частиц). Подобные представления были получены затем для более широкого класса операторов H (всякое такое представление обычно наз. формулой Фейнмана — Каца) и явились удобным средством для изучения свойств этих операторов (оценка границ спектра, асимптотика собственных значений, свойства рассеяния и т. д. [3]).

Среди применений И. по т. в математич. физике (основанных главным образом на формуле Фейнмана — Каца) наиболее глубоким оказалось их использование в проблемах квантовой статистич. физики [4] и квантовой теории поля [5], [6]. С И. по т. связано отчасти и развитие общих вопросов теории меры и интегрирования в бесконечномерных пространствах [7], [8].

Лит.: [1] Фейнман Р., Хибс А., Квантовая механика и интегралы по траекториям, пер. с англ., М., 1968; [2] Кац М., Вероятность и смежные вопросы в физике, пер. с англ., М., 1965; [3] Гельфанд И. М., Яглом А. М., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, № 1, с. 77—114; [4] Genibre J., Statistical mechanics and quantum field theory, N.Y., 1971; [5] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957; [6] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [7] Смолянов О. Г., Фомин С. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, № 4, с. 3—56; [8] Schwartz L., Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures, L., 1973.

Р. А. Минлос.

ИНТЕГРАЛЫ В ИНВОЛЮЦИИ — решения дифференциальных уравнений, *Якоби скобки* к-рых равны нулю. Функция $G(x, u, p)$ $2n+1$ переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$, u, $p=(p_1, \ldots, p_n)$ есть первый интеграл уравнения с частными производными первого порядка

$$F(x, u, p) = 0, \qquad (1)$$

$$u = u(x_1, \ldots, x_n), \; p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

если она постоянна вдоль каждой характеристики этого уравнения. Два первые интеграла $G_i(x, u, p)$,

$i=1,2$, находятся в инволюции, если их скобка Якоби тождественно равна нулю по (x, u, p):

$$[G_1, G_2]=0. \qquad (2)$$

Вообще, две функции G_1, G_2 находятся в инволюции, если выполнено условие (2). Любой первый интеграл G уравнения (1) находится в инволюции с F; последняя функция сама является первым интегралом.

Эти определения распространяются и на системы уравнений

$$F_i(x, u, p)=0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \qquad (3)$$

При этом первый интеграл этой системы $G(x, u, p)$ можно рассматривать как решение системы линейных уравнений

$$[F_i, G]=0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \qquad (4)$$

с неизвестной функцией G.

Если (3) является *инволюционной системой*, то (4) — полная система. Она инволюционна, если функции F_i в (3) не зависят от u.

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.— М., 1934; [2] Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966.

А. П. Солдатов.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ВОРОНКА точки $P(t_0, x_0)$ для дифференциального уравнения $dx/dt=f(t, x)$ — множество всех точек, лежащих на *интегральных кривых*, проходящих через точку P [под уравнением можно понимать систему уравнений в векторной записи с $x=(x_1, \ldots, x_n)$]. Если через точку P проходит только одна интегральная кривая, то И. в. состоит из одной этой кривой. В случае $n=1$, т. е. когда x — скаляр, И. в. состоит из точек (t, x), для к-рых $x_*(t) \leqslant x \leqslant x^*(t)$, где $x^*(t)$ и $x_*(t)$ — верхнее и нижнее решения, т. е. наибольшее и наименьшее из решений, проходящих через точку P.

Если функция $f(t, x)$ непрерывна (или удовлетворяет условиям теоремы существования Каратеодори), то И. в.— замкнутое множество. Если при этом все решения, проходящие через точку P, существуют на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, то отрезок воронки (часть И. в., определяемая неравенствами $a \leqslant t \leqslant b$) и сечение И. в. любой плоскостью $t=t_1 \in [a, b]$ являются связными компактами. Любую точку на границе И. в. можно соединить с точкой P куском интегральной кривой, лежащим на границе И. в. Если последовательность точек P_k, $k=1, 2, \ldots$, сходится к точке P, то отрезки воронок точек P_k сходятся к отрезку воронки точки P в том смысле, что для любого $\varepsilon>0$ они содержатся при $k>k_1(\varepsilon)$ в ε-окрестности отрезка воронки точки P. Аналогичными свойствами обладают И. в. для *дифференциальных включений*

$$\dot{x} \in F(t, x)$$

при определенных предположениях о множестве $F(t, x)$.

Лит.: [1] Kamke E., «Acta math.», 1932, v. 58, p. 57—85; [2] Бокштейн М. Ф., «Уч. зап. МГУ, сер. матем.», 1939, в. 15, с. 3—72; [3] Pugh C. C., «J. Dif. Equat.», 1975, v. 19, № 2, p. 270—95.

А. Ф. Филиппов.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — теория инвариантных (относительно непрерывных групп отображений пространства на себя) мер на множествах, состоящих из подмногообразий пространства (напр., прямых, плоскостей, геодезических, выпуклых поверхностей и т. п. многообразий, сохраняющих свой тип при рассматриваемых преобразованиях). И. г. строится для различных пространств, прежде всего для евклидовых, проективных, однородных.

И. г. занимается введением инвариантных мер, их связями и геометрич. применениями. Возникла в связи с уточнением постановки задач о геометрич. вероятностях.

Для введения инвариантной меры предварительно ищут такую функцию от координат точки в пространстве, интеграл от к-рой по некоторой области пространства не изменялся бы после непрерывного преобразования координат пространства, составляющих определенную группу Ли. Это требует отыскания интегрального инварианта заданной группы Ли. Последний находится как решение системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\xi_h^i (x) F (x)\right] = 0, \quad h = 1, \ \ldots, \ r, \qquad (1)$$

где $F(x)$ — искомый интегральный инвариант, x — точка n-мерного пространства, ξ_h^i — коэффициент инфинитезимального преобразования группы, r — количество параметров преобразования. Важное значение в И. г. имеют измеримые группы Ли, т. е. такие группы, к-рые допускают существование одного и только одного (с точностью до постоянного множителя) инварианта. Последними, в частности, являются простые транзитивные группы.

Следующая задача И. г. состоит в установлении меры множества многообразий, которые сохраняют свой тип после нек-рой группы непрерывных преобразований. Мера устанавливается равной интегралу

$$\int_{A_\alpha} |F (\alpha^1, \ \ldots, \ \alpha^q)| \, d\alpha^1 \wedge \ldots \wedge d\alpha^q, \qquad (2)$$

где A_α — множество точек в пространстве параметров группы Ли, F — интегральный инвариант группы, определяемый уравнением (1), или плотность меры. Подинтегральное выражение в (2) наз. также элементарной мерой множества многообразий. Определенный выбор этой меры полностью устанавливает соответствие с основной задачей учения о геометрич. вероятностях. Фактически под геометрич. вероятностью множества многообразий со свойством A_1 понимается относительная доля этого множества, рассматриваемого как подмножество многообразий множества многообразий, имеющих более общее свойство A. Задача сводится к установлению мер множества многообразий со свойством A, подмножества со свойством A_1 и их отношения. Последнее и есть геометрич. вероятность.

В случае однородного многомерного пространства мера множества многообразий (напр., точек, прямых, гиперплоскостей, пар гиперплоскостей, гиперсфер, гиперповерхностей 2-го порядка) однозначно (с точностью до постоянного множителя) определяется интегралом

$$\int_X dH = [\omega_1, \ \omega_2, \ \ldots, \ \omega_h], \qquad (3)$$

где $\{\omega_i\}$ суть относительные компоненты ($i = 1, \ldots, h$) заданной транзитивной группы Ли G_2. Линейные комбинации с постоянными коэффициентами этих относительных компонент представляют собой левые части уравнений системы Пфаффа, соответствующей рассматриваемому множеству многообразий. Мера (3) наз. кинематической мерой в однородном пространстве с заданной в нем группой преобразований. Она представляет собой обобщение так наз. кинематической меры Пуанкаре. (Далее все меры указываются с точностью до постоянного множителя.)

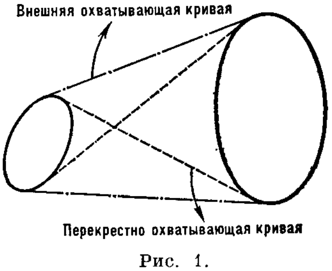


Рис. 1.

И. г. на евклидовой плоскости E^2 обычно рассматривает лишь одно непрерывное преобразование — группу движений (без отражений). Для множества точек интегральный инвариант — единица, для множества прямых — тоже единица, если в качестве параметров прямых выбраны параметры ее нормального уравнения p и φ. Длина произвольной кривой равна $\frac{1}{2}\int n dp d\varphi$, где n — число пересечений прямых с кривой, а интегрирование ведется по множеству прямых, пересекающих кривую. Мера множества прямых, пересекающих две выпуклые фигуры (овалы), равна разности длин перекрестно охватывающей овалы кривой и внешней охватывающей кривой (см. рис. 1). Мера множества прямых, разделяющих два овала, равна длине перекрестно охватывающей кривой без суммы длин контуров овалов. Мера множества пар точек определяется как

$$\int |t_2-t_1|\, dp \wedge d\varphi \wedge dt_1 \wedge dt_2,$$

где p, φ — параметры нормального уравнения прямой, проходящей через точки, а t_1 и t_2 суть расстояния по этой прямой от точек до точки пересечения прямой и перпендикуляра к прямой, проведенного из начала координат (см. рис. 2). Мера множества пар прямых равна

$$\int |\sin(\alpha_1-\alpha_2)|\, dx \wedge dy \wedge d\alpha_1 \wedge d\alpha_2,$$

где x и y — координаты точки пересечения пары прямых, а α_1 и α_2 — углы, к-рые составляют эти прямые с

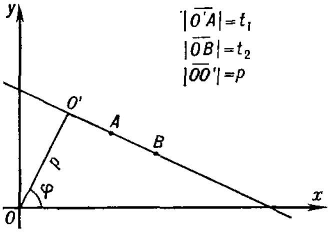


Рис. 2.

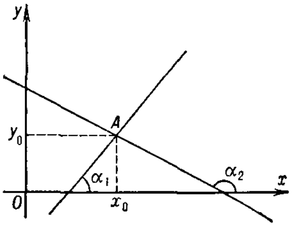


Рис. 3.

одной из координатных осей (см. рис. 3). Мера множества пар кривых, пересекающих овал, равна половине квадрата длины кривой, ограничивающей овал, без площади овала, умноженной на π (ф о р м у л а К р о ф т о н а). Применение кинематич. меры к множеству конгруэнтных овалов, пересекающих заданный овал, позволяет получить одно из изопериметрич. неравенств, а именно классическое *Боннезена неравенство*. Если

$$I_n = \int_G \sigma^n\, dp\, d\varphi, \quad J_n = \int_H r^n\, |t_2-t_1|\, dp \wedge d\varphi \wedge dt_1 \wedge dt_2,$$

где σ — длина хорды овала H, G — множество пересекающих овал прямых, r — расстояние между двумя точками внутренней области овала, то

$$J_n = 2I_{n+3}/(n+2)(n+3),$$

что позволяет просто определить среднее расстояние между двумя точками внутри овала. Кинематич. мера множества фигур есть мера множества фигур, конгруэнтных данной. Она равна

$$\int_X dx \wedge dy \wedge d\varphi,$$

где X — множество точек фигуры, x, y — координаты ее фиксированной точки, φ — угол, определяющий поворот фигуры. Кинематич. мера может трактоваться как мера множества подвижных систем координат. Если неподвижную систему координат сделать подвижной, а подвижную — неподвижной, то для одного и того же множества преобразований кинематич. мера останется неизменной (симметричность кинематич. меры). Если с каждым элементом множества конгруэнтных фигур связать иную подвижную систему, то кинематич. мера также сохраняется. Мера множества конгруэнтных конечных дуг произвольной кривой, пересекающих заданную дугу нек-рой кривой, равна учетверенному произведению длин дуг (формула Пуанкаре). Количество отрезков прямой данной длины l, пересекающих овал, равно $2\pi F_0+2lL_0$, где F_0 и L_0 — площадь овала и длина ограничивающей его кривой. Если заменить овал незамкнутой кривой, то $F_0=0$, и число пересечений будет равно $2lL_0$. Мера множеств овалов, пересекающих данный овал, равна $2\pi(F_0+F)+$ $+L_0L$, где F_0, F суть соответствующие площади, а L_0 и L — длины кривых, ограничивающих овалы.

И. г. в евклидовом пространстве E^3 строится по аналогии с И. г. в E^2. Для множеств точек интегральный инвариант также равен единице. Если множество прямых задано множеством их уравнений в двух проектирующих плоскостях:

$$x=kz+a, \quad y=hz+b,$$

то интегральный инвариант для совокупности параллельного переноса и поворота осей равен $(k^2+h^2+1)^{-2}$. В частности, мера множеств прямых, пересекающих выпуклую замкнутую поверхность (поверхность овалоида), равна половине поверхности овалоида.

Введение по аналогии с E^2 меры множества пар точек позволяет вычислить среднее значение 4-й степени длин хорд овалоида, к-рое равно $12V/\pi S$, где V и S — его объем и поверхность. Для пар пересекающихся прямых, заданных уравнениями в двух проектирующих плоскостях:

$$x=k_1z+a-k_1c; \quad y=h_1z+b-h_1c$$

и

$$x=k_2z+a-k_2c; \quad y=h_2z+b-h_2c,$$

где a, b и c — координаты точек пересечения прямых, она равна

$$\left[\left(k_1^2+h_1^2+1\right)\left(k_2^2+h_2^2+1\right)\right]^{-1,5}.$$

Меры множества пересечений двух заданных подвижных овалоидов относятся как их объемы. Для плоскости, заданной уравнением в отрезках, интегральный инвариант равен

$$(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-2},$$

где a, b, c — длины отрезков. Мера множества плоскостей, пересекающих поверхность площади S, равна $\pi^2 S/2$, а среднее значение длин кривых, по к-рым овалоид пересекается множеством плоскостей, равно $\pi S^2/2\overline{H}$, где $\overline{H}$ — интегральная средняя кривизна.

Для пар плоскостей интегральный инвариант равен произведению интегральных инвариантов множеств плоскостей. Кинематич. мера в E^3 равна произведению меры множества по-различному ориентированных плоскостей и элементарной кинематич. меры в ориентирующей плоскости. Интегральный инвариант для вращений пространственной фигуры, имеющей одну неподвижную точку, равен

$$1+l_1^2+l_2^2+l_3^2,$$

где $l_i=\alpha_i \operatorname{tg}(\varphi/2)$, а α_i, $i=1,2,3$, суть направляющие косинусы оси вращения, φ — угол поворота вокруг этой оси. Мера множеств тел, имеющих общую точку и отличающихся поворотом в пространстве, равна π^2.

И. г. на поверхности строится введением меры множества геодезических как интеграла от внешней дифференциальной формы поверхности по всему множеству. Таким образом, внешняя дифференциальная форма есть плотность множества геодезических, так как она инвариантна относительно выбора системы криволинейных координат на поверхности и относительно выбора параметра, определяющего положение точки на геодезической. В геодезических полярных координатах плотность имеет вид

$$dG = (\partial (\sqrt{g(\rho, \theta)})/\partial\rho) [d\theta\, d\rho],$$

в частности для сферы $dG = \cos\rho[d\theta d\rho]$, а для псевдосферы $dG = \mathrm{ch}\rho[d\theta d\rho]$. Для множества геодезических, пересекающих гладкую или кусочно гладкую кривую, плотность равна $dG = |\sin\varphi|[d\varphi ds]$, где φ — угол пересечения, s — длина кривой. Плотность кинематич. меры (кинематич. плотность) равна $dK = [dPdV]$. где dP — элемент площади поверхности, V — угол между геодезической и полярным радиусом. Многие результаты И. г. на E^2 обобщаются на случай однородной поверхности. Плотность меры множества представляет собой кинематич. плотность, что позволяет получить обобщение формулы Пуанкаре для E^2. Меры множества пар геодезических и пар точек строятся так же, как для E^2.

На основе так наз. полиметрической геометрии П. К. Рашевского (см. [4]) результаты И. г. на произвольной однородной поверхности обобщаются на более широкий класс поверхностей. Обобщение производится путем использования биметрич. системы Рашевского. Сначала двумя способами вводится мера в двупараметрич. множестве кривых плоскости. Затем все выводы, справедливые в случае плоскости (рассматриваемой как множество линейных элементов), обобщаются на случай линий постоянной геодезич. кривизны произвольной поверхности.

И. г. на проективной плоскости P^2. Для полной группы проективных преобразований на P^2:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + 1}\,; \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + 1}\,, \tag{4}$$

интегральный инвариант существует лишь для совокупности трех точек и равен кубу обратной величины площади треугольника, вершинами к-рого являются эти точки. Для пар точек и группы аффинных унимодулярных преобразований

$$x' = a_1x + b_1y + c_1,\ \ y' = a_2x + b_2y + c_2,\ \ a_1b_2 - a_2b_1 = 1 \tag{5}$$

интегральный инвариант равен единице, а для группы аффинных преобразований интегральный инвариант множества пар точек равен $(x_1y_2 - x_2y_1)^{-2}$, где x_1, y_1 и x_2, y_2 суть координаты точек.

Множество прямых проективной плоскости неизмеримо, но для пар точка — прямая и полной группы проективных преобразований (4) интегральный инвариант равен $(x_0\alpha + y_0\beta + 1)^{-3}$, где x_0, y_0 суть координаты точки, а прямая задается уравнением $\alpha x + \beta y + 1 = 0$. Множество параллелограммов, заданных уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_i x + \beta_i y + 1 = 0 \\ &\gamma_i(\alpha_i x + \beta_i y) + 1 = 0 \end{aligned}\right\},\quad i = 1,\ 2,$$

причем $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, имеет плотность меры

$$[(\gamma_1 - 1)^2(\gamma_2 - 1)^2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2]^{-1}$$

для группы аффинных преобразований

$$x' = a_1x + b_1y + c_1,\quad y' = a_2x + b_2y + c_2,\quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0. \tag{6}$$

Для множества окружностей на P^2, заданных уравнением

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

максимальной группой преобразований является группа преобразований подобия

$$x = ax' + by' + c,\quad y = bx' + ay' + d.$$

Плотность меры для нее равна $(\gamma-\alpha^2-\beta^2)^{-2}$. На ее основе вычисляется мера множеств окружностей (центры к-рых находятся в нек-рой области), пересекающихся с заданной кривой. Мера множества окружностей на P^2 равна кинематич. мере совокупности групп трансляции и гомотетии.

Множество конич. сечений (инвариант $\Delta\neq 0$) имеет в качестве максимальной группы инвариантности проективную группу:

$$x=\frac{\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y'+\alpha_{13}}{\alpha_{31}x'+\alpha_{32}y'+1},$$

$$y=\frac{\alpha_{21}x'+\alpha_{22}y'+\alpha_{23}}{\alpha_{31}x'+\alpha_{32}y'+1},$$

причем $\det|\alpha_{ij}|\neq 0$, $i, j=1, 2, 3$. Плотность меры для него равна Δ^{-2}. Для множества гипербол максимальная группа инвариантности есть аффинная группа (6). Плотность меры их множества равна $a^{-1}\Delta^{-2}\sqrt{b^2-ac}$, где a, b, c суть коэффициенты общего уравнения гиперболы. Аналогично измерима максимальная группа инвариантности эллипсов, а для парабол она неизмерима. Для парабол измеримы лишь ее подгруппы: группы унимодулярных аффинных и центроаффинных преобразований. Элементарная кинематич. мера группы проективных преобразований (4) равна Δ^{-3}, где Δ — определитель преобразования.

Множество прямых центроаффинной плоскости измеримо. Плотность меры их множества равна p^{-3}, где p — свободный член нормального уравнения прямой. Кинематич. мера группы преобразований (5) не центроаффинной плоскости равна a_1^{-1}. Если $\Delta=\Delta(\varphi)$ есть ширина овала, то Δ^{-2} есть его плотность меры для аффинного унимодулярного преобразования.

И. г. в проективном пространстве P^3. Группа движений в проективном пространстве P^3 с прямоугольной декартовой системой координат является измеримой лишь для совокупности четырех точек, и плотность меры равна при этом Δ^{-4}, где Δ есть объем тетраэдра, вершинами к-рого являются эти точки. Для совокупностей двух и трех точек измерима лишь группа аффинных унимодулярных преобразований. Плотность ее меры равна единице. Для трех точек также измерима группа центроаффинных преобразований (при условии, что точки не лежат на одной прямой). Множество прямых в P^3 имеет в качестве максимальной группы инвариантности полную группу движений, но она для них неизмерима (измерима лишь нек-рая ее подгруппа). Измерима полная группа преобразований для пар прямых. Множество плоскостей относительно полной группы преобразований в P^3 не допускает меры; для множества плоскостей измерима лишь ее подгруппа ортогональных преобразований. Пары плоскостей допускают меру для группы центроаффинных унимодулярных преобразований. Параллелепипеды допускают меру частной группы аффинных преобразований, множество пар плоскость — точка допускает меру полной группы преобразований в P^3. Множество сфер в P^3 допускает меру группы преобразований подобия, причем плотность меры равна R^{-4}, где R — радиус сферы. Множество поверхностей 2-го порядка допускает меру полной группы преобразований в P^3, причем плотность меры равна Δ^{-5}, где Δ есть инвариант поверхности. Множество окружностей в P^3 допускает меру группы преобразований подобия, причем плотность меры равна R^{-4}, где R — радиус окружности. Кинематич. мера в P^3 полной группы преобразований равна Δ^{-4}, где Δ есть ее определитель. Плотность меры множества точек в центроаффинном унимодулярном пространстве трех измерений равна единице. Измеримо и множество плоскостей в этом пространстве с плотностью p^{-4}, где p есть параметр нормального уравнения плоскости.

И. г. на поверхности постоянной кривизны V^2. Семейству кривых в V^2 с постоянной положительной кривизной соответствует максимальная группа инвариантности $G_3^+(x)$. Семейства специального вида (трех-, двух- и однопараметрические) допускают плотности меры максимальной группы инвариантности (инфинитезимальных преобразований группы $G_3^+(x)$), а в случае одного параметра — группы $G_1(x)$.

То же справедливо для V^2 с отрицательной постоянной кривизной. Трехпараметрич. кривые специального вида допускают плотность меры максимальной группы инвариантности преобразований $G_3^-(x)$, равную единице. Меры существуют у группы и в случае специальных видов двух- и однопараметрич. семейств. В обоих случаях условие допущения семейством кривых $F_q(x)$ меры максимальной группы инвариантности $G_2(x)$ состоит в пространственной транзитивности (измеримости) присоединенной группы $H_2(\alpha)$.

Обобщение И. г. Вышеприведенное изложение относится к традиционному пониманию содержания И. г. как теории инвариантной меры множества геометрич. объектов в различных пространствах, в основном в однородных. При понимании И. г. как теории преобразования функций, заданных на множестве одних геометрич. объектов в нек-ром пространстве, в функции, заданные на множестве иных геометрич. объектов того же пространства, в качестве основной ставится задача, обратная интегрированию нек-рой функции точек пространства по нек-рому геометрич. объекту этого же пространства. Напр., если вводится интегральное преобразование функции $f(x)$ в n-мерном аффинном пространстве (преобразование Радона) как интегрирование ее по гиперплоскости, то в качестве обратной ставится задача восстановления $f(x)$ по ее интегралам по гиперплоскостям, т. е. задача нахождения обратного преобразования Радона. Аналогично ставятся и решаются задачи о восстановлении функции на линейчатых поверхностях 2-го порядка в 4-мерном комплексном пространстве, когда известны ее интегралы по прямым, составляющим эту поверхность, а также о восстановлении функции по ее интегралам, взятым по орисферам в действительном и мнимом пространствах Лобачевского.

Лит.: [1] Бляшке В., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 97—149; [2] Сантало Л. А., Введение в интегральную геометрию, пер. с англ., М., 1956; [3] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я., Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., 1962; [4] Рашевский П. К., Полиметрическая геометрия, в кн.: Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, в. 5, М.— Л., 1941, с. 21—147; [5] Stoka M. I., Geometrie integrală, Buc., 1967; [6] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970, с. 157—91. *С. Ф. Шушурин.*

ИНТЕГРАЛЬНАЯ КРИВАЯ — график решения $y=y(x)$ нормальной системы

$$y'=f(x, y), \quad y\in\mathbb{R}^n,$$

обыкновенных дифференциальных уравнений. Напр., И. к. уравнения

$$y'=-\frac{x}{y}$$

суть окружности $x^2+y^2=c^2$, где c — произвольная постоянная. Часто И. к. отождествляют с решением. Геометрич. смысл И. к. скалярного уравнения

$$y'=f(x, y) \qquad (*)$$

состоит в следующем. Уравнение (*) определяет на плоскости поле направлений, т. е. поле отрезков, тангенс угла наклона к-рых к оси Ox в каждой точке (x, y) равен $f(x, y)$. Тогда И. к. уравнения (*) суть кривые, к-рые в каждой точке имеют касательную, совпадающую с отрезком поля направлений в этой точке. И. к. уравнения (*) заполняют всю область, в к-рой функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование и единственность решения задачи Коши, нигде не пересекаясь и не касаясь друг друга.

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970.

Н. Н. Ладис.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность в $(n+1)$-мерном пространстве, заданная уравнением $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, где функция $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ является решением дифференциального уравнения с частными производными. Напр., рассмотрим линейное однородное уравнение 1-го порядка

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0; \qquad (*)$$

здесь u — искомая, а $X_1, \ldots, X_n$ — заданные функции от аргументов $x_1, \ldots, x_n$. Пусть в нек-рой области G n-мерного пространства функции $X_1, \ldots, X_n$ непрерывно дифференцируемы и не обращаются одновременно в нуль, а функции $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$ являются функционально независимыми первыми интегралами в области G системы обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрич. форме

$$\frac{dx_1}{x_1} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n}.$$

Тогда уравнение всякой И. п. уравнения (*) в области G можно представить в виде

$$u = \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}),$$

где Φ — непрерывно дифференцируемая функция. Для *Пфаффа уравнения*

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0,$$

вполне интегрируемого в нек-рой области G трехмерного пространства и не имеющего в G особых точек, через каждую точку области G проходит И. п. Эти И. п. нигде не пересекаются и не касаются друг друга.

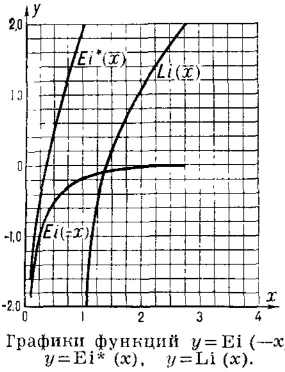
Лит.: [1] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959.

Н. Н. Ладис.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — специальная функция, определяемая для действительного $x \neq 0$ равенством

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

График И. п. ф. см. на рис.



Графики функций $y = \mathrm{Ei}(-x)$, $y = \mathrm{Ei}^*(x)$, $y = \mathrm{Li}(x)$.

При $x > 0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x = 0$ и И. п. ф. понимается в смысле главного значения этого интеграла:

$$\mathrm{Ei}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{e^t}{t}\, dt + \int_{\varepsilon}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt \right\}.$$

И. п. ф. представляется в виде рядов

$$\mathrm{Ei}(x) = C + \ln(-x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!\,k}, \quad x < 0, \qquad (1)$$

$$\mathrm{Ei}(x) = C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!\,k}, \quad x > 0, \qquad (2)$$

где $C = 0{,}5772\ldots$ — *Эйлера постоянная.*

Имеет место асимптотическое представление:

$$\mathrm{Ei}\,(-x)\approx\frac{e^{-x}}{x}\left(1-\frac{1!}{x}+\frac{2!}{x^2}-\frac{3!}{x^3}+\ldots\right),\quad x\to+\infty.$$

Как функция комплексного переменного z, И. п. ф.

$$\mathrm{Ei}\,(z)=C+\ln(-z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,k},\quad |\arg(-z)|<\pi,$$

есть однозначная аналитич. функция в плоскости z с разрезом вдоль положительной действительной полуоси ($0<\arg z<2\pi$); значение $\ln(-z)$ выбирается при этом так, чтобы $-\pi<\mathrm{Im}\ln(-z)<\pi$. Поведение $\mathrm{Ei}\,(z)$ вблизи разреза описывается предельными соотношениями:

$$\lim_{\eta\to 0}\mathrm{Ei}\,(z+i\eta)=\mathrm{Ei}\,(z)-i\pi,$$

$$\lim_{\eta\to 0}\mathrm{Ei}\,(z-i\eta)=\mathrm{Ei}\,(z)+i\pi,\qquad z=x+iy,\quad x>0,\quad \eta>0.$$

Асимптотич. представление в области $0<\arg z<2\pi$

$$\mathrm{Ei}\,(z)\sim\frac{e^z}{z}\left(\frac{1!}{z}+\frac{2!}{z^2}+\ldots+\frac{k!}{z^k}+\ldots\right),\quad |z|\to\infty.$$

И. п. ф. связана с *интегральным логарифмом* $\mathrm{li}\,(x)$ соотношениями:

$$\mathrm{Ei}\,(x)=\mathrm{li}\,(e^x),\quad x<0,$$
$$\mathrm{Ei}\,(\ln x)=\mathrm{li}\,(x),\quad x<1,$$

с *интегральным синусом* $\mathrm{Si}\,(x)$ и *интегральным косинусом* $\mathrm{Ci}\,(x)$ соотношениями:

$$\mathrm{Ei}\,(\pm ix)=\mathrm{Ci}\,(x)\pm i\,\mathrm{Si}\,(x)\mp\frac{\pi i}{2},\quad x>0.$$

Формула дифференцирования:

$$\frac{d^n\,\mathrm{Ei}\,(-x)}{dx^n}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}e^{-x}e_{n-1}(x).\quad n=1,2,\ldots$$

Иногда используются обозначения

$$\mathrm{Ei}^+(z)=\mathrm{Ei}\,(z+i0),\quad \mathrm{Ei}^-(z)=\mathrm{Ei}\,(z-i0),$$
$$\mathrm{Ei}^*(z)=\overline{\mathrm{Ei}\,(z)}=\mathrm{Ei}\,(z)+\pi i.$$

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968; [3] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [4] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М., 1963.

А. Б. Иванов.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ СУММА — см. *Интеграл*, *Интегральное исчисление*.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — раздел математики, в к-ром изучаются понятия *интеграла*, его свойства и методы вычислений. И. и. непрерывно связано с *дифференциальным исчислением* и составляет вместе с ним основу математич. анализа. Истоки И. и. относятся к античному периоду развития математики и связаны с *исчерпывания методом*, разработанным математиками Древней Греции. Этот метод возник при решении задач на вычисление площадей плоских фигур и поверхностей, объемов тел, нек-рых задач статики и гидродинамики. Он основан на аппроксимации рассматриваемых объектов ступенчатыми фигурами или телами, составленными из простейших фигур или пространственных тел (прямоугольников, параллелепипедов, цилиндров и т. п.). В этом смысле метод исчерпывания можно рассматривать как античный интегральный метод. Наибольшее развитие метод исчерпывания в древнюю эпоху получил в работах Евдокса (4 в. до н. э.) и особенно Архимеда (3 в. до н. э.). Дальнейшее его применение и совершенствование связано с именами многих ученых 15—17 вв.

Основные понятия и теория интегрального и дифференциального исчислений, прежде всего связь операций дифференцирования и интегрирования, а также их применения к решению прикладных задач, были разработаны в трудах И. Ньютона (I. Newton) и Г. Лейбница (G. Leibniz) в конце 17 в. Их исследования явились началом интенсивного развития математич. анализа. Существенную роль в его создании в 18 в. сыграли работы Л. Эйлера (L. Euler), Я. и И. Бернулли (Jacob, Johann Bernoulli), Ж. Лагранжа (J. Lagrange). В 19 в. в связи с появлением понятия предела И. и. приобрело логически завершенную форму [работы О. Коши (A. Cauchy), Б. Римана (B. Riemann) и др.]. Разработка теории и методов И. и. происходила в конце 19 в. и в 20 в. одновременно с исследованиями по теории *меры*, играющей существенную роль в И. и.

С помощью И. и. стало возможным решать единым методом многие теоретич. и прикладные задачи, как новые, к-рые ранее не поддавались решению, так и старые, требовавшие прежде специальных искусственных приемов. Основными понятиями И. и. являются два тесно связанных понятия интеграла: неопределенного и определенного.

Неопределенный интеграл от данной действительной функции на нек-ром промежутке определяется как совокупность всех ее первообразных на этом промежутке, т. е. функций, производные к-рых совпадают с заданной функцией. Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ обозначается через $\int f(x)dx$. Если $F(x)$ — какая-либо первообразная функция $f(x)$, то любая другая ее первообразная имеет вид $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, поэтому пишут

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Операция нахождения неопределенного интеграла наз. интегрированием. Интегрирование является операцией, обратной к операции дифференцирования:

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C, \quad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Операция интегрирования линейна: если на нек-ром промежутке существуют неопределенные интегралы

$$\int f_1(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int f_2(x)\,dx,$$

то для любых действительных чисел λ_1 и λ_2 на том же промежутке существует интеграл

$$\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\,dx = \lambda_1 \int f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int f_2(x)\,dx.$$

Для неопределенных интегралов справедлива формула *интегрирования по частям*: если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на нек-ром промежутке и интеграл $\int vdu$ существует, то существует и интеграл $\int udv$, причем имеет место равенство

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Справедлива формула замены переменного: если для функций $f(x)$ и $x=\varphi(t)$, определенных на нек-рых промежутках, имеет смысл сложная функция $f[\varphi(t)]$, функция $\varphi(t)$ дифференцируема и существует интеграл $\int f(x)dx$, то существует и интеграл

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx \Big|_{x=\varphi(t)}$$

(см. *Интегрирование подстановкой*).

Всякая непрерывная на нек-ром промежутке функция имеет на нем первообразную и, следовательно, для нее существует неопределенный интеграл. Задача фактического нахождения неопределенного интеграла от конкретно заданной функции осложняется тем, что неопределенный интеграл от элементарной функции не является, вообще говоря, элементарной функцией. Известны многие классы функций, для к-рых оказывается возможным выразить их неопределенные интегралы через элементарные функции. Простейшими примерами этого являются интегралы, к-рые получаются из таблицы производных основных элементарных функций (см. *Дифференциальное исчисление*):

1) $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha \neq -1;$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C;$

3) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C, \quad a>1, \quad a\neq 1,$ в частности $\int e^x\,dx = e^x+C;$

4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

5) $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

8) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$

9) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$

10) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

11) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$

12) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C = -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}+C,$

13) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C = -\arccos\frac{x}{a}+C,$ $|x|<|a|;$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$ (когда под корнем стоит x^2-a^2, предполагается, что $|x|>|a|$).

Если знаменатель подинтегральной функции обращается в нуль в нек-рой точке, то написанные формулы справедливы лишь для тех промежутков, в к-рых не происходит обращения в нуль указанного знаменателя (см. формулы 1, 2, 6, 7, 11, 13, 15).

Неопределенный интеграл от рациональной функции на всяком промежутке, на к-ром знаменатель не обращается в нуль, является суперпозицией рациональных функций, арктангенсов и натуральных логарифмов. Нахождение алгебраич. части неопределенного интеграла от рациональной функции может быть осуществлено *Остроградского методом*. К интегрированию рациональных функций с помощью подстановок сводятся, напр., интегралы вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_m}\right] dx,$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_m$ — рациональные числа, интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

(см. *Эйлера подстановки*), нек-рые случаи интегралов от *дифференциальных биномов*, интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx, \quad \int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$$

(здесь везде $R(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — рациональные функции), интегралы

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx, \quad \int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx,$$

$$\int x^n \cos \alpha x\, dx, \quad \int x^n \sin \alpha x\, dx,$$

$$\int x^n \arcsin x\, dx, \quad \int x^n \arccos x\, dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg} x\, dx, \quad \int x^n \operatorname{arcctg} x\, dx, \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

и мн. др. Вместе с тем, напр., интегралы

$$\int \frac{e^x}{x^n} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x^n} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n} dx, \quad n=1, 2, \ldots$$

не выражаются через элементарные функции.

Определенным интегралом

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

от функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, наз. предел интегральных сумм определенного вида (см. *Коши интеграл*, *Римана интеграл*, *Лебега интеграл*, *Колмогорова интеграл*, *Стилтьеса интеграл* и т. д.). Если этот предел существует, функцию $f(x)$ наз. интегрируемой соответственно по Коши, по Риману, по Лебегу и т. д.

Геометрич. смысл интеграла связан с понятием площади: если функция $f(x) \geqslant 0$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то значение интеграла

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

равно площади криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$, т. е. множеством, граница к-рого состоит из графика функции $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, отрезка $[a, b]$ и двух отрезков прямых $x=a$ и $x=b$, к-рые могут вырождаться в точки. К задаче вычисления предела интегральных сумм, т. е. нахождению определенного интеграла, сводится вычисление многих встречающихся на практике величин: площадей фигур и поверхностей, объемов тел, работы силы, координат центра тяжести, значений моментов инерции различных тел и т. п.

Определенный интеграл обладает свойством линейности: если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то для произвольных действительных чисел λ_1 и λ_2 функция

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$

также интегрируема на отрезке и

$$\int_a^b [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\, dx = \\ = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Интегрируемость функции на отрезке обладает свойством монотонности: если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $[c, d] \subset [a, b]$, то функция $f(x)$ интегрируема и на отрезке $[c, d]$. Справедливо свойство аддитивности интеграла относительно отрезков, по к-рым происходит интегрирование: если $a < c < b$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы, то их произведение также интегрируемо. Если $f(x) \geqslant g(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то ее абсолютная величина $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

По определению полагают

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \text{ и } \int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad a < b.$$

Для определенных интегралов справедливы теоремы о среднем. Напр., если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in [a, b]$ и функция $g(x)$ не меняет знака на отрезке $[a, b]$, т. е. либо неотрицательна, либо неположительна на этом отрезке, то существует такое число $m \leqslant \mu \leqslant M$, что

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

При дополнительном предположении непрерывности на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ на интервале (a, b) существует такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx.$$

В частности, если $g(x) \equiv 1$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b - a).$$

Интегралы с переменным верхним пределом. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

непрерывна на этом отрезке. Если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то функция $F(x)$ дифференцируема в этой точке и $F'(x_0) = f(x_0)$. Иначе говоря, в точках непрерывности функции справедлива формула

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Следовательно, для всякой интегрируемой по Риману на отрезке [a, b] функции эта формула справедлива во всех точках, кроме, быть может, множества точек, имеющих меру Лебега, равную нулю, ибо если функция интегрируема по Риману на некотором отрезке, то множество ее точек разрыва имеет меру нуль. Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

является ее первообразной на этом отрезке. Эта теорема показывает, что операция дифференцирования является обратной к взятию определенного интеграла с переменным верхним пределом, тем самым устанавливая связь между определенным и неопределенным интегралами:

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Геометрич. смысл этой связи состоит в том, что задача о нахождении касательной к кривой и вычисление площадей плоских фигур являются в указанном смысле взаимно обратными.

Для любой первообразной $F(x)$ непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет место формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Она показывает, что определенный интеграл по некоторому отрезку от непрерывной функции равен разности значений на концах этого отрезка любой из ее первообразных. Эту формулу иногда принимают за определение определенного интеграла. В этом случае доказывается, что введенный таким образом интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ является пределом соответствующих сумм.

Для определенных интегралов справедливо правило замены переменного и формула интегрирования по частям. Пусть, напр., функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на интервале (α, β), причем интервал (α, β) отображается с помощью функции $\varphi(t)$ в интервал (a, b): $a<\varphi(t)<b$ при $\alpha<t<\beta$ и, следовательно, на (α, β) имеет смысл суперпозиция $f[\varphi(t)]$. Тогда, если $\alpha_0 \in (\alpha, \beta)$, $\beta_0 \in (\alpha, \beta)$, то имеет место формула замены переменного

$$\int_{\varphi(\alpha_0)}^{\varphi(\beta_0)} f(x)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)\,du(x),$$

где функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на отрезке $[a, b]$ интегрируемые производные.

Формула Ньютона — Лейбница сводит вычисление определенного интеграла к отысканию значений его первообразной. Поскольку задача отыскания первообразной является сама по себе сложной, то большое значение имеют другие методы нахождения определенных интегралов, среди к-рых прежде всего следует отметить метод *вычетов* и метод дифференцирования и интегрирования по параметру *зависящих от параметров интегралов*. Разрабатываются также численные методы приближенного вычисления интегралов.

Обобщение понятия интеграла на случай неограниченных функций и случай неограниченного промежутка приводит к понятию *несобственного интеграла*, к-рый определяется при помощи еще одного дополнительного предельного перехода.

Понятия неопределенного и определенного интегралов переносятся на комплекснозначные функции. Представление любой регулярной функции комплексного переменного в виде *Коши интеграла* по контуру сыграло важную роль в развитии теории аналитич. функций.

Обобщение понятия определенного интеграла от функции одного переменного на случай функций многих переменных приводит к понятию *кратного интеграла*.

Для неограниченных множеств и неограниченных функций многих переменных, также как и в одномерном случае, вводится понятие несобственного интеграла.

Расширение практич. использования И. и. обусловило введение понятий *криволинейного интеграла* — интеграла по кривой, *поверхностного интеграла* — интеграла по поверхности и вообще — интеграла по многообразиям, сводимых в нек-ром смысле к определенному интегралу (криволинейный интеграл — к интегралу по отрезку, поверхностный — к интегралу по области (плоской), интеграл по n-мерному многообразию — к интегралу по n-мерной области). Интегралы по многообразиям, в частности криволинейные и поверхностные, играют важную роль в И. и. функций многих переменных; с их помощью можно установить связь между интегрированием по области и ее границе или, в общем случае, по многообразию и его краю. Эта связь устанавливается *Стокса формулой* (см. также *Остроградского формула*, *Грина формулы*), являющейся обобщением на многомерный случай формулы Ньютона — Лейбница.

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы находят непосредственное применение в математич. физике, в частности в теории поля. Кратные интегралы и связанные с ними понятия широко используются при решении конкретных прикладных задач. Для численного вычисления кратных интегралов разработана теория *кубатурных формул*.

Теория и методы И. и. числовых функций конечного числа переменных переносятся и на более общие объекты. Напр., теория интегрирования функций, значения к-рых принадлежат линейным нормированным пространствам, функций, заданных на топологич. группах, обобщенных функций и функций бесконечного числа переменных (континуальный интеграл). Наконец, новое направление И. и. связано также с появлением и развитием конструктивной математики.

И. и. применяется во многих разделах математики (в теории дифференциальных и интегральных уравнений, в теории вероятностей и математич. статистике, в теории оптимальных процессов и др.), и в ее приложениях.

Лит.: см. [1] — [24] при статье *Дифференциальное исчисление*, а также дополнение к разделу «Работы основоположников и классиков...»: [25] Архимед, Сочинения, М., 1962; [26] Кеплер И., Новая стереометрия винных бочек, [пер. с латин.], М.— Л., 1934; [27] Кавальери Б., Геометрия..., [пер. с латин.], М.— Л., 1940; [28] Эйлер Л., Интегральное исчисление, пер. с латин., т. 1—3, М., 1956—58.

Л. Д. Кудрявцев.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — множество S_t точек фазового пространства (t, x-пространства) системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \qquad (*)$$

заполненное *интегральными кривыми* этой системы, определенными для всех $t \in \mathbb{R}$, и являющееся многообразием в t, x-пространстве. Размерность сечения S_t плоскостью $t = \text{const}$ наз. обычно размерностью И. м. S_t. При определении И. м. требование быть многообразием заменяют иногда требованием аналитической представимости множества S_t уравнением

$$x = f(t, C)$$

с функцией f, определенной для всех t из $\mathbb{R}$ и $C = (C_1, \ldots, C_m)$ из нек-рой области D и обладающей определенной гладкостью по t, C при t, $C \in \mathbb{R} \times D$. И. м. наз. тогда m-мерным и той гладкости, какова гладкость функции f.

Примеры: интегральная кривая периодич. решения системы (*), т. е. периодическая интегральная кривая; семейство интегральных кривых системы (*), образованное семейством квазипериодич. решений системы (*), заполняющих при $t=0$ m-мерный тор x-пространства — m-мерное тороидальное интегральное многообразие, и т. д.

Наиболее изученными И. м. являются тороидальные многообразия, т. е. множества S_t, являющиеся торами при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}$. Эти многообразия широко встречаются в системах вида (*), описывающих колебательные процессы.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, Львов, 1945; [2] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., в кн.: Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т. 1, К., 1963, с. 93—154; [3] их же, в кн.: Тр. 4 Всесоюзного

математического съезда, т. 2, Л., 1964, с. 432—37; [4] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике, К., 1969; [5] Митропольский Ю. А., Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, М., 1964; [6] Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б., Интегральные многообразия в нелинейной механике, М., 1973.

А. М. Самойленко.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ — представление аналитич. функции в виде интеграла, зависящего от параметра. И. п. а. ф. возникли на ранних стадиях развития теории функций и математич. анализа вообще как удобный аппарат для обозримого представления аналитич. решений дифференциальных уравнений, для исследования асимптотики этих решений и их аналитич. продолжения. Несколько позже И. п. а. ф. нашли применения для решения *граничных задач теории аналитических функций* и *сингулярных интегральных уравнений*, исследования внутренних и *граничных свойств аналитических функций* различных классов, а также для решения других, самых разнообразных вопросов математич. анализа. В процессе развития теории функций изучение свойств отдельных, наиболее важных, типов И. п. а. ф. обособлялось в виде самостоятельных глав теории функций (см., напр., *Коши интеграл*, *Пуассона интеграл*, *Шварца интеграл*).

Обширный класс И. п. а. ф., используемых для получения и исследования аналитич. решений дифференциальных уравнений, описывается общей формулой:

$$f(z)=\int_L K(z,\ \zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta, \qquad (1)$$

где $K(z, \zeta)$ — ядро интегрального представления, $v(\zeta)$ — плотность и L — контур (или система контуров) в совмещенной плоскости комплексных переменных z, ζ. Целесообразное и, по возможности, наиболее простое решение трех взаимосвязанных вопросов о выборе ядра K, плотности v и контура L для представления данной функции $f(z)$ (или данного класса функций) является определяющим с точки зрения успешного применения метода И. п. а. ф. При этом свойства представления (1), в первую очередь, существенно зависят от того, является ли ядро $K(z, \zeta)$ целой функцией комплексных переменных z, ζ, или же ядро $K(z, \zeta)$ сингулярное, т. е. имеет те или иные особенности. Вообще говоря, ядро И. п. а. ф. не обязательно является аналитич. функцией переменных z, ζ — аналитичность функции $f(z)$ может обеспечиваться за счет специфич. свойств плотности. Формула (1) как формула простого однократного интегрирования также, вообще говоря, не обязательна — имеются типы И. п. а. ф., в к-рых используются повторные интегралы.

Общая схема получения интегральных представлений специальных функций $f(z)$, являющихся решениями нек-рого обыкновенного дифференциального уравнения $\mathfrak{L}_z[f](z)=0$, сводится в основном к следующему. За счет целесообразного выбора, чаще всего несингулярного, ядра K должна оказаться осуществимой следующая переброска действия оператора $\mathfrak{L}_z$:

$$\mathfrak{L}_z[f](z)=\int_L \mathfrak{L}_z[K](z,\ \zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta=$$
$$=\int_L \mathfrak{M}_\zeta[K](z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta=$$
$$=\int_L K(z,\ \zeta)\, \tilde{\mathfrak{L}}_\zeta[v](\zeta)\, d\zeta+P[v,\ K], \qquad (2)$$

т. е. ядро должно, в первую очередь, удовлетворять по возможности простому уравнению с частными производными $\mathfrak{L}_z[K]=\mathfrak{M}_\zeta[K]$, допускающему последующее интегрирование по частям с целью восстановления первоначального вида ядра под интегралом и переброску действия получающегося при этом сопряженного оператора $\tilde{\mathfrak{L}}_\zeta$ на плотность v. Получив формулу вида

(2), подбирают достаточно простую плотность v, удовлетворяющую сопряженному уравнению $\tilde{\mathfrak{L}}_\zeta[v](\zeta)=0$, и контур L, обеспечивающий обращение в нуль обинтегрированного члена $P[v, K]$. При этом необходимо иметь в виду, что выбор контура L определяет частное решение исходного уравнения $\mathfrak{L}_z[f](z)=0$. Наибольшее применение находят ядра:

$$K(z, \zeta)=e^{z\zeta} \text{ или } K(z, \zeta)=e^{iz\zeta},$$
$$K(z, \zeta)=z^{\zeta} \text{ и } K(z, \zeta)=(z-\zeta)^{\alpha},$$

иногда называемые соответственно ядром Лапласа—Фурье, ядром Меллина и ядром Эйлера. Различные замены переменных приводят к видоизмененным формам ядер. В описанном виде получение И. п. а. ф. самым тесным образом связано с методом *интегральных преобразований.*

Таким путем, напр., получается известное интегральное представление функций Бесселя:

$$J_p(z)=\frac{\Gamma(1/2-p)}{2i\pi^{3/2}}\left(\frac{z}{2}\right)^p\int_L e^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{p-1/2}\,d\zeta, \qquad (3)$$

где контур L имеет вид восьмерки, охватывающей точки -1 и $+1$. Представление (3) характерно, с одной стороны, тем, что его плотность $v(\zeta)=(\zeta^2-1)^{p-1/2}$ гораздо проще, чем представляемые трансцендентные функции $J_p(z)$, а с другой стороны — тем, что оно позволяет довольно просто обозреть свойства функций $J_p(z)$ и, в частности, изучить их асимптотику.

Целесообразное изменение контура L позволяет осуществить аналитич. продолжение, т. е., иными словами, позволяет получить И. п. а. ф., пригодное во всей ее области существования. Напр., интеграл Эйлера второго рода:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt, \quad \operatorname{Re} z>0,$$

представляет гамма-функцию $\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z>0$, а если выбрать контур интегрирования L_1 в виде петли (рис. 1), то получается интегральное представление

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{2i\pi z}-1}\int_{L_1}\zeta^{z-1}e^{-\zeta}\,d\zeta,$$

пригодное для всех z, кроме точек $z=-1, -2, \ldots$, в к-рых $\Gamma(z)$ имеет простые полюсы. Аналогично, анали-

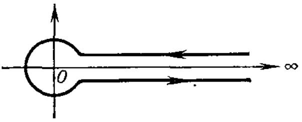


Рис. 1.

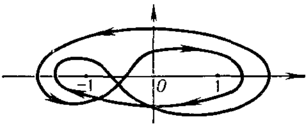


Рис. 2.

тич. продолжение интеграла Эйлера первого рода:

$$B(z, w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt, \qquad \operatorname{Re} z>0, \quad \operatorname{Re} w>0,$$

выражающего бета-функцию $B(z, w)$ при $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Re} w>0$, осуществляется путем перехода к контуру интегрирования в виде двойной петли L_2 (рис. 2).

Изучались интегральные представления специальных функций (см. [1], [2]); интегральные представления весьма обширных классов функций в связи с интегральными преобразованиями [7].

Универсальный характер в теории аналитич. функций имеют сингулярное ядро Коши

$$K(z, \zeta)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{(\zeta-z)}$$

и соответствующее И. п. а. ф.— *Коши интеграл*:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (4)$$

Это И. п. а. ф. выражает значения однозначной аналитич. функции $f(z)$ в области D, ограниченной простым замкнутым контуром L (или системой таких контуров), напр., в случае, когда функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}=D \cup L$; в дополнительной области $C\bar{D}$, $\infty \in C\bar{D}$, интеграл из правой части (4) тождественно обращается в нуль. Фундаментальная роль представления (4) в теории аналитич. функций обусловливается тем, что интеграл Коши есть свертка $f(z)$ с фундаментальным решением $1/2\pi iz$ оператора Коши — Римана

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

поэтому из представления (4) получаются все основные свойства аналитич. функций. С точки зрения общих свойств И. п. а. ф. интеграл Коши выделяется особенно простой структурой ядра и тем, что плотность $v(\zeta)=f(\zeta)$ совпадает со значениями представляемой функции на контуре L. Это последнее свойство остается в силе, если под интегралом (4) заменить ядро Коши $^1/_2\pi i(\zeta-z)$ на любую однозначную аналитическую по z в замкнутой области $\bar{D}$ функцию $K(z, \zeta)$, имеющую в точке $z=\zeta$ простой полюс с вычетом 1. Среди таких функций $K(z, \zeta)$ ядро Коши наиболее простое, но указанная свобода выбора ядра в интеграле Коши часто используется при решении граничных задач.

Совпадение плотности $v(\zeta)$ с граничными значениями $f(\zeta)$ аналитич. функции $f(z)$ в сущности есть лишь форма выражения свойства аналитичности. При использовании интегрального представления (4) с априори произвольно заданной плотностью $v(\zeta)$ получается интеграл типа Коши, в к-ром связь плотности с граничными значениями выражается гораздо сложнее через сингулярный интеграл по контуру L.

В граничных задачах теории аналитич. функций для решения сингулярных интегральных уравнений роль интегралов типа Коши и их модификаций исключительно важна (см. [5], [6]).

При исследовании внутренних и граничных свойств аналитич. функций различных классов применяются более общие И. п. а. ф., чем (1), в виде зависящих от параметра интегралов

$$f(z)=\int_L K(z, \zeta)\, d\mu(\zeta) \tag{5}$$

по борелевской граничной мере μ, вообще говоря комплексной, сосредоточенной на ограничивающем область D контуре L и выражающейся при помощи той или иной процедуры через представляемую функцию $f(z)$.

Напр., все функции $f(z)$, регулярные в единичном круге $D=\{z;|z|<1\}$ и имеющие положительную действительную часть, $\operatorname{Re} f(z)>0$, характеризуются представимостью по формуле Герглотца:

$$f(z)=\int \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta)+ic, \quad \operatorname{Im} c=0,$$

идея к-рой по существу восходит к *Шварца интегралу*. Здесь μ — произвольная положительная мера, сосредоточенная на окружности $L=\{\zeta;\ |\zeta|=1\}$. В теории однолистных функций находят существенные применения и другие весьма разнообразные И. п. а. ф. вида (5), известные также под названиями *параметрических представлений*, или структурных формул. Так, для класса типично вещественных функций $f(z)=z+c_2z^2+\ldots$ в круге $D=\{z;\ |z|<1\}$ (т. е. таких, что $\operatorname{Im} f(x)=0$ при $-1<x<1$ и $\operatorname{Im} f(z)\times\times\operatorname{Im} z>0$ при $\operatorname{Im} z\neq 0$) характерно представление

$$f(z)=\int \frac{z\, d\mu(\zeta)}{(z-\zeta)(z-\bar{\zeta})},$$

где μ — произвольная положительная мера, сосредоточенная на окружности $L=\{\zeta;\ |\zeta|=1\}$ и нормированная условием $||\mu||=\int d\mu(\zeta)=1$. Часто применяются также модификации представления (5) в виде

$$f(z)=\varphi\left\{\int K(z,\ \zeta)\,d\mu(\zeta)\right\},$$

где $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — некоторая особо подбираемая, по возможности простая, функция, напр. $\varphi(z)=\exp z$.

Исходя из понимания меры μ как функционала, И. п. а. ф. (5) можно истолковать как значение $\langle\mu_\zeta,\ K(z,\ \zeta)\rangle$ функционала μ на ядре $K(z,\ \zeta)$. Следовательно, развитием метода И. п. а. ф. является аналитич. представление обобщенных функций V в виде значения V на ядре $K(z,\ \zeta)$:

$$\hat{V}(z)=\langle V_\zeta,\ K(z,\ \zeta)\rangle. \qquad (6)$$

При этом в дополнении носителя обобщенной функции V функция $\hat{V}(z)$ является аналитической [ядро $K(z,\zeta)$ предполагается аналитическим по z при $z\neq\zeta$]. Представления вида (6) находят важные применения в математич. физике (см. [10], [11]).

В теории аналитич. функций $f(z)$ нескольких комплексных переменных $z=(z_1,\ldots,\ z_n)$, $n\geqslant1$, И. п. а. ф. простейшего вида выражаются общей формулой:

$$f(z)=\int v(\zeta)\,\omega(z,\ \zeta), \qquad (7)$$

где $v(\zeta)$ — плотность, так или иначе связанная с $f(z)$, $\omega(z,\ \zeta)$ — дифференциальная форма по переменным $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\ \zeta_n)$, $\bar{\zeta}=(\bar{\zeta}_1,\ldots,\ \bar{\zeta}_n)$, коэффициенты к-рой зависят от параметров $z=(z_1,\ldots,\ z_n)$, $\bar{z}=(\bar{z}_1,\ldots,\ \bar{z}_n)$, причем интегрирование производится по всей границе ∂D области определения D функции $f(z)$ или по нек-рой ее части. Употребляются и представления в виде линейной комбинации интегралов типа (7). Напр., функция $f(z)$, голоморфная в поликруговой области $D=D_1\times\ldots\times D_n$ и непрерывная в замыкании $\bar{D}$, всюду в D представима в виде интеграла Коши:

$$f(z)=\int f(\zeta)\,\omega(z,\ \zeta),$$

где дифференциальная форма ω имеет особенно простой вид

$$\omega(z,\ \zeta)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\,\frac{d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_n-z_n)}=K(z,\ \zeta)\,d\zeta,$$

а интегрирование производится по остову $\Gamma=\partial D_1\times\ldots\times\partial D_n$ области D (см. *Бергмана—Вейля представление*, *Лере формула*, *Бохнера—Мартинелли представление*, а также [8], [9]).

Как и в случае одного комплексного переменного, дальнейшим развитием И. п. а. ф. (7) являются представления вида:

$$f(z)=\langle V_\zeta,\ K(z,\ \zeta)\rangle$$

или

$$f(z)=\langle V_\zeta,\ \omega(z,\ \zeta)\rangle,$$

выражающие аналитич. функцию $f(z)$ в нек-рой области в виде значения функционала V на ядре $K(z,\ \zeta)$ или на форме-ядре $\omega(z,\ \zeta)$. При этом V интерпретируется, соответственно, как обобщенная функция на определенном пространстве функций или как поток на определенном пространстве дифференциальных форм.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, 6 изд., М., 1956; [2] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [4] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966;

[5] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [6] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1976; [7] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966; [8] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [9] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976; [10] Бремерман Г., Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье, пер. с англ., М., 1968; [11] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976.
Е. Д. Соломенцев.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — функциональное преобразование вида

$$F(x)=\int_C K(x,\ t)\,f(t)\,dt, \qquad (1)$$

где C — конечный или бесконечный контур в комплексной плоскости, $K(x, t)$ — ядро И. п. Наиболее часто рассматриваются И. п., для которых $K(x, t)\equiv\equiv K(xt)$ и C — действительная ось или ее часть (a, b). Если $-\infty<a$, $b<\infty$, то И. п. наз. конечным И. п. Формулы, позволяющие восстановить функцию $f(t)$ по известной $F(x)$, наз. формулами обращения И. п.

Примеры И. п. Преобразование Бохнера:

$$[Tf]\,(r)=2\pi r^{1-n/2}\int_0^\infty J_{n/2-1}\,(2\pi r\rho)\,\rho^{n/2}\,f\,(\rho)\,d\rho,$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя 1-го рода порядка ν, ρ — расстояние в $\mathbb{R}^n$. Формула обращения: $f=T^2f$. Равенство Парсеваля:

$$\int_0^\infty |\,[Tf]\,(r)\,|^2\,r^{k-1}\,dr=\int_0^\infty |\,f\,(\rho)\,|^2\,\rho^{k-1}\,d\rho.$$

Преобразование Вебера:

$$F\,(u,a)=\int_a^\infty c_\nu\,(tu,au)\;tf\,(t)\,dt,\ \ a\leqslant t<\infty,$$

где $c_\nu(\alpha,\ \beta)\equiv J_\nu(\alpha)Y(\beta)-Y_\nu(\alpha)J_\nu(\beta)$, $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода. Формула обращения:

$$f\,(x)=\int_0^\infty \frac{c_\nu\,(xu,au)}{J_\nu^2\,(au)+Y_\nu^2\,(au)}\,uF\,\,(u,a)\,\,du.$$

При $a\to 0$ преобразование Вебера переходит в преобразование Ганкеля:

$$F\,(x)=\int_0^\infty \sqrt{xt}\,J_\nu\,(xt)\,f\,(t)\,dt,\quad 0<x<\infty.$$

При $\nu=\pm{}^1/_2$ это преобразование сводится к синус- и косинус-преобразованиям Фурье. Формула обращения: если $f\in L_1(0,\ \infty)$, $f(t)$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки $t_0>0$ и $\nu\geqslant -{}^1/_2$, то

$$\frac{1}{2}\,[f\,(t_0+0)+f\,(t_0-0)]=\int_0^\infty \sqrt{t_0x}\,J_\nu\,(t_0x)\,F\,(x)\,dx.$$

Равенство Парсеваля: если $\nu\geqslant -{}^1/_2$, $F(x)$ и $G(x)$ — преобразования Ганкеля функций $f(t)$ и $g(t)$, причем $f,\ G\in L_1(0,\ \infty)$, то

$$\int_0^\infty f\,(t)\,g\,(t)\,dt=\int_0^\infty F\,(x)\,G\,(x)\,dx.$$

Другие формы преобразования Ганкеля:

$$\int_0^\infty J_\nu\,(xt)\,tf\,(t)\,dt,\qquad \int_0^\infty J_\nu\left(2\,\sqrt{xt}\right)f\,(t)\,dt.$$

Преобразование Вейерштрасса:

$$F\,(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^\infty \exp\,[-\,(x-t)^2/4]\,f\,(t)\,dt$$

является частным случаем *свертки преобразования.*

Цепные преобразования. Пусть

$$f_{i+1}\,(x)=\int_0^\infty f_i\,(t)\,K_i\,(xt)\,dt,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

причем $f_{n+1}(x)=f_1(x)$. Такая последовательность И. п. наз. цепочкой И. п. При $n=2$ цепные И. п. часто наз. преобразованиями Фурье.

Кратные (многомерные) И. п.— преобразования вида (1), где t, $x \in R^n$, C — некоторая область n-мерного комплексного евклидова пространства.

И. п. обобщенных функций могут быть построены следующими основными способами:

1) Строится пространство основных функций U, содержащее ядро $K(x, t)$ рассматриваемого И. п. T. Преобразование Tf для любой обобщенной функции $f(t) \in U'$ определяется как значение функционала f на основной функции $K(x, t)$ формулой

$$T[f(t)](x) = \langle f, K(x, t)\rangle.$$

2) Строится пространство основных функций U, на к-ром определено классическое И. п. T, отображающее U на нек-рое пространство основных функций V. И. п. $T'f$ обобщенной функции $f \in V'$ вводится равенством

$$\langle T'f, \varphi\rangle = \langle f, T\varphi\rangle, \quad \varphi \in U.$$

3) Рассматриваемое И. п. выражается через другое И. п., к-рое определено для обобщенных функций.

См. также ст. *Ватсона преобразование*, *Гаусса преобразование*, *Гегенбауэра преобразование*, *Конторовича—Лебедева преобразование*, *Мейера преобразование*, *Мелера — Фока преобразование*, *Меллина преобразование*, *Свертки преобразование*, *Стилтьеса преобразование*, *Уиттекера преобразование*, *Фурье преобразование*, *Харди преобразование*, *Эйлера преобразование*, *Эрмита преобразование*, *Якоби преобразование*.

Лит.: [1] Диткин В. А., Прудников А. П., в сб.: «Итоги науки. Математический анализ. 1966», М., 1967, с. 7—82; [2] Брычков Ю. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977; [3] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. И. у. делятся на два основных класса: линейные И. у. и нелинейные И. у.

Линейные И. у. имеют вид

$$A(x)\varphi(x) + \int_D K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x), \quad x \in D, \tag{1}$$

где A, K, f — заданные функции, из которых A наз. коэффициентом, K — ядром, f — свободным членом (или правой частью) И. у., D — ограниченная или неограниченная область евклидова пространства одного или многих измерений, x, s — точки этого пространства, ds — элемент объема, φ — искомая функция. Требуется определить φ так, чтобы уравнение (1) удовлетворялось для всех (или почти всех, если интеграл рассматривается в смысле Лебега) x из D. Если в (1) A, K — матрицы, f, φ — вектор-функции, тогда (1) наз. системой линейных И. у. Если $f=0$, то И. у. наз. однородным, в противном случае — неоднородным.

В зависимости от коэффициента A различают три типа линейных И. у. Если $A(x)=0$ для всех $x \in D$, то (1) наз. уравнением 1-го рода; если $A(x) \neq 0$ для всех $x \in D$ — уравнением 2-го рода; если $A(x)$ обращается в нуль на некотором подмножестве области D — уравнением 3-го рода.

В дальнейшем, для простоты изложения, рассматриваются И. у. в одномерном случае, когда D — конечный отрезок $[a, b]$. В этом случае линейные И. у. 1-го и 2-го рода можно представить соответственно в виде:

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x), \quad x \in [a, b], \tag{2}$$

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x), \quad x \in [a, b]; \tag{3}$$

постоянное число λ наз. параметром И. у. При исследовании задач математич. физики особенно часто встречаются уравнения 2-го рода. Если ядро K фредгольмово, т. е. интегральный оператор в уравнениях (2), (3) вполне непрерывен, то И. у. (2), (3) наз. уравнениями Фредгольма 1-го и 2-го рода соответственно. Важным примером уравнения Фредгольма является уравнение, в к-ром ядро K удовлетворяет условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 \, dx \, ds < \infty, \tag{4}$$

а правая часть f и искомая функция φ — интегрируемые с квадратом функции.

Уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) \, ds = 0, \quad x \in [a, b], \tag{5}$$

наз. однородным И. у., соответствующим неоднородному И. у. (3). Аналогично определяется однородное И. у., соответствующее уравнению (2). Однородное И. у. всегда имеет решение $\varphi = 0$, к-рое наз. нулевым (или тривиальным) решением. Значение параметра λ, при к-ром И. у. (5) имеет ненулевое решение φ, наз. характеристическим (или фундаментальным) значением (числом) ядра K или И. у. (5), а ненулевое решение φ — собственной (или фундаментальной) функцией ядра K или И. у. (5), принадлежащей (или соответствующей) данному характеристич. значению λ. Если λ не есть характеристич. число, тогда его наз. правильным (или регулярным) значением (числом).

Комплексное ядро K наз. эрмитовым, если

$$\overline{K(x, s)} = K(s, x), \tag{6}$$

где черта означает переход к комплексно сопряженному значению. В случае вещественного ядра равенство (6) принимает вид $K(x, s) = K(s, x)$. Такое ядро наз. симметричным.

Фредгольмово ядро может не иметь характеристич. числа (напр., в случае ядра Вольтерра, см. ниже). Если ядро симметрично и не равно нулю почти всюду, тогда оно имеет, по крайней мере, одно характеристич. число и все характеристич. числа вещественны.

Если ядро K обращается в нуль при $s > x$ (так наз. ядро Вольтерра), то уравнения (2) и (3) принимают вид:

$$\int_a^x K(x, s) \varphi(s) \, ds = f(x), \quad a \leqslant s \leqslant x \leqslant b, \tag{7}$$

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi(s) \, ds = f(x), \quad a \leqslant s \leqslant x \leqslant b. \tag{8}$$

Эти уравнения наз. *Вольтерра уравнениями* 1-го и 2-го рода соответственно.

Частные примеры И. у. начали появляться в 1-й пол. 19 в. И. у. стали объектом особого внимания математиков после того, как удалось свести решение *Дирихле задачи* для уравнения Лапласа к исследованию линейного И. у. 2-го рода. Построение общей теории линейных И. у. было начато в конце 19 в. Основоположниками этой теории считаются В. Вольтерра (V. Volterra, 1896), Э. Фредгольм (E. Fredholm, 1903 [5]), Д. Гильберт (D. Hilbert, 1912 [6]) и Э. Шмидт (E. Schmidt, 1907 [7]). Еще до исследований этих ученых для построения решения И. у. был предложен метод последовательных приближений. Этот метод применялся сначала для решения нелинейных И. у. типа Вольтерра (по современной терминологии) в связи с исследованиями обыкновенных дифференциальных уравнений в работах Ж. Лиувилля (J. Liouville, 1838), Л. Фукса (L. Fuchs, 1870), Дж. Пеано (G. Peano, 1888) и др., а

К. Нейманом (C. Neumann, 1877) — для построения решения линейного И. у. 2-го рода. Общую форму методу последовательных приближений придал Э. Пикар (E. Picard, 1893).

При изучении уравнения колеблющейся мембраны А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1896) пришел к идее введения переменного численного параметра λ в уравнении (3). Тогда же им была высказана гипотеза, что (аналогично случаю уравнения колеблющейся мембраны) решение И. у. (3) является мероморфной функцией от λ. Эту гипотезу доказал Э. Фредгольм (1900—03). Работам Э. Фредгольма предшествовали исследования В. Вольтерра (1896—97), к-рый изучил И. у. вида (7), (8). Он доказал, что если ядро и правая часть уравнения непрерывны, то (8) имеет при любом конечном значении λ одно и только одно непрерывное решение, к-рое можно построить по методу последовательных приближений. Уравнение (3) изучалось Э. Фредгольмом в предположении, что его ядро, а также правая часть и искомое решение — непрерывные функции соответственно на квадрате $[a, b]\times[a, b]$ и на сегменте $[a, b]$. Следуя В. Вольтерра, Э. Фредгольм заменил интеграл в (3) интегральной суммой и рассмотрел интегральное уравнение (3) как предельный случай конечной системы линейных алгебраич. уравнений (см. *Фредгольма уравнение*). С помощью формального перехода к пределу Э. Фредгольм получил формулу, дающую решение уравнения (3); доказал, что построенная формула является решением уравнения (3) за исключением конечного или счетного множества значений параметра λ, и доказал теоремы об условиях разрешимости уравнения (3). Построенную теорию уравнения (3) Э. Фредгольм распространил на случай системы И. у., а также на случай ядра со слабой особенностью (см. *Интегральный оператор*). Решение системы приводится к решению одного уравнения, ядро к-рого имеет линии разрыва, параллельные осям координат.

Д. Гильберт показал (1904), что теоремы Фредгольма можно доказать путем строгого обоснования процесса предельного перехода, и построил общую теорию линейных И. у. на базе теории линейных и билинейных форм с бесконечным числом переменных. Э. Шмидт [7] придал более простую и несколько более общую форму исследованиям Д. Гильберта. Он построил теорию линейных И. у. с действительным симметричным ядром независимо от теории Фредгольма, представив ядро в виде суммы вырожденного и «малого» ядра. Значительное ослабление ограничений, налагаемых в теории И. у. 2-го рода вещественным симметричным ядром на заданные и искомые элементы уравнения, было достигнуто Т. Карлеманом (T. Carleman). Им же был распространен (см. [8]) метод Фредгольма на случай, когда ядро И. у. (3) удовлетворяет условию (4). В работах Ф. Рисса (Riesz, 1918) и Ю. Шаудера (J. Schauder, 1930) теоремы Фредгольма были обобщены для нек-рого класса линейных операторных уравнений в банаховых пространствах.

Основным методом исследования И. у. 1-го рода является так наз. *регуляризации метод*.

И. у. 3-го рода явились предметом специальных исследований Г. Бейтмана (H. Bateman, 1907), Э. Пикара (E. Picard. 1910), Дж. Фубини (G. Fubini, 1912), Ш. Платрие (Ch. Platrier, 1912).

Если линейное И. у. не является уравнением Фредгольма, то его наз. сингулярным (или особым) уравнением. Общая теория Гильберта квадратичных форм с бесконечным числом переменных дает возможность и в этом случае получить ряд важных результатов. Для нек-рых конкретных классов сингулярных И. у. разработаны специальные способы их решения, учитывающие характерные свойства этих уравнений. Так, напр., для сингулярных И. у. и И. у.

типа свертки, вообще говоря, неверна теорема Фредгольма о том, что два транспонированных однородных И. у. имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Параллельно с линейными И. у. изучались и нелинейные И. у., когда неизвестная функция может входить в уравнение в степени n, $n>1$, как это, напр., имеет место в уравнении

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi^n(s)\,ds=f(x),\ x\in[a, b].$$

Она может входить и более общим образом, как, напр., в уравнении

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x, s, \varphi(s))\,ds$$

(см. *Гаммерштейна уравнение*, *Нелинейное интегральное уравнение*).

Лит.: [1] Привалов И. И., Интегральные уравнения, 2 изд., М.— Л., 1937; [2] Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959; [3] Трикоми Ф., Интегральные уравнения, пер. с англ., М., 1960; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, ч. 1, 6 изд., М., 1974; [5] Fredholm I., «Acta Math.», 1903, v. 27, p. 365—390; [6] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.—B., 1912 (2 Aufl., Lpz., 1924); [7] Schmidt E., «Math. Ann.», 1907, Bd 63, S. 433—476; Bd 64, S. 161—74; 1908, Bd 65, S. 370—99; [8] Carleman T., «Math. Z.», 1921, Bd 9, S. 196—217. *Б. В. Хведелидзе.*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ; численные методы решения,— методы нахождения приближенных решений И. у.

Требуется найти решение $\varphi(x)$ одномерного уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds+f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, λ — числовой параметр, $K(x, s)$ непрерывна на $a\leqslant x$, $s\leqslant b$.

Пусть λ не является собственным значением ядра $K(x, s)$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $\varphi(x)$, непрерывное на $[a, b]$. При этих условиях можно указать следующие способы получения приближенного решения.

Первый способ. Пусть a и b — конечные числа. Интеграл в (1) заменяют интегральной суммой по сетке $\{s_j\}$, $j=0, 1, 2, \ldots, n$, а переменной x придают значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Получается система линейных алгебраич. уравнений относительно φ_j

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\varphi_j=f_i,\quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где $A_{ij}=1-\lambda C_j K(x_i, x_j)$, C_j — коэффициенты квадратурной формулы, по к-рой интеграл в (1) заменен интегральной суммой. Система (2) при достаточно больших n имеет единственное решение $\{\bar{\varphi}_j\}$. В качестве приближенного решения уравнения (1) можно брать функцию

$$\tilde{\varphi}_n(x)=f(x)+\lambda\sum_{j=1}^{n} C_j K(x, x_j),$$

так как при $n\longrightarrow\infty$ и $\Delta_n=\max\limits_i\{|x_{i+1}-x_i|\}\longrightarrow 0$ последовательность функций $\tilde{\varphi}_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$ к искомому решению уравнения (1). См. [1], [2], [3], [4].

При замене интеграла по квадратурной формуле надо иметь в виду, что чем более точная квадратурная формула используется, тем большую гладкость ядра и решения (а следовательно, и $f(x)$) надо требовать.

В случае, когда промежуток интегрирования (a, b) бесконечный, его заменяют конечным промежутком (a_1, b_1), пользуясь априорной информацией о поведении искомого решения $\bar{\varphi}(x)$ при больших значениях $|x|$. Полученное уравнение решают приближенно описанным способом; либо заменой переменной интегрирования сводят промежуток интегрирования к конечному;

либо применяют квадратурные формулы для бесконечного промежутка.

Второй способ. В уравнении (1) ядро $K(x, s)$ заменяют аппроксимирующим его вырожденным ядром

$$K_1(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(s),$$

в к-ром функции $\{a_i(x)\}$ линейно независимы. Получающееся при этом уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(s) \varphi(s) ds + f(x) \qquad (3)$$

имеет решение $\hat{\varphi}(x)$ вида

$$\hat{\varphi}(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i a_i(x) + f(x), \qquad (4)$$

в к-ром постоянные

$$C_i = \int_a^b \hat{\varphi}(s) b_i(s) ds$$

подлежат определению. Подставляя функцию $\hat{\varphi}(x)$ в уравнение (3) и сравнивая коэффициенты при функциях $a_i(x)$, получают систему линейных алгебраич. уравнений для C_i вида

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} C_j = \beta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_a^b a_j(s) b_i(s) ds, \; \beta_i = \int_a^b f(s) b_i(s) ds.$$

Определив C_i из этой системы и подставив их в (4), получают функцию $\hat{\varphi}(x)$, к-рая и принимается за приближенное решение уравнения (1), так как при достаточно хорошей аппроксимации ядра $K(x, s)$ вырожденным ядром решение уравнения (3) произвольно мало отличается от искомого решения $\hat{\varphi}(x)$ на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, а если (a, b) — конечный промежуток, то — и на отрезке $[a, b]$ (см. [1], [4]).

Третий способ. В качестве приближенных решений берутся функции $\varphi_n(x)$, получаемые методом итераций по формулам

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_n(s) ds + f(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$\varphi_0(x) = f(x)$, так как последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится к искомому решению при $n \to \infty$, если $|\lambda| < 1/M(b-a)$, $M = \sup\limits_{x, s} |K(x, s)|$. Сходимость $\{\varphi_n(x)\}$ к точному решению имеет место и для ядер с интегрируемой особенностью (см. [1]). Оценки погрешностей этих методов содержатся в [1] — [7]. В [8] рассматривается вопрос о минимальном числе арифметич. операций, необходимых для того, чтобы получить приближенное значение интеграла с заданной точностью. Решение этой задачи эквивалентно отысканию величины минимальной погрешности приближенного решения задачи при заданном числе арифметич. операций.

Для решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода требуется применять специальные методы, так как эти задачи являются некорректно поставленными. Если в уравнении (1) λ совпадает с одним из собственных значений ядра $K(x, s)$, то в этих условиях задача нахождения решения уравнения (1) является некорректно поставленной и требует применения специальных методов (см. *Некорректные задачи*).

Нелинейные И. у. 2-го рода приближенно решают обычно методом итераций (см. [3]).

Для получения приближенных решений как линейных, так и нелинейных И. у. применяют также *Галеркина метод*.

Аналогичные методы можно применять и для получения приближенных решений многомерных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Однако численная реализация их сложнее. О кубатурных формулах приближенного вычисления кратных интегралов и оценках их погрешностей см. [5] — [10]. В [10] рассмотрен метод Монте-Карло приближенного вычисления кратных интегралов.

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, 1966; [4] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962; [5] Мысовских И. П., «Сиб. матем. ж.», 1964, т. 5, № 3, с. 721—23; [6] его же, «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1972, т. 12, № 2; [7] его же, там же, 1975, т. 15, № 6; [8] Емельянов К. В., Ильин А. М., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 4, с. 905—10; [9] Соболев С. Л., Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974; [10] Соболь И. М., Многомерные кубатурные формулы и функции Хаара, М., 1969. *В. Я. Арсенин.*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СИММЕТРИЧНЫМ ЯДРОМ — интегральное уравнение (и. у.) с симметричным действительным ядром:

$$K(x, s) = K(s, x).$$

Теория линейных и. у. с симметричным и действительным ядром была впервые построена Д. Гильбертом (D. Hilbert, 1904) привлечением теории симметричных квадратичных форм с помощью перехода от конечного числа переменных к бесконечному. Затем Э. Шмидт (E. Schmidt, 1907) предложил более элементарный метод обоснования результатов Д. Гильберта. Поэтому теорию И. у. с с. я. часто наз. также теорией Гильберта—Шмидта. Значительное ослабление ограничений, налагаемых в этой теории на заданные и искомые элементы уравнения, было достигнуто Т. Карлеманом (T. Carleman) (см. ниже).

Пусть имеется и. у. 2-го рода с действительным симметричным ядром:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x), \quad x \in [a, b]. \tag{1}$$

При построении теории И. у. с с. я. достаточно предполагать, что симметричное ядро K измеримо на квадрате $[a, b] \times [a, b]$

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2\, dx\, ds < \infty, \tag{2}$$

а свободный член f и искомая функция φ — интегрируемые с квадратом функции на отрезке $[a, b]$ (интегралы понимаются в смысле Лебега).

Разработка теории И. у. с с. я. начинается с изучения ряда общих свойств собственных чисел и собственных функций однородного симметричного и. у.:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0, \quad x \in [a, b]. \tag{3}$$

А именно, доказывается, что: уравнение (3) обладает по крайней мере одним собственным числом (когда K почти всюду не равно нулю); собственные функции, принадлежащие различным собственным числам,— ортогональны; собственные числа — действительны; ввиду действительности ядра без ограничения общности можно предполагать, что собственные функции действительны; на любом конечном сегменте значений параметра λ может находиться лишь конечное множество собственных чисел.

Множество всех собственных чисел уравнения (3) наз. спектром этого уравнения. Спектр — непустое конечное или счетное множество чисел $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \ldots, \mu_n, \ldots\}$; каждому числу μ_n спектра соответствует конечное множество линейно независимых собственных функций. Собственные числа и собственные функции можно расположить в виде последовательностей:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m,\ \ldots \\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m,\ \ldots \end{array}\right\} \tag{4}$$

так, что абсолютные величины собственных чисел не убывают $|\lambda_k| \leqslant |\lambda_{k+1}|$; каждое собственное число повторяется столько раз, сколько собственных функций ему соответствует. Поэтому каждому числу λ_k в (4) соответствует лишь одна собственная функция. Можно считать, что система функций $\{\varphi_k\}$ ортонормирована. Последовательности (4) наз. системой собственных чисел и собственных функций симметричного ядра K или уравнения (3). Нахождение этой системы равносильно полному решению однородного симметричного и. у. (3).

Ряд Фурье ядра $K(x, s)$, рассматриваемого как функция от s относительно ортонормированной системы $\{\varphi_k(s)\}$, будет

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k}. \tag{5}$$

Так составленный ряд из системы собственных чисел и собственных функций симметричного ядра K наз. билинейным рядом ядра K или билинейным разложением ядра K по его собственным функциям. Этот ряд сходится в среднем к ядру K, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \int_a^b \left[K(x, s) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-2} \varphi_k(x) \varphi_k(s) \right] dx\, ds = 0.$$

Если же билинейный ряд (5) сходится равномерно, то

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k}.$$

В частности, это последнее равенство всегда имеет место, если ядро обладает лишь конечным множеством собственных чисел. В этом случае ядро K является вырожденным. Имеет место и обратное утверждение: вырожденное симметричное ядро имеет конечное множество собственных чисел (и, следовательно, конечное множество собственных функций). Билинейный ряд непрерывного на квадрате $[a, b] \times [a, b]$ ядра K с положительными собственными числами сходится равномерно.

Зная систему (4) собственных чисел и собственных функций, можно построить решение неоднородного уравнения (1). Имеют место следующие теоремы.

Если λ не является собственным числом ядра K, то симметричное и. у. (1) имеет единственное решение φ, выражаемое формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x), \tag{6}$$

где λ_k — собственные числа, f_k — коэффициенты Фурье функции f относительно ортонормированной системы $\{\varphi_m\}$ собственных функций ядра, т. е.

$$f_k = \int_a^b f(s)\varphi_k(s)\, ds, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пусть $\lambda = \lambda_1$ — собственное число ядра K; тогда симметричное и. у. (1) разрешимо лишь в случае, если удовлетворяются условия

$$f_k = \int_a^b f(s)\varphi_k(s)\, ds = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, q,$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ — собственные функции, принадлежащие собственному числу λ_1. При соблюдении этих условий все решения уравнения (1) выражаются формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \\ + \lambda \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{q} c_k \varphi_k(x), \tag{7}$$

где $c_1, \ldots, c_q$ — произвольные постоянные.

Если ядро K имеет бесконечное множество собственных чисел и, следовательно, в правых частях формул (6).

(7) стоят бесконечные ряды, то они сходятся в среднем. Если от ядра K дополнительно потребовать, что оно удовлетворяет условию

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 ds \leqslant \text{const}, \quad x \in [a, b],$$

то упомянутые ряды будут сходиться абсолютно и равномерно.

Формулы (6) и (7) наз. формулами Шмидта. Большая часть теории И. у. с с. я. легко распространяется и на комплекснозначные функции. В этом случае аналогом действительного симметричного ядра является эрмитово ядро: $\overline{K(x, s)} = K(s, x)$.

Если известна система (4) собственных чисел и собственных функций симметричного ядра K, то можно легко исследовать симметричное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b]. \qquad (8)$$

Пусть, как и выше, симметричное ядро K уравнения (8) — интегрируемая с квадратом функция на квадрате $[a, b] \times [a, b]$, а правая часть f и искомое решение φ — такие же функции на сегменте $[a, b]$. Симметричное ядро наз. полным, если система его собственных функций $\{\varphi_m\}$ полна (замкнута).

Теорема Пикара. Пусть $K(x, s)$ — полное ядро. Тогда для разрешимости уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \, |f_k|^2,$$

где f_k — коэффициенты Фурье функции f, сходился. При выполнении этого условия решение (единственное) представимо в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k \varphi_k(x),$$

причем последний ряд сходится в среднем.

Т. Карлеман [5] построил теорию при менее ограничительных условиях на симметричное ядро K, чем у Д. Гильберта и Э. Шмидта. Эти условия следующие: 1) $\int_a^b K^2(x, s) ds$ существует в смысле Лебега и

$$\lim_{y \to x} \int_a^b [K(y, s) - K(x, s)]^2 ds = 0$$

для любого $x \neq x_i$, где $\{x_i\}$ — некоторая последовательность точек, к-рая может иметь конечное число предельных точек; 2) может существовать конечное множество точек $s_1, \ldots, s_n \in \{x_i\}$, в окрестности к-рых функция

$$\sigma^2(x) = \int_a^b K^2(x, s)\, ds$$

не интегрируема, но она интегрируема на множестве Δ_ε, оставшемся после удаления из сегмента $[a, b]$ интервалов $(s_i - \varepsilon, s_i + \varepsilon)$, $i = 1, \ldots, n$, где ε — произвольное достаточно малое положительное число.

Пусть $K_\varepsilon(x, s)$ — функция, к-рая равна нулю на множестве точек $\{(x, s)\}$ таких, что $|x - s_i| \leqslant \varepsilon$, $|s - s_i| \leqslant \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$, а вне этого множества в квадрате $[a, b] \times [a, b]$ совпадает с ядром K уравнения (1). Идея метода Карлемана заключается в следующем: взамен уравнения (1) рассматривается линейное интегральное уравнение второго рода с ядром K_ε. Изучив спектр и решения этого уравнения, затем с помощью перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ исследуется спектр и решения уравнения (1).

Лит.: [1] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.— B., 1912 (2 Aufl., 1924); [2] Schmidt E., «Math. Ann.», 1907, Bd 63, S. 433—76; Bd 64, S. 161—74; 1908, Bd 65, S. 370—99; [3] Виарда Г., Интегральные уравнения, пер. с нем., М.— Л., 1933;

[4] Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959; [5] Carleman T., Sur les équations intégrales singuliéres a noyau réel et symétrique, Uppsala, 1923.

Б. В. Хведелидзе.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЕРТКИ — интегральное уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интегрального преобразования свертки (см. *Интегральный оператор*). Особенностью И. у. т. с. является то, что ядра таких уравнений зависят от разности аргументов. Простейший пример — уравнение

$$\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \quad -\infty<t<\infty, \qquad (1)$$

где k и f — заданные функции, а φ — искомая функция. Пусть k и $f\in L_1(-\infty, \infty)$ и решение ищется в том же классе. Для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение условия

$$1-K(\lambda)\neq 0, \quad -\infty<\lambda<\infty, \qquad (2)$$

где K — преобразование Фурье функции k. При выполнении условия (2) уравнение (1) в классе L_1 имеет единственное решение, представимое формулой

$$\varphi(x)=f(x)-\int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)f(t)\,dt, \qquad (3)$$

где $k\in L_1(-\infty, \infty)$ однозначно определяется с помощью своего преобразования Фурье

$$K_1(\lambda)=1-[1-K(\lambda)]^{-1}.$$

Уравнения типа свертки на полупрямой (*Винера—Хопфа уравнение*)

$$\varphi(t)-\int_{0}^{\infty} k(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \quad 0\leqslant t<\infty, \qquad (4)$$

возникает при исследовании различных вопросов как теоретического, так и прикладного характера (см. [1], [4]).

Пусть правая часть f и искомая функция $\varphi\in L_p(0, \infty)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, а ядро $k\in L_1(-\infty, \infty)$ и

$$\alpha(\lambda)=1-K(\lambda)\neq 0, \quad -\infty<\lambda<\infty. \qquad (5)$$

Функцию $\alpha(\lambda)$ наз. символом уравнения (4). Индексом уравнения (4) называется число

$$\varkappa=\operatorname{ind}\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \arg\alpha(\lambda). \qquad (6)$$

Если $\varkappa=0$, функции K_+, K_-, определенные из равенств:

$$1+K_{\pm}(\lambda)= =\exp\left[-\frac{1}{2}\ln\alpha(\lambda)\mp\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\alpha(\tau)}{\tau-\lambda}\,d\tau\right], \qquad (7)$$

являются преобразованиями Фурье, соответственно, функций $k_+, k_-\in L_1(-\infty, \infty)$ таких, что $k_+(t)=k_-(-t)=0$ при $t<0$. При указанных выше условиях уравнение (4) имеет единственное решение, которое представляется формулой

$$\varphi(t)=f(t)+\int_0^{\infty} r(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad (8)$$

где

$$r(t, \tau)=k_+(t-\tau)+k_-(t-\tau)+\int_0^{\infty} k_+(t-s)k_-(s-\tau)\,ds.$$

Если $\varkappa<0$, то все решения уравнения (4) даются формулой

$$\varphi(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{|\varkappa|} c_k t^{k-1}e^{-t}+ +\int_0^{\infty} r_0(t, \tau)\left[f(\tau)+\sum_{k=1}^{|\varkappa|} c_k\tau^{k-1}e^{-\tau}\right]d\tau, \qquad (9)$$

где c_k — произвольные постоянные,

$$r_0(t, \tau)=k_+^{(0)}(t-\tau)+k_-^{(1)}(t-\tau)+ +\int_0^{\infty} k_+^{(0)}(t-s)\,k_-^{(1)}(s-\tau)\,ds, \qquad (10)$$

а функции $k_{+}^{(0)}$, $k_{-}^{(1)} \in L_1(-\infty, \infty)$ однозначно определяются с помощью своих преобразований Фурье:

$$1+K_{-}^{(1)}(\lambda)=\left[1+K_{-}^{(0)}(\lambda)\right](\lambda+i)^{\varkappa}(\lambda-i)^{-\varkappa},$$

$$1+K_{\pm}^{(0)}(\lambda)=\exp\left[-\frac{1}{2}\ln b(\lambda) \mp \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln b(\tau)}{\tau-\lambda}\,d\tau\right], \tag{11}$$

$$b(\lambda)=[1-K(\lambda)]\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^{\varkappa}.$$

Однородное уравнение, соответствующее (4), имеет при $\varkappa<0$ ровно $|\varkappa|$ линейно независимых решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_{|\varkappa|}$, являющихся абсолютно непрерывными функциями на любом конечном интервале, причем эти решения можно подобрать так, что $\varphi_{k+1}(t)=\varphi_k'(t)$, $\varphi_k(0)=0$ при $k=1, \ldots, |\varkappa|-1$ и $\varphi_{|\varkappa|}(0)\neq 0$.

Если $\varkappa>0$, то уравнение разрешимо лишь при соблюдении условий:

$$\int_0^{\infty} f(t)\,\psi_j(t)\,dt=0, \quad j=1, \ldots, \varkappa, \tag{12}$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_{\varkappa}$ — система линейно независимых решений транспонированного к (4) однородного уравнения

$$\psi(t)-\int_0^{\infty} k(\tau-t)\,\psi(\tau)\,d\tau=0. \tag{13}$$

При соблюдении этих условий решение (единственное) дается формулой

$$\varphi(t)=f(t)+\int_0^{\infty} r_1(t, \tau)\,f(\tau)\,d\tau,$$

где

$$r_1(t, \tau)=k_{+}^{(1)}(t-\tau)+k_{-}^{(0)}(t-\tau)+$$
$$+\int_0^{\infty} k_{+}^{(1)}(t-s)\,k_{-}^{(0)}(s-\tau)\,ds,$$

а преобразование Фурье $K_{-}^{(0)}(\lambda)$ и $K_{+}^{(1)}(\lambda)$ функций $k_{-}^{(0)}(t)$ и $k_{+}^{(1)}(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ определяется равенством

$$1+K_{+}^{(1)}(\lambda)=\left[1+K_{+}^{(0)}(\lambda)\right](\lambda+i)^{\varkappa}(\lambda-i)^{-\varkappa}$$

и равенствами (11). Для уравнения (4) справедливы теоремы Нётера (см. *Сингулярное интегральное уравнение*).

Первые значительные результаты по теории уравнений (4) были получены в [11], где указан эффективный метод (так наз. метод Винера — Хопфа) решения однородного уравнения, соответствующего (4), в предположении, что ядро и искомое решение удовлетворяют условиям: при некоторых $0<\alpha<a$ и

$$k(t)=O\left(e^{-a|t|}\right), \quad \varphi(t)=O\left(e^{\alpha t}\right).$$

Основным моментом в методе Винера—Хопфа является идея факторизации функции $h(\lambda)$, голоморфной в полосе $|\mathrm{Im}\lambda|<a$, то есть идея о возможности ее представления в виде произведения $h_{-}(\lambda)h_{+}(\lambda)$, где h_{-}, h_{+} — некоторые голоморфные функции соответственно в полуплоскостях $\mathrm{Im}\lambda<a$ и $\mathrm{Im}\lambda>-a$, удовлетворяющие нек-рым дополнительным требованиям. Эти результаты были развиты и дополнены (см. [4]).

Разработан метод сведения уравнения (4) к граничной задаче линейного сопряжения. Этим путем уравнение (4) было решено в следующих предположениях: $k \in L_{1,2}(-\infty, \infty)$, $K \in \mathrm{Lip}_{\alpha}(-\infty, \infty)$, $0<\alpha<1$; $K(\lambda)=O(|\lambda|^{-\beta})$, $\beta>0$, при $|\lambda|\to\infty$ и $1-K(\lambda)\neq 0$, $-\infty<\lambda<\infty$.

Кроме того, была выяснена роль числа $\mathrm{ind}[1-K(\lambda)]$ в решении уравнения (4). В предшествующих работах аналогичную роль играло число нулей аналитич. функции $1-K(\lambda)$ в некоторой полосе (см. [3]).

Условие (5) является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы в случае уравнения (4) были справедливы теоремы Нётера. Приведенные решения уравнения (4) упрощаются в ряде практически важных частных случаев. Установлена асимптотика решения для специальных правых частей (см. [4]).

Уравнение (4) изучено и в случае, когда $k \notin L_1(-\infty, \infty)$ и преобразование Фурье $K(\lambda)$ ядра $k(t)$ имеет разрывы 1-го рода (см. [5]) или же является почти периодической функцией (см. [2]). В этих случаях условие (5) оказывается недостаточным для того, чтобы были справедливы теоремы Нётера.

Справедливость большинства перечисленных выше результатов установлена также для систем уравнений типа (4), но, в отличие от одного уравнения, системы И. у. т. с. в общем случае не решаются явно в квадратурах (см. [6]).

К И. у. т. с. относятся также **парные уравнения** (или **дуальные уравнения**)

$$\begin{aligned} &\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \quad t>0, \\ &\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \quad t<0, \end{aligned} \qquad (15)$$

и транспонированное к ним так наз. И. у. т. с. **с двумя ядрами**:

$$\varphi(t)-\int_{0}^{\infty} k_1(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau- -\int_{-\infty}^{0} k_2(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), -\infty<t<\infty. \qquad (16)$$

Уравнения (15) решены явно в квадратурах в [3], а уравнение (16) — в [10].

И. у. т. с. на конечном промежутке

$$\varphi(t)-\int_{0}^{T} k(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T<\infty, \qquad (17)$$

где $k \in L_1(-T, T)$, является *Фредгольма уравнением* (см. [7], [9]).

И. у. т. с., символ к-рых обращается в нуль в конечном числе точек и порядки нулей — целые числа, поддаются явному решению в квадратурах (см. [8], [12]).

Лит.: [1] Нобл Б., Применение метода Винера — Хопфа, пер. с англ., М., 1962; [2] Гохберг И. Ц., Фельдман И. А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., 1971; [3] Рапопорт И. М., «Докл. АН СССР», 1948, т. 59, № 8, с. 1403—06; «Сб. тр. ин-та матем. АН УССР», 1949, № 12, с. 102—17; [4] Крейн М. Г., «Успехи матем. наук», 1958, т. 13, в. 5, с. 3—120; [5] Дудучава Р. В., «Math. Nachr.», 1975, Bd 65, № 1, S. 59—82; [6] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 2, с. 44—118; [7] Ганин М. П., «Изв. ВУЗов. Математика», 1963, № 2, с. 31—43; [8] Гахов Ф. Д., Смагина В. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 3, с. 361—90; [9] Симоненко И. Б., «Изв. ВУЗов. Математика», 1959, № 2, с. 213—26; [10] Черский Ю. И., «Уч. зап. Казанск. ун-та», 1953, т. 113, кн. 10, с. 43—56; [11] Wiener N., Hopf E., «Sitz. Akad. Wiss. Berlin», 1931, S. 696—706; [12] Prössdorf S., Einige Klassen singulärer Gleichungen, B., 1974. *Р. В. Дудучава, Б. В. Хведелидзе.*

ИНТЕГРАЛЬНОЙ РАЗДЕЛЕННОСТИ УСЛОВИЕ — условие на линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t)\,x, \quad x\in\mathbb{R}^n$$

(где $A(t)$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^+\to\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, причем $\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|A(t)\|<+\infty$), состоящее в следующем: система имеет решения $x_i(t)$, $i=1, 2,\ldots, n$, удовлетворяющие при нек-рых $a>0$, $d>0$ неравенствам

$$|x_i(t)|\cdot|x_i(\tau)|^{-1}\geqslant de^{a(t-\tau)}\cdot|x_{i-1}(t)|\cdot|x_{i-1}(\tau)|^{-1}$$

для всех $i=2,\ldots, n$ и всех $t\geqslant\tau\geqslant 0$.

Множество систем, удовлетворяющих И. р. у., является внутренностью множества точек непрерывности всех *Ляпунова характеристических показателей* в пространстве систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}+} \|A(t)\| < +\infty$$

с метрикой

$$\rho(A(t), B(t)) = \sup_{t \in \mathbb{R}+} \|A(t) - B(t)\|.$$

Лит.: [1] Изобов Н. А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146.

В. М. Миллионщиков.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ АВТОМОРФИЗМ — то же, что *специальный автоморфизм*, построенный по автоморфизму T пространства с мерой (X, μ) и функции f (заданной на этом пространстве и принимающей положительные целочисленные значения). Термин «И. а.» принят главным образом в иностранной литературе.

Д. В. Аносов.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ КОСИНУС — специальная функция, определяемая для действительного x равенством

$$\operatorname{Chi}(x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t}\, dt = \operatorname{Ci}(ix) + i\frac{\pi}{2},$$

где $C = 0{,}5772\ldots$ — *Эйлера постоянная*, $\operatorname{Ci}(x)$ — *интегральный косинус*. И. г. к. представляется в виде ряда

$$\operatorname{Chi}(x) = C + \ln x + \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^4}{4!4} + \ldots.$$

Иногда используют обозначение $\operatorname{chi}(x)$.

Лит. см. при ст. *Интегральный косинус.* *А. Б. Иванов.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ СИНУС — специальная функция, определяемая для действительного x равенством

$$\operatorname{Shi}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{t}\, dt = i \operatorname{Si}(ix),$$

где $\operatorname{Si}(x)$ — *интегральный синус*. И. г. с. представляется в виде ряда

$$\operatorname{Shi}(x) = x + \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} + \ldots.$$

И. г. с. и *интегральный гиперболический косинус* $\operatorname{Chi}(x)$ связаны соотношением:

$$\operatorname{Chi}(x) + \operatorname{Shi}(x) = \operatorname{Li} e^x,$$

где Li — *интегральный логарифм*.

Иногда используют обозначение $\operatorname{shi}(x)$.

Лит. см. при ст. *Интегральный косинус.* *А. Б. Иванов.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ степени k (порядка k) гладкой динамической системы — а) абсолютный И. и.: внешняя *дифференциальная форма* φ степени k, переходящая в себя под действием преобразований, образующих эту систему; б) относительный И. и.: внешняя дифференциальная форма φ степени k, внешний дифференциал к-рой является абсолютным И. и. (имеющим уже степень $k+1$).

Обычно речь идет об И. и. для *потока* $\{S_t\}$, определяемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, где f — гладкое векторное поле, заданное в нек-рой области евклидова пространства (или многообразия); в терминах координат (локальных координат в случае многообразия) эта система имеет вид

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Важный пример И. и. — форма объема $\varphi = \rho(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ [где $\rho(x)$ — положительная локально интегрируемая (часто даже непрерывная или гладкая) функция координат]. При гладкой ρ эта форма является абсолютным И. и. системы (1), если

$$\operatorname{div}(\rho f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\rho f_i)}{\partial x_i} = 0.$$

В этом случае поток имеет *инвариантную меру* $\mu(A)=\int_A \varphi$, к-рая в терминах (локальных) координат задается своей плотностью $\rho(x)$ (последнюю, допуская нек-рую вольность речи, тоже часто наз. И. и.).

Гамильтонова система с (обобщенными) импульсами и координатами p_i, q_i, $i=1,\ldots, m$, имеет относительный И. и.

$$\psi=\Sigma p_i dq_i$$

и абсолютный И. и.

$$\omega=\Sigma dp_i \wedge dq_i.$$

Этот факт можно положить в основу определения гамильтоновых систем и использовать при развертывании их теории, ибо многие специфич. особенности последней непосредственно связаны с этими И. и. (см.[4], [5]). Внешние степени ω^k (в том числе и форма объема ω^m) являются абсолютными, а произведения $\psi\wedge\omega^k$ — относительными И. и. любой гамильтоновой системы, поэтому их наз. универсальными И. и. гамильтоновых систем. С точностью до множителя все универсальные И. и. гамильтоновых систем сводятся к указанным (см. [4], [7]).

Если система (1) имеет абсолютный И. и. φ степени k, то для любой k-мерной гладкой цепи c (напр., гладкого k-мерного многообразия)

$$\int_c \varphi=\int_{S_t(c)} \varphi. \tag{2}$$

Если же система (1) имеет относительный И. и., то (2), вообще говоря, имеет место лишь тогда, когда цепь является границей цепи размерности $k+1$. Иногда относительный И. и. определяют несколько более сильным требованием, чтобы (2) выполнялось для всех циклов c. Первоначально И. и. были определены А. Пуанкаре (см. [1], [2]) именно как интегралы указанного выше типа, остающиеся инвариантными, когда область интегрирования движется под действием потока.

Все сказанное легко распространяется на неавтономные системы $\dot{x}=f(x, t)$. Более существенной является модификация понятия И. и., предложенная Э. Картаном (É. Cartan, [3]) и связанная с переходом (даже в автономном случае) к расширенному фазовому пространству (к обычным фазовым переменным добавляется время), в к-ром *интегральные кривые* рассматриваемой системы дифференциальных уравнений образуют нек-рое семейство линий (конгруэнцию). Э. Картан требует, чтобы интеграл формы φ по цепи c (или по циклу, если речь идет об относительном И. и.) оставался неизменным, когда каждую точку $(x, t)\in c$ сдвигают вдоль интегральной кривой, проходящей через эту точку; при этом различные точки можно сдвигать по-разному, лишь бы это было гладкой деформацией цикла c. (Напр., в новом смысле относительным И. и. гамильтоновой системы является не ψ, а весьма полезный интегральный инвариант Пуанкаре — Картана $\Sigma p_i dq_i - H dt$, где H — гамильтониан, см. [3]—[5].) Родственное определение дано в [6].

Лит.: [1] Poincaré H., «Acta math.», 1890, t. 13, p. 1—270; [2] Пуанкаре А., Избр. тр., пер. с франц., т. 2, М., 1972; [3] Картан Э., Интегральные инварианты, пер. с франц., М.— Л., 1940; [4] Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, М., 1960; [5] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [6] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [7] Hwa-Chung Lee, «Proc. Roy. Soc. Edinbourgh», ser. A, 1947, v. 62, p. 237—46.

Д. В. Аносов.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КОСИНУС — специальная функция, определяемая для действительного $x>0$ равенством:

$$\mathrm{Ci}(x)=-\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt=C+\ln x-\int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt,$$

где $C=0{,}5772\ldots$ — *Эйлера постоянная*. График И. к. см. на рис. Некоторые интегралы, содержащие $\mathrm{Ci}(x)$:

$$\int_0^\infty e^{-p^t}\,\mathrm{Ci}\,(qt)\,dt=-\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{p^2}{q^2}\right),$$

$$\int_0^\infty \cos t\,\mathrm{Ci}\,(t)\,dt=-\frac{\pi}{4},\quad \int_0^\infty \mathrm{Ci}^2\,(t)\,dt=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Ci}\,(t)\,\mathrm{si}\,(t)\,dt=-\ln 2,$$

где $\mathrm{si}(t)$ — интегральный синус.

При малых x

$$\mathrm{Ci}\,(x)\approx C+\ln x.$$

Асимптотич. представление при больших x:

$$\mathrm{Ci}\,(x)=\frac{\sin x}{x}\,P\,(x)-\frac{\cos x}{x}\,Q\,(x),$$

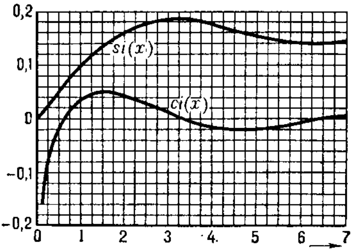
$$P\,(x)\sim\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k\,(2k)!}{x^{2k}},\quad Q\,(x)\sim\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k\,(2k+1)!}{x^{2k+1}}.$$

И. к. представляется в виде ряда

$$\mathrm{Ci}\,(x)=C+\ln x-\frac{x^2}{2!2}+\frac{x^4}{4!4}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!\,2k}+\ldots \qquad (*)$$

Как функция комплексного переменного z, $\mathrm{Ci}(z)$, определяемая рядом (*), — однозначная аналитическая функция в плоскости z с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси ($-\pi<\arg z<\pi$); значение $\ln z$ выбирается так, чтобы $-\pi<\mathrm{Im}\ln z<\pi$. Поведение $\mathrm{Ci}(z)$ вблизи разреза описывается предельными соотношениями:



Графики функций $y=\mathrm{ci}\,(x)$ и $y=\mathrm{si}\,(x)$.

$$\lim_{\eta\to 0}\mathrm{Ci}\,(x\pm i\eta)=\mathrm{Ci}\,(|z|)\pm\pi i,$$

$$x<0,\ \eta>0.$$

И. к. связан с *интегральной показательной функцией* $\mathrm{Ei}(z)$ соотношением

$$\mathrm{Ci}\,(z)=\frac{1}{2}\,[\mathrm{Ei}\,(iz)+\mathrm{Ei}\,(-iz)].$$

Иногда используется обозначение $\mathrm{ci}\,(x)\equiv\mathrm{Ci}\,(x)$.

См. также sici-*спираль*.

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968; [3] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [4] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М., 1963.

А. Б. Иванов.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ЛОГАРИФМ — специальная функция, определяемая для действительного x, $x\neq 1$, равенством

$$\mathrm{li}\,(x)=\int_0^x\frac{dt}{\ln t};$$

при $x>1$ подынтегральная функция имеет в точке $t=1$ бесконечный разрыв и И. л. понимается в смысле главного значения:

$$\mathrm{li}\,(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\ln t}+\int_{1+\varepsilon}^x\frac{dt}{\ln t}\right\}.$$

График И. л. см. на рис. при ст. *Интегральная показательная функция*. При малых x:

$$\mathrm{li}\,(x)\approx\frac{x}{\ln(1/x)}$$

И. л. представляется в виде ряда

$$\mathrm{li}\,(x)=C+\ln|\ln x|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln(x))^k}{k!k},$$
$$k>0,\quad x\neq 1,$$

где $C=0{,}5772\ldots$ — *Эйлера постоянная.*

Как функция комплексного переменного z:

$$\mathrm{li}\,(z)=C+\ln(-\ln z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln z)^k}{k!k}$$

есть однозначная аналитич. функция в плоскости комплексного переменного z с разрезами вдоль действительной оси от $-\infty$ до 0 и от 1 до $+\infty$ (мнимые части логарифмов берутся при этом в пределах от $-\pi$ до π). Поведение $\mathrm{li}(z)$ вблизи разреза $(1, +\infty)$ описывается соотношениями:

$$\lim_{\eta\to 0}\mathrm{li}\,(x\pm i\eta)=\mathrm{li}\,(x)\mp\pi i,\ \ x>1,\ \ \eta>0.$$

И. л. связан с *интегральной показательной функцией* $\mathrm{Ei}\ (x)$ соотношениями:

$$\mathrm{li}\,(x)=\mathrm{Ei}\,(\ln x),\ x<1;\quad \mathrm{Ei}\,(x)=\mathrm{li}\,(e^x),\ x<0.$$

Для действительного $x>0$ иногда используется обозначение:

$$\mathrm{Li}\,(x)=\begin{cases}\mathrm{li}\,(x)=\mathrm{Ei}\,(\ln x) & \text{при } 0<x<1,\\ \mathrm{li}\,(x)+\pi i=\mathrm{Ei}^*\,(\ln x) & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Лит. см. при ст. *Интегральный косинус.* *А. Б. Иванов.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ категории — объект U категории $\mathfrak{K}$, для к-рого основной функтор $H_u(X)=H_{\mathfrak{K}}(U, X)$ является вложением категории $\mathfrak{K}$ в категорию непустых множеств. Другими словами, объект U интегральный, если для каждого объекта $A\in Ob\mathfrak{K}$ множество $H_{\mathfrak{K}}(U, A)$ не пусто и для любых двух морфизмов $\alpha, \beta: A\to B$, $\alpha\neq\beta$, существует такой морфизм $\gamma: U\to A$, что $\gamma\alpha\neq\gamma\beta$. В категории непустых множеств каждый объект является интегральным. В полной подкатегории непустых алгебр нек-рого многообразия универсальных алгебр каждая свободная алгебра — И. о. В любой абелевой категории объект U является интегральным тогда и только тогда, когда он образующий. Если в категории каждая пара морфизмов с общими началом и концом имеет ядро, то образующий объект является интегральным. *М. Ш. Цаленко.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — отображение $x\to Ax$, когда закон соответствия A задается с помощью интеграла. И. о. наз. иногда интегральным преобразованием. Так, напр., для интегрального оператора Урысона (см. *Урысона уравнение*): $\varphi\to A\varphi$ закон соответствия A определяется интегралом (или оператор $\varphi\to A\varphi$ порождается интегралом)

$$A\varphi\,(t)=\int_D P\,(t,\ \tau,\ \varphi\,(\tau))\,d\tau,\quad t\in D,\tag{1}$$

причем D — заданное измеримое множество конечной меры Лебега в конечномерном пространстве; $P(t, \tau, u)$, $t, \tau\in D$, $-\infty<u<\infty$ — заданная измеримая функция. Предполагается, что функции P и φ удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование интеграла в (1) в смысле Лебега. Если функция $P(t, \tau, u)$ нелинейна относительно u, то (1) является примером нелинейного И. о. Если же $P(t, \tau, u)=K(t, \tau)\,u$, тогда (1) принимает вид

$$A\varphi\,(t)=\int_D K\,(t,\ \tau)\,\varphi\,(\tau)\,d\tau,\quad t\in D.\tag{2}$$

Оператор, порождаемый интегралом (2), или просто оператор (2), наз. линейным И. о., а функция K — ядром И. о.

Ядро K наз. ядром Фредгольма, если оператор (2), соответствующий ядру K, действует вполне непрерывно из заданного функционального пространства E в нек-рое другое функциональное пространство E_1. В этом случае сам оператор (2) наз. **интегральным оператором Фредгольма** из E в E_1.

Линейные И. о. часто рассматриваются в функциональных пространствах: $C(D)$ — непрерывных на ограниченном замкнутом множестве D функций и $L_p(D)$ — суммируемых на D со степенью p функций. В этом случае оператор (2) — оператор Фредгольма в $C(D)$ (т. е. из $C(D)$ в $C(D)$), если K непрерывно на $D \times D$ (такое ядро наз. **непрерывным**). Он является оператором Фредгольма в $L_2(D)$ (из $L_2(D)$ в $L_2(D)$), если ядро K измеримо на $D \times D$ и

$$\int_D \int_D |K(t, \tau)|^2 \, dt \, d\tau < \infty. \tag{3}$$

Такое ядро наз. **L_2-ядром**.

Сопряженный оператор к оператору (2) в комплексном функциональном пространстве $L_2(D)$ с ядром, удовлетворяющим условию (3), есть И. о.

$$A^*\varphi(t) = \int_D \overline{K(\tau, t)} \, \varphi(\tau) \, d\tau, \quad t \in D, \tag{4}$$

где черта означает переход к комплексно сопряженному значению. Если ядро K эрмитово (симметрично) (то есть $\overline{K(\tau, t)} = K(t, \tau)$), то соответствующий оператор Фредгольма (2) совпадает со своим сопряженным (4). Операторы, обладающие этим свойством, наз. **самосопряженными**. Оператор Фредгольма с симметричным ядром наз. **интегральным оператором Гильберта — Шмидта**.

Пусть $|t-\tau|$ обозначает расстояние между точками t и τ n-мерного евклидова пространства, $B(t, \tau)$ — ограниченная измеримая функция на $D \times D$, тогда ядро вида

$$K(t, \tau) = \frac{B(t, \tau)}{|t-\tau|^m}, \quad 0 < m < n, \tag{5}$$

наз. **ядром типа потенциала**, а И. о. (2) с таким ядром — **И. о. типа потенциала**; ядро (5) наз. также **полярным ядром**, или **ядром со слабой особенностью**, а соответствующий оператор (2) — **И. о. со слабой особенностью**.

Если функция $B(t, \tau)$ непрерывна на $D \times D$, то И. о. со слабой особенностью вполне непрерывен в пространстве $C(D)$, а если $B(t, \tau)$ — измеримая ограниченная функция на $D \times D$, то он вполне непрерывен в пространстве $L_2(D)$.

Если ядро K и m-мерное множество D таковы, что интеграл (2) не существует в смысле Лебега, но существует в смысле главного значения по Коши, то он наз. **m-мерным сингулярным интегралом**. Оператор, к-рый им порождается, наз. **m-мерным сингулярным И. о.**, или **одномерным** (при $m=1$) и **многомерным** (при $m>1$) **сингулярным И. о.**

Если линия D лежит на плоскости комплексного переменного t, то равенство

$$A\varphi(t) = \int_D \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} \, d\tau, \quad t \in D, \tag{6}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, порождает непрерывный И. о. $\varphi \to A\varphi$ в пространстве функций, удовлетворяющих условию Гёльдера, если D — простая замкнутая гладкая линия; и в пространстве $L_p(D)$, $1<p<\infty$, если D — ляпуновская линия. Оператор (6) наз. **сингулярным оператором Коши**.

Пусть на действительной оси заданы две измеримые по Лебегу функции φ и g. Если для почти всех

$t \in]-\infty, \infty[$ существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\tau)| \, |g(\tau - t)| \, d\tau,$$

то можно определить функцию

$$(g * \varphi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - t) \varphi(\tau) \, d\tau, \tag{7}$$

которая наз. сверткой g и φ. Если зафиксировать функцию g, то интеграл (7) определяет оператор

$$T\varphi(t) = (g * \varphi)(t), \tag{8}$$

который наз. И. о. (или интегральным преобразованием) свертки с ядром g. Если $g \in L_r(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ и $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} - 1$, то оператор (8) непрерывен из $L_q(-\infty, \infty)$ в $L_p(-\infty, \infty)$. При соответствующих предположениях И. о. свертки применяется как на полупрямой, так и на конечном отрезке.

Кроме указанных выше И. о., исследованы конкретные классы И. о., напр. интегральные преобразования Фурье, Лапласа, Бесселя, Меллина, Гильберта и др.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959; [2] Интегральные уравнения, М., 1968 (Справочная матем. б-ка); [3] Красносельский М. А. и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966; [4] Диткин В. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, М., 1961 (Справочная матем. б-ка); [5] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения..., 3 изд., М., 1968; [6] Михлин С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962; [7] Титчмарш Э. Ч., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.—Л., 1948; [8] Эдвардс Р., Функциональный анализ. Теория и приложения, пер. с англ., М., 1969.

Б. В. Хведелидзе.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СИНУС — специальная функция, определяемая для действительного $x > 0$ равенством

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2} - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt.$$

График И. с. см. на рис. при ст. *Интегральный косинус*. Иногда используют обозначение

$$\mathrm{si}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt \equiv \mathrm{Si}(x) - \frac{\pi}{2}.$$

Частные значения:

$$\mathrm{Si}(0) = 0, \quad \mathrm{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{si}(\infty) = 0.$$

Основные соотношения:

$$\mathrm{Si}(-x) = -\mathrm{Si}(x); \quad \mathrm{si}(x) + \mathrm{si}(-x) = -\pi;$$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{si}^2(t) \, dt = \frac{\pi}{2}; \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} \mathrm{si}(qt) \, dt = -\frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{q};$$

$$\int_0^{\infty} \sin t \, \mathrm{si}(t) \, dt = -\frac{\pi}{4}; \quad \int_0^{\infty} \mathrm{Ci}(t) \, \mathrm{si}(t) \, dt = -\ln 2,$$

где $\mathrm{Ci}(t)$ — *интегральный косинус*. При малых x:

$$\mathrm{Si}(x) \approx x.$$

Асимптотич. представление при больших x:

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} P(x) - \frac{\sin x}{x} Q(x),$$

где

$$P(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{x^{2k}},$$

$$Q(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)!}{x^{2k+1}}.$$

И. с. представляется в виде ряда

$$\mathrm{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3!3} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!\,(2k+1)} + \ldots \tag{*}$$

Как функция комплексного переменного z, $\mathrm{Si}(z)$, определяемая формулой (*),— целая функция z во всей плоскости z.

И. с. связан с *интегральной показательной функцией* $\mathrm{Ei}(z)$ соотношением:

$$\mathrm{si}(z)=\frac{1}{2i}[\mathrm{Ei}(iz)-\mathrm{Ei}(-iz)].$$

См. также sici-*спираль*.

Лит. см. при ст. *Интегральный косинус.* *А. Б. Иванов.*

ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МЕТОД — способ решения линейных дифференциальных уравнений при заданных краевых или начальных условиях, состоящий в переходе от данного уравнения к уравнению для интегрального преобразования искомой функции. Последнее уравнение может оказаться более простым. Пусть, напр., требуется найти решение уравнения

$$a_0(x)\frac{d^2u}{dx^2}+a_1(x)\frac{du}{dx}+a_2u=f(x) \qquad (1)$$

на конечном или бесконечном интервале (α, β) с краевыми условиями $u(\alpha)=u_\alpha$, $u(\beta)=u_\beta$. Если ядро $K(s, x)$ интегрального преобразования

$$\bar{u}(s)=\int_\alpha^\beta K(s, x)\,u(x)\,dx$$

удовлетворяет соотношению

$$\frac{d^2(a_0K)}{dx^2}-\frac{d(a_1K)}{dx}-a_2K=\lambda(s)K, \qquad (2)$$

где $\lambda(s)$ — функция s, то после умножения уравнения (1) на $K(s, x)$ и интегрирования по частям в пределах (α, β) получится уравнение

$$\bar{f}(s)-\left[a_0\left(K\frac{du}{dx}-u\frac{dK}{dx}\right)+(a_1-a_0')\,uK\right]\Bigg|_{x=\alpha}^{x=\beta}=\lambda(s)\,\bar{u}.$$

Выражая из него $\bar{u}(s)$ и применяя формулу обращения интегрального преобразования, можно найти $u(x)$. Аналогично И. п. м. применяется для дифференциальных уравнений с частными производными.

Таким образом, процесс решения дифференциального уравнения этим методом состоит из следующих этапов.

1) Выбор подходящего интегрального преобразования.

2) Умножение уравнения и граничных условий на ядро этого интегрального преобразования и интегрирование в подходящих пределах по переменной, по к-рой проводится интегральное преобразование.

3) При интегрировании в 2) используются соответствующие граничные (или начальные) условия для вычисления членов, возникающих от пределов интегрирования.

4) Решается полученное вспомогательное уравнение и находится интегральное преобразование искомой функции.

5) По формуле обращения определяется искомая функция.

Лит.: [1] Трантер К. Дж., Интегральные преобразования в математической физике, пер. с англ., М., 1956; [2] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., М.— Л., 1951. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ МЕТОД, метод полос,— метод решения систем дифференциальных уравнений с частными производными, основанный на приближенном сведении уравнений с частными производными к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Применим к уравнениям различных типов. Предложен А. А. Дородницыным [1] как развитие метода прямых, обобщенная форма И. с. м. с введением сглаживающих функций дана в [2], разработка и развитие метода — в [3].

Пусть имеется система дифференциальных уравнений с частными производными в дивергентном виде

$$\frac{\partial}{\partial x} P_i(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial y} Q_i(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k) = F_i(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k), \quad (1)$$
$$i=1, 2, \ldots, k,$$

где P_i, Q_i, F_i — заданные функции от независимых x, y и искомых u_1, $u_2, \ldots$, u_k переменных. Пусть решение системы (1) ищется в криволинейном прямоугольнике с границами $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=\Delta(x)$, на к-рых ставится $2k$ условий, из них k условий на границах $x=$ $=a$ и $x=b$. Если заранее функция $\Delta(x)$ неизвестна, то требуется одно дополнительное условие. При наличии на границе особых точек вместо соответствующих граничных условий используются условия регулярности.

В N-м приближении область интегрирования разбивается на N непересекающихся полос системой линий $y=y_n(x)=n\Delta(x)/N$, $n=1, \ldots, N$. Для каждого N выбирается замкнутая система из N линейно независимых функций $f_n(y)$. При умножении каждого исходного уравнения (1) на функции $f_n(y)$ и интегрировании по y поперек всех полос получают kN интегральных соотношений вида

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\Delta(x)} f_n(y)\, P\, dy - \Delta'(x)\, f_n(\Delta(x)\, P\Big|_{y=\Delta(x)} +$$
$$+ f_n(\Delta(x))\, Q\,|_{y=\Delta(x)} - f_n(0)\, Q(0) -$$
$$-\int_0^{\Delta(x)} f'_n(y)\, Q\, dy = \int_0^{\Delta(x)} f_n(y)\, F dy.$$

Подынтегральные функции P, Q, F аппроксимируются при помощи интерполяционных формул через их значения P_n, Q_n, F_n на границах полос; интегралы, входящие в интегральные соотношения, имеют вид

$$\int_0^{\Delta(x)} f_n(y)\, P dy \approx \Delta(x) \sum_{n=0}^{N} C_n P_n y_n(x),$$

где C_n — численные коэффициенты, зависящие от выбора интерполяционных формул и вида функций $f_n(y)$. В результате получается аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений по x относительно $K(N+1)$ значений искомых функций u_n на всех границах полос. Эта система замыкается k граничными условиями при $y=0$ и $y=\Delta(x)$.

Функции $f_n(y)$ выбираются достаточно произвольно. Применение в качестве $f_n(y)$ δ-функции $f_n(y)=\delta(y-y_n)$, $n=1, 2, \ldots, N$, приводит к методу прямых, в к-ром производные по y заменяются разностными выражениями, отвечающими выбранным интерполяционным формулам. При использовании ступенчатых функций

$$f_n(y) \begin{cases} 0 \text{ при } y < y_{n-1}, \\ 1 \text{ при } y_{n-1} \leqslant y \leqslant y_n, \\ 0 \text{ при } y > y_n \end{cases} \quad n=1, 2, \ldots, N,$$

говорят о простом И. с. м., где исходные уравнения интегрируются поперек каждой полосы. При этом выраженные исходной системой (1) законы сохранения запишутся для полос в виде следующих интегральных соотношений

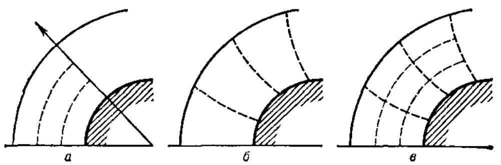
$$\frac{d}{dx}\int_{y_{n-1}}^{y_n} P\, dy - y'_n P(y_n) + y'_{n-1} P(y_{n-1}) + Q(y_n) - Q(y_{n-1}) =$$
$$= \int_{y_{n-1}}^{y_n} F dy.$$

Сходимость и погрешность И. с. м. исследовались для систем квазилинейных уравнений гиперболич. типа [4]. Здесь были установлены результаты, показывающие преимущество И. с. м. над методом прямых. В более поздних работах проводилось аналогичное исследование для уравнений эллиптич. типа.

К достоинствам И. с. м. относятся: возможность выбора интерполяционных формул и функций $f(y)$ с учетом поведения решения, точное интегрирование по одной из переменных (вследствие дивергентной формы записи исходных уравнений), простота вычислительного алгоритма, небольшой объем машинной памяти при расчетах на ЭВМ. В И. с. м. аппроксимируется интеграл: это повышает точность аппроксимации за счет уменьшения коэффициента остаточного члена; интеграл представляет собой более гладкую функцию, чем подинтегральная функция, что позволяет уменьшить число узлов интерполяции. В случае разрыва первого рода подинтегральной функции интеграл непрерывен. И. с. м. наиболее эффективен, когда решение с хорошей точностью получается при малом числе полос.

Проведением аппроксимаций по двум переменным И. с. м. обобщается на случай уравнений с тремя независимыми переменными. Аппроксимации по двум переменным можно проводить и в двумерном случае (при этом область интегрирования разбивается не на полосы, а на подобласти), тогда аппроксимирующая система будет системой нелинейных алгебраич. или трансцендентных уравнений. Элементы И. с. м. применяются в др. численных методах, напр. в *крупных частиц методе*.

И. с. м. наиболее приложим в газовой динамике, где с его помощью был решен цикл практически важных задач. При этом выделяют три схемы И. с. м.: 1) область интегрирования разбивается линиями, проходящими между поверхностью тела и ударной волной (рис. *а*);



а б в

2) область интегрирования разбивается линиями, проходящими между осью симметрии и граничной характеристикой (рис. *б*); 3) производится разбиение на подобласти двумя семействами пересекающихся линий (рис. *в*).

И. с. м. для расчета сверхзвукового обтекания носовой части затупленного тела с отошедшей ударной волной был разработан в [5], где впервые получено численное решение этой задачи в прямой постановке. Проведено решение этой задачи для самых общих случаев (тела разнообразной формы, пространственное обтекание, течения реального газа при наличии равновесных и неравновесных физико-химич. превращений и излучения, нестационарное движение, течение вязкого газа [6]). И. с. м. применялся для численного исследования потенциальных течений газа [7], для решения нек-рых смешанных задач: течение в дозвуковой и трансзвуковой части сопла [8]. Рассматривалось закритическое обтекание профиля под углом атаки с местной сверхзвуковой зоной [9]. И. с. м. рассчитывались сверхзвуковые конич. течения газа.

Широкое применение И. с. м. нашел при расчетах движения вязкого газа в рамках теории пограничного слоя. Для ламинарного несжимаемого случая было получено решение вплоть до точки отрыва [2]. Далее рассчитывался ламинарный пограничный слой в газе с учетом вдува или отсоса, излучения, теплопроводности. И. с. м. получено решение нестационарной задачи о точечном одномерном взрыве в газе с учетом противодавления [10], а также в газе с бесконечной проводимостью в присутствии магнитного поля и в горючем газе.

Лит.: [1] Дородницын А. А., в кн.: Тр. 3 Всесоюзного математического съезда, 1956, т. 3, М., 1958, с. 447—53; [2] его же, «Ж. прикл. механ. и техн. физ.», 1960, № 3, с. 111—18; [3] Белоцерковский О. М., Чушкин П. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 5, с. 731—59; [4] Бобков В. В., Крылов В. И., «Дифференциальные уравнения», 1965, т. 1, № 2, с. 230—43; [5] Белоцерковский О. М., «Докл. АН СССР», 1957, т. 113, в. 3, с. 509—12; [6] Белоцерковский О. М. и др., Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Теоретические и экспериментальные исследования, 2 изд., М., 1967; [7] Чушкин П. И., «Вычисл. математика», 1957, № 2, с. 20—44; [8] Алихашкин Я. И., Фаворский А. П., Чушкин П. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1963, т. 3, № 6, с. 1130—34 [9] Tai T. C., «J. AIAA», 1974, v. 12, p. 798—804; [10] Коробейников В. П., Чушкин П. И., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1966, т. 87, с. 4—34.

Ю. М. Давыдов.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ — операция отыскания *интеграла*. Под И. понимают также решение дифференциальных уравнений.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ — представление решений дифференциальных уравнений аналитич. формулами, использующими указанный априори запас функций и перечисленный заранее набор математич. операций.

Если в качестве функций допускаются элементарные функции и функции, входящие в уравнение, а под операциями понимаются конечные последовательности алгебраич. операций и операций взятия неопределенного интеграла (квадратуры) от допустимых функций, то говорят об интегрировании (т. е. решении) дифференциальных уравнений в квадратурах. Примером обыкновенного дифференциального уравнения, интегрируемого в квадратурах, служит *Бернулли уравнение*. Ж. Лиувилль (см. [1]) впервые указал уравнение, интегрирование к-рого в квадратурах невозможно. Так, решения уравнения

$$y''+xy=0 \qquad (*)$$

нельзя выразить через элементарные функции и интегралы от них (см. [2]). Обыкновенные дифференциальные уравнения удается проинтегрировать в квадратурах крайне редко. Наиболее глубокие результаты о возможности интегрирования в квадратурах получаются на основе восходящей к С. Ли (см. [3]) теории непрерывных групп преобразований (см. [4], [5]).

И. д. у. в з. ф. допускает привлечение *специальных функций*, представление решений в виде сходящихся рядов и т. д. Любое конкретное линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами интегрируется в замкнутой форме, если включить в допустимые конечное число функций (вообще говоря, специальных), составляющих фундаментальную систему решений этого уравнения. Например, если ввести *Бесселя функции*, то с их помощью записывается формула для общего решения уравнения (*). Таким образом, дифференциальные уравнения являются источником специальных функций, включение к-рых в число допустимых позволяет расширять класс уравнений, разрешимых в замкнутой форме. Однако проблема интегрирования в замкнутой форме нелинейного уравнения в общем случае не сводится к пополнению множества допустимых функций конечным числом специальных функций.

Для дифференциальных уравнений с частными производными формулы для решений удается получить лишь в отдельных специальных случаях (см., напр., *Д'Аламбера формула*). При отыскании формул для решений таких уравнений большое значение имеют групповые методы (см. [5]).

Лит.: [1] Liouville J., «J. math. pures et appl.», ser. 1, 1841, v. 6; [2] Капланский И., Введение в дифференциальную алгебру, пер. с англ., М., 1959; [3] Lie S., Scheffers G., Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Lpz., 1891; [4] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Хар., 1939; [5] Овсянников Л. В., Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосиб., 1962; [6] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [7] его же, Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966.

Н. Х. Розов.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ — один из способов вычисления интеграла, состоящий в представлении интеграла от выражения вида $u(x)dv(x)$ через интеграл от $v(x)du(x)$. Для определенного интеграла формула И. по ч. имеет вид

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b v(x)\,du(x) \qquad (1)$$

и справедлива в предположении, что функции $u(x)$ и $v(x)$ и их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на $a \leqslant x \leqslant b$.

Аналогом этой формулы для неопределенного интеграла является соотношение

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,du(x). \qquad (2)$$

Аналогом формулы (1) для кратных интегралов является соотношение

$$\int_D u\frac{\partial v}{\partial x_k}\,dx = \oint_\Gamma uv\cos(\widehat{x_k, n})\,ds - \int_D v\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx, \qquad (3)$$

где D — область в пространстве $\mathbb{R}^m$ с гладкой (или хотя бы кусочно гладкой) границей Γ, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $(\widehat{x_k, n})$ — угол между осью Ox_k и внешней нормалью к поверхности Γ. Формула (3) справедлива, напр., для непрерывных в $(D+\Gamma)$ функций $u(x)$ и $v(x)$ и их частных производных 1-го порядка. Если интегралы в (3) понимаются в смысле Лебега, то для справедливости этой формулы достаточно, чтобы $u(x)$ и $v(x)$ принадлежали *Соболева пространству* $u(x) \in W_p^1(D)$, $v(x) \in W_q^1(D)$ при любых $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant 1 + \frac{1}{m}$.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1—2, М., 1971—73; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, ч. 1—2, М., 1970; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1973.

В. А. Ильин, Т. П. Лукашенко.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОДСТАНОВКОЙ, замена переменного в интеграле,— один из способов вычисления интеграла, состоящий в преобразовании интеграла посредством перехода к другой переменной интегрирования. Для определенного интеграла от функции одной переменной формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \qquad (1)$$

и справедлива при следующих предположениях: $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, к-рый является множеством значений нек-рой функции $x = \varphi(t)$, определенной и непрерывной вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Аналогом формулы (1) для неопределенного интеграла является соотношение

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \qquad (2)$$

Если функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на нек-ром промежутке $\{t\}$, а функция $f(x)$ имеет первообразную на множестве всех значений функции $x = \varphi(t)$, то и функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ имеет первообразную на указанном промежутке, причем имеет место равенство (2).

В случае кратного интеграла Римана по ограниченной замкнутой m-мерной кубируемой области G аналогом формулы (1) является соотношение

$$\int_G f(x)\,dx = \int_{G'} f[\varphi(t)]\left|\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_m)}\right| dt, \qquad (3)$$

справедливое при следующих предположениях: функция $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ непрерывна в области G; преобразование $x_i=\varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $i=1, 2, \ldots, m$, взаимно однозначно переводит область G' в пространстве переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$, в область G в пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ функции $x_i=\varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ имеют в G' непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля *якобиан* $\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_m)}$.

Формула (3) справедлива и при более общих предположениях (не обязательно требовать непрерывности $f(x)$ в области G, а можно допустить обращение в нуль якобиана на множестве точек m-мерной меры нуль).

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1—2, М., 1971—73; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1—2, М., 1970; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, М., 1973. *В. А. Ильин.*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЕ — нахождение интеграла численными методами. И. ч. применяется, если подинтегральная функция задана приближенно (таблицей), или если она задана точно, то использование методов И. ч. быстрее приводит к получению результата с заданной точностью, чем использование точных методов, или, наконец, если использование точных методов невозможно, так как интеграл не выражается в известных функциях. Для И. ч. осуществляют построение *квадратурных формул* (в случае функций одного переменного) и *кубатурных формул* (для вычисления кратных интегралов). См. также *Интерполирование* в вычислительной математике.

ИНТЕГРИРУЕМАЯ СИСТЕМА — дифференциальная система размерности p на n-мерном дифференцируемом многообразии M^n, к-рая в окрестности каждой точки $x \in M^n$ обладает $(n-p)$-параметрич. семейством p-мерных интегральных многообразий. Часто в этом случае говорят о вполне интегрируемой дифференциальной системе; более точно она определяется следующим образом. Пусть в каждой точке $x \in M^n$ выделено нек-рое подпространство $D(x)$ размерности p касательного векторного пространства $T_x(M^n)$, так, что на M^n задана дифференциальная система, или распределение D класса C^2, $r \geqslant 1$ размерности p. Система D наз. вполне интегрируемой, если для любой точки $a \in M^n$ найдется система координат (U, φ), $x \in U$, $\varphi(x)=$ $=x^1, \ldots, x^n$, такая, что для любых постоянных c^j, $p<j\leqslant n$ многообразие $U_c=\{x \in U;\ x^j=c^j\}$ является интегральным подмногообразием, т. е. его касательное пространство в произвольной его точке x совпадает с $D(x)$. Аналитич. условия, необходимые и достаточные для этого, см. в ст. *Инволютивное распределение.*

Ю. Г. Лумисте.

ИНТЕГРИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ — см. *Интеграл.*

ИНТЕГРИРУЕМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — непрерывное неприводимое унитарное представление π локально компактной унимодулярной группы G в гильбертовом пространстве H такое, что для нек-рого ненулевого вектора $\xi \in H$ функция $g \to (\pi(g)\xi, \xi)$, $g \in G$, является интегрируемой относительно меры Хаара на G. В этом случае представление π — квадратично интегрируемое представление, причем существует такое плотное в H векторное подпространство $H' \subset H$, что функция $g \to (\pi(g)\xi, \eta)$, $g \in G$, интегрируема относительно меры Хаара на группе G для всех $\xi, \eta \in H'$. Если $\{\pi\}$ — элемент в дуальном пространстве $\hat{G}$ группы G, определенный классом унитарной эквивалентности представления π, и $\hat{G}_r$ — носитель регулярного представления группы G в пространстве $\hat{G}$, то $\{\pi\}$ — одновременно открытая и замкнутая точка в $\hat{G}_r$. *А. И. Штерн.*

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0 \qquad (1)$$

— функция $\mu=\mu(x, y)\not\equiv 0$, обладающая тем свойством, что уравнение

$$\mu(x, y)P(x, y)dx+\mu(x, y)Q(x, y)dy=0$$

является *дифференциальным уравнением в полных дифференциалах.* Напр., для линейного уравнения $y'+a(x)y=f(x)$, или $(a(x)y-f(x))dx+dy=0$, И. м. служит функция $\mu=\exp\int a(x)dx$. Если уравнение (1) в области D, где $P^2+Q^2\neq 0$, имеет гладкий общий интеграл $U(x, y)=C$, то оно имеет бесконечно много И. м. Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ имеют непрерывные частные производные в односвязной области D, где $P^2+Q^2\neq 0$, то в качестве И. м. можно взять любое частное (нетривиальное) решение уравнения с частными производными

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \qquad (2)$$

(см. [1]). Однако общего метода отыскания решений уравнения (2) не существует и поэтому фактическое нахождение И. м. для конкретного уравнения (1) удается лишь в исключительных случаях (см. [2]).

Лит.: [1] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 9 изд., М., 1966; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976. *Н. Х. Розов.*

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаками дифференциальных и интегральных операций. И.-д. у. включают и интегральные и дифференциальные уравнения.

Линейные И.-д. у. Пусть $f(x)$ — заданная функция,

$$L_x[U]\equiv\sum_{i=0}^{l}p_i(x)U^{(i)}(x),$$

$$M_y[U]\equiv\sum_{j=0}^{m}q_i(y)U^{(j)}(y)$$

— дифференциальные выражения с достаточно гладкими коэффициентами $p_i(x)$ и $q_i(y)$ на $[a, b]$, а $K(x, y)$ — известная функция, достаточно гладкая в квадрате $[a, b]\times[a, b]$. Уравнение вида

$$L_x[U]=\lambda\int_a^b K(x, y)M_y[U]dy+f(x) \qquad (1)$$

наз. линейным И.-д. у.; здесь λ — параметр. Если в И.-д. у. (1) функция $K(x, y)\equiv 0$ при $y>x$, то уравнение (1) наз. И.-д. у. с переменным пределом интегрирования: его можно записать в форме:

$$L_x[U]=\lambda\int_0^x K(x, y)M_y[U]dy+f(x). \qquad (2)$$

Для И.-д. у. (1) или (2) можно ставить задачу Коши (ищется решение, удовлетворяющее условиям $U^{(i)}\alpha=c_i$, $i=0, 1,\ldots, l-1$, где c_i — заданные числа, l — порядок выражения $L_x[U]$, а $\alpha\in[a, b]$) и различные граничные задачи (напр., задачу о периодических решениях). В ряде случаев (см. [3] — [4]) задачи для (1) или (2) можно упростить или даже свести соответственно к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода или уравнениям Вольтерра. Вместе с тем для И.-д. у. возможен ряд специфич. явлений, не характерных ни для дифференциальных, ни для интегральных уравнений.

Простейшее нелинейное И.-д. у. имеет вид:

$$U(x)=\lambda\int_a^b F(x, y, U(y), U'(y), \ldots, U^{(m)}(y))dy+f(x).$$

К исследованию этого уравнения применимы метод сжатых изображений, принцип Шаудера и другие методы нелинейного анализа.

Для И.-д. у. изучаются вопросы устойчивости решений, разложения по собственным функциям, асимптотика по малому параметру и др. В приложениях встречаются также И.-д. у. с частными производными и с кратными интегралами. Таковы, напр., уравнение Больцмана, уравнение Колмогорова — Феллера.

Лит.: [1] Volterra V., Leçons sur les équations intégrales et les équations intégrodifférentielles, P., 1913; [2] его же, Математическая теория борьбы за существование, пер. с франц., М., 1976; [3] Быков Я. В., О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений, Фр., 1957; [4] Вайнберг М. М., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, с. 5—37; [5] Филатов А. Н., Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, Таш., 1974. *В. А. Треногин.*

ИНТЕГРО-СТЕПЕННОЙ РЯД — ряд, содержащий степени переменной функции под знаком интеграла. Пусть $K(s, t_1, \ldots, t_k)$ — функция непрерывная по совокупности переменных в кубе $[a, b]^{k+1}$ и пусть $U(s)$ — произвольная непрерывная на $[a, b]$ функция. Выражение

$$U^{\alpha_0}(s)\int_a^b \ldots \int_a^b K(s, t_1, \ldots, t_k)\, U^{\alpha_1}(t_1)\ldots$$
$$\ldots U^{\alpha_k}(t_k)\, dt_1 \ldots dt_k,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — неотрицательные целые числа и $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k=m$, наз. **интегро-степенным членом** степени m относительно U. Два интегростепенных члена степени m принадлежат к одному типу, если они отличаются лишь своими ядрами K. Сумма конечного числа интегро-степенных членов степени m, принадлежащих различным типам, наз. **интегро-степенной формой** степени m относительно функции U и обозначается $W_m\left(\begin{smallmatrix} s \\ U \end{smallmatrix}\right)$. Пусть $|W|_m\left(\begin{smallmatrix} s \\ U \end{smallmatrix}\right)$ — интегро-степенная форма, в к-рой все ядра K заменены на $|K|$, пусть

$$\tilde{U}=\max_{[a, b]}|U(s)|, \quad \tilde{W}_m=\max_{[a, b]}|W|_m\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\left|W_m\begin{pmatrix} s \\ U \end{pmatrix}\right|\leqslant \tilde{W}_m\tilde{U}^m.$$

Выражение

$$W_0\begin{pmatrix} s \\ U \end{pmatrix}+W_1\begin{pmatrix} s \\ U \end{pmatrix}+W_2\begin{pmatrix} s \\ U \end{pmatrix}+\ldots$$

наз. **интегро-степенным рядом**. Если сходится числовой ряд $\tilde{W}_0+\tilde{W}_1\tilde{U}+\tilde{W}_2\tilde{U}^2+\ldots$, то И.-с. р. наз. **регулярно сходящимся**. В этом случае И.-с. р. сходится абсолютно и равномерно и сумма его непрерывна на $[a, b]$.

Аналогично вводится И.-с. р. от нескольких функциональных аргументов, а также И.-с. р., в к-рых вместо $[a, b]$ фигурирует нек-рое замкнутое ограниченное множество конечномерного евклидова пространства. И.-с. р.— частный случай более общего понятия абстрактных степенных рядов.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., О фигурах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидов вращающейся однородной массы жидкости. Собр. соч., т. 4, М., 1959; [2] Schmidt E., «Math. Ann.», 1908, Bd 65, S. 370—99; [3] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969. *В. А. Треногин.*

ИНТЕРВАЛ — 1) см. *Интервал и сегмент.* 2) И. **пространства-времени** — величина, характеризующая связь между двумя событиями, разделенными пространственным расстоянием и промежутком времени. В специальной теории относительности квадрат И. равен

$$s^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2,$$

где c — скорость света, x_i, y_i, z_i — пространственные координаты, t_i — соответствующие моменты времени (подробнее см. *Минковского пространство*).

В общей теории относительности рассматривается И. между двумя бесконечно близкими событиями:

$$ds=\sqrt{-g_{ik}\,dx^i\,dx^k},$$

где dx^i — бесконечно малые разности координат двух событий, g_{ik} — метрический тензор. *А. Б. Иванов.*

ИНТЕРВАЛ И СЕГМЕНТ — простейшие множества точек на прямой. Интервалом (или промежутком) наз. множество точек прямой, заключенных между фиксированными точками A и B, причем сами точки A и B не причисляются к интервалу. Сегментом (или отрезком) наз. множество точек прямой, лежащих между точками A и B, к к-рому присоединены и сами эти точки. Термины «интервал» и «сегмент» применяются также для обозначения соответствующих множеств действительных чисел: интервал состоит из чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a<x<b$, а сегмент — из чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x\leqslant b$. Интервал обозначается (a, b), иногда $]a, b[$, а сегмент $[a, b]$.

Термин «интервал» употребляется также в более широком смысле для обозначения произвольного связного множества на прямой. В этом случае к интервалам относятся собственно интервал (a, b), бесконечные, или несобственные, интервалы $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, сегмент $[a, b]$ и полуинтервалы $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$. При этом круглая скобка обозначает, что соответствующий конец интервала не принадлежит к рассматриваемому множеству, а квадратная — что принадлежит. *БСЭ-3.*

Более общим является понятие интервала в частично упорядоченном множестве. Интервалом $[a, b]$ здесь наз. совокупность всех таких элементов x данного частично упорядоченного множества, к-рые удовлетворяют неравенству $a\leqslant x\leqslant b$. Интервал частично упорядоченного множества, состоящий в точности из двух элементов, наз. простым. *Л. А. Скорняков.*

ИНТЕРВАЛ СХОДИМОСТИ степенного ряда — интервал действительных значений переменного, обладающий тем свойством, что в каждой точке этого интервала *степенной ряд* сходится, а в каждой точке, не принадлежащей к этому интервалу и не являющейся его концом,— расходится. *БСЭ-3.*

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА для неизвестного истинного значения скалярного параметра вероятностного распределения — интервал, принадлежащий множеству допустимых значений параметра, границы к-рого суть функции от результатов наблюдений, подчиняющихся данному распределению. Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P_\theta)$, $\theta\in\Theta$, Θ — интервал на действительной прямой, причем истинное значение параметра θ неизвестно. Интервал $(a_1(X), a_2(X))\subset\Theta$, границы к-рого являются функциями от подлежащего наблюдению значения случайной величины X, наз. И. о., или доверительным интервалом для θ, число

$$p=\inf_{\theta\in\Theta} \mathsf{P}\{a_1(X)<\theta<a_2(X)\mid\theta\}$$

наз. коэффициентом доверия этого доверительного интервала, а величины $a_1(X)$ и $a_2(X)$ — нижним и верхним доверительными пределами соответственно. Понятие И. о. распространяется на более общий случай, когда требуется оценить нек-рую функцию или только одно ее значение, зависящую от параметра θ.

Пусть на множестве $T\subset\mathbb{R}^1$ задано семейство функций

$$u(\theta, \cdot)=(u_1(\theta, \cdot),\ u_2(\theta, \cdot), \ldots, u_k(\theta, \cdot))\colon\ T\to\mathfrak{U}\subset\mathbb{R}^k,$$

$$\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_m)\in\Theta\subset\mathbb{R}^m,$$

и пусть по реализации случайного вектора $X=(X_1, \ldots, X_n)$, принимающего значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P_\theta)$, $\mathfrak{X}\subset\mathbb{R}^n$, $\theta\in\Theta$, требуется оценить функцию $u(\theta, \cdot)$, отвечающую неизвестному истинному значению параметра θ. Каждому $t\in T$ в $\mathfrak{U}$ отвечает множество $B(t)$, являющееся образом множества Θ при отображении $u(\cdot, t): \Theta \to B(t) \subset \mathfrak{U}$. По определению, множество $C(X, t) \subset B(t)$ называется **доверительным множеством** для значения $u(\theta, t)$ функции $u(\theta, \cdot)$ в точке t, $t \in T$, имеющим **доверительную вероятность**

$$\mathsf{P}\{u(\theta, t) \in C(X, t) \mid \theta\} = p(\theta, t)$$

и **коэффициент доверия**

$$p(t) = \inf_{\theta \in \Theta} p(\theta, t).$$

Совокупность всех доверительных множеств $C(X, t)$ образует в $\mathfrak{U}$ **доверительную зону** $C(X)$ для функции $u(\theta, \cdot): T \to \mathfrak{U}$, имеющую **доверительную вероятность**

$$\mathsf{P}\{C(X) \ni u(\theta, \cdot): T \to \mathfrak{U} \mid \theta\} = \tilde{p}(\theta)$$

и **коэффициент доверия**

$$p = \inf_{\theta \in \Theta} \tilde{p}(\theta).$$

Множества типа $C(X, t)$ и $C(X)$ наз. И. о. для одного значения $u(\theta, t)$ функции $u(\theta, \cdot)$ в точке t и самой функции $u(\theta, \cdot)$ соответственно.

Существует несколько подходов к построению И. о. для неизвестных параметров распределений. Наиболее распространенными являются *бейесовский подход*, основанный на теореме Бейеса, метод Фишера, связанный с введением *фидуциальных распределений* (о методе Фишера см. [3] — [5]), *Неймана метод доверительных интервалов* ([5], [8], [9]) и метод, предложенный Л. Н. Большевым [6].

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Fisher R. A., Statistical Methods and Scientific Inferense, N. Y. — L., 1973; [3] Бернштейн С. Н., «Изв. АН СССР». Сер. матем.», 1941, т. 5, с. 85—93; [4] Большев Л. Н., Комментарии к статье О «доверительных» вероятностях Фишера, в кн.: Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964, с. 566—9; [5] Neyman У., «J. Operat. Res. Soc. Japan», 1961, v. 3, № 4, p. 145—154; [6] Большев Л. Н., «Теория вероят. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 187—92; [7] Большев Л. Н., Логинов Э. А., «Теория вероят. и ее примен.», 1966, т. 11, в. 1, с. 94—107; [8] Neyman J., «Biometrika», 1941, v. 32, № 2, p. 128—150; [9] его же, «Phil. Trans. Roy. Soc. London», 1937, v. 236, p. 333—80. *М. С. Никулин.*

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ — теория, предназначенная для учета ошибок округления при проведении расчетов на цифровых вычислительных машинах (ЦВМ). Так как точное представление чисел невозможно в машине с конечной разрядной сеткой, то результат каждого достаточно сложного расчета содержит нек-рую ошибку, обусловленную погрешностями округлений входных данных и промежуточных результатов. Для учета этой ошибки можно каждую величину представить парой чисел, к-рые ограничивают ее снизу и сверху и имеют точное представление в ЦВМ. Таким образом, каждая величина заменяется нек-рым, содержащим ее интервалом. При выполнении арифметич. действий новый интервал вычисляется с помощью специальных операций.

Пусть G — множество интервалов $\{[a, b]\}$. Элементарные арифметич. операции над интервалами определяются следующим образом:

$$I * J = \{x * y \mid x \in I,\ y \in J\}, \quad I,\ J \in G,$$

где $* \in \{+, -, \cdot, /\}$. Деление возможно лишь в том случае, если интервал, являющийся делителем, не содержит нуля. Множество G образует полугруппу по сложению и умножению. Имеют место следующие равенства:

$I + (J + K) = (I + J) + K$ ассоциативность сложения,

$I \cdot (J \cdot K) = (I \cdot J) \cdot K$ ассоциативность умножения,

$I + J = J + I$ коммутативность сложения,

$I \cdot J = J \cdot I$ коммутативность умножения.

Нулем и единицей служат соответственно интервалы $\mathbf{0}=[0, 0]$, $\mathbf{1}=[1, 1]$. Особенностью этой алгебраич. структуры является то, что обратные элементы как по сложению, так и по умножению определяются не единственным образом, т. е. уравнения (относительно X) $I+X=J$, $I \cdot X=J$ имеют, вообще говоря, не единственное решение. Кроме того, не выполняется закон дистрибутивности, напр.

$$[1, 2]\cdot([1, 2]-[1, 2])=[1, 2]\cdot[-1, 1]=[-2, 2],$$

тогда как

$$[1, 2]\cdot[1, 2]-[1, 2]\cdot[1, 2]=[1, 4]-[1, 4]=[-3, 3].$$

Имеет место лишь субдистрибутивность:

$$I\cdot(J+K)\subseteq I\cdot J+I\cdot K.$$

Операции над интервалами монотонны по включению. Если $I\subset K$, $J\subset L$, то

$$I+J\subset K+L, \quad I-J\subset K-L, \quad I\cdot J\subset K\cdot L, \quad I/J\subset K/L.$$

В множестве G вводится топология с помощью метрики $\rho(I, J)=\max(|c-a|, |d-b|)$, $I=[a, b]$, $J=[c, d]$, и частичная упорядоченность $I<J$, если $b\leqslant c$, и $I=J$, если $a=c$, $b=d$.

Однозначное отображение G в G наз. **интервальной функцией**. Обычным образом вводится понятие непрерывности функции. Определяется производная интервальной функции, определенный и неопределенный интегралы.

И. а. успешно применяется при решении нек-рых задач. Однако применение этого метода значительно увеличивает объем работы (более чем вдвое), требует вдвое больше памяти и времени счета. Кроме того, в достаточно больших задачах интервал, содержащий окончательный ответ часто бывает настолько большим, что практически не дает решения задачи. Для преодоления последней трудности развивают И. а. со структурами теории вероятностей (см. [3]).

Лит.: [1] Moore R. E., Interval Analysis, 1966; [2] Хемминг Р. В., Численные методы, пер. с англ., М., 1968; [3] Interval Mathematics, N.Y., 1975 (Lect. Notes Computer Sience, v. 29). *В. В. Поспелов.*

ИНТЕРКВАНТИЛЬНАЯ ШИРОТА — расстояние между нижней и верхней *квантилями* одинакового уровня. Пусть $F(x)$ — строго монотонная функция непрерывного распределения и пусть p — произвольное число из интервала $0<p<{}^1/_2$. И. ш. уровня p определяется как разность $x_{1-p}-x_p$, где x_p и x_{1-p} — решения уравнений $F(x_p)=p$ и $F(x_{1-p})=1-p$ соответственно. И. ш. определенным образом подобранного уровня p используется в математической статистике и теории вероятностей для характеризации рассеяния распределения вероятностей. Напр., разность $x_{0,75}-x_{0,25}$, отвечающая значению $p=0{,}25$, носит название **интерквартильной широты**, и в случае нормального распределения она равна $1{,}349\ \sigma$ (σ — естественная мера рассеяния, называемая квадратичным отклонением); половину интерквартильной широты наз. *вероятным отклонением*. Если $p={}^1/_6$ и $p={}^1/_{10}$, то И. ш. наз. **интерсекстильной** и **интердецильной** соответственно. *Л. Н. Большев.*

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ, интерполяция, — в простейшем, классическом смысле — конструктивное восстановление (быть может, приближенное) функции определенного класса по известным ее значениям или значениям ее производных в данных точках.

Пусть даны $n+1$ точек $\{x_k\}_{k=0}^n$ сегмента $\Delta=[a, b]$, причем $a\leqslant x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n\leqslant b$, и набор из $n+1$ чисел $\{y_k\}_{k=0}^n$ (не обязательно различных). Пусть известно, что нек-рая функция $f(x)$, принадлежащая тому или иному фиксированному классу K функций, определенных во всяком случае на Δ (напр., $f\in\pi_n$,

где π_n — множество всех алгебраич. многочленов степени $\leqslant n$, или $f \in C^{n+1}(\Delta)$), удовлетворяет системе соотношений:

$$f(x) \in K;\ f(x_k) = y_k,\ k = 0,\ 1, \ldots, n. \qquad (A)$$

Точки x_k, в к-рых задаются значения $f(x_k) = y_k$, наз. узлами интерполяции, или полюсами интерполяции для f. Естественно возникли главным образом из потребностей приближенных вычислений следующие две задачи, к-рые и явились отправными моментами развития всей теории И. А именно, спрашивается, как, обладая перечисленными выше сведениями (А) относительно f, можно с определенной точностью получить информацию: 1) о поведении $f(x)$ на интервалах $(x_{k-1},\ x_k)$, $k = 1,\ 2, \ldots, n$, то есть между (лат. inter) полюсами x_k, $k = 0,\ 1, \ldots, n$, и 2) вне (лат. extra) сегмента $[x_0,\ x_n]$, содержащего все полюсы $\{x_n\}_{k=0}^{n}$? Упомянутые здесь лат. слова inter и extra привели соответственно к образованию терминов в случае 1) задачи интерполирования (или интерполяции) функции f и в случае 2) задачи экстраполирования (или экстраполяции) функции f, к-рые впоследствии слились в одну проблему интерполирования (А).

Задача (А), понимаемая как задача точного восстановления функции, имеет единственное решение, напр. в классе $K = \pi_n$. Ее решением в π_n является интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n^f(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_{n+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{n-1})(x_k-x_{n+1})\ldots(x_k-x_n)}.$$

Однако, если $f(x)$ принадлежит классу, в каком-то смысле «более обширному», чем π_n, то интерполяционная задача (А), вообще говоря, не имеет единственного решения. Тем не менее многочлен $L_n^f(x)$ в нек-рой мере позволяет судить о поведении $f(x)$ на Δ, если считать, что

$$f(x) \approx L_n^f(x), \quad x \in \Delta. \qquad (1)$$

В связи с этим возникает потребность в оценке погрешности

$$R_n^f(x) = f(x) - L_n^f(x)$$

для $x \in \Delta$, к-рая во многом зависит от того, какому классу функций K принадлежит $f(x)$, другими словами, $R_n^f(x)$ зависит от наперед известных свойств, к-рыми обладает $f(x)$. Напр., если $K = C^{n+1}(\Delta)$, то для задачи (А) остаточный член имеет вид

$$R_n^f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} A(x),$$

где $\alpha < \xi < \beta$, а

$$A(x) = \prod\nolimits_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Здесь через α и β обозначены соответственно наименьшее и наибольшее из чисел x_0, x_n и x. Приведенная формула остаточного члена принадлежит О. Коши (A. Cauchy, см. [3]). Величина $R_n^f(x)$ во многом зависит от характера распределения и числа узлов интерполяции $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ на Δ. При этом естественно предположить, что чем больше узлов интерполяции x_k будет взято и чем «равномерней» они будут расположены на Δ, тем «точнее» будет выполняться соотношение (1). Эти соображения в свою очередь приводят к еще более важной интерполяционной задаче, тесно примыкающей к проблеме (А).

Пусть $f(x)$ принадлежит классу функций K, определенных на Δ, и таких, что $\pi_n \neq K$ при $\forall n$, $n = 0,\ 1, \ldots$. Предположим, что множество узлов интерполяции $\{x_k\} \subset \Delta$, $x_k \neq x_j$ при $k \neq j$, счетно, и задана последовательность чисел $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$. Спрашивается, как по имеющимся данным

$$f(x) \in K;\ f(x_k) = y_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (Б)$$

восстановить $f(x)$? Поставленная задача в общем случае далеко не всегда разрешима и требует ряда уточнений, но это будет сделано несколько позже, а сейчас укажем только абрис одного весьма естественного и важного подхода к решению проблемы (Б). Обычно вначале решается «усеченная» задача (А):

$$f(x_{k_j}) = y_{k_j},\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1,$$

в классе π_n. Пусть $L_n^f(x)$ — интерполяционный полином, являющийся решением этой усеченной задачи и записанный, например, в виде многочлена Лагранжа. Затем рассматривается возможность осуществления в том или ином смысле предельного перехода $L_n^f(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ (что равносильно, в частности, исследованию вопроса о стремлении к нулю остаточного члена $R_n^f(x)$ при $n \to \infty$ в рассматриваемом смысле). Приведенный эскиз схемы решения задачи (Б) лежит в основе теории сходимости (и расходимости) *интерполяционных процессов*; он является одним из основных методов решения задач интерполирования и имеет приложения не только в различных разделах чистой математики (напр., в теории чисел, см. [3]), но и в методах вычислений (см. *Интерполирование* в вычислительной математике, а также [1]).

В последующем, наряду с интерполяционными задачами рассмотренного здесь вида, определяемыми простейшими функционалами $f(x_k)$, стали исследоваться и другие, в к-рых, напр., задаются значения производных $f^{(m)}(x_k)$, $m=0,\ 1, \ldots, n_k$, или иные более сложные функционалы. При их решении стали применяться интерполяционные процессы, в к-рых в роли отправного интерполирующего класса вместо класса π_n используются другие множества функций, напр. классы T_n тригонометрич. полиномов степени $\leqslant n$, классы рациональных функций $\pi_{m,n} = p_m/q_n$, где $p_m \in \pi_m$, а $q_n \in \pi_n$ и $q_n \not\equiv 0$, классы целых функций специального вида и т. д. См. также *интерполяционная формула*.

Проблема И. в своей общей постановке заключается в следующем. Пусть X и Y — два непустых множества; задано семейство отображений $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, $f_\alpha : X \to Y$, $\forall \alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Если $\{y_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, — некоторый заданный набор элементов (не обязательно различных) множества Y, то естественно возникает задача об отыскании множества всех $x \in X$, удовлетворяющих следующей системе равенств

$$(f_\alpha)(x) = y_\alpha, \quad \forall \alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A}. \qquad (В)$$

Вообще говоря, не для всякого априори заданного набора элементов $\{y_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, задача (В) обязана иметь решения x, $x \in X$. Поэтому сформулированная проблема требует ряда уточнений своей постановки. Эти уточнения состоят в следующем.

I. Выяснить, каково множество $E = E(X;\ f_\alpha)$ всех наборов $\{y_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, для к-рых система уравнений (В) (быть может, бесконечная) имеет хотя бы одно решение x, $x \in X$. Другими словами, требуется дать конструктивное описание множества E всех допустимых наборов $\{y_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, для заданного фиксированного семейства отображений $\{f_\alpha\}$, $x \in \mathfrak{A}$, для к-рых система (В) непротиворечива в X.

II. Пусть $\{y_\alpha\}, \alpha \in \mathfrak{A}$, — фиксированный допустимый набор элементов из Y (т. е. принадлежащий множеству E из пункта I) задачи (В); требуется найти множество всех решений x, $x \in X$, системы (В).

При решении задач I и II особое значение имеют ответы на следующие вопросы более частного характера.

III. Каково подмножество X_1, $X \subset X$, на к-ром система уравнений (В) имеет единственное решение x, $x \in X_1$, для каждого допустимого для X_1 набора $\{y_\alpha\}$, $\{y_\alpha\} \in E\{f_\alpha;\ X_1\}$?

IV. Пусть E_1 — некоторое подмножество E, определяемое обычно заданием лишь некоего ограничительного свойства. Требуется дать конструктивную характеристику множества решений x, $x \in X$, системы (B) при условии, что правые части в (B) «пробегают» все E_1.

Задание множества X, Y и семейства отображений $\{f_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}(f_\alpha : X \to Y$ при $\forall\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A})$ в совокупности с сформулированными вопросами I и II (и обычно присоединяемым к ним III, а иногда и IV) определяют интерполяционную задачу (B). Класс задач описанного вида иногда наз. классом прямых задач интерполирования.

Каждый в отдельности из перечисленных выше пунктов I, II, III и IV представляет и сам по себе научный интерес. Пункт I имеет «пограничный характер»: им занимаются теория чисел, функциональный анализ, теория функций и др. Пусть, напр., x является действительным числом, $x \in \mathbb{R}$, и $\{x\}$ — его дробная часть. Семейство отображений $f_n : X \to Y$, $n \in N$, задается следующим образом: $X \subset \mathbb{R}$, $Y = [0,\ 1)$, $f_n(x) = \{x^n\}$, $n = 1,\ 2, \ldots$, и рассматривается следующая конкретизация интерполяционной задачи (B):

$$(f_n)\ (x) = \{x^n\} = y_n, \quad n = 1,\ 2, \ldots \tag{2}$$

Для нек-рых подмножеств X, $X \subset \mathbb{R}$, пункт I задачи (2) в какой-то мере исследован, но в целом проблема (2) трудна: до сих пор (1978), напр., нет ответа на вопрос о распределении дробных долей $\{e^n\}$ степени числа e, что является весьма частным подвопросом пункта I задачи (2). Связь между вопросом I и проблемами базисности системы элементов в различных функциональных пространствах отмечались, напр., в [9].

Вопрос II самый старый в теории И., он лежит у истоков всей теории И. и связан с именами И. Ньютона (I. Newton), Ж. Лагранжа (J. Lagrange), Н. Абеля (N. Abel), Ш. Эрмита (Ch. Hermite) и др. До 20 в. задачи I, II и IV почти не рассматривались, а решение задачи II, как правило, носило формальный характер.

Пункт III тесно примыкает к пункту II, но представляет интерес еще и потому, что во многих задачах он эквивалентен проблеме полноты, а иногда и базисности различных систем элементов $\{f_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, в соответствующих функциональных пространствах (полнота обычно устанавливается с помощью критерия С. Банаха (S. Banach), в к-ром доказана эквивалентность проблемы полноты нек-рой задаче единственности).

Важным примером исследований, относящихся к пункту IV, являются задачи, посвященные изучению классов функций, принимающих целые значения на заданном множестве точек (напр., $F(n)$ или $F(q^n)$, $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, являются целыми числами). Эта область особенно бурно развивалась после получения Д. Пойа (G. Polya) следующего результата: если целая функция $F(z)$ экспоненциального типа σ, $\sigma < \ln 2$, такова, что ее значения $F(n)$, $\forall n$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, являются целыми числами, то $F(z)$ — полином. Константа $\ln 2$ в приведенной теореме точная, ибо функция $F(z) = 2^z = e^{z \ln 2}$ является целой экспоненциального типа $\sigma = \ln 2$, отлична от многочлена и принимает в точках $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ целые значения (см., напр., [5], [10]).

В том случае, когда в задаче (B) множество X является топологич. пространством и редуцированная в каком-то смысле задача (B) имеет сравнительно простое решение x^*, одним из методов ее решения является интерполяционный процесс, при к-ром исследуется сходимость решений x^* к решению x системы (B). О частном виде подобного рода процессов упоминалось выше. Однако во многих случаях задачи типа (B) эффективно решаются функциональными методами (см., напр., [10]).

Помимо прямых интерполяционных проблем определенный интерес представляют **обратные задачи интерполирования**. Основное содержание исследований в этом направлении состоит в следующем. Заданы непустые множества X и Y и нек-рый класс F семейств отображений $\{\{f_\alpha\}, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, действующих из X в Y. Пусть $M = \{\{y_\alpha\}, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — некоторая совокупность наборов $\{y_\alpha\}$ элементов из множества Y. Задача состоит в нахождении необходимых и достаточных условий, к-рым должен удовлетворять подкласс F_M, $F_M \subset F$, для того, чтобы существовало семейство $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \in F_M$, обладающее следующим свойством: множество $\{f_\alpha(x), \alpha \in \mathfrak{A}\}$ совпадает с M (или $\subset M$, или $\supset M$), когда переменная x пробегает всю совокупность значений X. Выбор F и M тесно между собой связан. Поэтому в исследованиях, относящихся к разделу обратных задач И., обычно пара (F, M) естественным образом составляет единое целое. В качестве примера обратной задачи описанного здесь вида возьмем одну из формулировок из круга вопросов, примыкающих к известной интерполяционной **проблеме Неванлинны — Пика**. Пусть $\{z_k\}$ — последовательность точек открытого единичного круга $|z| < 1$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Каждой функции $x(z)$ из класса H^∞ (H^∞ — класс функций, аналитических и ограниченных в круге $|z| < 1$) ставится в соответствие последовательность ее значений в точках z_k:

$$S(x) = \{f_k(x) = x(z_k)\}_{k=1}^{\infty}.$$

Такимобразом, задан нек-рый вид F отображений $X = H^\infty$ в $Y = \mathbb{C}$. Пусть в качестве M берется пространство l^∞ (множество всех ограниченных последовательностей комплексных чисел $c = (c_1, c_2, \ldots)$ с нормой $\|c\| = \sup_k |c_k|$).

В рассматриваемом случае обратная задача конкретизируется следующим образом: требуется дать описание множества всех последовательностей точек $\{z_k\}$ единичного круга $|z| < 1$ (т. е. класса $F_M = F_{l^\infty}$ отображений специального вида $f_k(x) = x(z_k)$), обладающих следующим свойством: оператор $S(x)$ отображает все H^∞ на l^∞. Последовательности $\{z_k\}$, обладающие указанными качествами, наз. **интерполяционными**. Таким образом, множество всех интерполяционных последовательностей $\{z_k\}$ и определяет в данной ситуации класс $F_M = F_{l^\infty}$. Ответ на поставленный вопрос дает **теорема Карлесона**: для того чтобы последовательность точек $\{z_k\}$ открытого единичного круга $|z| < 1$ была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовало $\delta > 0$ такое, что

$$\prod_{j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \bar{z}_j z_k} \right| > \delta, \quad k = 1, 2, \ldots$$

(так наз. **условие разделения**). Обратные задачи И., типа решенной Л. Карлесоном (L. Carleson), рассматривались и для других классов функций и соответствующих пространств числовых последовательностей (см., напр., [9], [12], [13], [14]).

См. также *Абеля — Гончарова проблема.*

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 1, 3 изд., М., 1966, т. 2, 2 изд., М., 1962; [2] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, М.—Л., 1952; [3] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [4] Уолш Дж.-Л., Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, пер. с англ., М., 1961; [5] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [6] Nörlund N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, B., 1924; [7] его же, Leçons sur les séries d'interpolation, P., 1926; [8] Whittaker J. M., The interpolatory function theory, Camb., 1935; [9] Duren P. L., Theorie of H^p spaces, N.Y.—L., 1970; [10] Казьмин Ю. А., Методы интерполяции аналитических функций и их приложения, Докт. дисс., М., 1972; [11] Коробейник Ю. Ф., «Матем. сб.»,

1975, т. 97, № 2, с. 193—229; т. 98, № 1, с. 3—26; [12] Кабайла В., «Литов. матем. сб.», 1963, т. 3, № 1, с. 141—47; [13] Седлецкий А. М., «Докл. АН СССР», 1973, т. 208, № 6, с. 1293—95; [14] Шведенко С. В., «Матем. заметки», 1977, т. 21, № 4, с. 503—08.
Ю. А. Казьмин.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ в вычислительной математике — способ приближенного или точного нахождения какой-либо величины по известным отдельным значениям этой же или других величин, связанных с ней. На основе И. построен ряд приближенных методов решения математич. задач.

Наибольшее значение в вычислительной математике имеет задача построения способов *интерполирования* функций. Интерполяция функционалов и операторов также широко используется при построении приближенных методов.

Приближенное представление и вычисление функций. И. функций рассматривается как один из способов их приближения. И. функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ по значениям ее в узлах x_k сетки $\Delta_n=\{a\leqslant x_0<x_1<\ldots<x_n\leqslant b\}$ означает построение другой функции $L_n(x)\equiv L_n(f; x)$ такой, что $L_n(x_k)=f(x_k)$, $k=0, 1,\ldots, n$. В более общей постановке задача И. функции $f(x)$ состоит в построении $L_n(x)$ не только из условия совпадения значений функций $L_n(x)$ и $f(x)$ на сетке Δ_n, но и из требования совпадения в отдельных узлах их производных до какого-то порядка или нек-рых других соотношений, связывающих $f(x)$ и $L_n(x)$.

Обычно $L_n(x)$ строится в виде

$$L_n(x)=\sum\nolimits_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(x),$$

где $\{\varphi_i(x)\}$ — некоторая заранее выбранная система линейно независимых функций. Такое И. наз. линейным относительно системы $\{\varphi_i(x)\}$, а $L_n(x)$ — интерполяционным полиномом по системе $\{\varphi_i(x)\}$.

Выбор системы $\{\varphi_i(x)\}$ определяется свойством того класса функций, для приближения к-рых предназначаются интерполяционные формулы. Напр., для приближения 2π-периодических функций на $[0, 2\pi]$ за $\{\varphi_i(x)\}$ естественно взять тригонометрическую систему функций, для приближения на полуоси $[0, \infty)$ ограниченных или возрастающих функций — систему рациональных или показательных функций, учитывающих поведение приближаемых функций на бесконечности и т. д.

Чаще всего используется алгебраич. И.: $\varphi_i(x)=x^i$, простейший вариант которого — линейное интерполирование с двумя узлами И. x_k и x_{k+1} — определяется формулой

$$L_1(x)=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]+f(x_k), \qquad (1)$$

$$x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}.$$

Алгебраическое И. более высокого порядка в задаче приближения функций на всем отрезке $[a, b]$ применяется на практике сравнительно редко. Обычно ограничиваются линейным И. по формуле (1) или квадратичным интерполированием с тремя узлами на частичных отрезках сетки по формуле

$$L_2(x)=\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}f(x_{k-1})+$$

$$+\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}f(x_k)+$$

$$+\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}f(x_{k+1}), \qquad (2)$$

$$x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_{k+1}.$$

Имеются различные варианты записи алгебраич. интерполяционных многочленов (см. *Интерполяционная формула*).

Находит все большее применение И. *сплайнами* (см. *Интерполяционный сплайн*).

На практике чаще всего используются параболические или кубические сплайны. Интерполяционным кубическим сплайном дефекта 1 для функции $f(x)$ относительно сетки Δ_n наз. функцию $S_3(x) \equiv S_3(f;\ x)$, являющуюся многочленом третьей степени на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, принадлежащую классу дважды непрерывно-дифференцируемых функций и удовлетворяющую условиям

$$S_3(x_k) = f(x_k), \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n; \quad n \geqslant 2.$$

При таком определении имеется еще два свободных параметра, для нахождения к-рых налагаются дополнительные краевые условия: $S_3^{(i)}(a) = S_3^{i}(b),\ i = 1, 2;\ S_3'(a) = a_n$ и $S_3'(b) = b_n$ или нек-рые другие.

Как непосредственно для задачи приближения функций, так и при решении других задач используются сплайны, к-рые в точках сетки Δ_n совпадают не только со значениями функций $f(x)$, но и со значениями производных этой функции до нек-рого порядка.

Часто при обработке эмпирических данных $\{y_k\}$ коэффициенты a_i в $L_n(x)$ определяются, исходя из требования минимизации суммы

$$S = \sum\nolimits_{k=1}^{m} [y_k - L_n(x_k)]^2, \quad m \geqslant n.$$

Такое построение функции $L_n(x)$ наз. интерполированием по методу наименьших квадратов.

И. функций многих переменных имеет ряд принципиальных и вычислительных трудностей. Напр., в случае алгебраич. И. интерполяционный многочлен Лагранжа фиксированной степени, вообще говоря, не существует для произвольной системы различных узлов И. В частности, для функций двух переменных $f(x,\ y)$ такой многочлен $L_n(x,\ y)$ суммарной степени не выше n может быть построен по узлам $(x_k,\ y_k)$ лишь при условии, что эти узлы не лежат на алгебраич. кривой порядка n.

Другой подход к И. функций многих переменных $f(x_1, \ldots, x_m)$ состоит в том, что сначала интерполируется функция по переменной x_1 при фиксированных x_k, $k = 2,\ 3, \ldots,\ m$, потом по следующей переменной при фиксированных остальных x_k и т. д. При таком способе построения интерполяционный алгебраич. многочлен $L_{n_1 \ldots n_m}(x_1, \ldots, x_m)$ для функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ с узлами

$$\left(x_1^{k_1}, \ldots, x_m^{k_m}\right), \quad x_j^{\nu} \neq x_j^{\mu}; \quad \nu \neq \mu; \quad k_j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n_j;$$

$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

имеет вид

$$L_{n_1 \ldots n_m}(x_1, \ldots, x_m) = \sum\nolimits_{k_1, \ldots, k_m = 0}^{n_1, \ldots, n_m} \frac{\omega_{n_1}(x_1) \ldots \omega_{n_m}(x_m)}{\omega_{n_1}'\left(x_1^{k_1}\right) \ldots \omega_{n_m}'\left(x_m^{k_m}\right)} \times$$

$$\times \frac{f\left(x_1^{k_1}, \ldots, x_m^{k_m}\right)}{\left(x_1 - x_1^{k_1}\right) \ldots \left(x_m - x_m^{k_m}\right)},$$

где

$$\omega_{n_j}(x_j) = \prod\nolimits_{k_j=0}^{n_j} \left(x_j - x_j^{k_j}\right), \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Интерполяционные сплайны для функций многих переменных определяются на многомерной сетке при соответствующих изменениях по аналогии с одномерным случаем. И. функций используется для замены сложно вычисляемой функции другой, вычисляемой быстрее; для приближенного восстановления функции на всей области задания по значениям ее в отдельных точках; для получения сглаживающих функций, описывающих плавный процесс. Такого рода задачи имеют как самостоятельное значение, так и возникают в качестве вспомогательных при решении более сложных задач во многих областях науки и техники. И. функций применяется также для приближенного нахождения предельных значений функций, в задачах ускорения сходимости последовательностей и рядов и в других вопросах.

Численное решение нелинейных уравнений и систем. Общие идеи построения интерполяционных методов решения уравнения $f(x)=0$ и систем уравнений $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)=0$, $i=1, 2, \ldots, m$, одни и те же. Трудности задачи И. функций многих переменных особенно сказываются при исследовании и практич. использовании такого рода методов для большого числа уравнений. В основу получения интерполяционных методов решения уравнения $f(x)=0$ положена замена функции $f(x)$ ее интерполяционным полиномом $L_n(x)$ и последующим решением уравнения $L_n(x)=0$. Корни уравнения $L_n(x)=0$ берутся за приближенные решения уравнения $f(x)=0$. Интерполяционный полином $L_n(x)$ используется также при построении итерационных методов решения уравнения $f(x)=0$.

Напр., взяв за x_{n+1} корень линейного интерполяционного алгебраич. многочлена, построенного по значениям $f(x_n)$ и $f'(x_n)$ в узле x_n, или по значениям $f(x_{n-1})$ и $f(x_n)$ в узлах x_{n-1} и x_n, приходят соответственно к методам Ньютона и секущих:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1}, x_n)},$$

где $f(x_{n-1}, x_n)$ — разделенная разность функции $f(x)$ для узлов x_{n-1} и x_n. При выполнении нек-рых условий последовательность значений x_n будет стремиться при $n\to\infty$ к решению уравнения $f(x)=0$.

Другой подход к построению методов решения уравнения $f(x)=0$ основан на И. обратной функции $x=g(y)$. Пусть в качестве интерполяционной формулы для функции $x=g(y)$ взят интерполяционный алгебраич. многочлен Лагранжа

$$L_n(y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_n(y)}{\omega_n'(y_k)(y-y_k)}g(y_k),$$

$$\omega_n(y)=\prod_{k=0}^{n}(y-y_k).$$

Предполагается, что обратная функция существует в окрестности искомого корня уравнения $f(x)=0$ и составлена таблица значений x_k и $y_k=f(x_k)$, $k=0, 1, \ldots, n$. За следующее приближенное значение x_{k+1} принимается значение интерполяционного многочлена в нуле:

$$x_{k+1}=-\omega_n(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{\omega_n'(y_k)\,y_k}.$$

Численное интегрирование. Аппарат И. функций лежит в основе построения многих квадратурных и кубатурных формул. Такого рода формулы строятся путем замены интегрируемой функции на всей области или на ее составных частях интерполяционными полиномами того или иного вида и последующим интегрированием этих полиномов.

Напр., квадратурные формулы наивысшей алгебраич. степени точности, так наз. *Гаусса квадратурные формулы*

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx\approx\sum_{k=1}^{n}A_k f(x_k),$$

где $p(x)$ — знакопостоянная весовая функция, получаются в результате замены функции $f(x)$ интерполяционным алгебраич. многочленом, построенным по корням x_k ортогонального относительно веса $p(x)$ многочлена степени n.

Если разделить весь отрезок интегрирования $[a, b]$ на четное число n равных частей длины $h=\frac{1}{n}(b-a)$ и на каждом сдвоенном частичном отрезке заменить $f(x)$ ее квадратичным интерполяционным многочленом с узлами в крайних и средней точках, то придем к составной *Симпсона формуле*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f_0+f_n+2(f_2+f_4+\ldots+f_{n-2})+\right.$$
$$\left.+4(f_1+f_3+\ldots+f_{n-1})\right],$$

где $f_k=f(a+kh)$, $k=0, 1, \ldots, n$.

Можно взять за основу и интерполяционные сплайны какой-то фиксированной степени. Изложенная выше схема построения формул для приближенного вычисления интегралов применима и в многомерном случае.

Численное дифференцирование. Формулы численного дифференцирования получаются в результате дифференцирования интерполяционных формул. При этом, как правило, заранее известна нек-рая априорная информация о дифференцируемой функции, касающаяся ее гладкости.

Пусть $L_n(x)$ — интерполяционный полином нек-рого вида для функции $f(x)$, а $R_n(x)$ — остаток интерполяционной формулы:

$$f(x)=L_n(x)+R_n(x).$$

Если в равенстве

$$f^{(i)}(x)=L_n^{(i)}(x)+R_n^{(i)}(x)$$

пренебречь величиной $R_n^{(i)}(x)$, то это приведет к формуле для приближенного вычисления i-й производной функции $f(x)$:

$$f^{(i)}(x)\approx L_n^{(i)}(x). \tag{3}$$

Формулы численного дифференцирования, в основе к-рых лежит И., получаются из приближенного равенства (3) в зависимости от выбора интерполяционного полинома $L_n(x)$. При численном дифференцировании используются, как правило, приближенные значения функции в узлах; погрешность формул численного дифференцирования зависит не только от способа И. и шага И., но и от ошибки используемых значений функции в узлах. Напр., в случае линейного И. (1):

$$f'(x_k)\approx\frac{1}{h}\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right], \tag{4}$$

причем для остатка $R_1'(x)$ имеет место представление:

$$R_1'(x_k)=-\frac{1}{2}f''(\xi)\,h,\quad \xi\in(x_k,\quad x_{k+1}),\quad h=x_{k+1}-x_k.$$

Если $f(x_{k+1})$ и $f(x_k)$ известны соответственно с погрешностями ε_{k+1} и ε_k, $\varepsilon_{k+1}\neq\varepsilon_k$, то погрешность формулы (4) будет содержать еще член $(\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k)/h$, к-рый с уменьшением шага h возрастает. При использовании формул численного дифференцирования шаг И. должен согласовываться с погрешностью значений функции. Поэтому на практике нередки случаи, когда известная с нек-рой погрешностью на густой сетке функция используется в данной задаче не во всех точках, а на более редкой сетке.

Численное решение интегральных уравнений. Неизвестная функция $\varphi(x)$ заменяется в интегральном уравнении какой-либо интерполяционной формулой (интерполяционным полиномом, интерполяционным сплайном и т. д.) с узлами И. x_k, а приближенные значения для $\varphi(x_k)$ находятся из системы, полученной после подстановки вместо независимой переменной x узлов И. x_k.

Напр., для линейного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds+f(x) \qquad (5)$$

можно воспользоваться лагранжевым представлением интерполяционного многочлена:

$$\varphi(x)=\sum\nolimits_{k=0}^{n} l_k(x)\,\varphi(x_k)+R_n(x)\equiv L_n(x)+R_n(x),$$

где $R_n(x)$ — остаток И.,

$$l_k(x)=\omega_n(x)/\omega_n'(x_k)(x-x_k),\quad \omega_n(x)=\prod\nolimits_{k=0}^{n}(x-x_k).$$

Замена функции $\varphi(x)$ в (5) ее интерполяционным многочленом $L_n(x)$ и x на x_i, приводит к линейной системе уравнений

$$\varphi_i=\lambda\sum\nolimits_{k=0}^{n} M_k(x_i)\,\varphi_k+f(x_i),$$

$$M_k(x_i)=\int_a^b K(x_i,\ s)\,l_k(s)\,ds,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

для нахождения приближенных значений φ_i решения $\varphi(x)$ уравнения (5) в узлах x_i. В случае нелинейных интегральных уравнений приближенные значения φ_i находятся соответственно из нелинейной системы.

Численное решение дифференциальных уравнений. Построение численных методов решения дифференциальных уравнений состоит в замене производных искомых функций интерполяционными формулами численного дифференцирования, а в ряде случаев и заменой интерполяционными формулами других функций и выражений, входящих в уравнения.

Пусть имеются формулы численного дифференцирования

$$y'(x_k)\approx\frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h}=\frac{1}{h}\Delta y(x_k), \qquad (6)$$

$$y''(x_k)\approx\frac{1}{h^2}\left[y(x_{k-1})-2y(x_k)+y(x_{k+1})\right]=\frac{1}{h^2}\Delta^2 y(x_k)$$

для равноотстоящих узлов $x_k=x_0+kh$, получаемые соответственно дифференцированием формул линейной и квадратичной И. (1) и (2). Тогда для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0$$

при нек-рых дополнительных условиях получается с учетом (6) уравнение в конечных разностях

$$F\left(x_k,\ y_k,\ \frac{1}{h}\Delta y_k,\ \frac{1}{h^2}\Delta^2 y_k\right)=0,$$

из к-рого вместе с уравнениями, полученными из дополнительных условий, находятся приближенные значения y_k решения $y(x)$ в узлах x_k.

Сведение дифференциальных уравнений с частными производными к соответствующим уравнениям в конечных разностях производится часто также с использованием формул численного дифференцирования.

Интерполяционный метод применим для решения дифференциальных уравнений, записанных в интегральной форме. Напр., для нахождения приближенного решения задачи Коши

$$y'=f(x,\ y),\quad y(x_0)=y_0 \qquad (7)$$

в точках $x_k=x_0+kh$, $k=0,\ 1,\ \ldots,$ используются разностные формулы типа

$$y_{n+1}=y_n+h\sum\nolimits_{j=1}^{n} B_j f(x_{n-j},\ y_{n-j}),$$

получаемые заменой функции под знаком интеграла в равенстве

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,\ y)\,dx$$

интерполяционным полиномом и последующим интегрированием. В частности, таким образом получены формулы Адамса для уравнения 1-го порядка (7) формулы Стёрмера для уравнений 2-го порядка и т. д.

Такой подход позволяет строить вычислительные алгоритмы для широкого класса дифференциальных уравнений в том числе и для уравнений в частных производных. Исследование разрешимости, точности и устойчивости решения возникающих конечно разностных уравнений представляет собой основную и наиболее трудную часть теории численного решения дифференциальных уравнений.

Интерполирование операторов и некоторые общие подходы к построению численных методов. Построение численных методов решения математич. задач, записанных в виде $y=Ax$, где элементы x и y принадлежат нек-рым множествам X и Y, а A — заданный оператор, состоит в замене множеств X и Y и оператора A или только нек-рых из этих трех объектов другими, удобными для вычислительных целей. При этом замена должна быть сделана так, чтобы решение новой задачи

$$\tilde{y}=\tilde{A}\tilde{x},$$

состоящей в нахождении $\tilde{y}$ или $\tilde{x}$, было в каком-то смысле близко к решению первоначальной задачи. Один из способов замены оператора A его приближением $\tilde{A}$ состоит в использовании *интерполирования операторов*. Имеются различные формулировки задачи И. операторов. Линейный интерполяционный оператор $L_1(F;\ x)$ для данного оператора записывается в виде

$$L_1(F;\ x)=F(x_0)+F(x_0,\ x_1)(x-x_0), \tag{8}$$

где x_0 и x_1 — узлы И., $F(x_0, x_1)$ — оператор разделенной разности 1-го порядка, определяемый как линейный оператор, удовлетворяющий условию

$$F(x_0,\ x_1)(x_0-x_1)=F(x_0)-F(x_1).$$

Данное определение оператора разделенной разности в ряде случаев конкретизируется. С использованием линейного И. (8) «метод секущих» для уравнения $F(x)=0$ записывается в виде

$$x_{n+1}=x_n-F^{-1}(x_{n-1},\ x_n)\,F(x_n),$$

где $F^{-1}(x_{n-1}, x_n)$ — оператор, обратный к $F(x_{n-1}, x_n)$.

Постановка задачи И. функционалов, представляющая интерес для теории приближенных методов такова. Пусть $\{\psi_i(x)\}$, $i=0, 1, \ldots, n$, — некоторые фиксированные функционалы или классы функционалов, определенные на X. Функционал $L_n[F;\ x]$ наз. интерполяционным функциональным многочленом для данного функционала $F(x)$ и системы точек $\{x_k\}$ из X, если выполняются соотношения

$$L_n[F;\ x_k]=F(x_k),\quad L_n[\psi_i;\ x]\equiv\psi_i(x),$$
$$i=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

И. функционалов используется при построении приближенных методов вычисления континуальных интегралов, для нахождения экстремальных значений функционалов и ряда других задач.

Напр., приближенные интерполяционные формулы для вычисления континуальных интегралов имеют вид

$$\int_X F(x)\,d\mu(x)\approx\int_X L_n[F;\ x]\,d\mu(x),$$

при этом интеграл от интерполяционного полинома $L_n[F;\ x]$ для нек-рых мер μ может вычисляться точно или сводиться к конечномерным интегралам. Интерполяционный полином $L_1[F;\ x]$, когда X есть пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C\ [a, b]$, представляется в виде интеграла Стилтьеса

$$L_1[F; x]=F(x_0)+$$
$$+\int_a^b \frac{x(\tau)-x_0(\tau)}{x_1(\tau)-x_0(\tau)}\, d_\tau F\left[x_0(\cdot)+\chi(\cdot, \tau)(x_1(\cdot)-x(\cdot))\right],$$

где $x_0(t)$ и $x_1(t)$ — узлы И., а функция

$$\chi(t, \tau)=\begin{cases}1, & \tau>t, \\ 0, & \tau \leqslant t.\end{cases}$$

Если $F(x)$ — постоянный или линейный функционал, то $L_1[F; x]\equiv F(x)$.

Применение И. к нахождению экстремальных значений функционалов может быть проиллюстрировано двумя интерполяционными аналогами метода градиента для нахождения локальной точки безусловного минимума функционала $F(x)$, определенного на нек-ром гильбертовом пространстве. Первый из этих методов получается, если в градиентном методе заменить $\operatorname{grad} F(x_n)$ на $F(x_{n-1}, x_n)$, т. е.

$$x_{n+1}=x_n+\varepsilon_n F(x_{n-1}, x_n), \quad \varepsilon_n>0, \quad n=1, 2, \ldots \tag{9}$$

Второй метод использует градиент интерполяционного полинома. По приближениям x_{n-2}, x_{n-1}, x_n к экстремальной точке x^* функционала $F(x)$ строится квадратичный интерполяционный функционал

$$L_2[F; x]=F(x_n)+F(x_{n-1}, x_n)(x-x_n)+$$
$$+F(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)(x-x_{n-1})(x-x_n),$$

где $F(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ — разделенная разность 2-го порядка функционала $F(x)$ относительно узлов x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, и новое приближение x_{n+1} находится по формуле

$$x_{n+1}=x_n-\varepsilon_n \operatorname{grad} L_2[F; x_n], \tag{10}$$
$$\varepsilon_n>0, \quad n=2, 3, \ldots$$

Итерационные методы (9) и (10) используют соответственно два и три начальных приближения.

Применение И. функционалов и операторов для построения вычислительных алгоритмов решения конкретных задач основано на использовании интерполяционных формул с малой величиной погрешности. Такого рода формулы должны строиться для отдельных классов функционалов и операторов с учетом специфики этих классов.

Лит.: [1] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 1—2, М., 1959—60; [3] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [4] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 1—2, М., 1976—77; [5] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [6] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [7] Янович Л. А., Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам, Минск, 1976. *Л. А. Янович.*

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ОПЕРАТОРОВ — получение из известных свойств оператора в двух или нескольких пространствах выводов о свойствах этого оператора в нек-рых в определенном смысле промежуточных пространствах. Банаховой парой A, B наз. два банаховых пространства, алгебраически и непрерывно вложенные в отделимое линейное топологич. пространство $\mathfrak{A}$. На пересечении $A \cap B$ вводится норма

$$\|x\|_{A\cap B}=\max\{\|x\|_A, \|x\|_B\};$$

на арифметич. сумме $A+B$ — норма

$$\|x\|_{A+B}=\inf_{x=u+v}\{\|u\|_A+\|v\|_B\}.$$

Пространства $A \cap B$ и $A+B$ банаховы. Банахово пространство E наз. промежуточным для пары A, B, если $A \cap B \subset E \subset A+B$.

Линейное отображение T, действующее из $A+B$ в $C+D$, наз. ограниченным оператором из пары A, B в пару C, D, если его сужение на A (соответственно B) является ограниченным оператором из A (соответственно B) в C (соответственно D). Тройка пространств $\{A, B, E\}$ наз. **интерполяционной относительно тройки** $\{C, D, F\}$, $C \cap D \subset F \subset C+D$, пространство E (соответственно F) — промежуточное для пары A, B (соответственно C, D), если всякий ограниченный оператор из пары A, B в пару C, D отображает E в F. Если $A=C$, $B=D$ и $E=F$, то пространство E наз. **интерполяционным** между A и B. Для интерполяционных троек существует константа c такая, что

$$\|T\|_{E \to F} \leqslant c \max \{\|T\|_{A \to C}, \|T\|_{B \to D}\}.$$

Первая интерполяционная теорема получена М. Риссом (M. Riesz, 1926): тройка пространств $\{L_{p_0}, L_{p_1}, L_p\}$ является интерполяционной относительно тройки $\{L_{q_0}, L_{q_1}, L_q\}$, если $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$ и при нек-ром $\theta \in (0, 1)$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Мера, по к-рой строятся перечисленные пространства, может быть своей для каждой тройки. Аналог этой теоремы может не быть справедливым для других классич. семейств пространств; напр., пространство $C^1(0, 1)$ не является интерполяционным между $C(0, 1)$ и $C^2(0, 1)$.

Интерполяционным функтором F наз. функтор, ставящий в соответствие каждой банаховой паре A, B промежуточное пространство $F(A, B)$, причем для любых двух банаховых пар A, B и C, D тройки $\{A, B, F(A, B)\}$ и $\{C, D, F(C, D)\}$ являются друг относительно друга интерполяционными. Имеется ряд методов построения интерполяционных функторов. Наибольшее число приложений нашли два из них.

K-метод Петре. Для банаховой пары A, B строится функционал

$$K(t, x) = \inf_{x=u+v} \{\|u\|_A + t\|v\|_B\},$$

эквивалентный при каждом t норме в $A+B$. Банахово пространство G измеримых на полуоси функций наз. **идеальным пространством**, если из того, что $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ почти всюду на $(0, \infty)$ и $g \in G$, вытекает $f \in G$ и $\|f\|_G \leqslant \|g\|_G$. Рассматриваются все элементы x из $A+B$, для к-рых $K(t, x) \in G$. Они образуют банахово пространство $(A, B)_G^K$ относительно нормы $\|x\|_{(A, B)_G^K} = \|K(t, x)\|_G$. Пространство $(A, B)_G^K$ будет ненулевым и промежуточным для A, B в том и только в том случае, когда функция $\min\{t, 1\}$ принадлежит G. В этом случае функтор $F(A, B) = (A, B)_G^K$ будет интерполяционным. Для нек-рых банаховых пар функционал $K(t, x)$ вычисляется, и это позволяет эффективно строить интерполяционные пространства. Для пары L_1 и L_∞

$$K(t, x) = \int_0^1 x^*(\tau)\, d\tau,$$

где $x^*(\tau)$ — равноизмеримая с функцией x невозрастающая непрерывная справа функция на $(0, \infty)$. Для пары C и C^1

$$K(t, x) = \frac{1}{2} \widehat{\omega}(2t, x),$$

где $\omega(t, x)$ — модуль непрерывности функции x, а знак $\widehat{\ }$ означает переход к наименьшей выпуклой мажоранте функции на $(0, \infty)$. Для пары $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ (*Соболева пространство*)

$$K(t, x) = \begin{cases} \omega_{l, p}(t^{1/p}, x) + t\|x\|_p, & t < 1, \\ \|x\|_{L_p}, & t \geqslant 1, \end{cases}$$

где

$$\omega_{l,\ p}(t,\ x)=\sup_{|h|\leqslant l.} \|\Delta_h^n x(s)\|_{L_p},$$

За пространство G часто принимается пространство с нормой

$$\|f\|_G=\left\{\int_0^\infty (t^{-\theta}|f(t)|^q \frac{dt}{t}\right\}^{1/q},\quad 0<\theta<1,\ 1\leqslant q\leqslant\infty.$$

Соответствующий функтор обозначается $(A,\ B)_{\theta,\ p}^K$. Важную роль в теории уравнений с частными производными играют пространства Бесова

$$B_{p,\ q}^m=(L_p,\ W_p^l)_{\theta,\ q}^K,$$

где $m=\theta l$. Ряд классич. неравенств анализа уточняется в терминах пространств Лоренца

$$L_{r,\ q}=(L_1,\ L_\infty)_{\theta,\ q}^K,\quad r=1/(1-\theta).$$

Комплексный метод Кальдерона — Лионса. Для банаховой пары A, B через $\Phi(A,\ B)$ обозначается пространство, состоящее из всех функций $\varphi(z)$, определенных в полосе $\Pi: 0\leqslant\operatorname{Re} z\leqslant 1$ комплексной плоскости, со значениями в пространстве $A+B$, обладающих свойствами: 1) $\varphi(z)$ непрерывна и ограничена по норме $A+B$ в Π, 2) $\varphi(z)$ аналитична относительно нормы в $A+B$ внутри Π, 3) $\varphi(i\tau)$ непрерывна и ограничена по норме A, 4) $\varphi(1+i\tau)$ непрерывна и ограничена по норме B. Пространство $[A,\ B]_\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, определяется как совокупность всех элементов $x\in A+B$, представимых в виде $x=\varphi(\alpha)$ при $\varphi\in\Phi(A,\ B)$. В нем вводится норма

$$\|x\|_{[A,\ B]_\alpha}=\inf_{\varphi(\alpha)=x}\|\varphi\|_{\Phi(A,\ B)}.$$

Таким образом строится интерполяционный функтор $[A,\ B]_\alpha$. Если $A=L_{p_0}$ и $B=L_{p_1}$, $1\leqslant p_0,\ p_1\leqslant\infty$, то $[L_{p_0},\ L_{p_1}]_\alpha=L_p$, где $1/p=(1-\alpha)/p_0+\alpha/p_1$. Если G_0 и G_1 — два идеальных пространства, и хотя бы в одном из них норма абсолютно непрерывна, то пространство $[G_0,\ G_1]_\alpha$ состоит из всех функций $x(t)$, для к-рых $|x(t)|=|x_0(t)|^{1-\alpha}|x_1(t)|^\alpha$ при нек-рых $x_0\in G_0$, $x_1\in G_1$. Если для двух комплексных гильбертовых пространств H_0 и H_1 имеется вложение $H_1\subset H_0$, то пространства $[H_0, H_1]$ $\in$ образуют важное для приложений семейство пространств, наз. гильбертовой шкалой. Если $H_0=L_2$ и $H_1=W_2^l$, то $[H_0,\ H_1]_\alpha=W_2^{\alpha l}$ (пространство Соболева с дробными индексами). О других методах построения интерполяционных функторов, а также об их связях с теорией шкал банаховых пространств см. [1], [3], [5], [8].

Особую роль в теории И. о. играет направление, связанное с интерполяционной теоремой Марцинкевича об операторах слабого типа: оператор T, действующий из банахова пространства A в пространство всех измеримых функций, напр., на полуоси, наз. оператором слабого типа $(A,\ \psi)$, если $(Tx)^*(t)\leqslant\frac{c}{\psi(t)}\|x\|_A$. При этом предполагается, что функции $\psi(t)$ и $t/\psi(t)$ не убывают (напр., $\psi(t)=t^\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$). Теоремы типа теоремы Марцинкевича позволяют для операторов T слабых типов $(A_0,\ \psi_0)$ и $(A_1,\ \psi_1)$ одновременно (A_0, A_1 — банахова пара) описывать пары пространств A, E, для к-рых $TA\subset E$. Во многих случаях достаточно проверить, что из A в E действует оператор

$$\frac{1}{\psi_0(t)}K\left(\frac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)},\ x\right),$$

где $K(t,\ x)$ — функционал Петре для пространств A_0, A_1. Если действие из A в E показано для всех линейных операторов слабых типов (A_i, ψ_i), то оно будет иметь место и для квазиаддитивных операторов (со свойством $|T(x+y)(t)| \leq b(|Tx(t)|+|Ty(t)|)$ слабых типов (A_i, ψ_i), $i=0, 1$. Многие важные операторы анализа (напр., сингулярный оператор Гильберта) имеют слабый тип в естественных пространствах и поэтому соответствующие интерполяционные теоремы получили многочисленные применения.

Лит.: [1] Butzer P., Berens H., Semi-groups of Operators and Approximation, B., 1967; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., М., 1965; [3] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 2, с. 89—168; [4] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения, пер. с франц., М., 1971; [5] Мадженес Э., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 2, с. 169—218; [6] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974; [7] Функциональный анализ, [Справочная математическая библиотека], 2 изд., М., 1972; [8] Bergh T. Löfström, Interpolation spaces, B., 1976. *С. Г. Крейн.*

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — формула для приближенного вычисления значений функции $f(x)$, основанного на замене приближаемой функции $f(x)$ более простой в каком-то смысле функцией

$$g(x) \equiv g(x;\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)$$

наперед заданного класса, причем параметры a_i, $i=0, 1, \ldots, n$, выбираются таким образом, чтобы значения $g(x)$ совпадали с известными заранее значениями $f(x)$ для данного множества $n+1$ попарно различных значений аргумента:

$$g(x_k) = f(x_k), \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{1}$$

Такой способ приближенного представления функций наз. *интерполированием*, или интерполяцией, а точки x_k, для к-рых должны выполняться условия (1),— узлами интерполяции. Вместо простейших условий (1) могут быть заданы значения каких-либо иных величин, связанных с $f(x)$, напр. значения производных функции $f(x)$ в узлах интерполяции.

Среди методов интерполирования самым распространенным является линейное интерполирование, когда приближение ищется в классе (обобщенных) полиномов

$$g(x;\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \tag{2}$$

по некоторой системе функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Для того, чтобы для любой функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, и для любого набора $n+1$ узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $x_i \in [a, b]$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ существовал интерполяционный полином (2), необходимо и достаточно, чтобы система функций $\{\varphi_i(x)\}$ являлась *Чебышева системой* на отрезке $[a, b]$. При этом интерполяционный полином будет единственным и его коэффициенты a_i можно найти непосредственным решением системы (1).

Чаще всего в качестве $\{\varphi_i(x)\}$ берут последовательность степеней x:

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots,$$

последовательность тригонометрических функций:

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots,$$

или последовательность показательных функций

$$1,\ e^{\alpha_1 x},\ e^{\alpha_2 x},\ \ldots,$$

где $\{\alpha_i\}$ — некоторая подпоследовательность попарно различных действительных чисел.

В случае интерполирования алгебраич. многочленами

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{3}$$

система функций $\{\varphi_i(x)\}$ такова:

$$\varphi_i(x)=x^i, \quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n, \tag{4}$$

а система уравнений (1) имеет вид

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_k^i = f(x_k), \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{5}$$

Система (4) является системой Чебышева, что обеспечивает существование и единственность интерполяционного многочлена вида (3). Особенностью системы (4) является возможность получения явного представления интерполяционного многочлена (3), не прибегая к непосредственному решению системы (5). Одну из явных форм интерполяционного многочлена (3):

$$g_n(x)=L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \tag{6}$$

наз. **интерполяционным многочленом Лагранжа**. В предположении непрерывности производной $f^{n+1}(x)$ остаточный член интерполяционного многочлена (6) может быть записан в форме

$$f(x)-g_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_n(x), \tag{7}$$

$$\xi\in[y_1,\ y_2], \quad \omega_n(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i);$$

здесь $y_1=\min(x_0, x_1, \ldots, x_n, x)$, $y_2=\max(x_0, x_1, \ldots, x_n, x)$. Величина остаточного члена (7) зависит, в частности, от значения многочлена $\omega_n(x)$. Представляет интерес такой выбор узлов интерполяции, при к-ром $\sup\limits_{[a,\ b]}|\omega_n(x)|$ был наименьшим. Распределение узлов будет оптимальным в указанном смысле, если в качестве узлов интерполяции взяты корни

$$x_k=\frac{1}{2}(b+a)+\frac{1}{2}(b-a)\cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[a,\ b]$ многочлена

$$\overline{T}_{n+1}^{[a,\ b]}(x)=(b-a)^{n+1}2^{-1-2n}T_{n+1}\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right),$$

где $T_{n+1}(z)$ — *Чебышева многочлен* степени $n+1$.

Существует ряд других явных представлений интерполяционного алгебраич. многочлена (3), более приспособленных для решения тех или иных практич. задач интерполяции (см., напр., *Бесселя интерполяционная формула*, *Гаусса интерполяционная формула*, *Ньютона интерполяционная формула*, *Стирлинга интерполяционная формула*, *Стеффенсена интерполяционная формула*, *Эверетта интерполяционная формула*). Если заранее трудно оценить степень интерполяционного многочлена, требуемую для достижения заданной точности (напр., при интерполировании таблиц), то прибегают к использованию *Эйткена схемы*, по к-рой интерполяционные многочлены все более высокой степени строятся последовательно, что позволяет контролировать точность в процессе вычислений. Другой подход к построению И. ф. см. в ст. *Фрезера диаграмма*.

Решение задачи алгебраич. интерполирования по значениям функции и ее производных в узлах интерполяции дается *Эрмита интерполяционной формулой*.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *М. К. Самарин.*

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС — процесс получения последовательности интерполирующих функций $\{f_n(z)\}$ при неограниченном возрастании числа n условий *интерполирования*. Если интерполирующие функции $f_n(z)$ представлены в виде частных сумм некоторого функционального ряда, то последний иногда наз.

интерполяционным рядом. Целью построения И. п. чаще всего является, по крайней мере в простейших первоначальных задачах интерполирования, приближение в каком-то смысле посредством интерполирующих функций $f_n(z)$ исходной функции $f(z)$, о к-рой или имеется неполная информация или форма к-рой слишком сложна для непосредственного использования.

Довольно общая ситуация, связанная с построением И. п., описывается следующим образом. Пусть (a_{jk}), $0\leqslant k\leqslant j$, $j=0, 1, \ldots$ — бесконечная треугольная таблица произвольно заданных комплексных чисел

$$\begin{array}{llll} a_{00} & & & \\ a_{10} & a_{11} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array} \tag{1}$$

наз. узлами интерполяции. Пусть, наряду с таблицей (1), имеется таблица аналогичного вида (w_{jk}), $0\leqslant k\leqslant j$, $j=0, 1, \ldots$, также составленная из произвольно заданных комплексных чисел w_{jk}.

Если в n-й строке a_{nk}, $k=0, 1, \ldots, n$, таблицы узлов (1) нет совпадающих чисел, или, как еще говорят, вся эта строка состоит из простых узлов, то, пользуясь, напр., *Лагранжа интерполяционной формулой*, строится (единственный) алгебраический интерполяционный многочлен $p_n(z)$ степени не выше n, удовлетворяющий простым условиям интерполяции

$$p_n(a_{nk})=w_{nk}, \quad k=0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Если же точка a_{n0} является кратным узлом кратности $\nu_0>1$ в n-й строке, т. е. встречается в этой строке ν_0 раз: $a_{n0}=a_{nk_1}=\ldots=a_{nk_{\nu_0-1}}$, то соответствующие условия кратного интерполирования в узле a_{n0} имеют вид

$$\begin{gathered} p_n(a_{n0})=p_n^{(0)}(a_{n0})=w_{n0}, \\ p_n'(a_{n0})=w_{nk_1}, \ \ldots, \ p_n^{(\nu_0-1)}(a_{n0})=w_{nk_{\nu_0-1}}. \end{gathered} \tag{3}$$

В общем случае при наличии кратных узлов (единственный) алгебраический интерполяционный многочлен $p_n(z)$ степени не выше n строится по этим условиям, напр., по *Эрмита интерполяционной формуле*. В качестве примера системы узлов (1) можно привести систему $j+1$, $j=0, 1, \ldots$, равноотстоящих узлов $a_{jk}=e^{2\pi ik/(j+1)}$ на единичной окружности, применяемую в случае так наз. интерполяции в корнях из единицы (см. [5]).

В результате осуществляемого таким путем И. п. получается последовательность интерполяционных многочленов $\{p_n(z)\}$, определяемая таблицами (a_{jk}) и (w_{jk}). Основными вопросами, здесь возникающими, являются: определить в зависимости от (a_{jk}) и (w_{jk}) множество $E\subset\mathbb{C}$ точек сходимости последовательности $\{p_n(z)\}$, в к-рых существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(z)=q(z)$; определить характер предельной функции $q(z)$; определить множество $F\subset E$, на к-ром сходимость $p_n(z)\to q(z)$ равномерная; и т. д.

В теории функций комплексного переменного наиболее изучен случай, когда таблица (w_{jk}) строится по значениям регулярной аналитич. функции $f(z)$ и ее производных в узлах интерполяции так, что (применительно к узлу a_{n0} кратности $\nu_0\geqslant 1$; ср. (3))

$$\begin{gathered} p_n(a_{n0})=p_n^{(0)}(a_{n0})=f(a_{n0}), \\ p_n'(a_{n0})=f'(a_{n0}), \ \ldots, \ p_n^{(\nu_0-1)}(a_{n0})=f^{(\nu_0-1)}(a_{n0}). \end{gathered}$$

В этом случае интерполяционный многочлен $p_n(z)$ можно записать по формуле Эрмита в виде интеграла по контуру Γ, охватывающему узлы a_{nk}, $k=0, 1, \ldots, n$, на к-ром и внутри к-рого $f(z)$ регулярна:

$$p_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\omega_n(t)-\omega_n(z)}{\omega_n(t)(t-z)}f(t)\,dt, \qquad (4)$$

$$\omega_n(z)=(z-a_{n0})(z-a_{n1})\ldots(z-a_{nn}).$$

Из формулы (4) легко получается и интегральное представление остаточного члена интерполяции $R_n(z)=f(z)-p_n(z)$. Вообще говоря, последовательность $\{p_n(z)\}$, построенная по $f(z)$, может расходиться. Если же она сходится, то предельная функция $q(z)$ может не совпадать с $f(z)$. Основным вопросом является изучение сходимости $\{p_n(z)\}$ к $f(z)$ и нахождение таких систем узлов (a_{jk}), для к-рых сходимость в каком-то смысле оптимальная. Пусть, напр., функция $f(z)$ регулярна на континууме $K\subset\mathbb{C}$, содержащем не менее двух точек, дополнение к-рого до расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ есть односвязная область, содержащая бесконечно удаленную точку. Пусть узлы (a_{jk}) принадлежат K. Тогда для того, чтобы И. п. $\{p_n(z)\}$ равномерно сходился на K к $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{M_n}=c,$$

где $M_n=\sup\{|\omega_n(z)|;\ z\in\partial K\}$, c — *емкость* множества K (см. [4]).

Классический вариант И. п. получается, когда узлы $a_{jk}=a_k$, $0\leqslant k\leqslant j$, $j=0, 1, \ldots$, составляют последовательность $\{a_k\}$, из к-рой на n-м шаге для получения многочлена $p_n(z)$ используются первые $n+1$ узлов $a_0, a_1, \ldots, a_n$. В этом случае для регулярной функции $f(z)$ многочлены $p_n(z)$ суть частные суммы интерполяционного ряда Ньютона

$$q(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\omega_n(z), \qquad (5)$$

$$\omega_n(z)=(z-a_0)(z-a_1)\ldots(z-a_n),$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{\omega_n(t)}.$$

При вычислениях интерполяционный ряд вида (5) имеет то преимущество перед последовательностью $\{p_n(z)\}$, что для перехода от уже известного многочлена $p_n(z)$ к $p_{n+1}(z)$ необходимо вычислить только один коэффициент ряда c_{n+1}. В зависимости от расположения узлов a_k и значений коэффициентов c_k, областью сходимости ряда Ньютона может быть любая односвязная область плоскости $\mathbb{C}$ с аналитич. границей. В частности, напр., если последовательность узлов $\{a_k\}$ имеет предельную точку только в бесконечности, $\sum_{k=m}^{\infty}1/|a_k|<\infty$ и ряд (5) сходится хотя бы в одной точке $z_0\neq a_k$, $k=0, 1, \ldots$, то он сходится равномерно в любом круге $|z|\leqslant R$ и, следовательно, его сумма $q(z)$ есть целая функция. Интерполяционный ряд Стирлинга есть частный случай ряда Ньютона для последовательности узлов $a_0=0$, $a_1=-1$, $a_2=1$, $\ldots$, $a_{2k-1}=-k$, $a_{2k}=k$, $\ldots$. Исследованы и другие разновидности интерполяционных рядов (см. [3], [5]).

Объектами изучения являются также И. п. с неалгебраическими интерполяционными полиномами $p_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n}b_\nu\varphi_\nu(z)$, составленными по другим системам функций $\{\varphi_\nu(z)\}$, отличным от системы степеней $\{z^\nu\}$, напр., по системе $\{e^{\alpha_\nu z}\}$ (см. [4], [6]).

Изучение И. п. в действительной области имеет свою специфику как в постановке задач, так и в результатах (см. [2], [4]). Эта специфика обусловлена прежде всего естественным в действительной области отказом от требования регулярности интерполируемой функции $f(x)$. Известно, напр., что никакая система узлов на отрезке $[a, b]$ не гарантирует сходимости И. п. для произвольной непрерывной функции $f(x)$, $x \in [a, b]$. С другой стороны, если непрерывная функция $f(x)$ наперед задана, то всегда можно выбрать систему узлов так, чтобы И. п. сходился к $f(x)$.

Кроме И. п. с интерполяционными полиномами $p_n(z)$ внимание исследователей привлекают И. п. с рациональными функциями $r_n(z)$, напр. вида $r_n(z) = q_n(z)/\omega_{n-1}(z)$, где $\omega_{n-1}(z) = (z-b_0) \ldots (z-b_{n-1})$ и $q_n(z)$ — многочлен степени не выше n. Условия интерполяции (1) — (3) остаются в силе, но теперь должно быть добавлено условие на полюсы b_k, $k=0, 1, \ldots$, к-рые в простейшем случае задаются в виде треугольной таблицы (b_{jk}), $0 \leqslant k \leqslant j$, $j=0, 1, \ldots$, аналогичной (1).

См. также *Абеля — Гончарова проблема*, *Бернштейна интерполяционный процесс*.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 1, 2 изд., М., 1967; [2] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [3] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 2 изд., М., 1959; [4] Смирнов В. И., Лебедев Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М., 1964; [5] Уолш Дж. Л., Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, пер. с англ., М., 1961; [6] Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ СПЛАЙН — сплайн

$$S_m(\Delta_n;\ x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m-1}x^{m-1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_k (x - x_k)_+^m,$$

где

$$t_+ = \begin{cases} t, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n,$$

совпадающий с данной функцией в заданных различных точках $\{\bar{x}_i\}$. Обычно при $m=2k+1$ полагают $\bar{x}_i = x_i$, $i=0, 1, \ldots, n$, и так как при этом у сплайна $S_{2k+1}(\Delta_n;\ x)$ остается еще $2k$ свободных параметров, то на сплайн налагают еще по k условий в точках x_0 и x_n, напр., $S_{2k+1}^{(j)}(\Delta_n,\ z) = y_z^{(j)}$, $j=1, 2, \ldots, k$, $z = x_0, x_1$, где $y_z^{(j)}$— заданные числа. Если числа $y_z^{(j)}$ линейно зависят от данной функции, то соответствующий И. с. линейно зависит от этой функции. Для $m=2k$ полагают обычно $\bar{x}_0 = x_0$, $\bar{x}_n = x_n$, $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, и по k условий задают в точках x_0 и x_n. Если сплайн $S_m(\Delta_n,\ x)$ в точках $x_1, \ldots, x_{n-1}$ имеет непрерывную $(m-s)$-ю производную, а $(m-s+1)$-я производная в них разрывна, то при $s \geqslant 2$ в этих точках задают еще производные сплайна от 1-го до $(s-1)$-го порядка, требуя, чтобы эти производные совпадали с соответствующими производными интерполируемой функции. Рассматриваются также интерполяционные L- и L_q-сплайны и И. с. многих переменных. И. с. применяются для приближенного представления функций по их значениям на сетке. В отличие от интерполяционных полиномов для И. с. существуют матрицы узлов, для к-рых И. с. сходятся к произвольно заданной непрерывной интерполируемой функции.

Лит.: [1] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [2] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972. *Ю. Н. Субботин.*

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ — то же, что *интерполирование.*

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — задание значения (смысла) математич. выражений (символов, формул и т. д.). В математике такими значениями служат математич. объекты (множества, операции, выражения и т. д.). Сами эти значения также наз. И. соответствующих выражений.

Примеры. Значением (или И.) символа $\cdot$ может быть операция умножения действительных чисел, операция сложения целых чисел и т. д. Пусть в качестве И. символа $\cdot$ выбрана первая из этих операций. Если символы x и y понимаются как действительные переменные (т. е. переменные, областью изменения к-рых является множество всех действительных чисел), то значением выражения $x \cdot y$ является отображение, переводящее всякую пару действительных чисел в их произведение; если значениями символов x и y являются соответственно числа 6 и 2,5, то значением выражения $x \cdot y$ является число 15. Значением (или И.) высказывания в языке плоской геометрии Лобачевского при интерпретации Пуанкаре может служить соответствующее высказывание в языке плоской евклидовой геометрии.

Важнейшим видом И. являются теоретико-множественные И. выражений логич. языков. Когда речь идет об одновременной И. всех выражений языка, то говорят об И. языка. Теоретико-множественная И. логич. языка включает задание значений констант — предметных, функциональных, предикатных и констант более высоких ступеней (констант для предикатов от предикатов и т. д.), а также задание областей изменения переменных — предметных, функциональных и т. д. В многосортных И. различные предметные переменные могут иметь различные области изменения, то же касается функциональных и т. д. переменных. Наиболее употребительными, однако, являются И., при к-рых все предметные переменные, так же как и функциональные переменные с одинаковым числом аргументов и т. д., имеют одинаковые области изменения. Если областью изменения предметных переменных (иногда называемой областью, или носителем, И.) служит множество D_0, то областью изменения n-местных функциональных переменных служит нек-рое множество D_n n-местных операций на множестве D_0. В качестве множества D_n часто выбирается множество всех n-местных операций на D_0, в таком случае упоминание об области изменения функциональных переменных обычно опускается. Значениями предметных констант служат элементы из D_0, функциональных констант — элементы из D_1, D_2, $\ldots$.

При теоретико-множественной И. логич. языка под И. терма (т. е. под значением терма при данной И.) понимается отображение, к-рое каждому набору значений переменных рассматриваемого языка (или, при несколько ином определении, набору значений переменных, входящих в терм) по определенному правилу сопоставляет элемент области И. Это отображение обычно задается индукцией по построению термов.

Для получения И. формул языка необходимо, кроме перечисленных выше компонент И., задать нек-рое непустое множество A, называемое множеством логических значений. И. n-местных предикатных констант являются отображениями из D_0^n в A; в частности, И. n-местных предикатных констант — это элементы A. Если в языке имеются нульместные, одноместные и т. д. предикатные переменные, то их областями изменения служат, соответственно, множество A, нек-рое подмножество множества A^{D_0}, содержащее И. всех одноместных предикатных констант и т. д. Интерпретация формулы определяется аналогично И. терма как отображение, сопоставляющее всякому набору значений предметных, функциональных и предикатных переменных языка элемент множества A. Важным видом теоретико-множественных И. являются алгебраич. И., при к-рых в качестве значений (И.) логич. связок языка выбираются операции на множестве A, в качестве значений кванторов — отображения из множества всех подмножеств A в A (обобщенные операции на A), и И. формулы определяется индукцией по построению. Среди других теоретико-множественных И. важнейшими являются *Крипке модели*.

Булевозначные алгебраические И. характеризуются тем, что множество A является полной булевой алгеброй, а значениями связок и кванторов являются: для конъюнкции — пересечение, для квантора существования — взятие точной верхней грани и т. д. Особо важную роль играют классические И., к-рые можно определить как булевозначные И. с двухэлементной булевой алгеброй A.

Понятие истинности формулы в данной И. определяется с помощью выделения в A нек-рых элементов. Напр., при классической И. единственным выделенным элементом является единица булевой алгебры (обозначаемая также «истина»). Формула наз. истинной при данной И., если ее И. принимает только выделенные значения. Моделью (или правильной И., или просто И.) системы формул нек-рого языка наз. И. языка, при к-рой все формулы системы истинны.

Термин стандартная И. употребляется, когда среди всевозможных значений (И.) нек-рого выражения имеется одно общепринятое. Напр., стандартной И. символа $=$ в классических И. является совпадение элементов, стандартными И. символов $+$ и $\cdot$ языка арифметики являются сложение и умножение натуральных чисел. Соответственно вводится понятие стандартной И. языка и стандартной модели. В частности, классическую И. языка арифметики первого порядка с предикатной константой $=$ и функциональными константами $+$ и $\cdot$, интерпретируемыми, как указано выше, наз. стандартной.

Кроме теоретико-множественных И. логич. языков используются и другие. Напр., И., при к-рых выражения нек-рого логич. языка интерпретируются выражениями другого логич. языка, применяются при доказательствах разрешимости, неразрешимости и относительной непротиворечивости логич. теорий. См. также *Конструктивная логика*.

Лит.: [1] Расева Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972; [2] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [3] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., 2 изд., М., 1976. *А. Л. Семенов.*

ИНТУИЦИОНИЗМ — совокупность философских и математич. идей и методов, рассматривающих математику как науку об умственных построениях. С точки зрения И., основным критерием истинности математич. суждения является интуитивная убедительность возможности построения мысленного эксперимента, связываемого с этим суждением. Поэтому в интуиционистской математике отвергается теоретико-множественный подход к определению математич. понятий, а также нек-рые способы рассуждения, принятые в классич. логике.

Истоки И. можно проследить еще в античной математике, а позднее в высказываниях таких ученых, как К. Гаусс (C. Gauss), Л. Кронекер (L. Kronecker), А. Пуанкаре (H. Poincaré), А. Лебег (H. Lebesgue), Э. Борель (E. Borel). Начиная с 1904 в ряде статей выступил с развернутой критикой нек-рых концепций классич. математики Л. Э. Я. Брауэр (L. E. J. Brouwer). В основе этой критики лежит обсуждение статуса существования в математике: в каком смысле следует считать установленным существование актуально заданного бесконечного множества и могут ли быть построены в виде потенциально осуществимой конструкции такие объекты исследования, как неизмеримое множество действительных чисел, нигде не дифференцируемая функция? Естественно предположить, что можно построить произвольное натуральное число в виде последовательного ряда однородных предметов, напр. ряда параллельных черточек. В рамках такой же идеализации можно допустить, что, построив нек-рое натуральное число, можно построить затем и следующее добавив к уже построенному еще одну черточку. Но, возникает вопрос о том, с какого рода построением связано множество всех действительных чисел или множество всех натуральных чисел как единый объект исследования. Современные физич. воззрения также как будто не дают оснований полагать, что в окружающем нас мире актуально существуют бесконечные множества объектов. Есть серьезные основания считать, что объекты, существование к-рых устанавливается без использования *абстракции актуальной бесконечности*, а лишь в рамках гораздо более скромной *абстракции потенциальной осуществимости*, имеют более непосредственное отношение к реальной действительности. Однако при обычной теоретико-множественной трактовке не делается никакого различия между объектами, существование к-рых можно подтвердить с помощью нек-рого потенциально осуществимого построения, и абстрактными теоретико-множественными объектами исследования. Способы установления свойств обоих типов объектов в классич. математике основаны на законах логики, возникших в результате экстраполяции законов, верных для конечных совокупностей, на бесконечные множества. В области бесконечного эти законы не ориентированы на эффективное построение объектов, существование к-рых утверждается. Фактически такое положение дел приводит к появлению в математике так наз. «теорем чистого существования», в к-рых утверждается существование нек-рых объектов и в то же время не указывается никакого способа отыскания этих объектов. Такова, напр., известная теорема классич. анализа, утверждающая, что всякая непрерывная действительная функция, заданная на замкнутом ограниченном множестве, имеет максимум. Обычное доказательство этой теоремы не дает никаких указаний на метод построения искомого максимума. Это обстоятельство может и не смущать теоретико-множественно настроенного математика: он может считать, что максимум «есть» у всякой функции рассматриваемого класса, независимо от того, можно его отыскать в каждом частном случае или нет, «есть» как объект нек-рого воображаемого мира («платонистского мира», см. [6], с. 399). Однако такой подход не удовлетворяет, если принять во внимание возможности субъекта-исследователя. Имеется ли способ отыскания максимума, и если этот способ не указан, то в каком смысле верно, что максимум существует у всякой функции рассматриваемого класса? Известно, сколь трудной является задача поиска экстремума у функций даже весьма узкого класса (многочлены с рациональными коэффициентами от нескольких переменных), и, что существенно, указанная теорема нисколько не помогает в решении этой задачи. Заметим, что описанная выше критика классич. математики не связана непосредственно с *антиномиями* теории множеств. Появление антиномий можно рассматривать как дополнительный довод в пользу неудовлетворительности теоретико-множественного подхода, но критика относится и к таким разделам математики, где антиномий не возникает.

Описанная критика теоретико-множественного подхода к математике исторически привела к возникновению двух путей преодоления трудностей в обосновании математики — интуиционизма Л. Э. Я. Брауэра и формализма Д. Гильберта (D. Hilbert). Обе концепции, развиваясь, оказывают в настоящее время (1970-е гг.) значительное влияние друг на друга. Так, при обосновании непротиворечивости формальных теорий необходимо уточнить приемы содержательных умозаключений в метаматематике, что делается обычно в рамках тех или иных интуиционистских концепций. С другой стороны, именно с помощью *формализации метода* удалось получить ряд важнейших результатов о логике интуиционизма.

Интуиционистская математика есть наука об интуитивно убедительных мысленных построениях. Сам Л. Э. Я. Брауэр трактовал эту интуитивную убедительность идеалистически, рассматривая мысленные построения как таковые «безотносительно к таким вопросам о природе конструируемых объектов, как вопрос, существуют ли эти объекты независимо от нашего знания о них» (см. [1]). Однако возможно и материалистич. толкование «интуиции» И. как наглядной умственной убедительности простейших конструктивных процессов реальной действительности. И независимо от философских установок, конкретные математич. результаты, относящиеся к интуиционистской математике и логике, представляют большую научную ценность.

При построении интуиционистской математики обычные логич. связки, употребляемые для формулировки математич. суждений, истолковываются способом, отличным от классического. Суждение считается истинным, только если исследователь имеет возможность его доказать. Доказательство же всегда связано с построением нек-рой мысленной конструкции. Так, утверждение, начинающееся с квантора существования $\exists x A(x)$, может быть доказано только путем построения объекта x, для к-рого доказывается суждение $A(x)$. Дизъюнкция $A \vee B$ суждений A и B считается доказанной, только если исследователь располагает методом доказательства одного из суждений A или B. С этой точки зрения суждение вида $A \vee \neg A$ может быть и не истинным, если проблема A не решена и не опровергнута к настоящему времени. Отсюда видно, что *исключенного третьего закон* неприемлем в интуиционистской математике в качестве логич. принципа. Истинное математич. суждение представляет собой сообщение о выполненных построениях, и эффективный характер этих построений предполагает использование особой интуиционистской логики, отличной от классической. При этом эффективность в И. понимается достаточно широко, она не обязательно связана с наличием алгоритма в точном понимании этого термина и может носить, напр., характер историч. наступления события, зависеть от фактич. решения проблем, от физич. факторов.

Объектами исследования интуиционистской математики являются прежде всего *конструктивные объекты*, такие, как натуральные числа, рациональные числа, конечные множества конструктивных объектов, заданные списком своих элементов. Своеобразным объектом исследования являются так наз. свободно становящиеся последовательности (с. с. п.; в другой терминологии — п о с л е д о в а т е л ь н о с т и в ы б о р а). С. с. п. можно представлять себе как функцию, определенную на натуральном ряде, принимающую в качестве значений объекты исследования некоторого класса (в простейшем случае — натуральные числа) и такую, что всякое ее значение эффективно становится доступным исследователю. Точный анализ показывает, что следует различать несколько видов с. с. п. в зависимости от степени информации, известной исследователю относительно с. с. п. Так, если полностью известен закон образования с. с. п., напр. в виде записи соответствующего алгоритма, то такую с. с. п. наз. з а д а н н о й з а к о н о м. Другой крайний случай имеет место, если в каждый момент времени исследователю известен лишь нек-рый начальный отрезок с. с. п. и нет никакой информации относительно ее дальнейшего поведения; такие с. с. п. наз. б е з з а к о н н ы м и. Эти различия, игнорируемые в классич. математике, в интуиционистской математике могут быть отражены посредством точных математич. принципов, свидетельствующих о разных способах обращения с такими с. с. п. Наконец, объектами исследования интуиционистской математики могут быть и так наз. интуиционистские *виды*. Вид — свойство, к-рым могут обладать объекты исследования. Объекты, удовлетворяющие этому свойству, наз. элементами вида, или его членами. Во избежание появления антиномий среди видов можно ввести иерархию, подобную *типов теории*, а именно, требовать, чтобы элементы вида были определены независимо от определения самого вида. Разумеется, при широком введении видов в интуиционистскую математику в ней возникают проблемы, характерные для абстрактной теории множеств, такие, как предикативность, возникновение антиномий и т. п. Следует, однако, иметь в виду, что, с одной стороны, обращение с видами во многом отлично от обращения с множествами в классич. математике и, с другой стороны, в практически разрабатываемой интуиционистской математике виды занимают весьма скромное место. В действительности подавляющую часть результатов можно сформулировать и доказать вообще без употребления видов как самостоятельных объектов исследования. Это связано с естественной тенденцией И. рассматривать в качестве объекта исследования эффективно конструируемые или эффективно порождаемые объекты. В рамках И. рассматриваются и другие, «нетрадиционные» объекты. Перспективным оказалось изучение эффективных функционалов конечного типа, с помощью к-рых в рамках И. удалось построить интерпретацию для классич. анализа [П. С. Новиков, К. Гёдель (K. Gödel), К. Спектор (C. Spector)].

Отказ от рассмотрения актуально заданных бесконечных множеств и требование эффективности всех осуществляемых построений приводят к тому, что нек-рые разделы традиционной математики приобретают в И. весьма необычный вид. Числовой континуум трактуется не как совокупность отдельных точек, а как «среда становления», *поток* измельчающихся рациональных интервалов. Каждое отдельное интуиционистское действительное число определяется с. с. п., значениями к-рой являются неограниченно уменьшающиеся вложенные друг в друга рациональные интервалы. В рассуждениях об интуиционистском числовом континууме применяются такие специфич. принципы, как *бар-индукция* и теорема о *веере*. Следствием этого является, напр., то обстоятельство, что в естественной системе понятий всякая интуиционистская действительная функция, определенная на отрезке, равномерно непрерывна. Интуиционистская математика является достаточно разработанным направлением в математике, содержащим много продвинутых результатов, в том числе и в таких областях, как теория меры, функциональный анализ, топология, теория дифференциальных уравнений.

Несколько в стороне от этих исследований стоит попытка Г. Вейля (H. Weyl, 1918) построить математику на основе предикативного подхода. Соглашаясь в целом с интуиционистской критикой, Г. Вейль предложил ограничиться конструктивными объектами исследования и задавать множества в виде условий в нек-ром языке, определяемом таким образом, чтобы не нарушалась предикативность определения множеств. Впоследствии Г. Вейль присоединился к развитой интуиционистской концепции построения математики, его взгляды положили начало глубоким исследованиям в основаниях математики.

Считая критерием верности построений прежде всего интуицию и в противовес формализму, Л. Э. Я. Брауэр возражал против попыток формализации интуиционистской математики и, в частности, интуиционистской логики. Однако значительные успехи в изучении интуиционистской логики были достигнуты именно после того, как ее основные законы были точно сформулированы в виде *исчислений*, к к-рым можно было применять точные методы математич. логики. В разработке интуиционистской логики приняли значительное участие и математики, не считающие себя «интуиционистами». Более того, вопрос «веры в интуиционизм» становится второстепенным — специальные интуиционистские исчисления имеют большой чисто математич. интерес, как проясняющие различные идеи эффективности в математике. Современная тенденция в развитии И. сближает его с *конструктивной математикой* в самом широком понимании последнего термина.

После точной формулировки А. Гейтингом (A. Heyting) интуиционистского исчисления предикатов (см. *Интуиционистская логика*) была открыта топологич. интерпретация этого исчисления [А. Тарский (A. Tarski)] и интерпретация интуиционистского исчисления предикатов в виде исчисления задач (А. Н. Колмогоров). Была доказана независимость логич. связок и невозможность представления интуиционистской логики высказываний в виде конечнозначной логики (К. Гёдель). А. Гейтинг описал интуиционистское арифметическое исчисление, к-рое получается, если классическое арифметич. исчисление рассматривать на базе интуиционистского исчисления предикатов. Для исчисления предикатов и арифметич. исчисления А. Н. Колмогоров и К. Гёдель предложили *погружающую операцию* классич. исчисления в негативный фрагмент соответствующего интуиционистского исчисления, из к-рой, в частности, следует непротиворечивость классич. исчисления, если интуиционистское считать содержательно истинным. Были установлены свойства интуиционистской дизъюнкции и существования, состоящие в том, что если выводимо утверждение $\exists x A(x)$, то для нек-рого терма t выводимо $A(t)$, а из выводимости $A \vee B$ следует выводимость A или выводимость B. Некоторый вариант интуиционистского понимания суждений был предложен С. К. Клини (S. C. Kleene) в форме *рекурсивной реализуемости*. Именно такое понимание характерно для конструктивного направления в математике, развиваемого в Советском Союзе научной школой А. А. Маркова. Понимая термин «И.» достаточно широко, можно рассматривать конструктивное направление в математике как разновидность И., для к-рого характерно исследование конструктивных объектов и конструктивных процессов алгоритмич. методами.

Исследовался вопрос о семантической полноте интуиционистского исчисления предикатов. Исчерпывающая алгебраич. характеристика выводимости дана в теории моделей интуиционистской логики Э. Бета (E. Beth) и С. Крипке (S. Kripke). Эти теории имеют значительные приложения и в других разделах интуиционистской математики. Интуиционистская логика полна относительно нек-рых концепций с. с. п. и, в то же время, не полна относительно рекурсивной реализуемости. Интуиционистское понимание кванторов позволяет сформулировать в арифметике в виде математич. утверждения *Чёрча тезис*, напр. в форме: «если для всякого натурального числа x существует натуральное y, удовлетворяющее отношению $A(x, y)$, то существует общерекурсивная функция f такая, что для всякого x имеет место $A(x, f(x))$», при этом отношение $A(x, y)$ не должно содержать неконструктивных параметров типа с. с. п. В языке арифметики можно естественно сформулировать и *конструктивного подбора принцип* А. А. Маркова. Анализ взаимоотношений этих фундаментальных принципов в интуиционистских теориях является предметом ряда современных исследований.

Удовлетворительное построение теории с. с. п. и более высоких разделов интуиционистской математики было завершено к 70-м гг. 20 в. Обычный язык формальной теории интуиционистского анализа содержит два сорта переменных: переменные x, y, z, ... для натуральных чисел и переменные α, β, γ, ... для с. с. п., перерабатывающих натуральные числа в натуральные. В качестве термов теория содержит символы примитивно-рекурсивных операций над функциями и числами. Атомарные формулы имеют вид равенства двух термов, кванторы употребляются по обоим сортам переменных. Теория содержит все постулаты интуиционистского арифметич. исчисления. Эта группа постулатов обеспечивает возможность вывести в теории все основные свойства примитивно-рекурсивных преобразований чисел и функций. Так, в теории можно описать взаимно однозначный способ кодирования конечных последовательностей *(кортежей)* натуральных чисел натуральными числами. Пусть $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ означает номер кортежа с числами $x_1, \ldots, x_n$ в качестве членов; $x*y$ есть операция сочленения кортежей, заданных номерами, т. е. если $x=\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ и $y=\langle y_1, \ldots, y_m\rangle$, то $x*y=\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\rangle$. Номер одночленного кортежа $\langle x\rangle$ обозначим через $\hat{x}$. Пусть $\overline{\alpha}x$ означает кортеж $\langle\alpha(0), \ldots, \alpha(n-1)\rangle$. Введем предикат «$\alpha$ есть непрерывный оператор» следующим определением: $\alpha\in K$ означает

$$\forall\beta\exists x\,(\alpha\,(\overline{\beta}x)>0)\,\&\forall xy\,(\alpha x>0\supset\alpha\,(x*y)=\alpha\,(x)),$$

результаты применения непрерывного оператора к с. с. п. определяются следующим образом: $y=\alpha(\beta)$ означает

$$\exists z\,(y+1=\alpha\,(\overline{\beta}z))$$

и $\gamma=(\alpha|\beta)$ означает

$$\forall y\exists z\,(\gamma\,(y)+1=\alpha\,(\hat{y}*\overline{\beta}\,(z))).$$

Пусть, далее, $(\beta)_x$ означает такую функцию α, что

$$\forall y\,(\alpha\,(y)=\beta\,(\langle x,\ y\rangle)).$$

С помощью приведенных определений можно точно сформулировать несколько фундаментальных принципов, относящихся собственно к с. с. п. Это прежде всего интуиционистская аксиома выбора:

$$\forall x\exists\alpha A\,(x,\ \alpha)\supset\exists\beta\forall xA\,(x,\ (\beta)_x),$$

принцип непрерывности Брауэра

$$\forall\alpha\exists\beta A\,(\alpha,\ \beta)\supset(\exists\gamma\in K)\,A\,(\alpha,\ (\gamma\,|\,\alpha))$$

и бар-индукция. Эти принципы задают формальную теорию с. с. п., предложенную С. Клини, теорию, достаточную для получения в ней всех основных теорем интуиционистского анализа, включая теорему о веере, равномерную непрерывность действительных функций и др. Следует иметь в виду, что эта теория отражает лишь один вид интуиционистских последовательностей, вид, особенно пригодный для построения интуиционистского анализа. Другой характерный вид с. с. п. — беззаконные последовательности, упомянутые выше. Следующий принцип Крайзеля отражает то обстоятельство, что вся информация о беззаконной с. с. п. может быть извлечена лишь путем исследования ее начальных отрезков:

$$A\,(\alpha)\supset\exists xy\,(\overline{\alpha}x=y\&\forall\beta\,(\overline{\beta}x=y\supset A\,(\beta))),$$

где α — единственный параметр $A\,(\alpha)$ по с. с. п.

Еще один вид с. с. п. возникает при попытке отобразить в формальной теории существование с. с. п., зависящих от решения проблем. Для таких с. с. п. истинна так наз. схема Крипке:

$$\exists\alpha\,((\forall x\alpha(x)=0 \equiv \neg A)\wedge(\exists x\alpha(x)\neq 0 \supset A)).$$

Различные интуиционистские принципы имеют место по отношению к определенным видам с. с. п. Так, для беззаконных последовательностей не выполняется в общем виде интуиционистская аксиома выбора, а последовательности, зависящие от решения проблем, не удовлетворяют принципу непрерывности Брауэра в том его виде, к-рый был указан выше. Гораздо менее разработаны формальные теории для отражения интуиционистской теории видов. Однако и здесь имеются попытки сформулировать специфически интуиционистские способы обращения с видами. Напр., если X — переменная для видов натуральных чисел, то можно принять следующую схему аксиом, предложенную А. Троэльстра [4]:

$$\forall X\exists xA(x, X)\supset\exists x\forall XA(x, X).$$

До 2-й половины 20 в. идеи Л. Э. Я. Брауэра в полном объеме оставались достоянием узкой группы математиков-интуиционистов, хотя они и оказали большое влияние на все дальнейшие исследования по основаниям математики. В последнее время положение изменилось. Развитие теории доказательств позволило оформить в виде точных исчислений основные интуиционистские теории и подвергнуть их точному исследованию. Развитие вычислительной тенденции в математике пробудило интерес к логич. анализу эффективных средств доказательства и изучению абстракций, применяемых в математике. Возникли различные программы конструктивной перестройки математики в той или иной концепции конструктивности. Синтез традиционных методов И. с современными методами теории доказательств позволил значительно продвинуться в И.

Лит.: [1] Гейтинг А., Интуиционизм, пер. с англ., М., 1965; [2] Kleene S. C., Vesley R. E., The foundations of intuitionistic mathematics, Amst., 1965; [3] Kreisel G., Troelstra A. S., «Ann. Math. Logic», 1970, v. 1, № 3, p. 229—387; [4] Troelstra A. S., Metamathematical investigation of intuitionistic Arithmetic and Analysis, B., 1973 (Lect. Notes in Math., № 344); [5] Мартин-Лёф П., Очерки по конструктивной математике, пер. с англ., М., 1975; [6] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966. *А. Г. Драгалин.*

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА — совокупность приемлемых с точки зрения *интуиционизма* методов доказательства утверждений. В более узком смысле под И. л. понимается интуиционистское исчисление предикатов, сформулированное А. Гейтингом (A. Heyting) в 1930. Это исчисление формулируется обычно в стандартном языке *предикатов исчисления*, содержит все схемы аксиом и правила вывода *интуиционистского исчисления высказываний* (но для языка исчисления предикатов) и, кроме того, следующие кванторные аксиомы и правила вывода. Аксиомы:

$$\forall xA(x)\supset A(t) \quad \text{и} \quad A(t)\supset\exists xA(x).$$

Два правила вывода:

$$\frac{C\supset A(x)}{C\supset\forall xA(x)}, \quad \frac{A(x)\supset C}{\exists xA(x)\supset C},$$

где x — переменная, t — терм языка, формула C не содержит x в качестве параметра.

Полнота интуиционистского исчисления предикатов зависит от семантич. принципов, к-рые лежат в основе рассматриваемой интуиционистской теории. Так, принцип конструктивного подбора Маркова (см. *Конструктивного подбора принцип*) в форме

$$\forall x(P(x)\vee\neg P(x))\wedge$$
$$\neg\neg\exists xP(x)\supset\exists xP(x)$$

не выводится в интуиционистском исчислении предикатов, но принимается как истинный в нек-рых разновидностях конструктивизма. Другой пример такого рода — так наз. принцип униформизации:

$$(\neg Q \supset \exists x P(x)) \supset \exists x (\neg Q \supset P(x)),$$

являющийся истинным в нек-рых интуиционистских интерпретациях и в то же время несовместный с принципом конструктивного подбора в рамках арифметич. теории с *Чёрча тезисом*. Приведенные примеры показывают, что не существует единого полного интуиционистского исчисления предикатов, к-рое могло бы служить логич. базисом всех прикладных интуиционистских теорий. В зависимости от применяемых семантич. соглашений возможны существенно различные варианты И. л. Развитие интуиционистской теории *видов* позволяет в рамках интуиционизма точно формулировать многие семантич. проблемы. Так. К. Гёдель (K. Gödel) показал, что полнота интуиционистского исчисления предикатов относительно интуиционистской теории видов влечет принцип конструктивного подбора Маркова для примитивно-рекурсивных предикатов, что является аргументом в пользу неполноты исчисления предикатов с точки зрения такой семантики. С другой стороны, были найдены интуиционистски приемлемые доказательства полноты И. л. относительно алгебраич. семантик типа моделей Бета или моделей Крипке.

Лит.: [1] Гейтинг А., Интуиционизм, пер. с англ., М., 1965; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *А. Г. Драгалин.*

ИНТУИЦИОНИСТСКОЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — см. *Интуиционизм.*

ИНТУИЦИОНИСТСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ — *логическое исчисление*, описывающее способы вывода высказываний, истинных с точки зрения *интуиционизма*. Общепринятая (к 1978) формулировка И. и. в. была предложена А. Гейтингом (A. Heyting) в 1930. Основное ее отличие от классич. исчисления высказываний состоит в замене *исключенного третьего закона* (или эквивалентного ему закона снятия двойного отрицания) более слабым принципом противоречия:

$$A \supset (\neg A \supset B).$$

Один из распространенных вариантов И. и. в. формулируется следующим образом. Пусть A, B, C — произвольные формулы рассматриваемого логич. языка. Аксиомы исчисления суть формулы следующего вида:

1. $A \supset (B \supset A)$;
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$;
3. $A \supset (B \supset A \wedge B)$;
4. $A \wedge B \supset A$;
5. $A \wedge B \supset B$;
6. $A \supset A \vee B$;
7. $B \supset A \vee B$;
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$;
9. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$;
10. $A \supset (\neg A \supset B)$.

Единственное правило вывода И. и. в.— правило modus ponens: если выведены формулы A и $A \supset B$, то выводима и формула B.

Всякая выводимая формула этого исчисления приемлема с интуиционистской точки зрения; более сложен вопрос о полноте описанного исчисления. И. и. в. оказывается, напр., полным относительно алгебраич. семантик — моделей Крипке и моделей Бета, но неполным относительно естественной конструктивной семантики — *рекурсивной реализуемости* Клини; см. также *Конструктивное исчисление высказываний.*

Лит. см. при ст. *Интуиционизм.* *А. Г. Драгалин.*

ИНТУИЦИОНИСТСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ — см. *Интуиционистская логика.*

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ СВЯЗНОСТЬ — первоначальное название дифференциально-геометрич. структуры на расслоенном пространстве, к-рую впоследствии стали называть просто *связность.* *Ю. Г. Лумисте.*

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА — структура на n-мерном дифференцируемом многообразии M^n, к-рая определяется приведением структурной дифференциальной группы D_n^r главного расслоения реперов r-го порядка на M^n, т. е. обратимых r-струй из $\mathbb{R}^n$ в M^n с началом $O \in \mathbb{R}^n$, к нек-рой своей подгруппе Ли G. Другими словами, на M^n задана И. с. r-го порядка, если в факторрасслоении главного расслоения реперов r-го порядка на M^n по подгруппе Ли $G \subset D_n^r$ выделено нек-рое сечение. При $r=1$ И. с. наз. также G-структурой на M^n, а при $r>1$ наз. G-структурой высшего порядка. Если D_n^r заменяется проективной дифференциальной группой PD_n^r — нек-рой своей факторгруппой группы D_n^{r+1}, то соответствующая И. с. наз. проективной инфинитезимальной структурой.

Аппаратом для изучения И. с. являются ее структурные уравнения. Основные задачи при исследовании И. с.— нахождение топологич. характеристик многообразия M^n, допускающего ту или иную И. с., выделение И. с., получаемых продолжением нек-рой И. с. более низкого порядка, проблема интегрируемости И. с. и др.

Лит.: [1] Лаптев Г. Ф., «Тр. геометрич. семинара ВИНИТИ», т. 1, 1966, с. 139—89; [2] Chern S. S., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1966, v. 72, № 2, p. 167—219.

Ю. Г. Лумисте.

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — наименование линейных операторов, являющихся дифференциалами отображений нек-рых классов. Так, на *дифференцируемом многообразии* И. о., или инфинитезимальное преобразование,— то же, что и векторное поле, в теории полугрупп (операторов, преобразований) — то же, что и (инфинитезимальный) производящий оператор. *М. И. Войцеховский.*

ИНФОРМАНТ — градиент логарифмической функции правдоподобия. Понятие И. возникает в так наз. параметрич. задачах математич. статистики. Имеется априорная информация, что наблюдаемое случайное явление описывается распределением вероятностей $P^\theta(d\omega)$ из семейства $\{P^t, t \in \Theta\}$, где t — числовой или векторный параметр, однако истинное значение θ неизвестно. Проведенное наблюдение (серия независимых наблюдений) явления привело к исходу ω (серии $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(N)}$). По исходам наблюдения требуется оценить θ. Пусть семейство $\{P^t\}$ задается семейством плотностей $p(\omega; t)$ относительно меры $\mu(d\omega)$ на пространстве Ω всех исходов явления. Когда Ω дискретно, за $p(\omega; t)$ можно принять сами вероятности $P^t(\omega)$ исходов. При фиксированном ω величина $p(\omega; t)$ как функция параметра $t=(t_1, \ldots, t_m)$ наз. функцией правдоподобия, а ее натуральный логарифм — логарифмической функцией правдоподобия.

Для гладких семейств удобно вводить И. как вектор

$$\operatorname{grad}_t \ln p(\omega; t) = \\ = \left(\frac{1}{p(\omega; t)} \frac{\partial p(\omega; t)}{\partial t_1}, \ldots, \frac{1}{p(\omega; t)} \frac{\partial p(\omega; t)}{\partial t_n}\right),$$

к-рый, в отличие от логарифмической функции правдоподобия, не зависит от выбора меры μ. И. содержит всю существенную для задачи оценки θ информацию, как получаемую из наблюдений, так и известную заранее. Кроме того, он аддитивен: при независимых наблюдениях, т. е. когда

$$p(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(N)}; t) = \prod_{k=1}^{N} p_k(\omega^{(k)}; t),$$

И. суммируется:

$$\operatorname{grad} \ln p(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(N)}; t) = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{grad} \ln p_k(\omega^{(k)}; t).$$

В теории статистич. оценивания существенны свойства И. как случайной вектор-функции. В предположении, что логарифмич. функция правдоподобия регулярна, в частности дважды дифференцируема, ее производные интегрируемы и что дифференцирование по параметру перестановочно с интегрированием по исходам, справедливы тождества:

$$\mathsf{E}_t \frac{\partial \ln p(\omega; t)}{\partial t_k} = \int_{\Omega} \frac{\partial \ln p(\omega; k)}{\partial t_k} p(\omega; t)\, d\mu = 0, \ \forall k;$$

$$-\mathsf{E}_t \frac{\partial^2 \ln p(\omega; t)}{\partial t_j \partial t_k} = I_{jk}(t) = \mathsf{E}_t \frac{\partial \ln p}{\partial t_j} \frac{\partial \ln p}{\partial t_k}, \ \forall j, k.$$

Ковариационная матрица $\|I_{jk}(t)\|_{j,k=1}^{m}$ наз. *информационной матрицей*. Через эту матрицу выписывается неравенство информации, дающее границу точности статистич. оценок параметра θ.

При оценке θ методом максимума правдоподобия наблюденному исходу ω (или серии $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(N)}$) сопоставляется наиболее правдоподобное, т. е. максимизирующее функцию правдоподобия и логарифмич. функцию правдоподобия, значение $t = \theta^*(\omega)$. В точке экстремума И. должен обращаться в нуль. Однако возникающее уравнение правдоподобия

$$\operatorname{grad} \ln p(\omega; t) = 0$$

может иметь лишние корни сверх $t = \theta^*$, к-рые отвечают локальным максимумам (или минимумам) логарифмич. функции правдоподобия и к-рые следует отбрасывать. Если в нек-рой окрестности значения $t = 0$

$$\det \| I_{jk}(t) \| \neq 0,$$

то из приведенных свойств И. следует асимптотич. оптимальность оценки θ_N^* максимума правдоподобия при возрастании числа N используемых независимых наблюдений.

Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967. *Н. Н. Ченцов.*

ИНФОРМАЦИИ КОЛИЧЕСТВО — теоретико-информационная мера величины информации, содержащейся в одной случайной величине относительно другой. Пусть ξ и η — случайные величины, определенные на нек-ром *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и принимающие значения в измеримых пространствах $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$ и $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$ соответственно, а $p_{\xi\eta}(C)$, $C \in S_{\mathfrak{X}} \times S_{\mathfrak{Y}}$, $p_{\xi}(A)$, $A \in S_{\mathfrak{X}}$, $p_{\eta}(B)$, $B \in S_{\mathfrak{Y}}$ — их совместное и маргинальные распределения вероятностей. Если распределение $p_{\xi\eta}(\cdot)$ абсолютно непрерывно относительно прямого произведения мер $p_{\xi} \times p_{\eta}(\cdot)$, $a_{\xi\eta}(\cdot)$ — плотность (по Радону — Никодиму) меры $p_{\xi\eta}(\cdot)$ относительно меры $p_{\xi} \times p_{\eta}(\cdot)$, и $i_{\xi\eta}(\cdot) = \log a_{\xi\eta}(\cdot)$ — информационная плотность (логарифмы обычно берутся по основанию 2 или e), то, по определению, И. к. дается формулой

$$I(\xi, \eta) = \int_{\mathfrak{X} \times \mathrm{Y}} i_{\xi\eta}(x, y)\, p_{\xi\eta}(dx, dy) =$$

$$= \int_{\mathfrak{X} \times \mathrm{Y}} a_{\xi\eta}(x, y) \log a_{\xi\eta}(x, y)\, p_{\xi}(dx)\, p_{\eta}(dy).$$

Если же мера $p_{\xi\eta}(\cdot)$ не является абсолютно непрерывной относительно произведения мер $p_{\xi} \times p_{\eta}(\cdot)$, то, по определению, $I(\xi, \eta) = +\infty$.

В случае, когда величины ξ и η принимают конечное число значений, выражение для И. к. $I(\xi, \eta)$ приобретает следующий вид:

$$I(\xi, \eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\log\frac{p_{ij}}{p_i q_j},$$

где

$$\{p_i,\ i=1,\ \ldots,\ n\},\quad \{q_j,\ j=1,\ \ldots,\ m\},$$

$\{p_{ij},\ i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m\}$ — распределения вероятностей ξ, η и пары (ξ, η) соответственно (в частности,

$$I(\xi, \xi)=-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = H(\xi)$$

является *энтропией* случайной величины ξ), а если ξ, η — случайные векторы и существуют плотности $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$, $p_{\xi\eta}(x, y)$ случайных векторов ξ, η и пары (ξ, η) соответственно, то

$$I(\xi, \eta)=\int p_{\xi\eta}(x, y)\log\frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\xi(x)\,p_\eta(y)}\,dxdy.$$

В общем случае

$$I(\xi, \eta)=\sup I(\varphi(\xi), \psi(\eta)),$$

где верхняя грань берется по всем измеримым функциям $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ с конечным числом значений. Понятие И. к. используется главным образом в теории передачи информации.

Лит. см. [1], [2], [4] при ст. *Информации передача.*

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ИНФОРМАЦИИ ПЕРЕДАЧА — составная часть *информации теории*, относящаяся к изучению процесса переноса информации от *источника сообщений* к получателю сообщений (адресату). В теории И. п. изучаются оптимальные и близкие к оптимальным методы И. п. по каналам связи в предположении, что можно в широких пределах варьировать методы кодирования сообщений в сигналы на входе канала и декодирования сигналов на выходе канала в сообщения на выходе (см. *Кодирование и декодирование*).

Общую схему системы И. п., впервые рассмотренную К. Шенноном (C. Shannon, [1]), можно описать следующим образом. Источник сообщений вырабатывает сообщения, подлежащие передаче по каналу связи от источника к получателю. Обычно предполагают, что это сообщение — случайная величина ξ, определенная на нек-ром *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, принимающая значения в нек-ром измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$ и имеющая распределение вероятностей $p(\cdot)$. Часто $\xi=\{\xi(t),\ t\in\Delta\}$, где Δ — множество значений параметра t, является случайным процессом с дискретным или непрерывным временем со значениями в нек-ром измеримом пространстве (X, S_X). Напр., в случае дискретного времени $\xi=\{\xi_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots\}$ или $\xi=\{\xi_k,\ k=\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots\}$ случайные величины ξ_k, принимающие значения в измеримом пространстве (X, S_X), наз. компонентами сообщения на входе и часто трактуются как сообщения, вырабатываемые источником в моменты времени k. Наборы $\xi^n=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, принимающие значения в пространстве (X^n, S_{X^n}), т. е. в n-кратном произведении пространств (X, S_X), наз. отрезками сообщений длины n на входе. Аналогичным образом определяются соответствующие понятия и в случае, когда сообщение — случайный процесс с непрерывным временем.

Сообщение на выходе, получаемое адресатом,— это тоже случайная величина $\tilde{\xi}$, определенная на том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и принимающая значения в измеримом пространстве $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$ (вообще говоря, отличном от $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$). В случае, когда $\tilde{\xi}$ является случайным процессом с дискретным или непрерывным временем, аналогичным образом вводятся понятия пространства $(\tilde{X}, S_{\tilde{X}})$ значений компонент сообщения на выходе и пространства $(\tilde{X}^n, S_{\tilde{X}^n})$ значений отрезков длины n сообщения на выходе.

Мерой качества передачи сообщений по каналу связи является *сообщений точность воспроизведения.* Как правило, если передача ведется по каналу связи с помехами, даже если множества $\mathfrak{X}$ и $\tilde{\mathfrak{X}}$ совпадают, нельзя добиться абсолютной точности, т. е. полного совпадения посылаемого и получаемого сообщений. Обычно требования, предъявляемые к точности, трактуют статистически, выделяя класс W допустимых совместных распределений вероятностей для пары $(\xi, \tilde{\xi})$ передаваемого и получаемого сообщений в множестве всех вероятностных мер в произведении $(\mathfrak{X}\times\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\mathfrak{X}}\times S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$. Класс W часто задается при помощи измеримой неотрицательной функции $\rho(x, \tilde{x})$, $x\in\mathfrak{X}$, $\tilde{x}\in\tilde{\mathfrak{X}}$, и числа $a>0$: считают, что распределение вероятностей $(\xi, \tilde{\xi})$ принадлежит W, лишь если

$$\mathbf{E}\rho(\xi, \tilde{\xi})\leqslant a. \qquad (1)$$

Таким образом, условие точности воспроизведения показывает, насколько полученное сообщение может отличаться от переданного.

Сообщения, вырабатываемые источником, передаются по каналу связи. Каналом (Q, V) наз. совокупность двух измеримых пространств $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$, $(\tilde{\mathfrak{Y}}, S_{\tilde{\mathfrak{Y}}})$, переходной функции $Q(y, A)$, $y\in\mathfrak{Y}$, $A\in S_{\tilde{\mathfrak{Y}}}$, являющейся измеримой относительно σ-алгебры $S_{\mathfrak{Y}}$ при фиксированном $A\in S_{\tilde{\mathfrak{Y}}}$ и вероятностной мерой на $(\tilde{\mathfrak{Y}}, S_{\tilde{\mathfrak{Y}}})$ при фиксированном $y\in\mathfrak{Y}$, и подмножества V в пространстве всех вероятностных мер в пространстве $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$. Пространства $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$, $(\tilde{\mathfrak{Y}}, S_{\tilde{\mathfrak{Y}}})$ наз. соответственно пространствами сигналов на входе и выходе канала, а подмножество V — ограничением на распределение сигнала на входе. Говорят, что две случайные величины η и $\tilde{\eta}$ (определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$) связаны каналом (Q, V), если они принимают значения в $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$, $(\tilde{\mathfrak{Y}}, S_{\tilde{\mathfrak{Y}}})$ соответственно и для любого $A\in S_{\tilde{\mathfrak{Y}}}$ с вероятностью 1 условная вероятность

$$\mathbf{P}\{\tilde{\eta}\in A \mid \eta\}=Q(\eta, A), \qquad (2)$$

и распределение вероятностей случайной величины η принадлежит V. Наиболее часто ограничение V задается с помощью измеримой функции $\pi(y)$, $y\in\mathfrak{Y}$, и числа $b>0$: считают, что распределение вероятностей η принадлежит V, лишь если

$$\mathbf{E}\pi(\eta)\leqslant b. \qquad (3)$$

В случае дискретных каналов V обычно совпадает с совокупностью всех распределений вероятностей, т. е. ограничение отсутствует.

С наглядной точки зрения, $\mathfrak{Y}$ — это совокупность сигналов, передаваемых передатчиком, а $\tilde{\mathfrak{Y}}$ — совокупность сигналов, принимаемых приемником (в приложениях пространства $\mathfrak{Y}$ и $\tilde{\mathfrak{Y}}$ часто совпадают). Если задано случайное значение η сигнала на входе, то (2) позволяет найти условное распределение сигнала на выходе $\tilde{\eta}$. Введение ограничения V связано с тем, что во многих приложениях нельзя считать распределение входного сигнала произвольным [типична, напр., ситуация, когда предполагается, что среднее значение квадрата (мощность) входного сигнала не превосходит заданной константы]. В приложениях особенно важен случай, когда сигналами на входе и выходе канала являются случайные процессы $\eta=\{\eta(t)\}$, $\tilde{\eta}=\{\tilde{\eta}(t)\}$ с дискретным или непрерывным временем, определенные на нек-ром конечном или бесконечном (в одну или обе стороны) интервале действительной оси и принимающие значения в нек-рых измеримых пространствах (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно. Напр., если $\eta=\{\eta_1, \eta_2, \ldots\}$ и $\tilde{\eta}=\{\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \ldots\}$ — случайные последовательности, то канал связи, для к-рого последовательности η и $\tilde{\eta}$ служат сигналами на входе и выходе, часто рассматривают как последовательность каналов (в описанном выше смысле), называемых отрезками данного канала; сигналами на входе и выходе этих отрезков канала служат векторы

$$\eta^n=(\eta_1, \ldots, \eta_n) \text{ и } \tilde{\eta}^n=(\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n),\ n=1, 2, \ldots$$

Для того чтобы превратить сообщение на входе в сигнал, передаваемый по каналу связи, а сигнал, полученный на выходе канала,— в сообщение на выходе, необходимо провести операции кодирования и декодирования сообщений. **Кодированием** наз. функцию $f(x)$ от $x\in\mathfrak{X}$ со значениями в $\mathfrak{Y}$, а **декодированием** — функцию $\tilde{g}(y)$ от $\tilde{y}\in\tilde{\mathfrak{Y}}$ со значениями в $\tilde{\mathfrak{X}}$. Множество значений функции $f(x)$, $x\in\mathfrak{X}$, часто наз. **кодом**, а отдельные элементы этого множества — **кодовыми словами**. Использование кодирования $f(x)$ и декодирования $g(\tilde{y})$ означает, что если сообщение приняло значение $x\in\mathfrak{X}$, то по каналу передается сигнал $y=f(x)$; если на выходе канала получен сигнал $\tilde{y}\in\tilde{\mathfrak{Y}}$, то его декодируют в сообщение на выходе $\tilde{x}=g(\tilde{y})$. В теории передачи информации часто рассматривают **случайное кодирование**, когда кодовые слова выбираются случайно в соответствии с нек-рым распределением вероятностей.

Сообщение с распределением вероятностей $p(\cdot)$, вырабатываемое источником, может быть передано с точностью воспроизведения W по каналу (Q, V) при помощи кодирования $f(\cdot)$ и декодирования $g(\cdot)$, если могут быть построены случайные величины ξ, η, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$, образующие цепь Маркова такую, что ξ имеет распределение вероятностей $p(\cdot)$, распределение вероятностей пары $(\xi, \tilde{\xi})$ принадлежит W, пара $(\eta, \tilde{\eta})$ связана каналом (Q, V) и

$$\eta=f(\xi), \quad \tilde{\xi}=g(\tilde{\eta}). \tag{4}$$

Предположение о том, что ξ, η, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ образуют цепь Маркова, сводится к предположению о том, что условное распределение $\tilde{\eta}$ при заданных значениях ξ и η зависит лишь от η, т. е. оно означает, что при передаче сигнал на выходе зависит лишь от сигнала на входе, а не от того, какое значение сообщения им закодировано.

Основную проблему, исследуемую в И. п., можно сформулировать следующим образом. Считаются известными и фиксированными источник, порождающий сообщения с распределением вероятностей $p(\cdot)$, канал связи (Q, V) и условия точности воспроизведения W. Задача состоит в том, чтобы выяснить, при каких условиях существуют методы кодирования $f(\cdot)$ и декодирования $g(\cdot)$ такие, что сообщение, вырабатываемое данным источником, может быть передано с заданной точностью воспроизведения W по данному каналу (Q, V). Решения этой проблемы при разных предположениях наз. теоремами кодирования, или теоремами Шеннона. Естественно возникает также другая проблема о том, как в случае, когда передача возможна, построить наиболее простым и эффективным образом кодирование и декодирование, осуществляющие эту передачу.

К. Шеннон [1] ввел величины, позволяющие сформулировать ответ на первую из поставленных проблем. Главной среди них является *информации количество*, или просто информация, $I(\cdot, \cdot)$. Если

$$C = C(Q, V) = \sup I(\eta, \tilde{\eta}) \tag{5}$$

— пропускная способность канала (Q, V) (см. *Канала пропускная способность*), где верхняя грань берется по всем парам величин $(\eta, \tilde{\eta})$, связанным каналом (Q, V), и если число

$$H_W(p) = \inf I(\xi, \tilde{\xi}) \tag{6}$$

есть W-энтропия (см. *Энтропия*) сообщения, где нижняя грань берется по всем парам $(\xi, \tilde{\xi})$ таким, что совместное распределение вероятностей пары $(\xi, \tilde{\xi})$ принадлежит W, а ξ имеет распределение вероятностей $p(\cdot)$, то справедлива следующая теорема Шеннона (обращение теоремы кодирования): если сообщение с распределением вероятностей $p(\cdot)$ может быть передано по каналу (Q, V) с условием точности воспроизведения W, то

$$H_W(p) \leqslant C(Q, V). \tag{7}$$

Достаточные условия для возможности И. п. получить сложнее. Так, условие (7) достаточно для возможности И. п. лишь в некотором асимптотич. смысле, и при этом главным является предположение о том, что $H_W(p) \to \infty$, следовательно условие (7) необходимо и достаточно лишь, грубо говоря, применительно к задаче о передаче довольно большого количества информации. Остальные нужные предположения носят характер предположений регулярности, к-рые в конкретных ситуациях обычно выполняются. Чтобы сформулировать достаточные условия для возможности передачи в точных терминах, необходимы нек-рые дополнительные понятия.

Последовательность пар случайных величин $(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t, t=1, 2, \ldots)$ наз. информационно-устойчивой, если $0 < I(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t) < \infty$ и

$$\lim_{t \to \infty} \frac{i_{\zeta^t \tilde{\zeta}^t}(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t)}{I(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t)} = 1 \tag{8}$$

в смысле сходимости по вероятности. Здесь $i_{\zeta^t \tilde{\zeta}^t}(\cdot, \cdot)$ — информационная плотность (см. *Информации количество*) пары $(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t)$. Последовательность каналов $\{(Q^t, V^t), t=1, 2, \ldots\}$ с $C(Q^t, V^t) < \infty$ наз. информационно-устойчивой, если существует информационно-устойчивая последовательность пар $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$, связанных каналом (Q^t, V^t), такая, что

$$\lim_{t \to \infty} \frac{I(\eta^t, \tilde{\eta}^t)}{C(Q^t, V^t)} = 1. \tag{9}$$

Последовательность сообщений с распределением вероятностей $p^t(\cdot)$ и условиями точности W^t с $H_{W^t}(p^t) < \infty$, $t=1, 2, \ldots$, наз. информационно-устойчивой, если существует последовательность пар $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ такая, что ξ^t имеет распределение вероятностей $p^t(\cdot)$, распределение вероятностей пары $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ принадлежит W^t и

$$\lim_{t \to \infty} \frac{I(\xi^t, \tilde{\xi}^t)}{H_{W^t}(p^t)} = 1. \tag{10}$$

Пусть V_ε — множество распределений вероятностей, для к-рого справедливо (3) с заменой b на $b+\varepsilon$, а W_ε — условие точности, задаваемое неравенством (1), в к-ром

a заменено на $a+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Имеет место теорема кодирования (теорема Шеннона): пусть заданы информационно-устойчивая последовательность сообщений с распределением вероятностей $p^t(\cdot)$ и условиями точности W^t и информационно-устойчивая последовательность каналов (Q^t, V^t) такие, что функции $\pi^t(\cdot)$ и $\rho^t(\cdot, \cdot)$ равномерно ограничены по t; пусть $H_{W^t}(p^t)\to\infty$ при $t\to\infty$ и

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{C(Q^t, V^t)}{H_{W^t}(p^t)} > 1, \tag{11}$$

тогда для любого $\varepsilon>0$ существует столь большое t_0, что при всех $t\geqslant t_0$ сообщение с распределением вероятностей $p^t(\cdot)$ может быть передано через канал (Q^t, V^t_ε) с точностью воспроизведения W^t_ε. Эта формулировка прямого утверждения теоремы кодирования является одной из наиболее общих. Предположение об ограниченности функций $\pi^t(\cdot)$ и $\rho^t(\cdot, \cdot)$ может быть существенно ослаблено. Информационная устойчивость последовательности сообщений и каналов всегда имеет место в большом числе практически интересных частных случаев. Наконец, при нек-рых условиях в сформулированной теореме можно заменить W^t_ε на W^t и V^t_ε на V^t.

Для описания реальных ситуаций наиболее интересен случай, когда последовательность каналов, рассматриваемая в теореме, есть последовательность отрезков данного фиксированного канала, а последовательность сообщений — это последовательность отрезков сообщений фиксированного источника с растущим числом компонент. Наглядно это соответствует функционированию системы связи во времени. Ниже для этой ситуации сформулированы нек-рый вариант теоремы кодирования и его обращение в несколько отличной от предыдущей форме. При этом рассматриваются дискретный стационарный источник и канал без памяти.

Пусть дискретный стационарный источник U, вырабатывающий сообщение $\xi=\{\xi_k, k=\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$, где отдельные компоненты (буквы сообщения ξ_k) принимают значения из нек-рого конечного множества алфавита X объема M, производит буквы сообщения со скоростью одна буква в единицу времени. Компоненты сообщения $\tilde{\xi}=\{\tilde{\xi}_k, k=\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$, получаемого адресатом, принимают значения из того же алфавита X (т. е. $\tilde{X}=X$). Пусть, далее, используется дискретный канал без памяти, передача по к-рому ведется со скоростью один символ в интервал времени τ. Ограничения на распределение сигнала на входе канала отсутствуют. Пусть отрезок сообщения $\xi^L=(\xi_1, \ldots, \xi_L)$ длины $L=L_N$ передается по отрезку канала длины $N=[L/\tau]$ (где $[x]$ — целая часть числа x) с помощью нек-рых методов кодирования и декодирования описанного выше типа. Если при этом $\tilde{\xi}^L=(\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_L)$ — соответствующий отрезок сообщения, полученный адресатом, а $\hat{P}_e$— средняя вероятность ошибки на букву источника, определяемая формулой

$$\hat{P}_e=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} \mathsf{P}\{\tilde{\xi}_l\neq\xi_l\}, \tag{12}$$

то справедлива следующая теорема.

Обращение теоремы кодирования. Пусть $H(U)$ —скорость создания сообщений данным дискретным стационарным источником и C — пропускная способность (на передаваемый символ) используемого канала без памяти. Тогда при всех L справедливо неравенство

$$\hat{P}_e\log(M-1)+h(\hat{P}_e)\geqslant H(U)-\frac{1}{\tau}C, \tag{13}$$

где

$$h(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x).$$

Таким образом, если скорость создания сообщений $H(U)$ больше, чем $\frac{1}{\tau}C$ (пропускная способность канала на букву источника), то средняя вероятность ошибки на букву источника при любом L и для любых методов кодирования и декодирования ограничена снизу отличной от нуля константой и, значит, не стремится к нулю даже при $L \to \infty$. Чтобы сформулировать прямое утверждение теоремы кодирования, необходима величина

$$R_N = \frac{\log_2 M^{L_N}}{N}. \qquad (14)$$

В случае, когда $M=2$ и L_N/τ — целое число, $R_N=\tau$, т. е. R_N в *битах* является числом двоичных символов, вырабатываемых источником за время передачи одного символа по каналу. Кроме того, R_N совпадает со скоростью создания сообщений $H(U)$ источником U с независимыми и равномерно распределенными компонентами. Вероятность ошибки и средняя вероятность ошибки на блок источника определяются соответственно формулами:

$$P_{e,\ x^L} = \mathsf{P}_{x^L}\{\tilde{\xi}^L \neq \xi^L\}, \qquad (15)$$

$$\overline{P}_e = \sum\nolimits_{x^L} \mathsf{P}\{\xi^L = x^L\}\, P_{e,\ x^L}, \qquad (16)$$

здесь $P_{x^L}(\cdot)$ — условная вероятность при условии, что $\xi^L = x^L \in X^L$. Справедлива следующая **теорема кодирования**. Для всех N и любого $R<C$ существуют методы кодирования и декодирования такие, что при $R_N \leqslant R$ для всех $x^L \in X^L$

$$P_{e,\ x^L} \leqslant \exp\{-NE(R)\} \qquad (17)$$

(оценка (17) справедлива и для $\overline{P}_e$), причем для $0 \leqslant R < C$ функция $E(R)$ выпуклая, положительная и убывает с ростом R (см. также *Ошибочного декодирования вероятность*). Таким образом, эта теорема показывает, что для всех $R<C$ вероятность ошибки с ростом N стремится к нулю и притом экспоненциально быстро.

Имеются обобщения теорем Шеннона на случай так наз. составных каналов и сообщений с неизвестными параметрами. Интерес к подобным обобщениям вызван тем, что обычно на практике нельзя считать полностью известными статистич. параметры источника сообщений и канала связи, тем более что эти параметры могут иногда меняться в процессе передачи. Поэтому приходится предполагать, что источник сообщений и канал связи принадлежат нек-рому классу возможных источников сообщений и каналов. При этом вводится минимаксный критерий качества передачи, при к-ром качество данного метода передачи оценивается для наихудших возможных источников сообщений и каналов, принадлежащих рассматриваемому классу.

Имеются также обобщения теорем Шеннона на случай И. п. по *каналу с обратной связью*. Наличие полной обратной связи означает, что в момент времени t на передающей стороне канала (т. е. на его входе) считаются известными точные значения сигналов на выходе канала для всех моментов времени $t'<t$. В частности, для *каналов без памяти* с обратной связью основной результат состоит в том, что наличие обратной связи не увеличивает пропускную способность канала, хотя и может существенно уменьшить сложность кодирующих и декодирующих устройств.

Из других обобщений следует отметить теорию И. п. по каналам с ошибками синхронизации, в к-рых возможны случайные сбои синхронизации, в результате чего нарушается однозначность соответствия между сигналами на входе и выходе канала, а также теорию передачи по *каналам многосторонним*, когда имеется несколько источников и получателей информации и передача может осуществляться по нескольким направлениям одновременно.

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243—332; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3—104; [3] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [4] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [5] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960; [6] Фано Р. М., Передача информации. Статистическая теория связи, пер. с англ., М., 1965; [7] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965; [8] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969; [9] Колмогоров А. Н., «Пробл. передачи информ.», 1965, т. 1, № 1, с. 3—11; [10] Пинскер М. С., в сб.: Проблемы передачи информации, в. 7, 1960, М., с. 1—201; [11] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., М., 1974; [12] Колмогоров А. Н., в кн.: Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства. 15—20 октября 1956 г. Т. 1. Пленарные заседания, М., 1957, с. 66—99; [13] Key papers in the development of information theory, N.Y., 1974; [14] Proceeding of the 1975 IEEE—USSR Joint Workshop on Information Theory. Moscow. 15—19 December, 1975, N.Y., 1976. *Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.*

ИНФОРМАЦИИ СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ — величина, характеризующая *информации количество*, к-рая содержится в сигнале на выходе *канала связи* относительно сигнала на входе канала в расчете на единицу времени. Если

$$\eta=\{\eta(t),\ -\infty<t<\infty\},\quad \tilde{\eta}=\{\tilde{\eta}(t),\ -\infty<t<\infty\}$$

— случайные процессы с непрерывным или дискретным временем, являющиеся сигналами на входе и выходе нек-рого канала связи, то И. с. п. наз. величину

$$R=\lim_{T-t\to\infty}\frac{1}{T-t}\,I\left(\eta_t^T,\ \tilde{\eta}_t^T\right),\qquad (*)$$

если такой предел существует; здесь $I(\cdot,\ \cdot)$ — количество информации, $\eta_t^T=\{\eta(s),\quad t<s\leqslant T\}$ — отрезок $(t,\ T]$ процесса η, аналогично определяется $\tilde{\eta}_t^T$. Существование предела (*) доказано для достаточно широкого класса каналов, в к-рых сигналы η и $\tilde{\eta}$ являются стационарными и стационарно связанными случайными процессами. Явное вычисление И. с. п. возможно, в частности, для стационарных *каналов без памяти* и *каналов гауссовских*. Напр., для гауссовского канала, сигналы η и $\tilde{\eta}$ на входе и выходе к-рого являются гауссовскими стационарными процессами, образующими совместно гауссовскую стационарную пару процессов, И. с. п. задается формулой

$$R=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\log\left(1-\frac{\left|f_{\eta\tilde{\eta}}(\lambda)\right|^2}{f_{\eta\eta}(\lambda)\,f_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(\lambda)}\right)d\lambda,$$

где $f_{\eta\eta}(\lambda)$ и $f_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(\lambda)$ — спектральные плотности процессов η и $\tilde{\eta}$ соответственно, а $f_{\eta\tilde{\eta}}(\lambda)$ — их взаимная спектральная плотность.

Лит.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Пинскер М. С., в сб.: Проблемы передачи информации, в. 7, М., 1960, с. 1—201.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ИНФОРМАЦИИ ТЕОРИЯ — раздел прикладной математики и кибернетики, связанный с математич. описанием и оценкой качества передачи, хранения, извлечения и классификации информации. Термин «И. т.», возникший в 50-х гг. 20 в., до сих пор (к 1978) не имеет единого общепринятого толкования. В разных источниках по-разному определяется перечень разделов наук, включаемых в И. т., а при логич. толковании в И. т. надо включать и нек-рые разделы науки, традиционно в нее не включаемые. Важной чертой, объединяющей различные разделы науки, относимые к И. т., является широкое использование статистич. методов. Это обусловлено тем, что процесс извлечения информации связывают с уменьшением неопределенности наших сведений об объекте, а естественной числовой мерой неопределенности нек-рого события является его вероятность.

Важнейшая составная часть И. т. при любых трактовках — теория *информации передачи*. Часто, особенно в чисто математич. литературе, термин «И. т.» используют как синоним термина «теория передачи информации». Теория передачи информации изучает оптимальные и близкие к оптимальным методы передачи информации по *каналам связи* в предположении, что можно в широких пределах варьировать методы кодирования сообщений в сигналы на входе канала связи и декодирование сигналов в сообщения на выходе.

Возникновение теории передачи информации связано с именем К. Шеннона (C. Shannon), предложившего в 1948 решение основной проблемы о нахождении скорости передачи информации, к-рую можно достичь при оптимальном методе *кодирования и декодирования* так, чтобы вероятность ошибки при передаче информации была как угодно мала. Эта оптимальная скорость передачи, называемая *канала пропускной способностью*, выражается через введенную К. Шенноном величину, называемую *информации количеством*. Понятие количества информации представляется весьма важным и находит многочисленные важные приложения и в других разделах И. т., хотя далеко не все попытки его приложения адекватны существу рассматриваемых проблем.

Задачи, связанные с оптимальным способом хранения информации, принципиально не отличаются от задач оптимальной передачи информации, так как хранение информации можно рассматривать как передачу информации, но не в пространстве, а во времени.

Основные теоремы теории передачи информации первоначально носили характер теорем существования, в к-рых доказывалось существование оптимальных методов кодирования и декодирования, но не указывались способы их построения и технич. реализации этих методов. Поэтому позже получила широкое развитие теория кодирования, посвященная построению конкретных и относительно простых алгоритмов кодирования и декодирования, приближающихся по своим возможностям к оптимальным алгоритмам, существование к-рых доказывалось в теории передачи информации. Теорию кодирования отличает то, что наряду со статистич. методами она использует для построения конкретных кодов глубокие алгебраические и комбинаторные идеи.

Обычно к И. т. относят также всю совокупность исследований, посвященных приложениям теории статистич. методов для описания способов преобразований сигналов на входе и выходе каналов связи. С математич. точки зрения, это просто нек-рые приложения математич. статистики (в первую очередь статистики случайных процессов), теории прогнозирования и фильтрации стационарных случайных процессов, теории игр и пр. Таким образом, этот раздел И. т. не имеет специфического математич. аппарата и в своем развитии все более сближается с другими разделами прикладной теории вероятностей.

В И. т. часто включают также теорию *распознавания образов*, разрабатывающую алгоритмы распределения объектов по нек-рым классам объектов, к-рые описаны лишь на интуитивном уровне и не имеют четкого математич. описания. Такие алгоритмы всегда включают в себя процесс обучения по нек-рому списку заранее классифицированных человеком объектов.

Попытка определить границы И. т., исходя из ее общепринятых определений, и включить в нее все разделы математики, имеющие дело с понятием информации в его общелексической трактовке, привела бы к неоправданной, по крайней мере на современном этапе, расширенной трактовке понятия И. т. Так, вся математич. статистика имеет дело с проблемами извлечения информации, теория алгоритмов — с проблемами переработки информации, теория формальных языков — с проблемами записи информации и т. д.

Понятие информации и его приложения весьма многообразны, и этим можно объяснить то, что в настоящее время (к 1978) комплекс наук об информации представляет собой совокупность довольно разрозненных научных дисциплин, каждая из к-рых связана с изучением одного из аспектов этого понятия. Несмотря на интенсивные усилия ученых процесс сближения этих научных дисциплин идет довольно медленно, и создание единой и всеохватывающей И. т. представляется делом не слишком близкого будущего.

Лит.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колмогоров А. Н., «Пробл. передачи информ.», 1965, т. 1, № 1, с. 3—11; [3] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965; [4] Бриллюэн Л., Наука и теория информации, пер. с англ., М., 1960; [5] Черри К., Человек и информация, пер. с англ., М., 1972; [6] Яглом А. М., Яглом И. М., Вероятность и информация, 3 изд., М., 1973; [7] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969; [8] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., М., 1974.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ИНФОРМАЦИОННАЯ МАТРИЦА, информация по Фишеру,— матрица ковариаций *информанта*. Для доминированного семейства распределений вероятностей $P^t(d\omega)$ с плотностями $p(\omega; t)$, достаточно гладко зависящими от векторного (в частности, числового) параметра $t=(t_1, \ldots, t_m)\in\Theta$, элементы И. м. при $t=\theta$ определяются как

$$I_{jk}(\theta)=\int_\Omega \frac{\partial \ln p(\omega; t)}{\partial t_j}\cdot\frac{\partial \ln p(\omega; t)}{\partial t_k}\bigg|_{t=\theta} p(\omega; \theta)\, d\mu, \quad (1)$$

где $j, k=1, \ldots, m$. При скалярном параметре t И. м. описывается единственным числом — дисперсией информанта.

И. м. $I(\theta)$ определяет неотрицательную дифференциальную квадратичную форму

$$\sum\nolimits_{j,k} I_{jk}(\theta)\, dt_j\, dt_k=\Delta_\theta, \quad (2)$$

снабжающую семейство $\{P^t\}$ римановой метрикой. Когда пространство Ω исходов ω конечно,

$$\Delta_P=\sum\nolimits_j (dp_j)^2/p_j; \quad p_j=P(\omega_j), \quad \forall\omega_j\in\Omega.$$

Дифференциальная квадратичная форма Фишера (2) является единственной (с точностью до постоянного множителя) дифференциальной квадратичной формой, инвариантной относительно категории статистических решающих правил. Ввиду этого она возникает в формулировке многих статистич. закономерностей.

Любое измеримое отображение f пространства Ω исходов порождает новое гладкое семейство распределений $Q^t=P^tf^{-1}$ с И. м. $I^Q(\theta)$. При этом И. м. монотонно не возрастает:

$$\sum\nolimits_{j,k} I^Q_{jk} z_j z_k\leqslant\sum\nolimits_{j,k} I^P_{j,k} z_j z_k,$$

каковы бы ни были $z_1, \ldots, z_m$. И. м. обладает также свойством аддитивности. Если $I^{(i)}(\theta)$ — И. м. для семейства с плотностью $P_i(\omega^i; t)$, то для семейства

$$p(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(N)}; t)=\prod\nolimits_{i=1}^N p_i(\omega^{(i)}; t)$$

будет $I_N(\theta)=\sum_i I^{(i)}(\theta)$. В частности, $I_N(\theta)=NI(\theta)$ при N независимых одинаково распределенных испытаниях. И. м. позволяет охарактеризовать статистич.

точность решающих правил в задаче оценки параметра закона распределения. Для дисперсии любой несмещенной оценки $\tau(\omega)=\tau(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(N)})$ скалярного параметра t справедливо

$$\mathsf{D}_\theta \tau \geqslant [NI(\theta)]^{-1}.$$

Аналогичное матричное неравенство информации выполняется для оценок векторного параметра. Его скалярное следствие

$$\mathsf{E}_\theta \sum_{j,\ k=1}^{m} [\tau_j(\omega)-\theta_j]\,[\tau_k(\omega)-\theta_k]\, I_{jk}(\theta) \geqslant mN^{-1} \quad (3)$$

показывает, что несмещенное оценивание нигде не может быть слишком точным. Для произвольных оценок последнее неверно. Однако остаются ограничения, напр., на среднюю точность

$$\mathfrak{M}_{\Theta'} \mathsf{E}_\theta \langle \tau-\theta \mid I(\theta) \mid \tau-\theta \rangle \geqslant mN^{-1} + o(N^{-1}), \quad (4)$$

где усреднение $\mathfrak{M}$ левой части (3) проведено по инвариантному объему V любой компактной подобласти $\Theta' \subset \Theta$,

$$dV(\theta) = \sqrt{\det I(\theta)}\, d\theta_1 \ldots d\theta_m;$$

остаточный член зависит от размеров Θ'. Неравенства (4) асимптотически точны, и асимптотически оптимальной в этом смысле оказывается оценка максимума правдоподобия.

В точках вырождения, $\det I(\theta)=0$, совместная оценка параметров затруднена; если $\det I(\theta)=0$ в нек-рой области, то совместная оценка вообще невозможна. Таким образом, следуя Р. Фишеру [1], с известной осторожностью можно сказать, что И. м. описывает среднее количество информации о параметрах закона распределения, содержащееся в случайной выборке.

Лит.: [1] Fisher R. A., «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1925, v. 22, p. 700—25; [2] Барра Ж.-Р., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., М., 1974; [3] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972. *Н. Н. Ченцов.*

ИНФОРМАЦИОННОЕ МНОЖЕСТВО (в теории игр) — известная игроку в данный момент совокупность возможных состояний (позиций) игры, среди к-рых находится ее действительное состояние. И. м. характеризует знания игрока о прошлых состояниях и выборах как своих (память), так и чужих (информация). Находясь в И. м., игрок должен принять одно решение (выбрать альтернативу И. м., т. е. по одной альтернативе сразу для всех позиций из И. м.), к-рое лишь конкретизируется как альтернатива позиции при реальном разыгрывании игры. *И. Н. Врублевская.*

ИНФОРМАЦИОННОЕ РАССТОЯНИЕ — метрика или псевдометрика на совокупности распределений вероятностей, характеризующая «непохожесть» описываемых этими распределениями случайных явлений. Наиболее интересны И. р. $\rho(P, Q)$, связанные с мерами информативности эксперимента в задаче различения P и Q по наблюдениям.

В любой конкретной задаче статистик, обработав материалы наблюдений, должен сделать выводы о наблюденном явлении. Эти выводы не будут, вообще говоря, совершенно точными, поскольку исходы наблюдений случайны. Интуитивно понятно, что каждая выборка несет какое-то количество полезной информации, причем: А) при обработке информация может только теряться, Б) информация, доставляемая независимыми источниками, напр. независимыми выборками, суммируется. Таким образом, если ввести информативность эксперимента как среднее количество информации в наблюдении, то для информативности выполнены аксиомы А и Б. И хотя понятие информации остается интуитивным, иногда можно указать величину I, удовлетворяющую аксиомам А и Б, к-рая описывает асимптотику средней точности выводов в задаче с ростом числа наблюдений и к-рую потому естественно принять за информативность. Информативность может быть как числовой, так и матричной величиной. Важный пример — *информационная матрица* в задаче оценки параметра закона распределения.

Согласно аксиоме Б, информативности складываются как квадраты длин (катетов), т. е. квадрат разумного И. р. должен обладать свойством аддитивности. Простейшие И. р.— расстояние по вариации:

$$\rho_V(P,\ Q)=\int |P(d\omega)-Q(d\omega)|,$$

и расстояние в инвариантной римановой метрике Фишера:

$$\rho_F(P,\ Q)=2\arccos\int\sqrt{P(d\omega)\,Q(d\omega)},$$

последним свойством не обладают и собственного статистич. смысла не имеют.

По теории Неймана — Пирсона вся полезная информация о различении распределений вероятностей $P(d\omega)$ и $Q(d\omega)$ на общем пространстве Ω исходов ω содержится в отношении правдоподобия или его логарифме

$$\ln p(\omega)-\ln q(\omega)=\ln\frac{dP}{dQ}(\omega),$$

определенном с точностью до значений на множестве исходов вероятности нуль. Математическое ожидание

$$I(P:Q)=\int_\Omega\left[\ln\frac{p(\omega)}{q(\omega)}\right]P(d\omega)=$$
$$=\int_\Omega\left[\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}\ln\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}\right]Q(d\omega)$$

наз. (средней) информацией различения (по Кульбаку) в пользу P против Q, а также относительной энтропией, информационным уклонением. Неотрицательная (может быть, бесконечная) величина $I(P:Q)$ удовлетворяет аксиомам А и Б. Она характеризует точность одностороннего различения P от Q, определяя максимальный порядок убывания вероятности β_N ошибки второго рода (т. е. ошибочного принятия гипотезы P, когда она неверна), при росте числа N независимых наблюдений:

$$\beta_N\sim\exp[-N\cdot I(P:Q)],$$

при фиксированном уровне значимости — вероятности α_N ошибки первого рода, $0<a_0\leqslant\alpha_N\leqslant a_1<1$.

Аналогичная величина $I(Q:P)$ определяет максимальный порядок убывания α_N при $0<b_0\leqslant\beta_N\leqslant b_1<1$. Отношение «сходства», в частности «сходства» случайных явлений, не симметрично и, как правило, $I(P:Q)\neq$ $\neq I(Q:P)$. Геометрич. интерпретация $I(P:Q)$ как половины квадрата несимметричного расстояния от Q до P оказалась естественной в ряде вопросов статистики. Для такого И. р. неравенство треугольника неверно, но справедлив несимметричный аналог теоремы Пифагора:

$$I(R:P)=I(R:Q)+I(Q:P),$$

если

$$\int_\Omega\left[\ln\frac{q(\omega)}{p(\omega)}\right]Q(d\omega)=\int_\Omega\left[\ln\frac{q(\omega)}{p(\omega)}\right]R(d\omega).$$

Симметричная характеристика непохожести P и Q возникает при их минимаксном тестировании. Для оптимального теста

$$\alpha_N=\beta_N\sim\exp[-NI_{PQ}],$$
$$I_{PQ}=-\ln\min_{0<u<1}\int_\Omega|P(d\omega)|^u\,|Q(d\omega)|^{1-u}=$$
$$=\min_R\max\{I(R:P),\ I(R:Q)\}.$$

С информационным уклонением связаны также нек-рые другие И. р. (см. [1], [2]). Для бесконечно близких P и Q главная часть информационного уклонения, равно как и квадрата любого разумного И. р., задается, с точностью до постоянного множителя $c(I)$, квадратичной формой Фишера. Для информационного уклонения

$$c(I)=\frac{1}{2}.$$

Лит.: [1] Кульбак С., Теория информации и статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972.
Н. Н. Ченцов.

ИНФОРМАЦИОННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ — мера зависимости между двумя случайными величинами X и Y, определяемая как функция от величины количества информации в одной случайной величине относительно другой:

$$R(X, Y)=\sqrt{1-e^{-2I(X, Y)}},$$

где $I(X, Y)$ — *информации количество.*

Свойства И. к. к. $R(X, Y)$ как меры зависимости полностью определяются свойствами величины $I(X, Y)$, к-рая сама служит характеристикой зависимости случайных величин X и Y. Однако использование И. к. к. R в качестве самостоятельной меры зависимости как информационного аналога обычного коэффициента корреляции ρ оправдано тем, что для произвольных случайных величин И. к. к. имеет преимущество перед ρ, так как в силу свойств информации $R=0$ тогда и только тогда, когда X и Y независимы. Если X и Y имеют совместное нормальное распределение, то эти два коэффициента совпадают, так как в этом случае

$$I=-\frac{1}{2}\ln(1-\rho^2).$$

Практическое исследование зависимости с помощью И. к. к. равносильно анализу количества информации в таблицах типа таблиц сопряженности признаков. Выборочным аналогом R служит коэффициент

$$\hat{R}=\sqrt{1-e^{-2\hat{I}}},$$

вычисляемый через информационную статистику $\hat{I}$:

$$\hat{I}=\sum\nolimits_{i=1}^{s}\sum\nolimits_{j=1}^{t}\frac{n_{ij}}{n}\ln\frac{nn_{ij}}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}},$$

где n — число наблюдений, s и t — числа классов группировки по двум признакам, n_{ij} — число наблюдений в классе (i, j), $n_{i\cdot}=\sum\nolimits_{j=1}^{t}n_{ij}$, $n_{\cdot j}=\sum\nolimits_{i=1}^{s}n_{ij}$. Таким образом, вопрос о распределении выборочного И. к. к. сводится к вопросу о распределении выборочной информации. Анализ выборочной информации как меры зависимости затрудняется тем, что $\hat{I}$ сильно зависит от группировки наблюдений.

Лит.: [1] Linfoot E., «Information and Control», 1957, v. 1, № 1, 85—89; [2] Кульбак С., Теория информации и статистика, пер. с англ., М., 1967.
А. В. Прохоров.

ИНФОРМАЦИЯ — основное понятие *кибернетики.* Кибернетика изучает машины и живые организмы исключительно с точки зрения их способности воспринимать определенную И., сохранять эту И. в «памяти», передавать ее по *каналам связи* и перерабатывать ее в «сигналы», направляющие их деятельность в соответствующую сторону. Интуитивное представление об И. относительно каких-либо величин или явлений, содержащейся в нек-рых данных, в кибернетике ограничивается и уточняется.

В нек-рых случаях возможность сравнения различных групп данных по содержащейся в них И. столь же естественна, как возможность сравнения плоских фигур по их «площади»: независимо от способа измерения площадей можно сказать, что фигура A имеет не бо́льшую площадь, чем B, если A может быть целиком помещена в B (ср. примеры 1—3 ниже). Более глубокий факт — возможность выразить площадь числом и на этой основе сравнивать между собой фигуры произвольной формы — является результатом развитой математич. теории. Подобно этому фундаментальным результатом теории И. является утверждение о том, что в определенных, весьма широких, условиях можно пренебречь качественными особенностями И. и выразить ее количество числом. Только этим числом определяются возможности передачи И. по каналам связи и ее хранения в запоминающих устройствах.

Пример 1. Знание положения и скорости частицы, движущейся в силовом поле, дает И. о ее положении в любой будущий момент времени, притом полную, т. к. это положение может быть предсказано точно. Знание энергии частицы также дает И., но, очевидно, неполную.

Пример 2. Равенство

$$a=b \tag{1}$$

дает И. относительно переменных a и b. Равенство

$$a^2=b^2 \tag{2}$$

дает меньшую И. [т. к. из (1) следует (2), но эти равенства не равносильны]. Наконец, равенство

$$a^3=b^3, \tag{3}$$

равносильное (1), дает ту же И., то есть (1) и (3) — это различные формы задания одной и той же И.

Пример 3. Результаты произведенных с ошибками независимых измерений к.-л. физич. величины дают И. о ее точном значении. Увеличение числа наблюдений увеличивает эту И. Пример 3 а. Среднее арифметическое результатов наблюдений также содержит нек-рую И. относительно рассматриваемой величины. Как показывает математич. статистика, в случае нормального распределения вероятностей ошибок с известной дисперсией среднее арифметическое содержит всю И.

Пример 4. Пусть результатом нек-рого измерения является случайная величина ξ. При передаче по нек-рому каналу связи ξ искажается, в результате чего на приемном конце получают величину

$$\eta=\xi+\theta,$$

где θ не зависит от ξ (в смысле теории вероятностей). «Выход» η дает И. о «входе» ξ, причем естественно ожидать, что эта И. тем меньше, чем больше «рассеяние» значений θ.

В каждом из приведенных примеров данные сравнивались по большей или меньшей полноте содержащейся в них И. В примерах 1—3 смысл такого сравнения ясен и сводится к анализу равносильности или неравносильности нек-рых соотношений. В примерах 3а и 4 этот смысл требует уточнения. Это уточнение дается, соответственно, математич. статистикой и теорией И. (для к-рых эти примеры являются типичными).

В основе *информации теории* лежит предложенный в 1948 К. Шенноном (C. Shannon) способ измерения количества И., содержащейся в одном случайном объекте (событии, величине, функции и т. п.) относительно другого случайного объекта. Этот способ приводит к выражению количества И. числом. Положение можно всего лучше объяснить в простейшей обстановке, когда рассматриваемые случайные объекты являются случайными величинами, принимающими лишь конечное число значений. Пусть ξ — случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а η — случайная величина, принимающая значения $y_1, y_2, \ldots, y_m$ с вероятностями

$q_1, q_2, \ldots, q_m$. Тогда И. $I(\xi, \eta)$ относительно η, содержащаяся в ξ, определяется формулой

$$I(\xi, \eta) = \sum\nolimits_{i,j} p_{ij} \log_2 (p_{ij}/p_i q_j), \tag{4}$$

где p_{ij} — вероятность совмещения событий $\xi = x_i$ и $\eta = y_j$ и логарифмы берутся по основанию 2. И. $I(\xi, \eta)$ обладает рядом свойств, к-рые естественно требовать от меры количества И. Так, всегда $I(\xi, \eta) \geqslant 0$ и равенство $I(\xi, \eta) = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $p_{ij} = p_i q_j$ при всех i и j, т. е. когда случайные величины ξ и η независимы. Далее, всегда $I(\xi, \eta) \leqslant I(\eta, \eta)$ и равенство возможно только в случае, когда η есть функция от ξ (напр., $\eta = \xi^2$ и т. д.). Неожиданным может казаться лишь равенство $I(\xi, \eta) = I(\eta, \xi)$.

Величина $H(\xi) = I(\xi, \xi) = \sum_i p_i \log_2 (1/p_i)$ носит название *энтропии* случайной величины ξ. Понятие энтропии относится к числу основных понятий теории И. Количество И. и энтропия связаны соотношением

$$I(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta) - H(\xi, \eta), \tag{5}$$

где $H(\xi, \eta)$ — энтропия пары (ξ, η), т. е.

$$H(\xi, \eta) = \sum\nolimits_{i,j} p_{ij} \log_2 (1/p_{ij}).$$

Величина энтропии указывает среднее число двоичных знаков, необходимое для различения (или записи) возможных значений случайной величины. Это обстоятельство позволяет понять роль количества И. (4) при «хранении» И. в запоминающих устройствах. Если случайные величины ξ и η независимы, то для записи значения ξ требуется в среднем $H(\xi)$ двоичных знаков, для значения η требуется $H(\eta)$ двоичных знаков, а для пары (ξ, η) требуется $H(\xi) + H(\eta)$ двоичных знаков. Если же случайные величины ξ и η зависимы, то среднее число двоичных знаков, необходимое для записи пары (ξ, η), оказывается меньшим суммы $H(\xi) + H(\eta)$, так как $H(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta) - I(\xi, \eta)$.

С помощью значительно более глубоких теорем выясняется роль количества И. (4) в вопросах передачи И. по каналам связи. Основная информационная характеристика каналов, так наз. емкость, определяется через понятие «И.».

Если ξ и η могут принимать бесконечное число значений, то предельным переходом из (4) получается формула

$$I(\xi, \eta) = \iint p(x, y) \log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)\, q(y)}\, dx\, dy, \tag{6}$$

где буквами p и q обозначены соответствующие плотности вероятности. При этом энтропии $H(\xi)$ и $H(\eta)$ не существуют, но имеет место формула, аналогичная (5)

$$I(\xi, \eta) = h(\xi) + h(\eta) - h(\xi, \eta), \tag{7}$$

где

$$h(\xi) = \int p(x) \log_2 \frac{1}{p(x)}\, dx$$

— *дифференциальная энтропия* ξ [$h(\eta)$ и $h(\xi, \eta)$ определяются подобным же образом].

Пример 5. Пусть в условиях примера 4 случайные величины ξ и θ имеют нормальное распределение вероятностей с нулевыми средними значениями и дисперсиями, равными соответственно σ_ξ^2 и σ_θ^2. Тогда, как можно подсчитать по формулам (6) или (7): $I(\eta, \xi) = I(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \log_2 [1 + \sigma_\xi^2/\sigma_\theta^2]$. Таким образом, количество И. в «принятом сигнале» η относительно «переданного сигнала» ξ стремится к нулю при возрастании уровня «помех» θ (т. е. при $\sigma_\theta^2 \to \infty$) и неограниченно возрастает при исчезающе малом влиянии «помех» (т. е. при $\sigma_\theta^2 \to 0$).

Особенный интерес для теории связи представляет случай, когда в обстановке примеров 4 и 5 случайные величины ξ и η заменяются случайными функциями (или, как говорят, случайными процессами) $\xi(t)$ и $\eta(t)$, к-рые описывают изменение нек-рой величины на входе и на выходе передающего устройства. Количество И. в $\eta(t)$ относительно $\xi(t)$ при заданном уровне помех («шумов», по акустич. терминологии) $\theta(t)$ может служить критерием качества самого этого устройства.

В задачах математич. статистики также пользуются понятием И. (ср. примеры 3 и 3а). Однако как по своему формальному определению, так и по своему назначению оно отличается от вышеприведенного (из теории И.). Статистика имеет дело с большим числом результатов наблюдений и заменяет обычно их полное перечисление указанием нек-рых сводных характеристик. Иногда при такой замене происходит потеря И., но при нек-рых условиях сводные характеристики содержат всю И., содержащуюся в полных данных (разъяснение смысла этого высказывания дано в конце примера 6). Понятие И. в статистике было введено Р. Фишером (R. Fisher) в 1921.

Пример 6. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — результаты n независимых наблюдений нек-рой величины, распределенные по нормальному закону с плотностью вероятности

$$p(x; a, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(x-a)^2/2\sigma^2\right],$$

где параметры a и σ^2 (среднее и дисперсия) неизвестны и должны быть оценены по результатам наблюдений. Достаточными статистиками (т. е. функциями от результатов наблюдений, содержащими всю И. о неизвестных параметрах) в этом примере являются среднее арифметическое

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

и так наз. эмпирическая дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})^2.$$

Если параметр σ^2 известен, то достаточной статистикой будет только $\bar{\xi}$ (ср. пример 3а выше).

Смысл выражения «вся И.» может быть пояснен следующим образом. Пусть имеется к.-л. функция неизвестных параметров $\varphi = \varphi(a, \sigma^2)$ и пусть $\varphi^* = \varphi^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — к.-л. ее оценка, лишенная систематич. ошибки. Пусть качество оценки (ее точность) измеряется (как это обычно делается в задачах математич. статистики) дисперсией разности $\varphi^* - \varphi$. Тогда существует другая оценка φ^{**}, зависящая не от отдельных величин ξ_i, а только от сводных характеристик $\bar{\xi}$ и s^2, не худшая (в смысле упомянутого критерия), чем φ^*. Р. Фишером была предложена также мера (среднего) количества И. относительно неизвестного параметра, содержащейся в одном наблюдении. Смысл этого понятия раскрывается в теории статистич. оценок.

Лит. см. при ст. *Информации передача.* *Ю. В. Прохоров.*

ИНФРАБОЧЕЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО — локально выпуклое линейное топологич. пространство, в к-ром каждая бочка (т. е. поглощающее выпуклое замкнутое уравновешенное множество), поглощающая любое ограниченное множество, является окрестностью нуля. Важный класс И. п. доставляют *бочечные пространства.*

Произведение любого числа и индуктивный предел И. п. есть И. п.; локально выпуклое пространство инфрабочечно тогда и только тогда, когда либо каждая ограниченная полунепрерывная снизу полунорма является непрерывной, либо каждое сильно ограниченное подмножество в сопряженном пространстве равностепенно непрерывно. В частности, каждое борнологическое пространство (т. е. пространство, в к-ром каждая ограниченная полунорма непрерывна) является И. п. В секвенциально полном линейном топологич. пространстве из инфрабочечности следует бочечность. И. п., подобно бочечным, могут быть охарактеризованы через отображения в банаховы пространства: локально выпуклое линейное топологич. пространство X является И. п. тогда и только тогда, когда для всякого банахова пространства Y каждое линейное отображение из X в Y, имеющее замкнутый график и переводящее ограниченные множества в ограниченные, непрерывно. См. также *Ультрабочечное пространство*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Эдвардс Р.-Э., Функциональный анализ. Теория и приложения, пер. с англ., М., 1969. *В. М. Тихомиров.*

ИНЦИДЕНТНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТ — число, характеризующее когерентность ориентации инцидентных элементов симплициального, полиэдрального (клеточного) и других комплексов. Понятие И. к. и его свойства необходимо входят в определение любого абстрактного *комплекса*.

Пусть $t^n=(a_0, \ldots, a_n)$ — ориентированный симплекс в пространстве $\mathbb{R}^N$, т. е. симплекс, в к-ром выбран указанный порядок его вершин a_s, а $t_i^{n-1}=(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ — его ориентированная грань, противоположная вершине a_i. Если i — четное, то t^n и t_i^{n-1} ориентированы когерентно, а ориентация грани t_i^{n-1} индуцирована ориентацией симплекса t^n; в этом случае симплексам приписывается И. к. $[t^n: t_i^{n-1}]=+1$. Если i — нечетное, то t^n и t_i^{n-1} ориентированы некогерентно, и им приписывается И. к. $[t^n : t_i^{n-1}]=-1$.

Пусть теперь t^n и t^{n-1} — элементы (симплексы) *симплициального комплекса* в $\mathbb{R}^N$. Тогда их И. к. определяется следующим образом: если t^n и t^{n-1} неинцидентны, то $[t^n : t^{n-1}]=0$, если t^n и t^{n-1} инцидентны, то $[t^n : t^{n-1}]=+1$ или -1 в зависимости от того, когерентно ориентированы t^n и t^{n-1} или нет.

Свойства И. к.

$$[-t^n:t^{n-1}]=[t^n:-t^{n-1}]=-[t^n:t^{n-1}], \qquad (1)$$

где $-t^n$ — противоположно ориентированный симплекс, т. е. симплекс, получающийся нечетной перестановкой вершин симплекса t^n;

$$\sum\nolimits_k \left[t^n:t_k^{n-1}\right]\left[t_k^{n-1}: t^{n-2}\right]=0, \qquad (2)$$

где суммирование распространяется на все как-либо ориентированные симплексы t_k^{n-1} (для выполнимости (2) при нек-рых определениях симплициального комплекса требуется его полнота).

Аналогично, при надлежащем определении когерентностей ориентаций, вводится И. к. элементов *полиэдрального комплекса*. Пусть $\mathbb{R}^{n-1}$ — подпространство в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_1^n$ — одно из полупространств, ограниченных $\mathbb{R}^{n-1}$, и пусть $\mathbb{R}^n$ ориентировано выбором нек-рого векторного базиса $(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда $\mathbb{R}_1^n$ и $\mathbb{R}^{n-1}$ наз. когерентно ориентированными, если $(e_2, \ldots, e_n)$ — базис в $\mathbb{R}^{n-1}$, а e_1 направлен в полупространство $\mathbb{R}_1^n$. Клетки σ^r и σ^{r-1} когерентно ориентированы, если они содержатся соответственно в нек-рых когерентно ориентированных полупространстве и подпространстве.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975; [2] Хилтон П.-Дж., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, пер. с англ., М., 1966; [3] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976. *М. И. Войцеховский.*

ИНЦИДЕНТНОСТИ СИСТЕМА — совокупность $S=(A, \mathfrak{B}, I)$ двух множеств A и $\mathfrak{B}$ с отношением инцидентности I между их элементами, к-рое записывается как aIB для $a \in A$, $B \in \mathfrak{B}$; в этом случае говорят, что элемент a инцидентен элементу B, или B инцидентен a. Понятие «И. с.» вводится с целью использования геометрич. языка при рассмотрении общих комбинаторных проблем существования и построения; при этом отношению инцидентности предписываются нек-рые свойства, приводящие к тем или иным комбинаторным конфигурациям.

Примером используемых в комбинаторике И. с. служат (конечные) геометрии: элементы (конечных) множеств A и $\mathfrak{B}$ наз. соответственно точками и прямыми, а отношению I предписываются свойства, обычные в теории проективных или аффинных геометрий. Другим характерным примером И. с. являются *блок-схемы*, к-рые получаются, если потребовать, чтобы: 1) каждый элемент $a \in A$ был инцидентен в точности r элементам из $\mathfrak{B}$, 2) каждый элемент $B \in \mathfrak{B}$ был инцидентен в точности k элементам из A; 3) каждая пара $\{a, a'\}$ различных элементов из A была инцидентна в точности λ элементам из $\mathfrak{B}$. Часто в качестве $\mathfrak{B}$ берется нек-рое множество подмножеств множества A, тогда aIB есть не что иное, как $a \in B$.

И. с. $S=(A, \mathfrak{B}, I)$ и $S'=(A', \mathfrak{B}', I')$ наз. и з о м о р ф н ы м и, если существуют такие взаимно однозначные соответствия $\alpha: A \leftrightarrow A'$ и $\beta: \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{B}'$, что

$$aIB \Leftrightarrow (\alpha a)\, I'\, (\beta B).$$

Если $A=\{a, a_2, \ldots\}$ и $\mathfrak{B}=\{B_1, B_2, \ldots\}$ — конечные множества, то удобно описывать свойства И. с. S с помощью м а т р и ц ы и н ц и д е н т н о с т и $\|\alpha_{ij}\|$, где $\alpha_{ij}=1$, когда $a_j \in B_i$ и $\alpha_{ij}=0$ — в противном случае; матрица $\|\alpha_{ij}\|$ определяет И. с. S с точностью до изоморфизма.

Лит.: [1] Х о л л М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [2] D e m b o w s k i P., Finite Geometries, B.—N.Y., 1968. *В. Е. Тараканов.*

ИНЦИДЕНТНОСТЬ — геометрический термин, употребляемый для обозначения ($\in$) отношения принадлежности (связи, соединения) между основными объектами геометрии: точками, прямыми, плоскостями. Свойства И. характеризуются так наз. аксиомами принадлежности (см., например, *Гильберта система аксиом*). *А. Б. Иванов.*

ИНЪЕКТИВНЫЙ МОДУЛЬ — инъективный объект в категории модулей над кольцом R, т. е. такой R-модуль E над ассоциативным кольцом R с единицей, что для любых R-модулей M, N, для любого мономорфизма $i: N \to M$ и для любого гомоморфизма $f: N \to E$ найдется такой гомоморфизм $g: M \to E$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "g"] \\ E & \end{tikzcd}$$

коммутативна (все R-модули предполагаются правыми). Следующие условия на R-модуль E равносильны его инъективности: 1) для любой точной последовательности

$$0 \to N \to M \to L \to 0$$

индуцированная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, E) \longrightarrow 0$$

точна; 2) любая точная последовательность R-модулей, имеющая вид

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} L \longrightarrow 0,$$

расщепляется, т. е. подмодуль $\mathrm{Im}\,\alpha = \mathrm{Ker}\,\beta$ выделяется в M прямым слагаемым; 3) $\mathrm{Ext}^1_R(C, E)=0$ для всех R-модулей C; 4) для всякого правого идеала I кольца R любой гомоморфизм R-модулей $f: I \to E$ может быть продолжен до гомоморфизма R-модулей $g : R \to E$ (критерий Бэра).

В категории R-модулей «достаточно много» инъективных объектов: каждый R-модуль M можно вложить в И. м. Более того, каждый модуль M содержится в своей инъективной оболочке $E(M)$, то есть в И. м. $E(M)$, каждый ненулевой подмодуль к-рого имеет ненулевое пересечение с M. Любое вложение модуля M в И. м. E продолжается до вложения инъективной оболочки $E(M)$ в E. Каждый R-модуль M обладает инъективной резольвентой

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E_n \longrightarrow \ldots,$$

т. е. точной последовательностью модулей, в к-рой все модули E_i, $i \geqslant 0$, инъективны. Длина самой короткой инъективной резольвенты наз. инъективной размерностью модуля (см. также *Гомологическая размерность*).

Прямое произведение И. м. есть И. м. Инъективный модуль E равен Er для любого элемента $r \in R$, не являющегося левым делителем нуля в R, т. е. И. м.— делимый модуль. В частности, абелева группа является И.м. над кольцом $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда она делимая. Над коммутативным нётеровым кольцом R каждый И. м.— прямая сумма инъективных оболочек модулей вида R/P, где P — простой идеал кольца R.

И. м. широко используются при описании различных классов колец (см. *Гомологическая классификация колец*). Так, все модули над кольцом инъективны тогда и только тогда, когда кольцо классически полупросто. Равносильны условия: R — нётерово справа кольцо; любая прямая сумма инъективных R-модулей инъективна; любой инъективный R-модуль разлагается в прямую сумму неразложимых R-модулей. Артиновость справа кольца R равносильна тому, что каждый И. м. является прямой суммой инъективных оболочек простых модулей. Наследственность справа кольца равносильна инъективности всех фактормодулей инъективных R-модулей, а также тому, что сумма двух инъективных подмодулей в произвольном R-модуле инъективна. Если кольцо R наследственно справа и нётерово справа, то каждый R-модуль содержит наибольший инъективный подмодуль. Проективность (инъективность) всех инъективных (проективных) R-модулей эквивалентна тому, что R является квазифробениусовым кольцом.

Инъективная оболочка модуля R_R играет важную роль в теории колец частных. Напр., если правый сингулярный идеал кольца R равен нулю, E — инъективная оболочка модуля R_R, $\Lambda = \mathrm{Hom}_R(E, E)$ — ее кольцо эндоморфизмов, то R-модули Λ_R и E_R изоморфны, E является кольцом, изоморфным кольцу Λ, и это кольцо оказывается максимальным правым кольцом частных кольца R, причем $\Lambda \cong E$ — самоинъективное справа регулярное (в смысле Неймана) кольцо.

В связи с различными задачами продолжения гомоморфизмов модулей рассматриваются классы модулей M, близких к инъективным: квазиинъективные (если $0 \to N \to M$ и $f : N \to M$, то f продолжается до эндоморфизма модуля M); псевдоинъективные (если $0 \to N \to M$, $f : N \to M$ и f — мономорфизм, то f продолжается до эндоморфизма модуля M); малоинъективные (все эндоморфизмы подмодулей продолжаются до эндоморфизмов модуля M). Квазиинъективность модуля M равносильна инвариантности модуля M в своей инъективной оболочке относительно ее эндоморфизмов.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [3] Faith C., Lectures on injective modules and quotient rings, B.—Hdlb.—N.Y., 1967; [4] Sharpe D. W., Vamos P., Injective modules, Camb., 1972.

А. В. Михалев, А. А. Туганбаев.

ИНЪЕКТИВНЫЙ ОБЪЕКТ — такой объект I абелевой категории C, что для каждого мономорфизма $\alpha: A' \to A$ отображение

$$\mathrm{Hom}_C(A, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(A', I), \quad \text{где} \quad \varphi \longmapsto \varphi \circ \alpha$$

является сюръективным. Всякий инъективный подобъект I объекта A выделяется прямым слагаемым. Произведение И. о. — всегда И. о. В случае, когда каждый объект в C изоморфен подобъекту нек-рого И. о. категории C, говорят, что C — категория с достаточно многими инъективными объектами (такова, напр., категория Гротендика). В этих категориях объект инъективен тогда и только тогда, когда он выделяется прямым слагаемым из любого объекта, его содержащего. Для объектов таких категорий можно строить резольвенты, состоящие из И. о. (инъективные резольвенты), что позволяет развивать в этих категориях гомологическую алгебру.

В локально нётеровых категориях (см. *Топологизированная категория*) прямая сумма И. о. является И. о., а каждый И. о. изоморфен прямой сумме неразложимых И. о. и это представление однозначно [3]. Если C — категория модулей над нётеровым коммутативным кольцом Λ, то неразложимые инъективные модули суть инъективные оболочки полей частных факторколец $\Lambda/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — произвольный простой идеал в Λ [4].

Примеры: 1) Категория абелевых групп имеет достаточно много И. о. Таковыми объектами являются полные (делимые) группы.

2) Категория C_Λ правых Λ-модулей содержит достаточно много И. о. (см. *Инъективный модуль*).

3) Категория пучков модулей на окольцованном топологич. пространстве (X, O_X) содержит достаточно много И. о. Примерами таких И. о. служат пучки F, все слои к-рых F_x являются инъективными $O_{X,x}$-модулями. В случае, когда (X, O_X) есть *схема*, для квазикогерентных $O_{X,x}$-модулей верно и обратное утверждение: всякий И. о. есть пучок, все слои к-рого являются инъективными $O_{X,x}$-модулями.

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [3] Gabriel P., «Bull. Soc. Math. France», 1962, t. 90, p. 323—448; [4] Matlis E., «Pacific J. Math.», 1958, v. 8, p. 511—28. *И. В. Долгачев.*

ИНЪЕКЦИЯ, инъективное отображение, множества A в множество B — отображение $f: A \to B$, при к-ром различные элементы из A имеют различные образы в B. И. наз. также взаимно однозначным отображением множества A в множество B, или вложением.

О. А. Иванова.

ИОАХИМСТАЛЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, образованная ортогональными траекториями однопараметрического семейства сфер с центрами на одной прямой. Если за эту прямую принять ось z, аппликату центра сферы обозначить через u, а радиус сферы — через $R = R(u)$, то радиус-вектор И. п. есть:

$$r = \left\{ \frac{R\cos v}{\operatorname{ch}\tau}, \ \frac{R\sin v}{\operatorname{ch}\tau}, \ u + R\operatorname{th}\tau \right\},$$

где

$$\tau = \int \frac{du}{R} + V(v).$$

Одно из семейств линий кривизны ($v = \mathrm{const}$) И. п. расположено в плоскостях одного пучка. Изучена Ф. Иоахимсталем [1].

Лит.: [1] Joachimsthal F., «J. reine und angew. Math.», 1846, Bd 30, S. 347—50. *И. Х. Сабитов.*

ИРРАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО — число, не являющееся рациональным (т. е. целым или дробным) числом. Геометрически И. ч. выражает собой длину отрезка, несоизмеримого с отрезком единичной длины. О существовании несоизмеримых отрезков знали уже древние математики: им была известна, напр., несоизмеримость диагонали и стороны квадрата, что равносильно иррациональности числа $\sqrt{2}$.

Всякое действительное число может быть записано бесконечной десятичной дробью, при этом И. ч. и только они записываются непериодическими десятичными дробями, напр. $\sqrt{2}=1,41\ldots$, $\pi=3,14\ldots$. И. ч. определяют сечения (см. *Дедекиндово сечение*) в множестве рациональных чисел, у к-рых в нижнем классе нет наибольшего, а в верхнем нет наименьшего числа. Множество И. ч. всюду плотно на числовой прямой: между любыми двумя числами имеется И. ч. Множество И. ч. несчетно, является множеством второй категории и имеет тип G_δ.

Иррациональные алгебраические числа (в отличие от трансцендентных чисел) не допускают аппроксимаций любого порядка рациональными дробями. Точнее, для всякого иррационального алгебраического числа степени n числа ξ существует такое $c>0$, что при любых целых p и q $(q>0)$ выполняется неравенство

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|>\frac{c}{q^n}.$$

Квадратичные иррациональности и только они изображаются периодическими цепными дробями.

Л. Д. Кудрявцев.

ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ МЕРА действительного числа ξ — функция

$$L(\xi, H)=\min|h_1\xi+h_0|,$$

где минимум берется по всевозможным парам h_0, h_1 целых рациональных чисел таких, что

$$|h_0|\leqslant H,\quad |h_1|\leqslant H,\quad |h_0|+|h_1|\neq 0.$$

Понятие И. м. является частным случаем понятий *линейной независимости меры* и *трансцендентности меры*. И. м. показывает, насколько «хорошо» может число ξ быть приближено рациональными дробями. Для всех действительных иррациональных чисел ξ выполняется неравенство

$$L(\xi, H)<\frac{1}{\sqrt{5}}H^{-1},$$

но при любом $\varepsilon>0$ для почти всех (в смысле меры Лебега) действительных ξ

$$L(\xi, H)>CH^{-1-\varepsilon},$$

где $C=C(\varepsilon, \xi)>0$. Однако для любой функции $\varphi(H)\to 0$ при $H\to\infty$ и $\varphi(H)>0$ существует число ξ_φ такое, что при всех $H\geqslant 1$

$$0<L(\xi_\varphi, H)<\varphi(H).$$

Лит.: [1] Хинчин А. Я., Цепные дроби, 3 изд., М. 1978.

А. И. Галочкин.

ИРРЕГУЛЯРНАЯ ГРАНИЧНАЯ ТОЧКА — точка y_0 границы Γ области D, для к-рой существует такая непрерывная граничная функция $f(y)$ на Γ, что обобщенное решение *Дирихле задачи* в смысле Винера — Перрона (см. *Перрона метод*) $u(x)$ не принимает в точке y_0 граничного значения $f(y_0)$, т. е. либо предел

$$\lim_{x\to y_0,\ x\in D} u(x)$$

не существует, либо не совпадает с $f(y_0)$. Для плоских областей D И. г. т. является всякая изолированная точка границы Γ. В случае области D в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, А. Лебег (H. Lebesgue, 1912) впервые обнаружил, что И. г. т. может быть вершина весьма заостренного входящего в D острия. Напр., И. г. т. является начало координат $O \in \mathbb{R}^3$, если в его окрестности граница области имеет вид входящего острия, получаемого вращением кривой $y=e^{-1/x}$, $x>0$, вокруг положительной полуоси Ox (острие Лебега). Обобщенное решение задачи Дирихле не принимает в И. г. т. граничного значения $f(y_0)$ в том случае, если $f(y_0)$ является верхней или нижней гранью значений $f(y)$ на Г; при этом классическое решение не существует. Множество И. г. т. в определенном смысле разреженное, оно имеет тип F_σ, является *полярным множеством* и имеет нулевую *емкость*. См. также *Барьер*, *Регулярная граничная точка*.

Лит.: [1] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [2] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964. *Е. Д. Соломенцев.*

ИРРЕГУЛЯРНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА — понятие, возникающее в аналитич. теории линейных дифференциальных уравнений. Пусть $(n \times n)$-матрица $A(t)$ голоморфна в проколотой окрестности точки $t_0 \neq \infty$ и имеет особенность в точке t_0; точка t_0 наз. тогда особой точкой системы

$$\dot{x} = A(t)\,x. \qquad (*)$$

Существует два неэквивалентных определения И. о. т. Согласно первому определению, точка t_0 наз. И. о. т. системы (*), если $A(t)$ имеет в точке t_0 полюс порядка выше первого (см. *Аналитическая теория дифференциальных уравнений*, а также [2]). Согласно второму определению, точка t_0 наз. И. о. т. системы (*), если не существует такого числа $\sigma > 0$, что каждое решение $x(t)$ растет не быстрее $|t-t_0|^{-\sigma}$ при $t \to t_0$ по лучам (см. [3]). Случай $t_0=\infty$ сводится к случаю $t_0=0$ с заменой $t \to t^{-1}$. И. о. т. наз. иногда сильно особой точкой (см., напр., *Бесселя уравнение*). В окрестности И. о. т. решения допускают асимптотич. разложения, изученные впервые А. Пуанкаре [1].

Лит.: [1] Poincaré H., «Acta math.», 1886, v. 8, p. 295—344; [2] Вазов В., Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968; [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958. *Ю. С. Ильяшенко.*

ИРРЕГУЛЯРНОЕ ПРОСТОЕ ЧИСЛО — простое нечетное число p, для к-рого число классов идеалов *кругового поля* $R(e^{2\pi i/p})$ делится на p. Все остальные простые нечетные числа наз. регулярными.

Признак Куммера позволяет для каждого данного простого числа решить вопрос о том, будет ли оно регулярным или нет: для того чтобы нечетное простое число p было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы ни один из числителей первых $\frac{p-3}{2}$ *Бернулли чисел* $B_2, B_4, \ldots, B_{p-3}$ не делился на p (см. [1]).

В связи с этим результатом возник вопрос о распределении регулярных и иррегулярных чисел. Таблицы бернуллиевых чисел и признак Куммера показывают, что в пределах первой сотни только три простых числа: 37,59 и 67 — иррегулярны (числители B_{32}, B_{44} и B_{58} — кратны соответственно 37, 59 и 67). Э. Куммер предположил, что регулярных чисел в среднем в два раза больше, чем иррегулярных. Позднее К. Зигель [2] выдвинул предположение, состоявшее в том, что отношение числа И. п. ч. к числу регулярных простых чисел, содержащихся в промежутке $(1, x)$, при $x \to \infty$ стремится к пределу $\sqrt{e}-1$, где e — основание натуральных логарифмов. К настоящему времени (1978) известно только, что число И. п. ч. бесконечно и что среди нечетных простых чисел, меньших 5500, имеется 439 регулярных и 285 И. п. ч. [3].

Для всякого регулярного p уравнение Ферма

$$x^p + y^p = z^p$$

не имеет ненулевых решений в рациональных числах [1].

Пусть p — некоторое И. п. ч., $2\alpha_1, \ldots, 2\alpha_s$— индексы бернуллиевых чисел из $B_2, B_4, \ldots, B_{p-3}$, числители к-рых делятся на p, а k и t — натуральные числа такие, что $q=1+pk$ — простое, меньшее $p(p-1)$ и $t^k \not\equiv 1 \pmod q$. И пусть

$$d=\sum_{r=1}^{(p-1)/2} r^{p-2\alpha},$$

$$D_\alpha = t^{-kd/2} \prod_{r=1}^{(p-1)/2} (t^{kr}-1)^{r^{p-1-2\alpha}}.$$

Если для каждого $\alpha=\alpha_i$, $i=1, 2, \ldots, s$,

$$D_\alpha^k \not\equiv 1 \pmod q,$$

то для иррегулярного простого p справедлива теорема Ферма, т. е. уравнение Ферма неразрешимо в рациональных числах, отличных от 0. Этот признак наз. признаком Вандивера. С помощью этого признака установлена справедливость теоремы Ферма для всех показателей, меньших 5500 (см. [4]).

Лит.: [1] Kummer E. E., «J. reine und angew. Math.», 1850, Bd 40, S. 130—38; [2] Siegel C. Z., «Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.», 1904, S. 51—57; [3] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [4] Vandiver H. S., «Proc. Nat. Acad.», 1954, v. 40, № 8, p. 732—35. *В. А. Демьяненко.*

ИРРЕГУЛЯРНОСТЬ — численный инвариант неособого проектного алгебраич. многообразия, равный размерности его *Пикара многообразия.* В случае, когда основное поле имеет характеристику нуль (или, более общо, если схема Пикара многообразия X приведена), И. совпадает с размерностью пространства $H^1(X, O_X)$ первых когомологий с коэффициентами в структурном пучке.

Многообразия с ненулевой И. наз. иррегулярными, а многообразия с нулевой И.— регулярными. Иногда для полной линейной системы $|D|$ на многообразии X i-й иррегулярностью системы $|D|$ наз. число

$$\sigma^i(D)=\dim H^i(X, O_X(D)),$$

где $1 \leqslant i \leqslant \dim X$.

Лит.: [1] Бальдассарри М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968. *И. В. Долгачев.*

ИСКАЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ при конформных отображениях плоских областей — теоремы, характеризующие искажение линейных элементов в данной точке области, а также искажение области и ее подмножеств, и искажение границы области при *конформном отображении.* К И. т. в первую очередь относятся оценки модуля производной функции в данной точке области. Так, И. т. в классе Σ функций

$$F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\zeta}+\ldots,$$

мероморфных и однолистных в области $|\zeta|>1$, состоит в утверждении, что при любом ζ_0, $1<|\zeta_0|<\infty$, имеют место точные неравенства

$$1-\frac{1}{|\zeta_0|^2} \leqslant |F'(\zeta_0)| \leqslant \frac{|\zeta_0|^2}{|\zeta_0|^2-1}. \quad (1)$$

Равенство в левой части (1) имеет место только для функции

$$F_1(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\zeta_0(\bar{\zeta}_0\zeta)^{-1},$$

а в правой части — только для функции

$$F_2(\zeta)=\frac{\zeta-\zeta_0}{1-(\bar{\zeta}_0\zeta)^{-1}}+\beta_0,$$

где α_0 и β_0— произвольные фиксированные числа. Функция $w=F_1(\zeta)$ отображает область $|\zeta|>1$ на плоскость w с разрезом по отрезку, соединяющему точки

$\alpha_0-2\frac{\zeta_0}{|\zeta_0|}$ и $\alpha_0+2\frac{\zeta_0}{|\zeta_0|}$, а функция $w=F_2(\zeta)$ отображает область $|\zeta|>1$ на плоскость w с разрезом по дуге окружности $|w-\beta_0|=|\zeta_0|$ со средней точкой $\beta_0-\zeta_0$. Неравенства (1) легко получаются из неравенства Грунского

$$|\ln F'(\zeta_0)|\leqslant-\ln\left(1-\frac{1}{|\zeta_0|^2}\right),$$

определяющего область значений функционала $\ln F'(\zeta_0)$ на классе Σ. С другой стороны, неравенства (1) являются прямым следствием теоремы Голузина: если $F(\zeta)\in\Sigma$, то для любых точек ζ_1 и ζ_2, $|\zeta_1|=|\zeta_2|=\rho$, $1<\rho<\infty$, справедливо точное неравенство

$$\left|\ln\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|\leqslant-\ln\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right), \qquad (2)$$

причем знак равенства имеет место для функции $F(\zeta)=$ $=\zeta+e^{i\alpha}/\zeta$, где α — действительная постоянная. Из неравенства (2) следует также теорема искажения хорд (см. [1]): если функция $F(\zeta)\in\Sigma$, то для любых точек ζ_1 и ζ_2 на окружности $|\zeta|=\rho>1$ справедливо точное неравенство

$$\left|\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|\geqslant1-\frac{1}{\rho^2};$$

при этом знак равенства имеет место только для функции

$$F(\zeta)=\zeta+C+\frac{e^{2i\varphi}}{\zeta},$$

где C — постоянная, $\varphi=\frac{1}{2}(\arg\zeta_1+\arg\zeta_2)$. Известны различные обобщения неравенства (2), определяющие области значений соответствующих функционалов и составляющие усиления И. т. в классе Σ и его подклассах (см., напр., [1]).

В классе S функций

$$f(z)=z+c_2z^2+\ldots,$$

регулярных и однолистных в круге $|z|<1$, при $0<|z_0|<1$ справедливы следующие точные неравенства:

$$\frac{1-|z_0|}{(1+|z_0|)^3}\leqslant|f'(z_0)|\leqslant\frac{1+|z_0|}{(1-|z_0|)^3}, \qquad (3)$$

$$\frac{|z_0|}{(1+|z_0|)^2}\leqslant|f(z_0)|\leqslant\frac{|z_0|}{(1-|z_0|)^2}, \qquad (4)$$

$$\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}\leqslant\left|\frac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)}\right|\leqslant\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}. \qquad (5)$$

Оценки (4) и (5) следуют из оценок (3). Совокупность неравенств (3) — (5) наз. И. т. в классе S. Нижние границы в оценках (3) — (5) реализуются только функцией

$$f_\alpha(z)=z\left(1+e^{-i\alpha}z\right)^{-2},$$

верхние границы — только функцией

$$f_{\pi+\alpha}(z)=z\left(1-e^{-i\alpha}z\right)^{-2},$$

где $\alpha=\arg z_0$. Функции $w=f_\alpha(z)$, $0\leqslant\alpha<2\pi$, известные как функции Кёбе, отображают круг $|z|<1$ на плоскость w с разрезом по лучу $\arg w=\alpha$, $|w|\geqslant1/4$, и являются экстремальными в ряде задач теории однолистных функций. Имеет место теорема Кёбе об $1/4$: область, являющаяся образом круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$, $f(z)\in S$, всегда содержит круг $|w|<1/4$, причем точка $w_0=\frac{1}{4}e^{i\alpha}$ принадлежит границе этой области только для функции $f(z)=f_\alpha(z)$.

Оценки (3) — (5) являются простыми следствиями результатов об областях значений функционалов

$$\ln f'(z_0), \quad \ln \frac{f(z_0)}{z_0}, \quad \ln \frac{zf'(z_0)}{f(z_0)}$$

на классе S (см. [2]).

Пусть Σ_0 — класс функций $F(\zeta) \in \Sigma$, $F(\zeta) \neq 0$ при $1 < |\zeta| < \infty$. Имеет место следующая связь между функциями классов S и Σ_0: если $f(z) \in S$, то $F(\zeta) = \frac{1}{f(1/z)} \in \Sigma_0$, и обратно, если $F(\zeta) \in \Sigma_0$, то $f(z) = \frac{1}{F(1/z)} \in S$. Поэтому область значений к.-л. функционала (или системы функционалов) на классе S определяет область значений соответствующего функционала (или системы функционалов) на классе Σ_0, и обратно. Напр., из области значений функционала $\ln \frac{f(z_0)}{z_0}$, $0 < |z_0| < 1$, на классе S легко получается область значений функционала $\ln \frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0}$, $1 < |\zeta_0| < \infty$, на классе Σ_0.

Для функций, регулярных и ограниченных в круге, примерами И. т. являются *Шварца лемма* (см. [1]) и ее обобщения, а также следующая теорема Лёвнера о граничном искажении: для функции $\varphi(z)$, регулярной в круге $|z| < 1$, $\varphi(0) = 0$ $|\varphi(z)| < 1$ в $|z| < 1$ и $|\varphi(z)| = 1$ на дуге A окружности $|z| = 1$, длина образа дуги A не меньше длины самой дуги A, и равенство длин этих дуг имеет место только для функции $\varphi(z) = e^{i\alpha} z$, где α — действительное число.

В классе функций, однолистных в данной многосвязной области, минимум (соответственно максимум) модуля производной функции в данной точке области реализуется только отображениями этой области на область с радиальными (соответственно с концентрическими круговыми) разрезами. Для случая неограниченных отображений имеет место следующая теорема. Пусть D — конечносвязная область плоскости ζ, содержащая бесконечно удаленную точку, $\Sigma(D)$ — класс функций $F(\zeta)$, однолистных в D и имеющих в окрестности $\zeta = \infty$ разложение

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \ldots,$$

$\zeta_0 \neq \infty$ — точка области D. Пусть $F_\theta(\zeta)$, $F_\theta(\zeta_0) = 0$, есть функция класса $\Sigma(D)$, отображающая D на плоскость с разрезами по дугам логарифмич. спиралей, образующих угол θ с лучами, выходящими из начала (достаточно считать $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$; при $\theta = 0$ логарифмич. спираль вырождается в луч, выходящий из начала, а при $\theta = \pm\pi/2$ — в окружность с центром в начале),

$$p(\zeta) = \sqrt{F_0(\zeta) F_{\pi/2}(\zeta)}, \quad q(\zeta) = \sqrt{F_0(\zeta)/F_{\pi/2}(\zeta)},$$

где ветви корней выбраны так, что коэффициенты при ζ в разложениях Лорана функций $p(\zeta)$ и $q(\zeta)$ в окрестности $\zeta = \infty$ равны 1. Тогда область значений функционала $\ln F'(\zeta_0)$ на классе $\Sigma(D)$ представляет собой круг, определяемый неравенством:

$$|\ln F'(\zeta_0) - \ln p'(\zeta_0)| \leqslant -\ln q(\zeta_0),$$

причем каждой точке границы этого круга соответствует только функция $F(\zeta) = F_\theta(\zeta) + C$ с надлежащим θ, C — постоянная. В частности, справедливы точные неравенства:

$$|F_0'(\zeta_0)| \leqslant |F'(\zeta_0)| \leqslant |F_{\pi/2}'(\zeta_0)|,$$

$$\arg F_{\pi/4}'(\zeta_0) \leqslant \arg F'(\zeta_0) \leqslant \arg F_{-\pi/4}'(\zeta_0).$$

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Дженкинс Д. А., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [3] Черников В. В., в кн.: Итоги исследований по математике и механике за 50 лет. 1917—1967, Томск, 1967, с. 23—51; [4] Базилевич И. Е., в кн.: «Математика в СССР за 40 лет», М., 1959, с. 444—72; [5] Белинский П. П., Общие свойства квазиконформных отображений, Новосиб., 1974; [6] Kühnau R., «Math. Nachr.», 1971, Bd 48, S. 77—105.

Е. Г. Голузина.

ИСКЛЮЧЕНИЯ ТЕОРИЯ — теория исключения неизвестных из системы алгебраич. уравнений. Более точно, пусть имеется система уравнений

$$f_i(x_1, \ldots, x_n)=0, \quad i=1, \ldots, m, \tag{1}$$

где f_i — многочлены с коэффициентами из заданного поля P. Задача исключения неизвестных $x_1, \ldots, x_k$ из системы (1) (неоднородная задача теории исключения) может быть сформулирована следующим образом: найти проекцию множества решений системы (1) на пространство координат $x_{k+1}, \ldots, x_n$. В том случае, когда каждое из уравнений однородно по совокупности неизвестных $x_1, \ldots, x_k$, рассматривается также однородная задача теории исключения (неоднородная задача в этом случае тривиальна): найти проекцию на пространство координат $x_{k+1}, \ldots, x_n$ множества тех решений системы (1), в к-рых не все неизвестные $x_1, \ldots, x_k$ равны нулю.

Неоднородная задача И. т. может также трактоваться как нахождение условий на коэффициенты системы алгебраич. уравнений, при к-рых эта система совместна, а однородная задача И. т.— как нахождение условий на коэффициенты системы однородных алгебраич. уравнений, при к-рых эта система имеет ненулевое решение.

Основные результаты И. т. заключаются в том, что если поле P алгебраически замкнуто, то решение однородной задачи И. т. является алгебраическим множеством, т. е. множеством решений системы алгебраич. уравнений, а решение неоднородной задачи — конструктивным множеством в смысле алгебраич. геометрии, т. е. конечным объединением множеств вида $M \setminus N$, где M и N суть алгебраич. множества. В нек-рых простейших случаях решение задач И. т. известно в явном виде.

1) Пусть рассматриваемая система уравнений линейна и однородна относительно $x_1, \ldots, x_k$, т. е. имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j=0, \quad i=1, \ldots, m, \tag{2}$$

где a_{ij} — многочлены от $x_{k+1}, \ldots, x_n$. При заданных значениях $x_{k+1}, \ldots, x_n$ система (2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы $A=(a_{ij})$ меньше k (см. *Линейное уравнение*). Решением однородной задачи И. т. в этом случае будет множество в пространстве координат $x_{k+1}, \ldots, x_n$, выделяемое условиями равенства нулю всех миноров порядка k матрицы A.

2) Пусть рассматриваемая система уравнений линейна относительно $x_1, \ldots, x_k$, т. е. имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j=b_i, \quad i=1, \ldots, m, \tag{3}$$

где a_{ij}, b_i — многочлены от $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Пусть $\tilde{A}$ — матрица, получаемая приписыванием к матрице $A=(a_{ij})$ столбца (b_i). При заданных значениях $x_{k+1}, \ldots, x_n$ система (3) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\tilde{A}$ равен рангу матрицы A. Следовательно, результатом исключения $x_1, \ldots, x_n$ из системы (3) является

$$\bigcup_{r=0}^{k} M_r \setminus N_r,$$

где M_r — множество точек $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$, в к-рых $rk\tilde{A} \leqslant r$, а N_r — множество точек, в к-рых $rkA < r$ (множества M_r и N_r алгебраические).

3) Пусть $k=2$, поле P алгебраически замкнуто и рассматриваемая система состоит из двух уравнений, однородных по x_1, x_2:

$$\begin{aligned} a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}x_2+\ldots+a_nx_2^n=0, \\ b_0x_1^m+b_1x_1^{m-1}x_2+\ldots+b_mx_2^m=0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ — многочлены от $x_3, \ldots, x_n$. При заданных значениях $x_3, \ldots, x_n$ система (4) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда равен нулю *результант*

$$R(a_0, a_1, \ldots, a_n; b_0, b_1 \ldots, b_m)=$$

$$=\left|\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n & & & \\ & a_0 & \ldots & \ldots & a_{n-1} & a_n & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ & & & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_{m-1} & b_m & & & \\ & b_0 & \ldots & \ldots & b_{m-1} & b_m & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ & & & b_0 & b_1 & \ldots & b_{m-1} & b_m \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} m \text{ строк} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} n \text{ строк} \end{array}$$

Это и дает решение однородной задачи И. т. в рассматриваемом случае.

4) Пусть $k=1$, поле P алгебраически замкнуто и рассматриваемая система состоит из двух уравнений:

$$\begin{aligned} a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}+\ldots+a_n=0, \\ b_0x_1^m+b_1x_1^{m-1}+\ldots+b_m=0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ — многочлены от $x_2, \ldots, x_n$. При заданных значениях $x_2, \ldots, x_n$, не обращающихся в нуль a_0 или b_0, система (5) совместна тогда и только тогда, когда

$$R(a_0, a_1, \ldots, a_n; b_0, b_1, \ldots, b_m)=0.$$

Если же $a_0=b_0=0$, то следует рассмотреть

$$R(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m)$$

и т. д. Это позволяет описать в явном виде результат исключения x_1 из системы (5).

Исключение неизвестных из произвольной системы алгебраич. уравнений может быть проведено последовательно (т. е. исключается сначала одно неизвестное, затем другое и т. д.) при помощи описываемых ниже «элементарных преобразований». Поскольку после исключения одного неизвестного получается, вообще говоря, не алгебраическое, но конструктивное множество, то следует рассмотреть задачу проектирования на пространство координат $x_2, \ldots, x_n$ произвольного конструктивного множества в P^n.

Всякое конструктивное множество $X\subset P^n$ может быть представлено как объединение множеств решений совокупности систем алгебраич. уравнений и неравенств. (Под алгебраич. неравенством здесь понимается неравенство вида $f(x_1, \ldots, x_n)\neq 0$, где f — многочлен.) Элементарным преобразованием такой совокупности наз. преобразование одного из следующих типов: в одной из систем к одному из уравнений прибавляется другое, умноженное на многочлен; в системе, содержащей неравенство $f\neq 0$, одно из уравнений умножается на f; в одной из систем к одному из неравенств прибавляется одно из уравнений, умноженное на многочлен; одна из систем заменяется на две, получаемые из нее приписыванием уравнения $f=0$ и неравенства $f\neq 0$ соответственно (f — нек-рый многочлен); в одной из систем два неравенства заменяются их произведением.

Элементарные преобразования не изменяют объединения множеств решений систем, входящих в данную совокупность. Применяя элементарные преобразования, можно привести любую совокупность систем алгебраич.

уравнений и неравенств с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ к такому виду, когда в каждую из систем входит не более одного уравнения или неравенства, содержащего x_1, причем наряду с таким уравнением $f=0$ или неравенством $f \neq 0$ в эту же систему входит неравенство $f_0 \neq 0$, где f_0 — многочлен от $x_2, \ldots, x_n$, являющийся старшим коэффициентом в разложении f по степеням x_1. Если поле P алгебраически замкнуто, то, отбросив в системах полученной совокупности уравнения и неравенства, содержащие x_1, получают совокупность систем алгебраич. уравнений и неравенств с неизвестными $x_2, \ldots, x_n$, к-рая и задает проекцию множества X на пространство координат $x_2, \ldots, x_n$.

Последовательное исключение неизвестных с помощью элементарных преобразований позволяет в принципе свести решение произвольной системы алгебраич. уравнений с n неизвестными к решению ряда алгебраич. уравнений с одним неизвестным.

Лит.: [1] Ходж В., Пидо Д., Метод алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1954; [2] Ван-дер-Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976. *Э. Б. Винберг.*

ИСКЛЮЧЕННОГО ТРЕТЬЕГО ЗАКОН — закон классической логики, состоящий в том, что одно из двух высказываний «A» и «не A» является истинным. В математической логике И. т. з. выражается формулой $A \vee \neg A$, где $\vee$ — знак дизъюнкции, $\neg$ — знак отрицания. С интуиционистской (конструктивной) точки зрения установление истинности высказывания вида $A \vee \neg A$ означает установление истинности A или истинности $\neg A$. Поскольку не существует общего метода, позволяющего для каждого высказывания за конечное число шагов установить его истинность или истинность его отрицания, И. т. з. подвергается критике со стороны представителей интуиционистского и конструктивного направлений в основаниях математики (см. *Интуиционизм*, *Конструктивная математика*). *В. Е. Плиско.*

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО — аналитич. множество A в комплексном пространстве X, допускающем такое аналитич. отображение $f: X \to Y$, что $f(A)=y$ — точка комплексного пространства Y, а $f: X \setminus A \to Y \setminus \{y\}$ — аналитич. изоморфизм. Модификация f наз. стягиванием множества A в точку y.

Задача о характеризации исключительных множеств возникла в алгебраич. геометрии в связи с изучением *бирациональных преобразований* (см. также *Исключительное подмногообразие*). В аналитич. геометрии найдены весьма общие критерии исключительности множества. А именно, пусть A — связное компактное аналитич. множество положительной размерности в комплексном пространстве X. Множество A исключительно тогда и только тогда, когда оно обладает в X относительно компактной псевдовыпуклой окрестностью, в к-рой A является максимальным компактным аналитич. подмножеством. Пусть $\mathfrak{M}$ — когерентный пучок идеалов, множество нулей к-рого совпадает с A и пусть N — ограничение на A двойственного к $\mathfrak{M}$ линейного пространства над X (см. *Векторное аналитическое расслоение*). Для исключительности множества A достаточно, чтобы N было слабо отрицательным (см. *Положительное расслоение*). Если X — многообразие, а A — его подмногообразие, то N — это нормальное расслоение над X. В нек-рых случаях слабая отрицательность расслоения N является и необходимой (напр., если A — подмногообразие коразмерности 1, изоморфное $\mathrm{P}^k(\mathbb{C})$, или если X — двумерное многообразие). В частности, кривая A на комплексной поверхности X исключительна тогда и только тогда, когда матрица $(A_i A_j)$ пересечений ее неприводимых компонент отрицательно определена (см. [1], [2]). Строение окрестности И. а. м. $A \subset X$ полностью определяется окольцованным пространством $(A, \mathcal{O}X/\mathfrak{M}^{\mu}|_A)$ при достаточно большом μ. И. а. м.

обладают следующим свойством транзитивности: если $B \subset A$ — компактные аналитич. пространства в X, причем B исключительно в A, а A — в X, то B исключительно в X. Существует относительное обобщение понятия И. а. м., рассматривающее, грубо говоря, одновременное стягивание семейства аналитич. множеств в аналитич. семействе комплексных пространств. Здесь также справедлив критерий, аналогичный сформулированному выше критерию Грауэрта (см. [2]).

Другое естественное обобщение понятия И. а. м. состоит в следующем. Пусть A — подпространство в X и пусть задано собственное сюръективное голоморфное отображение $\varphi: A \to B$. Стягиванием пространства X вдоль φ наз. такое собственное сюръективное голоморфное отображение $f: X \to Y$, где Y содержит B в качестве подпространства, что $f|_A = \varphi$ и что f индуцирует изоморфизм $X \setminus A \to Y \setminus B$. В случае, когда X—многообразие, $\dim X \geqslant 3$, A — его компактное подмногообразие коразмерности 1, а φ — расслоение со слоем $P^r(\mathbb{C})$, $r > 1$, необходимое и достаточное условие стягиваемости пространства X вдоль φ на многообразие Y состоит в следующем: нормальное расслоение N над A (совпадающее в этом случае с расслоением, отвечающим дивизору A) должно индуцировать на каждом слое $\varphi^{-1}(b) \cong P^r(\mathbb{C})$ расслоение $-L$, где L определяется гиперплоскостью в $P^r(\mathbb{C})$; соответствующее стягивание обратно к моноидальному преобразованию с центром в B [3]. С другой стороны, для всякой модификации $f: X \to Y$, где Y — многообразие, $B = f(A)$ — его подмногообразие, $\dim B < \dim A$ и $f: X \setminus A \to Y \setminus B$ — изоморфизм, отображение $f|_A$ является расслоением со слоем $P^r(\mathbb{C})$. Известны критерии стягиваемости вдоль φ и в более общей ситуации (см. [2]). Если A исключительно в X и является его голоморфным ретрактом (напр., A — нулевое сечение слабо отрицательного векторного расслоения), то X допускает стягивание вдоль любого φ. Если при этом размерности слоев ретракции $X \to A$ равны по крайней мере $\dim A + 2$, то по полученному после стягивания пространству Y можно полностью восстановить исходные данные [5].

Лит.: [1] Грауэрт Г., сб. пер.: Комплексные пространства, М., 1965, с. 45—104; [2] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 93—171; [3] Fujiki A., Nakano S., «Publs Res. Inst. Math. Sci.», 1972, v. 7, № 3, p. 637—44; [4] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 77—170; [5] Takijima K., Suzuki T., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1976, v. 219, p. 369—77.

А. Л. Онищик.

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ — понятие теории распределения значений. Пусть $f(z)$ — мероморфная во всей плоскости z функция, а $n(r, a, f)$ означает число ее a-точек (с учетом их кратностей) в круге $|z| \leqslant r$. Согласно первой основной теореме Р. Неванлинны (см. [1], с. 164), при $r \to \infty$ имеет место соотношение

$$N(r, a, f) + m(r, a, f) = T(r, f) + O(1),$$

где $T(r, f)$ — характеристическая функция, не зависящая от a, $N(r, a, f)$ — считающая функция (логарифмическое усреднение $n(r, a, f)$) и $m(r, a, f) > 0$ — функция, отражающая среднюю близость значений f к числу a на окружности $|z| = r$ (см. *Распределения значений теория*). Для большинства значений a величины $N(r, a, f)$ и $T(r, f)$ при $r \to \infty$ эквивалентны; число a (конечное или бесконечное) наз. исключительным значением, если эта эквивалентность при $r \to \infty$ нарушается. Различают несколько типов И. з.

Число a наз. И. з. функции f в смысле Пикара, если число a-точек функции f во всей плоскости конечно (см. [1], с. 22, [2], с. 68), в частности если $f(z) \neq a$ для любого z.

Число a наз. И. з. f в смысле Бореля, если при $r \to \infty$ функция $n(r, a, f)$ растет в определенном смысле медленнее функции $T(r, f)$ (см. [1], с. 266, [2], с. 69).

Число a наз. И. з. f в смысле Неванлинны ([1], с. 271), если его дефект (см. *Дефектное значение*)

$$\delta(a, f) = 1 - \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)} > 0.$$

Число a наз. И. з. f в смысле Валирона, если

$$\Delta(a, f) = 1 - \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)} > 0.$$

Число a, для к-рого

$$\beta(a, f) = \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\max\limits_{|z|=r} \ln^{+} \frac{1}{|f(z)-a|}}{T(r, f)} > 0,$$

также наз. И. з. $f(z)$. При этом величина $\beta(a, f)$ (положительное отклонение $f(z)$) характеризует скорость асимптотического приближения $f(z)$ к числу a (см. [3]).

Лит.: [1] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [2] Гольдберг А. А., Островский И. В., Распределение значений мероморфных функций, М., 1970; [3] Петренко В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 2, с. 414—54.

В. П. Петренко.

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ПОДМНОГООБРАЗИЕ — замкнутое подмногообразие Y алгебраич. многообразия X определенного над алгебраич. замкнутым полем, к-рое при помощи некоторого собственного бирационального морфизма $f: X \to X'$ может быть отображено на подмногообразие Y' меньшей размерности и при этом $f: X \setminus Y \xrightarrow{\sim} X' - f(Y)$ — изоморфизм. Морфизм f наз. стягиванием подмногообразия Y на $Y' = f(Y)$; это понятие является частным случаем понятия модификации алгебраич. пространств [3]. В случае, когда X, Y, X' и Y' являются гладкими неприводимыми многообразиями, И. п. Y наз. исключительным подмногообразием 1-го рода. Если И. п. Y имеет коразмерность 1 в X, то оно наз. также исключительным дивизором. Исключительный дивизор на алгебраич. поверхности наз. исключительной кривой.

Понятие И. п. естественным образом распространяется на схемы, комплексные аналитич. и алгебраич. пространства. Соответствующий морфизм при этом также наз. стягиванием; естественным образом определяется понятие И. п. 1-го рода. И. п. комплексного аналитич. пространства наз. также исключительным аналитич. множеством.

Характеризация И. п. внутри объемлющего многообразия — одна из основных задач бирациональной геометрии. Исторически первый пример такой характеризации — критерий Кастельнуово — Энрикеса: неприводимая полная кривая Y на гладкой поверхности X тогда и только тогда является И. п. 1-го рода, когда она изоморфна проективной прямой P^1 и индекс ее самопересечения $(Y \cdot Y)$ на X равен -1 (см. [1], [9]). Этот критерий допускает обобщение на одномерные подсхемы двумерных регулярных схем (см. [6], [10]). Если $Y = \sum_{i=1}^{m} Y_i$ — произвольная связная полная кривая с неприводимыми компонентами Y_i на гладкой проективной поверхности X, то необходимое (но не достаточное) условие исключительности кривой Y состоит в отрицательной определенности матрицы $(Y_i \times \times Y_j)$ (см. [2]). В случаях связной компактной комплексной кривой на гладкой комплексной поверхности и связной полной кривой на гладком двумерном алгебраич. пространстве аналогичное условие является необходимым и достаточным условием исключительности.

Многомерное обобщение критерия Кастельнуово — Энрикеса для стягивания в точку имеет следующий вид [5]: неприводимое полное подмногообразие Y в гладком алгебраич. многообразии X тогда и только тогда является И. п. 1-го рода относительно стягивания в точку, когда выполняются следующие два условия: а) $Y \simeq P^r$, где $r = \dim X - 1$; б) нормальное расслоение $N_{Y/X}$ к Y в X определяется дивизором $-H$, где H — гиперплоскость в P^r. При этом X' проективно. Соответствующее стягивание f является *моноидальным преобразованием* с центром в точке $f(Y)$ (см. [7], [8]).

В аналитич. случае найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы связное компактное комплексное подмногообразие Y в комплексном многообразии X было И. п. 1-го рода; соответствующее стягивание f необходимо является моноидальным преобразованием с центром в $Y' = f(Y)$ (см. *Исключительное аналитическое множество*). Аналогичный критерий справедлив для алгебраич. пространств [3]. Для алгебраич. многообразий соответствующие условия необходимы, но не всегда достаточны.

При стягивании $f: X \to X'$ И. п. 1-го рода Y в алгебраич. проективном многообразии X на подмногообразие ненулевой размерности Y' в X' алгебраич. многообразие X' может уже не быть проективным. Более того, если алгебраич. многообразия X и Y определены над полем комплексных чисел, то при аналитич. стягивании f И. п. 1-го рода Y не в точку многообразие X' в общем случае не является алгебраическим.

Если рассматривать вопрос о стягиваемости в точку И. п. (не обязательно 1-го рода), то для полного связного алгебраич. подпространства Y гладкого алгебраич. пространства X достаточным (но не необходимым при $\dim X > 2$) условием исключительности является отрицательность нормального расслоения $N_{Y/X}$. Аналогичный факт имеет место для комплексных пространств.

В случае алгебраич. пространств наиболее общий критерий исключительности утверждает, что в категории нётеровых алгебраич. пространств подпространство Y в X тогда и только тогда является И. п., когда формальное пополнение $\hat{Y}$ в $\hat{X}$ вдоль является И. п. в категории формальных алгебраич. пространств [3]. Иными словами, стягивание алгебраич. подпространства возможно тогда и только тогда, когда возможно его соответствующее формальное стягивание.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965, «Тр. Матем. ин-та АН СССР»; [2] Артин М., «Математика», 1965, т. 9, № 3, с. 3—14; [3] Artin M., «Ann. math.», 1970, v. 91, № 1, p. 88—135; [4] Грауэрт Г., в кн.: Комплексные пространства, М., 1965, с. 45—104; [5] Kodaira K., «Ann. math», 1954, v. 60, p. 28—48; [6] Lichtenbaum S., «Amer. J. math.», 1968, v. 90, № 2, p. 380—405; [7] Nakano S., «Publs Res. Inst. Math. Sci.», 1971, v. 6, № 3, p. 483—502; [8] Fujiki A., Nakano S., там же, 1972, v. 7, № 3, p. 637—44; [9] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [10] его же, Lectures on minimal models and borational transformations of two dimensional schemes, Bombay, 1966.

В. А. Исковских.

ИСПЫТАНИЕ — один из основных терминов классич. *вероятностей теории.* При аксиоматич. подходе определяется как любое разбиение пространства элементарных событий на попарно непересекающиеся события, к-рые наз. «исходами испытания», а элементы порождаемой ими σ-алгебры — «событиями, связанными с данными испытаниями». Термин «И.» употребляется в основном в сочетаниях «повторные И.», «независимые И.», «И., связанные в цепь Маркова».

Ю. В. Прохоров.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ — построение, разработка и приложения математич. моделей принятия оптимальных решений. Содержанием теоретич. аспекта И. о. являются анализ и решение математич. задач выбора в заданном множестве допустимых решений X элемента, удовлетворяющего тем или иным критериям оптимальности и называемого оптимальным решением задачи. При этом иногда выбирается «обобщенный» элемент X: подмножество X или функция со значениями в X (в том числе случайная величина со значениями в X). Такие задачи наз. оптимизационными. Прикладной аспект И. о. состоит в составлении оптимизационных задач и реализации их решений.

Постановка задачи И. о. охватывает прежде всего формальное описание множества допустимых решений X и критериев оптимальности выбора. Оно должно соответствовать содержательным представлениям о возможном и целесообразном в данных условиях. Напротив, проверка адекватности самих содержательных представлений объективной реальности уже выходит за пределы И. о. Все решения (в том числе оптимальные) принимаются всегда на основе информации, к-рой располагает принимающий решения субъект (или субъекты), и только на ней. Поэтому каждая задача И. о. должна в своей постановке отражать знания принимающего решение субъекта о множестве допустимых решений и о критерии оптимальности. Так, если принятие решения происходит в наперед известном и не изменяющемся информационном состоянии, то задача наз. **статической**. В таких условиях весь процесс принятия решения может быть сведен к единому мгновенному акту. В противном случае, если приходится иметь дело с несколькими различными информационными состояниями, то решение будет заключаться в установлении соответствия между каждым информационным состоянием и доступной в нем альтернативой, т. е. в выборе функции, выражающей это соответствие. Если информационные состояния в ходе принятия решения сменяют друг друга, то задача наз. **динамической**; в ней часто целесообразно принимать поэтапные, «многошаговые» решения или даже развертывать принятие решения в непрерывный во времени процесс.

Информационные состояния принимающего решения субъекта могут по-разному характеризовать его истинное («физическое») состояние. Может оказаться, что одно информационное состояние субъекта охватывает целое множество его физич. состояний. В этом случае задача принятия решений наз. **неопределенной**. Такие задачи И. о. рассматриваются в *игр теории*. Если информационное множество содержит несколько физич. состояний, но субъект кроме их множества знает еще и (априорные) вероятности каждого из этих физич. состояний, то задача наз. **стохастической**. Наконец, если информационное состояние состоит из единственного физич. состояния, то задача наз. **детерминированной**. Иногда представляет интерес одновременно рассматривать семейства задач, зависящих от численного, векторного или пробегающего значения из к.-л. другого множества параметра, объединяя их в единую **параметрическую** задачу. Отличие ее от неопределенной задачи состоит в том, что решение первой заключается в решении всех задач, отвечающих конкретным значениям параметра, а решение второй — в нахождении такого допустимого решения, к-рое было бы в известной мере желательным, как бы конкретно ни реализовалась неопределенность. Вместе с тем решение стохастич. задачи состоит в нахождении такого допустимого решения, к-рое было бы оптимальным «в среднем» по всему множеству отдельных задач.

Теоретически мыслимы задачи И. о. с любыми множествами допустимых решений X и с весьма произвольными критериями оптимальности. Последние могут иметь вид требований о максимизации (или минимизации) значений нек-рой числовой или векторной функции f на X. Эта функция обычно наз. *целевой функцией*. В первом случае говорят о задаче *математического программирования* (**оптимального программирования**, что не следует смешивать с программированием на ЭВМ), а во втором — о **задаче векторной оптимизации**, или о *многокритериальной задаче*. Рассматриваются также критерии, выражаемые бинарным отношением предпочтения $\succ$

на X. Это отношение не обязано быть отношением линейного или хотя бы частичного упорядочения.

В математич. программировании чаще других рассматриваются задачи, в к-рых X есть подмножество конечномерного евклидова пространства E^n. Если при этом X — выпуклый многогранник с конечным числом вершин, а целевая функция f линейна, то имеют дело с задачами *линейного программирования*; если X — произвольное выпуклое множество, а f — выпуклая функция, то — с задачей *выпуклого программирования*. Естественным образом определяются задачи, относящиеся к кусочно линейному программированию, *квадратичному программированию* и т. д. Множество допустимых решений X может быть также подмножеством функционального пространства, и формально вариационное исчисление, а также круг вопросов, связанный с принципом максимума Понтрягина, поэтому могут быть также отнесены к оптимальному программированию. В других задачах оптимального программирования X может быть конечным множеством; такие задачи относятся к *дискретному программированию*. В них допустимые решения могут быть точками целочисленной решетки в E^n (целочисленное программирование) или векторами, каждая компонента к-рых принимает лишь два значения (булево программирование). В отдельных задачах элементы X суть перестановки конечного числа символов, пути в заданном графе и т. д. Особым случаем задач оптимального программирования является нахождение максимина, т. е. максимального значения функции, имеющей вид минимума (аналогично—минимакса).

Теория решения стохастич. задач линейного программирования составляет предмет *стохастического программирования*. Многокритериальные задачи, а также задачи с отношением предпочтения по существу относятся к теории игр; их классификация проводится по теоретико-игровым признакам.

Одной из тенденций современного (70-е гг. 20 в.) И. о. является переход от рассмотрения отдельных задач И. о. к изучению систем, пространств, исчислений таких задач и исследование связей между различными задачами или сведе́ний одних задач к другим, более просто устроенным. Математич. аппарат, предназначенный и разрабатываемый для целей решения задач И. о., принято называть математич. методами И. о. По своему характеру математич. методы И. о. в принципе не отличаются от математич. методов любой другой математич. дисциплины, имеющей содержательные приложения или хотя бы интерпретации. Разработанность математич. методов для разных задач И. о. и их классов неодинакова. Наиболее разработанной является теория линейного и выпуклого программирования.

Некоторые параметрич. задачи И. о., выделяемые специфическими содержательными интерпретациями, проблематикой и терминологией, носят название моделей И. о. Обычно каждая модель И. о. имеет присущие ей методы решения. Диапазон калибров моделей И. о. весьма широк: от конкретных задач, различающихся лишь численными значениями входящих в них параметров (к их числу можно отнести задачу о назначениях, транспортную задачу и несколько более сложные задачи о раскрое, задачу о размещении и теорию сетевых графиков), до таких разветвленных дисциплин, как теория управления запасами, теория расписаний (иногда называемая календарным планированием) или теория надежности. Большое число моделей И. о. дает теория игр (игры с выбором момента времени, игры типа Блотто, игры типа покера, дифференциальные игры преследования и др.). К числу моделей И. о. принято несколько авансированно относить теорию массового обслуживания, хотя большинство ее задач пока еще не приобрело оптимизационного характера.

Решение каждой задачи И. о. начинается с выбора принципа оптимальности. Если задача относится к оптимальному программированию, то этот выбор тривиален: принцип оптимальности состоит в максимизации (соответственно минимизации) целевой функции. Таким образом, в этом случае принцип оптимальности задачи формально совпадает с ее критерием оптимальности. В остальных случаях нахождение принципа оптимальности оказывается существенным этапом решения задачи и может реализоваться неоднозначно. Употребительны приемы сведения векторного критерия или отношения предпочтения к численным критериям. Напр., в случае многокритериальной задачи принцип оптимальности может состоять в придании отдельным компонентам векторного критерия тех или иных весов и рассмотрении в качестве целевой функции взвешенной суммы; другой принцип оптимальности в этой задаче может заключаться в максимизации минимальной компоненты вектора критерия (принцип максимина) и т. д. Весьма разнообразными могут быть принципы оптимальности в задачах с отношением предпочтения (см., напр., *Игр теория*). Возможности и пути замены отношений предпочтения численными критериями составляют один из основных вопросов *полезности теории*. Т. о., критерий задачи И. о. есть часть ее условия, а принцип оптимальности — часть ответа. Для большинства моделей И. о. принципы оптимальности фиксированы.

Следующим после выбора принципа оптимальности этапом решения задачи И. о. является установление его реализуемости (т. е. существование решений задачи в смысле этого принципа). Нереализуемость принципа оптимальности в классе заданных в условиях задачи допустимых решений иногда преодолевается путем введения в том или ином смысле обобщенных решений: подмножеств множества допустимых решений или функций со значениями в этом множестве.

Так как существование оптимальных решений задачи И. о. нередко доказывается неконструктивно (напр., на основании тех или иных теорем о неподвижной точке), а иногда конструктивным образом, но обеспечивающим фактическое его нахождение лишь потенциально (но не практически), получение оптимального решения задачи И. о. является третьим этапом ее разработки.

Задачи И. о. обладают рядом черт, обусловливающих методику их составления и решения. Во-первых, даже для наиболее простых параметрич. классов задач не удается представить решение в виде единообразного аналитич. выражения от соответствующих параметров. Поэтому задачи И. о. в подавляющем большинстве не поддаются аналитич. решению и должны решаться численно. Во-вторых, большинство практически интересных задач И. о. содержит в своих формулировках весьма большое количество числового материала, не сводящегося к аналитич. выражениям, поэтому численное решение этих задач возможно лишь с использованием ЭВМ. В-третьих, процесс решения многих задач И. о. заключается в выполнении простых однотипных операций над числами, составляющих большие массивы. Поэтому задачи И. о. предъявляют к ЭВМ требования, касающиеся в большей степени их памяти, чем быстродействия. Фактически требования И. о. оказывают значительное влияние на развитие ЭВМ и формирование их парка.

Круг приложений И. о. весьма широк. И. о. используется для решения технических (причем не столько конструкторских, сколько технологических), технико-экономических, социально-экономических задач, а также задач управления в различных сферах и на различных уровнях, вытесняя постепенно традиционные «интуитивные» методы принятия решений.

Практическое внедрение результатов И. о. встречается с трудностями различного рода. Первая из них, преодолеваемая еще сравнительно легко, связана с построением концептуальной структуры модели реальной задачи принятия решения (или с подбором уже имеющейся структуры модели). Этим устанавливается принципиальная возможность моделирования класса реальных задач, включающего рассматриваемую задачу, нек-рым классом задач И. о. Следующая трудность состоит в выборе из этого класса задач И. о. именно той, к-рая моделирует интересующую исследователя конкретную задачу. Для этого, в частности, необходимо измерить значения параметров, определяющих решаемую задачу. Но поскольку эти параметры имеют не обязательно физический или технический, а часто экономический или даже социально-экономич. характер, их измерение с требуемой точностью может представлять самостоятельную проблему. Эту трудность сбора информации для построения конкретной модели можно считать основным препятствием на пути выработки оптимального решения. Затем, после построения модели, возникают чисто математич. и в том числе вычислительные трудности ее анализа и решения. В сущности именно их преодоление и составляет содержание И. о. Наконец, после нахождения решения возникает последняя трудность, уже организационного и психологич. плана: найденное решение нередко существенно отличается от традиционных и потому может восприниматься с недоверием. Все это ограничивает практич. применения И. о. Для более успешного их преодоления коллективы, работающие в области И. о., формируются как комплексные: в них включаются кроме математиков обычно и инженеры, и экономисты, и специалисты в области конкретных дисциплин, иногда — психологи, администраторы и т. д.

Лит.: [1] Морз Ф. М., Кимбелл Д. Е., Методы исследования операций, пер. с англ., М., 1956; [2] Саати Т.-Л., Математические методы исследования операций, пер. с англ., М., 1963; [3] Кофман А., Фор Р., Займемся исследованием операций, пер. с франц., М., 1966; [4] Кофман А., Методы и модели исследования операций, пер. с франц., М., 1966; [5] Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л., Введение в исследование операций, пер. с англ., М., 1968; [6] Чуев Ю. В., Исследование операций в военном деле, М., 1970; [7] Гермейер Ю. Б., Введение в теорию исследования операций, М., 1971; [8] Акоф Р., Сасиени М., Основы исследования операций, пер. с англ., М., 1971; [9] Вентцель Е. С., Исследование операций, М., 1972; [10] Вагнер Г., Основы исследования операций, т. 1—3, пер. с англ., М., 1972—1973; [11] Исследование операций. Методологические аспекты, М., 1972; [12] Mathematische Standardmodelle der Operationsforschung, B., 1971; [13] Mathematische Standardmodelle der Operationsforschung. Mathematische Grundlagen, Methoden und Modelle, Bd 1—3, B., 1971—73. *Н. Н. Воробьев.*

ИСТИННОСТНАЯ ТАБЛИЦА — таблица, выражающая *истинностное значение* сложного высказывания через истинностные значения входящих в него простых высказываний. И. т. имеет вид (см. таблицу, *И* означает «истина», *Л* — «ложь»).

A_1	A_2	...	A_n	$\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n)$
И	*И*	...	*И*	V_1
И	*И*	...	*Л*	V_2
.	.	...	.	.
.	.	...	.	.
.	.	...	.	.
Л	*Л*	...	*Л*	V_{2^n}

Здесь $A_1, \ldots, A_n$ — пропозициональные переменные, $\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n)$ — высказывательная форма, причем истинностное значение высказывания $\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n)$ определяется истинностными значениями высказываний $A_1, \ldots, A_n$. Каждая строка таблицы соответствует одной из 2^n возможных комбинаций истинностных значений n высказываний. При этом V_i есть истинностное значение высказывания $\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n)$, если высказывания $A_1, \ldots, A_n$ имеют истинностные значения, указанные в i-й строке. С помощью И. т. в математич. логике определяются истинностные функции, соответствующие таким логич. связкам, как отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность. В классич. логике высказываний И. т. применяются для проверки общезначимости формул: формула общезначима тогда и только тогда, когда в последнем столбце таблицы все V_i суть $И$. *В. Е. Плиско.*

ИСТИННОСТНОЕ ЗНАЧЕНИЕ — одно из двух значений — «истина» ($И$) или «ложь» ($Л$),— которое может принимать данная логич. формула в рассматриваемой интерпретации (модели). И. з. $И$ иногда в литературе обозначается также 1, T, t, а И. з. $Л$ — 0, F, f. Если в модели $\mathfrak{M}$ заданы И. з. элементарных формул, то И. з. $\|A\|$ всякой формулы A определяется индуктивно следующим образом (для классич. логики):

$$\|B \& C\| = И \Leftrightarrow \|B\| = И \quad \text{и} \quad \|C\| = И,$$

$$\|B \vee C\| = И \Leftrightarrow \|B\| = И \quad \text{или} \quad \|C\| = И,$$

$$\|B \supset C\| = И \Leftrightarrow \|B\| = Л \quad \text{или} \quad \|C\| = И,$$

$$\|\neg B\| = И \Leftrightarrow \|B\| = Л,$$

$$\|\forall x B(x)\| = И \Leftrightarrow \text{для всех } a \text{ из } \mathfrak{M}\ \|B(a)\| = И,$$

$$\|\exists x B(x)\| = И \Leftrightarrow \text{для нек-рого } a \text{ из } \mathfrak{M}\ \|B(a)\| = И.$$

Иногда рассматриваются интерпретации, в к-рых логич. формула, кроме $И$ и $Л$, может принимать и другие «промежуточные» И. з. В таких интерпретациях И. з. формул могут быть, напр., элементами булевых алгебр (так наз. *булевозначные модели* для классической логики), элементами псевдобулевых алгебр или открытыми множествами топологич. пространств (для интуиционистской логики), элементами топологических булевых алгебр (для модальной логики $S4$) (см. [2]). При этом, если в булевозначной модели $\mathfrak{M}$ заданы И. з. элементарных формул, то И. з. сложных формул определяются так:

$$\|B \& C\| = \|B\| \cap \|C\|,$$

$$\|B \vee C\| = \|B\| \cup \|C\|, \quad \|B \supset C\| = \overline{\|B\|} \cup \|C\|,$$

$$\|\neg B\| = \overline{\|B\|}, \quad \|\forall x B(x)\| = \bigcap_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|,$$

$$\|\exists x B(x)\| = \bigcup_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|,$$

где $\overline{\|B\|}$ есть дополнение к элементу $\|B\|$. Напр., в топологич. моделях для интуиционистской логики И. з. сложных формул определяются так:

$$\|B \& C\| = \|B\| \cap \|C\|, \quad \|B \vee C\| = \|B\| \cup \|C\|,$$

$$\|B \supset C\| = \mathrm{Int}\,(\overline{\|B\|} \cup \|C\|), \quad \|\neg B\| = \mathrm{Int}\,(\overline{\|B\|}),$$

$$\|\forall x B(x)\| = \mathrm{Int}\,\left(\bigcap_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|\right).$$

$$\|\exists x B(x)\| = \bigcup_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|,$$

где $\mathrm{Int}\,(X)$ обозначает внутренность множества X.

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [2] Расева Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972.

С. К. Соболев.

ИСТИННЫЙ ЦИКЛ метрического пространства — последовательность $z^n = \{z_1^n, \ldots, z_k^n, \ldots\}$ ε_k-циклов с условием $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Компакт, на к-ром лежат все вершины всех циклов всех симплексов И. ц., наз. компактным носителем z. Если $f: X \to X$ — некоторое непрерывное отображение, то fz — также И. ц., деформация отображения f индуцирует деформацию истинного цикла. См. *Вьеториса гомологии.* *А. А. Мальцев.*

ИСТОЧНИК векторного поля — точка векторного поля $\boldsymbol{a}$, обладающая тем свойством, что поток Q поля через любую окружающую ее замкнутую поверхность ∂V (и не окружающую др. источников) положителен. Поток

$$Q = \iint_{\partial V} (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a})\, ds,$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней нормали к ∂V, s — элемент площади ∂V, называется мощностью И. Если поток Q отрицателен, то говорят о стоке. Если И. распределены непрерывно по рассматриваемой области V, то предел

$$\lim_{\partial V \to M} \frac{\iint_{\partial V} (a, n)\, ds}{V}$$

наз. плотностью (интенсивностью) И. в точке M и равен дивергенции векторного поля a в точке M.

А. Б. Иванов.

ИСТОЧНИК СООБЩЕНИЙ — объект, вырабатывающий сообщения, подлежащие передаче по *каналу связи*. Сообщение, вырабатываемое И. с. U, есть случайная величина ξ, определенная на нек-ром *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, принимающая значения в нек-ром измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$ и имеющая распределение вероятностей $p(\cdot)$.

Обычно

$$(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}}) = \prod\nolimits_{t \in \Delta} (X_t, S_{X_t}),$$

где (X_t, S_{X_t}) — экземпляры одного и того же измеримого пространства (X, S_X), а Π — прямое произведение пространств (X_t, S_{X_t}), когда параметр t пробегает множество Δ, являющееся, как правило, либо нек-рым интервалом (конечным, полубесконечным или бесконечным в обе стороны) действительной оси, либо нек-рым дискретным подмножеством этой оси (в последнем случае обычно $\Delta = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ или $\Delta = \{1, 2, \ldots\}$). В первом из этих случаев говорят об И. с. с непрерывным временем, а во втором — об И. с. с дискретным временем. И в том, и в другом случае сообщением служит случайный процесс $\xi = \{\xi(t), t \in \Delta\}$ со значениями в пространстве (X, S_X); в приложениях $\xi(t)$ трактуется как сообщение, вырабатываемое И. с. в момент времени t. Наборы случайных величин $\xi_t^T = \{\xi(s), t < s \leq T\}$ наз. отрезками $(t, T]$ сообщений.

И. с. делятся на различные классы в зависимости от типа сообщения — случайного процесса $\xi(t)$, вырабатываемого И. с. Напр., если $\xi(t)$ — случайный процесс с независимыми одинаково распределенными значениями или стационарный, эргодический, марковский, гауссовский и т. д. процесс, то И. с. наз. соответственно И. с. без памяти, стационарным, эргодическим, марковским, гауссовским и т. д.

Одной из задач в теории *информации передачи* является задача кодирования И. с. При этом различают, напр., кодирование И. с. кодами фиксированной длины, переменной длины, кодирование И. с. при заданных условиях точности и др. (в приложениях нек-рые задачи кодирования И. с. наз. квантованием сообщений, сжатием сообщений и т. д.). Напр., пусть U — И. с. без памяти с дискретным временем, вырабатывающий сообщение $\xi = (\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots)$, компоненты ξ_k к-рого принимают значения из нек-рого конечного множества (алфавита) X. Пусть имеется другое конечное множество $\tilde{X}$ (множество значений компонент $\tilde{\xi}_k$ воспроизводимого сообщения $\tilde{\xi} = (\ldots, \tilde{\xi}_{-1}, \tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1, \ldots)$). Кодированием объема M отрезка $\xi^L = (\xi_1, \ldots, \xi_L)$ сообщения длины L наз. отображение X^L в множество из M элементов $\tilde{X}^L$, и пусть $\tilde{x}^L(x^L)$ — образ элемента $x^L \in X^L$ при таком отображении (здесь X^L — прямое произведение L экземпляров множества X). Пусть, далее, *сообщений точность воспроизведения* задается действительнозначной неотрицательной функцией $\rho(x, \tilde{x})$, $x \in X$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$, — мерой искажения, так что средняя мера искажения нек-рого кодирования задается равенством

$$\overline{\rho}_L = \frac{1}{L} \mathsf{E} \rho_L (\xi^L, \tilde{x}^L (\xi^L)), \qquad (1)$$

где

$$\rho_L (x^L, \tilde{x}^L) = \sum_{k=1}^{L} \rho (x_k, \tilde{x}_k),$$

если $x^L = (x_1, \ldots, x_L)$ и $\tilde{x}^L = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_L)$. ε-энтропией И. с. без памяти наз. величина

$$\overline{H}_\varepsilon (U) = \inf I (\xi_1, \tilde{\xi}_1), \qquad (2)$$

где $I(\cdot, \cdot)$ — *информации количество*, а нижняя грань берется по всевозможным совместным распределениям пары $(\xi_1, \tilde{\xi}_1)$, $\xi_1 \in X$, $\tilde{\xi}_1 \in \tilde{X}$, таким, что распределение X_1 совпадает с распределением отдельной компоненты И. с. U и

$$\mathsf{E} \rho (\xi_1, \tilde{\xi}_1) \leqslant \varepsilon.$$

Теорема кодирования И. с. Пусть $\overline{H}_\varepsilon (U)$ есть ε-энтропия дискретного источника U без памяти с конечной мерой искажения $\rho(\cdot, \cdot)$ и пусть $M = \exp \{LR\}$. Тогда: 1) для любого $\varepsilon > 0$, любого $\delta > 0$, любого $R > \overline{H}_\varepsilon (U)$ и достаточно большого L существует кодирование объема M отрезка сообщения длины L такое, что среднее искажение $\overline{\rho}_L$ удовлетворяет неравенству $\overline{\rho}_L \leqslant \varepsilon + \delta$; 2) если $R < \overline{H}_\varepsilon (U)$, то при любом кодировании объема M отрезка сообщения длины L среднее искажение $\overline{\rho}_L$ удовлетворяет неравенству $\overline{\rho}_L > \varepsilon$. Эта теорема кодирования обобщается и на более общий класс И. с., напр. для И. с. с непрерывным пространством X значений компонент. В этом случае вместо кодирования объема M говорят о квантовании И. с. объема M. Следует заметить, что ε-энтропия $\overline{H}_\varepsilon (U)$, входящая в формулировку теоремы, при $\varepsilon = 0$ и мере искажения

$$\rho (x, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = \tilde{x}, \\ 1, & \text{если } x \neq \tilde{x}, \end{cases} \quad \text{при} \quad X = \tilde{X}$$

совпадает со скоростью создания сообщений заданным И. с.

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3—104; [3] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [4] Berger T., Rate distortion theory, N.Y., 1971.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ИСЧЕРПАНИЕ ОБЛАСТИ, аппроксимирующая последовательность областей,— для данной области D топологического пространства X последовательность в определенном смысле регулярных областей $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$ такая, что $\overline{D}_k \subset D_{k+1}$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D$. Для любой области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ существует, напр., И. о., состоящее из областей D_k, ограниченных кусочно гладкими кривыми в $\mathbb{C}^1$ или кусочно гладкими поверхностями в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. Для любой открытой римановой поверхности S существует полиэдрическое исчерпание $\{\Pi_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящее из полиэдрических областей Π_k, представляющих собой, каждая в отдельности, связное объединение конечного числа треугольников *триангуляции* S, причем: $\overline{\Pi}_k \subset \Pi_{k+1}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k = S$ и границей каждой из областей, составляющих открытое множество $S \setminus \overline{\Pi}_k$ при достаточно большом k является лишь один из граничных контуров Π_k.

Лит.: [1] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 2, М., 1962, гл. 5 и сл.

Е. Д. Соломенцев.

ИСЧЕРПЫВАНИЯ МЕТОД — метод доказательства, применявшийся математиками древности при нахождении площадей и объемов. Назв. «метод исчерпывания» введено в 17 в.

Типичная схема доказательства при помощи И. м. может быть изложена в современных обозначениях так: для определения величины A строится нек-рая последовательность величин $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ так, что

$$C_n < A; \tag{1}$$

предполагают также известным такое B, что

$$C_n < B \tag{2}$$

и при любом целом K для достаточно больших n удовлетворяются неравенства

$$K(A - C_n) < D, \quad K(B - C_n) < D, \tag{3}$$

где D — постоянно. С современной точки зрения, для перехода от неравенства (3) к равенству

$$A = B \tag{4}$$

достаточно заметить, что из условий (1), (2) и (3) следует

$$\lim_{n \to \infty} (A - C_n) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} (B - C_n) = 0$$

$$A = \lim_{n \to \infty} C_n = B.$$

Математики древности, не располагавшие теорией *пределов*, обращались к доказательству от противного и доказывали невозможность каждого из неравенств $A < B$, $B < A$. Чтобы опровергнуть первое из них, при помощи *Архимеда аксиомы* устанавливали, что для $R = B - A$ существует такое K, что $KR > D$, и в силу условия (1) получали

$$K(B - C_n) > K(B - A) > D,$$

что противоречит второму из неравенств (3). Аналогично опровергалось другое предположение. После этого оставалось принять только равенство (4).

Введение И. м. вместе с лежащей в его основе аксиомой приписывается Евдоксу Книдскому. Этим методом широко пользовался Евклид, а с особенным искусством и разнообразием — Архимед. Напр., для определения площади сегмента A параболы Архимед строит площади $C_1, C_2, \ldots$, «исчерпывающие» при их постепенном нарастании площадь A сегмента.

При этом

$$C_2 = C_1 + \frac{1}{4} C_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n = C_1 + \frac{1}{4} C_1 + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}} C_1.$$

Вместо того чтобы прибегнуть к предельному переходу

$$A = \lim_{n \to \infty} C_n = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right) C_1 = \frac{4}{3} C_1,$$

Архимед геометрически доказывает, что при любом n

$$A - C_n < \frac{1}{4^{n-1}} C_1.$$

Вводя площадь

$$B = \frac{4}{3} C_1,$$

Архимед получает, что

$$B - C_n = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} C_1,$$

и, следуя изложенному выше порядку, заканчивает доказательство того, что

$$A = B = \frac{4}{3} C_1.$$

БСЭ-3.

ИСЧИСЛЕНИЕ — 1) Составная часть названия нек-рых разделов математики, трактующих правила вычислений и оперирования с объектами того или иного типа; напр., дифференциальное И., вариационное И. 2) Дедуктивная система, т. е. способ задания множества путем указания исходных элементов (аксиом исчисления) и *вывода правил*, каждое из к-рых описывает, как строить новые элементы из исходных и уже построенных. Выводом в И. Ξ наз. такое линейно упорядоченное множество, что всякий его элемент P является либо аксиомой И. Ξ, либо заключением применения к.-л. принадлежащего Ξ правила вывода, причем все посылки этого применения предшествуют P в выводе. Элемент наз. выводимым в Ξ, если в Ξ можно построить вывод, кончающийся этим элементом. Для удобства изучения выводов они иногда записываются в виде нелинейной структуры (см. *Вывода дерево*); выводы могут быть снабжены анализом, т. е. дополнительной информацией, облегчающей проверку правильности вывода (напр., при каждом элементе вывода пишутся код правила и номера предшествующих элементов, при помощи к-рых получен данный элемент).

Пример. Рассмотрим исчисление Ξ, задающее множество M записей в однобуквенном алфавите $\{|\}$ всех чисел вида 2^n при $n=1, 2, \ldots$ И. Ξ имеет одну аксиому $||$ и одно правило вывода «Из слова P можно получить PP». Легко убедиться, что слова из M и только они выводимы в Ξ.

И. может иногда порождать также нек-рые вспомогательные элементы, в таком случае задается нек-рый алгоритм, позволяющий отличать основные элементы от вспомогательных. При отсутствии вспомогательных элементов говорят о строгом представлении множества M исчислением Ξ. Таков, в частности, приведенный выше пример.

Используются и более сложные формы задания множеств посредством И., когда вместо элементов множества порождаются их коды (т. е. нужен еще дополнительный алгоритм, декодирующий основные элементы). Так, широко распространены кодировки нелинейных объектов словами, кодировки слов и n-к чисел натуральными числами и др. Важным частным случаем нестрогого представления является ступенчатое построение И., когда выводимые объекты предыдущих ступеней носят вспомогательный характер при формировании следующей ступени (такие построения особенно характерны для логико-математич. теорий, к-рые оказываются верхней ступенью над рядом И., задающих язык теории).

Понятие И. является формализацией интуитивного представления об индуктивно порождаемом множестве. Такие множества широко используются в математике; в частности, формализация любой развитой теории опирается на большое количество индуктивно определяемых множеств, начиная с простейших (множества переменных, термов, формул и т. п.) и кончая множеством теорем, к-рые выводятся из аксиом теории при помощи соответствующих логич. переходов. Неудивительно поэтому, что И. являются одним из основных аппаратов математич. логики. Именно *логические исчисления* были первыми примерами полностью формализованных дедуктивных систем (на базе этих И. вырабатывались основные понятия и методы общей теории И., возникли далеко идущие обобщения И.; см., напр., *Карнапа правило*). Нек-рые специальные виды И. хорошо пригодны для описания формальных *грамматик* (чем определяется роль И. в *математической лингвистике*) и для задания множеств, распознаваемых *автоматами конечными*.

Одной из основных сфер применения общей теории И. является *алгоритмов теория*. Это объясняется тем, что понятие И. имеет такой же фундаментальный характер, как и понятие алгоритма. Действительно, класс множеств, к-рые могут быть заданы при помощи И., совпадает с классом алгоритмически перечислимых множеств слов (если оставаться в рамках общепринятых уточнений понятия И. и не прибегать к обобщениям, нарушающим потенциальную возможность порождения каждого выводимого элемента). Отсюда вытекает существование такого И., для к-рого неразрешима проблема выводимости, т. е. невозможен алгоритм, к-рый для всех слов (в языке И.) кончал бы работу с правильным ответом (напр., давал бы 0 на всех выводимых словах и 1 на остальных). Из возможности задания сколь угодно сложных перечислимых множеств вытекает также существование универсальных в том или ином смысле И. (т. е. И., моделирующих все другие И. фиксированного языка, см. *Креативное множество*). Эти факты, в сочетании с изучением различных модификаций и специализаций общего понятия И., открывают возможности получения интересных алгоритмически неразрешимых проблем. Основополагающее значение для этого направления имела работа Э. Поста (см. [1]), в к-рой впервые было предложено понятие дедуктивной системы, пригодной для порождения произвольных перечислимых множеств слов (см. *Поста каноническая система*). Широкие возможности в оформлении правил вывода канонических И. позволяют хорошо обслуживать процессы индуктивного порождения множеств; подавляющее большинство построенных конкретных И. легко и естественно можно сформулировать как частные случаи канонических И.

Ассоциативные исчисления, называемые также системами Туэ, служат удобным средством задания и изучения групп и полугрупп.

Лит.: [1] Post E. L., «Amer. J. Math.», 1943, v. 65, № 2, p. 197—215; [2] Марков А. А., Теория алгорифмов, М.— Л., 1954 («Тр. матем. ин-та АН СССР», т. 42); [3] «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1964, т. 72, с. 5—56; 1967, т. 93, с. 3—42.

С. Ю. Маслов.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ решения проблемы собственных значений матрицы — методы нахождения собственных значений и собственных векторов (или корневого базиса) матрицы, минующие предварительное вычисление характеристич. многочлена. Эти методы существенно различаются для задач среднего размера, матрицы к-рых могут быть целиком размещены в оперативной памяти вычислительной машины, и для задач большого порядка, в к-рых хранение информации обычно осуществляется в компактной форме.

Первый И. м. был предложен К. Якоби [1] для вычисления собственных значений и векторов действительных симметричных матриц (см. *Вращений метод*). Метод переносится на комплексные эрмитовы матрицы, а также на более широкий класс нормальных матриц.

Имеется ряд обобщений метода Якоби для матриц произвольного вида. Типичный алгоритм этого класса состоит из последовательности элементарных шагов, выполняемых по схеме:

$$\tilde{A}_{k+1} = S_k^{-1} A_k S_k,$$
$$A_{k+1} = T_k^* \tilde{A}_{k+1}^* T_k.$$

При этом роль подобного преобразования с (элементарной) матрицей S_k состоит в уменьшении евклидовой нормы текущей матрицы A_k, т. е. в приближении ее к нек-рой нормальной матрице. В качестве T_k обычно берется матрица вращений или ее унитарный аналог. Смысл подобного преобразования с этой матрицей, как и в классич. методе Якоби, заключается в аннулировании внедиагонального элемента в нек-рой эрмитовой матрице, связанной с матрицей A_{k+1}, напр. в матрице $A_{k+1}+\tilde{A}_{k+1}^*$. С ростом k матрицы A_k сходятся к матрице диагонального или квазидиагонального вида, а накопленное произведение матриц S_k и T_k дает матрицу, столбцами к-рой являются приближенные собственные векторы либо векторы, образующие базисы инвариантных подпространств матрицы (см. [2], [3]).

Наряду с вышеописанными методами развиваются алгоритмы другого класса, так. наз. степенные методы. Самым эффективным методом этого направления, наиболее широко применяющимся для решения задач среднего размера, является QR-алгоритм (см. [4], [5]). Итерации QR-алгоритма проводятся по следующей схеме:

$$A_k = Q_k R_k, \quad A_{k+1} = R_k Q_k, \tag{1}$$

здесь Q_k — ортогональная или унитарная, а R_k — правая треугольная матрица. Для перехода от A_k к A_{k+1} сначала находится ортогонально-треугольное разложение матрицы A_k, после чего матрицы Q_k и R_k перемножаются в обратном порядке. Если положить $\tilde{Q}_k = Q_1 \ldots Q_k$, $R_k = R_k \ldots R_1$, то из (1) следует схема

$$A_{k+1} = \tilde{Q}_k^* A_1 \tilde{Q}_k, \quad A_1^k = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k. \tag{2}$$

Таким образом, QR-алгоритм генерирует последовательность матриц A_k, ортогонально подобных исходной матрице A_1; при этом трансформирующая матрица $\tilde{Q}_k$ является ортогональной компонентой в разложении (2) матрицы A_1^k.

При итерации по схеме (1) матрицы A_k сходятся к правой треугольной или квазитреугольной матрице, причем скорость сходимости поддиагональных элементов к нулю управляется отношениями модулей различных собственных значений и является, вообще говоря, довольно медленной. Для ускорения сходимости QR-алгоритма используются так наз. сдвиги, что приводит к следующему видоизменению схемы (1):

$$A_k - \varkappa_k I = Q_k R_k, \quad A_{k+1} = R_k Q_k + \varkappa_k I. \tag{3}$$

Обычно применение сдвигов (напр., $\varkappa_k = a_{nn}^{(k)}$) позволяет получить быструю сходимость внедиагональных элементов последней строки к нулю (асимптотически квадратичную в общем случае и кубическую для эрмитовых матриц) и соответственно быструю стабилизацию диагонального элемента (n, n). После того, как значение этого элемента установилось, дальнейшие итерации проводят с главной подматрицей порядка $n-1$, и т. д. Собственные векторы результирующей треугольной матрицы после умножения на накопленное произведение ортогональных матриц Q_k дают собственные векторы исходной матрицы A_1.

Итерации по схеме (1) либо (3) применяют к матрице, предварительно приведенной к так наз. форме Хессенберга. Говорят, что матрица A имеет правую форму Хессенберга, если $a_{ij}=0$ при $i>j+1$. QR-алгоритм обладает свойством сохранять форму Хессенберга исходной матрицы, что намного удешевляет стоимость каждой итерации. Есть и другие важные возможности уменьшения объема вычислений, напр., неявное использование сдвигов, что позволяет находить комплексно сопряженные собственные значения действительных матриц, не прибегая к комплексной арифметике.

В задачах высокого порядка (от нескольких сотен до нескольких тысяч) матрицы обычно бывают разреженными, т. е. имеют относительно небольшое число ненулевых элементов. При этом, как правило, нужно вычислять не все, а лишь несколько собственных значений и соответствующие собственные векторы. В типичном случае требуемые собственные значения — наибольшие или наименьшие по модулю.

Описанные выше методы, основанные на подобных преобразованиях, разрушают разреженность матрицы и потому неприемлемы. Основными для задач высокого порядка являются методы, элементарная операция которых — умножение матрицы на вектор. При их описании в дальнейшем предполагается, что собственные значения заданной матрицы A занумерованы в порядке убывания модулей так, что

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|.$$

Наиболее широкую область применимости имеет степенной метод для вычисления собственного значения λ_1 с максимальным модулем. Исходя из начального приближения x_0 строится последовательность нормированных векторов

$$x_{k+1} = \rho_k A x_k, \quad \rho = 1/\| A x_k \|. \tag{4}$$

Эта последовательность сходится к собственному вектору, отвечающему λ_1, при выполнении следующих условий: 1) все элементарные делители матрицы A, относящиеся к λ_1,— линейные; 2) нет других собственных значений с тем же модулем; 3) в разложении исходного вектора x_0 по корневому базису матрицы A имеется нетривиальная компонента по собственному подпространству для λ_1. Однако сходимость степенного метода, как правило, медленная и определяется отношением величин двух старших по модулю собственных значений.

Если известно приближение $\tilde{\lambda}_\theta$ к желаемому собственному значению λ_i, то быстрая сходимость может быть достигнута посредством метода обратных итераций. Вместо (4) строится последовательность, определяемая соотношениями

$$(A - \tilde{\lambda}_0 I)\, x_{k+1} = \rho_k x_k, \quad \| x_k \| = 1, \quad \forall k. \tag{5}$$

Метод обратных итераций есть по существу степенной метод для матрицы $(A - \tilde{\lambda}_0 I)^{-1}$, имеющей сильно доминирующее собственное значение $1/(\tilde{\lambda}_0 - \lambda_0)$. Реализация формулы (5) требует, однако, решения линейной системы с матрицей $A - \tilde{\lambda}_0 I$ и даже при использовании специальных методов для разреженных систем предъявляет повышенные требования к оперативной памяти по сравнению со степенным методом.

Для вычисления группы собственных значений применяются так наз. методы одновременных итераций. Они представляют собой обобщение степенного метода, где вместо итераций одного вектора фактически строятся итерации матрицей A целого подпространства. Типичным для этой группы методов является м е т о д С т ь ю а р т а [6]. Пусть собственные значения матрицы A удовлетворяют соотношениям

$$|\lambda_1| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|.$$

Выбирается начальная $n \times r$-матрица Q_0 с ортонормированными столбцами. Исходя из Q_0, строится последовательность матриц Q_k по схеме:

$$\tilde{Q}_{k+1} = A Q_k, \quad \tilde{Q}_{k+1} = \tilde{\tilde{Q}}_{k+1} R_{k+1}, \tag{6}$$

$$Q_{k+1} = \tilde{\tilde{Q}}_{k+1} W_{k+1}.$$

Во второй из этих формул R_{k+1} — правая треугольная $r \times r$-матрица, а матрица $\tilde{\tilde{Q}}_{k+1}$ имеет ортонормированные столбцы. Цель этого разложения, к-рое может выполняться не на каждой итерации, состоит в том, чтобы обеспечить линейную независимость столбцов последовательно получаемых матриц Q_k, к-рая в практическом смысле может быть утеряна в результате многократного итерирования матрицей A. Важную роль в ускорении сходимости метода играет третья формула (6). Ортогональная $r \times r$-матрица, участвующая в этой формуле, имеет следующий смысл. Если обозначить через B_{k+1} $r \times r$-матрицу $Q_k^* A Q_k$, то W_{k+1} приводит B_{k+1}

к ф о р м е Ш у р а, т. е. правой треугольной матрице. Матрица W_{k+1} может быть построена посредством QR-алгоритма; ее столбцы образуют б а з и с Ш у р а матрицы B_{k+1}, характеризуемый тем, что при любом k, $1 \leqslant k \leqslant r$, линейная оболочка первых k векторов есть инвариантное подпространство матрицы B_{k+1}. Матрицы Q_k метода Стьюарта сходятся к матрице Q, столбцы к-рой дают базис Шура для инвариантного подпространства матрицы A, отвечающего собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. При этом скорость сходимости i-го столбца определяется отношением $|\lambda_{r+1}|/|\lambda_i|$.

В случае действительной симметричной матрицы появляются дополнительные возможности, связанные с трактовкой собственных значений как стационарных точек ф у н к ц и о н а л а Р э л е я:

$$\varphi(A, x) = (Ax, x)/(x, x), \quad x \neq 0. \tag{7}$$

Для нахождения крайних точек спектра могут быть применены методы безусловной оптимизации функционала (7). Получающаяся здесь теория параллельна теории итерационных методов для решения положительно определенных линейных систем и приводит к тем же самым алгоритмам: координатной релаксации, последовательной сверхрелаксации, наискорейшего спуска, сопряженных градиентов (см. [7]).

Перечисленные методы находят собственные значения «по одному». Для одновременного вычисления группы собственных значений симметричной матрицы используется м е т о д Л а н ц о ш а [8], к-рый предназначался для трехдиагонализации симметричной матрицы порядка n. В основу метода положено следующее наблюдение: если последовательность векторов $p_0, Ap_0, \ldots, Ap_0^{n-1}$ линейно независима, то в базисе $q_1, q_2, \ldots, q_n$, полученном из нее процессом ортонормализации, матрица приводится к трехдиагональной форме T_n. Векторы q_k строятся по трехчленным рекуррентным формулам

$$\beta_k q_{k+1} = Aq_k - \beta_{k-1} q_{k-1} - \alpha_k q_k;$$

коэффициенты α_k и β_k, $k=1, \ldots, n$, определяют матрицу T_n. После k шагов процесса ортогонализации известны векторы $q_1, \ldots, q_k$ и главная подматрица T_k матрицы T_n. Во многих случаях уже при $k \ll n$ часть собственных значений матрицы T_k достаточно точно приближает нек-рые собственные значения T_n; соответствующие собственные векторы T_k могут быть использованы для построения приближений к собственным векторам A. Если же достигнутая точность еще не удовлетворительна, то можно выбрать новое начальное приближение $\tilde{p}_0$ в линейной оболочке векторов $q_1, \ldots, q_k$ и повторить процесс, проведя $\tilde{k}$ шагов, и т. д. В этом и состоит итерационная трактовка метода Ланцоша (см. [9]).

Нахождение внутренних точек спектра для разреженных матриц высокого порядка еще не имеет удовлетворительного численного решения.

Лит.: [1] J a c o b i C. G., «J. reine und angew. Math.», 1846, Bd 30, № 1, S. 51—94; [2] E b e r l e i n P. J., «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1962, v. 101, № 1, p. 74—88; [3] В о е в о д и н В. В., «Вычисл. методы и программирование», 1965, № 3, с. 89—105; [4] К у б л а н о в с к а я В. Н., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1961, т. 1, № 4, с. 555—70; [5] F r a n c i s J. G. F., «Comput. J.», 1961, v. 4, № 3, p. 265—71; 1962, v. 4, № 4, p. 332—45; [6] S t e w a r t G. W., «Numer. Math.», 1976, v. 25, № 2, p. 123—36; [7] R u h e A., Computation of engenvalues and eigenvectors, B., 1977; [8] L a n c z o s C., «J. Res. Nat. Bur. Standards», 1950, v. 45, № 4, p. 255—82; [9] P a i g e C. C., «J. Inst. Math. and Appl.», 1972, v. 10, p. 373—81.

Х. Д. Икрамов.

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ — рекурсивный алгоритм, реализующий в нек-ром топологич. пространстве V последовательность точечно-множественных отображений $A_k: V \to V$, при помощи к-рых по начальной точке $u^0 \in V$ вычисляют последовательность точек $u^k \in V$ согласно формулам

$$u^{k+1} = A_k u^k, \quad k = 0, 1, \ldots . \qquad (1)$$

Операцию (1) наз. итерацией, а последовательность u^k — итерационной последовательностью.

И. а. (или методы последовательных приближений) применяют как для нахождения решения операторного уравнения

$$Au = f, \qquad (2)$$

или минимума нек-рого функционала, или собственных значений и элементов уравнения $Au = \lambda u$ и т. п., так и для доказательства существования решений этих задач. И. а. (1) наз. сходящимся при начальном приближении u^0 к решению u упомянутых задач, если $u^k \to u$ при $k \to \infty$.

Операторы A_k для решения уравнения (2), заданного в линейном метрич. пространстве V, обычно строят по формулам

$$A_k u^k = u^k - H_k (Au^k - f), \qquad (3)$$

где $H_k (V \to V)$ — некоторая, определяющая тип И. а., последовательность операторов. В основе построения И. а. типа (1), (3) лежат или *сжатых отображений принцип* и его обобщения, или вариационные методы минимизации нек-рого связанного с задачей функционала. При этом используются различные методы построения операторов A_k, напр. варианты *Ньютона метода*, или *спуска метода*. Операторы H_k стараются выбрать так, чтобы быстрая сходимость u^k к u обеспечивалась при условии, что численная реализация операции $A_k u^k$ при заданном объеме памяти ЭВМ была достаточно проста, нетрудоемка по количеству операций и устойчива к ошибкам округления.

Хорошо разработаны и исследованы И. а. решения линейных задач. И. а. делятся при этом на линейные и нелинейные. К линейным относятся, напр., *Гаусса метод*, *Зейделя метод*, верхней *релаксации метод*, И. а. с чебышевскими параметрами; к нелинейным — вариационные методы: *наискорейшего спуска метод*, *сопряженных градиентов метод*, *минимизации невязок метод* и т. д. Одним из эффективных И. а. является метод с использованием чебышевских параметров, когда A — самосопряженный оператор со спектром на отрезке $[m, M]$, где $M > m > 0$. Этот метод дает оптимальную (при данной информации о границах спектра) оценку сходимости на заранее задаваемом N-м шаге. Записывается метод в виде

$$u^{k+1} = u - \alpha_{k+1} (Au^k - f), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где

$$\alpha_{k+1} = 2 \left(M + m - (M - m) \cos \frac{2j_k - 1}{2N} \right)^{-1},$$

N — ожидаемое число итераций, в нем используется $\varkappa_N = (j_1, j_2, \ldots, j_N)$ — специальная перестановка N-го порядка, хорошо перемешивающая для устойчивости счета корни многочлена Чебышева. Для $N = 2^n$ перестановку $\varkappa_N$ можно построить, напр., так: $\varkappa_2 = (1, 2)$, и если известна перестановка $\varkappa_{2^{i-1}} = (j_1, j_2, \ldots, j_{2^{i-1}})$, то $\varkappa_{2^i} = (j_1, 2^i + 1 - j_1, j_2, 2^i + 1 - j_2, \ldots)$. При $N = 16$ эта перестановка имеет вид: (1, 16, 8, 9, 4, 13, 5, 12, 2, 15, 7, 10, 3, 14, 6, 11).

Существуют И. а., использующие r предыдущих приближений $u^k, u^{k-1}, \ldots, u^{k-r+1}$; они наз. r-шаговыми и обладают повышенной скоростью сходимости.

И. а. широко применяются при решении многомерных задач математич. физики, для нек-рых классов таких задач существуют специальные быстросходящиеся И. а. Напр., *переменных направлений метод*, метод, изложенный в [7] для эллиптических краевых задач, нек-рые методы для задач переноса частиц или излучений (см. [1] — [7]).

Лит.: [1] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [2] Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969; [3] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, М., 1971; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [5] Красносельский М. А. и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [6] Лебедев В. И., в кн.: Тр. института кибернетики АН УССР, К., 1972, с. 109—135; [7] Федоренко Р. П., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 2, с. 121—82. *В. И. Лебедев.*

ИТЕРАЦИЯ — результат повторного применения какой-либо математич. операции. Так, если

$$y=f(x)\equiv f_1(x)$$

есть нек-рая функция от x, то функции

$$f_2(x)=f[f_1(x)],\ f_3(x)=f[f_2(x)],\ \ldots,\ f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$$

наз. соответственно второй, третьей, ..., n-й итерациями функции $f(x)$. Напр., полагая $f(x)=x^\alpha$, получают

$$f_2(x)=(x^\alpha)^\alpha=x^{\alpha^2},$$
$$f_3(x)=(x^{\alpha^2})^\alpha=x^{\alpha^3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(x)=(x^{\alpha^{n-1}})^\alpha=x^{\alpha^n}.$$

Индекс n наз. показателем И., а переход от функции $f(x)$ к функциям $f_2(x)$, $f_3(x)$, ...— итерированием. Для нек-рых классов функций можно определить И. с произвольным действительным и даже комплексным показателем. И. используются при решении различного рода уравнений и систем уравнений итерационными методами. Подробнее см. *Последовательных приближений метод.*

Лит.: [1] Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969. *БСЭ-3.*

ИТЕРИРОВАННОЕ ЯДРО — функция $(x, s)\mapsto K_n(x, s)$, к-рая образуется из данного ядра K интегрального оператора

$$A\varphi(x)=\int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

по рекуррентным соотношениям:

$$K_1(x, s)=K(x, s),\quad K_n(x, s)=\int_a^b K_{n-1}(x, t)\,K(t, s)\,dt;$$

K_n наз. n-й итерацией, или n-м итерированным ядром, ядра K. И. я. иногда наз. повторным ядром. Если ядро K непрерывно или интегрируемо с квадратом, то все его И. я. непрерывны, соответственно, интегрируемы с квадратом. Если K — симметричное ядро, то все его И. я. также симметричны. Ядро K_n является ядром оператора A^n. Имеет место равенство

$$K_n(x, s)=\int_a^b K_{n-m}(x, t)\,K_m(t, s)\,dt,\quad 1\leqslant m\leqslant n-1.$$

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, ч. 1, 6 изд., М., 1974; [2] Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959. *Б. В. Хведелидзе.*

ИТО ПРОЦЕСС — случайный процесс, имеющий *стохастический дифференциал.* Точнее, непрерывный случайный процесс X_t, заданный на вероятностном пространстве (Ω, F, P) с нек-рым неубывающим семейством $\{F_t\}$ σ-подалгебр событий Ω, наз. процессом Ито по отношению к $\{F_t\}$, если существуют процессы $a(t)$ и $\sigma(t)$ (называемые коэффициентом с н о с а и к о э ф ф и ц и е н т о м д и ф ф у з и и соответственно), измеримые при каждом t относительно F_t, и винеровский процесс W_t относительно $\{F_t\}$ такие, что

$$dX_t = a(t)\,dt + \sigma(t)\,dW_t.$$

И. п. назван по имени К. Ито (K. Itô). Один и тот же процесс X_t может быть И. п. по отношению к двум различным семействам $\{F_t\}$. При этом соответствующие стохастич. дифференциалы могут существенно отличаться. И. п. наз. п р о ц е с с о м д и ф ф у з и о н н о г о т и п а, если его коэффициенты сноса $a(t)$ и диффузии $\sigma(t)$ измеримы при каждом t относительно σ-алгебры

$$F_t^X = \sigma\{\omega : X_s,\ s \leqslant t\}.$$

При некоторых достаточно общих условиях оказывается возможным представление И. п. в виде процесса диффузионного типа, но, вообще говоря, с некоторым новым винеровским процессом (см. [3]). Если И. п. X_t представим в виде диффузионного И. п. с некоторым винеровским процессом $\overline{W}_t$ и выполняется равенство $F_t^{\overline{W}} = F_t^X$, то $\overline{W}_t$ наз. о б н о в л я ю щ и м п р о ц е с с о м для X_t.

П р и м е р. Пусть задан некоторый винеровский процесс W_t, $t \geqslant 0$, относительно $\{F_t\}$ и

$$dX_t = Y\,dt + dW_t,$$

где Y — нормально распределенная случайная величина, имеющая среднее m и дисперсию γ; Y измерима относительно F_0.

Процесс X_t, рассматриваемый относительно F_t^X, имеет стохастич. дифференциал

$$dX_t = \frac{m + \gamma X_t}{1 + \gamma t}\,dt + d\overline{W}_t,$$

где новый винеровский процесс $\overline{W}_t$, определяемый равенством

$$\overline{W}_t = \mathsf{E}\left(X_t - Yt \mid F_t^X\right),$$

является обновляющим процессом для X_t.

Лит.: [1] Г и р с а н о в И. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 3, с. 314—30; [2] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [3] Ш и р я е в А. Н., «Проблемы передачи информации», 1966, т. 11, в. 3, с. 3—22. *А. А. Новиков.*

ИТО ФОРМУЛА — формула, по к-рой вычисляется *стохастический дифференциал* функции от *Ито процесса*. Пусть (неслучайная) функция $f(t, x)$, определенная при действительных t и x, дважды непрерывно дифференцируема по x, один раз непрерывно дифференцируема по t и пусть у процесса X_t существует стохастич. дифференциал

$$dX_t = a(t)\,dt + \sigma(t)\,dW_t;$$

тогда стохастич. дифференциал процесса $f(t, X_t)$ имеет вид

$$df(t, X_t) = \left[f_t'(t, X_t) + a(t)\,f_x'(t, X_t) + \right.$$

$$\left. + {}^1/_2\sigma^2(t)\,f_{xx}''(t, X_t)\right]dt + \sigma(t)\,f_x'(t, X_t)\,dW_t.$$

Эта формула была получена К. Ито [1]. Аналогичная формула имеет место и для векторных X_t и $f(t, x)$. И. ф. распространяется на некоторые классы негладких функций [2] и *семимартингалов*.

Лит.: [1] I t o K., «Nagoya Math. J.», 1951, v. 3, p. 55—65; см. также «Математика», 1959, № 3, в. 5, с. 131—41; [2] К р ы л о в Н. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1969, т. 14, в. 2, с. 340—48. *А. А. Новиков.*

ЙЕТСА ПОПРАВКА — поправка, применяемая в нек-рых задачах математич. статистики (напр., в задаче о стохастич. независимости) и позволяющая иногда улучшить результаты, полученные с помощью обычных таблиц χ^2-распределения. Предложена Ф. Йетсом [1].

Лит.: [1] Yates J., «Т. Roy. Statist. Soc.», 1934, v. 1, p. 217; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.
В. В. Сенатов.

ЙОРДАНОВА АЛГЕБРА — алгебра, в к-рой справедливы тождества

$$xy=yx,$$

$$(x^2y)x=x^2(yx).$$

Такие алгебры впервые возникли в работе П. Йордана [1], посвященной аксиоматизации основ квантовой механики (см. также [2]), а затем нашли применения в алгебре, анализе и геометрии.

Пусть A — ассоциативная алгебра над полем характеристики $\neq 2$. Множество A с операциями сложения и йорданова умножения

$$a \circ b = {}^1/_2\,(ab+ba)$$

образует алгебру $A^{(+)}$, к-рая является йордановой. Й. а., изоморфная подалгебре алгебры $A^{(+)}$ для нек-рой ассоциативной алгебры A, наз. специальной. Роль специальных алгебр в теории Й. а. во многом аналогична роли ассоциативных алгебр в теории альтернативных алгебр. В основе этой аналогии лежит теорема о том, что всякая двупорожденная подалгебра Й. а. специальна. (Всякая двупорожденная подалгебра альтернативной алгебры — ассоциативна.) Однако класс специальных Й. а. не является многообразием, т. е. не задается тождествами, поскольку специальные алгебры могут иметь неспециальные гомоморфные образы. Тем не менее, найден ряд тождеств 8-й и 9-й степеней, которым удовлетворяет всякая специальная Й. а. и не удовлетворяют нек-рые неспециальные алгебры, а также доказано, что таких тождеств степени $\leqslant 7$ не существует. Необходимое и достаточное условие специальности алгебры: Й. а. специальна тогда и только тогда, когда она изоморфно вложима в Й. а., каждое счетное подмножество к-рой лежит в подалгебре, порожденной двумя элементами.

Примеры. 1) Пусть V — векторное пространство над полем F с симметрической билинейной формой $f(x, y)$, а $F\cdot e_0+V$ — пространство на единицу большей размерности, на к-ром формулой

$$(\alpha e_0+u)\,(\beta e_0+v)=[\alpha\beta+f\,(u,\ v)]\,e_0+\alpha v+\beta u$$

(α, $\beta \in F$, u, $v\in V$) определяется умножение. Возникающая таким образом алгебра наз. алгеброй симметрической билинейной формы f. Она изоморфно вкладывается в алгебру $C(V,\ f)^{(+)}$, где $C(V,\ f)$ — алгебра Клиффорда формы f, и потому является специальной Й. а.

2) Пусть A — ассоциативная алгебра и j — ее инволюция (антиизоморфизм порядка два). Множество

$$H\,(A,\ j)=\{a\in A \mid a^j=a\}$$

является подалгеброй в $A^{(+)}$ и образует специальную Й. а.

3) Пусть C — альтернативная неассоциативная алгебра над полем F с инволюцией $c \to \bar{c}$, неподвижные элементы к-рой лежат в ассоциативном центре алгебры C. В алгебре матриц C_3 третьего порядка над C подмножество

$$H(C_3, \Gamma) = \{X \in C_3 \mid X = \Gamma^{-1}\bar{X}'\Gamma\},$$

где

$$\Gamma = \mathrm{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}, \quad \gamma_i \neq 0, \quad \gamma_i \in F,$$

относительно операций сложения и йорданова умножения образует неспециальную Й. а. Такая алгебра не является гомоморфным образом никакой специальной алгебры.

Конечномерные простые Й. а. над алгебраически замкнутым полем F характеристики $\neq 2$ полностью классифицированы (см. [3]). Центральные простые конечномерные Й. а. разбиваются на пять серий. Серии (A) — (D) бесконечны и состоят из специальных алгебр, серия (E) состоит из одной неспециальной алгебры:

(A) $F_n^{(+)}$;

(B) $H(F_n, J_1)$, где $J_1 : X \to X'$;

(C) $H(F_{2n}, J_S)$, где $J_S : X \to \bar{S}'X'S$, $S = \mathrm{diag}\{Q, Q, \ldots, Q\}$, $Q = \binom{01}{10}$;

(D) $F \cdot e_0 + V$ — алгебра симметрической невырожденной билинейной формы;

(E) $H(C_3, J_1)$, где C — алгебра Кэли — Диксона со стандартной инволюцией. Эта алгебра 27-мерна над F.

Во всякой конечномерной Й. а. J радикал (наибольший нильидеал) N нильпотентен и факторалгебра $\bar{J} = J/N$ есть конечная прямая сумма простых Й. а. Если факторалгебра $\bar{J}$ сепарабельна, то алгебра J обладает разложением $J = N + W$ в сумму радикала и полупростой подалгебры W, изоморфной $\bar{J}$. В случае поля характеристики 0 все полупростые слагаемые W сопряжены относительно автоморфизмов специального вида (см. [3]). С некоторыми ограничениями на алгебру это верно и в случае поля характеристики $p > 0$.

Обобщением теории конечномерных Й. а. является теория Й. а. с условием минимальности для квадратичных (внутренних) идеалов (см. [3], [4], [5]). Квадратичный идеал Q алгебры J — это такое подпространство, что $\{qxq\} \in Q$ для всех $q \in Q$ и $x \in J$, где $\{abc\} = (ab)c + (bc)a - (ca)b$ — тройное йорданово произведение. Если J — Й. а. с условием минимальности для квадратичных идеалов и R — ее квазирегулярный радикал, то факторалгебра J/R есть конечная прямая сумма простых алгебр, к-рые описаны за исключением Й. а. с делением. В случае, когда алгебра J специальна, доказано, что радикал R нильпотентен и конечномерен.

Алгебраическая специальная Й. а., удовлетворяющая нетривиальному (для специальных алгебр) тождеству, локально конечномерна; специальная йорданова нильалгебра с нетривиальным тождеством локально нильпотентна [6]. В частности, специальная алгебраическая (ниль) Й. а. ограниченного индекса является локально конечномерной (нильпотентной). Конечно порожденная разрешимая Й. а. нильпотентна, в общем случае это не верно даже для специальных алгебр.

Йорданово Ф-операторное кольцо, являющееся конечно порожденным Ф-модулем с нильпотентными порождающими элементами, нильпотентно [7].

Каждой Й. а. можно различными способами сопоставлять алгебры Ли (см. [3], [8]). Ряд теорем о Й. а. получен с помощью известных теорем об алгебрах Ли. Так, напр., доказано, что полупростая конечномерная Й. а. над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 имеет базис с целочисленными структурными константами. Для теории алгебр Ли эти конструкции также полезны, так как с их помощью реализуются нек-рые важные классы алгебр Ли. Напр., алгебра Ли дифференцирований простой Й. а. типа (Е) есть исключительная простая алгебра Ли F_4, а алгебра линейных преобразований этой же алгебры, оставляющих инвариантной нек-рую кубич. форму, есть исключительная простая алгебра Ли E_6. При помощи другой конструкции, сопоставляющей альтернативной алгебре степени 2 и

Й. а. степени 3 некоторую алгебру Ли, можно реализовать все пять простых исключительных алгебр Ли типов G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.

Интересно, наконец, отметить, что нек-рые алгебры, возникающие в генетике, являются йордановыми [10].

Лит.: [1] Jordan P., «Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 2A», 1933, S. 209—17; [2] Эмх Ж., Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [3] Jacobson N., Structure and representations of Jordan algebras, Providence, 1968; [4] Mc Crimmon K., «Prof. Nat. Acad. Sci USA», 1969, v. 62, № 3, p. 671—78; [5] Слинько А. М., «Алгебра и логика», 1972, т. 11, № 6, с. 711—24; [6] Ширшов А. И., «Матем. сб.», 1957, т. 41, № 3, с. 381—94; [7] Шестаков И. П., «Алгебра и логика», 1971, т. 10, № 4, с. 407—48; [8] Schafer R. D., An introduction to nonassociative algebras, N. Y., 1966; [9] Gordon S. R., «J. of Algebra», 1973, v. 24, p. 258—82; [10] Schafer R. D., «Amer. J. Math.», 1949, v. 71, p. 121—35; [11] Koecher M., An elementary approach to bounded symmetric domains, Houston, 1969; [12] Слинько А. М. и др., Йордановы алгебры, в. 1, Новосиб., 1976.

А. М. Слинько.

КАВАГУТИ ПРОСТРАНСТВО — гладкое n-мерное многообразие V_n, в к-ром элемент дуги ds регулярной кривой $x=x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, выражается формулой:

$$ds = F\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^p x}{dt^p}\right) dt, \tag{1}$$

причем метрическая функция F подчиняется условиям Цермело:

$$\sum_{s=1}^{p} s x^{(s)\,i} F_{(s)\,i} = F, \quad \sum_{s=r}^{p} \binom{s}{p} x^{(s-r+1)\,i} F_{(s)\,i} = 0, \tag{2}$$

$$r = 2, 3, \ldots, p,$$

где

$$x^{(s)\,i} = \frac{d^s x^i}{dt^s}, \quad F_{(s)\,i} = \frac{\partial F}{\partial x^{(s)\,i}}.$$

Условия (2) обеспечивают независимость элемента дуги ds от параметризации кривой $x=x(t)$.

Общая теория К. п. впервые изложена А. Кавагути (см. [1]). Основанием для рассмотрения К. п. послужило то, что элементы дуги вида (1) встречались в различных однородных пространствах (напр., афинная дуга, проективная дуга). Впоследствии было установлено (см. [2]), что в любом *однородном пространстве* существует инвариантная метрика Кавагути (1), группа автоморфизмов к-рой совпадает с группой преобразований однородного пространства. Основы общей теории К. п. развивались на формальном пути обобщения тензорного аппарата и параллельного перенесения. А. Кавагути в качестве основного пространства рассматривал расслоенное пространство, базой к-рого является пространство линейных элементов $(x^i, x^{(s)i})$, $s=1, 2, \ldots, q$, порядка $q=2p-1$, а слоями — n-мерные векторные пространства T^n, касательные к V_n. Ковариантное дифференцирование контравариантных векторов $V^i(x^k, x^{(s)k})$ определяется с помощью операторов ковариантного дифференцирования

$$\nabla V^i = dV^i + \sum_{s=0}^{q} \overset{(s)}{\Gamma}{}^i_{kj} V^k \, dx^{(s)j},$$

$$\nabla x^{(s)\,i} = M^{si}_j \Big(dx^{(s)\,j} + \sum_{\sigma=0}^{s-1} \Lambda^{sj}_{\sigma k} \, dx^{(\sigma)\,k},$$

$$s = 1, 2, \ldots, q,$$

где $\overset{(s)}{\Gamma}{}^i_{kj}$, μ^{si}_j, $\Lambda^{sj}_{\sigma k}$ зависят от линейного элемента порядка $q=2p-1$. Эти операторы могут быть построены с помощью трехкратного продолжения метрич. функции и определяемого ею метрич. тензора q_{ij}, зависящего также от линейного элемента порядка $2p-1$. Так, построенная общая теория К. п. не получила глубокого развития отчасти ввиду того, что порядок q базисного пространства линейных элементов оказался выше, чем порядок p пространства, на к-ром задана метрич. функция F и на к-ром должны определяться все дифференциальные инварианты К. п.

Другие возможности исследования К. п. основаны на современной теории расслоенных пространств, теории струй и теории нелинейных связностей. На этом пути с применением дифференциально-алгебраич. метода продолжений и охватов для широкого класса К. п. найдена нек-рая редуктивная линейная связность в подходящим образом подобранном расслоенном пространстве, базой к-рого служит пространство линейных элементов порядка p. Структурные уравнения форм этой связности дают полную систему тензорных инвариантов К. п., на основе к-рой формулируются инвариантные признаки нек-рых важных классов К. п.

В дифференциальной геометрии обобщенных пространств большое место занимает исследование специальных К. п. с метрикой вида

$$ds = (A_i x''^i + B)^{1/k}\, dt,$$

где A_i и B — функции x^i и x'^i, что сближает такие пространства с *финслеровыми пространствами*. В этом случае общая теория А. Кавагути оказывается неприменимой, так как метрич. тензор g_{ij} становится вырожденным. Поэтому вводится несимметрич. тензор

$$G_{ik} = 2A_{i(k)} - A_{k(i)}, \quad A_{i(k)} = \frac{\partial A_i}{\partial x'^k},$$

к-рый в общем случае не вырожден. В отличие от таких пространств, К. п. общего типа представляют собой дифференциально-геометрич. структуру высшего порядка.

Изучение К. п. служит также для поиска геометрич. подходов к исследованию вариационной задачи для интегралов вида

$$S = \int_{t_1}^{t_2} F\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^p x}{dt^p}\right) dt.$$

Лит.: [1] Kawaguchi A., «Proc. Imp. Acad. Tokyo», 1937, v. 13, p. 237—40; [2] Лосик М. В., в кн.: Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 1963, в. 12, с. 213—37; [3] Близникас В. И., в кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969, с. 73—125.

Л. Е. Евтушик.

КАВАЛЬЕРИ ПРИНЦИП: объемы (или площади) двух тел (фигур) равны, если равны между собой площади (длины) соответствующих сечений, проведенных параллельно нек-рой данной плоскости (прямой). Это положение, известное еще древнегреческим математикам, наз. обычно К. п., хотя Б. Кавальери (B. Cavalieri, 1635) не принимал его за принцип, а доказывал.

КАЗИМИРА ЭЛЕМЕНТ, оператор Казимира,— центральный элемент специального вида в универсальной обертывающей алгебре полупростой алгебры Ли. Такие операторы в одном частном случае были впервые введены X. Казимиром [1].

Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая конечномерная алгебра Ли над полем характеристики 0, B — билинейная симметричная инвариантная (т. е. $B([x, y], z) = B(x, [y, z])$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{G}$) форма на $\mathfrak{G}$, невырожденная на идеале $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}$. К. э. алгебры $\mathfrak{G}$ (относительно формы B) наз. элемент универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{G})$, представимый в виде

$$b = \sum_{i=1}^{k} e_i f_i,$$

где $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ — дуальные базисы $\mathfrak{G}_0$ относительно формы B, т. е. $B(e_i, f_i) = \delta_{ij}$, $i = 1, \ldots, l$, δ_{ij} — символ Кронекера, $k = \dim \mathfrak{G}_0$. Элемент b не зависит от выбора дуальных базисов в $\mathfrak{G}_0$ и содержится в центре $U(\mathfrak{G})$. Если алгебра $\mathfrak{G}$ проста, то К. э. алгебры $\mathfrak{G}$, определяемый *Киллинга формой* в B, является единственным, с точностью до числового множителя, центральным элементом в $U(\mathfrak{G})$, представимым в виде однородного квадратичного полинома от элементов алгебры $\mathfrak{G}$.

Каждое линейное представление φ полупростой алгебры $\mathfrak{G}$ в конечномерном пространстве V определяет билинейную симметрическую инвариантную форму

$$B_\varphi(x, y) = \mathrm{Tr}(\varphi(x)\varphi(y))$$

на $\mathfrak{G}$, невырожденную на идеале $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}$, дополнительном к $\ker\varphi$, и тем самым нек-рый К. э. $b_\varphi \in U(\mathfrak{G})$. Если φ неприводимо, то продолжение представления φ на $U(\mathfrak{G})$ переводит b_φ в $\frac{k}{\dim V} E$.

Лит.: [1] Casimir H., van der Warden B. L., «Math. Ann.», 1935, Bd 111, S. 1—12; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [5] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [6] Dixmier J., Algèbres enveloppantes, P., 1974.

Д. П. Желобенко.

КАКТОИД — локально связный континуум C, к-рый является замыканием суммы не более чем счетного числа сфер S_i и простых дуг D_i, расположенных в евклидовом пространстве E^3, причем для каждого простого замкнутого контура $L \subset C$ существует одна и только одна сфера S_i, его содержащая. К. и только они являются монотонными образами двумерной сферы S^2; более того, всякий К.— монотонно открытый образ S^2. *Б. А. Ефимов.*

КАКУТАНИ ТЕОРЕМА: пусть X — непустое выпуклое компактное множество в $\mathbb{R}^n$, X^* — множество его подмножеств и $f: X \to X^*$ — такое полунепрерывное сверху отображение, что для каждой точки $x \in X$ множество $f(x)$ непусто, замкнуто и выпукло; тогда отображение f имеет неподвижную точку. С. Какутани [1] показал, что из этой теоремы вытекает *минимакса принцип* для конечных игр.

Лит.: [1] Kakutani S., «Duke Math. J.», 1941, v. 8, № 3, p. 457—59; [2] Ky Fan, «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1952, v. 38, p. 121—26; [3] Никайдо Х., Выпуклые структуры и математическая экономика, пер. с англ., М., 1972.

А. Я. Кирута.

КАЛИБР топологического пространства X — *кардинальное число* τ такое, что всякое семейство $\mathfrak{B}$ мощности τ, состоящее из непустых открытых подмножеств топологич. пространства X, содержит подсемейство $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ также мощности τ с непустым пересечением, т. е. $\bigcap\{U : U \in \mathfrak{B}'\} \neq \varnothing$. Регулярное несчетное кардинальное число τ является К. топологического произведения ΠX_α, $\alpha \in A$, тогда и только тогда, когда τ — К. каждого сомножителя X_α. Свойство быть К. сохраняется при непрерывных отображениях; всякое несчетное регулярное кардинальное число является К. любого диадического бикомпакта. Если первое несчетное кардинальное число — К. пространства X, то X удовлетворяет *Суслина условию.* В некоторых моделях аксиоматич. теории множеств верно почти обратное утверждение, а именно, аксиома Мартина и условие $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ влекут следующее: если пространство X удовлетворяет условию Суслина, то всякое несчетное семейство непустых открытых в X множеств содержит несчетное центрированное подсемейство. В частности, в этой модели кардинальное число $\aleph_1$ является К. для всякого бикомпакта с условием Суслина. В некоторых иных моделях теории множеств существует бикомпакт с условием Суслина, для к-рого $\aleph_1$ не является К.

Лит.: [1] Шанин Н. А., О произведении топологических пространств, М.— Л., 1948 (Тр. матем. ин-та АН СССР, т. 24).

Б. А. Ефимов.

КАЛЬДЕРОНА — ЗИГМУНДА ОПЕРАТОР — оператор K, определяемый на достаточно гладких финитных функциях $\varphi(x)$, заданных в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, формулой

$$K\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y| > \varepsilon} k(x-y)\varphi(y)\,dy,$$

где ядро $k(x)$ — однородная функция степени n с нулевым средним значением по единичной сфере $S=\{x;\ x\in\mathbb{R}^n,\ |x|=1\}$. Ядро $k(x)$ имеет вид

$$k(x)=\Omega(x)/|x|^n,$$

где функция $\Omega(x)$ — характеристика $k(x)$ — удовлетворяет условиям

$$\Omega(tx)=\Omega(x) \text{ при } t>0,\ \Omega(x)\in L_1(S),$$
$$\int_S \Omega(x)\,dS=0. \qquad (*)$$

Преобразование К.— З. о. записывают часто в виде

$$K\varphi(x)=\text{v.p.}\int_{R^n}\varphi(y)\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}\,dy;$$

при этом интеграл понимается в смысле главного значения. В одномерном случае К.— З. о. превращается в оператор Гильберта H:

$$H\varphi(x)=\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{x-t}\,dt.$$

К.— З. о. по непрерывности расширяется на пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$ функций $f(x)$, суммируемых в степени p, $1<p<\infty$, по $\mathbb{R}^n$ и непрерывно отображает это пространство в себя. Если функция $\Omega(x)$ удовлетворяет условиям (*) и, кроме того, условию Дини:

$$\int_0^1\frac{\omega(t)\,dt}{t}<\infty,\quad \omega(t)=\sup_{\substack{|x-x'|\leqslant t,\\ |x|=|x'|=1}}|\Omega(x)-\Omega(x')|;$$

$$K_\varepsilon f(x)=\int_{|y|>\varepsilon}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)\,dy$$

для $1<p<\infty$ и $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$, то:

а) существует постоянная A_p (не зависящая от f и ε) такая, что

$$\|K_\varepsilon f\|_{L_p}\leqslant A_p\|f\|_{L_p};$$

б) предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}K_\varepsilon f=Kf$ существует в смысле сходимости в L_p и

$$\|Kf\|_{L_p}\leqslant A_p\|f\|_{L_p}.$$

К.— З. о. рассмотрен А. Кальдероном и А. Зигмундом [1].

Лит.: [1] Calderon A. P., Zygmund A., «Acta Math.», 1952, v. 88, № 1—2, p. 85—139; [2] Михлин С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962; [3] Стейн И., Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, пер. с англ., М., 1973.

П. И. Лизоркин.

КАМЕРА в конечномерном действительном аффинном пространстве E относительно локально конечного множества $\mathfrak{H}$ гиперплоскостей в E — связная компонента множества $E\setminus\bigcup_{H\in\mathfrak{H}}H$. К. является открытым выпуклым множеством в E.

Пусть $\mathfrak{H}$ — такое множество гиперплоскостей в E, что группа W движений пространства E, порожденная ортогональными отражениями относительно гиперплоскостей из $\mathfrak{H}$, есть *дискретная группа* преобразований пространства E, причем система $\mathfrak{H}$ инвариантна относительно W. В этом случае говорят о К. относительно W. Группа W действует на множестве всех К. просто транзитивно и порождена множеством S ортогональных отражений относительно гиперплоскостей системы $\mathfrak{H}$, содержащих ($\dim E-1$)-мерные грани, любой фиксированной К. C, причем пара (W, S) является системой Коксmера, а замыкание К. C — фундаментальной областью группы W. Строение C (описание двугранных углов между стенками) полностью определяет структуру группы W как абстрактной группы. Изучение этого строения является важным моментом в получении полной классификации дискретных групп, порожденных отражениями в E (см. *Кокстера группа*). Вместе с этой классификацией получается и полное описание строения К. для таких групп W.

В том случае, когда W является группой Вейля системы корней полупростой алгебры Ли, К. относительно W наз. камерой Вейля группы W.

Понятие К. может быть введено и для гиперплоскостей и дискретных групп, порожденных отражениями в пространстве Лобачевского или на сфере [2].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1972, гл. 4; [2] Винберг Э. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 5, с. 1072—112. *В. Л. Попов.*

КАНАЛ БЕЗ ПАМЯТИ — *канал связи*, для к-рого статистич. свойства сигнала на выходе в момент времени t определяются только сигналом на входе, переданном в этот момент времени t (и, следовательно, не зависят от сигналов, переданных до и после этого момента времени t). Точнее, канал связи с дискретным временем, сигналами на входе и выходе к-рого служат случайные последовательности $\eta=(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ и $\tilde{\eta}=(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \ldots)$ с пространствами значений (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно, наз. К. б. п., если для любого натурального n и любых множеств $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n, \tilde{A}_k \in S_{\tilde{Y}}$, $k=1, \ldots, n$, справедливо равенство

$$\mathsf{P}\{\tilde{\eta}_1 \in \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n \in \tilde{A}_n \mid \eta^n\} = \mathsf{P}\{\tilde{\eta}_1 \in \tilde{A}_1 \mid \eta_1\} \ldots \mathsf{P}\{\tilde{\eta}_n \in \tilde{A}_n \mid \eta_n\},$$

где $\eta^n=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Если к тому же условные вероятности $\mathsf{P}\{\tilde{\eta}_k \in \tilde{A}_k \mid \eta_k\}$ не зависят от k, то К. б. п. наз. однородным.

Если обозначить через C_n *канала пропускную способность* отрезка длины n однородного К. б. п., то $C_n = nC_1$. В случае, когда Y и $\tilde{Y}$ — конечные (или счетные) множества, однородный К. б. п. полностью задается матрицей переходных вероятностей $\{q(y, \tilde{y}), \ y \in Y, \tilde{y} \in \tilde{Y}\}$, где

$$q(y, \tilde{y}) = \mathsf{P}\{\tilde{\eta}_k = \tilde{y} \mid \eta_k = y\}, \quad k=1, 2, \ldots$$

Лит. см. [1], [3], [4], [5] при ст. *Канал связи*.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ ГАУССОВСКИЙ — *канал связи*, переходная функция к-рого задает условное гауссовское распределение. Точнее, канал связи (Q, V) наз. К. г. на конечном отрезке $[0, T]$, если выполнены условия: 1) пространствами значений сигналов на входе и выходе $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$ и $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ являются пространства функций $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$, $t \in [0, T]$, с действительными значениями и обычным образом вводимой σ-алгеброй измеримых множеств (т. е. сигналами на входе и выходе К. г. служат случайные процессы $\eta=\{\eta(t), \in [0, T]\}$ и $\tilde{\eta}=\{\tilde{\eta}(t), t \in [0, T]\}$ соответственно), 2) переходная функция $Q(y, \cdot)$ канала задает при любом фиксированном $y \in Y$ условное гауссовское распределение (говорят, что нек-рая совокупность случайных величин имеет условное гауссовское распределение, если любая конечная подсовокупность имеет условное конечномерное *нормальное распределение* со вторыми моментами, не зависящими от этого условия) и 3) ограничение V наложено лишь на вторые моменты случайной величины η.

Примером К. г., определенного на интервале $(-\infty, \infty)$, является канал, сигналом на входе к-рого служит стационарная случайная последовательность $\eta=(\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots)$, а сигналом на выходе — стационарная случайная последовательность $\tilde{\eta}=(\ldots, \tilde{\eta}_{-1}, \tilde{\eta}_0, \tilde{\eta}_1, \ldots)$, получаемая по формулам

$$\tilde{\eta}_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \eta_{i-k} + \zeta_i, \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $\zeta=(\ldots, \zeta_{-1}, \zeta_0, \zeta_1, \ldots)$ — не зависящая от η стационарная гауссовская случайная последовательность с $\mathsf{E}\zeta_i=0$, $i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и спектральной плотностью $f_\zeta(\lambda)$, $-{}^1/_2\leqslant\lambda\leqslant{}^1/_2$. Ограничение на входной сигнал имеет вид

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\Phi(\lambda)|^2 f_\eta(\lambda) d\lambda \leqslant S,$$

где $f_\eta(\lambda)$ — спектральная плотность η, $\Phi(\lambda)$ — некоторая функция и S — константа. Пропускная способность такого канала задается формулой

$$C=\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \log\max\left[\left|\frac{a(\lambda)}{\Phi(\lambda)}\right|^2\cdot\frac{\mu}{f_\zeta(\lambda)}, 1\right] d\lambda,$$

где $a(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-2\pi ik\lambda}$, а μ определяется из уравнения

$$\int_{-1/2}^{1/2} \max\left[\mu-\left|\frac{\Phi(\lambda)}{a(\lambda)}\right|^2 f_\zeta(\lambda), 0\right] d\lambda = S.$$

Лит.: [1] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969.

См. также [1], [4], [6] при ст. *Канал связи.*

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ МНОГОСТОРОННИЙ — *канал связи*, для к-рого возможна передача информации одновременно в нескольких направлениях. Ниже описан К. м. без памяти с дискретным временем и конечными алфавитами на входах и выходах. Пусть заданы s конечных множеств $Y_1, \ldots, Y_s$, где (алфавит) Y_i — совокупность возможных сигналов, передаваемых i-м передатчиком, r конечных множеств $\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_r$, где (алфавит) $\tilde{Y}_j$ — совокупность возможных сигналов, принимаемых j-м приемником, и стохастическая матрица

$$q(y_1, \ldots, y_s; \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_r),$$
$$y_i \in Y_i, \quad \tilde{y}_j \in \tilde{Y}_j, \quad i=1, \ldots, s; \quad j=1, \ldots, r.$$

Говорят, что два набора случайных векторов $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ и $(\tilde{\eta}^{(1)}, \ldots, \tilde{\eta}^{(n)})$, где $\eta^{(k)}=(\eta_1^{(k)}, \ldots, \eta_s^{(k)})$, $\tilde{\eta}^{(k)}=(\eta_1^{(k)}, \ldots, \eta_r^{(k)})$, определенных на нек-ром *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, связаны отрезком длины n однородного К. м. с s входами и r выходами, если $\eta_i^{(k)}$ и $\eta_j^{(k)}$, $i=1, \ldots, s$; $j=1, \ldots, r$; $k=1, \ldots, n$, принимают значения в множествах Y_i и $\tilde{Y}_j$, соответственно, и справедлива формула

$$\mathsf{P}\{(\tilde{\eta}^{(1)}, \ldots, \tilde{\eta}^{(n)})=(\tilde{y}^{(1)}, \ldots, \tilde{y}^{(n)}) \mid (\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})= =(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})\}=$$
$$=\prod_{k=1}^{n} q(y_1^{(k)}, \ldots, y_s^{(k)}; \tilde{y}_1^{(k)}, \ldots, \tilde{y}_r^{(k)})$$

при любых $y^{(k)}=(y_1^{(k)}, \ldots, y_s^{(k)})$ и $\tilde{y}^{(k)}=(\tilde{y}_1^{(k)}, \ldots, \tilde{y}_r^{(k)})$, $k=1, \ldots, n$, $y_i^{(k)}\in Y_i$, $\tilde{y}_j^{(k)}\in\tilde{Y}_j$, $i=1, \ldots, s$; $j=1, \ldots, r$.

Наглядно можно представить, что каждый вход и каждый выход К. м. расположены в разных т е р м и н а л а х (концах) К. м. (т. е. всего имеется $s+r$ терминалов). Это означает, что передатчик или приемник, расположенный в нек-ром терминале, не может использовать информацию, известную передатчикам или приемникам других терминалов. К. м., обладающие указанным свойством, часто наз. ч и с т ы м и в отличие от с м е ш а н н ы х К. м., для к-рых существуют терминалы, содержащие одновременно нек-рые входы и выходы канала. Сложность исследования смешанных К. м. связана с тем обстоятельством, что передатчики нек-рого терминала при выборе очередного сигнала для передачи могут использовать информацию, полученную к данному моменту времени всеми приемниками данного терминала; в свою очередь и приемники этого терминала могут использовать всю информацию, имеющуюся на данный момент в терминале.

Наиболее общая задача передачи информации по наглядно описанному выше чистому К. м. без памяти состоит в следующем. Пусть имеется $s(2^r-1)$ дискретных стационарных *источников сообщений* $U(i, \Delta)$, $i=1, \ldots, s$; $\Delta \in D$, где D — множество всех непустых подмножеств совокупности индексов $\{1, \ldots, r\}$, вырабатывающих сообщения $\xi(i, \Delta)=\{\xi_k(i, \Delta), k=\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$, причем отдельные компоненты сообщения $\xi_k(i, \Delta)$ принимают значения из нек-рого множества $X(i, \Delta)$ объема $M(i, \Delta)$; $\xi(i, \Delta)$ можно трактовать как сообщение, предназначенное для передачи с i-го входа К. м. во все выходы с номерами $j \in \Delta$. Сообщением на j-м, $j=1, \ldots, r$, выходе служит набор случайных процессов $\{\tilde{\xi}(i, \Delta; j)$, $i=1, \ldots, s$, и Δ таковы, что $j \in \Delta\}$, где

$$\tilde{\xi}(i, \Delta; j)=\{\tilde{\xi}_k(i, \Delta; j), k=\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$$

и компоненты $\tilde{\xi}_k(i, \Delta; j)$ принимают значения в множестве $X(i, \Delta)$. Пусть отрезки сообщений

$$\{\xi^L(i, \Delta)=(\xi_1(i, \Delta), \ldots, \xi_L(i, \Delta)), \ i=1, \ldots, s; \ \Delta \in D\}$$

длины L передаются по отрезку К. м. без памяти длины N с использованием следующих блочных методов кодирования и декодирования. Кодирование задается набором из s кодирующих отображений f_i таких, что

$$f_i: \prod_{\Delta \in D} X(i, \Delta) \longrightarrow Y_i^N, \quad i=1, \ldots, s,$$

(Y_i^N — прямое произведение N экземпляров множеств Y_i), а декодирование — набором декодирующих отображений

$$g_{j;\, i,\, \Delta}: \tilde{Y}_j^N \longrightarrow X(i, \Delta), \ j=1, \ldots, r; \ i=1, \ldots, s,$$

и Δ таковы, что $j \in \Delta$.

Набор кодирующих функций $\{f_i\}$ устанавливает функциональную зависимость между отрезками сообщений длины L всевозможных источников и отрезками длины N сигналов на входах К. м. Набор декодирующих функций $\{g_{j;\, i,\, \Delta}\}$ устанавливает функциональную зависимость между отрезками длины N сигналов на выходах канала и отрезками длины L сообщений, воспроизводимых на каждом выходе. Если известно совместное распределение отрезков сообщений $\xi^L(i, \Delta)$ длины L, кодирующие и декодирующие функции $\{f_i\}$ и $\{g_{j;\, i,\, \Delta}\}$ и переходные вероятности К. м. без памяти, то может быть вычислена вероятность ошибки p_e, определяемая формулой $p_e=\mathsf{P}\{\xi^L(i, \Delta) \neq \tilde{\xi}^L(i, \Delta; j)$ хотя бы при одном $i=1, \ldots, s$; $j=1, \ldots, r$ и Δ таком, что $j \in \Delta\}$.

Множество $\mathfrak{R}$ наборов (векторов) скоростей $R=\{R(i, \Delta), i=1, \ldots, s; \ \Delta \in D\}$ в $s(2^r-1)$-мерном евклидовом пространстве наз. **областью пропускной способности** рассматриваемого К. м., если для любого $\varepsilon>0$ существуют N, кодирование $\{f_i\}$ и декодирование $\{g_{j;\, i,\Delta}\}$ такие, что

$$\frac{L \log M(i, \Delta)}{N} \geqslant R(i, \Delta)-\varepsilon, \quad p_e \leqslant \varepsilon.$$

Задача об описании области $\mathfrak{R}$ является одной из основных задач теории К. м. В общем случае эта задача не решена. Ее окончательное решение получено лишь в нек-рых частных случаях, напр. для каналов с многократным доступом (то есть К. м. с $r=1$) и для некоторого класса широковещательных каналов (то есть К. м. с $s=1$).

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 622—63; [2] Van der Meulen E. C., в кн.: Proceedings of the 1975 IEEE—USSR Joint Workshop on Information Theory. Moscow. December 1975, N.Y., 1976, p. 227—47; [3] Cover T. M., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1972, v. 18, № 1, p. 2—14; [4] Slepian D., Wolf J. K., «Bell System Techn. J.», 1973, v. 52, № 7, p. 1037—76.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ С КОНЕЧНОЙ ПАМЯТЬЮ — *канал связи*, для к-рого статистические свойства сигнала на выходе в момент времени t определяются сигналами на входе, переданными в момент времени t', $t-m \leqslant t' \leqslant t$ (и, следовательно, не зависят от сигналов, переданных до момента времени $t-m$); число m наз. величиной (длиной) памяти К. с к. п.

Точнее, канал связи с дискретным временем, сигналами на входе и выходе к-рого служат случайные последовательности $\eta=(\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots)$ и $\tilde{\eta}=(\tilde{\eta}_{-1}, \tilde{\eta}_0, \tilde{\eta}, \ldots)$ с пространствами значений (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно, наз. К. с к. п., если согласованный набор условных распределений

$$\mathsf{P}\{\tilde{\eta}_k^n \in \tilde{A} \mid \eta_{-\infty}^n\},$$

с помощью к-рого может быть определен такой канал, при любых k, n и $\tilde{A}$ удовлетворяет условию

$$\mathsf{P}\{\tilde{\eta}_k^n \in \tilde{A} \mid \eta_{-\infty}^n\} = \mathsf{P}\{\tilde{\eta}_k^n \in \tilde{A} \mid \eta_{k-m}^n\}.$$

Здесь $\tilde{\eta}_k^n = (\tilde{\eta}_k, \tilde{\eta}_{k+1}, \ldots, \tilde{\eta}_n)$, $\eta_{-\infty}^n = (\ldots, \eta_{n-1}, \eta_n)$, $\tilde{A}$ — некоторое множество из прямого произведения $n-k+1$ экземпляров пространств $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$. Аналогично определяется К. с к. п. с непрерывным временем.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 1, с. 17—75; [2] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ — *канал связи*, для к-рого статистич. свойства сигнала на выходе в момент времени t определяются сигналом на входе в этот момент времени и состоянием канала в предыдущий момент времени, причем множество возможных состояний канала конечно. Можно также определить К. с к. ч. с. как канал, заданный конечным *автоматом вероятностным*. Ниже приведено строгое определение однородного К. с к. ч. с. с дискретным временем и конечными пространствами Y и $\tilde{Y}$ значений компонент сигналов на входе и выходе. Пусть заданы функция $q(y, s'; \tilde{y}, s'')$, $y \in Y$, $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, $s', s'' \in S$, где S — конечное множество, называемое множеством состояний канала, и распределение вероятностей $\{p_{s_0}, s_0 \in S\}$. Наглядно функция $q(y, s'; \tilde{y}, s'')$ определяет условную вероятность того, что в момент времени $k\tau$ на выходе К. с к. ч. с. появится сигнал $\tilde{y}$ и канал перейдет в состояние s'' при условии, что передавался сигнал y и в предыдущий момент времени $(k-1)\tau$ канал находился в состоянии s'. Распределение $\{p_{s_0}, s_0 \in S\}$ трактуют как распределение вероятностей начального состояния канала (т. е. состояние канала в начальный момент времени). Рекуррентным образом с помощью равенств определяют функцию

$$Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n, s_n) = \\ = \sum_{s_{n-1} \in S} q(y_n, s_{n-1}; \tilde{y}_n, s_n) Q_{n-1}(y^{n-1}, s_0; \tilde{y}^{n-1}, s_{n-1}),$$

$$Q_1(y, s_0; \tilde{y}, s_1) = q(y, s_0; \tilde{y}, s_1),$$

где $y^n = (y_1, \ldots, y_n)$, $y_i \in Y$, $\tilde{y}_i \in \tilde{Y}$, $i = 1, \ldots, n$, $s_k \in S$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Пусть

$$Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n) = \sum_{s_n \in S} Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n, s_n).$$

Тогда переходная функция

$$Q_n(y^n, \tilde{y}^n) = \mathsf{P}\{\tilde{\eta}^n = \tilde{y}^n \mid \eta^n = y^n\}$$

отрезка длины n К. с к. ч. с. при любом n, по определению, равна

$$Q_n(y^n, \tilde{y}^n) = \sum_{s_0 \in S} p_{s_0} Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n),$$

здесь $\eta^n=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ и $\tilde{\eta}^n=(\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n)$ — отрезки длины n сигналов на входе и выходе канала.

Лит. см. [3], [4] при ст. *Канал связи.*

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ — *канал связи*, используемый для передачи сообщений от *источника сообщений* к получателю, на входе к-рого в любой момент времени известна нек-рая информация о сигналах, полученных на его выходе до этого момента времени; эта информация может быть использована для выбора очередного сигнала, подлежащего передаче по каналу. Ниже приведено описание одной из возможных схем передачи информации по каналу с дискретным временем при наличии полной обратной связи. Пусть сообщением на входе канала служит случайная величина ξ, принимающая значения в нек-ром измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$. Сообщение, доставляемое адресату (получателю),— случайная величина $\tilde{\xi}$, принимающая значения в измеримом пространстве $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$. Пусть для передачи сообщения ξ используется отрезок длины n нек-рого канала с дискретным временем. Сигналами на входе $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ и выходе $(\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n)$ этого отрезка канала служат случайные векторы, компоненты к-рых принимают значения в измеримых пространствах (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно. Метод передачи по такому каналу с использованием полной обратной связи задается набором из n кодирующих функций

$$f_1(x),\ f_2(x, \tilde{y}_1),\ f_3(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2),\ \ldots,\ f_n(x, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{n-1}),$$
$$x \in \mathfrak{X},\ \tilde{y}_i \in \tilde{Y},\ i=1, \ldots, n-1,$$

со значениями в множестве Y и декодирующей функцией $g(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$, $\tilde{y}_i \in \tilde{Y}$, $i=1, \ldots, n$, со значениями в множестве $\tilde{\mathfrak{X}}$, с помощью соотношений

$$\eta_k = f_k(\xi, \tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{k-1}),\ k=1, \ldots, n,$$
$$\tilde{\xi} = g(\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n).$$

Эти соотношения показывают, что выбор очередного сигнала η_k для передачи по К. с о. с. зависит как от передаваемого сообщения ξ, так и от сигналов $\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{k-1}$, полученных на выходе канала до этого момента времени. Реально это означает, что имеется возможность мгновенно и без помех доставлять на вход канала сведения о полученном сигнале на его выходе. В этом случае часто говорят, что наряду с каналом, осуществляющим передачу в прямом направлении (т. е. от источника сообщений адресату), имеется канал обратной связи (т. е. канал, осуществляющий передачу в обратном направлении) с бесконечной пропускной способностью (см. *Канала пропускная способность*). Более реальным является предположение о том, что канал обратной связи не является бесшумным, т. е. сведения о сигналах на выходе канала, поступающие на его вход, могут содержать случайные ошибки. В этом случае говорят о канале с неполной обратной связью.

Так же, как и в обычном случае, вводится понятие пропускной способности канала с обратной связью как верхней грани скоростей передачи, при к-рых можно вести передачу, используя описанные выше методы кодирования и декодирования при сколь угодно малой вероятности ошибки. В общем случае пропускная способность К. с о. с. больше обычной пропускной способности канала. Установлено, однако, что для каналов без памяти эти пропускные способности совпадают. Для каналов с полной обратной связью предложены просто описываемые и высоко эффективные алгоритмы кодирования и декодирования.

Лит.: [1] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее применен.», 1958, т. 3, № 4, с. 395—412; [2] Feedback communication systems, N.Y., 1961; [3] Зигангиров К. Ш., «Пробл. передачи информ.», 1970, т. 6, № 2, с. 87—92.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ СВЯЗИ — одна из основных составных частей систем передачи информации, рассматриваемых в теории передачи информации. Используется при математич. описании реального канала связи, т. е. совокупности технических устройств, обеспечивающих передачу сообщений от передатчика к приемнику по физической линии связи, и среды, в к-рой распространяются сигналы от передатчика к приемнику.

К. с. с одним передатчиком и одним приемником, используемый для передачи информации в одном направлении (от передатчика к приемнику), задается совокупностью двух измеримых пространств $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$, $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ (пространств сигналов, передаваемых передатчиком и принимаемых приемником соответственно), переходной функцией $Q(y, A)$, $y \in \mathcal{Y}$, $A \in S_{\tilde{\mathcal{Y}}}$, измеримой относительно σ-алгебры $S_{\mathcal{Y}}$ при фиксированном A и являющейся *вероятностной мерой* на $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ при фиксированном y (функция $Q(y, A)$ задает условное распределение сигнала, получаемого приемником, при условии, что передатчик передал сигнал y), и подмножеством V в пространстве всех вероятностных мер в пространстве $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$ (V задает ограничение на распределении сигнала, передаваемого передатчиком). Говорят, что две случайные величины η и $\tilde{\eta}$, определенные на нек-ром вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, связаны каналом (Q, V), если они принимают значения в пространствах $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$ и $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ соответственно, для любого $A \in S_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ с вероятностью 1 условная вероятность $\mathsf{P}\{\tilde{\eta} \in A \mid \eta\} = Q(\eta, A)$, и распределение η принадлежит V.

В приложениях часто рассматривают К. с., для к-рых $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$ и $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ являются пространствами измеримых функций, определенных на отрезке $[a, b]$ и принимающих значения в нек-рых измеримых пространствах (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно с σ-алгеброй, порожденной измеримыми цилиндрическими множествами. В этом случае пишут $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}}) = (Y_a^b, S_{Y_a^b})$, $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}}) = (\tilde{Y}_a^b, S_{\tilde{Y}_a^b})$ и говорят о К. с. с непрерывным временем на отрезке $[a, b]$, для к-рого $\eta = \{\eta(t), t \in [a, b]\}$ и $\tilde{\eta} = \{\tilde{\eta}(t), t \in [a, b]\}$ — случайные процессы со значениями в пространствах (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно; значения $\eta(t)$ и $\tilde{\eta}(t)$ трактуются тогда как переданный и получаемый сигнал в момент времени t. Аналогично, в случае дискретного времени сигналами на входе и выходе К. с. служат случайные векторы $\eta_k^n = (\eta_k, \eta_{k+1}, \ldots, \eta_n)$ и $\tilde{\eta}_k^n = (\tilde{\eta}_k, \tilde{\eta}_{k+1}, \ldots, \tilde{\eta}_n)$, компоненты к-рых принимают значения в измеримых пространствах (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно; при этом η_j и $\tilde{\eta}_j$ трактуются как переданный и полученный сигналы в момент времени $j\tau$, где $\tau = \mathrm{const}$ — промежуток времени между двумя последовательными передачами сигналов по К. с.

Часто рассматривают также К. с. с непрерывным или дискретным временем t на полубесконечном или бесконечном в обе стороны интервале. Напр., под К. с. (Q, V) с непрерывным временем на полубесконечном интервале $[0, \infty)$ подразумевают обычно совокупность описанных выше К. с. (Q_0^T, V_0^T), заданных на всех конечных отрезках $[0, T]$ и удовлетворяющих нек-рым условиям согласованности. Каждый К. с. $(Q_0^T, V_0^T$

наз. в этом случае **отрезком** $[0, T]$ К. с. (Q, V). Один из возможных вариантов условий согласованности может быть сформулирован следующим образом. Пусть A_0^T — произвольное множество из $S_{\tilde{Y}_0^T}$; y_0^T — произвольная функция из Y_0^T и $y_0^T=(y_0^s, y_s^T)$ для нек-рого s, $0<s<T$, где $y_0^s \in Y_0^s$, $y_s^T \in Y_s^T$. Условия согласованности, наложенные на переходные функции $Q_0^T(\cdot, \cdot)$, состоят тогда в требовании, чтобы для любого конечного отрезка $[0, T]$, любых s, $0<s<T$, множества $A_0^s \in S_{\tilde{Y}_0^s}$ и функции $y_0^T=(y_0^s, y_s^T) \in Y_0^T$, $y_0^s \in Y_0^s$, $y_s^T \in Y_s^T$, выполнялось равенство

$$Q_0^T((y_0^s, y_s^T), A_0^s \times \tilde{Y}_s^T) = Q_0^s(y_0^s, A_0^s),$$

где $A_0^s \times \tilde{Y}_s^T$ — цилиндрическое множество в пространстве $\tilde{Y}_0^T$, порожденное множеством A_0^s из пространства $\tilde{Y}_0^s$. Ограничения V_0^T, $0<T<\infty$, накладываемые на вероятностные меры в пространствах (Y_0^T, S_0^T), также должны удовлетворять нек-рым условиям согласованности.

Аналогично вводят понятие К. с. (Q, V) с непрерывным временем на бесконечном в обе стороны интервале $(-\infty, \infty)$. Условия согласованности, необходимые при задании такого К. с., формулируются обычно специфически для каждого типа этого канала. Иногда в конкретных ситуациях понятие К. с. на бесконечных интервалах $[0, \infty)$ и $(-\infty, \infty)$ вводится и непосредственно (без рассмотрения конечных отрезков этих каналов) с помощью явного описания преобразования, совершаемого над входным сигналом К. с. при получении сигнала на выходе К. с. (см., напр., *Канал гауссовский*, *Шум аддитивный*). Все сказанное о К. с. (Q, V) с непрерывным временем на интервалах $[0, \infty)$ или $(-\infty, \infty)$ сохраняет силу и для аналогичных К. с. с дискретным временем.

К. с. делятся на различные классы в зависимости от типов условных распределений Q и ограничений V (см., напр., *Канал без памяти*, *Канал с конечной памятью*, *Канал с конечным числом состояний*, *Канал гауссовский*, *Канал симметричный*). Основной характеристикой К. с. является *канала пропускная способность*, к-рая характеризует максимально возможную *информации скорость передачи* по этому К. с.

Возможны различные обобщения приведенного определения К. с., соответствующие более общим и сложным системам передачи информации (см., напр., *Канал с обратной связью*, *Канал многосторонний*).

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243—332; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3—104; [3] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [4] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [5] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960; [6] Фано Р., Передача информации. Статистическая теория связи, пер. с англ., М., 1965.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ СВЯЗИ КВАНТОВЫЙ — система передачи (преобразования) информации, использующая в качестве носителя сообщений квантово-механич. объект.

В отличие от классического сообщения, описываемого распределением вероятностей на пространстве сигналов X, квантовое сообщение представляется оператором плотности (состоянием) в гильбертовом пространстве H, соответствующем данному квантово-механич. объекту. Всякий канал связи можно рассматривать как аффинное (сохраняющее выпуклые комбинации) отображение (выпуклого) множества сообщений на входе в множество сообщений на выходе. В частности, **квантовое кодирование** есть аффинное отображение C множества $S(X)$ распределений вероятностей на пространстве входных сигналов X в $\Sigma(H)$, множество всех операторов плотности в H. Собственно К. с. к. есть аффинное отображение L из $\Sigma(H)$ в $\Sigma(H')$, где H, H' — гильбертовы пространства, описывающие соответственно вход и выход канала. Квантовое декодирование есть аффинное отображение D из $\Sigma(H')$ в $S(Y)$, где Y — пространство сигналов на выходе. Передача сообщений, как и в классической теории информации, описывается схемой

$$S(X) \xrightarrow{C} \Sigma(H) \xrightarrow{L} \Sigma(H') \xrightarrow{D} S(Y). \qquad (1)$$

Важной задачей является нахождение оптимального способа передачи сообщения по заданному квантовому каналу L. При фиксированном L условное распределение сигнала на выходе относительно сигнала на входе является функцией $P_{C,\,D}(dy|x)$ кодирования C и декодирования D. Задается некоторый функционал $Q\{P_{C,\,D}(dy|x)\}$ и требуется найти экстремум этого функционала по C и D. Наиболее изучен случай, когда C также фиксированно и нужно найти оптимальное D. Тогда схема (1) сводится к более простой:

$$S(X) \xrightarrow{C} \Sigma(H) \xrightarrow{D} S(Y). \qquad (2)$$

Чтобы задать кодирование, достаточно указать образы ρ_x распределений, сосредоточенных в точках $x \in X$. Декодирование удобно описывать Y-измерением, к-рое определяется как мера $M(dy)$ на Y со значениями в множестве неотрицательных эрмитовых операторов в H, причем $M(Y)$ равно единичному оператору. Взаимно однозначное соответствие между декодированием и измерениями задается формулой

$$D\rho(dy) = \mathrm{Tr}\, \rho M(dy),$$

так что условное распределение сигнала на выходе схемы (2) относительно сигнала на входе есть

$$P \quad (dy|x) = \mathrm{Tr}\, \rho_x M(dy).$$

В случае конечных X, Y для оптимальности измерения $\{M(y)\}$ необходимо, чтобы оператор

$$\Lambda = \sum\nolimits_y F(y)\, M(y),$$

где

$$F(y) = \sum\nolimits_x \rho_x \, (\partial Q / \partial P \ (y|x)),$$

был эрмитов и удовлетворял условию

$$(F(y) - \Lambda)\, M(y) = 0, \quad y \in Y. \qquad (3)$$

Если Q — аффинная функция (как в случае бейесовского риска), то для оптимальности (в смысле минимума Q) необходимо и достаточно, чтобы оператор Λ, кроме (3), удовлетворял условию $\Lambda \leqslant F(y)$, $y \in Y$. Аналогичные условия имеют место для достаточно произвольных X, Y.

Существует параллель между квантовыми измерениями и решающими процедурами в классической теории статистич. решений, причем детерминированным процедурам соответствуют простые измерения, определяемые проекторнозначными мерами $M(dy)$. Однако, в отличие от классич. статистики, где оптимальная процедура, как правило, сводится к детерминированной, в квантовом случае уже для бейесовской задачи с конечным числом решений оптимальное измерение, вообще говоря, не может быть выбрано простым. Геометрически это объясняется тем, что оптимум достигается на крайних точках выпуклого множества всех измерений, а в квантовом случае класс простых измерений содержится в множестве крайних точек, не совпадая с ним.

Как и в классич. теории статистич. решений, возможно ограничение класса измерений требованиями инвариантности или несмещенности. Известны квантовые аналоги неравенства Рао — Крамера, дающие нижнюю границу для среднеквадратичной погрешности измерения. В приложениях теории много внимания уделяется бозонным гауссовским каналам связи, для к-рых в ряде случаев дано явное описание оптимальных измерений.

Лит.: [1] Helstrom C. W., Quantum detectiv and estimation theory, N. Y., 1976; [2] Холево А. С., Исследования по общей теории статистических решений, М., 1976; [3] его же, «Repts Math. Phys.», 1977, v. 12, p. 273—78.

А. С. Холево.

КАНАЛ СИММЕТРИЧНЫЙ — *канал связи*, переходная функция к-рого обладает тем или иным свойством симметрии. Однородный *канал без памяти* с дискретным временем и конечными пространствами состояний Y и $\tilde{Y}=Y$ компонент сигналов на входе и выходе, задаваемый матрицей переходных вероятностей $\{q(y, \tilde{y}), y, \tilde{y} \in Y\}$, наз. К. с., если

$$q(y, \tilde{y})=\begin{cases} q & \text{при } y=\tilde{y}, \\ \frac{1-q}{n-1} & \text{при } y \neq \tilde{y}, \end{cases} \qquad (*)$$

где n — число элементов множества Y, $0 \leqslant q \leqslant 1$. Наиболее изученным примером К. с. без памяти является двоичный К. с. с матрицей переходных вероятностей

$$\left\| \begin{matrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{matrix} \right\| .$$

Для К. с. многие важные теоретико-информационные характеристики могут быть либо вычислены явно, либо их вычисление значительно упрощается по сравнению с несимметричными каналами. Напр., для К. с. без памяти с матрицей $\{q(y, \tilde{y}), y, \tilde{y} \in Y\}$ вида $(*)$ *канала пропускная способность* C дается равенством

$$C=\log n+q \log q+(1-q) \log \frac{1-q}{n-1} .$$

Лит. см. [1], [4] при ст. *Канал связи.*

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛА ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ — теоретико-информационная мера возможности передачи информации по *каналу связи*. Пусть η и $\tilde{\eta}$ — случайные величины, связанные каналом связи (Q, V). К. п. с. C такого канала определяется равенством

$$C=\sup I(\eta, \tilde{\eta}), \qquad (1)$$

где $I(\eta, \tilde{\eta})$ — *информации количество* в $\tilde{\eta}$ относительно η, а верхняя грань берется по всем парам случайных величин $(\eta, \tilde{\eta})$, связанным каналом (Q, V). В случае, когда сигналы на входе и выходе канала $\eta=\{\eta(t), -\infty<t<\infty\}$ и $\tilde{\eta}=\{\tilde{\eta}(t), -\infty<t<\infty\}$ являются случайными процессами с непрерывным или дискретным временем, под К. п. с. обычно понимают среднюю К. п. с., приходящуюся на единицу времени или на один символ передаваемого сигнала, т. е., по определению, полагают

$$C=\lim_{T-t \rightarrow \infty} \frac{1}{T-t} \sup I\left(\eta_t^T, \tilde{\eta}_t^T\right), \qquad (2)$$

если такой предел существует; здесь верхняя грань берется по всевозможным парам случайных величин $\eta_t^T=\{\eta(s), t<s \leqslant T\}$, $\tilde{\eta}_t^T=\{\tilde{\eta}(s), t \leqslant s \leqslant T\}$, связанных соответствующим отрезком данного канала. Существование предела (2) доказано для достаточно широкого класса каналов, напр. для однородных *каналов с конечной памятью* и необращающимися в нуль вероятностями перехода.

Известно, что в достаточно широком классе случаев (напр., для упомянутых выше каналов с конечной памятью) справедливо равенство

$$C=\sup \left(\lim_{T-t \rightarrow \infty} \frac{1}{T-t} I\left(\eta_t^T, \tilde{\eta}_t^T\right)\right), \qquad (3)$$

где верхняя грань берется по всем парам стационарно связанных случайных процессов $\eta(t)$, $\tilde{\eta}(t)$, $-\infty<t<\infty$, таким, что при любых $-\infty<t<T<\infty$ случайные величины $\eta_t^T=\{\eta(s),\ t<s\leqslant T\}$ и $\tilde{\eta}_t^T=\{\tilde{\eta}(s),\ t<s\leqslant T\}$ связаны соответствующим отрезком рассматриваемого канала. Равенство (3) показывает, таким образом, что К. п. с. совпадает с максимально возможной *информации скоростью передачи* по этому каналу.

Явное вычисление К. п. с. оказывается возможным лишь в ряде частных случаев, напр. для *каналов симметричных* без памяти и *каналов гауссовских*. Поэтому значительный интерес представляют различные асимптотические формулы для К. п. с. Напр., для канала (Q, V), сигналы на входе и выходе к-рого принимают значения в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, переходная функция канала $Q(y, \cdot)$ задается плотностью $q(y, \tilde{y})$ (относительно меры Лебега), $y, \tilde{y}\in\mathbb{R}^n$, и ограничение V состоит в ограничении на среднюю мощность сигнала на входе $\mathsf{E}|\eta|^2\leqslant S$ (где $|\eta|$ — длина вектора η в $\mathbb{R}^n$), $S>0$ — фиксированное число, известны следующие результаты (см. [1]).

1) Пусть $q(y, \tilde{y})=q(\tilde{y}-y)$, т. е. рассматривается канал с аддитивным шумом, так что сигнал на выходе $\tilde{\eta}$ равен сумме $\tilde{\eta}=\eta+\zeta$ сигнала на входе η и не зависящего от него шума ζ, и пусть $\mathsf{E}|\zeta|^2=N$. Тогда при $N\to 0$ (при слабых дополнительных условиях) справедлива асимптотическая формула

$$C=-h(\zeta)+\frac{n}{2}\log\frac{2\pi eS}{n}+\frac{n\log e}{2S}N+o(N),$$

где $h(\zeta)$ — *дифференциальная энтропия* ζ, а $o(N)/N\to 0$ при $N\to 0$. Эта формула соответствует случаю малого шума.

2) Пусть $q(y, \tilde{y})$ — произвольно, но $S\to 0$. Тогда

$$C=\left(\sup_y\frac{\varphi(y)}{|y|}\right)S+o(S),$$

где

$$\varphi(y)=\int_{\mathbb{R}^n}q(y, \tilde{y})\log\frac{q(y,\tilde{y})}{q(0,\tilde{y})}\,d\tilde{y}.$$

Лит.: [1] Прелов В. В., «Пробл. передачи информ.», 1969, т. 5, № 2, с. 31—36; 1972, т. 8, № 4, с. 22—27.
См. также [1], [3]—[6] при ст. *Канал связи.*

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, одно семейство линий кривизны к-рой состоит из окружностей, плоскость каждой такой окружности пересекает К. п. под постоянным углом. Одна полость эволюты К. п. вырождается в кривую Γ, так что К. п. является огибающей однопараметрич. семейства сфер. Если $\rho(s)$ — радиус-вектор кривой Γ — множества центров сфер семейства, $R(s)$ — радиус соответствующей сферы (s — длина дуги Γ), то радиус-вектор К. п. определяется из уравнений:

$$(r-\rho)^2=R^2,\quad (r-\rho,\ \rho')+(R,\ R')=0,$$

причем $|R'|\leqslant 1$. Если $R=\mathrm{const}$, то К. п. — **трубчатая поверхность**, таков, напр., тор.

И. Х. Сабитов.

КАНОНИЧЕСКАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ — корреляция между линейными функциями двух множеств случайных величин, характеризуемая максимально возможными значениями коэффициентов корреляции. В теории К. к. случайные величины $X_1, \ldots, X_s$ и $X_{s+1}, \ldots, X_{s+t}$, $s\leqslant t$, линейно преобразуются в так наз. канонические случайные величины $Y_1, \ldots, Y_s$ и $Y_{s+1}, \ldots, Y_{s+t}$ — такие, что: а) все величины Y имеют нулевое математич. ожидание и единичную дисперсию, б) внутри каждого из двух множеств величины Y некоррелированы, в) любая величина Y из 1-го множества коррелирована лишь с одной величиной из 2-го множества, г) ненулевые коэффициенты корреляции между величинами Y из разных множеств имеют максимальное значение.

В частном случае $s=1$ К. к. представляет собой множественную корреляцию между X_1 и $X_2, \ldots, X_{1+t}$. Преобразование к каноническим случайным величинам соответствует алгебраич. задаче приведения квадратичных форм к канонич. виду. В многомерном статистич. анализе с помощью метода К. к. при изучении взаимосвязи двух множеств компонент вектора наблюдений осуществляется переход к новой системе координат, в к-рой корреляция между $X_1, \ldots, X_s$ и $X_{s+1}, \ldots, X_{s+t}$ проявляется наиболее отчетливо. В результате анализа К. к. может оказаться, что взаимосвязь между двумя множествами полностью описывается корреляцией между несколькими каноническими случайными величинами.

Лит.: [1] Hotelling H., «Biometrika», 1936, v. 28, p. 321—77; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] Кендалл М. Д., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976. *А. В. Прохоров.*

КАНОНИЧЕСКАЯ КРИВАЯ — образ алгебраич. кривой при *каноническом погружении.* Если кривая X не является гиперэллиптической и имеет род $g>2$, то ее образ в проективном пространстве P_{g-1} при канонич. погружении имеет степень $2g-2$ и является нормальной кривой. Обратно, любая нормальная кривая степени $2g-2$ в проективном пространстве P_{g-1} будет канонич. кривой для нек-рой кривой рода g. Алгебраич. кривые (с указанным выше условием) бирационально изоморфны тогда и только тогда, когда их К. к. проективно эквивалентны. Это сводит проблему классификации кривых к задаче теории проективных инвариантов и дает возможность построить многообразие модулей алгебраич. кривых [2]. Для небольших g можно дать явное геометрич. описание К. к. рода g. Так, для рода 4 К. к. совпадают с пересечениями квадрики и кубики в P_3, а для рода 5 — с пересечением трех квадрик в P_4.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Дьёдонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974; [3] Уокер Р., Алгебраические кривые, пер. с англ., М., 1952; [4] Severi F., Vorlesungen über algebraische Geometrie, Lpz., 1921. *А. Н. Паршин.*

КАНОНИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИИ — максимальные значения коэффициентов корреляции между парами линейных функций

$$U=\alpha_1X_1+\ldots+\alpha_sX_s,\ V=\beta_1X_{s+1},\ \ldots,\ \beta_tX_{s+t}$$

от двух множеств случайных величин $X_1, \ldots, X_s$ и $X_{s+1}, \ldots, X_{s+t}$, для к-рых U и V являются каноническими случайными величинами (см. *Каноническая корреляция*). Задача определения максимума коэффициента корреляции между U и V при условиях $\mathsf{E}U=\mathsf{E}V=0$ и $\mathsf{E}U^2=\mathsf{E}V^2=1$ решается с помощью неопределенных множителей Лагранжа. К. к. к. являются корнями $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_s>0$ уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22} \end{vmatrix}=0,$$

где Σ_{11} и Σ_{12} соответственные матрицы ковариаций величин $X_1, \ldots, X_s$ и $X_{s+1}, \ldots, X_{s+t}$, а $\Sigma_{12}=\Sigma_{21}^T$ — матрица ковариаций между величинами 1-го и 2-го множеств. При этом r-й корень уравнения наз. r-м К. к. к. между $X_1, \ldots, X_s$ и $X_{s+1}, \ldots, X_{s+t}$ и равен максимальному значению коэффициентов корреляции между парой линейных функций $U^{(r)}$ и $V^{(r)}$ канонических случайных величин, каждая из к-рых имеет единичную дисперсию и некоррелирована с первыми $r-1$ парами величин U и V. Коэффициенты $\alpha^{(r)}=$

$=(\alpha_1^{(r)}, \ldots, \alpha_s^{(r)})^T$, $\beta^{(r)}=(\beta_1^{(r)}, \ldots, \beta_t^{(r)})^T$ линейных функций $U^{(r)}$ и $V^{(r)}$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{pmatrix} -\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

при условии $\lambda=\lambda_r$. *И. О. Сарманов.*

КАНОНИЧЕСКИЕ РАЗРЕЗЫ, канонические сечения,— система

$$S=\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g, l_1, \ldots, l_\nu\}$$

$2g+\nu$ кривых на конечной *римановой поверхности* R рода g с ν компонентами края, после удаления точек к-рых из R, т. е. разрезания R вдоль кривых системы S, остается (плоская) односвязная область R^*. Точнее, система S образована из К. р., если каждому замкнутому, или циклическому, разрезу, или, короче, циклу a_j, $j=1, \ldots, g$, в S соответствует ровно один так называемый сопряженный цикл b_j, пересекающий цикл a_j в одной и только в одной фиксированной точке $p_0 \in R$, общей для всех разрезов системы S. Остальные циклы a_k, b_k, $k \neq j$, и кривые l_s, $s=1, \ldots, \nu$, лишь имеют точку p_0 общей, но не переходят с одного берега разреза a_j на другой; каждая кривая l_s соединяет p_0 с соответствующей компонентой края. На данной римановой поверхности R существует бесконечное множество систем S К. р. В частности, какова бы ни была односвязная область $D \subset R$, вместе со своим замыканием $\overline{D}$ расположенная строго внутри R, можно выбрать систему К. р. так, чтобы $D \subset R^*$.

Далее, всегда можно найти систему К. р. S, состоящую только из аналитич. кривых. Единственность системы S аналитич. К. р. можно обеспечить, напр., потребовав дополнительно, чтобы достигался экстремум нек-рого функционала, связанного с S. В частности, можно проводить циклич. К. р. a_j, b_j системы S так, чтобы достигалось наибольшее в классе систем, гомотопных S, значение *Робена постоянной* в точке p_0 для определенной области $D \subset R$, $p_0 \in D$. Единственности разрезов l_s также можно добиться, исходя из требования максимизации постоянных Робена в определенной паре точек (см. [2]).

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [2] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957. *Е. Д. Соломенцев.*

КАНОНИЧЕСКИЙ КЛАСС — класс K_X дивизоров относительно линейной эквивалентности на алгебраич. многообразии X, являющихся дивизорами дифференциальных форм ω максимальной степени. Если X — неособое алгебраич. многообразие и $\dim X=n$, то в локальных координатах $x_1, \ldots, x_n$ форма ω имеет вид

$$\omega=f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Дивизор (ω) формы ω локально равен дивизору (f) рациональной функции f. Эта конструкция не зависит от выбора локальных координат и дает дивизор (ω) формы на всем многообразии X. Поскольку для любой другой формы ω' той же степени, что и ω, имеет место равенство $\omega'=g\omega$, то $(\omega')=(g)+(\omega)$ и соответствующие дивизоры эквивалентны. Построенный так К. к. K_X является первым *Чжэня классом* пучка Ω_X^n регулярных дифференциальных форм степени n. Его численные характеристики (степень, индекс самопересечения и т. д.) являются эффективно вычисляемыми инвариантами алгебраич. многообразия.

Если X — неособая проективная кривая рода g, то $\deg K_X=2g-2$. Для эллиптич. кривых и, более общо, для абелевых многообразий $K_X=0$. Если X — неособая гиперповерхность степени d в проективном пространстве P_n, то $K_X=(d-n-1)\,H$, где H — ее гиперплоское сечение.

См. также *Каноническое погружение.*

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *А. Н. Паршин.*

КАНОНИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО замкнутое, *ка*-множество,— множество M топологич. пространства, являющееся замыканием открытого множества; другими словами, это — множество, являющееся замыканием своего открытого ядра $\langle M \rangle : M = [\langle M \rangle]$. В каждом замкнутом множестве F содержится максимальное *ка*-множество: $A = [\langle F \rangle]$. Сумма двух *ка*-множеств есть *ка*-множество, однако пересечение их может и не быть таковым. Множество, являющееся пересечением конечного числа *ка*-множеств, наз. л-множеством.

Множество, являющееся (открытым) ядром замкнутого множества, наз. каноническим множеством открытым или *ко*-множеством; другими словами, это — множество, совпадающее с ядром своего замыкания: $M = \langle [M] \rangle$. Всякое открытое множество G содержится в наименьшем *ко*-множестве: $B = \langle [G] \rangle$. Открытые К. м. могут быть определены и как дополнения к замкнутым К. м., и наоборот.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974. *М. И. Войцеховский.*

КАНОНИЧЕСКОЕ ПОГРУЖЕНИЕ — отображение алгебраич. многообразия X в проективное пространство с помощью степеней *канонического класса* K_X (см. *Линейная система*). Пусть X — неособая проективная кривая рода g; отображение, определяемое классом nK_X, будет вложением для нек-рого n только, если $g>1$. Причем можно взять $n=1$ для негиперэллиптич. кривых, $n=2$ для гиперэллиптич. кривых рода $g>2$ и $n=3$ для кривых рода $g=2$. Эти результаты используются для классификации алгебраич. кривых рода $g>1$ (см. *Каноническая кривая*).

Аналогичные вопросы для многообразий размерности больше единицы рассматривались в основном для поверхностей. При этом роль кривых рода $g>1$ играют поверхности, у к-рых нек-рая степень nK_X канонич. класса дает бирациональное вложение поверхности в проективное пространство. Они наз. поверхностями общего типа; основной результат об этих поверхностях состоит в том, что для них уже класс $5K_X$ определяет регулярное отображение в проективное пространство, являющееся бирациональным вложением. Напр., неособые поверхности степени m в P_3 являются поверхностями общего типа, если $m>4$. В этом случае бирациональное вложение дает уже канонический класс K_X. Если $K_X K_X > 2$ и $p_g(X)>1$ (здесь $K_X K_X$ — индекс самопересечения, а $p_g(X)$ — геометрический род), то вместо $5K_X$ можно взять даже $3K_X$. Поверхности, для к-рых никакая степень nK_X не дает вложения, разбиваются на следующие пять семейств: рациональные поверхности, линейчатые поверхности, абелевы многообразия, $K3$-поверхности и поверхности с пучком эллиптич. кривых. При этом рациональные и линейчатые поверхности — аналоги рациональных кривых, а остальные три семейства — аналоги эллиптич. кривых.

Получены первые обобщения этих результатов и на многообразия произвольной размерности [5].

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Severi F., Vorlesungen über algebraische Geometrie, Lpz., 1921; [3] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [4] Bombieri E., Husemoller D., «Proc. Sympos. Pur. Math.», 1975, v. 29, p. 329—420; [5] Ueno K., в кн.: Lecture Notes in Mathematics, v. 412, B.—Hdlb.—N.Y., 1974, p. 288—332. *А. Н. Паршин.*

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, каноническое произведение Вейерштрасса,— целая функция, все нули к-рой составляют заданную последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}$. Пусть нули $\alpha_k \neq 0$ расположены в порядке неубывания их модулей, $|\alpha_k| \leqslant |\alpha_{k+1}|$, и не имеют предельных точек в конечной плоскости (необходимое условие), т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \infty$. Тогда К. п. имеет вид

$$\prod\left(\frac{z}{\alpha_k}, q_k\right) = \prod_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{z}{\alpha_k}, q_k\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{P_k(z)},$$

где

$$P_k(z) = \frac{z}{\alpha_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\alpha_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{q_k}\left(\frac{z}{\alpha_k}\right)^{q_k},$$

$W\left(\frac{z}{\alpha_k}, q_k\right)$ — первичные, или примарные, множители Вейерштрасса. Показатели q_k выбираются так, чтобы К. п. абсолютно и равномерно сходилось на любом компакте; напр., достаточно взять $q_k \geqslant k-1$. Если последовательность $\{|\alpha_k|\}$ имеет конечный показатель сходимости

$$\beta = \inf\left\{\lambda > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^{-\lambda} < \infty\right\},$$

то все q_k можно взять одинаковыми, исходя, напр., из минимального требования $q_k = q \leqslant \beta \leqslant q+1$; такое число q наз. родом К. п. Если $\beta = \infty$, т. е. если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^{-\lambda}$ расходятся при любом $\lambda > 0$, то имеем К. п. бесконечного рода. Порядок К. п. $\rho = \beta$ (об определении типа К. п. см. [1]).

Лит.: [1] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956. *Е. Д. Соломенцев.*

КАНТОРА АКСИОМА — одна из аксиом, характеризующих непрерывность прямой линии; заключается в следующем: любая последовательность вложенных друг в друга отрезков, длины к-рых стремятся к нулю, имеет одну общую точку. Сформулирована Г. Кантором (G. Cantor, 1872). *БСЭ-3.*

КАНТОРА ПАРАДОКС — см. *Антиномия.*

КАНТОРА ТЕОРЕМА — 1) Множество 2^A, состоящее из всех подмножеств множества A, не равномощно ни самому A, ни его подмножеству. Идея доказательства этой теоремы, принадлежащая Г. Кантору (G. Cantor, 1878), получила название «канторова диагонального метода» и играет существенную роль в теории множеств. Из К. т. следует, что никакие два из множеств A, 2^A, 2^{2^A}, $2^{2^{2^A}}, \ldots$ не равномощны. Таким способом получается бесконечно много различных *кардинальных чисел.* Из К. т. вытекает, что не существует множества всех множеств. Это означает, что нельзя принять аксиому теории множеств, утверждающую существование для каждой высказывательной функции $\Phi(x)$ множества, состоящего из элементов x, удовлетворяющих $\Phi(x)$ (см. [1], [2], [3], [8]). *Б. А. Ефимов.*

2) Любая последовательность убывающих ограниченных замкнутых множеств действительных чисел имеет непустое пересечение. Обобщается на компактные подмножества метрич. пространства. Свойство: диаметры замкнутых множеств метрич. пространства X, последовательно вложенных друг в друга, стремятся к нулю — одно из определений полноты X. Свойство: вполне упорядоченная система убывающих замкнутых множеств топологич. пространства X — одно из определений бикомпактности X (см. [1], [2], [4], [5], [11]).

3) Всякое множество действительных чисел есть объединение совершенного множества своих *конденсации точек* и счетного множества; иногда наз. теоремой Кантора—Бендиксона. Обобщена на случай подмножеств метрич. пространства со счетной

базой (теорема Линделёфа) (см. [1], [2], [3], [14], [15]).

4) Если из двух множеств каждое эквивалентно части другого, то эти два множества эквивалентны между собою. Аналогичное утверждение справедливо и для вполне упорядоченных множеств. Иногда наз. теоремой Кантора—Бернштейна или просто теоремой Бернштейна (последний дал корректное доказательство этой теоремы) (см. [1], [2], [3], [10], [12], [16]).

5) Если

$$A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx \longrightarrow 0$$

для всех, кроме конечного числа, точек отрезка $[-\pi, \pi]$, то a_n, $b_n \to 0$. Обобщена на случаи, когда $A_n \to 0$ на множестве положительной меры (теорема Лебега), когда $A_n \to 0$ на множестве второй категории (теорема Юнга), и на другие ситуации. Важнейшим следствием являются различные теоремы о множествах единственности тригонометрич. рядов (см. [1], [6], [7], [9], [18], [19]).

6) Функция, непрерывная на замкнутом отрезке действительной оси, равномерно непрерывна на нем. Обобщена на случай непрерывных отображений бикомпактного пространства в *равномерное пространство.* Иногда наз. теоремой Гейне — Кантора (см. [1], [4], [5], [13]).

Лит.: [1] Cantor G., Gesammelte Abhandlungen, B., 1932; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937; [3] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [4] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [5] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [6] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [7] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, 2 изд., т. 1, пер. с англ., М., 1963; [8] Cantor G., «J. reine und angew. Math.», 1878, Bd 84, S. 242—58; [9] его же, «Math. Ann.», 1871, Bd 4, S. 139—43; [10] его же, там же, 1897, Bd 49, S. 207—46; [11] его же, там же, 1880, Bd 17, S. 355—58; [12] Borel E., Leçons sur la théorie des fonctions, P., 1898; [13] Heine E., «J. reine und angew. Math.», 1872, Bd 74, S. 172; [14] Lindelöf E., «Acta math.», 1905, v. 29, p. 183—90; [15] Cantor G., «J. reine und angew. Math.», 1870, Bd 72, S. 130—42; [16] его же, «Math. Ann.», 1883, Bd 21, S. 51—58; [17] Bendixson I., «Acta math.», 1883, v. 2, p. 415—29; [18] Lebesgue H., Leçons sur les séries trigonométriques..., P., 1906; [19] Young W. H., «Proc. Roy. Soc.», 1912, v. 87, p. 331—39; [20] Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963. *М. И. Войцеховский.*

КАНТОРОВ ДИСКОНТИНУУМ, канторово совершенное множество,— то же, что *Канторово множество.* *В. В. Федорчук.*

КАНТОРОВА КРИВАЯ — метризуемый одномерный континуум. Первоначально К. к. наз. плоский нигде не плотный континуум, и это была первая (хотя и не внутренняя) характеристика одномерных замкнутых связных подмножеств плоскости, рассмотренная Г. Кантором (G. Cantor). К. к. содержит нигде не плотный подконтинуум тогда и только тогда, когда замыкание множества всех точек ветвления одномерно. В то же время, если К. к. не содержит нигде неплотного подконтинуума, то все ее точки имеют конечный индекс ветвления. К. к. без точек ветвления является или простой дугой, или простой замкнутой линией. Множество концевых точек К. к., т. е. множество точек индекса 1, нульмерно, но может быть всюду плотным. Если все точки К. к. имеют одинаковый конечный индекс ветвления, то эта К. к. является простой замкнутой линией. Построена универсальная К. к. (кривая Менгера), то есть К. к., к-рая содержит топологич. образ всякой К. к.

Лит.: [1] Урысон П. С., Тр. по топологии и другим областям математики, т. 2, М.—Л., 1951; [2] Menger K., Kurventheorie, Lpz.—B., 1932. *В. В. Федорчук.*

КАНТОРОВИЧА ПРОЦЕСС — итерационный метод уточнения значения корня нелинейного функционального (операторного) уравнения (обобщение метода Ньютона). Для уравнения $P(x)=0$, где P — нелинейная операция, действующая из одного банахова пространства в другое, вычислительная формула метода имеет следующий вид

$$x_{n+1}=x_n-[P'(x_n)]^{-1}P(x_n)$$

(здесь P' — производная Фреше). Иногда используется модифицированный процесс, определяемый формулой

$$\tilde{x}_{n+1}=\tilde{x}_n-[P'(x_0)]^{-1}P(\tilde{x}_n).$$

Пусть операция P дважды непрерывно дифференцируема и выполняются условия (см. [2]):

1) существует линейная операция $\Gamma_0=[P'(x_0)]^{-1}$,
2) $\|\Gamma_0 P(x_0)\|\leqslant\eta$,
3) $\|\Gamma_0 P''(x)\|\leqslant K$ при $\|x-x_0\|\leqslant r$,
4) $h=K\eta\leqslant {}^1/_2$,
5) $r\geqslant r_0=(1-\sqrt{1-2h})\eta/h$.

Тогда уравнение $P(x)=0$ имеет решение x^* такое, что

$$\|x^*-x_0\|\leqslant r_0.$$

К этому решению сходятся последовательности x_n и $\tilde{x}_n$, причем

$$\|x^*-x_n\|\leqslant(2h)^{2^n}\eta/(2^n h),$$

и в случае $h<{}^1/_2$

$$\|x^*-\tilde{x}_n\|\leqslant\left(1-\sqrt{1-2h}\right)^{n+1}\eta/h.$$

К. п. всегда сходится к корню x^* уравнения $P(x)=0$, если только P достаточно гладкая, существует $[P'(x^*)]^{-1}$ и начальное приближение x_0 избрано достаточно близким к x^*. Если существует непрерывная $P''(x)$, то сходимость основного процесса квадратическая. Модифицированный процесс сходится с быстротой убывающей геометрич. прогрессии; знаменатель этой прогрессии стремится к нулю, когда $x_0\to x^*$.

К. п. предложен Л. В. Канторовичем [1].

Лит.: [1] Канторович Л. В., «Докл. АН СССР», 1948, т. 59, № 6, с. 1237—40; [2] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959; [4] Красносельский М. А. и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [4] Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969. *И. К. Даугавет.*

КАНТОРОВО МНОГООБРАЗИЕ — n-мерный бикомпакт X, $\dim X=n$, в к-ром любая *перегородка* B между непустыми множествами имеет размерность $\dim B\geqslant n-1$. Эквивалентное определение: n-мерное К. м. есть n-мерный бикомпакт X, обладающий тем свойством, что при всяком представлении его в виде суммы двух непустых и отличных от всего пространства X замкнутых множеств X_1 и X_2 пересечение $X_1\cap X_2$ имеет размерность $\dim(X_1\cap\cap X_2)\geqslant n-1$. Одномерные метризуемые К. м. суть одномерные континуумы, или *канторовы кривые.*

Понятие К. м. было введено П. С. Урысоном (см. [1]). n-мерный замкнутый шар и, значит, n-мерное замкнутое многообразие являются К. м.; n-мерное евклидово пространство нельзя разбить множеством размерности $\leqslant n-2$ (при $n=3$ — теорема Урысона, при $n>3$ — теорема Александрова). $(n-1)$-мерным К. м. является совместная граница двух областей n-мерного евклидова пространства, одна из к-рых ограничена (теорема Александрова). Основной факт теории К. м.: всякий n-мерный бикомпакт содержит n-мерное канторово подмногообразие (теорема Александрова).

Всякое лежащее в n-мерном бикомпакте X максимальное n-мерное К. м. наз. размерностной компонентой бикомпакта X. Всякое n-мерное канторово подмногообразие бикомпакта X лежит в единственной размерностной компоненте X. Пересечение двух различных размерностных компонент n-мерного бикомпакта X имеет размерность $\leqslant n-2$. В частности, размерностные компоненты одномерного бикомпакта суть его компоненты. Множество размерностных компонент конечномерного компакта конечно, счетно или имеет мощность континуума. Справедливо неравенство: $\dim(A \cap B) \leqslant n-2$, где A — произвольная размерностная компонента совершенно нормального бикомпакта X, а B — объединение всех остальных размерностных компонент (теорема Александрова). В наследственно нормальном бикомпакте с 1-й аксиомой счетности размерностная компонента может содержаться в сумме остальных размерностных компонент.

Объединение K_X всех размерностных компонент n-мерного бикомпакта X наз. его внутренним размерностным ядром. Ввиду монотонности размерности в совершенно нормальном бикомпакте X всегда $\dim K_X = \dim X$ и $\dim(X \setminus K_X) \leqslant \dim X$. Множество $X \setminus K_X$ не содержит никакого n-мерного бикомпакта. Но даже для компактов неизвестно (1978), может ли $\dim(X \setminus K_X) = \dim X$. Что касается наследственно нормальных бикомпактов, то в них внутреннее размерностное ядро и его дополнение могут иметь все допустимые размерности, а именно, в предположении континуум-гипотезы, для всякой тройки целых чисел n, n_1 и n_2 с $n \geqslant 1$, $n_1 \geqslant n$ и $n_2 \geqslant 0$ существует такой наследственно нормальный n-мерный бикомпакт X, что $\dim K_X = n_1$ и $\dim(X \setminus K_X) = n_2$.

Если $\dim X = \operatorname{ind} X$, то $K_X \subset N_X$, где N_X (определенное по Урысону) — индуктивное размерностное ядро, т. е. множество всех точек $x \in X$, в к-рых $\operatorname{ind}_X X = n$. Индуктивное размерностное ядро N_X компакта X всегда имеет тип F_σ. Неизвестно, так ли обстоит дело с внутренним размерностным ядром компакта. Что касается бикомпактов, то в них ни индуктивное, ни внутреннее размерностные ядра не обязаны иметь тип F_σ. Для всякой точки $x \in N_X$

$$\operatorname{ind}_x N_X = \operatorname{ind}_x X,$$

где X — компакт (теорема Менгера). Поэтому для произвольного компакта X его внутреннее размерностное ядро K_X всюду плотно в индуктивном размерностном ядре N_X. На бикомпакты это утверждение уже не переносится. Нерешенным остается вопрос (1978), всякая ли точка содержится в индуктивном размерностном ядре вместе с нек-рым невырожденным континуумом.

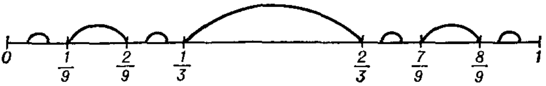
Конечномерный континуум X, внутреннее размерностное ядро K_X к-рого всюду плотно в X, наз. обобщенным канторовым многообразием. Совместная граница двух открытых подмножеств n-мерного евклидова пространства является $(n-1)$-мерным обобщенным К. м. В метризуемом n-мерном обобщенном К. м. X может быть всюду плотно множество тех точек x, в к-рых $\operatorname{ind}_x X < n$. Ни произведения, ни непрерывные отображения не сохраняют свойство быть обобщенными К. м., равно как и свойство быть К. м. Бикомпакт X наз. бесконечномерным канторовым многообразием, если его нельзя разбить никаким способом слабо бесконечномерным замкнутым подмножеством. Во всяком бесконечномерном бикомпакте содержится бесконечномерное К. м.

Лит.: [1] Урысон П. С., Тр. по топологии и другим областям математики, т. 1, М.— Л., 1951; [2] Александров П. С., «Ann. Math.», 1929, v. 30, p. 101—87; [3] его же, «Proc. Roy. Soc. London. Ser. A», 1947, v. 189, p. 11—39; [4] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности ..., М., 1973; [5] Федорчук В. В., «Докл. АН СССР», 1974, т. 215, № 2, с. 289—92; [6] Menger K., Dimensionstheorie, Lpz.—B., 1928; [7] Скляренко Е. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 2, с. 197—212.

В. В. Федорчук.

КАНТОРОВО МНОЖЕСТВО — подмножество отрезка [0, 1] числовой оси, состоящее из всех чисел вида $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i}$, где ε_i равно 0 или 2. Построено Г. Кантором (G. Cantor, 1883). Геометрич. его описание (см. рис.):

из отрезка [0, 1] выбрасывается его средняя треть — интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, затем из оставшихся отрезков $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ выбрасываются интервалы $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, из оставшихся четырех отрезков также выбрасываются их средние трети, и т. д.; то, что останется после выбрасывания всех этих интервалов (смежных



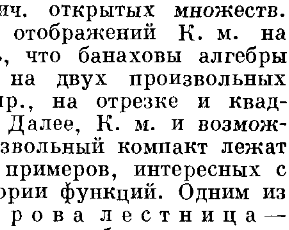
интервалов), суммарная длина к-рых равна 1, и есть канторово совершенное множество (Кантора множество; канторов дисконтинуум); оно нигде не плотно на числовой прямой, имеет мощность континуума.

С топологич. точки зрения К. м.— нульмерный совершенный (т. е. без изолированных точек), компакт, причем с точностью до гомеоморфизма существует единственный такой компакт. Все ограниченные совершенные нигде не плотные множества на числовой прямой суть подобные множества. К. м. гомеоморфно счетной степени $D^{\aleph_0}$ простого двоеточия D и является пространством топологич. группы $Z_2^{\aleph_0}$; К. м. универсально в двух смыслах: во-первых, всякое нульмерное пространство со счетной базой гомеоморфно подмножеству К. м.; 2) во-вторых, всякий компакт является непрерывным образом К. м. (теорема Александрова). Эта теорема кладет начало теории диадических бикомпактов и показывает, что многие компакты похожи друг на друга с функциональной точки зрения. Так, в частности, все совершенные компакты имеют одинаковые булевы алгебры всех канонич. открытых множеств. Существование специальных отображений К. м. на компакты позволяет доказать, что банаховы алгебры всех непрерывных функций на двух произвольных совершенных компактах (напр., на отрезке и квадрате) линейно гомеоморфны. Далее, К. м. и возможность отобразить его на произвольный компакт лежат в основе построения многих примеров, интересных с точки зрения топологии и теории функций. Одним из них является так наз. канторова лестница — график непрерывного монотонного отображения отрезка [0, 1] на себя, производная к-рого определена и равна нулю на множестве меры 1. Хотя стандартное К. м. имеет меру нуль, существуют нигде не плотные на отрезке совершенные компакты меры, сколь угодно близкой к единице.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977. *В. В. Федорчук.*

КАППА — плоская алгебраическая кривая 4-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид:

$$(x^2+y^2)y^2=a^2x^2;$$



в полярных координатах:

$$\rho=a \operatorname{ctg} \varphi.$$

Начало координат — узловая точка с совпавшими касательными $x=0$ (см. рис.). Асимптоты — прямые $y=\pm a$. Относится к так наз. *узлам.*

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

КАРАТЕОДОРИ КЛАСС — класс C функций

$$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

регулярных в круге $|z|<1$ и имеющих в нем положительную действительную часть. Класс назван по имени

К. Каратеодори, определившего точное множество значений системы коэффициентов $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, $n \geqslant 1$, на классе C (см. [1], [2]).

Теорема Рисса — Герглотца. Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу C, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление интегралом Стилтьеса

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \, d\mu(t),$$

где $\mu(t)$ — функция, неубывающая на отрезке $[-\pi, \pi]$ и такая, что $\mu(\pi) - \mu(-\pi) = 1$.

С помощью этого представления легко выводятся интегральные параметрич. представления для классов функций, выпуклых и однолистных в круге, звездообразных и однолистных в круге и др.

Теорема Каратеодори — Тёплица. Множество значений системы $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, $n \geqslant 1$, на классе C есть замкнутое выпуклое ограниченное множество K_n точек n-мерного комплексного евклидова пространства, в к-рых определители

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 2 & c_1 & \ldots & c_k \\ \bar{c}_1 & 2 & \ldots & c_{k-1} \\ \bar{c}_2 & \bar{c}_1 & \ldots & c_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{c}_k & \bar{c}_{k-1} & \ldots & 2 \end{vmatrix}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

либо все положительны, либо положительны до какого-то номера, начиная с к-рого все равны нулю. В последнем случае получается поверхность Π_n тела K_n. Каждой точке Π_n отвечает только одна функция класса C и она имеет вид

$$f_N(z) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \frac{e^{it_j} + z}{e^{it_j} - z},$$

где

$$\sum_{j=1}^{N} \mu_j = 1, \ \mu_j > 0, \ 1 \leqslant N \leqslant n, \ -\pi < t_j \leqslant \pi, \ t_j \neq t_k$$

при $j \neq k$, $k, j = 1, \ldots, N$.

Множество значений коэффициента c_n, $n = 1, 2, \ldots$, на классе C есть круг $|c_n| \leqslant 2$; окружности $|c_n| = 2$ соответствуют только функции

$$f(z) = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}.$$

Множество значений $f(z_0)$ (z_0 фиксировано, $|z_0| < 1$) на классе C есть круг, диаметром к-рого является отрезок $\left[\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}, \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\right]$; границе этого круга соответствуют только функции

$$f(z) = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}.$$

Рассматривались множества значений систем функционалов и более общего вида (см. [6]). Для класса C получены вариационные формулы, с помощью к-рых показано, что ряд экстремальных задач в классе C решается функциями $f_N(z)$, $N \leqslant 2$ (см. [6]).

Основной подкласс C — класс C_r функций $f(z) \in C$, имеющих действительные коэффициенты c_n, $n = 1, 2, \ldots$. Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу C_r, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos t + z^2} \, d\mu(t),$$

где $\mu(t)$ — функция, неубывающая на $[0, 2\pi]$, $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$. С помощью этого представления решаются многие экстремальные задачи на классе C_r.

Лит.: [1] Carathéodory C., «Math. Ann.», 1907, Bd 64, S. 95—115; [2] его же, «Rend. Circolo mat. Palermo», 1911, v. 32, p. 193—217; [3] Toeplitz O., там же, p. 191—

92; [4] Riesz F., «Ann. scient. École norm. supér.», 1911, t. 28, p. 33—62; [5] Herglotz G., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl.», 1911, Bd 63, S. 501—11; [6] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Е. Г. Голузина.

КАРАТЕОДОРИ МЕРА — мера μ, порожденная внешней мерой Каратеодори μ^*, где внешняя мера Каратеодори есть *внешняя мера*, определенная на классе всех подмножеств метрич. пространства M (с метрикой ρ) и такая, что

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

если $\rho(A, B) > 0$. Введена К. Каратеодори [1]. Множество $E \subset M$ принадлежит области определения μ, т. е. μ^*-измеримо, тогда и только тогда, когда

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C)$$

для любого $A \subset M$ (здесь $E^C = M \setminus E$); если E μ^*-измеримо, то $\mu(E) = \mu^*(E)$. Область определения К. м. содержит все борелевские множества. Если μ^* — внешняя мера в классе всех подмножеств метрич. пространства такая, что всякое открытое множество μ^*-измеримо, то μ^* — внешняя К. м.

Лит.: [1] Carathéodory C., «Nachr. Ges. Wiss. Göttingen», 1914, 404—26; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

В. В. Сазонов.

КАРАТЕОДОРИ ОБЛАСТЬ — ограниченная односвязная область G комплексной плоскости такая, что граница G совпадает с границей области G_∞, смежной с областью $\overline{G}$ и содержащей точку ∞. К К. о. относятся, напр., все области, ограниченные кривыми Жордана. Каждая К. о. может быть представлена в виде ядра убывающей сходящейся последовательности односвязных областей $\{G_n\}$:

$$\overline{G} \subset G_{n+1} \subset \overline{G}_{n+1} \subset G_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и каждая область G, для к-рой существует такая последовательность, есть К. о. (теорема Каратеодори, см. [1]).

Лит.: [1] Carathéodory C., «Math. Ann.», 1912, Bd 72, S. 107—44; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 2, 2 изд., М., 1968.

Е. Г. Голузина.

КАРАТЕОДОРИ ТЕОРЕМА о конформном отображении областей с переменными границами — один из основных результатов теории конформных отображений областей с переменными границами; получен К. Каратеодори [1].

Пусть дана последовательность односвязных областей B_n, $n=1, 2, \ldots$, плоскости z, содержащих фиксированную точку z_0, $z_0 \neq \infty$. Если существует круг $|z-z_0| < \rho$, $\rho > 0$, принадлежащий всем областям B_n, то ядром последовательности B_n, $n=1, 2, \ldots$, относительно точки z_0 наз. наибольшая область B, содержащая точку z_0 и обладающая тем свойством, что для всякого компакта E, принадлежащего B, существует такое число N, что E принадлежит областям B_n при $n \geqslant N$. Наибольшая область понимается в том смысле, что она содержит любую другую область, обладающую тем же свойством. Если указанного круга не существует, то под ядром B последовательности B_n, $n = 1, 2, \ldots$, понимается точка z_0 (в этом случае говорят, что последовательность областей B_n, $n=1, 2, \ldots$, имеет вырожденное ядро). Последовательность областей B_n, $n=1, 2, \ldots$, сходится к ядру B, если любая последовательность из B_n имеет своим ядром также B.

Теорема Каратеодори. Пусть дана последовательность функций $z=f_n(\zeta)$, $f_n(\zeta_0)=z_0$, $f_n'(\zeta_0)>0$, $n=1, 2, \ldots$, регулярных и однолистных в круге $|\zeta-\zeta_0|<1$ и отображающих $|\zeta-\zeta_0|<1$ соответственно на области B_n. Для того чтобы функции $f_n(\zeta)$, $n=1, 2, \ldots$, сходились в круге $|\zeta-\zeta_0|<1$ к конечной функции $f(\zeta)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность областей B_n, $n=1, 2, \ldots$, сходилась к ядру B, к-рое есть либо точка z_0, либо область, имеющая более одной граничной точки. При этом сходимость равномерна внутри круга $|\zeta-\zeta_0|<1$. Если предельная функция $f(\zeta)\not\equiv\mathrm{const}$, то она однолистно отображает круг $|\zeta-\zeta_0|<1$ на ядро B, а обратные функции $\varphi_n(z)$, $n=1,2,\ldots$, равномерно сходятся внутри B к функции $\varphi(z)$, обратной к $f(\zeta)$.

Аналогично рассматривается вопрос о сходимости последовательности функций, однолистных в многосвязных областях. Ниже приводится одна из таких теорем для неограниченных областей. Пусть дана последовательность любых областей B_n, $n=1, 2, \ldots$, плоскости z, содержащих нек-рую фиксированную окрестность точки $z=\infty$. Ядром последовательности B_n, $n=1, 2, \ldots$, относительно точки $z=\infty$ наз. наибольшая область B, содержащая $z=\infty$, любая замкнутая подобласть к-рой принадлежит всем B_n, начиная с некоторого n. Сходимость последовательности областей B_n, $n=1, 2, \ldots$, к ядру B определяется, как и выше. Имеет место следующая теорема [2]. Пусть в плоскости z дана последовательность областей A_n, $n=1, 2, \ldots$, содержащих $z=\infty$ и сходящихся к ядру A, и пусть функции $\zeta=f_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$, однолистно отображают их соответственно на области B_n, содержащие $\zeta=\infty$, $f_n(\infty)=\infty$, $f_n'(\infty)=1$, $n=1, 2, \ldots$ Для того чтобы функции $f_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$, равномерно сходились внутри области A к однолистной функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность областей B_n, $n=1, 2, \ldots$, имела ядро B и сходилась к нему, причем тогда функция $\zeta=f(z)$ однолистно отображает A на B.

Можно указать и другие теоремы о сходимости последовательностей однолистных функций в зависимости от способа их нормировки (см. [2]).

Лит.: [1] Carathéodory C., «Math. Ann.», 1912, Bd 72, S. 107—44; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Г. В. Кузьмина.

КАРАТЕОДОРИ — ФЕЙЕРА ЗАДАЧА — задача о продолжимости многочлена от z до степенного ряда, представляющего собой регулярную в круге $|z|<1$ функцию, реализующую наименьшее значение супремума модуля в круге $|z|<1$ в классе всех регулярных в $|z|<1$ функций, к-рые имеют начальным отрезком своего разложения в ряд Маклорена данный многочлен. Решение этой задачи дается следующей теоремой.

Теорема Каратеодори — Фейера [1]. Пусть

$$P(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_{n-1}z^{n-1}$$

— данный многочлен, $P(z)\not\equiv 0$. Существует единственная рациональная функция $R(z)=R(z, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ вида

$$R(z)=\lambda\,\frac{\bar{\alpha}_{n-1}+\bar{\alpha}_{n-2}z+\ldots+\bar{\alpha}_0z^{n-1}}{\alpha_0+\alpha_1z+\ldots+\alpha_{n-1}z^{n-1}}, \quad \lambda>0,$$

регулярная в $|z|\leqslant 1$ и имеющая в своем разложении в ряд Маклорена n первых коэффициентов, равных соответственно $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$. Эта функция, и только она, реализует наименьшее значение

$$M_f=\sup_{|z|<1}|f(z)|$$

в классе всех регулярных в круге $|z|<1$ функций $f(z)$ вида

$$f(z)=P(z)+a_nz^n+\ldots,$$

и указанное наименьшее значение равно $\lambda=\lambda(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$.

Число $\lambda(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ равно наибольшему положительному корню уравнения $2n$-й степени

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \ldots & 0 & c_0 & c_1 \ldots c_{n-1} \\ 0 & -\lambda \ldots & 0 & 0 & c_0 \ldots c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & -\lambda & 0 & 0 \ldots c_0 \\ \bar{c}_0 & 0 \ldots & 0 & -\lambda & 0 \ldots 0 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_0 \ldots & 0 & 0 & -\lambda \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{c}_{n-1} & \bar{c}_{n-2} \ldots & \bar{c}_0 & 0 & 0 \ldots -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ — действительные числа, то $\lambda(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ является наибольшим из абсолютных значений корней уравнения n-й степени

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \ldots 0 & c_0 \\ 0 & -\lambda \ldots c_0 & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_0 & c_1 \ldots c_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Лит.: [1] Carathéodory C., Fejer L., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1911, v. 32, p. 218—39; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966. *Г. В. Кузьмина.*

КАРДАНО ФОРМУЛА — формула для отыскания корней кубического уравнения над полем комплексных чисел

$$x^3+px+q=0. \qquad (1)$$

К такому виду может быть приведено любое кубич. уравнение. К. ф. для уравнения (1) имеет вид:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Применяя эту формулу, нужно для каждого из трех значений кубич. корня

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

брать то значение корня

$$\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

для к-рого выполняется условие $\alpha\beta=-p/3$ (такое значение корня β всегда существует). В К. ф. числа p и q — любые комплексные. В случае действительных коэффициентов p и q свойство корней уравнения быть действительными или мнимыми зависит от знака дискриминанта уравнения

$$D=-27q^2-4p^3=-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right).$$

При $D>0$ все три корня уравнения действительны и различны. Но по К. ф. корни выражаются через кубич. радикалы с мнимыми подкоренными выражениями. Хотя в этом случае как коэффициенты, так и корни действительны, корни не могут быть выражены через коэффициенты при помощи радикалов из действительных чисел, ввиду чего данный случай получил название неприводимого. При $D=0$ все корни действительны, причем при p и q, отличных от нуля, имеется один двукратный и один однократный корень, а при $p=q=0$ — один трехкратный корень. При $D<0$ все три корня различны, причем один корень является действительным, а два других — сопряженными мнимыми числами.

К. ф. названа по имени Дж. Кардано (G. Cardano), впервые опубликовавшего ее в 1545.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *И. В. Проскуряков.*

КАРДИНАЛЬНОЕ ЧИСЛО, трансфинитное число, мощность по Кантору, кардинал множества A,— такое свойство этого множества, к-рое присуще любому множеству B, равномощному A. При этом два множества A и B наз. равномощными, если существует взаимно однозначная функция $f: A \to B$ с областью определения A и множеством значений B. Г. Кантор (G. Cantor) определял К. ч. множества A как такое его свойство, к-рое остается после абстрагирования от качества элементов множества A и от их порядка. Чтобы подчеркнуть этот двойной акт абстрагирования, Г. Кантор для обозначения К. ч. множества A ввел символ $\bar{\bar{A}}$. Из других обозначений К. ч. множества A наиболее употребительны символы card A и $|A|$. Если A — конечное множество, содержащее n элементов, то card $A=n$. Если $\mathbb{Z}^+$ — множество всех натуральных чисел, то card $\mathbb{Z}^+ = \aleph_0$ (см. *Алефы*). Если $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел, то card $\mathbb{R} = \mathfrak{c}$ — мощность континуума. Множество 2^A всех подмножеств множества A не равномощно ни самому A, ни его подмножеству (теорема Кантора). В частности, никакие два из множеств

$$A,\ 2^A,\ 2^{2^A},\ 2^{2^{2^A}},\ \ldots \tag{1}$$

не равномощны. При $A = \mathbb{Z}^+$ получается бесконечно много различных бесконечных К. ч. Другие К. ч. получаются, если взять объединение Q множеств, входящих в (1), и построить последовательность, аналогичную (1), положив $A=Q$. Этот процесс можно продолжать бесконечно. Шкала всех бесконечных К. ч. намного богаче шкалы конечных мощностей. Более того, их так много, что нельзя образовать множества, содержащего по крайней мере по одному К. ч.

Для К. ч. определяются операции сложения, умножения, возведения в степень, а также взятие логарифма и извлечение корня. Так, К. ч. $\delta=\alpha+\beta$ наз. суммой К. ч. α и β, если каждое множество мощности δ можно представить в виде объединения двух непересекающихся множеств A и B мощностей α и β соответственно; К. ч. $\gamma=\alpha\beta$ наз. произведением К. ч. α и β, если γ является К. ч. декартова произведения $A \times B$, причем card $A=\alpha$ и card$B=\beta$. Сложение и умножение К. ч. коммутативно и ассоциативно, а умножение дистрибутивно относительно сложения. К. ч. $\varkappa=\alpha^\beta$ наз. степенью с основанием α и показателем β, если каждое множество мощности $\varkappa$ равномощно множеству A^B, где card $A=\alpha$ и card $B=\beta$. К. ч. α не больше К. ч. β, $\alpha \leqslant \beta$, если каждое множество мощности α равномощно нек-рому подмножеству множества мощности β. Если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$, то $\alpha=\beta$ (теорема Кантора—Бернштейна), так что шкала К. ч. линейно упорядочена. Более того, для каждого К. ч. β множество $\{\alpha : \alpha < \beta\}$ вполне упорядочено, что позволяет определить логарифм $\log_\alpha \beta$ К. ч. β по основанию К. ч. α, $\alpha \leqslant \beta$ как наименьшее К. ч. γ такое, что $\alpha^\gamma \geqslant \beta$ и корень α-й степени $\beta^{1/\alpha}$ из К. ч. β, $\alpha \leqslant \beta$, как наименьшее К. ч. δ такое, что $\delta^\alpha \geqslant \beta$.

Любое К. ч. α можно отождествить с наименьшим *порядковым числом* мощности α. В частности, $\aleph_0$ соответствует порядковому числу ω_0, $\aleph_1$ — порядковому числу ω_1, и т. д. Таким образом, шкала К. ч. является подшкалой шкалы порядковых чисел. Ряд свойств порядковых чисел переносится на К. ч., однако эти же свойства можно определить и «внутренним» способом. Если $\alpha_t < \beta_t$ для каждого $t \in T$ и card $T \geqslant \omega_0$, то

$$\sum \{\alpha_t : t \in T\} < \Pi \{\beta_t : t \in T\} \tag{2}$$

(теорема Кёнига). Если в (2) положить $T=\mathbb{Z}^+$ и $1 < \alpha_n < \alpha_{n+1}$, то

$$\alpha_{\omega_0} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots < \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \tag{3}$$

В частности, ни для какого К. ч. $\alpha \geqslant 2$ степень α^{ω_0} нельзя представить в виде суммы членов бесконечно возрастающей последовательности меньших К. ч. Для каждого К. ч. α определяется К. ч. $cf(\alpha)$ — конфинальный характер α, как наименьшее К. ч. γ такое, что $\alpha = \Sigma\{\beta_t,\ t \in T\}$, если $\beta_t < \alpha$ для всех $t \in T$ и card $T = \gamma$. Если $cf(\alpha) = \alpha$, то α наз. регулярным. К. ч., не являющееся регулярным, наз. сингулярным. Для любого К. ч. α наименьшее К. ч. α^+, следующее за α, является регулярным. Примером сингулярного К. ч. является К. ч. α_{ω_0} из левой части формулы (3) при условии, что $\omega_0 < \alpha_1$. В этом случае

$$cf(\alpha_{\omega_0}) = \omega_0 < \alpha_{\omega_0}.$$

К ч. α наз. предельным, если для любого К. ч. $\beta < \alpha$ существует К. ч. γ такое, что $\beta < \gamma < \alpha$. Примеры предельных К. ч.: ω_0 и α_{ω_0}. Непредельным К. ч. является ω_1. Регулярное и предельное К. ч. называется слабо недостижимым. К. ч. α называется доминантным, если для любого $\beta < \alpha$ выполняется $2^\beta < \alpha$. Доминантное и регулярное К. ч. наз. сильно недостижимым. Из обобщенной *континуум-гипотезы* вытекает, что класс сильно недостижимых К. ч. совпадает с классом слабо недостижимых К. ч. Классы недостижимых К. ч. допускают дальнейшую классификацию (так наз. схема Мало), к-рая приводит к определению гипернедостижимых К. ч. Существование сильно (слабо) недостижимых К. ч., бо́льших ω_0, оказывается независимым от обычных аксиом как аксиоматической, так и наивной теории множеств.

К. ч. α наз. измеримым (точнее, $\{0, 1\}$-измеримым), если существует множество A мощности α и функция μ, определенная на всех элементах семейства 2^A, принимающая значения 0 или 1 и такая, что $\mu(A) = 1$, $\mu\{a\} = 0$ для любого $a \in A$ и если $\{X_n : n \in \omega_0\}$ — последовательность, состоящая из попарно непересекающихся подмножеств A, то

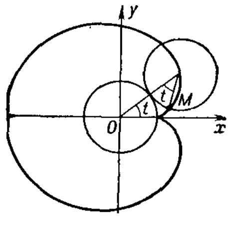
$$\mu\left(\bigcup \{X_n : n \in \omega_0\}\right) = \sum \{\mu(X_n) : n \in \omega_0\}.$$

Каждое К. ч., меньшее первого несчетного сильно недостижимого К. ч., неизмеримо (теорема Улама), так что первое измеримое К. ч. непременно сильно недостижимо. Однако первое измеримое К. ч. значительно больше, чем первое несчетное сильно недостижимое К. ч. (теорема Тарского). Неизвестно (1978), противоречит ли аксиомам теории множеств гипотеза о существовании измеримых К. ч.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Кантор Г., в кн.: Новые идеи в математике, сб. 6, СПБ, 1914, с. 90—184; [3] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [4] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [5] Sierpiński W., Cardinal and ordinal numbers, Warsz., 1958 (2 wyd. 1965).

Б. А. Ефимов.

КАРДИОИДА — плоская алгебраич. кривая 4-го порядка, к-рая описывается точкой M окружности радиуса r, катящейся по окружности с таким же радиусом r; *эпициклоида* с модулем $m = 1$. Уравнение К. в полярных координатах:



$$\rho = 2r(1 - \cos\varphi),$$

в декартовых прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2+2rx)^2=4r^2(x^2+y^2).$$

Длина дуги от точки возврата:

$$l=16r\sin^2\frac{\varphi}{4}.$$

Радиус кривизны:

$$r_k=\frac{8r}{3}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Площадь, ограниченная кривой: $S=6\pi r^2$. Длина кривой: $16r$. К. является *конхоидой* окружности, частным случаем *Паскаля улитки* и *синусоидальных спиралей*.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

КАРЛЕМАНА ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА — граничная задача аналитич. функций со сдвигом, изменяющим направление обхода контура на обратное; впервые рассмотрена Т. Карлеманом [1]. Пусть L — простая замкнутая кривая Ляпунова на плоскости комплексного переменного z, D — конечная область, ограниченная кривой L. Пусть дифференцируемая комплексная функция $\alpha(t)$, заданная на L, осуществляет взаимно однозначное отображение контура L самого на себя с изменением направления обхода L на обратное и удовлетворяет дополнительному условию Карлемана:

$$\alpha[\alpha(t)]=t, \quad t\in L, \tag{*}$$

(предполагается еще, что производная $\alpha'(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера). К. г. з. состоит в нахождении аналитической в D, за исключением конечного числа полюсов, и непрерывной в $D\cup L$ функции $\Phi(z)$ по граничному условию

$$\Phi[\alpha(t)]=G(t)\Phi(t)+g(t), \ t\in L,$$

где заданные на L функции $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера и $G(t)\neq0$ на L.

Изучалась также К. г. з. с условием

$$\alpha^m(t)=t, \ \alpha^1(t)=\alpha(t), \ \alpha^k(t)=\alpha(\alpha^{k-1}(t)), \ k=2,3,\ldots,m,$$

более общим, чем (*), и К. г. з. для нескольких неизвестных функций (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Carleman T., в сб.: Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Bd 1, Z.—Lpz., 1932, S. 138—51; [2] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [3] Векуа Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, 2 изд., М., 1970.

Е. Д. Соломенцев.

КАРЛЕМАНА НЕРАВЕНСТВО — неравенство для произвольных неотрицательных чисел $a_n\geqslant0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n}<e\sum_{n=1}^{\infty}a_n;$$

найдено Т. Карлеманом [1]. Константу e здесь уменьшить нельзя. Аналог К. н. для интегралов имеет вид:

$$\int_0^\infty \exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right\}<e\int_0^\infty f(x)\,dx, \quad f(x)\geqslant0.$$

Имеются и другие обобщения К. н. [3].

Лит.: [1] Carleman T., в кн.: Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem fünften Kongress der skandinavischen Mathematiker, Hels., 1923, S. 181—96; [2] Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948.

Е. Д. Соломенцев.

КАРЛЕМАНА ТЕОРЕМА — 1) К. т. о квазианалитических классах функций — необходимое и достаточное условие квазианалитичности в смысле Адамара, найденное Т. Карлеманом [1] (см. также [5]). Класс K действительных функций $f(x)$, бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$, наз. квазианалитическим в смысле Адамара, если из равенств $f^n(c)=0$, $n=0, 1,\ldots$, в какой-либо точке c, $a<c<b$, следует, что $f(x)\equiv0$. Формулировка теоремы: класс K квазианалитический тогда и только тогда, когда

$$\sqrt[n]{M_n(f)}<A(f)\,a_n, \quad n=0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где

$$M_n(f)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n)}(x)|,$$

$A(f)$ — константа, а последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет одному из равносильных условий:

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln T(r)\,dr}{r^2}=+\infty,\qquad\qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\inf_{k\geqslant n}\sqrt[k]{a_k}\right)^{-1}=+\infty,$$

где

$$T(r)=\sup_{n\geqslant 1}(r^n/a_n).$$

В теории квазианалитич. классов функций это — один из первых законченных результатов. Квазианалитич. классы, определяемые условиями (1), (2), часто наз. классами Карлемана.

2) К. т. об условиях определенности проблемы моментов: если последовательность положительных чисел s_n, $n=0, 1,\ldots$, удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{s_{2n}}}=+\infty,$$

то проблема моментов

$$s_k=\int_{-\infty}^{\infty}t^k\,d\sigma(t),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\qquad (3)$$

является определенной. Это означает, что существует неубывающая функция $\sigma(t)$, $-\infty<t<+\infty$, для к-рой выполняются равенства (3), единственная с точностью до прибавления любой функции, постоянной в окрестности каждой точки ее непрерывности. Теорема установлена Т. Карлеманом (см. [1], [2]).

3) К. т. о равномерном приближении целыми функциями: если $f(x)$ — любая непрерывная функция на действительной оси, а $\varepsilon(r)$, $0<r<+\infty$,— положительная непрерывная функция, сколь угодно быстро убывающая при $r\to+\infty$, то существует целая функция $g(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$ такая, что

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon(|x|),\quad -\infty<x<+\infty.$$

Эта теорема, установленная Т. Карлеманом [3], явилась исходным пунктом исследований по приближениям целыми функциями. В частности, континуум E на плоскости z наз. континуумом Карлемана, если для любой непрерывной на E комплексной функции $f(z)$ и произвольно быстро убывающей при $r\to\infty$ положительной функции $\varepsilon(r)$, нижняя грань к-рой на любом конечном интервале положительна, существует целая функция $g(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(z)-g(z)|<\varepsilon(|z|),\quad z\in E.$$

Необходимые и достаточные условия, при к-рых замкнутое множество E является континуумом Карлемана, получены в теореме Келдыша — Лаврентьева (см. [6]). Напр., континуумом Карлемана является замкнутое множество, составленное из лучей вида

$$\arg z=\mathrm{const},\quad |z|>c>0.$$

4) К. т. о приближении аналитических функций полиномами в среднем по площади области: пусть D — конечная область на плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, ограниченная жордановой кривой Γ, и пусть $f(z)$ — регулярная аналитич. функция в D такая, что

$$\iint_D|f(z)|^p\,dx\,dy<\infty,\ p>0;$$

тогда для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такой полином $P(z)$, что

$$\iint_D |f(z)-P(z)|^p\,dx\,dy<\varepsilon.$$

Этот результат установлен Т. Карлеманом [4]. Аналогичное утверждение верно и для случая приближения с любым положительным непрерывным весом, причем граница Г может быть и более общей природы. Система степеней $\{z^n\}$, $n=0, 1, \ldots$, полна относительно любого такого веса. Ортогонализация и нормирование этой системы дает полиномы $P_n(z)$ степеней n, часто наз. полиномами Карлемана.

Лит.: [1] Carleman T., Les fonctions quasi-analytiques, P., 1926; [2] его же, Sur les équations integrales singulières ànoyau réel et symétrique, Uppsala, 1923; [3] его же, «Arkiv mat., astron., fys.», 1927, Bd 20, № 4; [4] его же, там же, 1922, Bd 17, № 9; [5] Мандельбройт С., Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, пер. с франц., М., 1955; [6] Мергелян С. Н., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 2, с. 31—122. *Е. Д. Соломенцев.*

КАРЛЕМАНА ЯДРО — измеримая, вообще говоря, комплекснозначная функция $K(x, s)$, удовлетворяющая условиям: 1) $\overline{K(x, s)}=K(s, x)$ почти всюду на $E\times E$, где E — измеримое в смысле Лебега точечное множество в конечномерном евклидовом пространстве; 2) $\int_E |K(x, s)|^2 ds<\infty$ для почти всех $x\in E$.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966. *Б. В. Хведелидзе.*

КАРЛЕСОНА МНОЖЕСТВО — замкнутое множество $E\subset[0, 2\pi)$, на к-ром всякая функция $f(t)$, заданная и непрерывная на этом множестве, представима рядом вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$, где $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty$. Введено Л. Карлесоном [1]. К. м. образуют важный класс так наз. *тонких множеств.* Для того чтобы замкнутое множество $E\subset[0, 2\pi)$ было К. м., необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная $c>0$, что коэффициенты Фурье — Стилтьеса

$$c_n(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\,d\mu(t),\quad n=0,\ \pm 1,\ \ldots,$$

всякой меры μ, сосредоточенной на E, удовлетворяли неравенству

$$\sup_{n\geqslant 0}|c_n(\mu)|>c\int_0^{2\pi}|d\mu(t)|.$$

Лит.: [1] Carleson L., «Acta math.», 1952, v. 87, № 3—4, 325—45; [2] Wik I., «Arkiv mat.», 1960, v. 4, № 2—3, 209—18; [3] Kahane J.-P., Salem R., Ensembles parfaits et séries trigonométriques, P., 1963, p. 142; [4] Кахан Ж.-П., Абсолютно сходящиеся ряды Фурье, пер. с франц., М., 1976. *Б. И. Голубов.*

КАРЛЕСОНА ТЕОРЕМА: для функции из пространства $L^2(0, 2\pi)$ ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду. В качестве гипотезы эта теорема была высказана Н. Н. Лузиным [1], доказана Л. Карлесоном [2]. Утверждение К. т. справедливо также для всех функций пространства L^p при $p>1$ (см. [3]). То, что для $p=1$ это не так, показывает построенный А. Н. Колмогоровым [4] пример функции из L^1, тригонометрич. ряд Фурье к-рой почти всюду расходится.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1915; [2] Carleson L., «Acta math.», 1966, v. 116, p. 135—57 (см. также «Математика», 1967, т. 11, № 4, с. 113—132); [3] Hunt R., в кн.: Orthogonal expansions and their continuons analogues, Carbondale — L.— Amst., 1968, p. 235—255; [4] Колмогоров А. Н., «Fundam. Math.», 1923, t. 4, p. 324—28. *С. А. Теляковский.*

КАРЛСОНА МЕТОД, S_n-метод,— один из численных методов решения кинетического уравнения переноса нейтронов в ядерных реакторах. Первый вариант метода для сферически симметричной геометрии, предложенный Б. Карлсоном (B. Carlson, 1953), был основан на кусочно линейном представлении потока нейтронов как функции косинуса угла между вектором скорости нейтрона и радиусом. После интегрирования по угловой переменной в пределах элементарной ячейки получается система уравнений, в каждое из к-рых входят лишь два направления скорости нейтрона, если считать известным из предыдущего приближения интеграл столкновений (к-рый вычисляется по формуле трапеций). Иными словами, как и в *Владимирова методе*, решение уравнения переноса ведется методом последовательных приближений по интегралу столкновений. В каждом приближении система распадается на отдельные уравнения, если ввести дополнительное уравнение для направления вдоль радиуса, к-рое интегрируется от внешней границы шара к его центру. Каждое следующее направление в уравнениях системы будет теперь связано с предыдущим, для к-рого неизвестная функция уже определена. Интегрирование для отрицательных значений косинуса, определяющего направление, ведется от внешней границы к центру, а для положительных значений косинуса — от центра к краю.

Немонотонный характер решения уравнения переноса К. м. (возможность появления осцилляций и отрицательных значений потока нейтронов) привел к необходимости дальнейшего развития К. м. Широко используется дискретный К. м.: DS_n-м е т о д. В этом методе разностные уравнения выводятся из физических соображений методом баланса частиц в ячейке фазового пространства. В низком приближении DS_n-метод не обеспечивает требуемой точности в неодномерных геометриях. Одним из выходов из этой ситуации является добавление в систему уравнений DS_n-метода слагаемых так. обр., чтобы с помощью линейного преобразования неизвестных она переводилась в систему уравнений, возникающую в *сферических гармоник методе*.

Большое число расчетов ядерных реакторов К. м. (и его модификациями) дает хорошие результаты, согласующиеся с результатами других численных методов решения уравнения переноса нейтронов.

Лит.: [1] М а р ч у к Г. И., Методы расчёта ядерных реакторов, М., 1961; [2] Вычислительные методы в физике реакторов, пер. с англ., М., 1972; [3] Б е л л Д ж., Г л е с с т о н С., Теория ядерных реакторов, пер. с англ., М., 1974.

В. А. Чуянов.

КАРЛСОНА НЕРАВЕНСТВО: пусть $\{a_n, 1<n<<\infty\}$ — не все равные нулю неотрицательные действительные числа, тогда:

$$\left(\sum a_n\right)^4 < \pi^2 \sum a_n^2 \sum n^2 a_n^2. \qquad (1)$$

Установлено Ф. Карлсоном [1]. Интегральный аналог К. н.: если $f(x)>0$, $f(x)\not\equiv 0$, f, $xf \in L^2(0, \infty)$, то

$$\left\{\int_0^\infty f(x)\,dx\right\}^4 \leqslant \pi^2 \left\{\int_0^\infty f^2(x)\,dx\right\} \left\{\int_0^\infty x^2 f^2(x)\,dx\right\}. \quad (2)$$

Константа π^2 является наилучшей в том смысле, что существует последовательность a_n такая, для к-рой правая часть (1) сколь угодно близка к левой, и существует функция $f(x)$ такая, для к-рой знак равенства в (2) достигается.

Лит.: [1] C a r l s o n F., «Ark. mat., astron. och fys.», 1934, Bd 25A, № 7, S. 1—13; [2] Х а р д и Г. Г., Л и т т л ь в у д Д ж. Е., П о л и а Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948.

М. И. Войцеховский.

КАРНАПА ПРАВИЛО, п р а в и л о б е с к о н е ч н о й и н д у к ц и и, ω-п р а в и л о, — *вывода правило*, состоящее в том, что если для арифметич. формулы $\varphi(x)$ доказаны предложения $\varphi(0)$, $\varphi(1), \ldots, \varphi(n), \ldots$, то можно считать доказанным предложение $\forall x \varphi(x)$. Это правило впервые введено в рассмотрение Р. Карнапом [1]. К. п. использует бесконечное множество посылок и потому неприемлемо при построении формальных теорий по Д. Гильберту (D. Hilbert). Понятие вывода в системе с К. п. является неразрешимым. В математич. логике при исследовании формальной арифметики используется к о н с т р у к т и в н о е К. п.: если имеется алгоритм, к-рый по натуральному числу n

дает вывод формулы $\varphi(n)$, то можно считать доказанным предложение $\forall x \varphi(x)$ (ограниченное ω-правило, правило конструктивно-бесконечной индукции). Классическое арифметич. исчисление, неполное в силу теоремы Гёделя, становится полным после добавления конструктивного К. п. (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Carnap R., Der logische Syntax der Sprache, W., 1934; [2] Кузнецов А. В., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 4, с. 218—19; [3] Shoenfield J. R., «Bull. Acad. polon. sci. Cl. III», 1959, t. 7, № 7, s. 405—07.

В. Е. Плиско.

КАРНО ТЕОРЕМА — теорема о произведении простых отношений, в к-рых точки пересечения алгебраич. линии со сторонами треугольника делят эти стороны. Пусть алгебраич. линия l порядка n не проходит ни через одну из вершин треугольника ABC и пересекает каждую из его сторон или ее продолжение в n точках: сторону AB — в точках $C_1, C_2, \ldots, C_n$; сторону BC — в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$; сторону CA — в точках $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Тогда произведение $3n$ простых отношений

$$\frac{\overrightarrow{AC_i}}{\overrightarrow{C_iB}}, \quad \frac{\overrightarrow{BA_i}}{\overrightarrow{A_iC}}, \quad \frac{\overrightarrow{CB_i}}{\overrightarrow{B_iA}}, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

равно -1, если n — число нечетное, и $+1$, если n — четное.

Эта формулировка эквивалентна следующей: произведение $3n$ отношений

$$\frac{\overrightarrow{C_iA}}{\overrightarrow{C_iB}}, \quad \frac{\overrightarrow{A_iB}}{\overrightarrow{A_iC}}, \quad \frac{\overrightarrow{B_iC}}{\overrightarrow{B_iA}}, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

равно $+1$.

Частный случай этой теоремы был доказан Л. Карно [1].

Если l — прямая линия, то получается *Менелая теорема.*

Обобщение К. т.: пусть алгебраич. линия порядка n пересекает каждую из прямых A_iA_{i+1}, $i=1,2,\ldots,m$, $A_{m+1}=A_1$, лежащих в плоскости этой линии, ровно в n точках B_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$. Тогда

$$\prod_{i,j} \frac{\overrightarrow{A_iB_{ij}}}{\overrightarrow{B_{ij}A_{i+1}}} = (-1)^{mn}.$$

Лит.: [1] Carnot L., Géométrie de position, P., 1803.

П. С. Моденов.

КАРСОНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование функции $f(t)$, определенной при $-\infty<t<\infty$ и равной нулю при $t<0$, в функцию

$$F(s)=s\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt,$$

где s — комплексная переменная. Формула обращения:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\frac{1}{s}F(s)\,e^{st}\,ds.$$

К. п. функции $f(t)$ отличается от *Лапласа преобразования* этой же функции наличием множителя s.

А. Б. Иванов.

КАРТА, криволинейная система координат, параметризация множества M,— взаимно однозначное отображение

$$x: M \longrightarrow D,\ p \longrightarrow x(p)=(x^1(p),\ \ldots,\ x^n(p))$$

множества M на открытое подмножество D арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Число n наз. размерностью карты, а компоненты $x^i(p)$ вектора $x(p)\in\mathbb{R}^n$ — координатами точки $p\in M$ относительно карты x.

Примером К. служит декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве, введенная

П. Ферма (P. Fermat) и Р. Декартом (R. Descartes) и положенная ими в основу аналитич. геометрии. К. (криволинейные координаты) на поверхности в геометрич. исследованиях впервые использовал Л. Эйлер (L. Euler). Б. Риман (B. Riemann) положил понятие К. в основу нового инфинитезимального подхода к обоснованию геометрии (см. [1]). Согласно концепции Б. Римана, основным объектом исследования геометрии является многообразие — множество M, снабженное К. Современное понятие многообразия является естественным обобщением определения Б. Римана.

Карта $x: U \to D$ нек-рого подмножества U множества M наз. локальной картой множества M с областью определения U. Если множество M снабжено структурой топологич. пространства, то при этом дополнительно требуется, чтобы область определения U была открытым подмножеством в M, а отображение x было бы гомеоморфизмом. Аналогично определяется К. со значениями в F^n, где F — произвольное нормированное поле, и вообще К. со значениями в топологическом векторном пространстве. Две локальные К. (x, U), (y, V) с областями определения U, V множества M наз. согласованными класса C^l, если: 1) их общая область определения $W = U \cap V$ изображается на каждой из них открытым множеством (т. е. множества $x(W)$ и $y(W)$ открыты в $\mathbb{R}^n$), 2) координаты точки из общей области определения W относительно одной из этих К. являются l раз непрерывно дифференцируемыми функциями от координат этой же точки относительно другой К., т. е. вектор-функция

$$y \circ x^{-1}: x(W) \longrightarrow y(W)$$

l раз непрерывно дифференцируема. Множество $A = \{(x_\alpha, U_\alpha)\}$ попарно согласованных между собой локальных К. (x_α, U_α) множества M, покрывающих все $M (\bigcup_\alpha U_\alpha = M)$ наз. атласом множества M. Задание атласа определяет на M структуру *дифференцируемого многообразия*, а локальные К., согласованные со всеми К. этого атласа, наз. допустимыми (или C^l-гладкими).

Инфинитезимальным аналогом понятия К. является понятие инфинитезимальной карты порядка k (или, иначе, k-струи карты, или корепера порядка k). Говорят, что две согласованные между собой локальные карты (x, U) (y, V) множества M касаются друг друга до порядка k в точке $p \in U \cap V$, если $x(p) = y(p)$ и все частные производные до порядка k включительно вектор-функции $y \circ x^{-1}: x \to y(x)$ обращаются в точке $x(p)$ в нуль. Класс $j_p^k(x)$ локальных К., касающихся в точке $p \in U$ допустимой локальной К. (x, U) многообразия M, наз. инфинитезимальной К. порядка k в точке p.

Выбор К. многообразия M позволяет рассматривать различные полевые величины на M как числовые функции и применять к ним методы анализа. Вообще говоря, значение полевой величины в точке зависит от выбора К. (Величины, не зависящие от выбора К., наз. скалярными и описываются функциями на многообразии M.) Однако для широкого и наиболее важного класса величин (см. *Геометрических объектов теория*) их значение в точке зависит только от устройства К. в инфинитезимальной окрестности k-го порядка этой точки. Такие величины (примерами к-рых являются тензорные поля) описываются функциями на множестве всех кореперов порядка k на M. Вместе с тем изучаются такие свойства величин, к-рые не зависят от выбора К. В связи с этим весьма эффективным оказывается инвариантный бескоординатный подход к задачам дифференциальной геометрии.

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 279—93; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения,

пер. с нем., М., 1975; [4] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960.

Д. В. Алексеевский.

КАРТАНА ЛЕММА: если для $2p$ линейных форм φ_i, σ^ν от n переменных равна нулю сумма внешних произведений

$$\sum_{i=1}^{p} \varphi_i \wedge \sigma^i = 0,$$

и формы σ^i линейно независимы, то φ_i будут линейными комбинациями σ^i с симметричными коэффициентами:

$$\varphi_i = \sum a_{ij} \sigma^j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Установлена Э. Картаном (E. Cartan) в 1899.

Лит.: [1] Картан Э., Внешние дифференциальные системы..., пер. с франц., М., 1962. *М. И. Войцеховский.*

КАРТАНА МАТРИЦА — 1) К. м. конечномерной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0 — матрица

$$A = \| 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) \| \quad i, j = 1, \ldots, r,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — какая-либо система простых корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно фиксированной *Картана подалгебры* $\mathfrak{t}$, а (,) — скалярное произведение на пространстве, дуальном к $\mathfrak{t}$, определенное *Киллинга формой* на $\mathfrak{g}$. (О К. м. произвольной системы корней см. *Корневая система.*) С точностью до преобразования, индуцированного перестановкой индексов $1, \ldots, r$, К. м. является инвариантом алгебры $\mathfrak{g}$, т. е. не зависит от выбора $\mathfrak{t}$ и системы простых корней. Этот инвариант полностью определяет $\mathfrak{g}$: две полупростые алгебры Ли изоморфны тогда и только тогда, когда их К. м. совпадают, с точностью до преобразования, индуцированного перестановкой индексов. Полупростая алгебра Ли проста тогда и только тогда, когда ее К. м. неразложима, т. е. не представима в виде блочно-диагональной матрицы после нек-рой перестановки индексов.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \ldots + \mathfrak{g}_m$ — разложение алгебры $\mathfrak{g}$ в прямую сумму простых идеалов и A_j — К. м. простой алгебры Ли $\mathfrak{g}_j$. Тогда блочно-диагональная матрица

$$\begin{Vmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{Vmatrix}.$$

является К. м. алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (явный вид К. м. простых алгебр Ли см. *Ли полупростая алгебра*).

Элементы $a_{ij} = 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)$ К. м. обладают следующими свойствами:

$$\left. \begin{array}{c} a_{ii} = 2; \quad a_{ij} \leqslant 0, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \text{при} \quad i \neq j \\ a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 0. \end{array} \right\} \qquad (1)$$

К. м. тесно связаны с заданием $\mathfrak{g}$ образующими и соотношениями. А именно, в алгебре $\mathfrak{g}$ существуют линейно независимые образующие e_i, f_i, h_i, $i = 1, \ldots, r$ (так наз. канонические образующие), связанные следующими соотношениями:

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i; \quad [h_i, e_j] = a_{ij} e_j;$$
$$[h_i, f_j] = -a_{ij} f_j; \quad [h_i, h_j] = 0. \qquad (2)$$

Любые две системы канонических образующих переводятся друг в друга автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$. Кроме (2), канонические образующие удовлетворяют также соотношениям

$$(\operatorname{ad} e_i)^{-a_{ij}+1} e_j = 0, \quad (\operatorname{ad} f_i)^{-a_{ij}+1} f_j = 0, \quad i \neq j, \qquad (3)$$

где, по определению, $(\operatorname{ad} x) y = [x, y]$. Соотношения (2) и (3) являются определяющими для алгебры $\mathfrak{g}$ при выбранной системе образующих e_i, f_i, h_i, $i = 1, \ldots, r$ (см. [2]).

Для любой матрицы A, удовлетворяющей условиям (1), алгебра Ли $\mathfrak{g}(A)$ над полем k с образующими e_i, f_i, h_i, $i=1,\ldots, r$ и определяющими соотношениями (2) и (3) конечномерна тогда и только тогда, когда A есть К. м. конечномерной полупростой алгебры Ли [3].

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Кац В. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, № 6, с. 1323—67.

2) К. м. конечномерной ассоциативной алгебры A с единицей над полем k — матрица (c_{ij}), $i, j=1,\ldots, s$, определяемая полным набором $N_1,\ldots, N_s$ конечномерных неприводимых левых A-модулей. А именно, c_{ij} есть кратность вхождения N_j в композиционный ряд такого неразложимого проективного левого A-модуля P_i, для к-рого Hom $(P_i, N_i)\neq 0$. Модуль P_i существует для каждого N_i и определен однозначно с точностью до изоморфизма.

В некоторых случаях К. м. C оказывается симметричной, положительно определенной и даже $C=D^{\mathrm{T}}D$, где D — целочисленная, не обязательно квадратная матрица (Т — знак транспонирования). Такова К. м. групповой алгебры $A=kG$ конечной группы G над полем k характеристики $p>0$ (см. [1]), причем $P_1,\ldots, P_s$ в этом случае — полный набор неизоморфных главных неразложимых левых A-модулей, т. е. неразложимых A-модулей, в прямую сумму к-рых раскладывается левый A-модуль A. Другой пример, когда такое равенство для К. м. имеет место: A — ограниченная универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики $p>0$, полученной из полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ редукцией в характеристику p (см. [2]).

Лит.: [1] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [2] Humphreys J. E., «J. Algebra», 1971, v. 19, p. 51—79. *В. Л. Попов.*

КАРТАНА МЕТОД ВНЕШНИХ ФОРМ — дифференциально-алгебраический метод исследования систем дифференциальных уравнений и многообразий с различными структурами. Алгебраич. основу метода составляет алгебра Грассмана. Пусть V есть 2^n-мерное векторное пространство над произвольным полем K с базисными векторами e^0, e^i, e^{ij}, e^{ijk}, $\ldots$, $e^{12\ldots n}$, $i<j<k$. Кроме векторов базиса для произвольного натурального числа q, определяются векторы $e^{i_1 i_2 \ldots i_q}$, i_1, $i_2,\ldots$ $i_q=1, 2,\ldots, n$, по следующему закону: если среди натуральных чисел i_1, $i_2,\ldots$, i_q есть хотя бы одна пара одинаковых, то $e^{i_1\ldots i_q}=0$; если все числа $i_1,\ldots, i_q$ попарно различны и числа $j_1<j_2<\ldots<j_q$ являются перестановкой чисел i_1, $i_2,\ldots$, i_q, то $e^{i_1\ldots i_q}=e^{j_1\ldots j_q}$, когда подстановка $(i_k)\to(j)_k$ — четная, и $e^{i_1\ldots i_q}=-e^{j_1\ldots j_q}$, когда эта подстановка нечетная. В векторном пространстве V вводится внешнее умножение: $e^{i_1 i_2\ldots i_p}\wedge e^{k_1 k_2\ldots k_q}=e^{i_1\ldots i_p k_1\ldots k_q}$, при этом требуется выполнение обычных для гиперкомплексной системы (алгебры) законов. Построенная алгебра ранга 2^n наз. **алгеброй Грассмана.** Вектор

$$\lambda e^{i_1 i_2\ldots i_p}=\lambda e^{i_1}\wedge e^{i_2}\wedge\ldots\wedge e^{i_p}$$

наз. **мономом** степени p, $\lambda\in K$. Сумма мономов одинаковой степени $p>1$ наз. **внешней формой** степени p; сумма мономов первой степени наз. **линейной формой.** Элементы поля K являются, по определению, формами нулевой степени. Векторы e^i и любые n их линейно независимых комбинаций

$$\omega^j=a_i^j e^i,\quad \det\left(a_i^j\right)\neq 0,\quad a_i^j\in K,$$

образуют линейный базис алгебры Грассмана. Здесь и в дальнейшем по одинаковым индексам, встречающимся один раз снизу и один раз сверху, производится суммирование в соответствующих пределах.

А л г е б р а и ч е с к о й п р о и з в о д н о й 1-го порядка от внешней формы

$$\Omega_p = a_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$$

степени p по символу e^i наз. форма $\Omega_{p-1} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial e^i}$ степени $p-1$, к-рая получается из формы Ω_p заменой нулем всех мономов, не содержащих символа e^i, и заменой единицей символа e^i в остальных мономах после перенесения символа e^i на первое место с соблюдением закона антикоммутативности при каждой последовательной перестановке. А с с о ц и и р о в а н н о й с и с т е м о й линейных форм внешней формы Ω_p наз. совокупность всех ненулевых алгебраических производных $(p-1)$-го порядка от формы Ω_p. Р а н г о м внешней формы Ω_p наз. ранг ее ассоциированной системы. Он совпадает с минимальным числом линейных форм, через к-рые, используя операцию внешнего умножения, можно выразить форму Ω_p. Для исследования системы дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$ используется дифференциальная алгебра Грассмана, когда в качестве K рассматривается множество аналитич. функций от n действительных переменных x^i, определенных в нек-рой области пространства $\mathbb{R}^n$, а векторы e^i обозначаются символами dx^i. Линейные формы в ней наз. 1-ф о р м а м и, или ф о р м а м и П ф а ф ф а. В них символы dx^i являются дифференциалами переменных x^i. Внешние формы степени $p>1$ наз. p-ф о р м а м и, или в н е ш н и м и д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы м и ф о р м а м и степени p. В н е ш н и м д и ф ф е р е н ц и а л о м p-ф о р м ы

$$\Omega_p = a_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

наз. $(p+1)$-форма

$$D\Omega_p = da_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Внешнее дифференцирование обладает следующими свойствами:

$$D\left(\Omega_p \pm \Omega_p^*\right) = D\Omega_p \pm D\Omega_p^*,$$

$$D\left(\Omega_p \wedge \Omega_q\right) = D\Omega_p \wedge \Omega_q + (-1)^p\, \Omega_p \wedge D\Omega_q,$$

$$D\left(D\Omega_p\right) \equiv 0,$$

где Ω_p, Ω_p^* — произвольные p-формы, а Ω_q — произвольная q-форма.

Форма Пфаффа $\omega = a_i dx^i$ тогда и только тогда является полным дифференциалом нек-рой функции f, когда ее внешний дифференциал равен нулю. Пусть

$$\theta^\alpha \equiv b_a^\alpha \left(x^b,\ z^p\right) dx^a + c_\xi^\alpha \left(x^b,\ z^p\right) dz^\xi - dz^\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$\alpha,\ \beta = 1,\ \ldots,\ s;\ a,\ b = 1,\ \ldots,\ m;\ \xi, \eta = s+1,\ \ldots,\ r;$$

$$p,\ q = 1,\ \ldots,\ r,$$

— произвольная система линейно независимых уравнений П ф а ф ф а с m независимыми переменными x^a и r неизвестными функциями z^p. Система $D\theta^\alpha = 0$ наз. з а м ы к а н и е м системы (1). Замыкание наз. ч и с т ы м з а м ы к а н и е м (обозначается $\overline{D\theta^\alpha} = 0$), если в нем алгебраически учтена исходная система (1), то есть если в квадратичные формы $D\theta^\alpha$ подставлены значения dz^α из уравнений (1). Система $\theta^\alpha = 0$, $D\theta^\alpha = 0$ или эквивалентная ей система $\theta^\alpha = 0$, $\overline{D\theta^\alpha} = 0$ наз. з а м к н у т о й с и с т е м о й. Система (1) тогда и только тогда вполне интегрируема, когда $\overline{D\theta^\alpha} = 0$. Приравнивая нулю алгебраические производные от $\overline{D\theta^\alpha}$ по dx^a и dz^ξ, $a=1,\ \ldots,\ m$, $\xi = s+1, \ldots,\ r$, и присоединяя уравнения Пфаффа к исходной системе (1), получают вполне интегрируемую систему уравнений, к-рая наз. х а р а ктеристической системой системы (1). Множество ее независимых первых интегралов образует наименьшую совокупность переменных, через к-рые можно выразить все уравнения системы (1). Пусть $m^{\alpha}_{\xi,h}$ — результат подстановки в алгебраич. производную $\overline{\partial D\theta^{\alpha}/\partial dz^{\xi}}$ вместо dx^a, dz^{ξ} произвольных переменных X^a_h, z^{ξ}_h, $h=1, 2, \ldots, m-1$. С системой (1) ассоциируется последовательность матриц

$$M_h=\begin{pmatrix} m^{\alpha}_{\xi,1} \\ \ldots \\ m^{\alpha}_{\xi,h} \end{pmatrix}.$$

Числа

$$\begin{aligned} s_1&=\operatorname{rang} M_1, \\ s_2&=\operatorname{rang} M_2-\operatorname{rang} M_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{m-1}&=\operatorname{rang} M_{m-1}-\operatorname{rang} M_{m-2}, \\ s_m&=r-s-\operatorname{rang} M_{m-1} \end{aligned}$$

наз. характерами, число

$$Q=s_1+2s_2+\ldots+ms_m$$

наз. числом Картана системы (1). Присоединяя к замкнутой системе $\theta^{\alpha}=0$, $\overline{D\theta^{\alpha}}=0$ уравнения $dz^{\xi}=b^{\xi}_a dx^a$, где b^{ξ}_a — новые неизвестные функции, получают первое продолжение системы (1). Пусть N — число функционально независимых функций из b^{ξ}_a; всегда $N\leqslant Q$. Если $N=Q$, то система (1) — в инволюции и ее общее решение зависит от s_m произвольных функций m аргументов, s_{m-1} функций $m-1$ аргумента, и т. д., s_1 функций одного аргумента и s произвольных постоянных. Если же $N<Q$, то систему (1) надо продолжать, причем в результате конечного числа продолжений получается либо система в инволюции, либо противоречивая система.

Пусть, напр., имеется система

$$dz_1=u\,dx+x^2\,dy, \quad dz_2=u\,dy+y^2\,dx$$

с независимыми переменными x, y и неизвестными функциями u, z_1, z_2 ($s=2, m=2, r=3$). Чистое замыкание ее имеет вид:

$$du\wedge dx+2x\,dx\wedge dy=0, \quad du\wedge dy+2y\,dy\wedge dx=0.$$

Для этой системы:

$$M_1=\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \; s_1=\operatorname{rang} M_1=1, \; s_2=0, \; Q=1, \; N=0.$$

Система не находится в инволюции. Продолженная система
$dz_1=u\,dx+x^2\,dy$, $dz_2=u\,dy+y^2\,dx$, $du=2\,(y\,dx+x\,dy)$ вполне интегрируема и ее общее решение имеет вид:

$$u=2xy+c_1, \quad z_1=x\,(xy+c_1)+c_2, \quad z_2=y\,(xy+c_1)+c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Использование К. м. в. ф. значительно упрощает формулировки и доказательства многих теорем математики и теоретич. механики. Напр., теорема Остроградского записывается формулой

$$\oint_{\Gamma}\Omega=\int_M D\Omega,$$

где M — аналитическое ориентируемое $(m+1)$-мерное многообразие, Γ — его m-мерная гладкая граница, Ω — m-форма, а $D\Omega$ — ее внешний дифференциал. Формула замены переменных в кратном интеграле

$$J=\int\ldots\int_D f\,(x^1, \ldots, x^n)\,dx^1\wedge dx^2\wedge\ldots\wedge dx^n$$

при отображении $p:\Delta\to D$, определенном формулами $x^i=\varphi^i\,(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, где D, $\Delta\subset R^n$, получается непосредственной заменой переменных x^i и их дифференциалов $dx^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial u^j} du^j$. Так как

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \frac{\partial (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)}{\partial (u^1, \ldots, u^n)} du^1 \wedge \ldots \wedge du^n,$$

то

$$J = \int \ldots \int_\Delta \frac{\partial (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)}{\partial (u^1, \ldots, u^n)} du^1 \wedge \ldots \wedge du^n.$$

К. м. в. ф. широко применяется при исследовании многообразий с различными структурами. Пусть M — дифференцируемое многообразие класса C^∞, $F = C^\infty(M)$ — множество дифференцируемых функций на M, D^1 — множество всех векторных полей на M, $\mathfrak{A}_s$ — множество кососимметричных F-полилинейных отображений модуля $D^1 \times \ldots \times D^1$ (s раз, $s \geqslant 1$ — натуральное число).

Пусть $\mathfrak{A}_0 = F$, а через $\mathfrak{A}$ обозначена прямая сумма F-модулей $\mathfrak{A}_s$:

$$\mathfrak{A} = \sum\nolimits_{s=0}^{\infty} \mathfrak{A}_s.$$

Элементы модуля $\mathfrak{A}$ наз. **внешними дифференциальными формами** на M; элементы модуля $\mathfrak{A}_s$ наз. s-**формами**. Пусть

$$f,\ g \in C^\infty(M); \quad \theta \in \mathfrak{A}_r, \quad \Omega \in \mathfrak{A}_s, \quad X_i \in D^1.$$

Тогда внешнее умножение $\wedge$ определится формулами:

$$f \wedge g = fg, \quad (f \wedge \theta)(X_1, \ldots, X_r) = f\theta(X_1, \ldots, X_r),$$

$$(\Omega \wedge g)(X_1, \ldots, X_s) = g\Omega(X_1, \ldots, X_s),$$

$$(\theta \wedge \Omega)(X_1, \ldots, X_{r+s}) =$$

$$= \frac{1}{(r+s)!} \sum\nolimits_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma)\, \theta\left(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}\right) \times$$

$$\times\, \Omega\left(X_{\sigma(r+1)}, \ldots, X_{\sigma(r+s)}\right),$$

где S_{r+s} — группа подстановок множества $1, 2, \ldots, r+s$, а $\varepsilon(\sigma) = 1$ или -1, в зависимости от того, четной или нечетной подстановкой является σ. Модуль $\mathfrak{A}$ кососимметрических F-полилинейных функций с внешним умножением наз. **алгеброй Грассмана над многообразием** M. Если M совпадает с $\mathbb{R}^n$, то получается рассмотренная выше дифференциальная алгебра Грассмана. Внешним дифференцированием наз. R-линейное отображение $D: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, обладающее следующими свойствами: $D\mathfrak{A}_s \subset \mathfrak{A}_{s+1}$ для каждого $s \geqslant 0$, если $f \in \mathfrak{A}_0 = C^\infty(M)$, то Df есть 1-форма, определенная равенством $Df(X) = X(f)$, где $X \in D^1$; $D \cdot D = 0$, $D(\theta \wedge \Omega) = D\theta \wedge \Omega + (-1)^r \theta \wedge D\Omega$, если $\theta \in \mathfrak{A}_r$, $\Omega \in \mathfrak{A}$. Пусть, напр., M — многообразие с заданной аффинной связностью. Аффинная связность на многообразии M — это правило ∇, к-рое сопоставляет каждому $X \in D^1$ линейное отображение ∇_X векторного пространства D^1 в себя, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y; \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + (Xf)Y$$

для $f,\ g \in C^\infty(M)$, $X,\ Y \in D^1$. Оператор ∇_X наз. **ковариантной производной** относительно X. Пусть Φ — диффеоморфизм многообразия M, ∇ — аффинная связность на M. Формула

$$\nabla'_X(Y) = \left(\nabla_X \Phi\left(Y^\Phi\right)\right)^{\Phi^{-1}},$$

где $X,\ Y \in D^1$, определяет на M новую аффинную связность. Аффинная связность ∇ наз. инвариантной относительно Φ, если $\nabla' = \nabla$. В этом случае Φ наз. аффинным преобразованием многообразия M. Пусть

$$[X,\ Y] = XY - YX,$$

$$T(X,\ Y) = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,\ Y],$$

$$R(X,\ Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,\ Y]}$$

для всех X, $Y \in D^1$, и пусть D_1 — модуль, двойственный F-модулю D^1. F-полилинейное отображение $(\omega, X, Y) \to \omega(T(X, Y))$, где $\omega \in D_1$ — форма Пфаффа, наз. тензорным полем кручения и обозначается через T; F-полилинейное отображение $(\omega, Z, X, Y) \to \omega(R(X, Y) \cdot Z)$ наз. тензорным полем кривизны и обозначается через R. Пусть $p \in M$ и $X_1, \ldots, X_n$ — базис для векторных полей в нек-рой окрестности U_p точки p. Функции Γ^K_{IJ}, T^K_{IJ}, R^K_{IJ} определяются на U_p формулами

$$\nabla_{X_J}(X_J) = \Gamma^K_{IJ} X_K, \quad T(X_I, X_J) = T^K_{IJ} X_K,$$

$$R(X_I, X_J) \cdot X_L = R^K_{LIJ} X_K, \quad I, J, K = 1, \ldots, n.$$

Для 1-форм ω^I, ω^K_J, определенных на U_p формулами

$$\omega^I(X_J) = \delta^I_J, \quad \omega^J_I = \Gamma^J_{KI} \omega^K,$$

справедливы структурные уравнения Картана:

$$D\omega^J = \omega^K \wedge \omega^J_K + \frac{1}{2} T^I_{JK} \omega^J \wedge \omega^K,$$

$$D\omega^J_I = \omega^K_I \wedge \omega^J_K + \frac{1}{2} R^J_{IKL} \omega^K \wedge \omega^L.$$

Система уравнений Пфаффа

$$\omega^a = \lambda^a_i \omega^i, \; i, j, k = 1, \ldots, m; \; a, b = m+1, \ldots, n,$$

задает m-мерное подмногообразие $\mathfrak{M}_m \subset M$. Продолжая эту систему с использованием структурных уравнений Картана, получают последовательность фундаментальных геометрич. объектов подмногообразия

$$\mathfrak{M}_m : \{\lambda^a_i\}, \; \{\lambda^a_i, \; \lambda^a_{ij}\}, \; .$$

первого, второго и т. д. порядков. В общем случае существует фундаментальный геометрич. объект

$$\{\lambda^a_i, \; \ldots, \; \lambda^a_{i_1, \ldots, i_k}\}$$

конечного порядка k, определяющий подмногообразие $\mathfrak{M}_m$ с точностью до постоянных. При исследовании подмногообразий многообразия M К. м. в. ф. обычно используется совместно с методом подвижного репера (см., напр., [4]).

Метод назван по имени Э. Картана (E. Cartan), к-рый широко использовал внешние формы с 1899.

Лит.: [1] Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, пер. с франц., М., 1962; [2] Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.— Л., 1948; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [4] Картан Э., Риманова геометрия в ортогональном репере, пер. с франц., М., 1960.

В. С. Малаховский.

КАРТАНА ПОДАЛГЕБРА конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем k — нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{g}$, совпадающая со своим нормализатором в $\mathfrak{g}$. Напр., если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех комплексных квадратных матриц фиксированного порядка, то подалгебра всех диагональных матриц является К. п. в $\mathfrak{g}$. К. п. может быть определена также как нильпотентная подалгебра $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$, совпадающая со своей фиттинговой нуль-компонентой

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\operatorname{ad} H)^{n_{X,H}}(X) = 0, \; H \in \mathfrak{t}, \; n_{X,H} \in \mathbb{Z}\},$$

где ad обозначает присоединенное представление $\mathfrak{g}$.

Пусть, далее, характеристика k равна 0. Для произвольного регулярного элемента $X \in \mathfrak{g}$ множество $\mathfrak{n}(X, \mathfrak{g})$ всех элементов из $\mathfrak{g}$, аннулируемых степенями оператора ad X, является К. п. в $\mathfrak{g}$ и всякая К. п. в $\mathfrak{g}$ имеет вид $\mathfrak{n}(X, \mathfrak{g})$ для подходящего регулярного элемента X. Всякий регулярный элемент принадлежит одной и только одной К. п. Размерности всех К. п. в $\mathfrak{g}$ одинаковы и равны рангу алгебры $\mathfrak{g}$. Всякая максимальная нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{g}$ размерности, равной рангу $\mathfrak{g}$, есть К. п. (но не всякая максимальная нильпотентная подалгебра есть К. п.). Образ К. п. при сюръективном гомоморфизме алгебр есть К. п. Если поле k алгебраически замкнуто, то все К. п. в $\mathfrak{g}$ сопряжены, а точнее, преобразуются друг в друга операторами из алгебраич. группы D автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$, алгебра Ли к-рой есть коммутант алгебры ad $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}$ разрешима, это утверждение справедливо и без предположения об алгебраич. замкнутости k.

Пусть G — либо неприводимая алгебраич. линейная группа над k, либо связная группа Ли, и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Тогда подалгебра $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$ будет К. п. в $\mathfrak{g}$, если и только если она является алгеброй Ли *Картана подгруппы* в G.

Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ всех эндоморфизмов конечномерного векторного пространства V над k, а $\overline{\mathfrak{g}}$ — наименьшая *Ли алгебраическая алгебра* в $\mathfrak{gl}(V)$, содержащая $\mathfrak{g}$. Тогда, если $\overline{\mathfrak{t}}$ — К. п. в $\overline{\mathfrak{g}}$, то $\overline{\mathfrak{t}} \cap \mathfrak{g}$ — К. п. в $\mathfrak{g}$, и если $\mathfrak{t}$ — К. п. в $\mathfrak{g}$, а $\overline{\mathfrak{t}}$ — наименьшая алгебраич. подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, содержащая $\mathfrak{t}$, то $\overline{\mathfrak{t}}$ — К. п. в $\overline{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{t} = \overline{\mathfrak{t}} \cap \mathfrak{g}$.

Если $k \subset K$ — некоторое расширение полей, то подалгебра $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$ есть К. п. тогда и только тогда, когда $\mathfrak{t} \otimes_k K$ есть К. п. в $\mathfrak{g} \otimes_k K$.

Особо важную роль К. п. играют, когда $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли (это было использовано Э. Картаном [1]). В этом случае всякая К. п. $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$ абелева и состоит из полупростых элементов (см. *Жордана разложение*), а ограничение *Киллинга формы* на $\mathfrak{t}$ невырождено.

Лит.: [1] Cartan E., Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, P., 1894; [2] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, т. 3, пер. с франц., М., 1958; [4] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, пер. с франц., М., 1962.

В. Л. Попов.

КАРТАНА ПОДГРУППА группы G — максимальная нильпотентная подгруппа C в G, всякий нормальный делитель конечного индекса к-рой является подгруппой конечного индекса в своем нормализаторе в G. Если G — связная линейная алгебраич. группа над полем характеристики 0, то К. п. в G могут быть определены и как замкнутые связные подгруппы, алгебры Ли к-рых являются *Картана подалгебрами* алгебры Ли группы G. Примером К. п. может служить подгруппа D всех диагональных матриц в группе $GL_n(k)$ всех невырожденных матриц.

В связной линейной алгебраич. группе G К. п. может быть определена также как централизатор максимального тора группы G или как связная замкнутая нильпотентная подгруппа, совпадающая со связной компонентой единицы своего нормализатора в G. Множества C_s и C_u всех полупростых и унипотентных элементов в C (см. *Жордана разложение*) являются замкнутыми подгруппами в C и $C = C_s \times C_u$. При этом C_s — единственный максимальный тор группы G, лежащий в C. Размерность К. п. группы G наз. рангом группы G. Объединение всех К. п. группы G содержит открытое в топологии Зариского подмножество в G (но, вообще говоря, не совпадает с G). Всякий полупростой элемент в G лежит по крайней мере в одной К. п., а всякий регулярный элемент — ровно в одной К. п. Если $\varphi : G \to G'$ — сюръективный морфизм линейных алгебраич. групп, то К. п. в G' — образы К. п. в G относительно φ. Любые две К. п. в G сопряжены.

Пусть группа G определена над полем k, тогда в G существует К. п., также определенная над k, более того, G порождается своими К. п., определенными над k. Две определенные над k К. п. в G могут быть и не сопряжены над k (но в случае, когда G разрешима, они сопряжены). Многообразие К. п. группы G рационально над k. К. п. связной полупростой (или, более общо, редуктивной) группы G является максимальным тором в G.

Пусть G—связная вещественная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда К. п. группы G замкнуты в G (но не обязательно связны) и их алгебрами Ли являются подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Если G — аналитич. подгруппа в $GL_n(\mathbb{R})$, а $\bar{G}$—наименьшая содержащая G алгебраич. подгруппа в $GL_n(\mathbb{R})$, то К. п. в G являются пересечениями G с К. п. в $\bar{G}$. В случае, когда G компактна, К. п. связны, абелевы (являются максимальными торами) и сопряжены между собой, а всякий элемент в G лежит в нек-рой К. п.

Лит.: [1] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [2] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [3] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; №2, с. 3—31; [4] Demazure M., Grothendieck A., Schemas en groupes, Séminaire de géométrie algébrique, P., 1964. *В. Л. Попов.*

КАРТАНА РАЗЛОЖЕНИЕ — представление действительной некомпактной *Ли полупростой алгебры* $\mathfrak{g}$ в виде прямой суммы векторных пространств. Пусть $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — комплексная оболочка $\mathfrak{g}$, тогда в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ существует действительная компактная подалгебра $\mathfrak{g}^K$ той же размерности, что и $\mathfrak{g}$, такая, что имеют место следующие разложения в прямые суммы векторных пространств

$$\mathfrak{g}^k = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{k} + i\mathfrak{p},$$

где $\mathfrak{k}$ — подалгебра инвариантных элементов нек-рого инволютивного автоморфизма φ алгебры $\mathfrak{g}^k$, а $\mathfrak{p}$ — множество антиинвариантных элементов автоморфизма φ. Вторая формула и есть К. р. алгебры $\mathfrak{g}$ (см. [1]). К. р. сводит классификацию действительных некомпактных полупростых алгебр Ли к классификации компактных полупростых алгебр Ли и инволютивных автоморфизмов в них.

Лит.: Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964. *А. С. Феденко.*

КАРТАНА ТЕОРЕМА — 1) К. т. о старшем векторе: пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли, e_i, f_i, h_i, $i=1,\ldots, r$ — ее канонические образующие, т. е. линейно независимые образующие, между к-рыми имеются следующие соотношения:

$$[e_i, f_j]=\delta_{ij}h_i, \ [h_i, e_j]=a_{ij}e_j, \ [h_i, f_j]=-a_{ij}f_j,$$
$$[h_i, h_j]=0,$$

где $a_{ii}=2$, a_{ij} —неположительные целые числа при $i\neq j$, $i, j=1,\ldots, r$, $a_{ij}=0$ влечет за собой $a_{ji}=0$, и пусть $\mathfrak{t}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, являющаяся линейной оболочкой элементов $h_1,\ldots, h_r$. Пусть также ρ — линейное представление $\mathfrak{g}$ в комплексном конечномерном пространстве V. Тогда существует ненулевой вектор $v\in V$, для которого:

$$\rho(e_i)v=0, \quad \rho(h_i)v=k_iv, \quad i=1, \ \ldots, \ r,$$

где k_i — некоторые числа. К. т. установлена Э. Картаном [1]. Вектор v наз. старшим вектором представления ρ, а линейная функция Λ на $\mathfrak{t}$, определенная условиями $\Lambda(h_i)=k_i$, $i=1, \ldots, r$, наз. старшим весом представления ρ, соответствующим v. Упорядоченный набор чисел $(k_1,\ldots, k_r)$ наз. набором числовых отметок старшего веса Λ. К. т. дает полную классификацию неприводимых конечномерных линейных представлений комплексной полупростой конечномерной алгебры Ли. Она утверждает, что всякое конечномерное комплексное неприводимое представление $\mathfrak{g}$ обладает единственным, с точностью до пропорциональности, старшим вектором, причем соответствующие ему числовые отметки — неотрицательные целые числа; два конечномерных неприводимых представления эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие старшие веса совпадают и любой набор неотрицательных целых чисел является набором числовых отметок старшего веса нек-рого конечномерного комплексного неприводимого представления.

Лит.: [1] Cartan E., «Bull. Sci. math.», 1925, t. 49, p. 130—52; [2] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [3] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, пер. с франц., М., 1962; [4] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [5] Dixmier J., Algèbres enveloppantes, P., 1974; [6] Семинар по алгебраическим группам, пер. с англ., М., 1973. *В. Л. Попов.*

2) К. т. в теории функций многих комплексных переменных — так наз. теоремы A и B о когерентных аналитич. пучках на многообразиях Штейна, впервые доказанные А. Картаном (H. Cartan, [1]). Пусть $\mathcal{O}$ — пучок ростков голоморфных функций на комплексном многообразии X. Пучок $\mathcal{O}$-модулей $\mathcal{S}$ на X наз. когерентным аналитическим, если в окрестности каждой точки $x \in X$ существует точная последовательность пучков

$$\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0$$

для нек-рых натуральных p, q. Такими являются, например, все локально конечно порожденные подпучки в $\mathcal{O}^p$.

Теорема A. Пусть $\mathcal{S}$ — когерентный аналитич. пучок на многообразии Штейна X. Тогда для каждой точки $x \in X$ найдется конечное число глобальных сечений $s_1, \ldots, s_N$ пучка $\mathcal{S}$ таких, что любой элемент s слоя $\mathcal{S}_x$ представляется в виде

$$s = h_1(s_1)_x + \ldots + h_N(s_N)_x,$$

где все $h_j \in \mathcal{O}_x$. (Другими словами, пучок $\mathcal{S}$ локально конечно порожден над $\mathcal{O}$ своими глобальными сечениями.)

Теорема B. Пусть $\mathcal{S}$ — когерентный аналитич. пучок на многообразии Штейна X. Тогда все группы когомологий порядка $p \geqslant 1$ многообразия X с коэффициентами в пучке $\mathcal{S}$ тривиальны:

$$H^p(X, \mathcal{S}) = 0 \quad \text{при} \quad p \geqslant 1.$$

К. т. имеют много приложений. Из теоремы A получаются различные теоремы существования глобальных аналитич. объектов на многообразиях Штейна. Основным следствием теоремы B является разрешимость $\bar\partial$-проблемы: на многообразии Штейна уравнение $\bar\partial f = g$ с условием согласования $\bar\partial g = 0$ всегда разрешимо. Схема применения теоремы B такова: если

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

— точная последовательность пучков на X, то последовательность

$$\ldots \longrightarrow H^p(X, \mathcal{S}) \longrightarrow H^p(X, F) \xrightarrow{\varphi_p} H^p(X, G) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{S}) \longrightarrow \ldots$$

тоже точна. Если X — многообразие Штейна, то

$$H^p(X, \mathcal{S}) = 0, \quad p \geqslant 1,$$

и, значит, φ_0 есть отображение на, а φ_p, $p \geqslant 1$,— изоморфизмы.

Теорема B точна: если на комплексном многообразии X группы $H^1(X, \mathcal{S}) = 0$ для любого когерентного аналитич. пучка $\mathcal{S}$, то X — многообразие Штейна. Теоремы A и B вместе с их многочисленными следствиями составляют т. наз. теорию Ока—Картана о многообразиях Штейна. Из этих теорем следует разрешимость на многообразиях Штейна всех классич. проблем многомерного комплексного анализа — проблема

Кузена, Леви, Пуанкаре и др. Теоремы A и B и их следствия допускают дословное обобщение на пространства Штейна.

Лит.: [1] Картан А., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958, с. 352—62; [2] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [3] Хёрмандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968. *Е. М. Чирка.*

КАРТАНА — ВЕЙЛЯ БАЗИС конечномерной полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — базис $\mathfrak{g}$, составленный из элементов *Картана подалгебры* алгебры $\mathfrak{g}$ и корневых векторов X_α, $\alpha \in \Delta$, где Δ — система всех ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно τ. К.— В. б. выбирается неоднозначно. Корень $\alpha(h)$, $h \in \tau$, как линейная форма над τ, отождествляется с вектором $h'_\alpha \in \tau$, для которого $\alpha(h) = (h'_\alpha, h)$, где (x, y) — *Киллинга форма* в алгебре $\mathfrak{g}$. При этом

$$[h, X_\alpha] = (h'_\alpha, h) X_\alpha$$

для всякого $h \in \tau$. Если $\alpha \in \Delta$, то $-\alpha \in \Delta$, причем можно выбрать X_α так, чтобы выполнялось равенство $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = h'_\alpha$. Если $\alpha + \beta \in \Delta$, то

$$[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha\beta} X_{\alpha+\beta},$$

где $N_{\alpha\beta} \neq 0$. Если $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, $\alpha+\beta+\gamma=0$, то $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha}$. Существует нормировка векторов X_α, при которой $N_{\alpha\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$, причем числа $N_{\alpha\beta}$ получаются рациональными. Существует нормировка векторов X_α, при которой все $N_{\alpha\beta}$ — целые (см. *Шевалле группа*). Определение К.— В. б. (введенное Г. Вейлем в [1]), а также все сказанное выше о векторах X_α, h'_α и числах $N_{\alpha\beta}$ дословно переносится на случай произвольной конечномерной полупростой расщепляемой алгебры Ли над полем нулевой характеристики и ее корневого разложения относительно расщепляющей подалгебры Картана.

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Z.», 1924, Bd 23, S. 271—304; [2] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [3] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, пер. с франц., М., 1962. *Д. П. Желобенко.*

КАРТЕРА ПОДГРУППА — максимальная нильпотентная подгруппа группы, совпадающая со своим нормализатором. Введена Р. Картером [1]. Любая конечная разрешимая группа G обладает К. п., причем все К. п. в группе G сопряжены (теорема Картера).

Лит.: [1] Carter R. W., «Math. Z.», 1961, Bd 75, № 2, S. 136—39; [2] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 23—24. *Н. Н. Вильямс.*

КАРТОГРАФИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, возникающие при построении математич. основы географических и специальных карт, именно, при разработке теории *картографических проекций*, исследовании их свойств, преобразований, методов изысканий и др. Поверхность Земли при этом принимают либо за сферу, либо за эллипсоид вращения.

Основным объектом изучения в математич. картографии является картографич. проекция: отображение на плоскости всей поверхности земного эллипсоида (шара) или какой-либо ее части:

$$x = f_1(u, v), \; y = f_2(u, v), \tag{1}$$

где u — широта, v — долгота точки $P \in \Delta$ (Δ — односвязная область эллипсоида); x, y определяют на плоскости точку Q — изображение точки P, $Q \in D$, D — область изображения Δ. Функции f_1 и f_2 удовлетворяют следующим условиям: они однозначные, дважды непрерывно дифференцируемые, имеют якобиан $h = \partial(x, y)/\partial(u, v) \neq 0$ (для сохраняющих ориентацию отображений, используемых в геодезии и картографии, $h > 0$). Большинство фактов математич. картографии относится не только к отображениям эллипсоида на плоскость, но и к отображениям произвольных поверхностей, поэтому далее под картографич. проекцией (1) понимается отображение $\Delta \subset S_1$ на $D \subset S_2$, где

$$S_1: ds^2 = \lambda_1^2 (u, v) [du^2 + dv^2]; \qquad (2)$$
$$S_2: d\sigma^2 \lambda_2^2 (x, y) [dx^2 + dy^2]$$

– любые регулярные поверхности; Δ и D — односвязные области. Выбор для целей отображения таких координат, кроме простоты записи в них линейного элемента поверхности и выгоды их использования при последующих вычислениях, обусловлен еще и тем, что переход к ним от произвольных криволинейных координат на поверхности непосредственно доставляет конформное отображение поверхности на плоскость (см. [6], [3]). Эти координаты даже на произвольной поверхности наз. иногда картографическими координатами (см. [9]); в геодезии и картографии их наз. изометрическими координатами.

Знание уравнений (1) отображения S_1 на S_2 позволяет изучить метрич. свойства отображения (см. [7], [2]), т. е. найти его характеристики: масштаб отображения $\mu = d\sigma/ds$, причем $\mu = \mu(u, v; \alpha)$, и, в частности, масштабы по направлениям координатных линий $m = \mu|_{v=\text{const}}$, $n = \mu|_{u=\text{const}}$:

$$m^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}(x_u^2 + y_u^2), \quad n^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}(x_v^2 + y_v^2);$$

поворот ψ изображения в направлении линии u и его поворот χ в направлении линии v:

$$\operatorname{tg}\psi = y_u/x_u, \quad \operatorname{tg}\chi = y_v/x_v;$$

угол θ между образами параметрич. линий:

$$\theta = \chi - \psi;$$

искажение этого угла:

$$\varepsilon = \theta - \frac{\pi}{2};$$

масштаб площади:

$$p = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} h;$$

наибольшее искажение углов:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b};$$

и др. Большое значение имеют главные масштабы $a = \mu_{\max}$ и $b = \mu_{\min}$, связанные с m, n, θ теоремами Аполлония:

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2, \quad ab = mn \sin\theta = p,$$

и соответствующие им главные направления, ортогональные как на S_1 ($\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2f/(e-g)$, где

$$e = x_u^2 + y_u^2, \quad f_v = x_u x_v + y_u y_v, \quad g = x_v^2 + y_v^2),$$

так и на S_2 ($\operatorname{tg} A_0 = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha_0$). С указанной сетью Тиссо на S_2 связывается индикатриса отображения — эллипс искажений $\{a, b, A_0, \psi\}$, трактуемый в касательной плоскости к S_2 в точке Q как эллипс, подобный и подобно расположенный тому бесконечно малому эллипсу (главной части отображения), к-рый является — с точностью до $o(\rho)$ — изображением окружности бесконечно малого радиуса ρ, взятой в касательной плоскости к S_1 в точке P. Из приведенных характеристик, выраженных через коэффициенты первых квадратичных форм взаимно отображаемых поверхностей (2) и частные производные 1-го порядка отображающих функций (1), независимы только четыре. Выбор групп независимых характеристик неоднозначен, и вместо $\{a, b, A_0, \psi\}$ часто берут $\{m, n, \psi. \theta\}$.

По характеру искажений среди картографич. проекций выделяют следующие проекции: а) конформные, или равноугольные ($m=n$, $\theta=\pi/2$); б) эквивалентные, или равновеликие ($p=1$); в) эквидистантные, или равнопромежуточные ($a=1$, или $b=1$); г) геодезические, в картографии наз. ортодромическими (ортодрома — геодезическая на сфере), при к-рых геодезические на S_1 переходят в геодезические на S_2; и др. Построение проекций, обладающих объединением хотя бы двух из перечисленных свойств а) — г), возможно только при отображении поверхности на изометричные ей поверхности и в нек-рых других тривиальных случаях. Так как условия конформности и эквивалентности для целей картографии не совместимы, то для нее особое значение имеют проекции эквидистантные, к-рые по характеру искажений занимают промежуточное место между отображениями а) и б). Выделение отдельных совокупностей картографич. проекций делают обычно указанием присущих им свойств, напр. вида а) — в), т. е. заданием их уравнениями в характеристиках, к-рые с учетом формул теории искажений легко преобразуются в уравнения с частными производными 1-го порядка. Множество решений конкретной системы двух таких уравнений описывает определенный класс проекций. По типу этих уравнений проекциям приписывают соответствующий тип (эллиптический, гиперболический и т. д.).

Использование в картографии приведенных выше формул теории искажений позволяет выполнить выбор нужной для конкретной цели проекции: установив каким-либо образом уравнения проекции (1) (напр., задав на плоскости общий вид изображения координатных линий эллипсоида и, возможно, использовав при этом нек-рые дополнительные условия — конформности, эквивалентности и др.), можно на основании этих формул исследовать отображение и, варьируя его параметрами, подобрать наиболее подходящую проекцию для картографирования заданной $\Delta\subset S_1$. Кроме такого решения прямой задачи, в ней используются и иные методы (геометрические, графоаналитические и др.).

В обратных задачах картографии проекции изыскивают на основе априорного задания искажений в них (см. [11]). При этом первоочередное значение имеет вопрос существования требуемых проекций. Ответ на этот вопрос дает основная система уравнений в теории отображения поверхностей (см. [4]):

$$\left.\begin{aligned} m_v^*-n_u^*\cos\theta+\psi_u n^*\sin\theta+\theta_u n^*\sin\theta=0,\\ \psi_v m^*-n_u^*\sin\theta-\psi_u n^*\cos\theta-\theta_u n^*\cos\theta=0, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

в к-рой

$$m^*=\frac{\lambda_1(u,\ v)}{\lambda_2(x,\ y)}\,m;\qquad n^*=\frac{\lambda_1(u,\ v)}{\lambda_2(x,\ y)}\,n.$$

При отображении поверхности на плоскость: $\lambda_2(x,\ y)\equiv 1$, при отображении плоских областей друг на друга также и $\lambda_1(u,\ v)=1$. Система (3) — недоопределенная: двумя ее уравнениями связаны четыре независимые характеристики отображения; различные способы доопределения и интерпретации системы дают возможности разнообразным ее приложениям. Система (3) — квазилинейная относительно любой пары характеристик. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Характеристики m, n, ψ, θ отображения области $\Delta\subset S_1$ на область $D\subset S_2$, осуществляемого однозначными дважды непрерывно дифференцируемыми функциями (1) с якобианом, сохраняющим знак в области Δ, удовлетворяют во всех точках этой области системе (3).

Теорема 2. Пусть выделена односвязная область Δ данной регулярной поверхности и пусть в области Δ заданы четыре функции $\varphi_i=\varphi_i(u,\ v)$, непрерывные в Δ вместе со своими частными производными 1-го порядка и принимающие значения из любой односвязной области П, принадлежащей 4-мерному параллелепипеду

$$[0 < \varphi_1 < k_1;\ 0 < \varphi_2 < k_2;\ k_i = \text{const},\ i = 1,\ 2;$$
$$-\pi < \varphi_3 \leqslant \pi;\ 0 < \varphi_4 < \pi].$$

Если эти функции принять за характеристики нек-рого отображения $\Delta \subset S_1$ на плоскость

$$m = \varphi_1, \quad n = \varphi_2, \quad \psi = \varphi_3, \quad \theta = \varphi_4,$$

и если они удовлетворяют в Δ системе (3), то восстанавливаемое по ним отображение $\Delta \subset S_1$ на нек-рую область D плоскости xOy гомеоморфно, дважды непрерывно дифференцируемо, имеет в Δ якобиан $h > 0$ и переводит любую точку $(u_0, v_0) \in \Delta$ в заданную точку (x_0, y_0) плоскости xy.

Теорема 2 дает при заданном распределении характеристик условия существования отображений односвязной области Δ поверхности S_1 на нек-рую область D плоскости S_2 при соответствии одной внутренней точки (u_0, v_0) своему изображению (x_0, y_0) на плоскости; граница области D при этом неизвестна. Незнание области изображения характерно для К. м. з.: она либо определяется после установления отображающих функций (1), либо должна быть найдена на основе дополнительных условий, напр. условий минимизации искажений в проекции.

При отображениях сферы на плоскость система (3) переходит в так наз. с и с т е м у Э й л е р а — У р м а е в а (см. [5], [11]), а при отображениях плоских областей, когда система (3) доопределена записанной в характеристиках системой уравнений отображения, она дает как следствие производную систему квазиконформных отображений (см. [12]). Сведение отображений поверхностей к квазиконформным отображениям плоских областей (с ограниченным искажением) вполне естественно, и первые, т. е. отображения (1) заданной области $\Delta \subset S_1$ на заданную область $D \subset S_1$, могут интерпретироваться как «тройная» проекция: область $\Delta \subset S_1$ конформно отображается на область $\tilde{\Delta}$ плоскости uv, область $D \subset S_2$ конформно отображается на область $\tilde{D}$ плоскости xOy; область $\tilde{\Delta}$ плоскости uOv квазиконформно преобразуется в область $\tilde{D}$ плоскости xOy. Квазиконформное отображение плоских областей $\tilde{\Delta}$ на $\tilde{D}$, сопутствующее отображению $\Delta \subset S_1$ на $D \subset S_2$, имеет следующие характеристики: $V = m^*$, $\alpha = \psi$, $W = n^* \sin \theta$, угол θ имеет тот же смысл, что и выше. Связь рассматриваемых изображений дала возможность (см. [4]) использовать в К. м. з. теорию квазиконформных отображений плоских областей. При этом систему уравнений любого класса картографич. проекций или, более общо, всякую нелинейную систему дифференциальных уравнений вида

$$F_i(u,\ v,\ x_u,\ x_v,\ y_u,\ y_v) = 0, \quad i = 1,\ 2, \tag{4}$$

после ее записи в характеристиках

$$J_i(u,\ v,\ m^*,\ n^*,\ \psi,\ \theta) = 0, \quad i = 1,\ 2, \tag{5}$$

удается редуцировать к квазилинейной системе, к-рая следует из системы (3) после ее доопределения системой (5) и к-рая трактуется как производная система исходной системы (4). При этом, однако, остается открытым вопрос о соотношении типов этих двух систем: исходной и производной.

Аппарат квазиконформных отображений плоских областей (с двумя парами характеристик) может быть привлечен также в качестве теоретич. основы приборного (с использованием механич., оптич., электронных и других устройств) преобразования картографич. проекций, точнее, преобразования двух заданных односвязных плоских областей друг в друга, каждая из к-рых является результатом картографирования одной и той же области земного эллипсоида, но в различных проекциях.

Одной из основных задач картографии (в области создания мелкомасштабных и частично среднемасштабных карт) является проблема наивыгоднейших картографич. проекций, т. е. таких отображений заданной области Δ поверхности S на плоскость, в к-рых искажения (в не-к-ром заранее оговоренном смысле) сведены к минимуму (см. [2]). Наиболее распространенными критериями достоинств картографич. проекций являются следующие:

критерий Эйри:

$$\Phi_E = \int_\Delta \varepsilon_E^2 \, d\Delta, \quad \varepsilon_E^2 = \frac{1}{2}\left[(a-1)^2 + (b-1)^2\right];$$

критерий Иордана:

$$\Phi_J = \int_\Delta \varepsilon_J^2 \, d\Delta, \quad \varepsilon_J^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mu-1)^2 \, d\alpha;$$

критерий Эйри — Каврайского:

$$\Phi_{E-K} = \int_\Delta \varepsilon_{E-K}^2 \, d\Delta, \quad \varepsilon_{E-K}^2 = \frac{1}{2}(\ln^2 a + \ln^2 b);$$

критерий Иордана — Каврайского:

$$\Phi_{J-K} = \int_\Delta \varepsilon_{J-K}^2 \, d\Delta, \quad \varepsilon_{J-K}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^2 \mu \, d\alpha,$$

причем все они суть вариационного типа, и

критерий Чебышева — критерий минимаксного типа, согласно к-рому качества проекции оцениваются либо величиной

$$\delta = \frac{\sup a \,|_\Delta}{\inf b \,|_\Delta},$$

либо ее логарифмом, либо просто максимумом модуля логарифма масштаба в пределах отображаемой территории. В соответствии с тем, критерий какого вида используется при построении проекции, различают выгоднейшие проекции вариационного и минимаксного типов. Таким образом, проблемы построения наивыгоднейших проекций заключаются в том, что для заданной односвязной области Δ поверхности S требуется отыскать (при условии минимума одного из приведенных функционалов Φ или величины δ) проекцию Δ на плоскость либо из всего их множества (1) — такие проекции наз. идеальными, либо из какой-либо их совокупности (напр., из класса проекций, описываемых решениями соответствующей ему системы (4)) — такие проекции наз. наилучшими проекциями данной их совокупности (класса). Для каждой такой задачи должна быть исследована корректность ее постановки.

Для сферич. сегмента (области сферы, ограниченной окружностью малого круга) в соответствии с критерием Чебышева идеальной проекцией (см. [2], [13]) является равнопромежуточная проекция Постеля; наилучшей конформной — стереографическая (см. [8]); наилучшей эквивалентной — равновеликая проекция Ламберта (см. [2]). На основании вариационного критерия для сферич. сегмента Эйри (см. [14]) была вычислена наилучшая азимутальная проекция. Для сферич. трапеции — области сферы, ограниченной дугами двух меридианов и двух параллелей, и (в некотором смысле) близких к ней областей при картографировании используют конические проекции.

Среди этих проекций, предназначенных для картографирования сферич. трапеций, известны наилучшие проекции минимаксного типа (проекции Маркова, см. [10]), а также наилучшие (того же типа) конформные и эквивалентные (см. [2]). Разработана общая методика построения наилучших по критерию Эйри конич. проекций (конформных, эквивалентных, равнопромежуточных) для односвязных областей произвольных очертаний (см. [15], [2]). Однако для сферич. трапеции при изображении ее на плоскости в конформной проекции наименьшее колебание логарифма масштаба имеет место в проекциях, рассчитанных (см. [9], [11]) в соответствии с теоремой Чебышева — Граве (см. [8], [9]): для того чтобы в конформной проекции ($m=n$, $\varepsilon=0$) на плоскость односвязной области Δ поверхности S, имеющей полную кривизну одного и того же знака, логарифм масштаба наименее уклонялся от нуля, необходимо и достаточно постоянство масштаба на контуре изображаемой территории. Конформные проекции, удовлетворяющие условиям этой теоремы, наз. чебышевскими проекциями. Они обладают рядом полезных свойств (в них $\frac{\sup\mu|_\Delta}{\inf\mu|_\Delta}=\min$, $\Phi_{J-K}=\min$, минимальна средняя кривизна изображений геодезич. линий поверхности S, $\max_\Delta|\ln p|=\min$), за счет к-рых они ценны для практики. П. Л. Чебышев решил задачу отыскания для $\Delta\subset S$ конформной проекции с минимумом искажения площадей, т. е. конформной проекции, наиболее близкой к эквивалентным.

Важна и обратная задача: среди всех эквивалентных проекций области $\Delta\subset S$ на плоскость найти проекцию с минимумом искажений форм. Один из подходов к этой задаче таков. Ввиду разной мощности двух рассматриваемых множеств проекций (множество конформных описывается системой двух уравнений с частными производными $m=n$, $\varepsilon=0$, а эквивалентных — одним $p=mn\cos\varepsilon=1$) сначала из совокупности эквивалентных проекций выделяется нек-рый класс проекций, близких к конформным, а затем уже в нем ищется проекция с минимумом искажений форм. Из классич. наследия был известен один класс таких проекций, именно, класс эйлеровых проекций: $p=1$, $\varepsilon=0$ (см. [5]), ныне предложены и другие классы эквивалентных проекций, близких к конформным, напр. класс: $p=1$, $(m-n)+k\varepsilon=0$, $k=k(u, v)$ — параметр класса (см. [4]).

Исследование указанных и других новых классов картографич. проекций и поиски в них наивыгоднейших проекций минимаксного типа привели к постановке задач на условный минимакс (см. [16]). Сущность таких задач заключается в том, что для данной системы дифференциальных уравнений с частными производными, решения к-рой должны быть найдены в заданной области Δ, требуется установить те дополнительные условия (краевые, начальные и т. д.) и в нек-рых случаях еще определить вид тех кривых, к к-рым должны быть отнесены эти условия, чтобы при интегрировании системы с ними одно из ее решений в области Δ наименее уклонялось бы от нуля. Известны только частные случаи исследования таких задач, основанные на методе априорных оценок решений дифференциальных уравнений. Достигнутые результаты для систем эллиптич. типа — распространение теоремы Чебышева — Граве на два новых класса проекций: класс, описываемый системой уравнений в характеристиках $n=km$, $\varepsilon=0$, $k=\text{const}>0$ (см. [17]), и класс $m=n^c$, $\varepsilon=0$, $c=\text{const}>0$ (см. [19]). Для гиперболич. системы, описывающей эйлеровы проекции, методом характеристик установлены такие начальные условия на меридиане (см. [16]) и на параллели (см. [18]), при к-рых одно из решений системы (логарифм масштаба) в области влияния начальных данных наименее уклоняется от нуля. Картографический смысл этого аналога теоремы Чебышева таков: «носительница» данных Коши должна быть линией конформности, т. е. масштаб на ней равен единице. Этот результат при задании начальных условий на меридиане справедлив и для более широкого класса проекций: $m=n^c$, $\varepsilon=0$, $c=\text{const}$ (см. [19]). Исследован случай эйлеровых проекций для заданной сферич. трапеции, в к-ром при рассмотрении — с привлечением интеграла энергии — смешанной задачи установлены начальные (для южной стороны трапеции) и краевые (на дугах, ограничивающих ее меридианов) условия, обеспечивающие получение для этой области наилучших эйлеровых проекций вариационного типа: на указанных трех сторонах области масштаб должен быть равен единице (см. [20]). Общая методика изыскания наивыгоднейших проекций вариационного типа для произвольной области $\Delta\subset S$ сводится к решению вариационных задач со свободными краями (см. [4]).

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Картография, т. 7, М., 1976, с. 45—57; [2] Каврайский В. В., Избр. труды, т. 2, в. 1—3, М., 1958—1960; [3] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей ..., ч. 1—2, М.— Л., 1947—48; [4] Мещеряков Г. А., Теоретические основы математической картографии, М., 1968; [5] Эйлер Л., Избр. картографические статьи, пер. с нем., М., 1959; [6] Гаусс К. Ф., Избр. геодезические соч., т. 2, М., 1958; [7] Тиссо М. А., Изображение одной поверхности на другой и составление географических карт, пер. с франц., М., 1899; [8] Чебышев П. Л., Соч., т. 1, СПБ, 1899; [9] Граве Д. А., Об основных задачах математической теории построения географических карт, СПБ, 1896; [10] Марков А. А., «Изв. АН», сер. 5, 1895, т. 2, № 3, с. 177—87; [11] Урмаев Н. А., Методы изыскания новых картографических проекций, М., 1947; [12] Лаврентьев М. А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., 1962; [13] Milnor J., «Amer. Math. Monthly», 1969, v. 76, p. 1101—12; [14] Airy G. B., «Philos. Mag.», 1861, Ser. 4, v. 22, p. 409—21; [15] Цингер Н. Я., «Изв. АН», 1916, сер. 6, т. 10, № 17, с. 1693—1704; [16] Мещеряков Г. А., «Докл. АН СССР», 1961, т. 136, № 5, с. 1026—29; [17] Топчилов М. А., «Изв. ВУЗов. Геод. и аэрофотосъемка», 1970, № 4, с. 91—96; [18] Тучин Я. И., «Тр. Новосиб. ин-та инженеров геод., аэрофотосъемки и картографии», 1973, т. 30, с. 65—67; [19] Юзефович Ю. М., «Сб. научн. трудов Белорусск. сельхоз. академии», 1972, т. 86, с. 245—53; [20] Тучин Я. И., «Тр. Новосиб. ин-та инженеров геод., аэрофотосъемки и картографии», 1975, т. 34, с. 55—64.

Г. А. Мещеряков.

КАРТОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ — отображение всей поверхности земного эллипсоида или какой-либо ее части на плоскость, получаемое в основном с целью построения карты.

К. п. чертят в определенном масштабе. Уменьшая мысленно земной эллипсоид в M раз, получают его геометрич. модель — глобус, изображение к-рого в натуральную величину на плоскости дает карту поверхности этого эллипсоида. Величина $1:M$ определяет главный, или общий, масштаб карты. Однако основной характеристикой К. п. в любой ее точке является частный масштаб μ. Это — величина, обратная отношению бесконечно малого отрезка dS на земном эллипсоиде к его изображению $d\sigma$ на плоскости: $1/\mu=dS/d\sigma$, причем μ зависит от положения точки на эллипсоиде и от направления выбранного отрезка. Отношение μ/M наз. относительным масштабом, или увеличением длины, разность $(\mu/M-1)$ — искажением длины. Численное значение главного масштаба M учитывается только при вычислениях координат точек К. п. и при использовании карты, а при исследованиях К. п. полагают $M=1$.

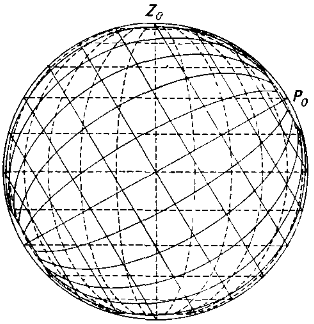
В картографии часто ограничиваются рассмотрением отображений на плоскость сферы нек-рого радиуса R, отклонениями к-рой от земного эллипсоида можно пренебречь или каким-либо способом их учесть. Поэтому далее имеются в виду отображения на плоскость xOy сферы, отнесенной к географич. координатам φ (широта) и λ (долгота).

Уравнения К. п. имеют вид

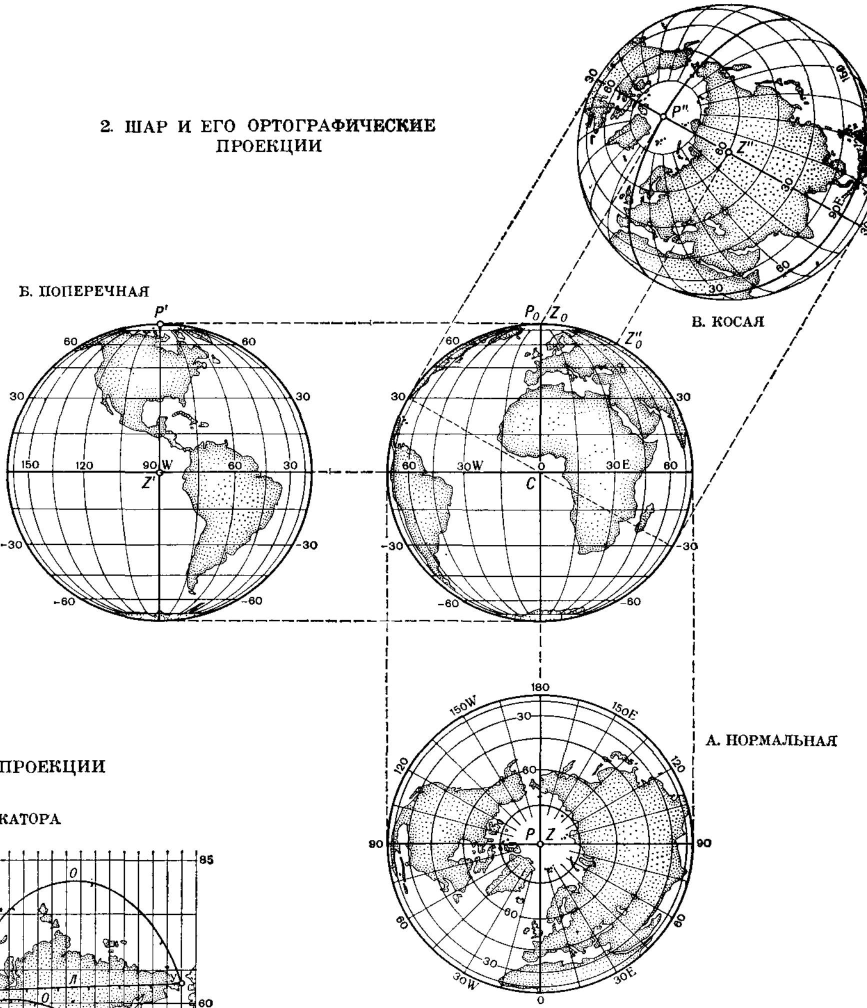
$$x=f_1(\varphi,\ \lambda),\quad y=f_2(\varphi,\ \lambda),\tag{*}$$

где f_1 и f_2 — функции, удовлетворяющие нек-рым общим условиям (К. п. может быть определена также уравнениями, в к-рых фигурируют не прямоугольные координаты плоскости x, y, а какие-либо иные). Изображения меридианов $\lambda=\text{const}$ и параллелей $\varphi=\text{const}$ в данной К. п. образуют картографическую сетку.

1. СЕТИ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТНЫХ ЛИНИЙ

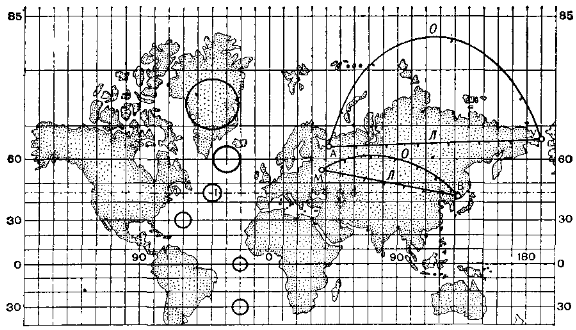


2. ШАР И ЕГО ОРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

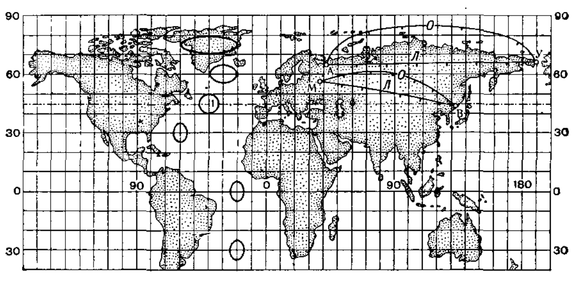


3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

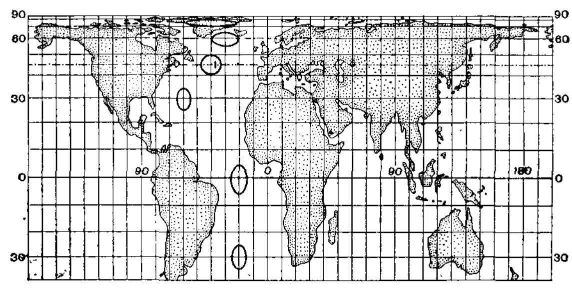
А. РАВНОУГОЛЬНАЯ МЕРКАТОРА



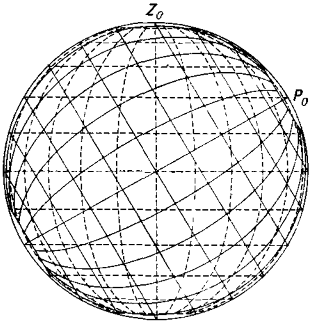
Б. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНАЯ (ПРЯМОУГОЛЬНАЯ)



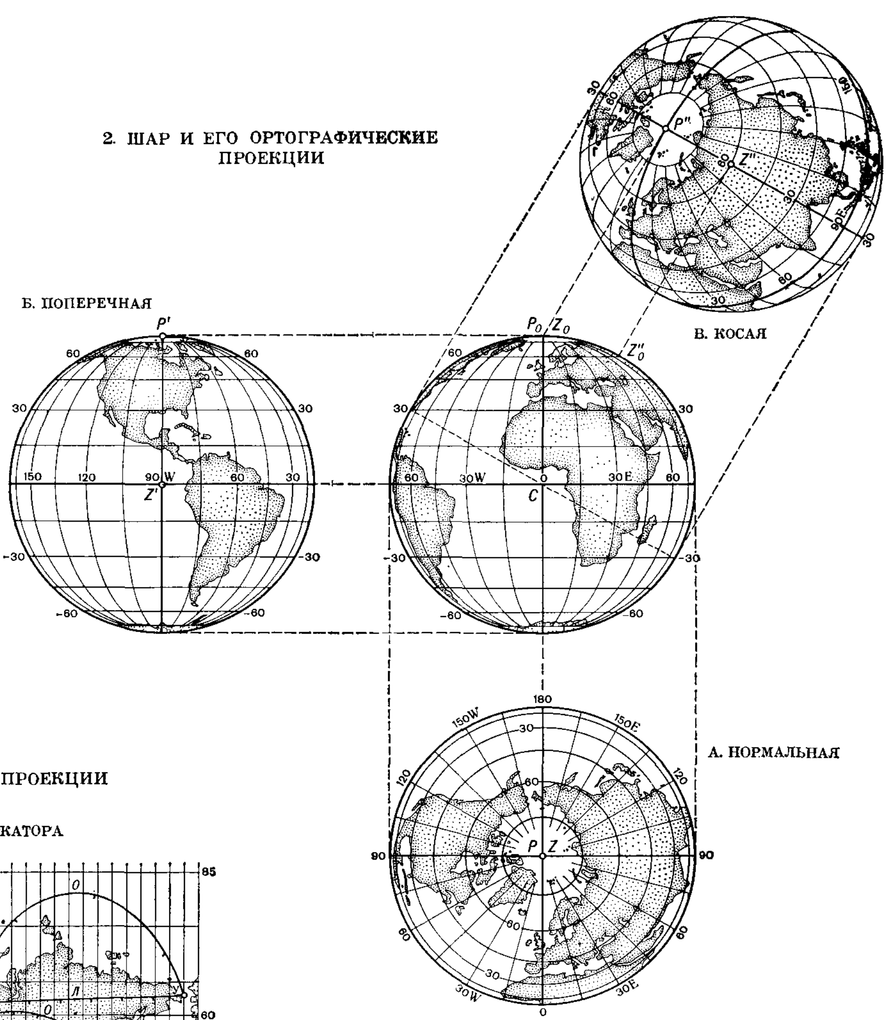
В. РАВНОВЕЛИКАЯ (ИЗОЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ)



1. СЕТИ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТНЫХ ЛИНИЙ

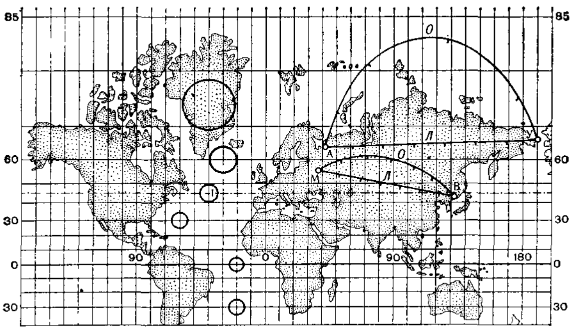


2. ШАР И ЕГО ОРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

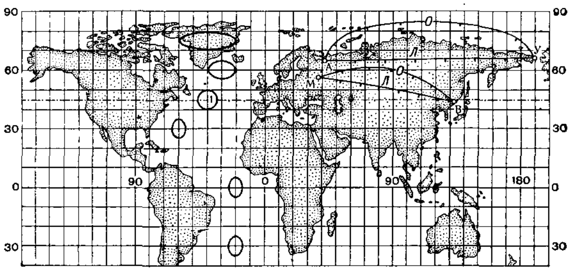


3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

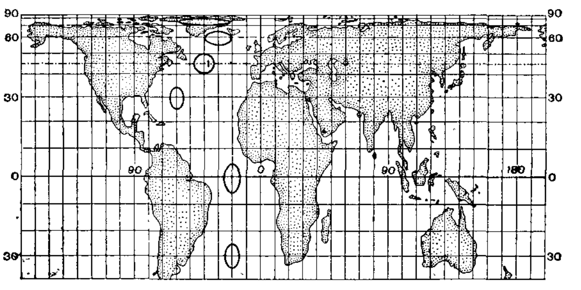
А. РАВНОУГОЛЬНАЯ МЕРКАТОРА



Б. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНАЯ (ПРЯМОУГОЛЬНАЯ)

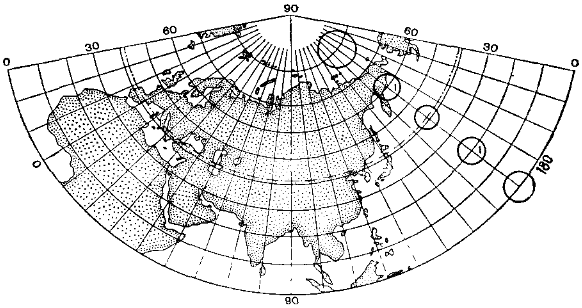


В. РАВНОВЕЛИКАЯ (ИЗОЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ)

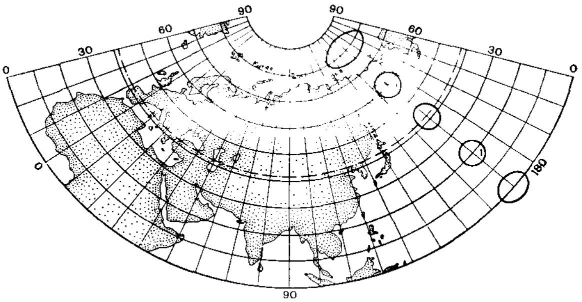


4. КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

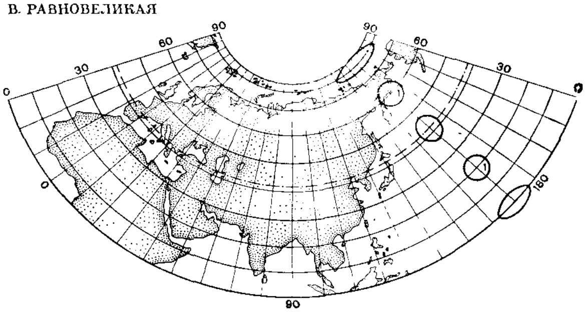
А. РАВНОУГОЛЬНАЯ



Б. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНАЯ



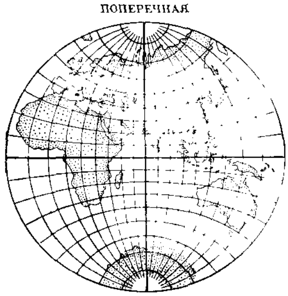
В. РАВНОВЕЛИКАЯ



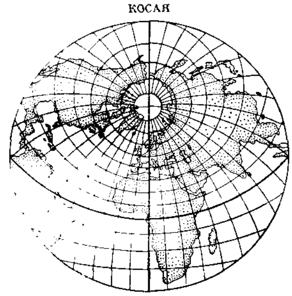
5. АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

А. РАВНОУГОЛЬНАЯ
(СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ)

ПОПЕРЕЧНАЯ

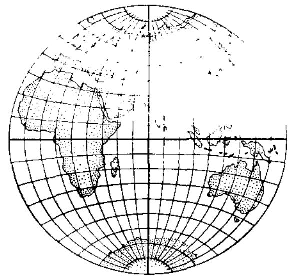


КОСАЯ

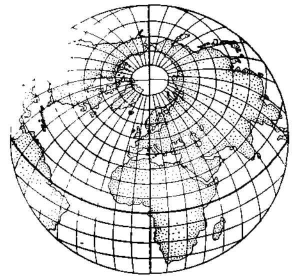


Б. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНАЯ

ПОПЕРЕЧНАЯ



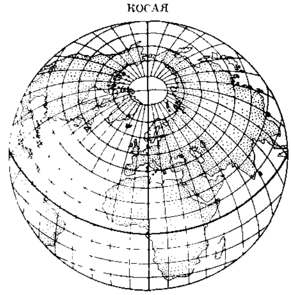
КОСАЯ



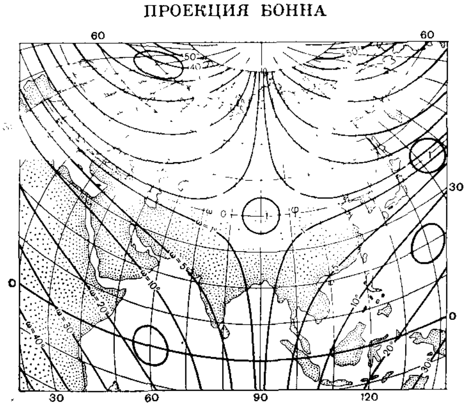
В. РАВНОВЕЛИКАЯ

ПОПЕРЕЧНАЯ

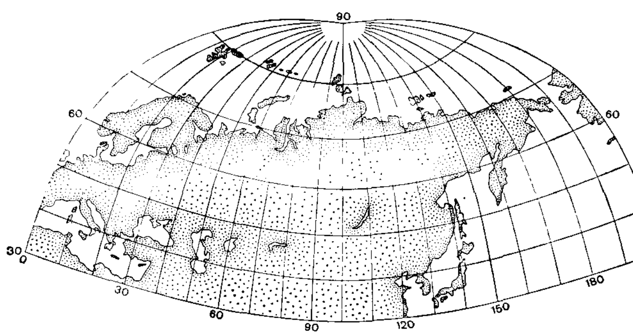
КОСАЯ



6. ПСЕВДОКОНИЧЕСКАЯ РАВНОВЕЛИКАЯ ПРОЕКЦИЯ БОННА

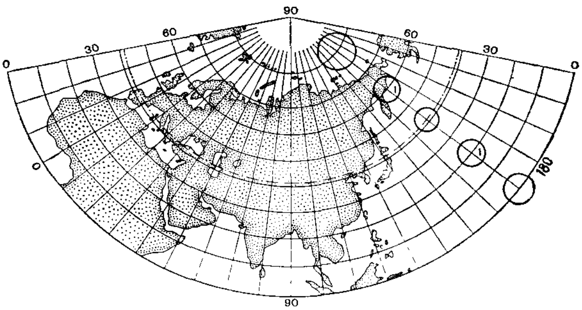


7. КОСАЯ ПЕРСПЕКТИВНО-ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ М.Д. СОЛОВЬЕВА

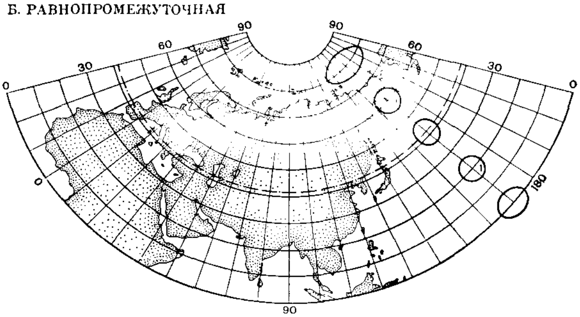


4. КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

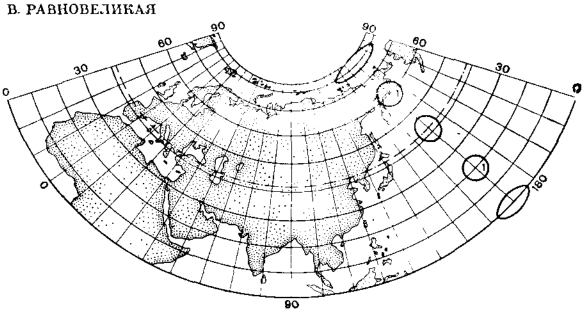
А. РАВНОУГОЛЬНАЯ



Б. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНАЯ



В. РАВНОВЕЛИКАЯ

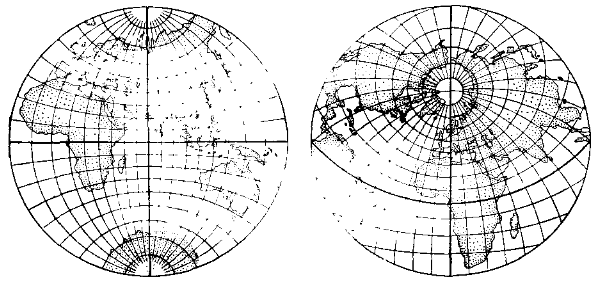


5. АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

А. РАВНОУГОЛЬНАЯ
(СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ)

ПОПЕРЕЧНАЯ

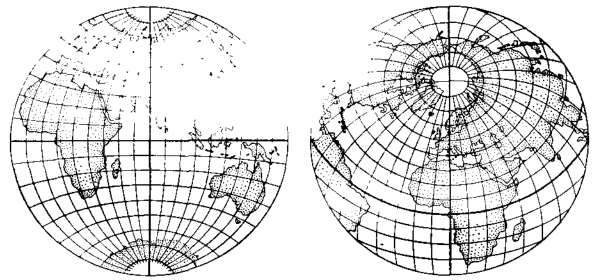
КОСАЯ



Б. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНАЯ

ПОПЕРЕЧНАЯ

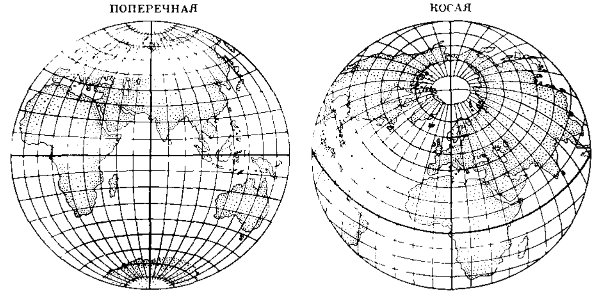
КОСАЯ



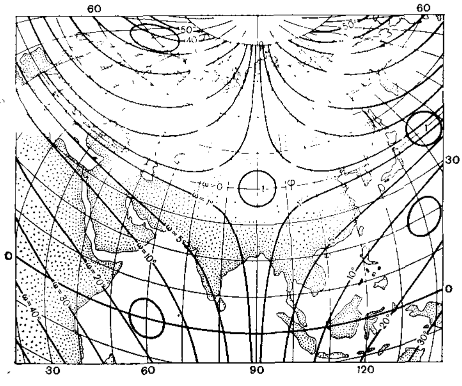
В. РАВНОВЕЛИКАЯ

ПОПЕРЕЧНАЯ

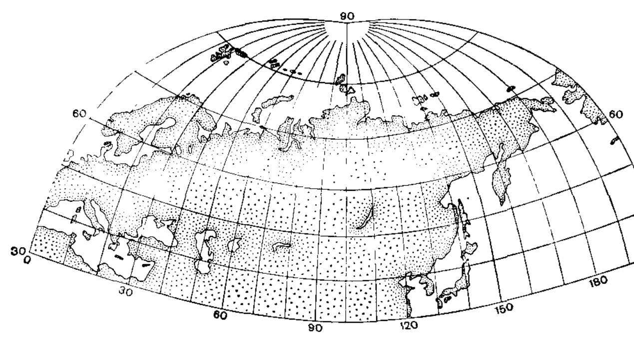
КОСАЯ



6. ПСЕВДОКОНИЧЕСКАЯ РАВНОВЕЛИКАЯ ПРОЕКЦИЯ БОННА

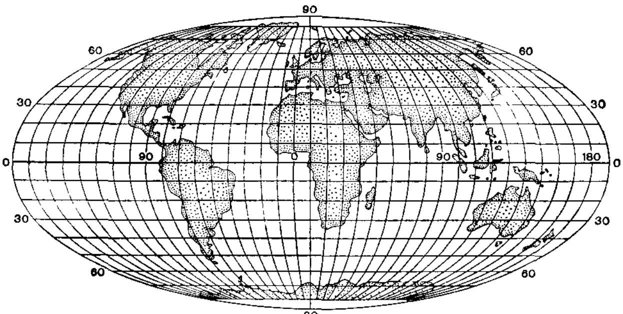


7. КОСАЯ ПЕРСПЕКТИВНО-ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ М.Д. СОЛОВЬЕВА



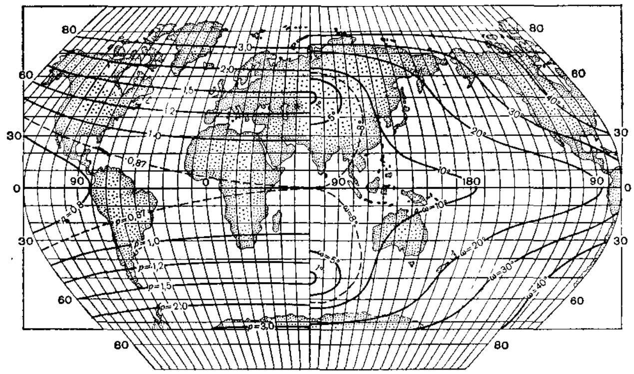
8. ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

А. РАВНОВЕЛИКАЯ ПРОЕКЦИЯ МОЛЬВЕЙДЕ



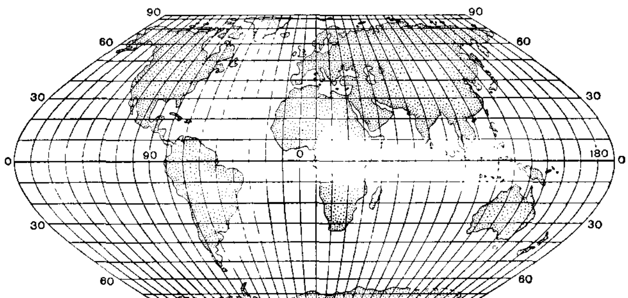
Изображения меридианов—эллипсы. Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 40°,7$

В. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ЦНИИГАиК



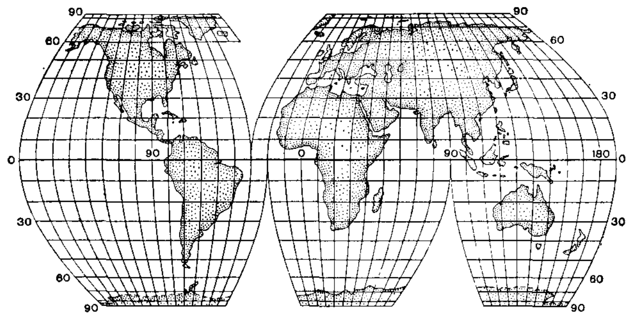
Длины сохраняются вдоль экватора по всем меридианам

Б. РАВНОВЕЛИКАЯ СИНУСОИДАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ В.В. КАВРАЙСКОГО



Изображения меридианов—дуги синусоид. Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 46°,5$

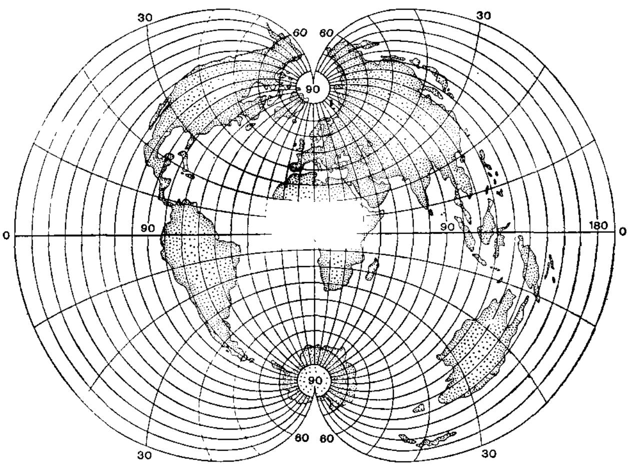
Г. ПРОЕКЦИЯ БСАМ



Использован способ Гуда построения надрезанной проекции: допущены разрывы изображения на океанах с целью уменьшения искажений на континентах

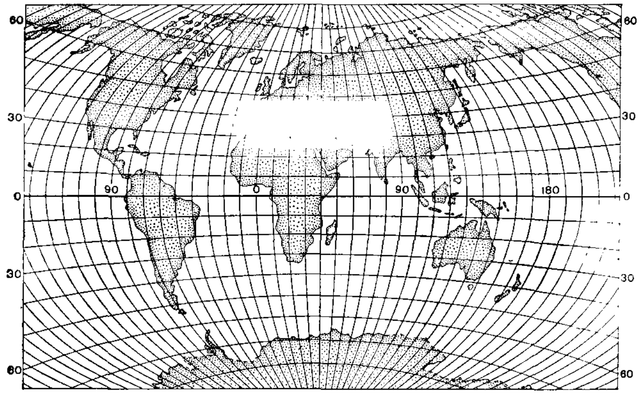
9. ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

А. ПРОСТАЯ



Проекция произвольная. Длины сохраняются вдоль всех параллелей и по среднему меридиану

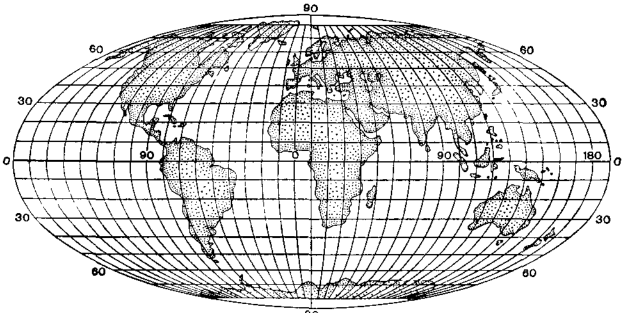
Б. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ Г.А. ГИНЗБУРГА



Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 45°$

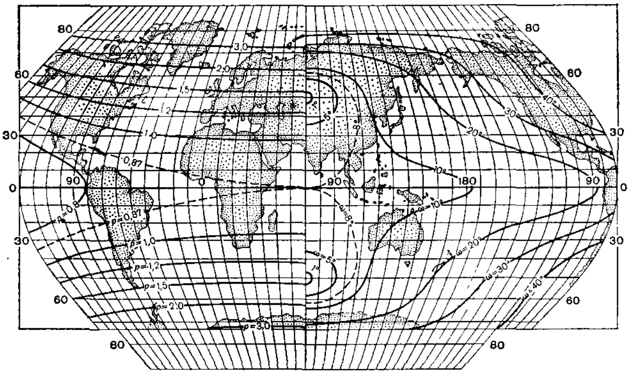
8. ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

А. РАВНОВЕЛИКАЯ ПРОЕКЦИЯ МОЛЬВЕЙДЕ



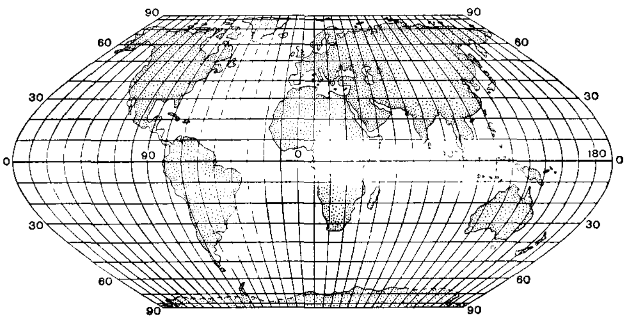
Изображения меридианов–эллипсы. Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 40°,7$

В. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ЦНИИГАиК



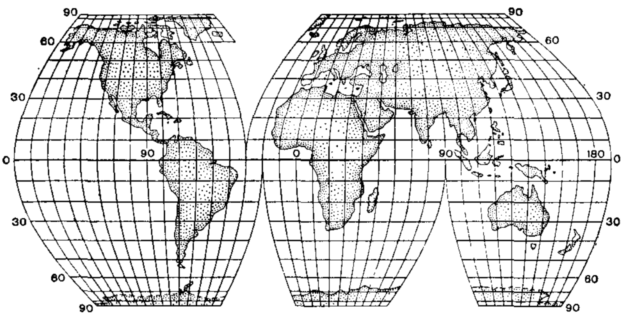
Длины сохраняются вдоль экватора по всем меридианам

Б. РАВНОВЕЛИКАЯ СИНУСОИДАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ В.В. КАВРАЙСКОГО



Изображения меридианов–дуги синусоид. Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 46°,5$

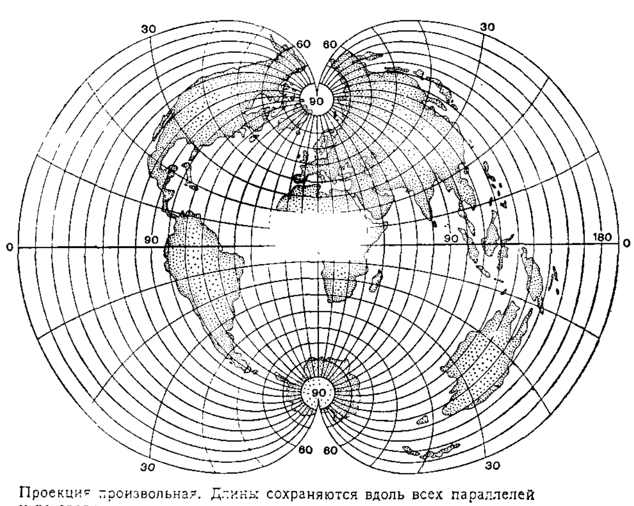
Г. ПРОЕКЦИЯ БСАМ



Использован способ Гуда построения надрезанной проекции: допущены разрывы изображения на океанах с целью уменьшения искажений на континентах

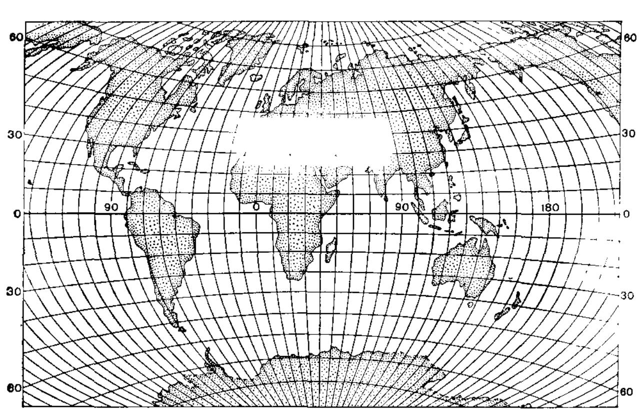
9. ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

А. ПРОСТАЯ



Проекция произвольная. Длины сохраняются вдоль всех параллелей и по среднему меридиану

Б. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ Г.А. ГИНЗБУРГА



Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 45°$

При картографировании областей, содержащих географич. полюсы, иногда применяют не географич. координаты, а другие, в к-рых полюсы оказываются обыкновенными точками координации. Напр., используют сферич. координаты, координатные линии к-рых — так наз. вертикалы (условная долгота на них a=const) и альмукантараты (где полярные расстояния z=const) — аналогичны географич. меридианам и параллелям, но их полюс $Z_0(\varphi_0, \lambda_0)$ не совпадает с географич. полюсом P_0 (рис. 1). Всякая К. п., данная уравнениями (*), наз. нормальной, или прямой ($\varphi_0=\pi/2$). Если та же самая проекция сферы вычисляется по формулам (*), в к-рых вместо φ, λ фигурируют z, a, то эта проекция наз. поперечной при $\varphi_0=0$, и косой, если $0<\varphi_0<\pi/2$. На рис. 2 показаны нормальная (А), поперечная (Б) и косая (В) ортографич. проекции шара.

Искажения в бесконечно малой области около какой-либо точки проекции подчиняются нек-рым общим законам. Во всякой точке карты, составленной в проекции, не являющейся равноугольной (см. ниже), существует два таких взаимно перпендикулярных направления, к-рым на отображаемой поверхности соответствуют также взаимно перпендикулярные направления — так наз. *главные направления отображения*. Масштабы по этим направлениям имеют экстремальные значения $\mu_{max}=a$ и $\mu_{min}=b$. Если в какой-либо К. п. изображения меридианов и параллелей пересекаются под прямым углом, то их направления и есть главные для данной К. п. Искажения длин в данной точке К. п. наглядно представляет эллипс искажений, подобный и подобно расположенный изображению бесконечно малой окружности, описанной вокруг соответствующей точки отображаемой поверхности. Полудиаметры этого эллипса численно равны частным масштабам в данной точке в соответствующих направлениях, полуоси эллипса равны экстремальным масштабам, а направления их — главные.

В равноугольных (конформных) К. п. масштаб зависит только от положения точки и не зависит от направления. Эллипсы искажения — окружности. Примеры: проекция Меркатора, стереографическая проекция, равноугольная коническая проекция и др. (см. рис. 3А, 5А, 4А).

В равновеликих (эквивалентных) К. п. сохраняются площади; точнее, площади фигур на картах, составленных в таких проекциях, пропорциональны площадям соответствующих фигур в натуре, причем коэффициент пропорциональности — величина, обратная квадрату главного масштаба карты. Эллипсы искажений всюду имеют одинаковую площадь, различаясь формой и ориентировкой; см., например, рис. 3В, 4В, 5В.

Произвольные К. п. (см., напр., рис. 7) не относятся ни к равноугольным, ни к равновеликим. Из них выделяют равнопромежуточные, в к-рых один из главных масштабов равен единице (см. рис. 3Б, 4Б, 5Б), и ортодромические, в к-рых большие круги сферы (ортодромы) изображаются прямыми.

При изображении сферы на плоскости свойства равноугольности, равновеликости, равнопромежуточности и ортодромичности несовместимы.

Для показа искажений в разных местах изображаемой области применяют: эллипсы искажений (см., напр., рис. 3, 4); изоколы — линии равного значения искажений (на рис. 8 В см. изоколы наибольшего искажения углов ω и изоколы масштаба площадей p); изображения в нек-рых местах карты нек-рых сферич. линий, обычно ортодромий «О» и изогональных траекторий меридианов-локсодромий «Л» (см., напр., рис. 3А, 3Б).

По виду картографической сетки К. п. подразделяют на следующие группы.

Цилиндрические проекции — проекции, в к-рых меридианы изображаются равноотстоящими параллельными прямыми, а параллели — прямыми, перпендикулярными меридианам (см. рис. 3).

Конические проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются концентрич. окружностями, меридианы — ортогональными им прямыми, причем углы между последними пропорциональны соответствующим разностям долгот (см. рис. 4).

Азимутальные проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются концентрич. окружностями, меридианы — их радиусами, при этом углы между последними равны соответствующим разностям долгот (см. рис. 5).

Псевдоконические проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются концентрич. окружностями, средний меридиан — прямой линией, остальные меридианы — кривыми симметричными относительно изображения среднего меридиана (см., напр., рис. 6).

Псевдоцилиндрические проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются параллельными прямыми, средний меридиан — прямой линией, перпендикулярной этим прямым, остальные меридианы — кривыми (см. рис. 8).

Поликонические проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются окружностями с центрами, расположенными на одной прямой, изображающей средний меридиан, остальные меридианы — кривыми, также симметричными относительно этой прямой (см. рис. 9). При построении конкретных поликонических проекций ставятся дополнительные условия.

Существуют и другие проекции, не относящиеся к указанным видам. Цилиндрические, конические и азимутальные проекции, называемые простейшими, часто относят к круговым проекциям в широком смысле, выделяя из них круговые проекции в узком смысле — проекции, в к-рых все меридианы и параллели изображаются окружностями.

Об использовании, выборе, исследованиях свойств, преобразованиях К. п. см. статью *Картографии математические задачи* и лит. при ней. *Г. А. Мещеряков.*

КАСАНИЕ — геометрическое понятие, обозначающее, что в некоторой точке две кривые (кривая и поверхность) имеют общую *касательную* прямую или две поверхности имеют общую *касательную плоскость.* Порядок К.— характеристика близости двух кривых (кривой и поверхности или двух поверхностей) в окрестности их общей точки. См. *Соприкосновение.* *БСЭ-3.*

КАСАТЕЛЬНАЯ к кривой линии — прямая, представляющая предельное положение секущей. Пусть M — точка кривой L (рис. 1). На L выбирается вторая точка M' и проводится прямая MM'. Точка M считается

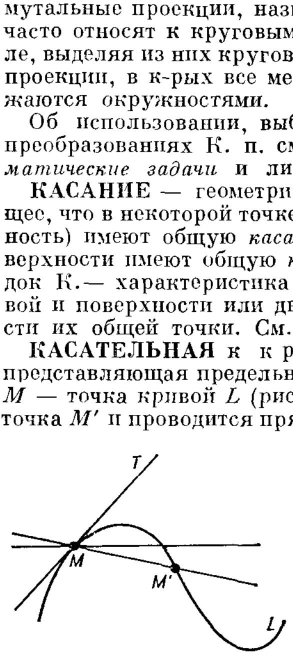


Рис. 1.

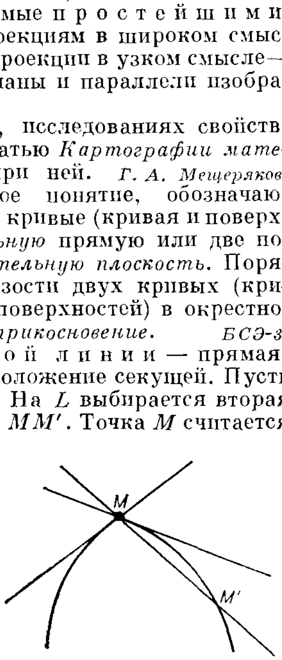


Рис. 2.

неподвижной, а точка M' приближается к M по кривой L. Если при неограниченном приближении M' к M прямая MM' стремится к определенной кривой MT, то MT наз. касательной к кривой L в точке M.

Не у всякой непрерывной кривой имеются К., поскольку прямая MM' может не стремиться к предельному положению или может стремиться к двум разным предельным положениям, когда M' стремится к M с разных сторон от M (рис. 2). Если кривая на плоскости в прямоугольных координатах определяется уравнением $y=f(x)$ и $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то угловой коэффициент К. в точке M с абсциссой x_0 равен значению производной $f'(x_0)$ в точке x_0; уравнение К. в этой точке имеет вид:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Уравнение К. к пространственной кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\lambda\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\quad -\infty<\lambda<+\infty.$$

К. к поверхности S в точке M наз. прямая, проходящая через точку M и лежащая в касательной плоскости к S в точке M. *БСЭ-3.*

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ к поверхности S в точке M — плоскость, проходящая через точку M и характеризующаяся тем свойством, что расстояние от этой плоскости до переменной точки M' поверхности S при произвольном стремлении M' к M является бесконечно малым по сравнению с расстоянием MM'. Если поверхность S задана уравнением $z=f(x, y)$, то уравнение К. п. в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0=f(x_0, y_0)$, имеет вид:

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0)$$

в том и только том случае, когда функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) полный дифференциал. В этом случае A и B суть значения частных производных $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ в точке (x_0, y_0). *БСЭ-3.*

КАСАТЕЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — см. *Прикосновения преобразование.*

КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ дифференцируемого многообразия M — *векторное расслоение* $\tau: TM\to M$, пространство к-рого TM является касательным пространством к M (объединением касательных пространств $TM|_x$ в точке $x\in M$), состоящим из касательных векторов к M, а проекция τ отображает $TM|_x$ в x. Сечение К. р. $\tau(M)$ — векторное поле на многообразии M. Атлас многообразия TM определяется атласом многообразия M и условием локальной тривиальности расслоения $\tau(M)$. Функции перехода К. р. являются матрицами Якоби функций перехода атласа многообразия.

К К. р. присоединено главное расслоение реперов многообразия M. Расслоение $\tau^*(M)$, двойственное К. р. $\tau(M)$, наз. кокасательным расслоением, а его пространство T^*M — кокасательным пространством. Сечениями его являются линейные дифференциальные формы (*Пфаффа формы*).

Дифференцируемое отображение $h: M\to N$ индуцирует морфизм К. р. $\tau(M)\to\tau(N)$; соответствующее отображение касательных пространств $h^T: TM\to TN$ наз. касательным к h отображением. В частности, если $i: M\to N$ — иммерсия, то $\tau(M)$ является подрасслоением *индуцированного расслоения* $i^*\tau(N)$. Факторрасслоение $\nu(i)=i^*\tau(M)/\tau(M)$ наз. нормальным расслоением иммерсии. Двойственно, если $j: M\to N$—субмерсия, то факторрасслоение $\tau(M)/j^*\tau(M)$ наз. субрасслоением j. Если в качестве M и N взяты соответственно TM и M, а $h=\tau: TM\to M$, то $\tau^*\tau(M)$ наз. вторым касательным расслоением.

Если К. р. $\tau(M)$ — тривиально, то M наз. параллелизуемым многообразием.

Лит.: [1] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973.

М. И. Войцеховский.

КАСАТЕЛЬНЫЙ КОНУС—1) К. к. к выпуклой поверхности S в точке O—поверхность $V(O)$ конуса, образованного полупрямыми, исходящими из O и пересекающими выпуклое тело, ограниченное S по крайней мере в одной еще точке, отличной от O (сам этот конус иногда наз. телесным К. к.). Другими словами, $V(O)$ — граница пересечения всех полупространств, содержащих S и определяемых опорными плоскостями к S в точке O. Если $V(O)$ — плоскость, то O наз. гладкой точкой S, если $V(O)$ — двугранный угол, то O наз. ребристой точкой, наконец, если $V(O)$ — невырожденный (выпуклый) конус, то O наз. конической точкой поверхности S.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969. *М. И. Войцеховский.*

2). К. к. к алгебраическому многообразию X в точке x—множество предельных положений секущих прямых, проходящих через x. Точнее, если алгебраич. многообразие X вложено в аффинное пространство A^n и задается идеалом $\mathfrak{A}$ кольца $k[T_1, \ldots, T_n]$, а точка $x \in X$ имеет координаты $(0, \ldots, 0)$, то касательный конус $C(X, x)$ к X в точке x задается идеалом начальных форм многочленов из $\mathfrak{A}$ (если $F = F_k + F_{k+1} + \ldots$ — разложение F на однородные многочлены и $F_k \neq 0$, то F_k наз. начальной формой F). Существует другое определение, пригодное для произвольных нётеровых схем (см. [1]): пусть $O_{X,x}$— локальное кольцо схемы X в точке x, $\mathfrak{M}$ — его максимальный идеал, тогда спектр градуированного кольца

$$\bigoplus\nolimits_{n \geqslant 0}(\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1})$$

наз. касательным конусом к X в точке x.

Многообразие X в окрестности точки x в некотором смысле устроено так же, как К. к. Напр., если К. к. приведенный, нормальный или регулярный, то таким же будет локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$. Размерность и кратность X в точке x совпадают с размерностью К. к. и кратностью его в вершине. К. к. совпадает с *Зарисского касательным пространством* тогда и только тогда, когда x — неособая точка X. Морфизм многообразий индуцирует отображение К. к.

Лит.: [1] Igusa J., «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto», 1951, v. 27, p. 189—201; [2] Samuel P., Méthodes d'algèbre abstracte en géométrie algébrique, B., 1967; [3] Хиронака Ж., «Математика», 1965, т. 9, № 6, с. 2—70; [4] Whitney H., Differential and Combinatorial Topology, N.Y., 1965, p. 205—44. *В. И. Данилов.*

КАСАТЕЛЬНЫЙ ПОТОК — поток в пространстве Ω_k ортонормированных k-реперов n-мерного риманова многообразия M, обладающий следующим свойством. Пусть $\omega(t)$ — произвольная траектория потока; по определению пространства Ω_k, $\omega(t)$ есть нек-рый k-репер $\xi_1(t), \ldots, \xi_k(t)$ в нек-рой точке $x(t) \in M$ (т. е. в касательном пространстве к M в этой точке). Требуется, чтобы $dx(t)/dt = \xi_1(t)$ (вариант: требуется, чтобы сопровождающий репер параметризованной кривой $x(t)$ в M имел своими первыми k векторами как раз $\xi_1(t), \ldots, \xi_k(t)$). Для получения содержательных результатов о К. п. приходится накладывать различные дополнительные условия. Полученные результаты обобщают нек-рые из свойств *геодезических потоков* (являющихся частным случаем К. п., когда $k=1$ и ковариантная производная $D\xi_1/dt=0$). См. [1], [2].

Иногда касательными потоками наз. различные типы потоков в касательном пространстве к нек-рому многообразию M (или — считая, что M снабжено римановой или финслеровой метрикой,— в пространстве единичных касательных векторов). Напр., К. п. наз. *пульверизации* (вообще, уравнения 2-го порядка) на M и уравнения в вариациях для нек-рого потока на M. Но такое словоупотребление не получило распространения — со временем находились более употребительные термины.

Лит.: [1] Арнольд В. И., «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, № 2, с. 255—57; [2] его же, «Сиб. матем. ж.», 1961, т. 2, № 6, с. 807—13. *Д. В. Аносов.*

КАСАТЕЛЬНЫЙ ПУЧОК в алгебраической геометрии — пучок Θ_X на алгебраич. многообразии или схеме X над полем k, сечения к-рого над открытым аффинным подмножеством $U = \mathrm{Spec}(A)$ составляют A-модуль k-дифференцирований $\mathrm{Der}_k(A, A)$ кольца A. Эквивалентное определение состоит в том, что Θ_X есть пучок гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(\Omega^1_{X/k}, O_X)$ пучка дифференциалов $\Omega^1_{X/k}$ в структурный пучок O_X (см. *Дифференциалов модуль*).

Для любой рациональной k-точки $x \in X$ слой $\Theta_X(x)$ пучка Θ_X совпадает с касательным пространством Зариского $T_{X,x}$ к схеме X в точке x, т. е. с векторным k-пространством $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2, k)$, где $\mathfrak{M}_x$ — максимальный идеал локального кольца $O_{X,x}$. К. п. Θ_X служит пучком ростков сечений векторного расслоения $V(\Omega^1_{X/k})$, двойственного пучку Ω^1_X (касательного расслоения к схеме X). В случае, когда X — гладкая связная k-схема, пучок Θ_X является локально свободным пучком на X ранга, равного размерности X.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *И. В. Долгачев.*

КАСАТЕЛЬНЫХ ИНДИКАТРИСА кривой Г в евклидовом пространстве E^n — расположенная на сфере $S^n \subset E^n$ кривая Г*, радиус-векторы точек τ к-рой параллельны касательным векторам τ кривой Г. Для того чтобы сферич. кривая L была К. и. нек-рой замкнутой кривой в E^n, необходимо и достаточно, чтобы L не могла поместиться ни в какой открытой полусфере (теорема Крейна).

Лит.: [1] Выгодский М. Я., Дифференциальная геометрия, М.— Л., 1949. *М. И. Войцеховский.*

КАСКАД в теории динамических систем, динамическая система с дискретным временем, — *динамическая система*, определяемая действием аддитивной группы целых чисел $\mathbb{Z}$ (или аддитивной полугруппы натуральных чисел $\mathbb{N}$) на нек-ром фазовом пространстве W. Согласно общему определению действия группы (полугруппы), это означает, что каждому целому (натуральному) числу n сопоставлено нек-рое преобразование $S_n : W \to W$, причем

$$S_{n+m}(w) = S_n(S_m(w)) \qquad (*)$$

для всех $w \in W$. Поэтому все преобразования S_n получаются из одного преобразования $S = S_1$ посредством итерирования и (если $n < 0$) обращения:

$$S_n = (S)^n \text{ при } n > 0, \quad S_n = (S^{-1})^n \text{ при } n < 0.$$

Тем самым изучение К. по существу сводится к изучению свойств порождающего его преобразования S, и в этом смысле К. являются простейшими динамич. системами. Поэтому К. исследуются весьма интенсивно, хотя в приложениях чаще всего встречаются динамич. системы с непрерывным временем *(потоки)*. Принципиальная сторона дела для потоков и К. обычно одинакова, но случай К. несколько проще технически, и в то же время полученные для них результаты часто без особого труда удается перенести на потоки — иногда путем формальной редукции свойств потоков к свойствам К., но чаще путем нек-рого видоизменения доказательств.

Как и для любых динамич. систем, обычно фазовое пространство W наделено нек-рой структурой, и преобразования S_n ее сохраняют. Напр., W может быть гладким многообразием, топологич. пространством или пространством с мерой; соответственно говорят о непрерывном, гладком или измеримом К.

(впрочем, в последнем случае определение обычно несколько видоизменяют, требуя, чтобы каждое S_n было определено почти всюду и чтобы при любых n, m равенство (*) имело место при почти всех w). Преобразование S, порождающее К., является в этих случаях *диффеоморфизмом*, *гомеоморфизмом* или автоморфизмом пространства с мерой (если речь идет о группе преобразований), либо гладким отображением, непрерывным отображением или эндоморфизмом пространства с мерой (если К. является полугруппой).

Д. В. Аносов.

КАСКАДНЫЙ МЕТОД, метод Лапласа,— метод теории дифференциальных уравнений с частными производными, позволяющий в нек-рых случаях находить общее решение линейного уравнения с частными производными гиперболич. типа

$$Lu \equiv u_{xy} + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = f(x, y), \quad (1)$$

построив последовательность уравнений

$$L_i u \equiv u_{xy} + a_i(x, y)\, u_x + b_i(x, y)\, u_y + c_i(x, y) u = f_i(x, y), \quad (2_i)$$

$i = \pm 1, \pm 2, \ldots$, через решения к-рых выражается решение уравнения (1).

Уравнение (1) может быть записано в одном из следующих видов:

$$v_x + bv - hu = f, \quad w_y + aw - ku = f,$$

где

$$h = a_x + ab - c, \quad k = b_y + ab - c,$$

$$v = u_y + au, \quad w = u_x + bu.$$

Функции h и k наз. инвариантами уравнения (1).

При $h=0$ решение уравнения (1) сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений и его решение имеет вид:

$$u = e^{-\int a\,dy}\left[X + \int\left\{Y + \int f e^{\int b\,dx}\, dx\right\} e^{\int a\,dy - b\,dx}\, dy\right],$$

где X и Y — произвольные функции, зависящие соответственно от x и y. Аналогично, если $k \equiv 0$, то решение уравнения (1) запишется следующим образом:

$$u = e^{-\int b\,dx}\left[Y + \int\left\{X + \int f e^{\int a\,dy}\, dy\right\} e^{\int b\,dx - a\,dy}\, dx\right].$$

В случае $h \neq 0$, решение u уравнения (1) может быть получено из решения u_1 уравнения (2_1), коэффициенты a_1, b_1, c_1 и правая часть f_1 к-рого имеют вид:

$$a_1 = a - (\ln h)_y, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c - a_x + b_y - b\,(\ln h)_y,$$

$$f_1 = f \cdot (a - (\ln h)_y),$$

по формуле

$$u = \frac{u_{1x} + bu_1 - f}{h}.$$

Для уравнения (2_1) инварианты h_1 и k_1 выражаются по формулам

$$h_1 = 2h - k - (\ln h)_{xy}, \quad k_1 = h.$$

Если $h_1 \equiv 0$, то решение u_1 уравнения (2_1) получается описанным выше способом; если $h_1 \neq 0$, то процесс продолжается дальше построением уравнений (2_i), при $i = 2, 3, \ldots$, через решения последовательности уравнений с помощью квадратур выражается решение уравнения (1). В случае $k \neq 0$, можно построить аналогичную цепочку уравнений (2_i) при $i = -1, -2, \ldots$. Если на каком-нибудь шаге h_i (или k_i) обратится в нуль, то общее решение уравнения (1) находится в квадратурах.

К. м. может быть использован для перехода от данного уравнения к уравнению, для к-рого легче применить какой-либо другой из известных аналитических или численных методов решения; для получения семейств уравнений, решения к-рых известны и коэффициенты к-рых достаточно хорошо аппроксимируют коэффициенты уравнений, встречающихся в важных прикладных задачах; для получения основных операторов в теории возмущений операторов.

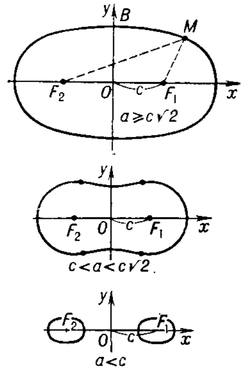
К. м. указан П. Лапласом [1] в 1773 и развит Г. Дарбу [2].

Лит.: [1] Laplace P. S., Oeuvres complètes, t. 9, P., 1893, p. 5—68; [2] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2 ed., t. 2, P., 1915; [3] Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, пер. с итал., М., 1957, с. 177—86; [4] Бабич В. М. и др., Линейные уравнения математической физики, М., 1964; [5] Домбровский Г. А., Метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа, М., 1964; [6] Чекмарев Т. В., «Изв. ВУЗов. Математика», 1972, № 11, с. 72—9; [7] Пашковский В. И., «Дифференциальные уравнения», 1976, т. 12, № 1, с. 118—28. *В. И. Пашковский.*

КАСП, обыкновенная точка возврата,— особая точка алгебраич. кривой специального типа. А именно, особая точка x алгебраич. кривой X над алгебраически замкнутым полем k наз. К., если пополнение ее локального кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ изоморфно пополнению локального кольца плоской алгебраич. кривой $y^2+x^3=0$ в начале координат.

КАССИНИ ОВАЛ — плоская алгебраич. кривая 4-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид:

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4.$$



К. о. — множество точек (см. рис.), произведение расстояний каждой из к-рых до двух заданных точек $F(-c,\ 0)$ и $F_1(c,\ 0)$ (фокусов) есть величина постоянная. При $a \geqslant c\sqrt{2}$ К. о.— овальная линия, при $c<a<c\sqrt{2}$— кривая с «талией», при $a=c$ — *Бернулли лемниската*, при $a<c$ — два овала. К. о. относятся к *лемнискатам*. К. о. рассматривались Дж. Кассини (G. Cassini, 17 в.) при попытках определить орбиту Земли.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

КАТАЛАНА ПОВЕРХНОСТЬ — линейчатая поверхность, прямолинейные образующие к-рой параллельны одной и той же плоскости. Ее стрикционная линия плоская. Радиус-вектор К. п.: $r=\rho(u)+vl(u)$, причем $l''(u)\neq 0$, $(l,\ l',\ l'')=0$. Если все образующие К. п. пересекают одну и ту же прямую, то она является *коноидом*.

Лит.: [1] Catalan E., Mémoire sur les surfaces gauches à plan directeur, P., 1843. *И. Х. Сабитов.*

КАТЕГОРИЧНАЯ СИСТЕМА АКСИОМ — всякая система аксиом Σ, для к-рой все алгебраические системы сигнатуры Σ, удовлетворяющие этим аксиомам, изоморфны. Из теоремы Мальцева — Тарского об элементарном расширении следует, что модели категоричной системы Σ аксиом 1-го порядка имеют конечную мощность. Верно и обратное: для любой конечной алгебраич. системы A существует категоричная система Σ аксиом 1-го порядка, модели к-рой изоморфны A. Пусть Σ_0 — множество универсальных замыканий формул

$$1)\ 0\neq x+1, \qquad 2)\ x+1=y+1\longrightarrow x=y,$$

$$3)\ x+0=x, \qquad 4)\ x+(y+z)=(x+y)+z,$$

$$5)\ x\cdot 0=0, \qquad 6)\ x\cdot(y+1)=(x\cdot y)+x,$$

$$7)\ (\varphi(0)\ \&\ \forall x\,(\varphi(x)\longrightarrow\varphi(x+1)))\longrightarrow\forall x\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — любая формула сигнатуры $\langle +,\ \cdot,\ 0,\ 1\rangle$. Система аксиом Σ_0 известна под названием арифметики Пеано. Арифметика натуральных чисел N

будет моделью для Σ_0. Однако существуют модели Σ_0, не изоморфные N. Пусть система Σ_1 получается из Σ_0 заменой схемы элементарной индукции 7) на аксиому полной индукции

$$\forall P\,((P\,(0)\,\&\,\forall\,x\,(P\,(x) \longrightarrow P\,(x+1))) \longrightarrow \forall x P\,(x)),$$

записанную на языке 2-го порядка. Система Σ_1 является категоричной, и все модели Σ_1 изоморфны арифметике натуральных чисел N. Другой способ категоричного описания арифметики N состоит в добавлении к Σ_0 следующей бесконечной аксиомы (языка $L_{\omega_1\omega}$):

$$\forall x\,(x=0 \vee x=1 \vee \ldots \vee x=n \vee \ldots),$$

где n — сокращение для суммы $1+\ldots+1$ из n единиц.

Лит.: [1] Шенфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975. *Е. А. Палютин.*

КАТЕГОРИЧНОСТЬ В МОЩНОСТИ $\varkappa$ — свойство класса алгебраич. систем, заключающееся в изоморфизме всех систем из этого класса, имеющих мощность $\varkappa$. Теория T 1-го порядка наз. **категоричной в мощности** $\varkappa$, если все модели T мощности $\varkappa$ изоморфны одной алгебраич. системе. Счетная полная теория T категорична в счетной мощности тогда и только тогда, когда для любого натурального числа n существует такое конечное множество F_n формул сигнатуры T со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$, что любая формула сигнатуры T со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$ эквивалентна в теории T одной из формул множества F_n. Совокупность аксиом:

1) $x<y \longrightarrow \neg\,(y<x)$,
2) $(x<y\,\&\,y<z) \longrightarrow x<z$,
3) $x<y \vee x=y \vee y<x$,
4) $\exists u \exists v \exists t\,(x<y \longrightarrow u<x<v<y<t)$

определяет теорию T_0 плотных линейных порядков, к-рая категорична в счетной мощности и не категорична во всех несчетных мощностях. Теория T_1 алгебраически замкнутых полей характеристики 0 категорична во всех несчетных мощностях, но не категорична в счетной мощности. Верна общая теорема: если счетная теория T 1-го порядка категорична в какой-нибудь несчетной мощности, то она категорична во всех несчетных мощностях. Этот результат обобщен на несчетные теории T с заменой в условии несчетных мощностей на мощности, бóльшие мощности теории T. **Квазитождеством** наз. универсальное замыкание формулы

$$(Q_0\&Q_1\&\ \ldots\ \&Q_n) \longrightarrow P,$$

где Q_i и P — атомарные формулы. В счетных теориях T', аксиоматизируемых с помощью квазитождеств, возможностей распределения категоричности еще меньше: если такая теория T' категорична в счетной мощности, то она категорична во всех мощностях. Если к аксиомам теории T_0 добавить аксиомы для констант c_i

5_i) $c_i < c_{i+1}$,

где i пробегает все натуральные числа, то полученная теория T_3 имеет ровно три счетных модели (с точностью до изоморфизма), так как возможны лишь 3 случая: множество $\{c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots\}$ не имеет верхней грани, имеет верхнюю грань, но не имеет наименьшей верхней грани, и, наконец, имеет наименьшую верхнюю грань. Если в счетных моделях M_1 и M_2 теории T_3 имеет место один и тот же из описанных случаев, то M_1 изоморфна M_2. Оказывается, что среди теорий, категоричных в несчетных мощностях, аналогичного примера найти нельзя. А именно: если теория T 1-го порядка категорична в несчетной мощности, то число счетных моделей T (с точностью до изоморфизма) либо равно 1, либо бесконечно.

Лит.: [1] Сакс Дж., Теория насыщенных моделей, пер. с англ., М., 1976; [2] Палютин Е. А., «Алгебра и логика», 1975, т. 14, № 2, с. 145—85; [3] Shelah S., «Proc. of Symp. Pure Math.», 1974, v. 13, № 2, p. 187—203. *Е. А. Палютин.*

КАТЕГОРИЯ — понятие, выделяющее ряд алгебраич. свойств совокупностей морфизмов однотипных математич. объектов (множеств, топологич. пространств, групп и т. п.) друг в друга при условии, что эти совокупности содержат тождественные отображения и замкнуты относительно последовательного выполнения (суперпозиции или умножения) отображений. К. $\mathfrak{K}$ состоит из класса Ob$\mathfrak{K}$, элементы к-рого наз. объектами категории, и класса Mor$\mathfrak{K}$, элементы к-рого наз. морфизмами категории. Эти классы должны удовлетворять следующим условиям:

1) Каждой упорядоченной паре объектов A, B сопоставлено множество $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ (обозначаемое также Hom (A, B) или $H(A, B)$) из Mor; если $\alpha \in H(A, B)$, то говорят, что A — начало, или область определения, морфизма α, а B — конец, или область значений α; часто вместо $\alpha \in H(A, B)$ пишут $\alpha : A \to B$ или $A \xrightarrow{\alpha} B$.

2) Каждый морфизм К. принадлежит одному и только одному множеству $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$.

3) В классе Mor $\mathfrak{K}$ задан частичный закон умножения: произведение морфизмов $\alpha : A \to B$ и $\beta : C \to D$ определено тогда и только тогда, когда $B = C$, и принадлежит множеству $H(A, D)$, произведение α и β обозначается $\alpha\beta$ или $\beta\alpha$.

4) Для любых морфизмов $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$ и $\gamma : C \to D$ справедлив закон ассоциативности:

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

5) В каждом множестве $H_{\mathfrak{K}}(A, A)$ содержится такой морфизм 1_A, что $\alpha \cdot 1_A = \alpha$ и $1_A \cdot \beta = \beta$ для любых морфизмов $\alpha : X \to A$ и $\beta : A \to Y$; морфизмы 1_A наз. единичными, тождественными, или единицами.

Входящее в определение К. понятие класс предполагает использование такой аксиоматики теории множеств, к-рая различает множества и классы. Наиболее употребительной является аксиоматика Гёделя — Бернсайда — Неймана.

Иногда в определении К. не требуют, чтобы классы $H(A, B)$ являлись множествами. Иногда вместо использования классов предполагается существование универсального множества и требуется принадлежность классов Ob$\mathfrak{K}$ и Mor$\mathfrak{K}$ фиксированному универсальному множеству.

Поскольку между единицами К. $\mathfrak{K}$ и классом Ob$\mathfrak{K}$ имеется биективное соответствие, К. можно определить как класс морфизмов с частичным умножением, удовлетворяющим дополнительным требованиям (см., напр., [6], [9]).

Понятие К. было введено в 1945 [8]. Своим происхождением и первоначальными стимулами развития теория К. обязана алгебраич. топологии. Последующие исследования выявили объединяющую и унифицирующую роль понятия К. и связанного с ним понятия функтора для многих разделов математики.

Примеры К.:

1) Категория множеств Ens; класс Ob Ens состоит из всевозможных множеств, класс Mor Ens — из всевозможных отображений множеств друг в друга, а умножение совпадает с последовательным выполнением отображений (см. *Множеств категория*).

2) Категория топологических пространств Top (или $\mathfrak{T}$); класс Ob Top состоит из всевозможных топологич. пространств, класс Mor Top — из всех непрерывных отображений топологич. пространств, а умножение снова совпадает с последовательным выполнением отображений.

3) Категория групп Gr (или $\mathfrak{G}$); класс Ob Gr состоит из всевозможных групп, класс Mor Gr — из всех гомоморфизмов групп, а умножение опять совпадает с последовательным выполнением гомоморфизмов

(см. *Групп категория*). По аналогии с этими примерами можно ввести К. векторных пространств над нек-рым телом, К. колец и т. п.

4) Категория бинарных отношений множеств Rel Ens (или $R(\mathfrak{S})$); класс объектов этой К. совпадает с классом Ob Ens, а морфизмами множества A в множество B служат бинарные отношения этих множеств, т. е. всевозможные подмножества декартова произведения $A\times B$; умножение совпадает с умножением бинарных отношений.

5) Полугруппа с единицей является К. с одним объектом, и наоборот, каждая К., состоящая из одного объекта, есть полугруппа с единицей.

6) Предупорядоченное множество N можно рассматривать как К. $\mathfrak{N}$, для которой $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{N}=N$ и $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{N}=\{(a,\ b)|a,\ b\in N,\ a\leqslant b\}$, а умножение определяется равенством $(a,\ b)(b,\ c)=(a,\ c)$.

Все перечисленные выше К. допускают изоморфное вложение в К. множеств. К., обладающие указанным свойством, наз. конкретными К. Не всякая К. конкретна, напр., такова К., объектами к-рой являются все топологич. пространства, а морфизмами — классы гомотопных отображений [10].

Запас примеров К. можно значительно расширить при помощи различных конструкций и прежде всего при помощи К. функторов или К. диаграмм.

Отображение $F:\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}'$ категории $\mathfrak{K}$ в категорию $\mathfrak{K}'$ наз. ковариантным функтором, если для каждого объекта $A\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ объект $F(A)\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}'$, для каждого морфизма $\alpha\in H_{\mathfrak{K}}(A,\ B)$ образ $F(\alpha)\in H_{\mathfrak{K}'}(F(A),F(B))$, причем $F(1_A)=1_{F(A)}$ и $F(\alpha\beta)=F(\alpha)\times F(\beta)$ всякий раз, когда определено произведение $\alpha\beta$. Если объекты К. $\mathfrak{K}$ составляют множество, то можно построить К. диаграмм Funct($\mathfrak{K}$,) или $F(\mathfrak{K},\ \mathfrak{K}')$, объектами к-рой являются всевозможные ковариантные функторы из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{K}$, а морфизмами — всевозможные естественные преобразования этих функторов.

Каждой К. $\mathfrak{K}$ может быть сопоставлена двойственная, или дуальная, К. $\mathfrak{K}^*$, или $\mathfrak{K}^T$, для которой $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}^*=\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ и $H_{\mathfrak{K}^*}(A,\ B)=H_{\mathfrak{K}}(B,\ A)$ для любых $A,\ B\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$. Ковариантный функтор из $\mathfrak{K}^*$ в $\mathfrak{K}'$ наз. контравариантным функтором из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{K}$. Наряду с функторами одного аргумента можно рассматривать многоместные функторы или функторы от многих аргументов.

Для каждого предложения теории К. существует двойственное (дуальное) предложение, к-рое получается формальным «обращением стрелок». При этом справедлив так наз. принцип двойственности: предложение p истинно в теории К. тогда и только тогда, когда в этой теории истинно двойственное предложение p^*.

Многие понятия и результаты в математике оказались двойственными друг другу с категорной точки зрения: инъективность и проективность, нильпотентность и К. топологич. пространства в смысле Люстерника — Шнирельмана, многообразия и радикалы в алгебре и т. д.

Теоретико-категорный анализ основ теории гомологий привел к выделению в середине 50-х гг. 20 в. так наз. *абелевых категорий*, в рамках к-рых оказалось возможным осуществить основные построения гомологич. алгебры [2]. В 60-е гг. 20 в. определился возрастающий интерес к неабелевым К., вызванный задачами логики, общей алгебры, топологии и алгебраич. геометрии. Интенсивное развитие универсальной алгебры и аксиоматич. построения теории гомотопий положили начало различным направлениям исследований: категорному изучению многообразий универсальных алгебр, теории изоморфизмов прямых разложений, теории сопряженных функторов и теории двойственности функторов. Последующее развитие обнаружило существенные взаимосвязи между этими исследованиями. Благодаря возникшей в последние годы теории относительных К., широко использующей технику сопряженных функторов и замкнутых К., была установлена двойственность между теорией гомотопий и теорией универсальных алгебр, основанная на интерпретации категорных определений моноида и комоноида в подходящих К. функторов (см., напр., [7]). Наряду с развитием общей теории относительных К., шло выделение специальных классов таких К.: 2-категории, или формальные К., К. с инволюцией, или 1-категории, включающие, в частности, К. бинарных отношений, и т. д. В частности, 2-категорией является К. малых К., к-рая может быть положена в основу аксиоматического построения математики.

Перечисленные классы К. характеризуются тем, что их множества морфизмов $H(A, B)$ обладают дополнительной структурой. Другой способ введения дополнительных структур в К. связан с заданием в К. топологии и построении К. пучков над топологизированной К. (так наз. топосы).

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [3] Курош А. Г., Лившиц А. Х., Шульгейфер Е. Г., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 6, с. 3—52; [4] Итоги науки. Алгебра. Топология. 1962, М., 1963, с. 90—106; [5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969, с. 9—57; [6] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974; [7] Bunge M., «J. Algebra», 1969, v. 11, p. 64—101; [8] Eilenberg S., Mac Lane S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1945, v. 58, p. 231—94; [9] Freyd P., Abelian categories, N. Y., 1964; [10] его же, «Symposia mathem.», IV, S. 431—56; [11] Mac Lane S., Kategorien. Begriffssprache und mathematische Theorie, B., 1972; [12] Schubert H., Kategorien, Bd 1—2, B., 1970; [13] Mitchell B., Theory of categorie, N. Y., 1965.

М. Ш. Цаленко.

КАТЕГОРИЯ (в смысле Люстерника — Шнирельмана) — характеристика топологич. пространства E — минимальное число $\mathrm{cat}E$ таких замкнутых множеств $A_i \subset E$, к-рыми можно покрыть E и каждое из к-рых может быть стянуто в точку посредством непрерывной деформации в E. К. является гомотопич. инвариантом (т. е. совпадает для всех топологич. пространств одного *гомотопического типа*). К. имеет важное значение для *вариационного исчисления в целом*, так как она оценивает снизу число стационарных (критических) точек гладкой функции на замкнутом многообразии. Уже простейшие примеры вроде функции $f(x)=x$, рассматриваемой на всей действительной оси и вообще не имеющей критич. точек, показывают, что за пределами класса замкнутых многообразий нельзя ожидать, чтобы такая оценка выполнялась для всех гладких функций. Тем не менее в ряде случаев удается получить аналогичную оценку для числа критич. точек различных изучаемых в вариационном исчислении функционалов, рассматриваемых как функции на бесконечномерных функциональных пространствах. Общих методов вычисления К. не имеется (хотя известно ее значение для некоторых конкретных пространств), известна только оценка

$$\mathrm{cat}\, E \geqslant \mathrm{long}\, E+1,$$

где (когомологическая) длина $\mathrm{long}\, E$ определяется как наибольшее число классов когомологий положительной размерности, произведение которых может быть отлично от нуля. Поэтому иногда рассуждения проводят непосредственно в терминах когомологического умножения (или, двойственно, пересечения циклов), не обращаясь к К.

К. введена в [1], впервые вычислена в нетривиальном случае (для действительного проективного пространства) и сразу же использована для решения ряда задач, в том числе задачи Пуанкаре о трех замкнутых геодезических на поверхностях, гомеоморфных двумерной сфере [2].

Лит.: [1] Lusternik L., в кн.: «Atti del Congresso Internazionale dei Matematica», Bologna, 1931, t. 4, p. 291—96; [2] Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, № 1, с. 166—217. *Д. В. Аносов.*

КАТЕГОРИЯ МНОЖЕСТВА — топологическая характеристика «массивности» множества. Множество E топологич. пространства X наз. множеством первой категории на X, если оно представимо в виде конечной или счетной суммы множеств, нигде не плотных на X. В противном случае E наз. множеством второй категории. Иногда множеством второй категории наз. также дополнение в X к множеству первой категории. В современной литературе (см. [2]) иногда (в случае *Бэра пространства*) такие множества наз. резидуальными, или остаточными. Непустое замкнутое числовое множество, в частности отрезок, не является множеством первой категории на самом себе [1]. Имеется обобщение этого результата на случай любого полного метрич. пространства. Это обобщение имеет большое применение в анализе. Роль множества первой категории в топологии аналогична роли множества меры нуль в теории меры. Однако множество первой категории может быть множества полной меры, а среди множеств меры нуль имеются множества второй категории.

Лит.: [1] Бэр Р., Теория разрывных функций, пер. с франц., М.— Л., 1932; [2] Окстоби Д., Мера и категория, пер. с англ., М., 1974. *В. А. Скворцов.*

КАТЕГОРИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ — категория, обладающая рядом характерных свойств категории бинарных отношений. К. с и. наз. категория, в к-рой каждое множество $H(A, B)$ частично упорядочено отношением $\subset$, а также задано отображение $^{\#}$, наз. инволюцией, сопоставляющее морфизму α морфизм $\alpha^{\#}$ и удовлетворяющее следующим условиям:

а) если $\alpha \in H(A, B)$, то $\alpha^{\#} \in H(B, A)$;

б) $\alpha^{\#\#}=\alpha$;

в) если $\alpha \in H(A, B)$, $\beta \in H(B, C)$, то $(\alpha\beta)^{\#}=\beta^{\#}\alpha^{\#}$;

г) если $\alpha \subset \beta$, $\alpha, \beta \in H(A, B)$ и $\gamma \in H(B, C)$, то $\alpha\gamma \subset \beta\gamma$.

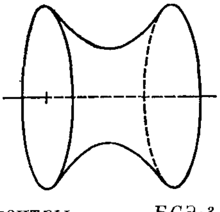
В каждой К. с и. утверждение, двойственное истинному утверждению, также истинно (усиленный принцип двойственности). Категория, двойственная К. с и., является К. с и. Всякая группа может рассматриваться как К. с и., состоящая из одного объекта, если в качестве отношения порядка взять отношение тождества (тривиальный частичный порядок), а в качестве инволюции — отображение, сопоставляющее элементу группы обратный к нему элемент.

Важный пример К. с и.— категория бинарных отношений $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ над категорией множеств $\mathfrak{S}$ строится следующим образом. $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{R}(\mathfrak{S})=\mathrm{Ob}\,\mathfrak{S}$, морфизмы $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ — бинарные отношения с обычным умножением бинарных отношений и частичной упорядоченностью, индуцируемой отношением включения подмножеств декартова произведения. Инволюция в этой категории определяется с помощью перестановки множителей в декартовом произведении. Аналогично можно построить категории бинарных отношений над категориями групп, колец, топологич. групп и т. п. Однако для категории всех топологич. пространств описанное выше построение зависит от выбора структуры бикатегории и может привести к неассоциативному умножению.

Описание строения разных классов К. с и., их связей с классами точных, абелевых, регулярных категорий и их использование в гомологич. алгебре можно найти в [1] — [4].

Лит.: [1] Brinkmann H. B., Puppe D., Abelsche und exakte Kategorien, B. — Hdlb.—N. Y., 1969; [2] Kawahara J., «Memoirs Fac. Sci., Kyushu Univ. Ser. A. Math.», 1973, v. 27, № 1, p. 149—73; [3] его же, там же, 1973, v. 27, № 2, p. 249—73; [4] Цаленко М. Ш., «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, № 2, с. 297—9. *М. Ш. Цаленко.*

КАТЕНОИД — поверхность, образуемая вращением цепной линии $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{b}$ вокруг оси Ox, принадлежит к числу *минимальных поверхностей*. Форму К. принимает мыльная пленка (см. рис.), «натянутая» на 2 проволочных круга, плоскости к-рых перпендикулярны линии, соединяющей их центры.



БСЭ-3.

КАТЕТ — сторона прямоугольного треугольника, прилегающая к прямому углу.

КАУСТИКА — огибающая лучей, отраженных или преломленных данной линией. К. отраженных лучей наз. катакаустикой, К. преломленных лучей — диакаустикой. Напр., катакаустика параллель-

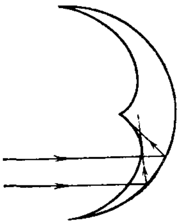


Рис. 1.

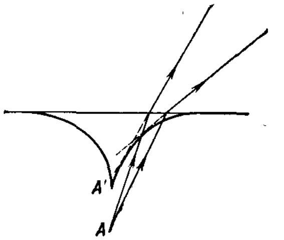


Рис. 2.

ного пучка лучей, отраженного от полуокружности,— часть эпициклоиды (см. рис. 1); диакаустика пучка лучей, исходящего из точки A, лежащей в более плотной среде, и преломленного прямой,— часть астроиды с острием в точке A', лежащей на расстоянии в n раз (n — показатель преломления) более близком от прямой, чем сама точка A (см. рис. 2).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

А. Б. Иванов.

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ — математическая дисциплина, изучающая свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений без нахождения самих решений.

Основы К. т. д. у. были заложены в конце 19 в. А. Пуанкаре (см. [1], [2]) и А. М. Ляпуновым (см. [3], [4]). А. Пуанкаре широко пользовался геометрич. методами, рассматривая решения систем дифференциальных уравнений как кривые в соответствующем пространстве. На основе этого рассмотрения он создал общую теорию поведения решений дифференциальных уравнений (д. у.) 2-го порядка, разрешил ряд фундаментальных проблем о зависимости решений от параметров (см. ниже). А. М. Ляпунов изучал поведение решений в окрестности состояния равновесия. Он создал современную теорию устойчивости движения (см. *Устойчивости теория*).

Геометрическое направление А. Пуанкаре было развито в 20-х гг. 20 в. Дж. Биркгофом, открывшим многие важные факты качественной теории многомерных систем д. у. (см. [5], [6]).

Линейные системы. Рассматривается система д. у.

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\, y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $P(x)$ — квадратная матрица порядка n. Предполагается, что $P(x)$ ограничена (в случае неограниченности имеется лишь небольшое число весьма специальных исследований). В К. т. д. у. изучается асимптотич. поведение решений системы (1) при $x \to \infty$.

Характеристическим показателем решения $y(x)$ наз. величина

$$\lambda = \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{1}{x} \ln |y(x)|,$$

характеризующая рост решения в сравнении с экспоненциальной функцией. Каждое ненулевое решение системы (1) имеет конечный характеристич. показатель. Характеристич. показатели ненулевых решений наз. также **характеристическими показателями системы**. Линейная система не может иметь более чем n различных характеристич. показателей. Характеристич. показатели системы не меняются при линейной замене переменных:

$$z = U(x)y, \tag{2}$$

в к-рой матрица $U(x)$ ограничена вместе с $\frac{dU}{dx}$ и U^{-1}. Такие преобразования наз. **преобразованиями Ляпунова**.

В случае, когда матрица $P(x)$ постоянна, характеристич. показатели системы (1) суть действительные части собственных значений матрицы P.

Линейная система наз. **приводимой**, если существует преобразование Ляпунова (2), приводящее эту систему к виду (1), но с постоянной матрицей P (см. [7], [8]).

В случае, когда матрица $P(x)$ имеет период ω, **фундаментальная матрица** $\Phi(x)$ (т. е. матрица, составленная из линейно независимых решений) представляется по теореме Флоке (см. [9]) в следующем виде:

$$\Phi(x) = Q(x)\, e^{Ax}, \tag{3}$$

где $Q(x)$ есть ω-периодическая, а A — постоянная матрицы. При этом, если $P(x)$ — вещественная матрица, не всегда можно A и $Q(x)$ выбрать вещественными, однако в представлении (3) их можно выбрать таковыми при условии, что $Q(x)$ имеет период 2ω. Из формулы (3) следует, что система (1) с периодич. матрицей $P(x)$ приводима (**теорема Ляпунова**). Формула (3) показывает, что для вычисления характеристич. показателей требуется знать лишь $\Phi(\omega)$, т. е. надо вычислить n различных решений на промежутке $0 \leqslant x \leqslant \omega$. Линейные системы с периодич. коэффициентами изучены весьма подробно (см. [8], а также *Линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*).

Линейная система обладает свойством устойчивости асимптотич. поведения решений по отношению к малым возмущениям самой системы. Важной характеристикой линейной системы с этой точки зрения является правильность в смысле Ляпунова (см. [3]).

А. М. Ляпунов доказал (это составляет сущность его первого метода в теории устойчивости), что правильная система устойчива по отношению к аналитическим нелинейным возмущениям.

Одной из интересных задач качественной теории линейных д. у. является проблема колеблемости решений таких уравнений (см. *Колеблющееся решение*), т. е. проблема распределения нулей решений. Напр., если $p(x) > \alpha > 0$ при всех x, то всякое решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\, y = 0$$

имеет бесконечно много нулей на промежутке $0 < x < +\infty$, причем нули двух линейно независимых решений чередуются (см. [10]).

Нелинейные системы. Рассматриваются общие системы нелинейных д. у. в нормальной форме:

$$\frac{dy}{dx} = Y(y, x), \qquad y \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Наиболее детально изучены *автономные системы*:

$$\frac{dy}{dx} = Y(y). \tag{5}$$

Пространство векторов y для системы (5) наз. **фазовым**. Система (4) приводится к автономному виду (5) с помощью увеличения порядка на единицу. Автономная система вида (5), в случае если все ее решения продолжимы на всю ось $-\infty<x<+\infty$, определяет *динамическую систему*.

Пусть $y=y(x, y_0)$ — решение системы (5) с начальными данными $x=0$, $y=y_0$. Кривая фазового пространства $y=y(x, y_0)$, $-\infty<x<+\infty$, наз. траекторией, а ее части, соответствующие $x\geqslant0$, $x\leqslant0$,— полутраекториями. Особую роль играют траектории, вырождающиеся в точку: $y(x, y_0)\equiv y_0$; это происходит, если $Y(y_0)=0$. Такие точки наз. состояниями равновесия. Другой важный тип траекторий — траектории периодич. решений, представляющие собой замкнутые кривые в фазовом пространстве. Замкнутую траекторию наз. *предельным циклом*, если к ней стремится хотя бы одна траектория, отличная от нее.

Важная задача качественной теории нелинейных систем — изучение асимптотич. поведения всех решений при $x\to\pm\infty$. Для автономных систем вида (5) эта задача сводится к изучению структуры предельных множеств всех полутраекторий и способов приближения траекторий к этим множествам. Предельное множество всякой полутраектории замкнуто и инвариантно (множество фазового пространства наз. инвариантным, если оно состоит из целых траекторий). Если полутраектория ограничена, то ее предельное множество связно.

В случае, когда $n=2$, т. е. когда фазовое пространство представляет собой плоскость, А. Пуанкаре (см. [1]) и И. Бендиксон (I. Bendixon, см. [11]) дали исчерпывающее описание возможного расположения траекторий. В предположении, что уравнение $Y(y)=0$ имеет лишь конечное число решений в ограниченной части плоскости, они доказали, что предельное множество любой ограниченной полутраектории может быть одного из трех следующих типов: 1) одно состояние равновесия, 2) одна замкнутая траектория, 3) конечное число состояний равновесия и траектории, стремящиеся к этим состояниям равновесия при $x\to\pm\infty$. А. Пуанкаре [1] и А. Данжуа [12] рассмотрели случай уравнения 1-го порядка вида (4) с правой частью, периодичной по обоим аргументам y и x. Такие уравнения удобно рассматривать на торе (см. *Дифференциальные уравнения на торе*). Расположение решений в этом случае существенно зависит от числа вращения, определяемого формулой

$$\mu=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x, y_0)}{x}.$$

Если μ рационально, то существуют периодические решения; если μ иррационально, то периодич. решений нет. При этом, если функция Y достаточно гладкая, то все решения суть квазипериодич. функции с двумя частотами.

В случае $n>2$ такого четкого описания возможного поведения траекторий дать не удается. Однако имеется много сведений, касающихся предельного поведения решений многомерных автономных систем. Имеет место следующий результат Дж. Биркгофа. Пусть замкнутое, ограниченное, инвариантное множество фазового пространства наз. минимальным, если оно не содержит истинного подмножества с теми же свойствами. Всякое минимальное множество представляет собой замыкание рекуррентной траектории. Таким образом, в предельном множестве всякой ограниченной полутраектории содержится рекуррентная траектория.

В том важном частном случае, когда система имеет инвариантную меру, исследование общих закономерностей поведения решений проведено весьма детально (см. [5], [22]).

Особый интерес для приложений представляют *грубые системы*, т. е. системы, устойчивые по отношению к малым в смысле C^1 возмущениям правых частей. Для случая $n=2$ А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин [13] сформулировали условия, необходимые и достаточные для грубости. В частности, они показали, что в ограниченной части плоскости существует лишь конечное число периодич. решений. В случае $n>2$ поведение грубых систем значительно сложнее. С. Смейл (S. Smale, [14]) указал пример грубой системы, имеющей бесконечно много периодич. решений в ограниченной части фазового пространства.

Многочисленные исследования посвящены изучению глобальных свойств конкретных систем д. у. В связи с запросами теории автоматич. управления в 50-х гг. 20 в. была развита новая отрасль К. т. д. у.— теория устойчивости движения в целом. Важную роль в теории колебаний играют диссипативные системы — системы вида (4), у к-рых все решения с ростом времени попадают в нек-рую ограниченную область. Свойства диссипативных систем изучены весьма детально. Построены сравнительно надежные методы, позволяющие устанавливать диссипативность конкретных систем (см. [15]).

Одной из проблем К. т. д. у. является проблема существования периодич. решений. Для доказательства существования таких решений часто используют топологич. приемы, в частности различные критерии существования неподвижной точки. Многие теоремы такого рода были доказаны применением принципа тора. При $n=2$ этот принцип вырождается в классический принцип кольца Пуанкаре.

Полное качественное исследование нелинейных систем д. у. удается дать лишь в весьма частных случаях. Напр., было доказано (см. [16]), что *Льенара уравнение*

$$\ddot{x}+f(x)\,\dot{x}+g(x)=0$$

при весьма естественных предположениях имеет единственное периодич. решение, а все остальные его решения стремятся к этому периодическому.

Относительно уравнения Ван дер Поля с возмущением

$$\ddot{x}+k\,(x^2-1)\,\dot{x}+x=kb\lambda\sin\lambda t$$

при больших значениях параметра k были установлены в числе других следующие интересные факты (см. [17]). При специальном выборе параметра b уравнение имеет два асимптотически устойчивых решения с периодами $(2n+1)2\pi/\lambda$ и $(2n-1)2\pi/\lambda$, где n — натуральное достаточно большое число, «большинство» остальных решений стремится к этим двум. Имеется, кроме того, счетное множество неустойчивых периодич. решений и континуум рекуррентных непериодических.

Локальная теория. Качественное исследование нелинейной системы д. у. (4) значительно упрощается, если его требуется провести не во всем пространстве y, x, а лишь в окрестности заданного решения. В этом случае простой заменой переменных проблема сводится к изучению следующей системы д. у.:

$$\frac{dy}{dx}=P(x)\,y+Y(y,\ x),\quad y\in\mathbb{R}^n,\qquad(6)$$

где вектор-функция Y в определенном смысле мала в сравнении с y. Исследование поведения решений системы (6) в окрестности состояния равновесия $y=0$ и составляет предмет локальной К. т. д. у.

Важное место в этой теории занимает проблема устойчивости нулевого решения системы (6). Нулевое решение наз. устойчивым, если решение $y=y(x,\ y_0)$ непрерывно по y_0 при $y_0=0$ равномерно относительно $x\geqslant 0$.

В локальной К. т. д. у. наиболее полно исследован случай постоянной матрицы $P(x)$. К этому случаю сводится проблема исследования окрестности состояния равновесия и периодич. решения автономной системы.

Описание поведения решений системы (6) в окрестности $y=0$ сравнительно просто, если матрица P постоянная и все ее собственные значения имеют ненулевые действительные части. В этом случае дело сводится к следующему фундаментальному результату Ляпунова — Перрона (см. [1], [18]). Пусть k собственных значений постоянной матрицы P имеют отрицательные действительные части, а остальные $n-k$ собственных значений имеют положительные действительные части. Тогда в пространстве y существуют два многообразия M и N размерности k и $n-k$, соответственно, такие, что если $y_0 \in M$, то $y(x, y_0) \to 0$ при $x \to +\infty$, а если $y_0 \in N$, то $y(x, y_0) \to 0$ при $x \to -\infty$; все остальные решения покидают окрестность начала координат как при возрастании, так и при убывании x. Случаи, когда матрица P имеет собственные числа с нулевыми действительными частями, наз. критическими.

А. М. Ляпунов дал исчерпывающее описание поведения решений системы (6) в окрестности начала координат в случаях, когда постоянная матрица P имеет одно нулевое или два чисто мнимых собственных числа, все остальные собственные числа имеют отрицательные действительные части, а вектор-функция Y не зависит от x и аналитична (см. [3]). Основополагающие результаты в локальной качественной теории автономных систем 2-го порядка принадлежат А. Пуанкаре [1], А. М. Ляпунову [3, 4], И. Бендиксону [11] и М. Фроммеру (M. Frommer, [19]).

Пусть рассматривается система уравнений

$$\frac{dy}{dx}=P_m(y, z)+Y(y, z), \quad \frac{dz}{dx}=Q_m(y, z)+Z(y, z), \quad (7)$$

где P_m и Q_m — формы степени m, а функции Y и Z малы в сравнении с величиной $(y^2+z^2)^{m/2}$. Пусть состояние равновесия, расположенное в начале координат, изолировано. В этом случае для системы (7) либо существует решение, стремящееся к началу, либо в любой окрестности начала существует замкнутая траектория. Во втором случае либо все траектории, лежащие в окрестности начала, замкнуты (расположение типа *центр*), либо в любой окрестности начала существуют как замкнутые, так и незамкнутые траектории (расположение типа центрофокус). Показано, что в случае аналитических Y и Z центрофокус невозможен (см. [20]). Далее, если траектория стремится к началу координат, то либо она имеет в начале определенную касательную, либо вдоль нее полярный угол не ограничен. В последнем случае — расположение типа *фокус*. Касательными к траекториям, стремящимся к началу, могут быть лишь прямые, на к-рых аннулируется величина $Q_m y-P_m z$. Такие прямые наз. исключительными направлениями. Для достаточно гладких Y и Z разработаны алгоритмы, позволяющие выяснить наличие и количество траекторий, входящих в начало вдоль данного исключительного направления. Это позволяет в случаях, когда существуют траектории, входящие в начало с определенной касательной, полностью описать поведение траекторий в окрестности начала.

Если исключительные направления отсутствуют или все они «проходятся» решениями (т. е. не существует решений, входящих в начало с определенной касательной), то возникает *центра и фокуса проблема*.

Зависимость поведения решений от параметров системы. Одной из центральных проблем К. т. д. у. является проблема поведения решений системы, близкой к данной, при условии, что свойства этой последней известны. Рассматривается система

$$\frac{dy}{dx}=Y(y, x)+\mu R(y, x, \mu), \quad (8)$$

где μ — параметр. Пусть порождающая система, т. е. система (8) при $\mu=0$, обладает нек-рым свойством. Ставится вопрос, обладает ли тем же свойством система (8) при малых, но отличных от нуля, μ. Классическим примером такой задачи является задача Пуанкаре (см. [2]) о существовании периодических решений. Пусть векторы Y и R имеют период ω по x, а порождающая система обладает ω-периодическим решением. В этом случае проблема сводится к рассмотрению квазилинейной системы

$$\frac{dy}{dx}=Ay+\mu R(y, x, \mu), \tag{9}$$

где A — постоянная матрица. Оказывается, что если собственные числа A отличны от $2\pi ki/\omega$; где k — целое число, то система (9) имеет при достаточно малых μ единственное ω-периодич. решение $\varphi(x, \mu)$, непрерывное по μ, и $\varphi(x, 0)=0$. В случае, когда матрица A имеет собственные числа вида $2\pi ki/\omega$, вопрос о существовании и количестве периодич. решений существенно зависит от вида возмущения $R(y, x, \mu)$. При решении проблемы существования периодич. решений в этом случае весьма полезным оказывается метод усреднения (см. *Крылова — Боголюбова метод усреднения*).

Аналогичные вопросы ставятся и для других типов решений: ограниченных, рекуррентных, почти периодических и т. д. Напр., если вектор R равномерно почти периодичен по x, а все собственные числа матрицы A имеют ненулевые действительные части, то система (9) при достаточно малом μ имеет единственное почти периодич. решение (см. [21]).

Малого параметра методом исследуются также вопросы существования у системы (8) интегральных множеств с определенными свойствами. Н. Н. Боголюбов (см. [21]) рассмотрел с этой точки зрения следующую важную для приложений систему:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}&=a+\mu\Phi(x, \varphi, t, \mu),\\ \frac{dx}{dt}&=Ax+\mu R(x, \varphi, t, \mu),\end{aligned} \tag{10}$$

где φ есть k-мерный, x есть n-мерный векторы, a — постоянный k-мерный вектор, A — постоянная матрица, все собственные числа к-рой имеют ненулевые вещественные части. Векторы R и Φ имеют период 2π по компонентам вектора φ. При $\mu=0$ система (10) имеет интегральную поверхность $x=0$. Н. Н. Боголюбов доказал, что при достаточно малом μ система (10) имеет интегральную поверхность:

$$x=f(t, \varphi, \mu),$$

где функция f имеет период 2π по компонентам φ и $f(t, \varphi, 0)=0$. При этом, если векторы Φ и R являются ω-периодичными по t, то вектор f также ω-периодичен по t. Если все собственные числа матрицы A имеют отрицательные действительные части, то интегральная поверхность $x=f$ асимптотически устойчива. Отсюда, в частности, вытекает, что если в системе (8) вектор Y не зависит от x и при $\mu=0$ эта система имеет асимптотически устойчивое по первому приближению периодич. решение, то при достаточно малых μ система (8) имеет в пространстве y, x двумерное, цилиндрическое асимптотически устойчивое *интегральное многообразие*.

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М., 1947; [2] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 1—3, P., 1892—99; [3] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., 1950; [4] его же, «Матем. сб.», 1893, т. 17, в. 2, с. 253—333; [5] Биркгоф Д. Д., Динамические системы, пер. с англ., М., 1941; [6] Birkhoff G. D., «Acta Math.», 1922, v. 43, p. 1—119; [7] Еругин Н. П., Приводимые системы, Л.—М., 1946; [8] его же, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963; [9] Floquet M. G., «Ann. sci. École norm.

supér.», 1883, ser. 2, t. 12, p. 47—89; [10] Sturm J. Ch., «J. math. pures et appl.», 1836, p. 106—86; [11] Бендиксон И., «Успехи матем. наук», 1941, в. 9, с. 191—211; [12] Denjoy A., «J. math., pures et appl.», 1932, sér. 9, t. 11, № 3, p. 333—75; [13] Андронов А. А., Понтрягин Л. С., «Докл. АН СССР», 1937, т. 14, № 5, с. 247—50; [14] Смейл С., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 1, с. 113—85; [15] Плисс В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М.— Л., 1964; [16] Levinson N., Smith O. K., «Duke Math. J.», 1942, v. 9, № 2, p. 382—403; [17] Littlewood J. E., «Acta math.», 1937, v. 97, № 3—4, p. 267—308; [18] Perron O., «Math. Z.», 1928, Bd 29, S. 129—60; [19] Фроммер М., «Успехи матем. наук», 1941, в. 9, с. 212—53; [20] Dulac H., «Bull. Soc. math. France», 1923, t. 51; [21] Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, К., 1945; [22] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М., 1949; [23] Андронов А. А. и др., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [24] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [25] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961. *В. А. Плисс.*

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ в банаховом пространстве — раздел функционального анализа, в к-ром исследуется поведение на действительной оси J или на положительной (отрицательной) полуоси J^+ (J^-) решений *эволюционных уравнений* в банаховом пространстве. Рассматриваются уравнения

$$\text{I. } \dot{u}=A(t)\,u;$$

$$\text{II. } \dot{u}=A(t)\,u\pm f(t);$$

$$\text{III. } \dot{u}=A(t)\,u+f(t,\ u),$$

где $u(t)$ — искомая, а $f(t)$ — заданная функция со значениями в комплексном банаховом пространстве E, $A(t)$ — линейный оператор, $f(t,\ u)$ — нелинейный оператор в E. Под производной $\dot{u}$ понимается предел по норме пространства E отношения $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$.

Для дифференциального уравнения I имеется равномерная устойчивость (р. у.), если существует константа M такая, что для любого решения $\|u(t)\|\leqslant M\|u(s)\|$, $t\geqslant s$, и экспоненциальная устойчивость (э. у.), если для всех решений $\|u(t)\|\leqslant Me^{-\alpha(t-s)}\|u(s)\|$ при нек-рых M и $\alpha>0$.

Для уравнения I с постоянным ограниченным оператором $A(t)=A$ решение задачи Коши ($u(s)$ задано) имеет вид $u(t)=e^{(t-s)A}u(s)$. Справедлива оценка $\|e^{At}\|\leqslant Me^{\sigma t}$, где σ — число, большее всех действительных частей точек спектра оператора A. Таким образом, для э. у. необходимо и достаточно, чтобы спектр A лежал внутри левой полуплоскости. В гильбертовом пространстве это имеет место тогда и только тогда, когда существует положительно определенная форма (Wx,y), для к-рой $\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}(Wu,\ u)=\mathrm{Re}(Wu,\ Au)\leqslant-\alpha(u,\ u)$ на любом решении уравнения (теорема Ляпунова). Если спектр A расположен по обе стороны от мнимой оси и не пересекается с ней, то пространство E разлагается в прямую сумму инвариантных относительно A подпространств E_+ и E_-, причем все решения в $E_+(E_-)$ экспоненциально возрастают (убывают) при $t\to\infty$. В этом случае для уравнения имеет место экспоненциальная дихотомия (э. д.).

Если оператор A неограничен, замкнут и имеет плотную в E область определения, то задача Коши с $u(0)=u_0$, вообще говоря, не является корректной. Существование и свойства ее решений не определяются только расположением спектра оператора A, необходимо еще определенное поведение его резольвенты $(A-\lambda I)^{-1}$. Употребительными условиями, обеспечивающими равномерную корректность задачи Коши на J^+, являются неравенства

$$\|(A-\lambda I)^{-m}\|\leqslant\frac{M}{(\lambda-\sigma)^m},\quad \lambda>\sigma,\ m=1,\ \ldots,$$

для выполнения к-рых достаточно условие Хилле — Иосиды

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant 1/(\lambda-\sigma), \lambda > \sigma,$$

или неравенство

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant M/|\lambda-\sigma|, \ \mathrm{Re}\,\lambda > \sigma.$$

При выполнении их решение задачи Коши имеет вид $u(t)=T(t-s)u(s)$, где $T(t)$ — сильно непрерывная при $t \geqslant 0$ полугруппа операторов, причем $\|T(t)\| \leqslant Me^{\sigma t}$. Для р. у. (э. у.) достаточно, чтобы было $\sigma=0$ ($\sigma<0$). Если оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу в гильбертовом пространстве, то для него справедлива достаточная часть теоремы Ляпунова, а если — группу, то — и необходимая. В гильбертовом пространстве э. у. эквивалентна L_2-устойчивости, т. е. тому, что для всех решений $\|T(t)u_0\| \in L_2(0, \infty)$.

Важным для приложений свойством решений $u(t)$ является почти периодичность (п. п.) или слабая почти периодичность (то есть п. п. скалярных функций $\langle u(t), \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in E^*$). Все значения п. п. решения лежат в компактном множестве — решение компактно. Из компактности и слабой п. п. следует п. п. Для уравнения $\dot{u}=A(u)$ вопрос о п. п. решений связан со структурой пересечения спектра A с мнимой осью. Если A — производящий оператор ограниченной сильно непрерывной полугруппы и указанное пересечение счетно, то для п. п. определенного на всей оси и ограниченного решения необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon(A-\lambda+\varepsilon)^{-1}u(0)$ в каждой предельной точке спектра λ на мнимой оси. При этом всякое равномерно непрерывное решение слабо п. п.; оно п. п., если оно слабо компактно, или если E не содержит подпространств, изоморфных пространству C_0 последовательностей, стремящихся к нулю с нормой max. Если A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $T(t)$, к-рая обладает тем свойством, что функции $\|T^*(t)\varphi\|$ ограничены на J^+ для плотного в E^* множества функционалов φ, то из компактности решения следует п. п.

Для уравнения I с ограниченным и непрерывным по t оператором $A(t)$ решения задачи Коши определены на всей оси, и с помощью эволюционного оператора $U(t, s)$ записываются в виде $u(t)=U(t, s)\ u(s)$. Свойство р. у. эквивалентно тому, что $\|U(t, s)\| \leqslant M$, свойство э. у.— тому, что $\|U(t, s)\| \leqslant Me^{-\alpha(t-s)}$. Если оператор $A(t)$ интегрально ограничен, т. е. $\sup\limits_t \int_t^{t+1} \|A(\tau)\| d\tau < \infty$, то генеральный показатель

$$\varkappa \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{t,\, s\to\infty} \frac{\ln\|U(t+s, s)\|}{t}$$

конечен. Если $\varkappa<0$, то имеет место э. у. Для уравнений с постоянным или периодич. оператором $A(t)$ справедлива формула $\varkappa=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{\ln\|u(t,0)\|}{t}$. В общем случае она неверна. Генеральный показатель не изменяется, если оператор $A(t)$ возмущается слагаемым $B(t)$, для к-рого $B(t)\to 0$ при $t\to\infty$ или для к-рого сходится на ∞ интеграл $\int\|B(t)\|dt$. Величина генерального показателя зависит от поведения $A(t)$ на бесконечности. Если существует предел $A_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}A(t)$ и спектр A_∞ лежит внутри левой полуплоскости, то $\varkappa<0$. Если операторы $A(t), 0 \leqslant t < \infty$, образуют компактное множество в пространстве ограниченных операторов, спектры всех предельных операторов лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \leqslant -\nu < 0$ и оператор-функция $A(t)$ мало осциллирует, напр., имеет вид $B(\varepsilon t)$ при достаточно малом ε или при достаточно больших t удовлетворяет условию Липшица $\|A(t)-A(\tau)\| \leqslant \varepsilon|t-\tau|$ с достаточно малым ε, то $\varkappa<0$.

В гильбертовом пространстве условие $\varkappa<0$ эквивалентно существованию эрмитовой формы $(W(t)x, y)$ такой, что $0<\alpha_1(x, x)\leqslant(W(t)x, x)\leqslant\alpha_2(x, x)$ и $\frac{d}{dt}(W(t)u, u)\leqslant-\alpha(u, u)$ для любого решения $u(t)$.

Если оператор $A(t)$ периодичен с периодом ω, $A(t+\omega)=A(t)$, то оператор $U(t, s)$ обладает свойством $U(t+\omega, 0)=U(t, 0)U(\omega, 0)$. Оператор $U(\omega)=U(\omega, 0)$ наз. **оператором монодромии** уравнения I. Его спектральный радиус $r_{U(\omega)}$ связан с генеральным показателем $\varkappa$ формулой $\varkappa=\frac{1}{\omega}\ln r_{U(\omega)}$. Уравнение имеет периодич. решения тогда и только тогда, когда 1 является собственным числом $U(\omega)$. Если оператор $U(\omega)$ обладает логарифмом, то справедливо **представление Флоке** $U(t, 0)=Q(t)e^{t\Gamma}$, где $Q(t)$ периодичен с периодом ω, а $\Gamma=\frac{1}{\omega}\ln U(\omega)$. В частности, представление Флоке имеет место, если спектр $U(\omega)$ не окружает нуля, для чего достаточно, чтобы $\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\|A(t)\|dt$ было меньше нек-рой константы, зависящей от геометрии сферы в E и не меньшей $\ln 4$. Для гильбертова пространства эта константа равна π. Представление Флоке сводит вопрос о поведении решений уравнения с периодич. оператором к такому же вопросу для уравнения $\dot{v}=\Gamma v$ с постоянным оператором Γ.

Для уравнения I имеет место **экспоненциальная дихотомия** (э. д.), если для нек-рого s пространство E разлагается в прямую сумму подпространств $E_+(s)$ и $E_-(s)$ так, что

$$\|U(t, s)x\|\leqslant N_1 e^{-\nu_1(t-s)}\|x\|, \quad \nu_1>0,$$

при $x\in E_-(s)$, $t\geqslant s$, и

$$\|U(t, s)x\|\leqslant N_2 e^{-\nu_2(t-s)}\|x\|, \quad \nu_2>0,$$

при $x\in E_+(s)$, $t\leqslant s$. При этом предполагается, что подпространства $U(t, s)E_+(s)$ и $U(t, s)E_-(s)$ в определенном смысле не должны сближаться. В случае конечности генерального показателя последнее условие выполняется автоматически. Для того чтобы для уравнения с периодич. $A(t)$ имела место э. д., необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора монодромии располагался вне и внутри единичного круга, но не пересекался с единичной окружностью.

Для уравнения I с неограниченным оператором $A(t)$ с не зависящей от t областью определения, удовлетворяющим условиям корректности задачи Коши (см. выше) при каждом t, при дополнительных условиях гладкости доказано существование эволюционного оператора $U(t, s)$, определенного и сильно непрерывного по t и s при $t\geqslant s$. Это позволяет перенести на этот случай ряд понятий и результатов, описанных выше. Однако здесь встречаются трудности. Так, представление Флоке получено лишь для уравнений в гильбертовом пространстве, когда $A(t)=A+B(t)$, где A — отрицательно определенный самосопряженный оператор, а $B(t)$ — ограниченный периодич. оператор, удовлетворяющий нек-рым дополнительным условиям.

Пусть $A(t)$ периодичен, и задача Коши для уравнения I равномерно корректна. Если пересечение спектра оператора монодромии $U(\omega)$ с единичной окружностью счетно, то каждое ограниченное равномерно непрерывное на J решение слабо п. п. Оно — п. п. в случае слабой компактности или если E не содержит c_0. В рефлексивном пространстве E существует разложение в прямую сумму E_1+E_2 такое, что E_1 и E_2 инвариантны относительно $U(\omega)$, и все решения, начинающиеся в E_1, являются п. п., а начинающиеся в E_2 — в определенном смысле убывают: при $U_2(0)\in E_2$, $\varphi\in E_*^*$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}|\langle u_2(k\omega), \varphi\rangle|^2=0.$$

Для решения неоднородного уравнения II справедлива формула

$$u(t)=U(t,\ s)\,u(s)+\int_s^t U(t,\ \tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

Для уравнения с ограниченным оператором это равенство эквивалентно дифференциальному уравнению. В случае неограниченного оператора, это, вообще говоря, не так, но тогда это равенство принимается за определение (обобщенного) решения. Основной задачей для уравнения II является исследование свойств решений при заданных свойствах правой части. Эти свойства обычно описываются как принадлежность функции какому-либо банахову пространству функций на J или J^+ со значениями в E. Если каждой непрерывной ограниченной функции $f(t)\in C(E)$ отвечает хотя бы одно ограниченное решение, то оператор $L=\frac{d}{dt}-A(t)$ наз. слабо регулярным. Если каждой $f\in C(E)$ отвечает единственное решение $u\in C(E)$, то L наз. регулярным. Для ограниченного постоянного A из слабой регулярности следует регулярность. Для неограниченного A или ограниченного периодического $A(t)$ этот факт уже может быть неверным даже в гильбертовом пространстве. Если генеральный показатель уравнения $\dot{u}=A(t)u$ конечен, то э. д. для этого уравнения эквивалентна регулярности оператора L на J. Для того чтобы э. д. имела место на полуоси J^+, необходимо и достаточно, чтобы оператор L на J^+ был слабо регулярным и чтобы множество тех начальных значений $u(0)$, к-рым отвечают ограниченные решения уравнений I, было дополняемым подпространством E. Если для всех решений уравнения II выполнено неравенство

$$\|u(t)\|\leqslant k\sup_t\left\{\int_0^1\|f(t+s)\|^2\,ds\right\}^{1/2},$$

а для решений формально сопряженного уравнения $-\frac{dv}{dt}=A^*(t)v+g(t)$ — неравенство $\|v(t)\|\leqslant k\sup\|g(t)\|$, то операторы L и $L^*=-\frac{d}{dt}-A^*(t)$ регулярны. Неизвестно (1978), сохранится ли регулярность, если справа в первом неравенстве стоит $k\sup_t\|f(t)\|$. Для регулярности L и L^* обе априорные оценки необходимы.

Если $A(t)$ периодичен, то для существования периодич. решения при всякой периодич. $f(t)$ необходимо и достаточно, чтобы отображение $I-U(\omega)$ было сюръективным, а для того чтобы такое решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы оператор $I-U(\omega)$ был обратимым.

Проверка регулярности при известных условиях может быть сведена к проверке регулярности операторов с постоянными коэффициентами. В случае сильной осцилляции $A(t)$ (напр., $A(t)=B(\omega t)$ с большим ω) при условии существования среднего

$$\overline{A}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{T+\alpha}^{T+\alpha}A(t)\,dt$$

равномерно по $\alpha\in J$ оператор $A(t)$ регулярен тогда и только тогда, когда регулярен оператор $\frac{d}{dt}-\overline{A}$.

Для почти периодических решений специфика бесконечномерного пространства сказывается уже на обобщении известной теоремы Боля-Бора о п. п. ограниченного интеграла от п. п. функции, то есть о п. п. ограниченного решения простейшего уравнения $\dot{u}=f(t)$. Если неопределенный интеграл от п. п. функции со значениями в E ограничен и E не содержит c_0, то он является п. п. В пространстве c_0 теорема Боля-Бора неверна. Если $A(t)$ периодичен, $f(t)$ — почти периодична и пересечение спектра оператора монодромии $U(\omega)$ с единичной окружностью счетно, то справедливы те же выводы о п. п. решения, к-рые сформулированы выше для однородного уравнения. Если $A(t)$ почти периодичен (как функция со значениями в пространстве ограниченных операторов в E), то для того чтобы при всякой п. п. $f(t)$ существовало единственное п. п. решение, необходимо и достаточно, чтобы оператор L был регулярным. Если уравнение II имеет (слабо) компактное при $t>0$ решение, и нетривиальные (слабо) компактные решения однородного уравнения $\dot{u}=A(t)u$ обладают тем свойством, что $\lim\limits_{t\to\infty}\|u(t)\|>0$, то уравнение II имеет (слабо) п. п. решение.

При качественном исследовании нелинейного уравнения $\dot{z}=F(t, z)$ обычно заранее предполагаются выполненными условия, обеспечивающие существование решений на J или на J^+, что налагает существенные ограничения на вид нелинейности $F(t, z)$. Решение $z_0(t)$ на J^+ наз. равномерно устойчивым (р. у.), если для всякого ε существует δ такое, что для всякого другого решения $z(t)$ из неравенства $\|z(s)-z_0(s)\|\leqslant\delta$, $s\geqslant 0$, следует, что $z(t)$ определено при $t\geqslant s$ и $\|z(t)-z_0(t)\|\leqslant\varepsilon$. Решение наз. асимптотически устойчивым (а. у.), если оно р. у. и при нек-ром δ из неравенства $\|z(s)-z_0(s)\|\leqslant\delta$ следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\|z(t)-z_0(t)\|=0$. Если в уравнении сделать замену $u=z-z_0(t)$, то после линеаризации (если она возможна) оно принимает вид III, где $A(t)=F'_z(t, z_0(t))$, а нелинейность обладает тем свойством, что $f(t, 0)\equiv 0$. Таким образом, задача о р. у. или а. у. решения $z_0(t)$ сводится к задаче о р. у. или а. у. нулевого решения уравнения III. Уравнение $\dot{\tilde{u}}=A(t)\tilde{u}$ при этом наз. уравнением в вариациях для исходного уравнения относительно решения $z_0(t)$.

Если нелинейная часть $f(t, u)$ достаточно мала, то свойства решений определяются свойствами решений уравнения в вариациях. Если генеральный показатель уравнения в вариациях отрицателен, и выполнено неравенство $\|f(t, u)\|\leqslant q\|u\|$, $t\geqslant 0$, $\|u\|\leqslant\rho$, то при достаточно малом q нулевое решение уравнения III будет а. у. Если $A(t)\equiv A$ и спектр A не пересекается с мнимой осью и имеет точки в правой полуплоскости, то при достаточно малом q нулевое решение неустойчиво. Если выполнено неравенство

$$\|f(t, u)\|\leqslant c\|u\|^{1+p}, \quad p>0,\ t\geqslant 0,\ \|u\|\leqslant\rho,$$

то требование отсутствия точек спектра на мнимой оси можно отбросить.

Если для уравнения в вариациях имеет место э. д. на J, то для каждого $\rho>0$ существуют такие M и c, зависящие только от $A(t)$ и ρ, что из неравенств

$$\|f(t, u)\|\leqslant M$$

и

$$\|f(t, u)-f(t, v)\|\leqslant c\|u-v\|,\ t\in J,\ \|u\|,\ \|v\|\leqslant\rho,$$

следует существование в нек-рой окрестности нуля многообразий M_+ и M_-, пересекающихся в одной точке u_0, таких, что решение $u_0(t)$, начинающееся в u_0, ограничено на всей оси, и $\|u_0(t)\|\leqslant\rho$; решения, начинающиеся на M_- (M_+), экспоненциально приближаются при $t\to\infty$ $(t\to-\infty)$ к $u_0(t)$ и удаляются от него при t, неограниченно изменяющемся в противоположном направлении. При этом M_+ (M_-) гомеоморфны окрестностям пространств $E_+(0)$ и $E_-(0)$, участвующих в определении э. д. Если в предыдущих условиях $A(t)\equiv A$ и $f(t, u)$ п. п. по t при каждом u с $\|u\|\leqslant\rho$, то решение $u_0(t)$ п. п.

Пусть автономное уравнение $\dot{z}=F(z)$ имеет ω-периодич. решение $z_0(t)$, тогда уравнение в вариациях $\dot{\tilde{u}}=F'_z(z_0(t))\tilde{u}$ имеет одно периодич. решение $\dot{z}_0(t)$ и, следовательно, его оператор монодромии $U(\omega)$ имеет 1 собственным числом. Если это число простое и остальной спектр $U(\omega)$ лежит внутри единичного круга и не окружает нуля, то существуют такие числа $\mu>0$, τ_0 и N, что для всех других решений исходного уравнения $\|z(t-z_0)-z(t)\|\leqslant Ne^{-\mu t}$. Указанное свойство наз. **асимптотической орбитальной устойчивостью** периодич. решения. Имеются исследования и других устойчивых инвариантных многообразий для нелинейных уравнений.

Уравнения вида III с неограниченным оператором $A(t)$ в приложениях соответствуют квазилинейным уравнениям параболич. и гиперболич. типа. Развита теория «истинно» нелинейных эволюционных уравнений определенного типа. Так, если B — непрерывный всюду определенный *диссипативный оператор*, то задача Коши $\dot{u}=Bu$, $u(0)=u_0$ однозначно разрешима на полуоси J^+ при любом $u_0\in E$. Определение диссипативного оператора естественно переносится на случай многозначного оператора, и для таких операторов вместо дифференциального уравнения рассматривается дифференциальное включение $\dot{u}\in Bu$. Если в рефлексивном пространстве оператор B замкнут, диссипативен и значения оператора $I-B$ покрывают все пространство E, то задача Коши однозначно разрешима на J^+ при каждом u_0 из области определения оператора B. Имеется много вариантов последнего утверждения. Решение задается формулой $u(t)=S(t)u_0$, где $S(t)$ — полугруппа нелинейных операторов $S(t+\tau)x=S(t)(S(\tau)x)$, t, $\tau\geqslant 0$. Для уравнений с диссипативными операторами имеются также теоремы существования периодич. и почти периодич. решений.

Лит.: [1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [2] Массера Х.-Л., Шеффер Х.-Х., Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства, пер. с англ., М., 1970; [3] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [4] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, М., 1967; [5] Barbu V., Nonlinear semigroups and differential equations in banach spaces, Netherlands, 1976; [6] Баскаков А. Г., «Тр. матем. ф-та Воронеж. ун-та», 1973, в. 10, с. 96—101; [7] Жиков В. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, с. 1380—1408, № 6; [8] Жиков В. В., Левитан Б. М., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 123—71; [9] Милославский А. И., «Функц. анализ и его прилож.», 1976, т. 10, № 2, с. 80—81; [10] Тюрин В. М., в кн.: «Функциональный анализ», в. 1, Ульяновск, 1973; [11] Левитан Б. М., Жиков В. В., Почти периодические функции и дифференциальные уравнения, М., 1977. *С. Г. Крейн.*

КВАДРАНТ — 1) К. **плоскости** — любая из четырех областей (углов), на к-рые плоскость делится двумя взаимно перпендикулярными прямыми, принятыми в качестве осей координат. 2) К. **круга** — сектор с центральным углом в 90°, $^1/_4$ часть круга. *БСЭ-3.*

КВАДРАТ — 1) Равносторонний прямоугольник. К. является правильным многоугольником. 2) К. числа a — произведение $a\cdot a=a^2$; название связано с тем, что таким произведением выражается площадь К., сторона к-рого равна a. *БСЭ-3.*

КВАДРАТИЧЕСКАЯ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ — корень неприводимого над полем рациональных чисел квадратного трехчлена с рациональными коэффициентами. К. и. представима в виде $a+b\sqrt{d}$, где a и b — рациональные числа, $b\neq 0$, а d — целое число, не являющееся полным квадратом. Действительное число α тогда и только тогда является К. и., когда оно допускает разложение в бесконечную периодическую цепную дробь. *А. И. Галочкин.*

КВАДРАТИЧНАЯ ОШИБКА — см. *Квадратичное отклонение.*

КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА над **коммутативным кольцом с единицей** — однородный многочлен

$$q=q(x)=q(x_1, \ldots, x_n)=\sum\nolimits_{i\leqslant j} q_{ij}x_ix_j,\ 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n,$$

от $n=n(q)$ переменных с коэффициентами $q_{ij}\in R$. Обычно R — это поле $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$, либо кольцо $\mathbb{Z}$, кольцо целых элементов алгебраич. числового поля, а также их пополнения по неархимедовым нормам.

Симметрическая квадратная матрица $A=A(q)=(a_{ij})$ порядка n, где $a_{ii}=2q_{ii}$, $a_{ij}=a_{ji}=q_{ij}$, $1\leqslant i<j\leqslant n$, наз. кронекеровой матрицей К. ф. $q(x)$; обозначение Зигеля: $q(x)=\frac{1}{2}A[x]$. Если *дискриминант* $D(q)$ К. ф. q не равен 0, то q наз. невырожденной, а если равен 0, то — вырожденной.

К. ф. $q(x)$ наз. гауссовой, если она допускает симметрическую запись:

$$q(x)=\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j,\quad b_{ij}=b_{ji}\in R,$$

т. е. найдутся $b_{ij}=b_{ji}\in R$, для к-рых $q_{ij}=2b_{ij}$, $1\leqslant i<<j\leqslant n$. Симметрическая квадратная матрица $B=B(q)==(b_{ij})$ наз. матрицей (или гауссовой матрицей) К. ф. $q(x)$. Величина $d=d(q)=\det B$ наз. определителем К. ф. $q(x)$; при этом

$$D(q)=(-1)^{n/2}\,2^n\,d(q),\ \text{если}\ n(q)\ \text{четно},$$

$$D(q)=(-1)^{(n-1)/2}\,2^{n-1}\,d(q),\ \text{если}\ n(q)\ \text{нечетно}.$$

Если R — поле характеристики, отличной от 2, то всякая К. ф. над R гауссова. Если R вкладывается в поле F характеристики, отличной от 2, то К. ф. $q(x)$ над R можно рассматривать как гауссову, но с матрицей $B==B(q)$ над F и $d(q)\in F$.

К. ф. q_1 и q_2 эквивалентны над R ($q_1\simeq q_2$), если одна из них преобразуется в другую обратимой в R линейной однородной подстановкой переменных, т. е. если найдется такая обратимая квадратная матрица U над R, что $A(q_1)=U^TA(q_2)U$. Совокупность К. ф. над R, эквивалентных над R данной, называется классом К. ф. Дискриминант К. ф., с точностью до квадрата обратимого в R элемента,— инвариант класса.

Другая точка зрения на К. ф. состоит в следующем. Пусть V — унитарный R-модуль; отображение $q: V\to R$ наз. квадратичным отображением (или квадратичной формой на модуле V, если 1) $q(ax)=a^2q(x)$, $a\in R$, $x\in V$; 2) отображение b_q: $V\times V\to R$, задаваемое равенством

$$b_q(x,\ y)=q(x+y)-q(x)-q(y),$$

является *билинейной формой* на модуле V. Пара $(V,\ q)$ наз. квадратичным модулем. Форма b_q всегда является симметрической.

Всякой билинейной форме $b(x,\ y)$ на V отвечает К. ф. $q(x)=q_b(x)=b(x,x)$; при этом $b_{q_b}(x,\ y)=b(x,\ y)+b(y,x)$. Если в кольце R элемент 2 имеет обратный $^1/_2$, то $q\leftrightarrow\frac{1}{2}b_q$ есть взаимно однозначное соответствие между квадратичными и симметричными билинейными формами на модуле V. Если V — свободный R-модуль ранга n и q — К. ф. на V, то каждому базису $e_1,\ \ldots,\ e_n$ модуля V отвечает К. ф. в классическом понимании

$$q(x_1,\ \ldots,\ x_n)=q(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)=\sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} q_{ij}x_ix_j,$$

где $q_{ii}=q(e_i)$, $q_{ij}=b_q(e_i,\ e_j)$, $1\leqslant i<j\leqslant n$. Каждая К. ф. $q(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ над R получается таким способом из нек-рого квадратичного модуля $(R^n,\ q)$. При замене базиса К. ф. $q(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ переходит в эквивалентную К. ф., и обратно.

Говорят, что элемент $\gamma\in R$ представим К. ф. q (или что форма q представляет γ), если γ является значением этой формы при нек-рых значениях переменных. Эквивалентные К. ф. представляют одни и те же элементы. К. ф. $q(x)$ над упорядоченным полем наз. неопределенной, если она представляет как положительные, так и отрицательные элементы, и наз. положительно (отрицательно) определенной, если $q(x)>0$ (соответственно $q(x)<0$) при всех $x\neq 0$. Невырожденная К. ф., представляющая 0 нетривиально, наз. изотропной, в противном случае — анизотропной. Аналогично, К. ф. $r(y_1, \ldots, y_m)$ наз. представимой К. ф. q, если q превращается в r при подстановке нек-рых линейных форм от $y_1, \ldots, y_m$ вместо переменных в q, т. е. если существует прямоугольная матрица S порядка $m\times n$ над R такая, что $A(r)=S^T A(q)S$ (T — знак транспонирования).

Алгебраическая теория К. ф. — теория К. ф. над полями.

Пусть F — произвольное поле характеристики, отличной от 2. Задача о представлении формы r формой q над F сводится к проблеме эквивалентности форм над F, ибо (теорема Полла) для того, чтобы невырожденная К. ф. r была представима невырожденной К. ф. q над R, необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая форма $h=h(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, что К. ф. $r\dot{+}h$ и q эквивалентны над F. Здесь $r\dot{+}h$ — ортогональная прямая сумма форм, т. е. r и h не имеют общих переменных. Теорема Витта о сокращении: если $h\dot{+}q_1\simeq h\dot{+}q_2$, то $q_1\simeq q_2$.

Всякая К. ф. над F эквивалентна диагональной:

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2+\ldots+a_rx_r^2+\ldots+a_nx_n^2.$$

Можно считать, что $a_1, \ldots, a_r\neq 0$, а $a_{r+1}=\ldots=a_n=0$. Число r называется рангом К. ф. q и совпадает с рангом матрицы $A(q)$. Если в F существует квадратный корень из любого элемента, то К. ф. над F эквивалентна форме $x_1^2+\ldots+x_r^2$ (нормальный вид К. ф.).

Всякая невырожденная К. ф. q эквивалентна форме

$$q'=q_0\dot{+}\sum_{i=1}^{k}(x_i^2-y_i^2),$$

где q_0 анизотропна; при этом q однозначно определяет k и класс формы q_0 над F, называемый анизотропным ядром формы q (см. также *Витта разложение*). Две формы q_1 и q_2, имеющие одно и то же анизотропное ядро, наз. подобными по Витту. На классах подобия форм определена структура кольца (см. *Витта кольцо*).

Пусть F — упорядоченное поле (в частности, поле $\mathbb{R}$) и всякий положительный элемент в F является квадратом. Тогда всякая К. ф. q приводима к форме вида

$$x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_{r-s}^2.$$

При этом числа s и $r-s$ (положительный и отрицательный индексы инерции) определены формой однозначно (см. *Инерции закон*). Тем самым для этих полей разрешается проблема эквивалентности К. ф.

Над полем $\mathbb{Q}$ проблема эквивалентности сводится к аналогичной проблеме для полей p-адических чисел: для того чтобы К. ф. q_1 и q_2 были эквивалентны над $\mathbb{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы q_1 и q_2 были эквивалентны над $\mathbb{Q}_p$ для всех простых чисел p и над $\mathbb{Q}_\infty=\mathbb{R}$ (теорема Минковского — Хассе). Аналогичное утверждение справедливо и для A-полей — алгебраических числовых полей и полей алгебраич. функций от одной переменной над конечным полем констант. Это — частные случаи общего *Хассе принципа*. В поле $\mathbb{Q}_p$ ($p\neq\infty$) проблема эквивалентности решается с помощью *Хассе инварианта*.

К. ф. q над полем F наз. мультипликативной над F, если

$$q(x_1, \ldots, x_n)\,q(y_1, \ldots, y_n)=q(z_1, \ldots, z_n),$$

где z_i суть рациональные функции от $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ над F. Если при этом z_i — билинейные функции, то говорят, что форма **обладает композицией**. Композиция возможна лишь в случаях $n=2, 4, 8$ (**теорема Гурвица**). Существует простое описание мультипликативных форм [16].

Изложенная алгебраич. теория К. ф. обобщена [7] на случай поля характеристики 2.

Арифметическая теория К. ф.— теория К. ф. над кольцами. Она возникла в связи с задачей о решении диофантовых уравнений 2-й степени. Вопрос о решении таких уравнений сводится к задаче о представлении целых чисел целочисленной К. ф. q, т. е. к задаче решения в $\mathbb{Z}$ уравнения $b=q(x_1, \ldots, x_n)$. Известны алгоритмы, сводящие нахождение (описание) всех решений этого уравнения к проблеме эквивалентности К. ф. над $\mathbb{Z}$, т. е. к задаче отыскания по заданным К. ф. $q(x)=\frac{1}{2}A[x]$ и $q_1(x)=\frac{1}{2}A_1[x]$ обратимых матриц U над $\mathbb{Z}$, удовлетворяющих условию $U^TAU=A_1$. Для $n=2$ эти алгоритмы были построены Ж. Лагранжем (J. Lagrange) и К. Гауссом (C. Gauss), к-рые создали общую теорию бинарных К. ф. На произвольное n они обобщены Г. Смитом (H. Smith) и Г. Минковским (H. Minkowski).

Одной из центральных проблем арифметич. теории является задача отыскания простых критериев существования представлений S формы $r(x)=\frac{1}{2}B[x]$ формой $q(x)=\frac{1}{2}A[x]$, т. е. решений матричного уравнения

$$S^TAS=B, \tag{1}$$

а также задача построения формул для числа $R(q, r)=R(A, B)$ таких представлений. При этом, если число представлений бесконечно, то речь идет о числе $R'(q, r)$ «существенно различных» представлений (представления S и S' отождествляются, если $S'=VS$, где V — **целочисленный автоморфизм** формы $q(x)$, т. е. $V^TAV=A$). Необходимым условием существования представлений является разрешимость уравнения (1) над $\mathbb{R}$ и разрешимость над $\mathbb{Z}$ матричного сравнения

$$S^TAS\equiv B \pmod g \tag{2}$$

по любому g. (Для разрешимости всех сравнений (2) достаточна разрешимость (2) при $g=g_0=8D(q)D(r)$.) Эти необходимые условия, наз. «**родовыми**», равносильны разрешимости (1) над $\mathbb{Z}_p$ для любого простого числа p и над $\mathbb{Z}_\infty=\mathbb{R}$. Они равносильны также разрешимости (1) над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ «без существенного знаменателя», т. е. существованию рационального решения S с общим знаменателем, взаимно простым с любым наперед заданным числом g (достаточно ограничиться числом $g=g_0$). Условия разрешимости сравнений (2) можно выразить через родовые инварианты форм q и r. Число решений сравнения (2) находится с помощью сумм Гаусса.

Род К. ф. над $\mathbb{Z}$— множество К. ф. над $\mathbb{Z}$, эквивалентных друг другу над $\mathbb{Z}_p$ для всех простых p, включая $\mathbb{Z}_\infty=\mathbb{R}$. Род К. ф. состоит из конечного числа классов одного и того же дискриминанта. Род К. ф. $q(x)=\frac{1}{2}A[x]$ может быть задан конечным набором родовых инвариантов — инвариантов порядка, выражаемых через элементарные делители матрицы A, и характеров рода $\chi(q)=\pm 1$. Род может быть задан также значениями сумм Гаусса. Существенную роль в теории К. ф. играет также понятие спинорного рода, более тонкое, чем понятие рода.

Число $R'(q, r)$ существенно различных представлений формы r формой q просто связано с числом $R_0'(q, r)$ **существенно различных примитивных представлений**, т. е. таких представлений S, что наибольший общий делитель миноров порядка m матрицы равен 1. Для величины

$$S_0(q, r) = \sum_{i=1}^{l} R'_0(q_i, r)$$

(усреднения функции $R'_0(q, r)$ по роду формы q), где $q_1, \ldots, q_l$ — представители всех классов рода формы q (из каждого класса по одному), имеются (см. [11], [15]) формулы, выражающие $S_0(q, r)$ через число решений нек-рых сравнений. В случае, когда род формы q состоит из одного класса, эти формулы полностью решают вопрос о числе представлений. В случае многоклассных родов известны лишь асимптотич. формулы для $R(q, r)$, а также точные формулы для нек-рых конкретных К. ф.

Аналитическая теория К. ф. Аналитич. методы в теорию К. ф. были введены П. Дирихле (P. Dirichlet). Развивая эти методы, К. Зигель (K. Siegel) пришел к общим формулам для числа представлений формы родом форм.

Пусть $q(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} A[x]$ и $r(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{2} B[x]$ — положительно определенные К. ф. над $\mathbb{Z}$. Число

$$\tilde{R}(q, r) = \frac{1}{M(q)} \sum_{i=1}^{l} \frac{R(q_i, r)}{E(q_i)}$$

наз. зигелевым средним по роду для числа представлений $R(q, r)$ формы r формой q. Здесь $E(q_i)$ — число автоморфизмов формы q_i,

$$M(q) = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{E(q_i)}$$

— вес рода К. ф. q. Пусть

$$\chi_\infty(q, r) = \lim_{\vartheta \to r} \frac{V(\vartheta')}{V(\vartheta)},$$

где ϑ — окрестность точки $r = r(x)$ в $m(m+1)/2$-мерном пространстве m-арных К. ф. над $\mathbb{R}$, ϑ' — соответствующая область решений S_1 матричного уравнения (1) над $\mathbb{R}$, а $V(\vartheta)$ и $V(\vartheta')$ — их объемы.

Формула Зигеля для К. ф. q и r имеет вид

$$\tilde{R}(q, r) = \tau \chi_\infty(q, r) H(q, r), \tag{3}$$

где $\tau = 1/2$, если $n = m > 1$ или $n = m + 1$ и $\tau = 1$ в остальных случаях. Здесь

$$H(q, r) = \lim_{g \to \infty} \frac{R_g(q, r)}{2^{\omega_{n-m}(g)} g^{nm - m(m+1)/2}},$$

где предел берется по таким последовательностям g, что любое натуральное число является делителем почти всех g, а $\omega_0(g)$ — число различных простых делителей g, $\omega_{n-m}(g) = 0$, если $n > m$, а $R_g(q, r)$ — число представлений формы r формой q по модулю g, т. е. число решений матричного сравнения

$$S^T \left(\frac{1}{2} A \right) S \equiv \frac{1}{2} B \pmod g.$$

Справедливо равенство

$$H(q, r) = \frac{R_{g_0}(q, r)}{2^{\omega_{n-m}(g_0)} g_0^{nm - m(m+1)/2}}, \qquad g_0 = 8D(q)D(r).$$

Имеется ряд равносильных определений для $H(q, r)$ и (см. [17]) выражение через обобщенные суммы Гаусса. Формула (3) содержит, как частный случай, формулу Минковского для веса рода:

$$M(q) = \frac{2\{d(q)\}^{(n+1)/2}}{\pi^{n(n+1)/2}} \frac{\prod_{k=1}^{n} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\prod_p \chi_p(q, q)}, \quad n > 1,$$

последняя в случае $n=2$ дает формулу Дирихле для числа классов.

Формулы, аналогичные (3), имеют место и для неопределенных К. ф. и форм с целыми алгебраич. коэффициентами (см. [17], [18]).

Приложение теории модулярных форм к исследованию мультипликативных свойств количества представлений чисел положительными К. ф. с четным числом переменных было дано Э. Хекке (E. Hecke, [10]). Теория модулярных форм позволяет получать формулы для $R(q, b)$ (см. обзор [5]).

К вопросу о представлении чисел К. ф. от четырех и более переменных применяется круговой метод (см. [4]). Если q — положительно определенная К. ф. над $\mathbb{Z}$, то применение кругового метода приводит для $n\geqslant 4$ к асимптотич. формуле

$$R(q, b)=\frac{\pi^{n/2}\,b^{n/2-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)d(q)}H(q, b)+O\left(b^{\frac{n}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right).$$

Подобные асимптотич. формулы могут быть получены круговым методом и для неопределенных К. ф. при $n\geqslant$ $\geqslant 4$.

Для исследования $R(q, b)$ в случае $n=3$ применяется дискретный эргодический метод Линника (см. [3], [4]). Он заключается в том, что на нек-ром множестве представлений чисел тернарными К. ф. устраивается эргодический поток представлений, управляемый оператором, связанным с задачей представления чисел кватернарными К. ф. Эргодический метод приводит (при выполнении необходимых условий) к оценке типа

$$R(q, b)>ch(-\Delta b), \quad c=c(q)>0;$$

в ряде случаев получены и асимптотич. формулы.

Для исследования таких вопросов теории К. ф., как теория приведения, автоморфизмы, арифметич. минимумы К. ф., Ш. Эрмитом (Ch. Hermite) был развит метод непрерывных параметров, превратившийся затем в обширный раздел теории К. ф.— **геометрическую теорию** К. ф., или **геометрию** К. ф. (к-рую можно рассматривать и как часть *Геометрии чисел*). Идея метода состоит в следующем. Заданной n-мерной точечной решетке Λ ставится в соответствие та или иная арифметич. величина $a=a(\Lambda)$ и рассматривается поведение функции $a(\Lambda)$ при малых изменениях параметров решетки Λ. Характерной чертой геометрии К. ф. является систематич. использование $n(n+1)/2$-мерного пространства коэффициентов (параметров), в к-ром решетка Λ изображается точкой. Пусть

$$f=\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

— К. ф. с действительными коэффициентами $a_{ij}=a_{ji}$ $(i, j=1, \ldots, n)$. Форме f ставится в соответствие точка $\bar{f}=(a_{11}, \ldots, a_{nn}, a_{12}, \ldots, a_{n-1,n})$ в N-мерном евклидовом пространстве, $N=n(n+1)/2$, называемом **пространством коэффициентов**. Положительно определенным формам f при этом отвечает открытый выпуклый конус $\mathfrak{P}$ с вершиной в начале координат, называемый **конусом положительности**. Решетке Λ соотносится класс эквивалентных n-арных положительно определенных К. ф.; при базисе $[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n]$ решетки Λ ей ставится в соответствие форма

$$f=\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{n}(\bar{a}_i\bar{a}_j)\,x_ix_j.$$

Тем самым решетке Λ соответствует бесконечное дискретное множество точек конуса положительности $\mathfrak{P}$. Если выбрать точную область приведения $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{P}$ положительно определенных К. ф., то каждой решетке будет взаимно однозначно соответствовать точка $\bar{f}\in\mathfrak{F}$ пространства коэффициентов. Малым изменениям параметров решетки Λ отвечают малые изменения точки $\bar{f}$.

Геометрическая теория К. ф. распадается на ряд достаточно самостоятельных теорий, связанных единым методом исследования. Фундаментом ее является теория приведения положительных К. ф., к-рая, изучая области приведения $\mathfrak{F}$, решает проблему эквивалентности положительных К. ф.— одну из центральных задач арифметич. теории К. ф. (см. *Квадратичных форм приведение*).

Существенную роль играет теория *Вороного типов решетки*. Она имеет важные приложения в теории параллелоэдров. Теория типов получила применение в решении задач об экономнейшем решеточном покрытии n-мерного пространства шарами.

Другой традиционный раздел геометрич. теории К. ф.— теория совершенных форм, также созданная Г. Ф. Вороным. Эта теория позволила решить *Эрмита проблему* арифметич. минимумов положительных К. ф., равнозначную задаче о плотнейшей решетчатой *упаковке* шаров в n-мерном пространстве. Задача о плотнейшей решетчатой упаковке шаров и задача об экономнейшем решетчатом покрытии шарами — наиболее известные примеры экстремальных задач, составляющих значительную часть К. ф. геометрии.

К геометрической теории К. ф. можно также отнести нек-рые обобщения алгоритма цепных дробей, напр. алгоритм Вороного вычисления единиц кубического поля, теорию фундаментальных областей автоморфизмов неопределенных К. ф.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Делоне Б. Н., «Успехи матем. наук», 1937, в. 3, с. 16—62; 1938, в. 4, с. 102—64; [3] Линник Ю. В., Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967; [4] Малышев А. В., О представлении целых чисел положительными квадратичными формами, М.— Л., 1962; [5] его же, в кн.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, с. 119—37; [6] Серр Ж.-П., Курс арифметики, пер. с франц., М., 1972; [7] Arf C., «J. reine und angew. Math.», 1941, Bd 183, S. 148—67; [8] Eichler M., Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, 2 Aufl., B., 1974; [9] Hasse H., «J. reine und angew. Math.», 1923, Bd 152, S. 129—48, 205—24; 1924, Bd 153, S. 12—43, 76—93, 113—30, 158—62, 186—207; [10] Hecke E., Mathematische Werke, Gött., 1959; [11] Jones B. W., The arithmatic theory of quadratic forms, N. Y., 1950; [12] Lam T. Y., The algebraic theory of quadratic forms, Reading, 1973; [13] Minkowski H., Gesammelte Abhandlungen, Bd 1—2, Lpz.— B., 1911; [14] O'Meara O. T., Introduction to quadratic forms, B., 1963; [15] Pall G., «Canad. J. Math.», 1949, v. 1, p. 344—64; [16] Pfister A., «Arch. Math.», 1965, Bd 16, S. 363—70; [17] Siegel C. L., Lecturis on the analytical theory of quadratic forms, 3 ed., Gött., 1963; [18] его же, Gesammelte Abhandlungen, Bd 1—3, B., 1966; [19] Smith H. J. S., The collected mathematical papers, v. 1—2, Oxf., 1894; [20] Watson G. L., Integral quadratic forms, Camb., 1960; [21] Фоменко О. М., Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 5—91. *А. В. Малышев.*

КВАДРАТИЧНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ, квадратичное уклонение, стандартное отклонение величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от a — квадратный корень из выражения

$$\frac{(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\ldots+(x_n-a)^2}{n}.$$

Наименьшее значение К. о. имеет при $a=\bar{x}$, где $\bar{x}$ — среднее арифметическое величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

В этом случае К. о. может служить мерой рассеяния системы величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Употребляют также более общее понятие взвешенного К. о.

$$\sqrt{[p_1(x_1-a)^2+\ldots+p_n(x_n-a)^2]/(p_1+\ldots+p_n)},$$

числа $p_1, \ldots, p_n$ наз. при этом весами, соответствующими величинам $x_1, \ldots, x_n$. Взвешенное К. о. достигает наименьшего значения при a, равном взвешенному среднему:

$$(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)/(p_1+\ldots+p_n).$$

В теории вероятностей К. о. σ_X случайной величины X (от ее математич. ожидания) наз. квадратный корень из дисперсии $\sqrt{\mathsf{D}(X)}$.

К. о. употребляют как меру качества статистич. оценок и наз. в этом случае *квадратичной ошибкой*. *БСЭ-3*.

КВАДРАТИЧНОЕ ПОЛЕ — расширение степени 2 поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Любое К. п. имеет вид $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где $d \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, т. е. получается присоединением к полю $\mathbb{Q}$ элемента $\sqrt{d}$. $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ тогда и только тогда, когда $d_1 = c^2 d_2$, где $c \in \mathbb{Q}$. Поэтому любое К. п. имеет вид $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где d — целое рациональное число свободное от квадратов, однозначно определяемое этим К. п. В дальнейшем d предполагается именно таким.

При $d>0$ поле $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ наз. *вещественным* К. п., а при $d<0$ — *мнимым*.

В качестве фундаментального базиса поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, т. е. базиса кольца целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ над кольцом целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$, можно взять

$$\left\{1, \ \frac{1+\sqrt{d}}{2}\right\} \quad \text{при } d \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$$

и

$$\{1, \ \sqrt{d}\} \quad \text{при } d \equiv 2, \ 3 \ (\mathrm{mod}\ 4).$$

Дискриминант D поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ равен соответственно d при $d \equiv 1$ (mod 4) и $4d$ при $d \equiv 2$, 3 (mod 4).

Мнимые К. п.— единственный тип полей (кроме $\mathbb{Q}$) с конечной группой единиц. Эта группа имеет порядок 4 для $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ (и образующую $\sqrt{-1}$), порядок 6 для $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ (и образующую $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$), порядок 2 (и образующую -1) для всех остальных мнимых К. п.

Для вещественных К. п. группа единиц изоморфна прямому произведению $\{\pm 1\} \times \{\varepsilon\}$, где $\{\pm 1\}$ — группа порядка 2, порожденная числом -1, и $\{\varepsilon\}$ — бесконечная циклическая группа, порожденная основной единицей ε. Напр., для поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ $\varepsilon = 1+\sqrt{2}$.

Закон разложения простых дивизоров в К. п. допускает простую формулировку: полю $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ можно сопоставить квадратичный характер χ на $\mathbb{Z}$ по модулю $|D|$. Если p — простое число и $(D, p)=1$, то дивизор (p) прост в $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ при $\chi(p)=-1$, и распадается в произведение двух простых дивизоров при $\chi(p)=1$.

Группа классов дивизоров К. п. изучена лучше, чем для других классов полей. В случае мнимых К. п. *теорема Брауэра — Зигеля* (утверждающая, что для полей алгебраических чисел фиксированной степени выполняется асимптотич. соотношение

$$\frac{\ln(hR)}{\ln\sqrt{|D|}} \longrightarrow 1 \ \text{ при } |D| \longrightarrow \infty,$$

где h, R и D — число классов, регулятор и дискриминант поля) показывает, что число классов дивизоров стремится к бесконечности при $d \to -\infty$. Имеется ровно 9 одноклассных мнимых К. п. (при $d = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$, см. [2]). Для вещественных К. п. неизвестно (1978) конечно или бесконечно число одноклассных полей. Существует бесконечно много К. п. (как мнимых, так и вещественных), число классов к-рых делится на данное натуральное число (см. [3], [4]). Аналогичное свойство для 2-компоненты группы классов следует из теории родов Гаусса.

Абелевы расширения мнимых К. п. в явном виде позволяет строить теория комплексного умножения (см. [5]).

Многие арифметич. свойства К. п. допускают переформулировку в терминах теории *бинарных квадратичных форм*.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Stark H. M., «Mich. Math. J.», 1967, v. 14, p. 1—27; [3] Ankeny N. C., Chowla S., «Pacific. J. Math.», 1955, v. 5, p. 321—24; [4] Jamamoto J., «Osaka J. Math.», 1970, v. 7, p. 57—76; [5] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969, гл. 13.

Л. В. Кузьмин.

КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел *выпуклого программирования*, посвященный теории и методам решения задач минимизации выпуклых квадратичных функций на множествах, задаваемых системами линейных неравенств и равенств. Существует законченная теория К. п., и разработаны численные методы решения задач К. п., в том числе методы типа *симплексного метода*, приводящие к решению за конечное число шагов (итераций).

Реальные задачи технико-экономич. содержания, математич. моделями к-рых являются задачи К. п., немногочисленны. Однако задачи К. п. возникают как вспомогательные при решении различных задач *математического программирования*. Так, в одном из вариантов метода возможных направлений для численного решения задач нелинейного программирования проблему выбора направления спуска на каждой итерации сводят к решению задачи К. п. Задачи безусловной минимизации квадратичных функций, а также задачи К. п. с ограничениями простейшего вида (напр., когда ограничениями являются условия неотрицательности переменных) возникают в результате применения метода регуляризации для решения неустойчивых (некорректных) задач *линейного программирования* и *штрафных функций метода* для решения задач линейного программирования.

Лит.: [1] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975; [2] Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование, пер. с англ., М., 1967; [3] Зангвилл У. И., Нелинейное программирование. Единый подход, пер. с англ., М., 1973; [4] Кюнци Г. П., Крелле В., Нелинейное программирование, пер. с нем., М., 1965; [5] Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н., Введение в минимакс, М., 1972.

В. Г. Карманов.

КВАДРАТИЧНОЕ СРЕДНЕЕ — число s, равное корню квадратному из среднего арифметического квадратов данных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$s = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)/n}.$$

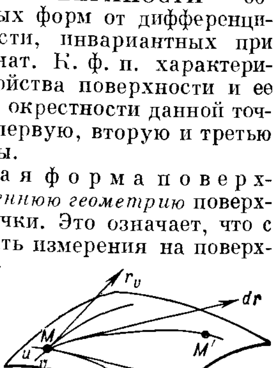
БСЭ-3.

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ — общее наименование квадратичных форм от дифференциалов координат на поверхности, инвариантных при преобразованиях этих координат. К. ф. п. характеризуют основные внутренние свойства поверхности и ее расположение в пространстве в окрестности данной точки; обычно выделяют так наз. первую, вторую и третью основные квадратичные формы.

Первая квадратичная форма поверхности характеризует *внутреннюю геометрию* поверхности в окрестности данной точки. Это означает, что с ее помощью можно производить измерения на поверхности. Пусть поверхность задана уравнением:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v),$$

где u и v — координаты на поверхности;



1

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv$$

— дифференциал радиус-вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ вдоль выбранного направления смещения из точки M в бесконечно близкую точку M' (см. рис. 1). Главная линейная часть приращения длины дуги MM' выражается квадратом дифференциала $d\boldsymbol{r}$:

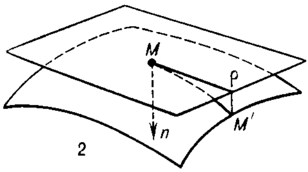
$$\mathrm{I} = ds^2 = d\boldsymbol{r}^2 = E(u, v)\, du^2 + 2F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2,$$

где $E(u, v) = \boldsymbol{r}_u^2$, $F(u, v) = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)$, $G(u, v) = \boldsymbol{r}_v^2$. Форма I и наз. **первой основной** К. ф. п. См. также *Первая квадратичная форма* поверхности.

Вторая квадратичная форма поверхности характеризует локальную структуру поверхности в окрестности обыкновенной точки. Именно, пусть

$$\boldsymbol{n} = \frac{\varepsilon\,[\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v]}{|\,[\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v]\,|}$$

— единичный вектор нормали к поверхности в точке M, где $\varepsilon=+1$, если тройка векторов $\{\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v,\ \boldsymbol{n}\}$ — правой ориентации, и $\varepsilon=-1$ — в противоположном случае. Удвоенная главная линейная часть 2δ отклонения точки M' (см. рис. 2) поверхности от касательной плоскости в ее точке M равна



2

$$\mathrm{II} = 2\delta = (-d\boldsymbol{r},\ d\boldsymbol{n}) = \\ = L\,(u,\ v)\,du^2 + \\ + 2M\,(u,v)\,du\,dv + N\,(u,v)\,dv^2,$$

где $L=(\boldsymbol{r}_{uu},\ \boldsymbol{n})$, $M=(\boldsymbol{r}_{uv},\ \boldsymbol{n})$, $N=(\boldsymbol{r}_{vv},\ \boldsymbol{n})$. Форма II наз. **второй основной** К. ф. п. См. также *Вторая квадратичная форма* поверхности.

Первая и вторая К. ф. п. обладают двумя важными совместными скалярными инвариантами относительно преобразования координат на поверхности. Именно, отношение дискриминантов этих форм равно *гауссовой кривизне* поверхности в точке:

$$K = \frac{LM - N^2}{EG - F^2}\ ,$$

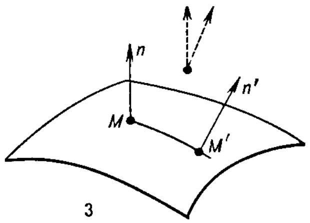
а выражение

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

определяет *среднюю кривизну* поверхности в точке. Задание первой (положительно определенной) и второй К. ф. п. определяет поверхность с точностью до движения (*Бонне теорема*).

Третья квадратичная форма поверхности представляет собой квадрат дифференциала единичного вектора $\boldsymbol{n}$ нормали к поверхности в точке M (см. рис. 3):

$$\mathrm{III} = d\boldsymbol{n}^2 = \boldsymbol{n}_u^2\,du^2 + \\ + 2\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}_v\,du\,dv + \boldsymbol{n}_v^2\,dv^2.$$



3

Третья К. ф. п. равна главной линейной части приращения угла между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}'$ при смещении по поверхности из точки M в точку M'; она является первой К. ф. п. *сферического изображения* поверхности.

Три основные К. ф. п. связаны линейной зависимостью:

$$\mathrm{I}\cdot K - \mathrm{II}\cdot 2H - \mathrm{III} = 0.$$

Кроме перечисленных выше иногда рассматривают и другие К. ф. п. (см., напр., [3]).

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1, М.— Л., 1947; [2] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; [3] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

А. Б. Иванов.

КВАДРАТИЧНЫЙ ВЫЧЕТ по модулю m — целое число a, для которого разрешимо сравнение

$$x^2 \equiv a\ (\mathrm{mod}\ m).$$

Если указанное сравнение не разрешимо, то число a наз. **квадратичным невычетом** по модулю m. **Критерий Эйлера**: пусть $p>2$ простое.

Число a, взаимно простое с p, является К. в. по модулю p тогда и только тогда, когда

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p,$$

и является квадратичным невычетом по модулю p тогда и только тогда, когда

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p.$$

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972. *С. А. Степанов.*

КВАДРАТИЧНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ на римановой поверхности R — правило, которое каждому локальному параметру z, отображающему параметрич. окрестность $U \subset R$ в замкнутую комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ $(z: U \to \overline{\mathbb{C}})$, ставит в соответствие функцию $Q_z: z(U) \to \overline{\mathbb{C}}$ такую, что для всяких локальных параметров $z_1: U_1 \to \overline{\mathbb{C}}$ и $z_2: U_2 \to \overline{\mathbb{C}}$ с непустым пересечением $U_1 \cap U_2$ в последнем выполнено соотношение

$$\frac{Q_{z_2}(z_2(p))}{Q_{z_1}(z_1(p))} = \left(\frac{dz_1(p)}{dz_2(p)}\right)^2, \quad \forall p \in U_1 \cap U_2; \qquad (1)$$

здесь $z(U)$ — образ U в $\overline{\mathbb{C}}$ при отображении z. К. д. часто обозначается символом $Q(z)dz^2$, к-рому приписывается указанная инвариантность относительно выбора локального параметра z. Иначе говоря, К. д.— это нелинейный дифференциал типа (2,0) на римановой поверхности.

Функции $Q_z(\cdot)$, входящие в определение К. д., обычно предполагаются измеримыми или даже аналитическими. В последнем случае К. д. наз. аналитическим. Точка $p \in R$ наз. нулем или полюсом порядка k дифференциала $Q(z)dz^2$, если для каждого локального параметра z функция $Q_z(\cdot)$ имеет в p соответственно нуль или полюс порядка k. Нули и полюсы К. д. наз. его критическими точками. Нули и простые полюсы наз. конечными критич. точками, и их совокупность обозначают C. Множество всех полюсов порядка $k \geqslant 2$ обозначают H.

Если кривая $\gamma \subset R$ имеет в каждой своей точке q относительно локального параметра z касательную с направляющим вектором $a_z(q)$ и

$$Q_z(z(q))(a_z(q))^2 > 0, \quad \forall q \in \gamma, \qquad (2)$$

то К. д. $Q(z)dz^2$ наз. положительным и пишут $Q(z)dz^2>0$ на кривой γ. Если в (2) вместо знака $>$ имеет место знак $<$, то К. д. $Q(z)dz^2$ отрицателен ($Q(z)dz^2<0$) на кривой γ. Всякая максимальная на R регулярная кривая, на к-рой $Q(z)dz^2>0$ (либо $Q(z)dz^2<0$), наз. траекторией дифференциала $Q(z)dz^2$ (соответственно ортогональной траекторией).

К. д. $Q(z)dz^2$, определенный на конечной римановой поверхности R, принадлежит R, если край ∂R поверхности R либо пуст, либо состоит из конечного числа точек $p \notin H$ и дуг γ, на каждой из к-рых дифференциал $Q(z)dz^2$ регулярен и положителен или отрицателен. Если к тому же край ∂R пуст или если дифференциал $Q(z)dz^2$ на ∂R регулярен и положителен, то $Q(z)dz^2$ наз. положительным К. д. на R. Метрика $|Q(z)|^{1/2}|dz|$, называемая Q-метрикой, однозначна на R и инвариантна относительно выбора локального параметра z.

В нек-рой окрестности U любой точки $p \in R \setminus (C \cup H)$ функция

$$\zeta(q) = \int_{z(p)}^{z(q)} Q(z)^{1/2} dz$$

регулярна, однозначна и однолистна при каждом выборе знака подинтегрального выражения, причем всякая максимальная дуга траектории (или ортогональной траектории) из U при отображении $\zeta(q)$ переходит в горизонтальный (соответственно вертикальный) прямолинейный интервал. Поэтому через каждую точку $p\in R\setminus(C\cup H)$ проходит траектория, являющаяся либо открытой дугой, либо жордановой кривой на R. Топологическая и конформная структуры семейства траекторий в малой окрестности всякой критич. точки r полностью классифицированы в зависимости от порядка критич. точки r и (если r — полюс 2-го порядка и $z(r)=0$) от

$$\arg\lim_{q\to r} Q_z(z(q))z(q)^2$$

(см. *Локальная структура траекторий*). Описание *глобальной структуры траекторий* известно для конечных римановых поверхностей и имеет много важных приложений (см. также [1]).

О. Тайхмюллер (O. Teichmüller) исследовал роль понятия К. д. для теории экстремальных конформных и квазиконформных отображений и для решения проблемы модулей римановых поверхностей (см. [1]—[3]). Он сформулировал принцип, согласно к-рому экстремальным задачам геометрич. теории функций ставятся в соответствие нек-рые К. д., причем каждому типу экстремальных задач соответствуют определенные особенности (полюсы) К. д., а геометрич. свойства решения связаны надлежащим образом со структурой траекторий К. д. В терминах К. д. доказаны неравенства для коэффициентов *однолистных функций*. Общее неравенство для коэффициентов однолистных функций в семействах областей, расположенных на конечной римановой поверхности, носит название общей теоремы о коэффициентах и является конкретным воплощением принципа Тайхмюллера для широкого класса задач (см. [1], [4]). Принцип Тайхмюллера позволил также установить специальную теорему о коэффициентах и решить большое число конкретных экстремальных задач (см. [1], [5]).

Лит.: [1] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [2] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957; [3] Альфорс Л., Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, пер. с англ., М., 1961; [4] Тамразов П. М., «Матем. сб.», 1967, т. 72, № 1, с. 59—71; [5] Jenkins J. A., «Ill. J. Math.», 1964, v. 8, № 1, p. 80—99.

П. М. Тамразов.

КВАДРАТИЧНЫЙ ЗАКОН ВЗАИМНОСТИ — соотношение

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}},$$

связывающее *Лежандра символы* $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$ для различных нечетных простых чисел p и q. Имеются два дополнения к указанному квадратичному закону взаимности, а именно:

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{(p-1)/2}$$

и

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{(p^2-1)/8}.$$

К. Гаусс (C. Gauss) дал первое полное доказательство К. з. в., в связи с чем К. з. в. наз. также *Гаусса законом взаимности*.

Из К. з. в. непосредственно следует, что при заданном целом d, не делящемся на квадрат целого числа, простые p, для к-рых d является квадратичным вычетом по модулю p, лежат в нескольких арифметич. прогрессиях с разностью $2|d|$ или $4|d|$. Число этих прогрессий равно $\frac{1}{2}\varphi(2|d|)$ или $\frac{1}{2}\varphi(4|d|)$, где $\varphi(n)$ — *Эйлера функция*. К. з. в. дает возможность установить законы разложения в квадратичном расширении $R(\sqrt{d})$ поля рациональных чисел, поскольку в $R(\sqrt{d})$ разложение простого числа p, не делящего d, на простые дивизоры зависит от того, приводим или нет многочлен x^2-d по модулю p.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972. *С. А. Степанов.*

КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ПРИВЕДЕНИЕ — выделение в каждом классе квадратичных форм (к. ф.) над данным кольцом R приведенных форм — «стандартных» форм класса (одной или нескольких). Основной целью К. ф. п. является решение проблемы эквивалентности к. ф.: установить, эквивалентны над R данные к. ф. q и r или нет, и в случае их эквивалентности найти (описать) все обратимые матрицы U над R, переводящие q в r (см. *Квадратичная форма*). Для решения последней задачи достаточно знать одну такую матрицу U_0 и все автоморфизмы V формы q, ибо тогда $U=VU_0$. Обычно имеется в виду эквивалентность к. ф. над $\mathbb{Z}$, причем часто рассматривается вся совокупность к. ф. над $\mathbb{R}$ и их классы над $\mathbb{Z}$. Имеются принципиальные различия в теории приведения положительных (положительно определенных) и неопределенных к. ф.

Приведение положительных к. ф. Имеются различные способы приведения над $\mathbb{Z}$ действительных положительных к. ф. Из них наиболее распространенный и изученный — способ приведения по Минковскому (или по Эрмиту — Минковскому), наиболее общий — по Венкову. Распространено также приведение по Зелингу ($n=3$) и по Шарву ($n=4$).

Определить приведенную к. ф.

$$q(x)=B[x]=\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j,\ b_{ij}=b_{ji}\in\mathbb{R},\ \|b_{ij}\|=B$$

значит задать в конусе положительности $\mathfrak{P}$ пространства коэффициентов $\mathbb{R}^N$, $N=n(n+1)/2$, область приведения $\mathfrak{G}$ так, чтобы $q(x)$ была приведенной тогда и только тогда, когда $q=(b_{11}, \ldots, b_{n-1,n})\in\mathfrak{G}$. Желательно, чтобы $\mathfrak{G}$ обладала хорошими геометрич. свойствами (была односвязной, выпуклой и т. п.) и была фундаментальной областью группы Γ целочисленных подстановок определителя ±1. Область $F\subset\mathfrak{P}$ наз. **фундаментальной областью приведения** положительных к. ф., если F—открытая область в $\mathbb{R}^N$ и: 1) для всякой к. ф. $q\in\mathfrak{P}$ найдется эквивалентная к. ф. $h\simeq\simeq q(\mathbb{Z})$, для к-рой $h\in\bar{F}$; 2) если $h_1, h_2\in F$ и $h_1\simeq h_2(\mathbb{Z})$, то $h_1=h_2$.

а) **Приведение к. ф. по Минковскому.** Положительная к. ф. $q(x)$ приведена по Минковскому, если для любого $k=1, \ldots, n$ и любых целых чисел $l_1, \ldots, l_n$ с условием н. о. д. $(l_k, \ldots, l_n)=1$,

$$q(l_1, \ldots, l_n)\geqslant b_{kk}. \tag{1}$$

Из бесконечного числа неравенств (1) для коэффициентов b_{ij} можно выбирать конечное число так, что остальные неравенства из них следуют. В пространстве коэффициентов $\mathbb{R}^N$ множество приведенных по Минковскому форм образует бесконечную выпуклую пирамиду (гоноэдр) с конечным числом граней, наз. **областью приведения Минковского** (или **гоноэдром Эрмита — Минковского**) $\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_n$; $\mathfrak{E}$— замкнутое множество, $\mathfrak{E}\subset\overline{\mathfrak{P}}$. Для $n\leqslant7$ вычислены грани области $\mathfrak{E}_n$ (см. [9]).

Существует такая постоянная λ_n, что если к. ф. $q(x)$ приведена по Минковскому, то

$$\prod\nolimits_{i=1}^{n} b_{ii}\leqslant\lambda_n\,d(q),$$

где $d(q)=\det\|b_{ij}\|$ — определитель к. ф. $q(x)$.

Всякая действительная положительная к. ф. эквивалентна над $\mathbb{Z}$ приведенной по Минковскому к. ф. Имеется алгоритм приведения (отыскания приведенной формы, эквивалентной данной) (см. [8], [15]).

Для $n=2$, $q=q(x, y)=(a, b, c)=ax^2+2bxy+cy^2$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a>0$, $d(q)>0$ условия приведения имеют вид

$$0\leqslant 2b\leqslant a\leqslant c.$$

Если ограничиться собственной эквивалентностью (когда допускаются целочисленные преобразования только определителя $+1$), то область приведения имеет вид $0\leqslant 2|b|\leqslant a\leqslant c$ (условия приведения Лагранжа — Гаусса). Множество всех неэквивалентных (собственно) приведенных к. ф. записывается как объединение $F\cup F_1\cup F_2$, где

$$F:2\,|\,b\,|<a<c,\quad F_1:0\leqslant 2b<a=c,\quad F_2:0<2b=a\leqslant c.$$

Для $n=2$ имеется алгоритм приведения Гаусса, согласно к-рому от формы, не удовлетворяющей условиям Лагранжа — Гаусса, следует перейти к ее «соседней»:

$$(a',\ b',\ c')=(a,\ b,\ c)\begin{Vmatrix}0 & -1\\ 1 & k\end{Vmatrix},\quad a'=c,$$

где целое число k выбирается так, что $|b'|\leqslant c/2$. Для любой действительной к. ф. (a, b, c) алгоритм обрывается через конечное число шагов.

Если $q=(a, b, c)$, $a, b, c\in\mathbb{Z}$, н. о. д. $(a, b, c)=1$, то для $d(q)=ac-b^2>3$ имеется лишь два автоморфизма (определителя $+1$), для $d(q)=3$ — шесть автоморфизмов, для $d(q)=1$ — четыре автоморфизма.

б) Приведение к. ф. по Венкову. Это — способ приведения $(\mathfrak{V}_\varphi)$, зависящий от параметра φ — произвольно задаваемой действительной положительной n-арной к. ф. (см. [3]). Говорят, что к. ф. q φ-приведена, если

$$(q,\ \bar{\varphi})\leqslant(q,\ \bar{\varphi}S)$$

для всех целочисленных $n\times n$-матриц S определителя 1; здесь $\bar{\varphi}=d(\varphi)\varphi^{-1}$ — форма, взаимная с φ, $\bar{\varphi}S$ — к. ф., получающаяся из $\bar{\varphi}$ подстановкой S, (q_1, q_2) — полуинвариант Вороного, определяемый так: если $q_1=B_1[x]$, $B_1=\|b_{ij}^{(1)}\|$, $q_2=B_2[x]$, $B_2=\|b_{ij}^{(2)}\|$, то

$$(q_1,\ q_2)=\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{n} b_{ij}^{(1)}\,b_{ij}^{(2)}.$$

Совокупность φ-приведенных к. ф. образует в пространстве коэффициентов $\mathbb{R}^N$ выпуклый гоноэдр $\mathfrak{V}_\varphi$ с конечным числом граней, лежащий в $\mathfrak{P}$. Если $\varphi=x_1^2+{}$ $+\ldots+x_n^2$ и $n\leqslant 6$, то $\mathfrak{V}_\varphi$ совпадает с областью приведения Минковского.

в) Приведение к. ф. по Зелингу и Шарву. Если в приведении по Венкову положить $\varphi=\varphi_n^{(0)}=$ $=\sum\nolimits_{i\leqslant j}x_ix_j$, где $\varphi_n^{(0)}$ — первая совершенная форма Вороного, то для $n=3$ получается приведение по Зелингу, а для $n=4$ — приведение по Шарву (см. [5], [6]).

Приведение неопределенных к. ф. принципиально сложнее, чем приведение положительных к. ф. Для них нет фундаментальных областей. Только для $n=2$ имеется законченная теория приведения к. ф. над $\mathbb{Z}$.

а) Приведение неопределенных бинарных к. ф. Пусть

$$q=q\ (x,\ y)=(a,\ b,\ c)=ax^2+2bxy+cy^2,\ a,\ b,\ c\in\mathbb{Z},$$

к. ф. определителя $d=ac-b^2=-|d|$ и $|d|$ не есть полный квадрат. Форме q сопоставляется квадратное уравнение $az^2+2bz+c=0$ и его различные иррациональные корни

$$\Omega=\Omega\ (q)=\frac{-b-\sqrt{|d|}}{a},\quad \omega=\omega\ (q)=\frac{-b+\sqrt{|d|}}{a}.$$

Форма q наз. приведенной, если $|\Omega|>1$, $|\omega|<1$, $\Omega\omega<0$. Эти условия равносильны условиям

$$0<\sqrt{|d|}-b<|a|<\sqrt{|d|}+b$$

(а также условиям $0<\sqrt{|d|}-b<|c|<\sqrt{|d|}+b$). Число приведенных целочисленных к. ф. данного определителя конечно. Каждая к. ф. эквивалентна приведенной. Существует алгоритм приведения, использующий цепные дроби (см. [1]).

Для приведенной к. ф. существует ровно одна «соседняя справа» и ровно одна «соседняя слева» приведенная к. ф. (см. [1], с. 100). Исходя из приведенной к. ф., переходя к «соседним», получают двояко бесконечную цепь приведенных форм. Эта цепь периодична. Конечный отрезок неэквивалентных форм этой цепи наз. периодом. Две приведенные формы собственно эквивалентны тогда и только тогда, когда одна из них встречается в периоде другой.

Изложенная теория справедлива и для форм с действительными коэффициентами a, b, c, если $\Omega(q)$ и $\omega(q)$ — различные иррациональные корни, но цепь приведенных форм при этом может не быть периодичной.

Все собственные автоморфизмы (определителя $+1$) к. ф. с н. о. д. $(a, b, c)=1$, н. о. д. $(a, 2b, c)=\sigma$, $d=$ $=ac-b^2<0$ имеют вид

$$\begin{Vmatrix} \frac{t-bu}{\sigma} & -\frac{cu}{\sigma} \\ \frac{au}{\sigma} & \frac{t+bu}{\sigma} \end{Vmatrix} = \pm \begin{Vmatrix} \frac{T-bU}{\sigma} & -\frac{cU}{\sigma} \\ \frac{aU}{\sigma} & \frac{T+bU}{\sigma} \end{Vmatrix}^n, \qquad n=0, \pm 1, \ldots,$$

где (t, u) пробегает все решения *Пелля уравнения* t^2+ $+du^2=\sigma^2$, (T, U) — фундаментальное решение этого уравнения, т. е. наименьшее положительное решение. Несобственные автоморфизмы (определителя -1) имеются лишь у двусторонних форм — форм, класс к-рых совпадает с обратным (см. [1], с. 111). Подгруппа собственных автоморфизмов двусторонней формы имеет индекс 2 в группе всех автоморфизмов.

Неопределенные целочисленные к. ф. определителя $d=-s^2$, $s>0$, $s\in\mathbb{Z}$, приводятся к виду $(0, -s, r)$, где $r\in\mathbb{Z}$, $0\leqslant r<2s$. К. ф. $(0, -s, r_1)$ и $(0, -s, r_2)$, $0\leqslant r_1, r_2<2s$ собственно эквивалентны тогда и только тогда, когда $r_1=r_2$. Все автоморфизмы таких форм суть $\pm\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$ (см. [1], с. 107).

б) Приведение неопределенных n-арных к. ф. Пусть $q(x)=B[x]=x^TBx$ — такая форма с действительными коэффициентами и $d(q)\neq 0$. Тогда существует такая подстановка переменных (над $\mathbb{R}$): $x=Sy$, что

$$q(x)=y_1^2+\ldots+y_t^2-y_{t+1}^2-\ldots-y_n^2,$$

где $(t, n-t)$ — сигнатура к. ф. q. Пусть

$$D=\begin{Vmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & -1 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\} t \text{ строк} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}-1\\ \ddots\\ -1\end{matrix}}\right\} n-t \text{ строк} \end{matrix}$$

и $B=S^TDS$. К. ф. $q(x)$ сопоставляется положительная к. ф.

$$h_S(x)=y_1^2+\ldots+y_t^2+y_{t+1}^2+\ldots+y_n^2=S^TS[x].$$

Форма q наз. приведенной (по Эрмиту), если найдется такое преобразование S формы q к сумме квадратов, что положительная к. ф. $h_S(x)$ является приведенной (напр., по Минковскому).

Равносильное этому определение приведенной к. ф. следующее [13], [14]. Пусть $\Phi(q)$ — множество матриц H над $\mathbb{R}$ положительных n-арных к. ф., удовлетворяющих равенству $HB^{-1}H=B$. Это связное $t(n-t)$-мерное многообразие конуса положительности $\mathfrak{P}\subset\mathbb{R}^N$ (выписываемое в явном виде). Пусть $F \subset \mathfrak{P}$ — область приведения положительных к. ф. Форма q наз. приведенной, если $\Phi(q) \cap F$ не пусто.

Число классов целочисленных неопределенных к. ф. от n переменных с данным определителем d конечно (это верно и для положительных к. ф.). Число приведенных форм в данном классе также конечно. Если две целочисленные к. ф. q_1 и q_2 эквивалентны, то найдется целочисленная подстановка S, абсолютные величины элементов к-рой ограничены постоянной, зависящей только от n и d, переводящая q_1 в q_2. Тем самым проблема установления эквивалентности или неэквивалентности двух неопределенных целочисленных к. ф. решается в конечное число шагов.

в) Автоморфизмы неопределенных к. ф. Проблема описания всех автоморфизмов неопределенной целочисленной к. ф. имеет два аспекта: 1) построить фундаментальную область группы автоморфизмов и 2) описать общий вид автоморфизмов (подобно описанию автоморфизмов через уравнение Пелля).

Общий вид автоморфизмов к. ф. был описан Ш. Эрмитом (Ch. Hermite) для $n=3$ и А. Кэли (A. Cayley) для произвольного n (см. [10]).

Построена фундаментальная область группы автоморфизмов неопределенной целочисленной к. ф. $q(x)$ в многообразии $\Phi(q)$, ограниченная конечным числом алгебраич. поверхностей, и вычислен ее объем [13]. В случае $t=1$ в n-мерном пространстве переменных построена фундаментальная область группы автоморфизмов к. ф. $q(x)$ в виде бесконечной пирамиды с конечным числом плоских граней [2], [4].

Построена теория приведения к. ф. в алгебраич. числовых полях (см. [11]).

Лит.: [1] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.— Л., 1937; [2] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1937, т. 1, с. 139—70; [3] его же, там же, 1940, т. 4, с. 37—52; [4] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 30—41; [5] Делоне Б. Н., «Успехи матем. наук», 1937, в. 3, с. 16—62; 1938, в. 4, с. 104—64; [6] Делоне Б. Н., Галиулин Р. В., Штогрин М. И., в кн.: Современные проблемы математики, т. 2, М., 1973, с. 119—254; [7] Лежен-Дирихле П. Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М.—Л., 1936; [8] Рышков С. С., «Зап. науч. семинаров ЛОМИ», 1973, т. 33, с. 37—64; [9] Таммела П. П., там же, 1975, т. 50, с. 6—96; 1977, т. 67, с. 108—43; [10] Bachmann P., Die Arithmetik der quadratischen Formen, Abt. 1—2, Lpz., 1923—25; [11] Humbert P., «Comment. math. helv.», 1949, t. 23, p. 50—63; [12] Minkowski H., «J. reine und angew. Math.», 1905, Bd 129, S. 220—74; [13] Siegel C. L., «Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg», 1940, Bd 13, S. 209—39; [14] его же, «Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl.», 1972, S. 21—46; [15] Van der Waerden B. L., «Acta math.», 1956, v. 96, p. 265—309. *А. В. Малышев.*

КВАДРАТНОГО КОРНЯ МЕТОД — метод решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$ с эрмитовой невырожденной матрицей A. Среди прямых методов он наиболее эффективен при реализации на ЭВМ.

Вычислительная схема метода в общем случае основана на факторизации эрмитовой матрицы A в виде

$$A = S^*DS, \tag{1}$$

где S — правая треугольная матрица с действительными положительными диагональными элементами, D — диагональная матрица с элементами 1 или —1 на диагонали. Из (1) непосредственно получаются рекуррентные соотношения для вычисления элементов s_{ij} и d_{ii} матриц S и D:

$$\left.\begin{aligned} d_{ii} &= \operatorname{sign}\left(a_{ii} - \sum\nolimits_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk}\right), \\ s_{ii} &= \left| a_{ii} - \sum\nolimits_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk} \right|^{1/2}, \\ s_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum\nolimits_{k=1}^{i-1} \bar{s}_{ki} s_{kj} d_{kk}\right) / s_{ii} d_{ii}, \quad j > i. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

После того как факторизация (1) выполнена, решение исходной системы сводится к последовательному решению двух систем $S^*Dy=b$ и $Sx=y$ с треугольными матрицами. В этой части К. к. м. совпадает с обратным ходом большинства прямых методов решения систем (см. *Гаусса метод*).

В действительном случае, когда A — симметрич. матрица, схема (2) соответствует разложению $A = S'DS$ с действительной матрицей S и несколько упрощается. Существенное упрощение схемы (2) происходит, когда A — положительно определенная матрица. В этом случае $D = E$, $A = S^*S$.

Известны схемы К. к. м. для неположительно определенных матриц, основанные на факторизации вида $A = S^*S$. Для вычисления элементов S имеют место рекуррентные соотношения, аналогичные (2). Однако эта факторизация не эффективна для реализации на ЭВМ в случае, когда A — действительная матрица, так как при вычислении матрицы S возможен выход в комплексную арифметику.

Из характеристик К. к. м. важны следующие.

1) Среди прямых методов решения систем, основанных на факторизации матрицы, К. к. м. обладает самым высоким быстродействием (в два раза выше, чем у метода Гаусса).

2) Для факторизации матрицы по К. к. м. достаточно задавать компактную информацию о матрице в виде элементов ее треугольной половины. Кроме того, схема (2) позволяет записывать в память ЭВМ матрицу S на месте исходной информации об A. Это существенно увеличивает порядок решаемых систем.

3) Вычислительная схема К. к. м. допускает сегментированную обработку исходной матрицы участками из нескольких последовательных строк. Использование внешней памяти при этом позволяет решать системы высокого порядка.

4) К. к. м. сохраняет ленточную структуру матрицы, т. е. матрица S будет иметь тот же вид, что и верхняя половина исходной матрицы.

5) Особенно эффективен К. к. м. для систем с положительно определенными матрицами. В данном случае нет роста элементов матрицы в процессе вычислений. Это свойство обеспечивает устойчивость вычислительного процесса к ошибкам округления. Мажорантная оценка точности вычисленного решения в этом случае — минимальная в классе прямых методов. Понижению общего уровня ошибок способствует и возможность вычисления скалярного произведения векторов в схеме (2) в режиме накопления с удвоенной точностью.

Отсутствие роста элементов в процессе вычислений делает удобным реализацию К. к. м. на ЭВМ, работающих в арифметике с фиксированной запятой.

6) Разложение (1) по К. к. м. может быть использовано для вычисления определителя матрицы, обращения матрицы.

Лит.: [1] Воеводин В. В., Численные методы алгебры, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, М., 1974; [4] Уилкинсон Дж. Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [4] Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977.

Г. Д. Ким.

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ — алгебраическое уравнение 2-й степени. Общий вид К. у.

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

В поле комплексных чисел К. у. имеет два решения, выражающиеся в радикалах через коэффициенты этого уравнения:

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (*)$$

При $b^2 > 4ac$ оба решения К. у. действительные и различные, при $b^2 < 4ac$ решения — комплексные (комплексно сопряженные) числа, при $b^2 = 4ac$ уравнение имеет кратный корень $x_1 = x_2 = -b/2a$.

Для **приведенного К. у.**

$$x^2+px+q=0$$

формула (*) имеет вид

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Корни и коэффициенты К. у. связаны соотношениями: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$ (*Виета теорема*).

О. А. Иванова.

КВАДРАТРИСА — плоская кривая, используемая для решения задачи *квадратуры круга*. Напр.: *Динострата квадратриса*, *кохлеоида*, квадратриса Чирнгаузена:

$$y=a\sin\frac{\pi x}{2a},$$

квадратриса Оцанама:

$$x=2a\sin^2\frac{y}{2a}.$$

А. Б. Иванов.

КВАДРАТУРА — 1) Построение квадрата, равновеликого данной фигуре (см., напр., *Квадратура круга*). 2) Вычисление площади или интеграла (от функции одного переменного).

КВАДРАТУРА КРУГА — задача на построение квадрата, равновеликого данному кругу; одна из классич. задач древности на точное построение циркулем и линейкой. Сторона квадрата, равновеликого кругу радиуса r, равна $r\sqrt{\pi}$. Таким образом, задача о К. к. сводится к следующей: построить отрезок длины $\sqrt{\pi}$. Такое построение неосуществимо с помощью циркуля и линейки, так как π — *трансцендентное число*, что было доказано в 1882 Ф. Линдеманом (F. Lindemann). Однако задача о К. к. разрешима, если расширить средства построения, напр., используя нек-рые трансцендентные кривые, наз. *квадратрисами*.

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963, с. 205—27. *Е. Г. Соболевская.*

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — приближенная формула для вычисления определенного интеграла:

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx\cong\sum_{j=1}^{N}C_jf(x_j);\qquad(1)$$

в левой части стоит интеграл, подлежащий вычислению. Подинтегральная функция записана в виде произведения двух функций. Первая из них $p(x)$ считается фиксированной для данной К. ф. и наз. **весовой функцией**, функция $f(x)$ принадлежит достаточно широкому классу функций, напр. непрерывных и таких, что интеграл в левой части (1) существует. Сумма в правой части (1) наз. **квадратурной суммой**, числа x_j наз. **узлами** К. ф., а числа C_j — **коэффициентами** К. ф. Нахождение приближенного значения интеграла с помощью формулы (1) сводится к вычислению квадратурной суммы; при этом значения узлов и коэффициентов обычно берутся из таблиц (см., напр., [3]).

Наибольшее распространение получили К. ф., основанные на алгебраическом интерполировании. Пусть $x_1, \ldots, x_N$ — попарно различные точки (обычно $x_i\in[a, b]$, хотя это требование не является обязательным) и $P(x)$ — интерполяционный многочлен функции $f(x)$, построенный по ее значениям в этих точках:

$$P(x)=\sum_{i=1}^{N}L_i(x)\,f(x_i);$$

здесь $L_i(x)$ — многочлен влияния i-го узла: $L_i(x_j)=\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Интеграл по $[a, b]$ от $p(x)f(x)$ приближенно заменяется интегралом от $p(x)P(x)$; получается приближенное равенство вида (1), в к-ром

$$C_i=\int_a^b p(x)\,L_i(x)\,dx,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N.\qquad(2)$$

Существование интегралов в (2) равносильно существованию моментов весовой функции

$$\mu_k = \int_a^b p(x)\, x^k\, dx, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ N$$

(здесь и далее предполагается, что требуемые моменты $p(x)$ существуют, в частности в случае $p(x)=1$ промежуток $[a,\ b]$ считается конечным).

К. ф. (1), коэффициенты к-рой определяются равенствами (2), наз. интерполяционной. Целое число $d \geqslant 0$ наз. алгебраической степенью точности К. ф. (1), если эта формула точна, когда $f(x)$ — любой многочлен степени выше d, и не точна для $f(x)=x^{d+1}$. Чтобы К. ф. (1) была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы для ее алгебраич. степени точности d выполнялось неравенство $d \geqslant N-1$.

Пусть $p(x)=1$ и $[a,\ b]$ конечен. Интерполяционная К. ф. с равноотстоящими узлами

$$x_j = a + jh,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ h=(b-a)/n, \tag{3}$$

где n — натуральное число, $N=n+1$, наз. *Ньютона — Котеса квадратурной формулой*; такая К. ф. имеет алгебраич. степень точности $d=n$ при n нечетном и $d=n+1$ при n четном. Интерполяционная К. ф. с одним узлом

$$\int_a^b f(x)\, dx \cong (b-a)\, f(\xi), \quad a \leqslant \xi \leqslant b,$$

наз. *прямоугольников формулой*, ее алгебраич. степень точности $d=1$, когда $\xi=(a+b)/2$, и $d=0$ в остальных случаях.

Пусть

$$p(x) \geqslant 0 \text{ на } [a,\ b],\ \mu_0 > 0 \tag{4}$$

Интерполяционная К. ф. (1), у к-рой узлами являются корни ортогонального на $[a,\ b]$ с весом $p(x)$ многочлена степени N, наз. квадратурной формулой гауссова типа; ее называют также квадратурной формулой наивысшей алгебраич. степени точности, так как при условиях (4) никакая К. ф. с N узлами не может быть точна для x^{2N}. Наиболее употребительны К. ф. гауссова типа, к-рые определяются следующими частными случаями веса $p(x)$ и промежутка $[a,\ b]$:

вес Якоби $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ $(\alpha > -1,\ \beta > -1)$, $[-1,\ 1]$ при значениях параметров: а) $\alpha=\beta=0$ (*Гаусса квадратурная формула*), б) $\alpha=\beta=-{}^1/_2$ (*Мелера квадратурная формула*), в) $\alpha=\beta={}^1/_2$, г) $\alpha=-\beta={}^1/_2$;

вес Эрмита e^{-x^2} $(-\infty,\ +\infty)$;

вес Лагерра $x^{\alpha}e^{-x}(\alpha > -1)$, $(0,\ +\infty)$.

Существуют К. ф., в к-рых часть узлов заранее фиксирована, а остальные узлы выбираются так, чтобы К. ф. имела наивысшую алгебраич. степень точности. Таковы, в частности, *Лобатто квадратурная формула* и *Радо квадратурная формула* для вычисления интеграла по $[-1,\ 1]$ с весом 1. В первой из них фиксированными узлами являются $-1,\ 1$, а во второй — одна из этих точек.

Две К. ф. с весом 1

$$\int_c^d f(t)\, dt \cong \sum_{j=1}^m C_j f(t_j), \quad \int_\gamma^\delta \varphi(\tau)\, d\tau \cong \sum_{j=1}^m \Gamma_j \varphi(\tau_j)$$

наз. подобными, если $t_j - c = s(\tau_j - \gamma)$, $C_j = s\Gamma_j$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, где s определяется равенством $d-c=s(\delta-\gamma)$. В случае конечного $[a,\ b]$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx, \tag{5}$$

где x_i определяются равенствами (3). Если для вычисления интегралов по промежуткам $[x_i,\ x_{i+1}]$ применяются К. ф., подобные одной и той же К. ф., то равенст-

(5) приведет к **составной** К. ф. для вычисления интеграла, стоящего в левой его части. Такова, напр., составная К. ф. прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong h\sum_{j=1}^{n} f(\xi+(j-1)h), \quad \xi\in[a, a+h].$$

В случае $b-a=2\pi$ эта К. ф. точна для $\cos kx$, $\sin kx$ при $k=0, 1, \ldots, n-1$.

Можно рассматривать интерполяционные К. ф., к-рые получаются интегрированием интерполяционного многочлена Эрмита функции $f(x)$. В квадратурную сумму такой К. ф. входит не только значение самой функции в узле, но и значения ее последовательных производных до нек-рого порядка. Значения производных подинтегральной функции на концах промежутка интегрирования используются и в *Эйлера — Маклорена формуле.*

Для погрешности К. ф. (1)

$$R(f)\overset{\text{def}}{=}\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx-\sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j)$$

имеются представления, в к-рые входит производная $f^{(r)}(x)$. Эти представления мало пригодны для фактической оценки $R(f)$, так как при этом требуется оценка производной $f^{(r)}(x)$. Погрешность $R(f)$ является аддитивным и однородным функционалом на векторном пространстве функций, для к-рых она определена.

Другой подход основан на минимизации нормы функционала погрешности $R(f)$ построению К. ф.

Пусть $R(f)$ — погрешность К. ф., к-рая точна для всех многочленов степени не выше $r-1$, при этом $[a, b]=[0, 1]$ и $p(x)=1$, и $W_q^{(r)}$ ($q>1$, r — натуральное число) — векторное пространство функций $f(x)$, к-рые на $[0, 1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и суммируемую со степенью q производную порядка r. Две функции из $W_q^{(r)}$ считают эквивалентными, если их разность есть многочлен степени не выше $r-1$. Множество классов эквивалентности (факторпространство $W_q^{(r)}$ по векторному пространству многочленов степени не выше $r-1$) является векторным пространством, к-рое обозначают $L_q^{(r)}$. В $L_q^{(r)}$ можно ввести норму, полагая для класса $\psi\in L_q^{(r)}$

$$\|\psi\|\overset{\text{def}}{=}\|f^{(r)}\|_{L_q}\overset{\text{def}}{=}\left\{\int_0^1 |f^{(r)}(x)|^q\,dx\right\}^{1/q},$$

где f — любая функция, принадлежащая ψ. Функционал погрешности К. ф. рассматривают на $L_q^{(r)}$, полагая $R(\psi)=R(f)$, $f\in\psi$. Функционал $R(\psi)$ непрерывен в линейном нормированном пространстве $L_q^{(r)}$. Его норма $\|R\|$ характеризует точность К. ф. для всех функций из $W_q^{(r)}$: для любой $f\in W_q^{(r)}$ справедливо неравенство

$$|R(f)|\leqslant\|R\|\cdot\|f^{(r)}\|_{L_q},$$

к-рое является точным. Ясно, что $\|R\|$ есть функция параметров x_k, c_k, $k=1, 2, \ldots, N$, К. ф., и естественно пытаться их выбрать так, чтобы $\|R\|$ принимала наименьшее значение. Это приводит к такой К. ф. (из класса рассматриваемых), погрешность к-рой имеет минимальную оценку для всех функций пространства $W_q^{(r)}$. Таким образом, построение К. ф. сводится к решению экстремальной задачи. Эта задача уже в рассмотренном частном случае весьма сложна и ее решение получено (1978) лишь при $r=1$ и $r=2$.

Лит.: [1] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967; [2] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 2 изд., М., 1974; [3] Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966. *И. П. Мысовских.*

КВАДРАТУРНЫХ СУММ МЕТОД — метод аппроксимации интегрального оператора при построении численных методов решения интегральных уравнений.

Простейший вариант К. с. м. состоит в замене интегрального оператора, напр. вида

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

в интегральном уравнении

$$\lambda\varphi(x) + \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(s),$$

на оператор с конечномерной областью значений по правилу

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s) \approx \sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)} K(x, s_i)\,\varphi(s_i). \qquad (1)$$

Интегральное уравнение в свою очередь аппроксимируется линейным алгебраич. уравнением

$$\lambda\tilde{\varphi}(s_j) + \sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)} K(s_j, s_i)\,\tilde{\varphi}(s_i) = f(s_i), \quad j = \overline{1, N}.$$

В правой части приближенного равенства (1) стоит квадратурная формула для интеграла по s. Возможны разнообразные обобщения аппроксимации (1) вида:

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds \approx \sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)}(x)\,\varphi(s_i), \qquad (2)$$

где $a_i^{(N)}(x)$ — некоторые функции, строящиеся по ядру $K(x, s)$. К. с. м., обобщенный в виде (2), может применяться при аппроксимации интегральных операторов с особенностями в ядре и даже сингулярных интегральных операторов.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962.

А. Б. Бакушинский.

КВАДРИКА — 1) К.— поверхность 2-го порядка. В трехмерном пространстве (проективном, аффинном или евклидовом) К. есть множество точек, однородные координаты x_0, x_1, x_2, x_3 к-рых (относительно проективной, аффинной или декартовой системы координат) удовлетворяют однородному уравнению 2-й степени:

$$F(x) \equiv \sum_{i,\ j=0}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Билинейная симметричная форма

$$\Phi(x, \tilde{x}) = \sum_{i,\ j=0}^{3} a_{ij} x_i \tilde{x}_j$$

наз. полярной формой относительно $F(x)$. Две точки $M'(x_0', x_1', x_2', x_3')$, $M''(x_0'', x_1'', x_2'', x_3'')$, для к-рых $\Phi(x', x'')=0$, наз. полярно сопряженными точками относительно К. Если прямая (M', M'') пересекает К. в точках N_1, N_2 и точки M', M'' полярно сопряжены относительно К., то точки N_1, N_2 и M', M'' образуют *гармоническую четверку*. Точки К. и только они являются самосопряженными. Прямая, каждая точка к-рой принадлежит К., наз. прямолинейной образующей К. Полюсом данной плоскости относительно К. наз. точка, полярно сопряженная со всеми точками этой плоскости. Множество точек пространства, полярно сопряженных с данной точкой M' относительно К., наз. полярой точки M' относительно К. Касательная плоскость к К.— поляра точки касания. Поляра точки M' определяется линейным уравнением $\Phi(x, x')=0$ относительно координат x_0, x_1, x_2, x_3. Если $\Phi(x, x') \not\equiv 0$, то поляра точки M' — плоскость; если $\Phi(x, x') \equiv 0$, то поляра точки M' — все пространство. В этом случае точка M' принадлежит К. и наз. ее особой точкой. Если число $R = \operatorname{rang}(a_{ij}) = 4$, то К. не имеет особых точек и наз. невырождающейся К. В проективном пространстве это — мнимый овалоид, действительный овалоид или линейчатая К. Невырождающаяся К. определяет корреляцию — биективное отображение множества точек проективного пространства на множество плоскостей. Линейчатая невырождающаяся К. имеет два различных семейства прямолинейных образующих, расположенных на К. так, что всякие две прямые одного семейства не пересекаются, а две прямые разных семейств пересекаются в одной точке. Если $R=3$, то К. является конусом (действительным или мнимым) с вершиной в единственной особой точке. Действительный конус имеет единственное семейство прямолинейных образующих, проходящих через его вершину. Если $R=2$, то К. распадается на пару плоскостей (действительных или мнимых), пересекающихся по прямой, состоящей из особых точек. Если $R=1$, то К. является сдвоенной действительной плоскостью, образованной особыми точками К. Аффинные свойства К. выделяются спецификой расположения К., ассоциированных с ней точек, прямых и плоскостей относительно выделенной плоскости $x_0=0$ — несобственной плоскости. Напр., эллипсоид (гиперболоид, параболоид) — невырожденная К., не пересекающая (пересекающая, касающаяся) несобственную плоскость. Ц е н т р К.— полюс несобственной плоскости; д и а м е т р — прямая, полярно сопряженная несобственной прямой.

Лит.: [1] Ф и н и к о в С. П., Аналитическая геометрия, 2 изд., М., 1952; [2] Е ф и м о в Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 5 изд., М., 1960. *В. С. Малаховский.*

2) К. в а л г е б р а и ч е с к о й г е о м е т р и и — проективное алгебраическое многообразие, определяемое однородным квадратным уравнением

$$\sum_{i,\ j=0}^{n} a_{ij}x_ix_j=0$$

в проективном пространстве P^n над основным полем k.

Пусть далее основное поле алгебраически замкнуто с характеристикой, не равной 2. Пусть Q — К. в P^n и $s(Q)$ — множество ее особых точек. Тогда $s(Q)$ — пустое множество, если и только если $rk(Q)=n+1$, где $rk(Q)$ — ранг соответствующей квадратичной формы. Если $s(Q)$ не пусто, то Q — конус над гладкой К. размерности $rk(Q)-1$, вершиной к-рого является проективное подпространство $s(Q)$ в P^n размерности $n-rk(Q)$. Все К. с $rk(Q)=r$ проективно эквиваленты К.

$$\sum_{i=0}^{r-1} x_i^2=0.$$

Пусть $s(Q)$ пусто и $E\subset Q$ — линейное подпространство максимальной размерности (оно наз. о б р а з у ю щ е й к в а д р и к и Q), тогда

а) если $\dim Q=2m$, то $\dim E=m$;

б) если $\dim Q=2m+1$, то $\dim E=m$.

Кроме того, семейство всех подпространств E максимальной размерности на Q является замкнутым неособым подмножеством G грассманова многообразия подпространств размерности $\dim E$ в P^n, причем, если $\dim Q=2m$, то $G=G_1\cup G_2$; G_i, $i=1, 2,$— непересекающиеся неособые неприводимые рациональные многообразия одинаковой размерности $\binom{m+1}{2}$, а E и E' принадлежат одной и той же компоненте, если и только если

$$\dim(E\cap E')\equiv\dim E \pmod 2).$$

Если же $\dim Q=2m+1$, то G является неособым и неприводимым рациональным многообразием размерности $\binom{m+2}{2}$.

В случае, когда $s(Q)$ пусто и $\dim Q=2$, $Q\simeq P^1\times P^1$; если же $\dim Q\neq 2$, то $\mathrm{Pic}(Q)\simeq\mathbb{Z}$.

Любая К. рациональна: бирациональный изоморфизм К. Q с проективным пространством задается стереографич. проекцией К. Q из нек-рой точки $q\in Q$, $q\notin s(Q)$. Многообразия, являющиеся полными пересечениями К., изучаются с точки зрения бирациональной геометрии [3]. Пересечения двух К. изучены в [2], трех — в [4].

Любое проективное многообразие X может быть так погружено в проективное пространство P^N (для достаточно большого N), что его образ является пересечением (как правило, неполным) К., его содержащих [1].

Изучение К. над незамкнутыми полями тесно связано с арифметикой квадратичных форм.

Лит.: [1] Mumford D., С. I. М. Е. III ciclo. Varenna, 1969, Roma, 1970, p. 29—100; [2] Reid M., The complete intersection of two or more quadrics, These D. Ph. Cambridge Univ., 1972; [3] Roth L., Algebraic threefols (with special regard to problems of rationality), B.—Hdlb.—N.Y., 1955; [4] Тюрин А. Н., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, № 6, с. 51—99. *В. А. Исковских.*

КВАДРИРУЕМОСТЬ — измеримость по Жордану множества на плоскости (см. *Жордана мера*). Не всякая область (т. е. открытое связное множество) и даже не всякая жорданова область (т. е. область, имеющая своей границей простую замкнутую кривую) квадрируема. С другой стороны, множество, граница к-рого *спрямляемая кривая*, квадрируемо.

Лит.: [1] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 2, М., 1973. *В. В. Сазонов.*

КВАЗИАБЕЛЕВА ФУНКЦИЯ — обобщение *абелевой функции*. Мероморфная в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $n>1$, функция $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$, наз. квазиабелевой функцией, если она имеет m, $0<$ $<m<2n$, линейно независимых периодов; в случае абелевых функций $m=2n$. К. ф. могут рассматриваться как предельный случай абелевых функций, когда нек-рые периоды неограниченно возрастают.

Лит.: [1] Severi F., Funzioni quasi-abeliane, Roma, 1947. *Е. Д. Соломенцев.*

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЙ КЛАСС функций — класс функций, характеризуемый свойством единственности: если две функции класса совпадают «в малом», то они тождественны. Простейшим К. к. является класс функций, аналитических на отрезке $[a, b]$ действительной оси (функция этого класса представляется в достаточно малой окрестности каждой точки отрезка рядом Тейлора): если две аналитические на $[a, b]$ функции равны на интервале $(\alpha, \beta)\subset[a, b]$, то они тождественны [совпадение «в малом» здесь означает равенство функций на внутреннем интервале (α, β)]. Совпадение «в малом» для аналитич. функций может означать и равенство функций вместе со всеми производными в нек-рой точке x_0, $0<x_0<b$. Из совпадения «в малом» в этом новом смысле также следует тождественность функций на всем отрезке.

Э. Борель (E. Borel) обнаружил, что свойство единственности может иметь место не только для аналитич. функций. В связи с этим Ж. Адамар (J. Hadamard, 1912) поставил следующую проблему. Пусть $\{M_n\}$ — последовательность положительных чисел и $[a, b]$ — некоторый отрезок действительной оси. Пусть $C\{M_n\}$ — множество бесконечно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $f(x)$ таких, что

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant K^n M_n, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

где $K=K(f)$ — постоянная, не зависящая от n. При этом функция $f(x)$ является аналитической на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда при некотором $K=K(f)$

$$|f^{(n)}(x)| < K^n n!, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad n=0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Таким образом, класс аналитических на $[a, b]$ функций есть класс $C\{n!\}$. Проблема Адамара состоит в указании условий на числа M_n таких, чтобы всякая функция из класса $C\{M_n\}$, обращающаяся в нуль вместе со всеми своими производными в нек-рой точке α_0, $a\leqslant\alpha_0\leqslant b$, была тождественно равна нулю (или, что то же, чтобы две функции из $C\{M_n\}$, равные вместе со всеми производными в точке α_0, были всюду равны). Класс $C\{M_n\}$ с таким свойством наз. квазианалитическим на $[a, b]$. Класс $C\{n!\}$, согласно сказанному выше,— квазианалитический на $[a, b]$.

А. Данжуа (A. Denjoy, 1921) привел достаточные условия квазианалитичности. Он указал, что если

$$M_n = n!\,(\ln n)^n,\quad M_n = n!\,(\ln n)^n\,(\ln\ln n)^n,\ \ldots,$$

то $C\{M_n\}$ — квазианалитический (эти классы, в силу (1), шире класса аналитич. функций).

Т. Карлеман (T. Carleman) полностью решил проблему Адамара, дав необходимые и достаточные условия квазианалитичности. Эти условия в дальнейшем видоизменялись. Теорема Данжуа — Карлемана о квазианалитичности формулируется так: каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для квазианалитичности класса $C\{M_n\}$:

а) если положить

$$\beta_n = \inf_{k \geqslant n} M_k^{1/k},$$

то

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} = \infty,$$

б) если положить

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n},$$

то

$$\int^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\,dr = \infty,$$

в) либо

$$\varliminf_{n \to \infty} M_n^{1/n} < \infty,$$

либо

$$\lim_{n \to \infty} M_n^{1/n} = \infty$$

и

$$\sum^{\infty} \frac{M_n'}{M_{n+1}'} = \infty,$$

где $\{M_n'\}$ — выпуклая регуляризация посредством логарифмов последовательности $\{M_n\}$. [Условие а) наз. условием Карлемана, б) — условием Островского, в) — условием Банга — Мандельбройта].

В случае $M_n = n! = n^n/(e+\varepsilon_n)^n$ ($\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$) имеем $\beta_n \approx n/e$, выполняется условие а), и снова получаем, что $C\{n!\}$ — квазианалитич. класс. В случае $M_n = n!\,(\ln n)^n$ имеем $\beta_n \approx (n \ln n)/e$, выполняется условие а) и потому класс Данжуа $C\{n!\,(\ln n)^n\}$ — квазианалитический. В случае $M_n = n!\,(\ln^{1+\varepsilon} n)^n$, $\varepsilon > 0$, имеем

$$\beta_n \approx (n \ln^{1+\varepsilon} n)/e,\quad \sum\nolimits_{1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} < \infty,$$

вследствие чего $C\{M_n\}$ — не К. к.

С. Н. Бернштейн ввел другие К. к. функций. Он показал, что функция $f(x)$ является аналитической на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда

$$E_n(f) < M\rho^n,\quad n = 0, 1, 2, \ldots,\ \rho < 1,$$

где $M = M(f)$ и $\rho = \rho(f)$ не зависят от n, а $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ на $[a, b]$ многочленами степени n. Имея это ввиду, он рассмотрел класс функций $f(x)$ на $[a, b]$, удовлетворяющих условию

$$E_n(f) < M\rho^n,\ \rho < 1,\ n = n_1, n_2, \ldots, \tag{2}$$

где $n_1, n_2, \ldots$ — некоторая бесконечная возрастающая последовательность целых чисел, и доказал, что если на нек-ром интервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ функция этого класса равна нулю, то она тождественно равна нулю. Класс функций C, заданных на $[a, b]$, наз. квазианалитическим (по Бернштейну), если две функции этого класса, совпадающие в нек-рой части $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, необходимо совпадают на всем отрезке $[a, b]$. Класс (2) — квазианалитический в этом смысле. Следует заметить, что из условия (2) не вытекает, что $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция (имеются соответствующие примеры).

Изучаются и другие проблемы квазианалитичности. Напр., решается вопрос о скорости убывания коэффициентов a_n и b_n в ряде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

при к-рой класс таких функций квазианалитический; находятся условия на числа M_n такие, чтобы функции $f(z)$, аналитические в круге $|z|<1$, бесконечно дифференцируемые в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ и удовлетворяющие условиям

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant K^n M_n, \quad n=0, 1, 2, \ldots, \quad |z| \leqslant 1,$$

образовывали К. к., и т. д.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1954; [2] Мандельбройт С., Квазианалитические классы функций, пер. с франц., Л.— М., 1937; [3] его же, Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей. Применения, пер. с франц., М., 1955. *А. Ф. Леонтьев.*

КВАЗИАФФИННАЯ СХЕМА — схема, изоморфная открытой квазикомпактной подсхеме *аффинной схемы*. Квазикомпактная схема X квазиаффинна, если выполняется любое из следующих условий: канонический морфизм $X \to \operatorname{Spec} \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ является открытым вложением; любой квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей порождается глобальными сечениями. Морфизм схем $f: X \to Y$ наз. квазиаффинным, если для любой открытой аффинной подсхемы U в Y прообраз $f^{-1}(U)$ является К. с. *В. И. Данилов.*

КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ, квазигеодезическая,— кривая на поверхности, на любом отрезке к-рой повороты справа и слева имеют одинаковый знак (см. *Извивание кривой*). Напр., ребро линзы — К. л.

Класс К. л. существенно дополняет класс геодезич. линий, делая его семейства (ограниченные по длине и расположению) компактными. В двумерном многообразии M ограниченной кривизны из каждой точки в каждом направлении идет хотя бы одна К. л.; она всегда может быть продолжена. Отрезки К. л. (в пределах к-рых на M нет точек с кривизной 2π) суть пределы геодезических, лежащих на гладких поверхностях, правильно сходящихся к M.

Лит.: [1] Александров А. Д., Бураго Ю. Д., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 76, с. 49—63.

В. А. Залгаллер.

КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — проективное n-пространство, в к-ром метрика определяется абсолютом, заданным совокупностью абсолютного конуса Q_0 индекса k с $(n-m-1)$-вершиной (абсолютная плоскость T_0) и $(n-m-2)$-квадрикой (абсолютная квадрика Q_1) индекса l на этой $(n-m-1)$-плоскости. Определяемое таким образом пространство наз. квазигиперболическим пространством индексов k и l, обозначается символом ${}^{kl}S_n^m$, где $m<n$. К. п. является частным случаем *полугиперболических пространств*. К. п. ${}^{kl}S_n^m$ получается предельным переходом из гиперболич. пространства ${}^lS_n$ таким образом, что при этом абсолют гиперболич. пространства переходит в абсолют К. п.

При $m=0$ конус Q_0 является парой слившихся плоскостей, совпадающих с плоскостью T_0, а абсолют пространства совпадает с абсолютом псевдоевклидова пространства ${}^lR_n$. При $m=1$ конус Q_0 является парой действительных плоскостей; в частности, для ${}^{11}S_3^1$ плоскость T_0 является прямой пересечения этих двух плоскостей, а квадрика Q_1 — парой точек на прямой T_0. В случае

$m=n-1$ конус Q_0 имеет точечную вершину, и абсолют пространства ${}^{kl}S_n^{n-1}$ совпадает с абсолютом *копсевдоевклидова пространства* ${}^lR_n^*$.

К. п. являются пространствами более общего проективного типа по отношению к копсевдоевклидовым пространствам.

Проективная метрика К. п. ${}^{kl}S_n^m$ определяется таким образом, чтобы при $m=0$ получалась метрика псевдоевклидова пространства ${}^lR_n$, а при $m=n-1$ — метрика копсевдоевклидова пространства ${}^kR_n^*$.

В К. п. различают прямые четырех типов: эллиптические прямые, пересекающие абсолютный конус в двух мнимо сопряженных точках; гиперболические прямые, пересекающие абсолютный конус в двух действительных точках; параболические прямые, проходящие через вершину абсолютного конуса; изотропные прямые, проходящие через вершину абсолютного конуса и касающиеся его.

Расстояние δ между двумя точками X и Y определяется в случае, когда прямая XY не пересекается с $(n-m-1)$-плоскостью T_0, с помощью соотношения

$$\cos^2\frac{\delta}{\rho}=\frac{(x^0E_0y^0)^2}{(x^0E_0x^0)\,(y^0E_0y^0)},$$

где E_0 — линейный оператор, определяющий скалярное произведение в псевдоевклидовом $(m+1)$-пространстве ${}^kR_{m+1}$; $\boldsymbol{x}^0=(x^a,\ a\leqslant m)$, $\boldsymbol{y}^0=(y^b,\ b\leqslant m)$ — векторы точек X и Y, ρ — действительное число. Расстояние между двумя точками, не лежащими на параболич. прямой, равно расстоянию между проекциями этих точек на m-плоскость $x^1=0$ в направлении $(n-m-1)$-плоскости T_0. В случае, когда прямая XY пересекает $(n-m-1)$-плоскость T_0, то расстояние d вычисляется с помощью разности $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{y}^1-\boldsymbol{x}^1$, где $\boldsymbol{x}^1=(x^u,\ u>m)$; $\boldsymbol{y}^1=(y^v,\ v>m)$ — векторы точек X и Y в псевдоевклидовом пространстве R_{n-m}; $d(XY)=\boldsymbol{a}E_1\boldsymbol{a}$, здесь E_1 — линейный оператор, определяющий скалярное произведение в этом пространстве.

За угол между двумя плоскостями пространства ${}^{kl}S_n^m$ принимается (нормированное) расстояние между двумя соответствующими точками в двойственном ему пространстве ${}^{lk}S_n^{n-m-1}$ по принципу двойственности проективного n-пространства. Координаты этих точек численно равны проективным координатам данных плоскостей. В случае, когда $(n-2)$-плоскость пересечения двух данных плоскостей пересекается с $(n-m-1)$-плоскостью T_0, этот угол всегда равен нулю, но тогда применяется способ измерения, аналогичный измерению расстояний в подобном случае. В частности, при $n=2$ углы между 1-плоскостями являются углами между прямыми и, в зависимости от расположения 2-плоскости относительно плоскости T_0, на этой плоскости возможны три типа геометрий — евклидова, псевдоевклидова или копсевдоевклидова.

Движениями К. п. являются коллинеации, сохраняющие расстояние между точками и переводящие абсолютный конус Q_0, $(n-m-1)$-вершину T_0 и $(n-m-2)$-квадрику Q_1 в T_0 в себя. Движения описываются псевдоортогональными операторами индекса l. В К. п. ${}^{ll}S_{2m+1}^m$, двойственном самому себе, определяется кодвижение — корреляция, переводящая всякие две точки в две плоскости, угол между к-рыми пропорционален расстоянию между двумя данными точками, а всякие две плоскости — в две точки, расстояние между которыми пропорционально углу между плоскостями. Кодвижения описываются псевдоортогональными операторами индекса l. Движения образуют группу Ли, как и движения и кодвижения двойственного самому себе К. п.

Квазигиперболическое 3-пространство с проективной эллиптич. метрикой на прямых — ${}^{01}S_3^1$ — имеет коевклидову метрику на 2-плоскостях и псевдоевклидову метрику индекса 1 в связках плоскостей. Квазигиперболическое 3-пространство с гиперболической проективной метрикой расстояний может быть двух типов — ${}^{10}S_3^1$ и ${}^{11}S_3^1$, отличающихся метриками в связках плоскостей: в первом — евклидова, во втором — псевдоевклидова метрика индекса 1. Метрика на 2-плоскостях одна и та же — копсевдоевклидова индекса 1.

Квазигиперболическое 3-пространство ${}^{11}S_3^1$ может быть интерпретировано как группа движений псевдоевклидовой 2-плоскости индекса 1. Многообразие гиперболич. прямых указанного квазигиперболического 3-пространства допускает интерпретацию на паре таких псевдоевклидовых плоскостей. Пространства ${}^{10}S_3^1$ и ${}^{01}S_3^1$, двойственные друг другу, допускают интерпретации на комплексной 2-плоскости.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [2] Яглом И. М., Розенфельд Б. А., Ясинская Е. У., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 5, с. 51—113. *Л. А. Сидоров.*

КВАЗИГРУППА — множество с одной бинарной операцией (наз. обычно умножением), в к-ром каждое из уравнений $ax=b$ и $ya=b$ имеет единственное решение для любых элементов a, b этого множества. К. с единицей наз. *лупой.*

К.— естественное обобщение понятия группы. К. возникают в различных областях математики, напр. в теории проективных плоскостей, неассоциативных тел, в ряде вопросов комбинаторного анализа и т. п. Термин «К.» введен Р. Муфанг (R. Moufang); с ее работ по недезарговым плоскостям (1935), в к-рых выяснялась связь таких плоскостей с К., собственно и началось развитие теории К.

Основные понятия. Отображения $R_a: x \to xa$ и $L_a: x \to \to ax$ наз. правой и левой трансляциями (или сдвигами) относительно элемента a. В К. трансляции являются *подстановками* множества ее элементов. Подгруппа G группы подстановок множества Q, порожденная всеми трансляциями К. $Q(\cdot)$, наз. группой, ассоциированной с квазигруппой $Q(\cdot)$. Существует тесная связь между строением группы G и К. $Q(\cdot)$.

Гомоморфный образ К., вообще говоря, не К., а *группоид* с делением. Гомоморфизмам К. на К. соответствуют так наз. нормальные конгруэнции (конгруэнция θ на $Q(\cdot)$ нормальна, если каждое из соотношений $ac\theta bc$ и $ca\theta cb$ влечет $a\theta b$). В группах все конгруэнции нормальны. Подквазигруппа H наз. нормальной, если существует такая нормальная конгруэнция θ, что H совпадает с одним из классов конгруэнции. Существуют К., в к-рых два или даже все классы по конгруэнции θ — подквазигруппы.

С каждой квазигрупповой операцией на множестве связаны еще две операции, наз. левой и правой обратной операциями, обозначаемые $(/)$ и $(\backslash)$ соответственно. Они определяются следующим образом: $z/y=x$ и $x\backslash z=y$, если $x \cdot y=z$. Рассматривая всевозможные перестановки трех элементов x, y, z, можно получить пять обратных операций, не считая исходной. Переход от основной операции к одной из них наз. парастрофией. К., в к-рых все обратные операции совпадают с основной, наз. тотально-симметрическими, или TS-квазигруппами. TS-квазигруппы можно определить также как К., удовлетворяющие тождествам: $xy=yx$ и $x(xy)=y$. Идемпотентные TS-квазигруппы (т. е. с дополнительным тождеством $x^2=x$) наз. квазигруппами Штейнера. Они тесно связаны с системами троек Штейнера (см. *Штейнера система*).

Одним из самых важных понятий в теории К. является понятие *изотопии*. Изотопия может быть определена и для К., заданных на разных (но равномощных) множествах. Число неизотопных К., к-рые могут быть заданы на конечном множестве мощности n, известно (1978) только для $n \leqslant 8$.

Основные классы квазигрупп. Самые первые работы по К. относятся к таким обобщениям групп, в к-рых требование ассоциативности заменяется более слабыми условиями, теперь называемыми постулатами «А» и «Б» Сушкевича. К. удовлетворяет постулату Сушкевича «А», если решение x уравнения $(ab)c=a(bx)$ зависит только от b и c, и постулату «Б», если это решение зависит только от c. Доказано, что К. этих классов изотопны группам. В случае, когда решение такого уравнения зависит от a и c, К. наз. левой F-квазигруппой. Аналогично, при помощи уравнения $(ab)c=x(bc)$ определяется правая F-квазигруппа. К., являющаяся левой и правой F-квазигруппой одновременно, наз. F-квазигруппой. Существуют F-квазигруппы, не изотопные группам. Идемпотентная F-квазигруппа наз. дистрибутивной квазигруппой и может быть определена тождествами:

$$(yz)x=(yx)(zx), \quad x(yz)=(xy)(xz),$$

наз. тождествами дистрибутивности. Доказано, что дистрибутивные К. изотопны лупам Муфанг (см. *Лупа*). К. $Q(\cdot)$ медиальна, если выполняется тождество

$$(xy)(uv)=(xu)(yv).$$

Всякая медиальная К. изотопна абелевой группе $Q(+)$ и изотопия имеет вид

$$x \cdot y=\varphi x+\psi y+c,$$

где φ, ψ — коммутирующие автоморфизмы группы, а c — некоторый элемент Q (теорема Тоёды).

Системы квазигрупп и функциональные уравнения. Пусть на множестве Q задана нек-рая система К. В этом случае операции удобнее обозначать буквами: вместо $ab=c$ писать, напр., $A(a, b)=c$. Квазигрупповые операции на Q предполагаются связанными между собой нек-рым образом, чаще всего какими-либо тождествами, называемыми в этом случае «функциональными уравнениями». Обычно решается задача нахождения системы К. на Q по заданным функциональным уравнениям. Напр., решено уравнение общей ассоциативности:

$$A_1[A_2(x, y), z]=A_3[x, A_4(y, z)], \qquad (1)$$

а именно, доказано, что если четыре К. удовлетворяют (1), то они изотопны одной группе $Q(\cdot)$, а общее решение дается равенствами:

$$A_1(x, y)=\alpha x \cdot \beta y, \quad A_2(x, y)=\alpha^{-1}(\varphi x \cdot \psi y),$$
$$A_3(x, y)=\varphi x \cdot \theta y, \quad A_4(x, y)=\theta^{-1}(\psi x \cdot \beta y),$$

где $\alpha, \beta, \varphi, \psi, \theta$ — любые подстановки множества Q. Очень похоже решается уравнение общей медиальности:

$$A_1[A_2(x, y), A_3(u, v)]=A_4[A_5(x, u), A_6(y, v)].$$

Все шесть К. здесь оказываются изотопными одной абелевой группе.

***n*-арные квазигруппы.** Множество с одной n-арной операцией наз. n-квазигруппой, если каждое из уравнений

$$a_1a_2 \ldots a_{i-1}xa_{i+1} \ldots a_n=b$$

(где $b, a_1, a_2, \ldots, a_n \in Q$, $i=1, 2, \ldots, n$) имеет единственное решение. На n-квазигруппы переносятся основные понятия теории К. (изотопия, парастрофия и т. д.).

Каждая n-квазигруппа изотопна нек-рой n-лупе (см. *Лупа*).

Некоторые классы обычных бинарных К. (такие как классы медиальных, TS-квазигрупп и др.) имеют аналог в n-арном случае. Операция A арности n приводима, если существуют две такие операции B и C арности не меньше двух, что

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = B(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, C(x_i, \ldots, x_j), x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

(сокращенная запись $A = B \overset{i}{+} C$). В противном случае A наз. неприводимой. Для n-арных К. верна теорема, аналогичная теореме о канонич. разложении натурального числа на простые множители.

Комбинаторные вопросы. Таблица умножения конечной К., т. е. ее *Кэли таблица*, в комбинаторике известна под названием *латинский квадрат*. Одна из задач комбинаторной теории К.— отыскание систем взаимно ортогональных К. на заданном множестве — важна для построения конечных проективных плоскостей. Две К. A и B, заданные на множестве Q, ортогональны, если система уравнений $A(x, y) = a$, $B(x, y) = b$ имеет единственное решение для любых a и b из Q. Ортогональность конечных К. эквивалентна ортогональности их латинских квадратов. Доказано, что система взаимно ортогональных К., определенных на множестве из n элементов, не может содержать более чем $n-1$ К.

Другим комбинаторным понятием, связанным с К., является понятие полной подстановки. Подстановка φ К. $Q(\cdot)$ наз. полной, если отображение $\varphi' : x \to x\varphi x$ также подстановка множества Q. Не всякая К. обладает полной подстановкой. К., обладающая полной подстановкой, наз. допустимой. Для допустимой группы существует ортогональная к ней К., и обратно: если для группы существует ортогональная к ней К., то группа допустима. Если конечная К. порядка n допустима, то из нее специальным процессом (продолжением) можно получить К. порядка $n+1$.

Алгебраические сети. К. имеют естественную геометрич. интерпретацию с помощью алгебраич. сетей, называемых также алгебраич. тканями (см. *Тканей геометрия*). Алгебраической сетью наз. множество, состоящее из элементов двух видов — линий и точек — с некоторым отношением инцидентности между ними. (Вместо слова «инцидентна» употребляются также выражения «проходит через», «лежит на».) Пусть множество линий N разбито на три класса так, что выполняются аксиомы: 1) две линии из различных классов инцидентны ровно одной общей точке из N; 2) каждая точка инцидентна ровно одной линии каждого класса. Тогда N наз. 3-сетью. Аналогично, разбиением на k классов могут быть определены k-сети. Число (мощность множества) линий в каждом классе одинаково и равно числу (мощности множества) точек любой линии сети. Оно наз. порядком сети. Сети могут быть координатизированы с помощью К. следующим образом. Пусть дана 3-сеть N с множеством линий L_1, L_2, L_3 и Q — множество, мощность к-рого равна порядку сети N. И пусть фиксированы нек-рые взаимно однозначные соответствия между Q и каждым из L_i, т. е. каждой линии класса L_i дана нек-рая координата в Q. Множество Q становится К. (координатная квазигруппа сети), если на нем определить следующую операцию: $xy = z$, тогда и только тогда, когда общая точка линии с координатой x из L_1 и линии с координатой y из L_2 лежит на линии с координатой z из L_3. Обратно, каждая К. является координатной К. некоторой 3-сети. При различных взаимно однозначных соответствиях между Q и L_i получаются различные, но изотопные К. на множестве Q. Каждой 3-сети, в к-рой зафиксирован порядок классов L_1, L_2, L_3, соответствует класс всех изотопных между собой К. Перенумерации классов сети соответствует парастрофия координатных К.

Каждому свойству 3-сети соответствует инвариантное при изотопии (т. е. универсальное) свойство К. Такими свойствами являются, напр., *замыкания условия*, наиболее известны из к-рых условия замыкания Томсена, Рейдемейстера, Бола, шестиугольника. Условие Томсена для координатной К. означает, что из соотношений $x_1y_2=x_2y_1$ и $x_1y_3=x_3y_1$ для ее элементов x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 следует соотношение $x_2y_3=x_3y_2$. В К. выполняется условие Томсена тогда и только тогда, когда она изотопна абелевой группе. Аналогичные характеристики К. получены и для других условий замыкания.

k-сети координатизируются с помощью $k-2$ взаимно ортогональных К.

Лит.: [1] Белоусов В. Д., Основы теории квазигрупп и луп, М., 1967; [2] Итоги науки, Алгебра. Топология. Геометрия, 1965, М., 1967, с. 63—81; [3] Bruck R. H., A Survey of Binary Systems, 3 ed., B., 1971; [4] его же, «Studies in math.», 1963, v. 2, p. 59—99; [5] Aczél J., «Adv. Math.», 1965, v. 1, № 3, p. 383—450. *В. Д. Белоусов.*

КВАЗИДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР — термин эргодич. теории и топологич. динамики, употребляемый в оборотах: «динамическая система (поток, каскад или порождающее последний преобразование) имеет К. с. (или является системой, потоком и т. д. с К. с.)».

В эргодич. теории понятие «преобразование с К. с.» фактически рассматривается только применительно к эргодич. автоморфизму T *Лебега пространства* (X, μ) (хотя приводимое ниже определение формально годится и в более общей ситуации). Для T индуктивно определяются квазисобственные функции (к. ф.) и квазисобственные значения (к. з.) n-го порядка. К. ф. 1-го порядка — это обычные собственные функции соответствующего оператора сдвига

$$U_T: f(x) \longmapsto f(Tx) \text{ в } L^2(X, \mu),$$

т. е. такие ненулевые $f \in L^2(X, \mu)$, что $f(Tx)=\lambda f(x)$ (почти всюду; ниже подобная оговорка опускается), где λ — некоторая константа (собственное значение; оно является к. з. 1-го порядка). Если $f \in L^2(X, \mu)$, $f \neq 0$ и $f(Tx)=\varphi(x)f(x)$, где φ — некоторая к. ф. n-го порядка, то f наз. к. ф. $(n+1)$-го порядка, а φ — соответствующим к. з. (того же порядка). (В [2] вместо к. ф. и к. з. говорится об обобщенных собственных функциях и обобщенных собственных значениях.) Из эргодичности T следует, что $|f(x)|=\text{const}$ для любой к. ф. f, а если f еще и к. з., то $|f(x)|=1$. Поэтому часто в определение к. ф. включают условие нормировки $|f(x)|=1$. Говорят, что T имеет К. с., если к. ф. всевозможных порядков образуют полную систему в $L^2(X, \mu)$. Законченные результаты относятся к тому случаю, когда в дополнение к сказанному T вполне эргодичен (т. е. все его степени эргодичны). Имеется полная метрическая классификация таких T и их свойства хорошо изучены [3]. Понятие К. с. и соответствующую теорию можно обобщить для локально компактных коммутативных групп преобразований пространств Лебега (в частности, для *измеримых потоков*) — см. изложение результатов Т. Уитинга (T. Wieting) в [4].

Хотя внешне термин «К. с.» выглядит так, как если бы речь шла о нек-ром типе спектра динамич. системы, на самом деле свойство каскада $\{T^n\}$ иметь К. с. не является спектральным, т. е. не может быть выражено в терминах спектральных свойств оператора сдвига U_T. Даже если известно, что каскад имеет К. с., спектр еще не определяет однозначно его метрич. свойства. К. с. был введен именно в связи с первым примером метрически неизоморфных эргодич. каскадов с одинаковым спектром ([1], см. также [2]). В этом примере каскады имеют К. с., но у одного из них имеются к. ф. 3-го порядка, а у другого — нет.

В топологич. динамике понятие К. с. вводится применительно к гомеоморфизму T компакта X, предполагаемому вполне минимальным (т. е. каждая его степень минимальна). К. ф. и к. з. определяются аналогично предыдущему с заменой $L^2(X, \mu)$ на $C(X)$ (непрерывные функции с комплексными значениями). T имеет К. с., если к. ф. разделяют точки X. Топологич. вариант теории во многом аналогичен метрическому (см. [5]—[7]). Однако при переходе в топологич. теории от каскадов к потокам с К. с. требуются существенно иные соображения и даже в нек-рой степени приходится выходить за рамки обычных понятий топологич. динамики (оказывается целесообразным рассматривать потоки $\{T_t\}$ с разрывной зависимостью гомеоморфизмов T_t от t) (см. [8], [9]).

Лит.: [1] Halmos P. R., Neumann J., «Ann. Math.», 1942, v. 43, № 2, p. 332—50; [2] Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, М., 1959; [3] Абрамов Л. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 4, с. 513—30; [4] Zimmer R. J., «Ill. J. Math.», 1976, v. 20, № 4, p. 555—88; [5] Hahn F., Parry W., «J. London Math. Soc.», 1965, v. 40, № 2, p. 309—23; [6] их же, «Math. systems theory», 1968, v. 2, № 2, p. 179—90; [7] Brown J. R., Ergodic theory and topological dynamics, N.Y.—S.F.—L., 1976; [8] Hahn F., «Israel J. Math.», 1973, v. 16, № 1, p. 20—37; [9] Parry W., там же, p. 38—45. *Д. В. Аносов.*

КВАЗИДИЭДРАЛЬНАЯ ГРУППА — конечная 2-группа, задаваемая в образующих x, y определяющими соотношениями

$$x^{2^{m-1}} = y^2 = x^{-1+2^{m-2}} y x^{-1} y = 1,$$

где $m \geqslant 4$. Порядок К. г. равен 2^m; группа обладает циклической инвариантной подгруппой индекса 2. Название дано по причине сходства определяющих соотношений с определяющими соотношениями *диэдра групп*, к-рым, однако, эта группа не изоморфна ни при одном значении m. К. г. иногда наз. также семидиэдральной.

Лит.: [1] Huppert B., Endliche Gruppen, B., 1967.
Н. Н. Вильямс.

КВАЗИЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — двумерное пространство, в к-ром каждое направление, заданное в его точке, может быть включено в поле, направления к-рого переносятся параллельно по любому пути (т. е. К. п. допускает абсолютный параллелизм). Геодезические линии К. п. распадаются на ∞^1 семейств векторных линий полей абсолютно параллельных направлений, причем каждое такое семейство образует с тремя другими постоянное ангармоническое отношение:

$$\frac{k-k_1}{k_2-k} : \frac{k_3-k_1}{k_2-k_3} = \text{const},$$

где $k = du^2/du^1$ — угловой коэффициент направления. Всякое семейство геодезических определяется через три данных уравнением 1-го порядка:

$$\frac{a_p\, du^p}{b_q\, du^q} = c = \text{const}.$$

Лит.: [1] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976. *А. Б. Иванов.*

КВАЗИИНВАРИАНТНАЯ МЕРА — мера на некотором пространстве, остающаяся эквивалентной себе при «сдвигах» этого пространства. Более точно: пусть (X, B) — измеримое пространство (т. е. множество X с выделенной σ-алгеброй B его подмножеств) и G — некоторая группа его автоморфизмов (т. е. взаимно однозначных преобразований $g: X \to X$, измеримых вместе со своими обратными g^{-1} относительно σ-алгебры B). Мера μ на (X, B) наз. квазиинвариантной (относительно G), если при любом $g \in G$ преобразованная мера $g\mu(A) = \mu(g^{-1}A)$, $A \in B$, эквивалентна мере μ (т. е. эти меры взаимно абсолютно непрерывны). В случае, когда X — топологическое однородное пространство с непрерывной локально компактной группой автоморфизмов G (т. е. группа G действует на X транзитивно и снабжена такой топологией, что отображение $G\times X \to X : (g, x) \to gx$ непрерывно относительно произведения топологий в $G\times X$), а B — борелевская σ-алгебра относительно введенной в X топологии, существует единственная с точностью до эквивалентности К. м. [1]. В частности, мера в пространстве $\mathbb{R}^n$ квазиинвариантна относительно всех сдвигов $x \to x+a$, $x, a \in \mathbb{R}^n$, в том и только том случае, когда она эквивалентна *Лебега мере*. В случае, когда группа преобразований не локально компактна, К. м. может не существовать: это имеет место, напр., у широкого класса бесконечномерных топологич. векторных пространств [2].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления, пер. с франц., М., 1970; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961. *Р. А. Минлос.*

КВАЗИИНФОРМАЦИОННОЕ РАСШИРЕНИЕ бескоалиционной игры $\Gamma = \langle J, \{S_i\}_{i\in J}, \{H_i\}_{i\in J}\rangle$ — *бескоалиционная игра* $\tilde{\Gamma} = \langle J, \{\tilde{S}_i\}_{i\in J}, \{\tilde{H}_i\}_{i\in J}\rangle$, для к-рой заданы отображения $\pi: \tilde{S} \to S$ и $c_i: S_i \to \tilde{S}_i$, $i \in J$, удовлетворяющие при всех $i \in J$, $s_i \in S_i$, $\tilde{s} \in \tilde{S}$ условиям: 1) $\tilde{H}_i = H_i \circ \pi$, 2) $\pi_i(\tilde{s} \| c_i(s_i)) = s_i$, где π_i — композиция отображения π и проекции $S \to S_i$. К. р. игры Γ может интерпретироваться как результат установления определенной схемы взаимодействия игроков в процессе выбора ими своих стратегий s_i в игре Γ. Стратегии $\tilde{s}_i$ соответствуют правилам, определяющим поведение игрока i в любой ситуации, с к-рой он может встретиться. Отображение π сопоставляет набору правил поведения игроков их реализацию, т. е. набор стратегий s_i, $i \in J$, к-рые будут выбраны игроками, придерживающимися данных правил. Условие 1) определения К. р. является тогда определением функций выигрыша новой игры $\tilde{\Gamma}$, а условие 2) выражает сохранение у каждого игрока старых стратегий $s_i \in S_i$.

Ситуация s^* игры Γ тогда и только тогда является образом ситуации равновесия какого-либо К. р. $\tilde{\Gamma}$ игры Γ при соответствующем отображении π, когда для любого $i \in J$ и любой $\bar{s}_i \in S_i$ найдется такая ситуация $s \in S$, что

$$H_i(s^*) \geqslant H_i(s \| \bar{s}_i).$$

Особенно широко понятие К. р. используется в теории *игр с иерархической структурой*, где неформальная задача оптимизации информационной схемы трансформируется в задачу построения К. р. заданной игры, дающего первому игроку наилучший результат. Рассматриваются также классы К. р., удовлетворяющих условиям, выражающим те или иные ограничения на информированность игроков. Напр., если Γ — игра двух лиц ($J = \{1, 2\}$), то говорят, что в К. р. игрок 1 не имеет (собственной) информации о стратегии s_2, если для каждой $\tilde{s}_1 \in \tilde{S}_1$ найдется такая $s_1 \in S_1$, что $\pi(\tilde{s}_1, \tilde{S}_2) \supseteq \{s_1\} \times S_2$. Наилучшим среди К. р., удовлетворяющих этому условию, является, напр., «игра Γ_3», в то время как наилучшим среди всех К. р. является «игра Γ_2».

Лит.: [1] Гермейер Ю. Б., Игры с непротивоположными интересами, М., 1976; [2] Кукушкин Н. С., Морозов В. В., Теория неантагонистических игр, ч. 2, М., 1977.
Н. С. Кукушкин.

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — асимптотическое представление, асимптотика решений уравнений квантовой механики при $h \to 0$ (h — постоянная Планка). Уравнение Шрёдингера

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + V(x)\psi, \ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

описывает движение квантовомеханич. частицы в потенциальном поле $V(x)$. Движение классич. частицы описывается уравнением Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla S)^2+V(x)=0 \qquad (2)$$

или системой Гамильтона

$$\frac{dx}{dt}=p,\quad \frac{dp}{dt}=-\nabla V(x). \qquad (3)$$

Задаче Коши для уравнения Шрёдингера

$$\psi|_{t=0}=\varphi(x)\exp\left[\frac{i}{h}S_0(x)\right] \qquad (4)$$

сопоставляется задача Коши для системы (3)

$$x|_{t=0}=y,\quad p|_{t=0}=\nabla S_0(y),\quad y\in\mathbb{R}^n \qquad (5)$$

(здесь функции φ, S_0, V — гладкие, S_0, V — действительные, φ — финитна). Асимптотика решения $\psi(t, x)$ при $h\to 0$, $0\leqslant t\leqslant T$ и при малых $T>0$ имеет вид:

$$\psi(t, x)\sim\exp\left[\frac{i}{h}S(t, s)\right]\sum\nolimits_{j=0}^{\infty}(-ih)^j\varphi_j(t, x), \qquad (6)$$

здесь $S(t, x)$ — решение уравнения (2) с данными Коши $S|_{t=0}=S_0(x)$ (классическое действие), а

$$\varphi_0(t, x)=\varphi(0, y)\sqrt{\frac{J(0, y)}{J(t, y)}},\quad J(t, y)=\det\frac{\partial x(t, y)}{\partial y},$$

где $x=x(t, y)$, $p=p(t, y)$ — решение задачи (3), (5). Функции φ_j при $j\geqslant 1$ определяются из рекуррентной системы уравнений переноса (это обыкновенные дифференциальные уравнения вдоль траекторий системы (3)), так что все члены асимптотики выражаются в терминах классич. механики. Принцип соответствия Бора утверждает: «Если h стремится к нулю, то квантовые законы должны переходить в законы классические». Метод отыскания асимптотики в виде (6) был предложен П. Дебаем (P. Debye) и широко применяется в квантовой механике.

Асимптотика решения задачи (1), (4) в большом (т. е. за любое конечное время) строится с помощью канонич. оператора В. П. Маслова [3]. Данные Коши (5) заполняют n-мерное лагранжево многообразие Λ^n в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}_{x,p}$. Его сдвиги $\Lambda^n_t=g^t\Lambda^n$ вдоль траекторий системы (3) — также лагранжевы многообразия; их объединение $\Lambda^{n+1}=\bigcup_{-\infty<t<\infty}\Lambda^n_t$ есть $(n+1)$-мерное лагранжево многообразие в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n+2}$ с координатами (t, x, p_0, p). Для канонич. оператора $K=K_{\Lambda^{n+1}}$, отвечающего Λ^{n+1}, справедлива формула коммутации

$$\hat{L}K\varphi=-ihK\dot{\varphi}+O(h^2), \qquad (7)$$

где $\dot{\varphi}$ — производная в силу системы (3), $\hat{L}$ — оператор Шрёдингера. Асимптотика решения ψ в большом дается формулой

$$\psi(t, x)\sim K\left[\sum\nolimits_{j=0}^{\infty}(-ih)^j\chi_j(t, x)\right], \qquad (8)$$

где функции χ_j определяются из данных Коши (4) с помощью уравнений переноса и выражаются в терминах классич. механики. В нефокальной точке (t_0, x^0) асимптотика имеет вид

$$\psi(t_0, x^0)=\sum\nolimits_{j=1}^{N}\frac{\varphi_j}{\sqrt{|J_j|}}\exp\left(\frac{i}{h}S_j-\frac{i\pi}{2}l_j\right).$$

где сумма берется по всем лучам, приходящим в эту точку, S_j и J_j — действие и якобиан для j-го луча, l_j — индекс Морса j-го луча. Для стационарного уравнения Шрёдингера в К. п. исследованы задача о рассеянии, задача о поле точечного источника, получены квазиклассич. серии (типа бальмеровских) собственных значений.

Квазиклассическое приближение в широком смысле слова (синонимы: высокочастотная асимптотика, коротковолновое приближение, приближение геометрич. оптики, метод ВКБ, метод эйконала) — асимптотика решений дифференциальных уравнений с частными производными с действительными характеристиками вида

$$L\left(x,\ \lambda^{-1}D_x;\ (i\lambda)^{-1}\right)u(x)=0,\quad x\in\mathbb{R}^n,\tag{9}$$

а также систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений. Здесь $\lambda\to\infty$ — большой параметр, символ $L(x,\ p;\ \varepsilon)$ слабо зависит от ε. Уравнению (9) отвечают уравнения классич. механики — уравнение Гамильтона — Якоби

$$L^0(x,\ \nabla S(x))=0$$

и система Гамильтона

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial L^0}{\partial p},\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial L^0}{\partial x},\tag{10}$$

где $L^0=L(x,\ p;\ 0)$. К. п. строится с помощью канонич. оператора, отвечающего инвариантным относительно динамич. системы (10) лагранжевым многообразиям, и имеет вид, аналогичный (8).

К. п. широко применяется в современной физике, в задачах о распространении звуковых, упругих, электромагнитных волн, в нерелятивистской и релятивистской квантовой механике и других вопросах.

Лит.: [1] Бриллюэн Л., Атом Бора, пер. с франц., Л.— М., 1935; [2] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., Квантовая механика, 2 изд., М., 1963 (Теоретическая физика, т. 3); [3] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [4] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976; [5] Фок В. А., Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, М., 1970; [6] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [7] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973. *М. В. Федорюк.*

КВАЗИКОГЕРЕНТНЫЙ ПУЧОК — пучок модулей, локально задаваемый образующими и соотношениями. Точнее, пусть X — топологич. пространство и $\mathcal{A}$ — пучок колец на X, пучок $\mathcal{A}$-модулей $\mathcal{F}$ наз. квазикогерентным, если для любой точки $x\in X$ найдется открытая окрестность U и точная последовательность пучков $(\mathcal{A}|_U)$-модулей

$$\mathcal{A}\,|_U^{(I)}\longrightarrow\mathcal{A}|_U^{(J)}\longrightarrow\mathcal{F}\,|_U\longrightarrow 0,$$

где I и J — некоторые множества, $|_U$ означает ограничение пучка на U, а $\mathcal{A}^{(I)}$ есть прямая сумма I экземпляров $\mathcal{A}$. Аналогично определяется К. п. на топологизированной категории с пучком колец.

Если $(X,\ \mathcal{A})$ — аффинная схема, то сопоставление $\mathcal{F}\mapsto\Gamma(X,\mathcal{F})$ осуществляет эквивалентность категории квазикогерентных пучков $\mathcal{A}$-модулей с категорией $\Gamma(X,\ \mathcal{A})$-модулей. Благодаря этому К. п. находят широкое применение в теории схем. См. также *Когерентный пучок.* *В. И. Данилов.*

КВАЗИКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, в к-ром всякий фильтр имеет по крайней мере одну точку прикосновения. Этому условию эквивалентны следующие три условия: 1) всякое семейство замкнутых множеств в X, пересечение к-рого пусто, содержит конечное подсемейство с пустым пересечением; 2) всякий ультрафильтр в X сходится; 3) всякое открытое покрытие пространства X содержит конечное открытое покрытие этого пространства (условие Бореля — Лебега). К. п. наз. компактом (или бикомпактом), если оно отделимо (или хаусдорфово). Напр., всякое пространство, в к-ром имеется только конечное число открытых множеств, является К. п. В частности, таково любое конечное пространство. Непрерывный образ К. п. является К. п. Топологич. произведение К. п. в любом числе есть К. п. (теорема Тихонова).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968. *Б. А. Ефимов.*

КВАЗИКОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение с ограниченным искажением или ограниченным отклонением от конформного. Числовой характеристикой искажения при отображении $f: D \to D'$ в точке $a \in D$ является коэффициент $k(f, a)$ квазиконформности (или дилатация) отображения f в этой точке:

$$k(f, a) = \lim_{r \to 0} \frac{\sup\limits_{|x-a|=r} |f(x)-f(a)|}{\inf\limits_{|x-a|=r} |f(x)-f(a)|}.$$

Величина

$$k(f) = \sup_{x \in D} k(f, x)$$

наз. коэффициентом квазиконформности (или дилатацией) отображения f в области D. Сохраняющее ориентацию отображение $f: D \to D'$ наз. квазиконформным (или отображением с ограниченным искажением), если $k(f) < \infty$; оно наз. k-квазиконформным, если $k(f) \leq k$. Для *конформного отображения* $k(f) = k(f, x) \equiv 1$. Если f дифференцируемо в точке $a \in D$, то линейное отображение $f'(a)$ преобразует шар касательного пространства в эллипсоид, отношением наибольшей полуоси к-рого к наименьшей будет $k(f, a)$.

Наряду с данным определением часто используются следующие эквивалентные ему условия квазиконформности f в области $D \subset \mathbb{R}^n$: $f \in W_n^1$ (т. е. f имеет обобщенные производные, локально суммируемые в D в степени n) и существует такое действительное число k, что

$$\|f'(x)\|^n \leq k \det f'(x),$$

или

$$|\operatorname{grad} f(x)|^n \leq k n^{n/2} \det f'(x)$$

почти во всех точках $x \in D$.

Термин «К. о.», как правило, предполагает гомеоморфность отображения. Негомеоморфные отображения с ограниченным искажением обычно наз. квазирегулярными. Теория К. о. областей в $\mathbb{R}^n$ при $n=2$ и $n \geq 3$, если не считать общих для них и, как правило, более простых вопросов, имеет ярко выраженную специфику.

Двумерная теория. В этом случае дифференциал отображения в точке $z \in D$ может быть записан в виде

$$df(z) = f_z(z)\, dz + f_{\bar{z}}(z)\, d\bar{z}.$$

С точностью до множителя он определяется соотношением

$$f_{\bar{z}}(z) = \mu(z) f_z(z). \tag{1}$$

Функция $\mu(z)$ наз. комплексной характеристикой отображения f в точке z; $|\mu(z)| < 1$ для отображений с положительным якобианом $J = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$. Для аналитич. отображений $\mu(z) \equiv 0$ — условия Коши — Римана. Коэффициент $k(f, z)$ квазиконформности отображения в точке выражается через $\mu(z)$ в виде

$$k(f, z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|},$$

поэтому условие квазиконформности отображения $f \in W_2^1$ в терминах комплексной характеристики есть $\|\mu\|_\infty(D) < 1$.

Обычно соотношение (1) появляется как уравнение относительно f при известной функции μ; оно наз. уравнением (или системой) Бельтрами. Напр., задача конформного отображения одной области D на другую D' есть задача отыскания гомеоморфизма $f: D \to D'$, удовлетворяющего в D уравнению Бельтрами с $\mu(z) \equiv 0$.

К решению общего уравнения (1) сводится, напр., классич. задача об одновременном во всей области D приведении к канонич. виду заданной в D положительно определенной квадратичной формы от двух переменных или, что то же самое, задача построения конформно евклидовых координат на двумерной поверхности (см. [2]).

Основной факт двумерной теории К. о., аналогичный Римана теореме для конформных отображений, состоит в следующем: для всякой измеримой в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ функции $\mu(z)$ такой, что $\|\mu\|_\infty(D) < 1$, найдется квазиконформный гомеоморфизм f области D с комплексной характеристикой $\mu(z)$; общее решение уравнения (1) в области D имеет вид $F \circ f(z)$, где f — построенный квазиконформный гомеоморфизм, а F — любая аналитич. функция.

Если D — единичный круг, то f можно выбрать так, что $f(D) = D$. Тогда f продолжается до гомеоморфизма замкнутого круга на себя и условия нормировки $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ выделяют единственный гомеоморфизм $f: D \to D$, удовлетворяющий уравнению Бельтрами. Если, кроме того, $\mu \in C_\alpha^m(D)$, $0 < \alpha < 1$, $m \geqslant 0$, то $f \in C_\alpha^{m+1}(D)$, где $C_\alpha^m(D)$ — пространство функций, имеющих в D m непрерывных производных, причем последняя удовлетворяет в D условию Гёльдера с показателем α. Если последовательность f_n нормированных квазиконформных автоморфизмов круга D такова, что $|\mu_n(z)| \leqslant \mu < 1$ и $\|\mu_n\|_\infty(D) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\| f_n(z) - z \|_{C(D)} \to 0.$$

К. о. как гомеоморфные решения сильно эллиптических систем

$$\Phi_i(x, y, u, v, u_x, v_x; u_y, v_y) = 0, \quad i = 1, 2, \qquad (2)$$

так же естественно связаны с проблемами струйных течений дозвуковой газовой динамики, как конформные отображения, удовлетворяя системе Коши — Римана, связаны с течением несжимаемой идеальной жидкости (см. [1], [5]).

Общая задача построения К. о. одной односвязной области на другую, удовлетворяющего системе (2), была поставлена и решена М. А. Лаврентьевым [1] — одним из основателей теории К. о. В явном виде понятие К. о. появилось у X. Грётша (H. Grötzsch, см. [3]) в связи со следующей экстремальной задачей (з а д а ч е й Г р ё т ш а): среди отображений с соответствием вершин квадрата на прямоугольник, не являющийся квадратом, найти наиболее близкое к конформному. Чтобы охарактеризовать меру этой близости, пришлось ввести коэффициент квазиконформности — начальное понятие геометрич. теории К. о.

В двумерной теории К. о., как и в теории аналитич. функций, исследованы общие вопросы компактности — нормальности семейства отображений; построена теория соответствия границ, показавшая, что это соответствие осуществляется по тем же простым концам в смысле Каратеодори (см. *Граничные элементы*), как и в конформном случае; изучены условия устранимости множества особенностей; разработаны вариационные принципы решения основных экстремальных задач на классе квазиконформных гомеоморфизмов (см. [4], [7]).

Важное применение в геометрич. теории функций двумерные К. о. получили в исследованиях по проблеме *модулей римановых поверхностей* в связи с *Тайхмюллера пространством* и деформацией *клейновых групп* (см. [7]).

П р о с т р а н с т в е н н а я т е о р и я. Теория К. о. областей пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, также имеет свою специфику. Прежде всего это связано с отсутствием конформных отображений: по теореме Лиувилля всякое достаточно гладкое конформное отображение области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, является мёбиусовым, т. е. суперпозицией инверсий и вращений. Суть этого факта в том, что условия конформности отображения при $n \geqslant 3$, в отличие от условий Коши — Римана при $n=2$, составляют переопределенную систему уравнений с частными производными.

Ниже указаны нек-рые важные результаты пространственной теории К. о. Теорема Лиувилля остается в силе как в случае гильбертова пространства, так и при минимальных априорных условиях регулярности отображения. В теореме Лиувилля имеет место устойчивость в том смысле, что существуют константы k_1 и k_2 и функция $\lambda(\varepsilon)=O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, обладающие следующими свойствами: а) если $y=f(x)$ есть К. о. шара $|x|<1$ с $k(f)<k_1$, то существует мёбиусово отображение $L(y)$ такое, что

$$\sup_{|x|<1} |L \circ f(x)| < \infty,$$

и образ единичного шара при отображении $L \circ f$ содержит шар $|y|<1$; б) если $k(f) \leqslant 1+\varepsilon < k_2$, то

$$|L \circ f(x_1) - L \circ f(x_2)| \leqslant k(\varepsilon) \, |x_1 - x_2|^{\alpha(\varepsilon)},$$

где

$$\lim_{\varepsilon \to 0} k(\varepsilon) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(\varepsilon) = 1;$$

в) если $k(f) \leqslant 1+\varepsilon$, то

$$|L \circ f(x) - x| \leqslant \lambda(\varepsilon)$$

во всем шаре $|x|<1$. Устойчивость имеет место также в нек-рых классах областей с нерегулярной границей.

Подобно тому, как 1-квазиконформное отображение оказывается мёбиусовым даже без априорного предположения гомеоморфности, К. о. локально гомеоморфно как только его коэффициент квазиконформности достаточно близок к 1. В отличие от плоского случая, всякое локально гомеоморфное К. о. единичного шара в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, автоматически гомеоморфно в нек-ром шаре $|x| \leqslant r(n, k) < 1$, где r зависит только от размерности n пространства и коэффициента квазиконформности $k=k(f)$ отображения. В частности, локально гомеоморфное К. о. всего пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, глобально гомеоморфно и $f(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$.

Граничное поведение: если $f: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ есть К. о. полупространства $x_n > 0$ пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, на себя, то f продолжается до гомеоморфизма замкнутых областей; при этом индуцированный на границе $\partial \mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ гомеоморфизм $\varphi: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ в случае $n=2$ удовлетворяет M-условию;

$$M^{-1} \leqslant \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-h)} \leqslant M,$$

а в случае $n \geqslant 3$ является квазиконформным. Каждое из последних двух условий в своей размерности не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы отображение $\varphi: \partial \mathbb{R}^n_+ \to \partial \mathbb{R}^n_+$ было граничным следом нек-рого К. о. (при $n=4$ это пока (1978) не доказано).

Вытекающая отсюда возможность продолжить квазиконформный автоморфизм пространства Лобачевского до К. о. абсолюта в совокупности с тем, что 1-квазиконформное отображение сферы конформно и является следом конформного автоморфизма шара, лежит в основе доказательства жесткости пространственных гиперболич. форм: если два замкнутых римановых многообразия размерности $n \geqslant 3$ одной и той же постоянной отрицательной кривизны гомеоморфны, то они изометричны (см. [9]).

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., 1962; [2] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [3] Альфорс Л., Лекции по квазиконформным отображениям, пер. с англ., М., 1969; [4] Белинский П. П., Общие свойства квазиконформных отображений, Новосиб., 1974; [5] Берс Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, пер. с англ., М., 1961; [6] Väisälä Jussi, Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings, B., 1971; [7] Крушкаль С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975; [8] Lehto O., Virtanen K. I., Quasiconforme Abbildungen, B., 1965; [9] Мостов Г. Д., «Математика», 1972, т. 16, № 5, с. 105—57. *В. А. Зорич.*

КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИЯ — совокупность приемов численного решения нелинейных задач путем сведения их к последовательности линейных задач. В основе аппарата квазилинеаризации лежит метод Ньютона и его обобщение на функциональные пространства, теория дифференциальных неравенств и метод динамич. программирования. Наиболее простым примером, иллюстрирующим приемы К., является использование метода Ньютона — Рафсона для отыскания корня r скалярной монотонно убывающей строго выпуклой функции $f(x)$. В этом случае на каждом шаге итеративного процесса исходная нелинейная функция $f(x)$ аппроксимируется линейной $\varphi(x)$, отыскивается корень $\varphi(x)$, к-рый служит следующим приближением, так что

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n),\ n=0,\ 1,\ \ldots$$

Построенная последовательность обладает свойством монотонности ($x_0<x_1<x_2<\ldots<r$) и квадратичной сходимости

$$|x_{n+1}-r|\leqslant k\,|x_n-r|^2.$$

Применение К. для решения уравнения Риккати

$$v'+v^2+p(t)v+q(t)=0,\qquad v(0)=c,$$

(предполагается, что решение существует на отрезке $[0,\ t_0]$) выглядит следующим образом. Исходное уравнение заменяется эквивалентным

$$v'=\min_u\,[u^2-2uv+p(t)\,v-q(t)],$$

где минимум берется по функциям $u(t)$, заданным на $[0,\ t_0]$. Данное уравнение обладает рядом свойств, присущих линейным уравнениям, и для его решения используется линейное дифференциальное уравнение

$$w'=u^2-2uw-p(t)w-q(t),\quad w(0)=c,$$

где $u(t)$ — некоторая фиксированная функция. Опираясь на свойство $v(t)\leqslant w(t)$ (причем равенство имеет место при $u(t)=v(t)$), можно построить систему последовательных приближений

$$v_1\geqslant v_2\geqslant\ldots\geqslant v_n\geqslant v_{n+1}\geqslant\ldots,$$

удовлетворяющих линейным уравнениям

$$v'_{n+1}=v_n^2-2v_nv_{n+1}-p(t)\,v_{n+1}-q(t),\ v_{n+1}(0)=c.$$

То же самое рекуррентное соотношение может быть получено путем применения метода Ньютона — Канторовича к исходному нелинейному уравнению.

Использование схемы К. при решении краевой задачи для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$u''=f(u',\ u,\ t),\qquad t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$
$$g_1(u(t_1),\ u'(t_2))=0,\qquad g_2(u(t_2),\ u'(t_2))=0$$

приводит к следующей последовательности функций $\{u_n(t)\}$, удовлетворяющих линейным уравнениям

$$u''_{n+1}=f(u'_n,\ u_n,\ t)+f_{u'}(u'_n,\ u_n,\ t)\,(u'_{n+1}-u'_n)+$$
$$+f_n(u'_n,\ u_n,\ t)\,(u_{n+1}-u_n),$$

с линеаризованными краевыми условиями

$$g_i(u_n(t_i),\ u'_n(t_i))+g_{iu}(u_n(t_i),\ u'_n(t_i))\,(u_{n+1}(t_i)-u_n(t_i))+$$
$$+g_{iu'}(u_n(t_i),\ u'_n(t_i))\,(u'_{n+1}(t_i)-u'_n(t_i))=0.$$

Существование, единственность и квадратичная сходимость последовательности следуют из соответствующей выпуклости функций f, g_1, g_2 при достаточно малом интервале $[t_1, t_2]$.

Метод К. находит применение при решении двухточечных и многоточечных краевых задач для линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, краевых задач для эллиптич. и параболич. уравнений в частных производных, вариационных задач, дифференциально-разностных и функционально-дифференциальных уравнений и т. д. Как и всякая итеративная схема, метод К. удобен для реализации на ЭВМ, допускает различные модификации, позволяющие ускорить сходимость для более узких классов задач. Существуют разнообразные примеры его использования как эвристического способа решения ряда физических, технических и экономических задач.

Лит.: [1] Беллман Р., Калаба Р., Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, пер. с англ., М., 1968.

И. А. Ватель, Ф. И. Ерешко.

КВАЗИЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными, линейное относительно старших производных от неизвестной функции. Так, напр., уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0$$

— К. у. 2-го порядка относительно неизвестной функции u.

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ — уравнения и системы дифференциальных уравнений вида:

$$L[u] \equiv \sum\nolimits_{|\alpha| \leqslant m} a^{\alpha} D^{\alpha} u = f, \qquad (1)$$

где оператор L характерен тем, что в каждой точке существует проходящий через нее вектор ζ такой, что для произвольного непараллельного к ζ вектора η характеристическое уравнение

$$Q(\lambda\zeta + \eta) = 0 \qquad (2)$$

относительно параметра λ имеет mk действительных корней (каждый корень считается столько раз, какова его кратность).

Система уравнений (1) рассматривается относительно искомой вектор-функции $u(x)$ с компонентами $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ (в случае одного уравнения $k=1$). Коэффициенты a^{α} — матрицы, элементы к-рых зависят от независимых пространственных переменных $x=(x_0, \ldots, x_n)$, вектор-функции $u(x)$ и ее частных производных до порядка $m-1$ включительно. От этих же аргументов зависит правая часть f. Если a^{α} являются квадратными матрицами порядка, совпадающего с числом компонент вектор-функции $u(x)$, система (1) наз. **определенной системой**. **Характеристическая форма**:

$$Q(\xi) = Q(\xi_0, \ldots, \xi_n) = \det \left\| \sum\nolimits_{|\alpha|=m} a^{\alpha} \xi^{\alpha} \right\|$$

определяется по **главной части** $\Sigma_{|\alpha|=m} a^{\alpha} D^{\alpha}$ оператора L.

Элементы поверхности, к-рые проходят через нек-рую точку P и ортогональны векторам ζ, наз. **элементами пространственного типа**. Векторы ζ, проходящие через ζ, определяют так наз. **конус нормалей**. Любое направление, выходящее из точки во внешней полости конуса нормалей, наз. **направлением временного типа**. Кривая, к-рая в каждой точке пространства переменных x имеет направление временного типа, наз. **кривой временного типа**.

Среди задач для К. г. у. и с. центральное место занимает задача Коши — задача нахождения решения $u(x)$

системы (1), если на нек-рой гладкой n-мерной гиперповерхности П, определенной уравнением

$$\varphi(x)=0, \quad |D\varphi| \neq 0,$$

известны значения вектора-функции $u(x)$ и ее частных производных по какому-нибудь нетангенциальному к П направлению до порядка $m-1$ включительно. Если такое решение всегда можно найти, то гиперповерхность П наз. свободной относительно оператора L.

Если коэффициенты системы (1) и условия Коши, заданные на аналитической свободной гиперповерхности П, аналитичны, то аналитическое в окрестности П решение единственно; если, помимо этого, условия Коши определяют на П все производные до порядка $m-1$, то, согласно теореме Коши — Ковалевской, в достаточно малой окрестности любой точки поверхности П аналитич. решение отсутствует. Эта теорема применима ко всем аналитич. уравнениям и системам независимо от того, какому типу они принадлежат. При неаналитических же данных теорема не дает ответа о существовании таких решений.

Если никакая часть гиперповерхности П не свободна, то ее наз. характеристической поверхностью относительно оператора L. Чтобы гиперповерхность П была характеристической относительно оператора L, необходимо и достаточно выполнение условия

$$Q(\xi)=0, \tag{3}$$

где $\xi=(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ — нормаль к поверхности П. Характеристич. матрица, характеристич. форма и характеристич. поверхность инвариантны относительно неособых преобразований. Характеристич. поверхности играют важную роль при исследовании многих задач для уравнений и систем вида (1).

Многие задачи математич. физики сводятся к симметрическим гиперболич. уравнениям и системам. Квазилинейная система 1-го порядка

$$L[u] \equiv \sum_{i=0}^{n} a^i u_{x_i} + bu = f \tag{1'}$$

наз. симметрической, если все матрицы a^i симметричны. Симметрич. система (1′) наз. гиперболической симметрической системой в точке P, если одна из матриц a^i или какая-либо линейная комбинация $\xi^i a^i$ знакоопределенна. Одно уравнение или система уравнений высшего порядка наз. симметрическими гиперболическими, если они эквивалентны какой-нибудь симметрической гиперболич. системе 1-го порядка. Систему (1′) при положительно определенном коэффициенте a^0 с помощью линейного преобразования можно привести к виду

$$u_t + M[u] = f, \quad t \equiv x_0 \tag{1''}$$

с симметрич. оператором M. При помощи *энергетических неравенств* и метода итераций доказывается существование решения задачи Коши для квазилинейных систем 2-го порядка и для одного нелинейного уравнения произвольного порядка.

Так как характеристики и бихарактеристики для гиперболич. уравнений и систем, как линейных, так и квазилинейных, определяются одинаково, известные факты о распределении разрывов младших производных решений линейных уравнений и систем относятся и к случаю квазилинейных уравнений. Распространение разрывов решения $u(x)$ гиперболич. систем рассмотрено для законов сохранения, т. е. для систем 1-го порядка, имеющих следующий вид:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F^{ij}(x, u)=0, \; j=1, 2, \ldots, k, \tag{4}$$

при условии, что поверхность ударной волны является нехарактеристической.

Много работ посвящено исследованию К. г. у. и с. в случае двух пространственных переменных x и t. Важную часть этих исследований составляют квазилинейные системы 1-го порядка, к-рые имеют вид:

$$L[u] \equiv Au_x + Bu_t = C, \tag{5}$$

где A и B — квадратные матрицы порядка k, вектор C зависят от переменных x, t и от вектора $u(x, t) = \{u_1(x,t), \ldots, u_k(x, t)\}$. Если от искомой вектор-функции $u(x, t)$ зависит только правая часть C, (5) наз. **почти линейной системой**. Почти линейные системы 1-го порядка эквивалентно сводятся к симметрич. системам линейными преобразованиями. Квазилинейная система (5) при предположении $\det B \neq 0$ имеет следующий вид:

$$u_t + Au_x = C. \tag{6}$$

Матрицу A можно преобразовать к диагональному виду с элементами $\varkappa_i$, где векторы $(\varkappa_i, 1)$ определяют характеристич. направления; эта запись наз. нормальной формой системы (5). Для систем вида (6) справедлива теорема единственности, независимо от того, зависят их характеристики от решения $u(x, t)$ или нет.

Если коэффициенты A, C и начальные значения решения $u(x, t)$ при $t=0$ имеют первые производные по всем аргументам и эти производные удовлетворяют *Липшица условию*, то можно указать окрестность $0 < t < h$ отрезка оси $t=0$, в к-рой существует единственное решение задачи Коши с первыми производными, удовлетворяющими условию Липшица. При этом вводятся вектор-функции $v(x, t)$, к-рые при $t=0$ совпадают с заданными начальными данными, а их первые производные удовлетворяют условию Липшица. После подстановки $v(x,t)$ в коэффициенты A и C решается задача Коши с заданными начальными данными для линейного уравнения. Каждой функции $v(x, t)$ ставится в соответствие решение $u(x, t)$ и решение задачи для системы (6) выводится как неподвижный элемент преобразования $u = \mathfrak{A}[v]$, или как предел равномерно сходящейся последовательности $\{u_n\}_{n=1,2,\ldots}$, полученный в результате итерационного процесса

$$u_{n+1} \equiv \mathfrak{A}[u_n].$$

Аналогичный результат получается при достаточно гладких коэффициентах A, C и начальных данных путем редукции задачи к системе интегральных уравнений, разрешимость к-рой доказывается на основе *сжатых отображений принципа*.

Квазилинейная система 1-го порядка (5) наз. **слабо нелинейной системой**, если соответствующая ей нормальная форма

$$u_t + Au_x = C \tag{7}$$

такова, что для каждого элемента a^{ii} диагональной матрицы выполняется условие:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} a^{ii}(x, t, u_1, \ldots, u_k) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

В других случаях (5) наз. **сильно нелинейной системой**. Если решение слабо нелинейной системы при $k=2$ ограничено, то задача Коши всегда разрешима в области определенности.

Кроме задачи с начальными данными, для квазилинейных систем 1-го порядка поставлены и исследованы и другие задачи. Напр., так наз. смешанные задачи, заключающиеся в нахождении решения $u(x, t)$ системы (7), к-рое наряду с начальными условиями $u(x, 0) = \psi(x)$ при $t=0$, $\alpha < x < \beta$ удовлетворяет краевым условиям на нек-рых гладких кривых Γ_1 и Γ_2, выходящих из точек $(\alpha, 0)$ и $(\beta, 0)$ соответственно. Эти краевые условия относительно решения $u(x, t)$ могут быть как линейными, так и нелинейными. В нек-рых случаях при соблюдении специальных условий удается проверить корректность постановки задач указанного типа.

Для сильно нелинейной системы (6) в случае $k=2$ исследована следующая задача: пусть Γ_1 — кривая выходящая из начала координатной системы и заданная уравнением $x=x(t)$, кривая Γ_1 предполагается характеристической, имеющей непрерывную касательную. Следует определить решение системы (6) в нек-рой области, ограниченной характеристикой Γ_1 и еще одной кривой Γ_2, выходящей тоже из начала координат, если известно решение $u(x, t)$ на Γ_1 при дополнительном условии, что одна из компонент вектора $u(x, t)$ имеет определенную особенность в точке пересечения граничных кривых. Известна разрешимость подобных задач при $t<\delta$ для достаточно малых δ.

Среди задач, поставленных для квазилинейных гиперболич. систем 1-го порядка, имеется ряд важных прикладных задач: задача о распаде произвольного взрыва, задача хроматографии, задача фильтрации и др.

Изложенные выше результаты носят локальный характер, касаются только регулярных решений. Если же решения не являются дифференцируемыми или даже непрерывными функциями, вводятся понятия так наз. слабых решений, определяемых различными способами, для к-рых доказываются теоремы единственности и существования решения задачи Коши глобально. Как правило, эти решения определяются в довольно широких классах функций (ограниченные измеримые функции, локально суммируемые функции и др.). Они удовлетворяют уравнению или системе в каком-нибудь смысле, напр. в смысле теории обобщенных функций, или подчинены вполне определенным интегральным соотношениям. Слабое решение в нек-рых случаях принято наз. решением задачи Коши, если разность решения и начальных данных слабо стремится к нулю при стремлении точки к носителю начальных данных.

Известно несколько путей построения глобальных слабых решений задачи Коши для законов сохранения в случае многих переменных с начальными данными довольно общего вида. Напр., метод сглаживания, конечно разностные схемы решения задач с начальными данными.

Общие нелинейные гиперболич. уравнения и системы путем дифференцирования по независимым переменным сводятся к квазилинейным гиперболич. системам 1-го порядка. Любое гиперболич. уравнение 2-го порядка редуцируется к симметрической гиперболич. системе 1-го порядка, и факты, относящиеся к гиперболич. системам 1-го порядка, остаются в силе и для одного гиперболич. уравнения 2-го порядка.

Теорема существования решения задачи Коши для одного гиперболич. уравнения высшего порядка была получена при требовании достаточно высокой гладкости коэффициентов уравнения (см. [9]).

Задача Коши для гиперболических квазилинейных уравнений высшего порядка была исследована при помощи редукции к аналогичной задаче для квазилинейных систем 1-го порядка. Для уравнений 2-го порядка, кроме этого, используется и другой метод, заключающийся в введении характеристич. системы координат (α, β). Получается система уравнений относительно x, t функции u и ее производных 1-го и 2-го порядков, к-рые рассматриваются как функции характеристич. переменных. Система эта состоит из шести уравнений 1-го порядка относительно функций

$$x=x(\alpha, \beta),\quad y=y(\alpha, \beta),\quad u=u(\alpha, \beta),\quad p=u_x(\alpha, \beta),$$
$$q=u_y(\alpha, \beta),$$

одно из к-рых является следствием всех остальных. Можно рассматривать определенную систему из пяти квазилинейных уравнений с пятью неизвестными функциями. Для подобных систем и, следовательно, для квазилинейных уравнений имеются теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Этот метод без существенных изменений применяется и для квазилинейных систем уравнений 2-го порядка

$$au_{xx}^{j}+bu_{xt}^{j}+cu_{tt}^{j}+d^{j}=0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

где коэффициенты зависят от x, t и функций u^{j}.

Лит.: [1] Glimm J., «Comm. pure and appl. Math.», 1965, № 18, p. 697—715; [2] Douglis A., «Ann. Inst. Fourier», 1972, t. 22, p. 141—227; [3] Кружков С. Н., «Докл. АН СССР», 1969, т. 187, № 1, с. 29—32; [4] Кузнецов Н. Н., «Матем. заметки», 1967, т. 2, № 4, с. 401—10; [5] Courant R., Lax P., «Comm. pure and appl. Math.», 1949, v. 2, p. 255—73; [6] Conway E., Smoller J., «Comm. pure and appl. Math.», 1966, v. 19, p. 95—105; [7] Lax P., «Comm. pure and appl. Math.», 1953, v. 6, p. 231—58; [8] Lewy H., «Math. Ann.», 1927, Bd 98, p. 179—91; [9] Levi E., «Rend. reale accad. Lincei», 1908, ser. 5, v. 17, p. 331—39; [10] Leray J., Hyperbolic differential equations, Prinston, 1953; [11] Lee Da-tsin, Yu Wen-tzu, «Scientia sinica», 1964, t. 13, № 4, p. 529—62; [12] Олейник О. А., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 3, с. 3—73; [13] Петровский И. Г., «Матем. сб.», 1937, т. 2, в. 5, с. 815—66; [14] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений, М., 1968; [15] Friedrichs K., «Amer. J. Math.», 1948, v. 70, p. 555—89; [16] Hartman P., Wintner A., «Amer. J. Math.», 1952, v. 74, p. 834—64; [17] Schauder J., «Comment. math. helv.», 1936, v. 9, p. 263—283. *Д. К. Гвазава.*

КВАЗИМНОГООБРАЗИЕ — см. *Алгебраических систем квазимногообразие.*

КВАЗИНОРМА — неотрицательная функция $\|x\|$, определенная на линейном пространстве R и удовлетворяющая тем же аксиомам, что и норма, кроме аксиомы сложения $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$, к-рая заменяется более слабым требованием: существует постоянная $c>0$ такая, что для всех $x\in R$ и $y\in R$ выполняется неравенство $\|x+y\|\leqslant c(\|x\|+\|y\|)$. *Л. Д. Кудрявцев.*

КВАЗИНОРМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — регулярное пространство, в к-ром два непересекающихся *π-множества* имеют непересекающиеся окрестности. Всякое T_λ-пространство, в к-ром любые два непересекающихся π-множества имеют непересекающиеся окрестности, является К. п. Для К. п. и только для такого пространства *Стоуна — Чеха бикомпактное расширение* βX совпадает с $\omega_\varkappa X$-пространством. Большой запас ненормальных К. п. дает теорема: произведение любого числа метрических пространств есть К. п.

Лит.: [1] Зайцев В. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1972, т. 27, с. 129—93; [2] Щепин Е. В., «Матем. сб.», 1972, т. 88, № 2, с. 316—25. *В. В. Федорчук.*

КВАЗИНОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО — линейное пространство, в к-ром задана *квазинорма.* Примерами К. п., не являющихся нормированными, служат *Лебега пространства* $L_p(E)$ при $0<p<1$, в к-рых квазинормой является выражение

$$\|f\|=\left[\int_E |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p},\quad f\in L_p(E).$$

Л. Д. Кудрявцев.

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ с периодами $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$ — функция $f(t)$ такая, что $f(t)=F(t,t,\ \ldots,\ t)$ для нек-рой непрерывной функции $F(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$ от n переменных, периодической по $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$ с периодами $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$ соответственно. Все $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$ строго положительны, и их обратные величины $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ являются рационально линейно независимыми.

Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — непрерывные периодич. функции с периодами ω_1 и ω_2 соответственно, причем отношение ω_1/ω_2 иррационально, то $g(t)=f_1(t)+f_2(t)$ и $h(t)=\max\{f_1(t),\ f_2(t)\}$ суть К. ф.

Теория К. ф. послужила основой для создания теории *почти периодических функций.* В случае непрерывных функций К. ф. являются обобщением периодич. функций, но частным случаем почти периодических.

К. ф. допускает представление вида

$$f(t)=\sum c_{k_1\ldots k_n} e^{i(k_1p_1+\ldots+k_np_n)t},$$

если $c_{k_1\ldots k_n}=c_k$ таковы, что $\sum |c_k|^2<\infty$. К. ф. обладают следующими свойствами: сложение и умножение К. ф. дают снова К. ф.; равномерно сходящаяся последовательность К. ф. при $t\in\mathbb{R}$ дает в пределе почти периодич. функцию; если $g(t)$ — почти периодич. функция и $\varepsilon>0$, то существует такая К. ф. $f(t)$, что

$$|f(t)-g(t)|<\varepsilon \text{ при } t\in\mathbb{R}.$$

Лит.: [1] Боль П. Г., Избр. труды, пер. с нем., Рига, 1961; [2] Харасахал В. Х., Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений, А.-А., 1970.

Ю. В. Комленко, Е. Л. Тонков.

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ — прямолинейное движение материальной точки, закон к-рого выражается *квазипериодической функцией.*

КВАЗИПРОЕКТИВНАЯ СХЕМА — локально замкнутая подсхема проективного пространства P^n. Иначе говоря, К. с. — это открытая подсхема проективной схемы. Схема X над полем квазипроективна тогда и только тогда, когда на X существует обратимый обильный пучок. Обобщение понятия «К. с.» — квазипроективный морфизм, т. е. морфизм схем, являющийся композицией открытого вложения и проективного морфизма. Схема, одновременно квазипроективная и полная, является проективной. *В. И. Данилов.*

КВАЗИПРОСТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — непрерывное линейное представление π связной полупростой действительной группы Ли G в банаховом пространстве E такое, что: 1) оператор $\pi(x)$ является скалярным кратным единичного оператора в пространстве E для любого элемента x из центра группы G; 2) если F — пространство аналитич. векторов в E относительно π и если π_F — представление универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{G}$ алгебры Ли группы G в векторном пространстве F, то оператор $\pi_F(z)$ является скалярным кратным единичного оператора в пространстве F для всех элементов z из центра алгебры $\mathcal{G}$. Эти скалярные кратные определяют характер центра алгебры $\mathcal{G}$, наз. инфинитезимальным характером К. п. Два К. п. наз. инфинитезимально эквивалентными, если определяемые ими представления универсальной обертывающей алгебры в соответствующих векторных пространствах аналитич. векторов эквивалентны. Всякое вполне неприводимое представление группы в банаховом пространстве есть К. п., и любое неприводимое К. п. группы G в банаховом пространстве инфинитезимально эквивалентно нек-рому вполне неприводимому представлению; последнее является ограничением на инвариантное подпространство нек-рого факторпредставления представления (вообще говоря, неунитарного) из основной серии представлений группы G.

Лит.: [1] Harish-Chandra, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 75, p. 185—243; 1954, v. 76, p. 26—65; [2] Lepowsky J., там же, 1973, v. 176, p. 1—44; [3] Фомин А. И., «Функцион. анализ и его прилож.», 1976, т. 10, № 3, с. 95—96. *А. И. Штерн.*

КВАЗИПРОСТОЕ ЧИСЛО — натуральное число n, не имеющее малых простых делителей. Это означает, что все простые делители числа n должны быть больше $\mathcal{P}(n)$, где $\mathcal{P}(n)$ — некоторая функция, растущая медленнее, чем n. Напр.,

$$\mathcal{P}(n)=n^{1/(\ln\ln n)^2}.$$

К. ч. хорошо распределены в арифметич. прогрессиях с большим модулем. *Б. М. Бредихин.*

КВАЗИРАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ — обобщение равномерной сходимости. Поточечная сходимость последовательности отображений $\{f_n\}$ топологич. пространства X в метрич. пространство Y к отображению f

наз. К. с., если для всякого $\varepsilon > 0$ и всякого натурального числа N существует такое не более чем счетное открытое покрытие $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_s, \ldots\}$ пространства X и такая последовательность $n_0, n_1, \ldots, n_s, \ldots$ натуральных чисел, больших N, что $\rho(f(x), f_{n_k}(x)) < \varepsilon$ для всякого $x \in \Gamma_k$. Из равномерной сходимости вытекает К. с. Для последовательностей непрерывных функций К. с. является необходимым и достаточным условием непрерывности предельной функции (теорема Арцеля — Александрова).

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948. *В. В. Федорчук.*

КВАЗИРАЗЛОЖИМАЯ ГРУППА, квазирасщепимая группа, над полем k — аффинная алгебраич. группа, определенная над полем k, содержащая *Бореля подгруппу*, определенную над тем же полем. Всякая аффинная алгебраич. группа становится К. г. при нек-ром расширении основного поля, напр. над алгебраическим замыканием этого поля. Всякая аффинная алгебраич. группа, определенная над конечным полем k, квазиразложима над k. См. также *Разложимая группа*. *В. Л. Попов.*

КВАЗИРЕГУЛЯРНОЕ КОЛЬЦО — кольцо, в к-ром каждый элемент квазирегулярен. Элемент a альтернативного (в частности, ассоциативного) кольца R наз. квазирегулярным, если существует такой элемент $a' \in R$, что

$$a + a' + aa' = a + a' + a'a = 0.$$

Элемент a' наз. квазиобратным для элемента a. Если R — кольцо с единицей 1, то элемент $a \in R$ является квазирегулярным с квазиобратным a' тогда и только тогда, когда элемент $1+a$ обратим в R с обратным $1+a'$. Всякий нильпотентный элемент квазирегулярен. В ассоциативном кольце множество всех квазирегулярных элементов образует группу относительно операции круговой композиции: $x \cdot y = x + y + xy$. Важным примером К. к. является кольцо (некоммутативных) формальных степенных рядов без свободных членов. Существуют простые ассоциативные К. к. [2].

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Sasiada E., Cohn P. M., «J. Algebra», 1967, v. 5, № 3, p. 373—77. *И. П. Шестаков.*

КВАЗИРЕГУЛЯРНЫЙ РАДИКАЛ кольца — наибольший квазирегулярный идеал данного кольца. Идеал A кольца R наз. квазирегулярным, если A является *квазирегулярным кольцом*. Во всяком альтернативном (в частности, ассоциативном) кольце существует К. р.; он совпадает с суммой всех правых (левых) квазирегулярных идеалов (см. [1], [10]). К. р. ассоциативного кольца наз. также *Джекобсона радикалом*.

К. р. $J(R)$ произвольного альтернативного кольца R равен пересечению всех максимальных модулярных правых (левых) идеалов кольца R; $J(R)$ равен также пересечению ядер всех неприводимых правых (левых) представлений кольца R (см. [1], [5]—[8]). Кольцо R наз. J-полупростым (или просто полупростым), если $J(R)=0$. Факторкольцо $R/J(R)$ всегда полупросто. Всякое полупростое кольцо изоморфно подпрямой сумме примитивных колец [1], [8]. Если R удовлетворят условию минимальности для правых (левых) идеалов, то радикал $J(R)$ нильпотентен, а факторкольцо $R/J(R)$ изоморфно конечной прямой сумме полных матричных колец над телами и алгебр Кэли — Диксона (последние слагаемые в ассоциативном случае отсутствуют), см. [1]—[3]. Пусть A — двусторонний идеал кольца R, тогда

$$J(A) = A \cap J(R)$$

(см. [1], [4]); если R ассоциативно и R_n — кольцо всех матриц порядка n над R, то

$$J(R_n) = [J(R)]_n.$$

Если R — ассоциативная алгебра над полем F и мощность F больше размерности R над F либо R является алгебраической над F, то $J(R)$ — нильидеал. К. р. конечно порожденного альтернативного кольца, удовлетворяющего существенному тождественному соотношению, совпадает с нижним нильрадикалом (см. *Радикалы колец и алгебр*) [6]. Некоторый аналог К. р. существует во всякой *йордановой алгебре*.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Жевлаков К. А., «Алгебра и логика», 1965, т. 4, № 4, с. 87—102; [3] его же, там же, 1966, т. 5, № 3, с. 11—36; [4] его же, там же, 1969, т. 8, № 2, с. 176—80; [5] его же, там же, № 3, с. 309—19; [6] его же, там же, 1972, т. 11, № 2, с. 140—61; [7] Слинько А. М., Шестаков И. П., там же, 1974, т. 13, № 5, с. 544—88; [8] Kleinfeld E., «Amer. J. Math.», 1955, v. 77, p. 725—30; [9] McCrimmon K., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1969, v. 62, p. 671—78; [10] Smiley M. F., «Ann. Math.», 1948, v. 49, № 3, p. 702—09.

И. П. Шестаков.

КВАЗИРЕШЕНИЕ — обобщенное решение некорректных задач, к-рое (при достаточно общих условиях), в отличие от истинного решения, удовлетворяет условиям корректности по Адамару.

Пусть X, Y — метрические пространства, $A: X \to Y$, M — множество из X. Квазирешением уравнения

$$Ax = y \tag{1}$$

на множестве M при заданном y из Y наз. элемент $\bar{x}$ из M, минимизирующий уклонение $\rho(Ax, y)$ при x из M. Если уравнение (1) имеет на M истинное решение x_0, то x_0 будет также и К.

Зависимость множества К. от y удобно представить как суперпозицию двух отображений

$$\bar{x} = A^{-1}Py,$$

где A^{-1} — обращение (вообще — многозначное) отображения A, а P — оператор метрич. проектирования в пространстве Y на множество $N = AM$. Такая суперпозиция позволяет свести исследование свойств К. к исследованию отображений A^{-1} и P. Напр., если множество N — чебышевское, а отображение A^{-1} — однозначно и непрерывно на N, то задача нахождения К. является корректной. Если P или A^{-1} многозначны, то устойчивость множества K формулируется в терминах β-непрерывности (непрерывности функций от множеств).

Обычно в качестве X и Y берутся линейные нормированные пространства, что позволяет получить наиболее полные и законченные результаты. Так, задача нахождения К. корректна, если Y — строго выпукло, A — линейный непрерывный обратимый оператор, M — выпуклый компакт. Имеется ряд других комбинаций условий, обеспечивающих корректность задачи нахождения К., в к-рых одни условия усиливаются, другие ослабляются (напр., A — линейный замкнутый оператор, но Y — гильбертово).

Существует ряд способов задания множества M, обеспечивающих возможность эффективного нахождения К. Один из наиболее распространенных способов состоит в следующем. Рассматривается третье пространство Z (все или нек-рые из пространств X, Y, Z могут совпадать) и линейный оператор $B: Z \to X$ такой, что B^{-1} — неограничен. За множество $M = M_r$ принимается образ шара:

$$M_r = BS_r; \quad S_r = \{z \in Z : \|z\| \leqslant r\}.$$

В такой форме задача нахождения К. является задачей математич. программирования: минимизировать функционал

$$f(z) = \|ABz - y\|$$

при ограничении $\|z\| \leqslant r$. Для гильбертовых Y и Z получается задача квадратичного программирования.

В случаях корректности К. важное значение для приложений имеют оценки устойчивости, в к-рых дается зависимость $\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$ от $\|y_1 - y_2\|$. При приведенном выше способе задания множества M устойчивость К. характеризуется функцией:

$$\Omega(\tau, r) = \sup \|x_1 - x_2\|;\ x_i = Bz_i,\ \|z_i\| \leqslant r,$$
$$\|Ax_1 - Ax_2\| \leqslant \tau,\ i = 1, 2.$$

Имеет место соотношение

$$\Omega(\tau, r) = \omega(\tau, 2r),$$

где $\omega(\tau, r)$ есть решение экстремальной задачи $\omega(\tau, r) = \sup \|Bz\|$ при $\|z\| \leqslant r$, $\|ABz\| \leqslant \tau$.

Для гильбертовых Z и Y имеются выражения для $\omega(\tau, r)$ в замкнутой форме.

Лит.: [1] Иванов В. К., «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, № 2, с. 270—72; [2] его же, «Матем. сб.», 1963, т. 61, № 2, с. 211—23; [3] Лисковец О. А., «Дифференциальные уравнения», 1971, т. 7, № 9, с. 1707—09; [4] Морозов В. А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 11, М., 1973, с. 129—78; [5] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, М., 1974; [6] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы высшей математики, т. 1—2, Минск, 1972—75. *В. К. Иванов.*

КВАЗИСИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — нечетномерное проективное пространство P_{2n-1}, в к-ром заданы нульсистемы:

$$u_a = -x^{m+a};\quad u_{m+a} = x^a;\quad u_{m+b} = u_{n+b} = 0$$

и

$$u_{n+b} = x^{m+b};\quad u_{m+b} = -x^{n+b},$$
$$m \leqslant b \leqslant n-1;\ 0 \leqslant a \leqslant m-1.$$

Первая нульсистема переводит точки пространства в гиперплоскости, проходящие через $(2n-2m-1)$-плоскость

$$x^a = x^{m+a} = 0,$$

вторая нульсистема — в точки этой же плоскости.

Плоскость $x^a = x^{m+a} = 0$ наз. абсолютной, а обе нульсистемы — абсолютными нульсистемами К. п. $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$. К. п. является частным случаем полусимплектических пространств.

Коллинеации пространства $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$, переводящие в себя абсолютную плоскость, имеют вид:

$$'x^k = \sum\nolimits_\lambda U^k_\lambda x^\lambda,$$
$$'x^u = \sum\nolimits_\lambda T^u_\lambda x^\lambda + \sum\nolimits_\mu V^u_\mu x^\mu,$$
$$0 \leqslant k,\ \lambda \leqslant 2m-2,\ 2m-1 \leqslant \mu,\ u \leqslant 2n-1,$$

и матрицы U^k_λ и V^n_μ — симплектич. матрицы порядков $2m$ и $(2n-2m)$; T^u_λ — прямоугольная матрица с $2m$ столбцами и $(2n-2m)$ строками.

Эти коллинеации наз. **квазисимплектическими преобразованиями** пространства $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$. Они перестановочны с заданными нульсистемами пространства. Квазисимплектич. инвариант двух прямых определяется по аналогии с симплектич. инвариантом прямых симплектического пространства.

К. п. $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$ может быть получено из симплектического $S_{P_{2n-1}}$ путем предельного перехода от абсолюта пространства $S_{P_{2n-1}}$ к абсолюту пространства $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$. Именно, первая из заданных нульсистем переводит все точки пространства в плоскости, проходящие через абсолютную плоскость, а вторая — переводит все плоскости в точки той же плоскости.

Квазисимплектич. преобразования образуют группу, являющуюся группой Ли.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

КВАЗИСРЕДНИХ МЕТОД — конструктивная схема исследования систем со спонтанным нарушением симметрии, основанная на фундаментальной концепции квазисредних (Н. Н. Боголюбов [1], 1961).

К в а з и с р е д н и е — термодинамические (в статистической механике) или вакуумные (в квантовой теории поля) средние от динамических величин в специальным образом модифицированной процедуре усреднения, позволяющей учесть эффекты влияния вырождения состояния системы.

В с т а т и с т и ч. м е х а н и к е при спонтанном нарушении симметрии на основе К. м. могут быть описаны макроскопические наблюдаемые в рамках микроскопического подхода.

В задачах с вырождением одному уровню энергии отвечает более одного независимых состояний системы; среднее же значение $\langle A \rangle$ любой динамической величины A определенно однозначно:

$$\langle A\rangle_H = \frac{\mathrm{Tr}\,(Ae^{-\beta H})}{\mathrm{Tr}\,e^{-\beta H}}, \tag{1}$$

где H — гамильтониан системы, β — обратная температура. Если состояние статистического равновесия системы обладает более низкой симметрией, чем гамильтониан системы (так наз. спонтанное нарушение симметрии см. [2]—[5]), то операцию усреднения (1) необходимо дополнить правилом, запрещающим «лишнее» усреднение по различным значениям рассматриваемой макроскопической величины, изменение к-рой не сопровождается изменением энергии.

Это достигается введением квазисредних, т. е. средних по гамильтониану, дополненному бесконечно малыми членами, нарушающими аддитивные законы сохранения. Термодинамические средние могут оказаться неустойчивыми по отношению к такому изменению исходного гамильтониана, что и свидетельствует о вырождении состояния статистического равновесия.

Итак, квазисреднее $\prec A \succ$ динамической величины A для системы с гамильтонианом H определяется как предел

$$\prec A\succ_H = \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} \langle A\rangle_{H_\nu}^{(V)}, \tag{2}$$

где через $\langle\ldots\rangle_{H_\nu}$ обозначено обычное среднее, взятое по гамильтониану H_ν, содержащему малые нарушающие симметрию члены, вводимые параметром включения ν, исчезающие при $\nu\to 0$. Согласно определению (2) обычное термодинамическое среднее получается дополнительным усреднением квазисреднего по группе нарушенной симметрии.

Значение квазисреднего (2) может зависеть от конкретной структуры добавочного члена $\Delta H = H_\nu - H$, если усредняемая динамическая величина A неинвариантна относительно группы симметрии исходного гамильтониана H. При стремлении параметров включения источников ν к нулю произвольным образом предел обычных средних (2) для вырожденного состояния не существует. Для полного определения квазисредних необходимо указать способ стремления этих параметров к нулю, обеспечивающий сходимость (см., напр., [5]). С другой стороны, для снятия вырождения достаточно нарушить при построении H_ν лишь те аддитивные законы сохранения, «выключение» к-рых приводит к неустойчивости обычных средних. При этом для квазисредних не будут выполняться именно те правила отбора корреляционных функций, к-рые обусловлены указанными законами сохранения.

К. м. непосредственно связан с принципом ослабления корреляции (см. [8], [9]): корреляционные функции

$$\prec U_1(x_1, t_1)\ldots U_s(x_s, t_s)\ldots U_n(x_n, t_n)\succ, \tag{3}$$

где $U_s(x_s, t_s)$ — полевые функции в *Гейзенберга представлении* $\Psi(x_s, t_s)$ или $\Psi^+(x_s, t_s)$, распадаются на произведение

$$\langle U_1(x_1, t_1) \ldots U_{s-1}(x_{s-1}, t_{s-1})\rangle \times \times \langle U_s(x_s, t_s) \ldots U_n(x_n, t_n)\rangle, \qquad (4)$$

если совокупность точек $x_1, \ldots, x_{s-1}$ бесконечно удаляется от совокупности точек $x_s, \ldots, x_n$ при фиксированных временных переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$. В случае вырождения рассматриваемого состояния выражения $\langle\ldots\rangle$, входящие в эту формулировку, с необходимостью должны пониматься как квазисредние: приведенная выше формулировка принципа ослабления корреляций становится прямо неверной, если считать $\langle\ldots\rangle$ обычными средними.

Для построения неравновесного статистического оператора рассматриваются бесконечно малые возмущения, нарушающие симметрию (*Лиувилля уравнения*) относительно обращения времени. Применение этой операции эквивалентно отбору запаздывающих решений уравнения Лиувилля (см. [7]).

Вопросы о выборе способа стремления параметров включения источников ν к нулю, обеспечивающего сходимость обычных средних в определении квазисредних (2) рассмотрены в рамках метода аппроксимирующих гамильтонианов, где исходный гамильтониан заменяется на специальным образом конструируемый путем замены динамических величин, коммутирующих со всей алгеброй локальных наблюдаемых в пределе большой системы, на c-числа, так наз. аппроксимирующей гамильтониан, так что этот последний гамильтониан является много проще исходного (и в широком ряде физически важных случаев допускается точное решение) и является ему эквивалентным при $V \to \infty$ (см. [7]). При построении добавочного члена ΔH следует взять его пропорциональным решениям в общем случае минимаксной задачи для предельной ($V \to \infty$) функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана. Тогда произвольная последовательность вещественных положительных ν, сходящаяся к нулю, обеспечивает сходимость в определении (2), при этом таким образом построенные квазисредние оказываются равными соответствующим решениям указанной минимаксной задачи.

В рамках метода аппроксимирующих гамильтонианов указан другой альтернативный способ определения квазисредних без введения дополнительных членов в гамильтониан H. В этом подходе при вычислении квазисреднего $\langle A\rangle_H$ рассматриваемая динамическая величина A домножается на нек-рый, в определенном смысле стремящийся к единице при $V \to \infty$, множитель L, гамильтониан H остается неизменным [4]:

$$\langle A\rangle_H = \lim \langle A \cdot L\rangle. \qquad (5)$$

Квазисредние, определенные согласно (2) и (5), совпадают.

Математический аппарат К. м. включает *Боголюбова теорему* об особенностях типа $1/q^2$ и *Боголюбова неравенства* для *Грина функций* и *корреляционных функций*; содержит в себе алгоритмы установления нетривиальных оценок для равновесия квазисредних, позволяющих исследовать проблему упорядочения в статистич. системах и выяснять структуру энергетического спектра низколежащих возбужденных состояний (см. [4], [8]).

Концепция квазисредних непосредственно связана с теорией фазовых переходов (см. [6], [7], [9]): неустойчивость термодинамических средних по отношению к возмущениям гамильтониана, нарушающим инвариантность относительно нек-рой группы преобразований, означает, что в системе происходит переход в экстремальное состояние.

В квантовой теории поля для ряда модельных систем доказано наличие фазового перехода и установлена справедливость теоремы Боголюбова об особенностях типа $1/q^2$; исследована возможность локальной неустойчивости вакуума и появления у него доменной структуры.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 3, К., 1971; [2] Статистическая физика и квантовая теория поля, М., 1973; [3] Гриб А. А., Дамаскинский Е. В., Максимов В. М., «Успехи физ. наук», 1970, т. 102, с. 587—620; [4] Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И., Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975; [5] Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974; [6] Браут Р., Фазовые переходы, пер. с англ., М., 1967; [7] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [8] Ахиезер А. И., Пелетминский С. В., Методы статистической физики, М., 1977; [9] Престон К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977.

А. Н. Ермилов, А. М. Курбатов.

КВАЗИТОЖДЕСТВО, условное тождество,— формулы логического языка 1-й ступени вида

$$(\forall x_1 \ldots x_n)\,(A_1 \& \ldots \& A_p \longrightarrow A),$$

где через $A_1, \ldots, A_p, A$ обозначены простейшие формулы вида

$$f=g,\ P\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

а $f, g, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — термы от $x_1, \ldots, x_n$, P — сигнатурный предикатный символ. Квазитождествами определяются *алгебраических систем квазимногообразия.* Тождество — частный случай К. *О. А. Иванова.*

КВАЗИФРОБЕНИУСОВО КОЛЬЦО, QF-кольцо,— артиново кольцо (слева и справа), удовлетворяющее аннуляторным условиям:

$$\mathfrak{Z}_e(\mathfrak{Z}_r(L)) = L \text{ и } \mathfrak{Z}_r(\mathfrak{Z}_r(H)) = H$$

для каждого левого (правого) идеала $L\,(H)$ (см. *Аннулятор*). Артиново слева кольцо, удовлетворяющее лишь одному из аннуляторных условий, может не быть К. к. Интерес к К. к. обусловлен наличием двойственности: артиново слева кольцо R является К. к. тогда и только тогда, когда отображение

$$M \longmapsto \mathrm{Hom}_R\,(M,\, R)$$

определяет двойственность категорий левых и правых конечно порожденных R-модулей. Конечномерная алгебра A над полем P оказывается К. к. в том и только том случае, когда каждое неприводимое прямое слагаемое левого A-модуля $\mathrm{Hom}_P(A_A,\, P)$ изоморфно нек-рому минимальному левому идеалу алгебры A. А это равносильно самодуальности решеток левых и правых идеалов алгебры A.

К. к. были введены как обобщение фробениусовых алгебр, определяемых требованием эквивалентности правого и левого регулярных представлений. Первоначально свойство артинова слева и справа кольца R быть квазифробениусовым определялось следующим условием: если $e_1, \ldots, e_n$ — полный список примитивных идемпотентов из R (т. е. $Re_i \not\cong Re_j$ при $i \neq j$ и, каков бы ни был примитивный идемпотент e, $Re \cong Re_i$ для нек-рого i), J — радикал кольца R и $\varphi : R \to R/J$ — естественный гомоморфизм, то найдется такая перестановка π множества $\{1, \ldots, n\}$, что

$$\mathrm{Soc}\,(e_i R) \cong \varphi\left(e_{\pi(i)} R\right) \text{ и } \mathrm{Soc}\left(Re_{\pi(i)}\right) \cong \varphi\,(Re_i),$$

где $\mathrm{Soc}\, M$ — *цоколь* модуля M. Квазифробениусовость кольца R эквивалентна также каждому из следующих свойств: (1) R нётерово слева, $\mathfrak{Z}_r(\mathfrak{Z}_e(H)) = H$ для каждого правого идеала H и

$$\mathfrak{Z}_r\,(L_1 \cap L_2) = \mathfrak{Z}_r\,(L_1) + \mathfrak{Z}_r\,(L_2)$$

для любых левых идеалов L_1 и L_2; (2) R удовлетворяет условию максимальности для левых (или правых) аннуляторных идеалов (в частности, если R нётерово слева или справа) и самоинъективно слева или справа; (3) R артиново справа и самоинъективно слева или справа;

(4) каждый инъективный (проективный) левый R-модуль проективен (инъективен); (5) все плоские левые R-модули инъективны; (6) R самоинъективно слева и справа и совершенно справа; (7) R самоинъективно слева и справа и каждый его правый идеал является аннулятором нек-рого конечного множества из R; (8) R совершенно справа и каждый конечно порожденный левый R-модуль вкладывается в проективный модуль; (9) R когерентно и совершенно справа и $\mathrm{Ext}_R(M, R)=0$ для всех конечно представимых левых R-модулей M; (10) R удовлетворяет условию максимальности для левых аннуляторов и $\mathrm{Ext}_R(M, R)=0$ для всех конечно представимых левых R-модулей M; (11) R артиново слева и справа и для всякого конечно порожденного левого R-модуля M длины модулей M и $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ совпадают; (12) кольцо эндоморфизмов каждого свободного левого R-модуля самоинъективно слева; (13) конечно порожденные односторонние идеалы кольца эндоморфизмов любого проективного образующего (инъективного кообразующего) категории левых R-модулей являются аннуляторами.

Инъективные модули над К. к. разлагаются в прямую сумму циклических. Для коммутативных колец справедливо и обратное. Если радикал Джекобсона J кольца R трансфинитно нильпотентен (т. е. $J^\alpha=0$ для нек-рого трансфинита α, где $J^1=J$, $J^\alpha=J^{\alpha-1}J$ и $J^\alpha=\bigcap_{\beta<\alpha}J^\beta$ для предельного α), то R — К. к. тогда и только тогда, когда R самоинъективно слева и все его односторонние идеалы аннуляторные. Левый модуль над К. к. R точен в том и только в том случае, когда он является образующим категории левых R-модулей. Групповое кольцо RG является К. к. тогда и только тогда, когда группа G конечна, а кольцо R квазифробениусово.

Изучаются также нек-рые обобщения К. к.: левое QF-3-кольцо R определяется требованием существования точного левого R-модуля, вкладывающегося в качестве прямого слагаемого в любой точный левый R-модуль; левое QF-3′-кольцо R определяется требованием вложимости инъективной оболочки левого R-модуля R в прямое произведение нек-рого множества экземпляров модуля R. Левое псевдофробениусово кольцо (или левое PF-кольцо) определяется каждым из следующих свойств: а) R — инъективный кообразующий категории левых R-модулей; б) каждый точный левый R-модуль является образующим категории левых R-модулей; в) R — левое QF-3-кольцо и аннулятор любого отличного от R правого идеала отличен от нуля.

Лит.: [1] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [2] Модули. [в.] 2, Новосиб., 1973, с. 42—48; [3] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—78. *Л. А. Скорняков.*

КВАЗИХАРАКТЕР — непрерывный гомоморфизм c абелевой топологич. группы G в мультипликативную группу комплексных чисел. В качестве G обычно рассматривается мультипликативная группа k^* нек-рого локального поля k.

Ограничение К. c на любую компактную подгруппу группы G является характером этой подгруппы. В частности, если $\| \ \|$ — нормирование поля k и $U=\{a\in k^* | \ \|a\|=1\}$, то c индуцирует нек-рый характер χ группы U, совпадающей в неархимедовом случае с группой единиц поля k. Если $c(U)=1$, то К. наз. неразветвленным. Любой неразветвленный К. имеет вид

$$c=\|a\|^s=e^{s\log\|a\|}.$$

В общем случае К. группы k^* имеет вид $c=c^1\|a\|^s$, где s — комплексное число, а $c^1(a)$ — характер группы k^*. Действительная часть числа s однозначно определяется К. c и наз. вещественной частью К. c.

В неархимедовом случае для всякого К. c найдется натуральное m, для которого

$$c(1+\mathfrak{M}^m)=1,$$

где $\mathfrak{M}$ — максимальный идеал кольца целых поля k. Минимальное число m с этим свойством наз. **степенью ветвления** К. c, а идеал $\mathfrak{M}^m$ — **ведущим модулем** К. c.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [2] Шафаревич И. Р., Дзета-функция, М., 1969.
Л. В. Кузьмин.

КВАЗИЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА, **группа типа** p^∞,— бесконечная абелева p-группа, все собственные подгруппы к-рой циклические. Для каждого простого p существует единственная с точностью до изоморфизма К. г. Эта группа изоморфна мультипликативной группе всех корней уравнений

$$x^{p^n}=1,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

в поле комплексных чисел с обычным умножением, а также факторгруппе $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, где $\mathbb{Q}_p$— аддитивная группа поля рациональных p-адических чисел, а $\mathbb{Z}_p$— аддитивная группа кольца всех целых p-адических чисел. К. г. есть объединение возрастающей последовательности циклич. групп C_n порядка p^n, $n=1, 2, \ldots$, точнее — индуктивный предел

$$\varinjlim_n C_n$$

относительно индуктивной системы $(C_n,\ \varphi_n)$. В терминах образующих и определяющих соотношений эта группа может быть определена как группа со счетной системой образующих $a_1, a_2, \ldots , a_n, \ldots$ и определяющими соотношениями

$$a_1^p=1,\quad a_{n+1}^p=a_n,\quad n=2,\ 3,\ \ldots .$$

К. г. являются единственными бесконечными абелевыми (а также единственными локально конечными бесконечными) группами, все подгруппы к-рых конечны. Вопрос о существовании бесконечных неабелевых групп с указанным свойством еще не решен (1978) и составляет одну из проблем О. Ю. Шмидта.

К. г. являются полными абелевыми группами, и всякая полная абелева группа есть прямая сумма нек-рого множества групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел и К. г. для нек-рых простых чисел p. Группы типа p^∞ являются максимальными p-подгруппами мультипликативной группы комплексных чисел, а также максимальными p-подгруппами аддитивной группы рациональных чисел по модулю 1. Кольцо эндоморфизмов группы типа p^∞ изоморфно кольцу целых p-адических чисел. К. г. совпадает со своей *Фраттини подгруппой.*

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, М., 1972.
Н. Н. Вильямс.

КВАЗИЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ — унитарные представления π_1, π_2 группы X (или симметричные представления симметричной алгебры X) в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 соответственно, удовлетворяющие одному из следующих четырех эквивалентных условий: 1) существуют такие унитарно эквивалентные представления ρ_1 и ρ_2, что ρ_1 есть кратное представления π_1, а ρ_2 — кратное представления π_2; 2) ненулевые подпредставления представления π_1 не дизъюнктны с π_2, а ненулевые подпредставления представления π_2 не дизъюнктны с π_1; 3) π_2 унитарно эквивалентно подпредставлению нек-рого представления ρ_1, кратного представлению π_1, имеющему единичный центральный носитель; 4) существует изоморфизм Φ *Нейма-*

на алгебры, порожденной множеством $\pi_1(X)$, на алгебру Неймана, порожденную множеством $\pi_2(X)$, удовлетворяющий условию $\Phi(\pi_1(x))=\pi_2(x)$ для всех $x\in X$. Унитарно эквивалентные представления суть К. п.; неприводимые К. п. унитарно эквивалентны. Если π_1 и π_2 — К. п., и π_1 — факторпредставление, то и π_2 — факторпредставление; факторпредставление и его ненулевое подпредставление суть К. п.; два факторпредставления либо дизъюнктны, либо являются К. п. Понятие К. п. приводит к понятию квазидуального объекта и квазиспектра для локально компактных групп и симметричных алгебр соответственно.

Лит.: [1] Диксмье Ж., С*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974. *А. И. Штерн.*

КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — проективное n-пространство, проективная метрика к-рого определяется абсолютом, состоящим из совокупности мнимого конуса (абсолютный конус Q_0) с $(n-m-1)$-вершиной (абсолютная плоскость T_0) и мнимой $(n-m-2)$-квадрикой Q_1 на этой $(n-m-1)$-плоскости (абсолютная квадрика Q_1); обозначается символом S_n^m, $m<n$. К. п. является пространством более общего проективного типа по отношению к евклидову пространству и *коевклидову пространству*, метрики последних получаются из метрики первого. К. п. является частным случаем *полуэллиптических пространств.* При $m=0$ абсолютный конус является парой слившихся $(n-1)$-плоскостей, совпадающих с $(n-1)$-абсолютной плоскостью T_0, а абсолюты совпадают с абсолютом евклидова n-пространства. При $m=n-1$ конус Q_0 является конусом с точечной вершиной, абсолют в этом случае совпадает с абсолютом коевклидова n-пространства. При $m=1$ конус Q_0 является парой мнимых $(n-1)$-плоскостей. В частности, конус Q_0 квазиэллиптического 3-пространства S_3^1 является парой мнимых 2-плоскостей, прямая (1-плоскость) T_0 является действительной прямой их пересечения, а квадрика Q_1— парой мнимых точек на прямой T_0.

Расстояние δ между двумя точками X и Y определяется в случае, когда прямая XY не пересекает $(n-m-1)$-плоскость T_0, с помощью соотношения

$$\cos^2\frac{\delta}{\rho}=\frac{(x^0E_0y^0)^2}{(x^0E_0x^0)\,(y^0E_0y^0)},$$

где

$$\boldsymbol{x}^0=(x^a,\ a\leqslant m),$$

$$\boldsymbol{y}^0=(y^b,\ b\leqslant m)$$

— векторы точек X и Y, E_0— линейный оператор, определяющий скалярное произведение в пространстве этих векторов, ρ — действительное число; в случае, когда прямая XY пересекает плоскость T_0, расстояние d между этими точками определяется с помощью разности векторов точек X и Y:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^1-\boldsymbol{x}^1,\quad \boldsymbol{x}^1=(x^a,\ a>m),$$

$$\boldsymbol{y}^1=(y^b,\ b>m),$$

$$d^2=\boldsymbol{a}E_1\boldsymbol{a},$$

где E_1— линейный оператор, определяющий скалярное произведение в пространстве этих векторов.

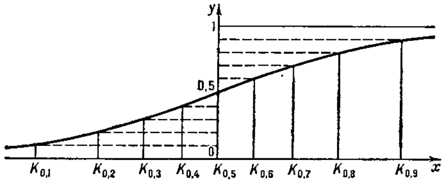
Угол между двумя плоскостями, $(n-2)$-плоскость пересечения к-рых не пересекается с $(n-m-1)$-плоскостью T_0, определяется как (нормированное) расстояние между соответствующими точками в двойственном К. п. S_n^{n-m-1}, координаты к-рых численно равны или пропорциональны проективным координатам плоскостей в пространстве S_n^m. Если $(n-2)$-плоскость пересечения данных двух плоскостей пересекается с $(n-m-1)$-плоскостью T_0, то угол между плоскостями и в этом случае определяется как нормированное расстояние. При $n=2$ углы между плоскостями являются углами между прямыми.

Движениями К. п. S_n^m являются коллинеации этого пространства, переводящие конус Q_0, плоскость T_0 и квадрику Q_1 в себя. Группа движений является группой Ли, а движения описываются ортогональными операторами. В К. п. S_{2m+1}^m, двойственном самому себе, определяются кодвижения — корреляции, переводящие каждые две точки в две $2m$-плоскости, угол между к-рыми пропорционален расстоянию между точками, а каждые две $2m$-плоскости — в две точки, расстояние между к-рыми пропорционально углу между плоскостями. Движения и кодвижения пространства S_{2m+1}^m образуют группу, являющуюся группой Ли. Геометрия 2-плоскости S_2^0 совпадает с геометрией евклидовой, а геометрия 2-плоскости S_2^1— с геометрией коевклидовой плоскости.

Геометрия 3-пространства S_3^1 определяется эллиптической проективной метрикой на прямых, коевклидовой — на плоскостях и евклидовой — в связках плоскостей. Геометрия 3-пространства S_3^0 совпадает с евклидовой, а геометрия 3-пространства S_3^2— с геометрией коевклидова 3-пространства. Пространство S_3^1 с радиусом кривизны $^1/_2$ изометрично связной группе движений евклидовой 2-плоскости со специально введенной метрикой. Связная группа движений К. п. S_3^1 изоморфна прямому произведению двух связных групп движений евклидовой 2-плоскости.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

КВАНТИЛЬ — одна из числовых характеристик *распределения вероятностей*. Для действительной случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ квантилью порядка $p, 0 < p < 1$, наз. число K_p такое, что $F(K_p) \leqslant p, F(K_p+0) \geqslant p$. Если $F(x)$ — непрерывная строго монотонная функция, то K_p — единственное решение уравнения $F(x)=p$, то есть K_p— функция p, обратная функции $F(x)$. Если $F(x)$ непрерывна и $p' > p$, то вероятность неравенства



$K_p < X < K_p{}'$ равна $p'-p$. Квантиль $K_{1/2}$ есть *медиана* случайной величины X. Квантили $K_{1/4}$ и $K_{3/4}$ наз. квартилями, а $K_{0,1}, K_{0,2}, \ldots, K_{0,9}$— децилями. Знание К. для подходяще выбранных значений p позволяет составить представление о виде функции распределения.

Напр., для нормального распределения (рис.)

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

график функции $\Phi(x)$ можно вычертить по децилям: $K_{0,1}=-1,28$; $K_{0,2}=-0,84$; $K_{0,3}=-0,52$; $K_{0,4}=-0,25$; $K_{0,5}=0$; $K_{0,6}=0,25$; $K_{0,7}=0,52$; $K_{0,8}=0,84$; $K_{0,9}=1,28$. Квартили нормального распределения $\Phi(x)$ равны $K_{1/4}=-0,67$; $K_{3/4}=0,67$. *В. В. Сенатов.*

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ — теория релятивистских квантовых систем. Возникновение К. т. п. связано с задачами о взаимодействии вещества с излучением и с попытками построения релятивистской квантовой механики [П. Дирак (P.A.M. Dirac, 1927), В. Гейзенберг (W. Heisenberg), В. Паули (W. Pauli) и др.]. При релятивистских (т. е. больших) энергиях не может быть последовательной квантовой механики частицы, так как релятивистская квантовая частица способна порождать новые (такие же или другие) частицы, а сама — исчезать. Вследствие этого нельзя выделить нек-рое число механич. степеней свободы, связанных с этой частицей, а приходится говорить о системе с переменным, вообще говоря, бесконечным числом степеней свободы. К. т. п. объединяет описание полей и частиц, к-рые в классич. физике выступают как две разные сущности.

Центральную роль в теории играет понятие квантового поля. Удобно пояснить, как оно вводится, на примере электромагнитного поля, так как это единственное поле, имеющее ясное содержание и в классическом и в квантовом случаях.

Классическое электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла. Эти уравнения можно переписать в виде канонических уравнений Гамильтона, так что потенциал поля играет роль координаты, а его производная по времени — импульса в соответствующем фазовом пространстве. Поле представляется как каноническая система с бесконечным числом степеней свободы, так как потенциал в каждой пространственной точке есть независимая координата. Эту систему можно квантовать так же, как обычную механич. систему. В квантовой картине основные понятия — это состояния, описываемые векторами гильбертова пространства, и наблюдаемые, описываемые самосопряженными операторами, действующими в этом пространстве. Квантование состоит в замене канонических координат и импульсов на операторы таким образом, чтобы скобке Пуассона сопоставлялся коммутатор соответствующих операторов. Квантовое поле становится оператором, действующим на векторы состояния и вызывающим переходы между состояниями с различным числом квантовых частиц — фотонов, т. е. описывающим рождение и уничтожение (излучение и поглощение) квантов поля.

Аналогично квантовое поле может быть поставлено в соответствие любым другим фундаментальным частицам. Уравнения для оператора свободного поля получаются из основного требования теории относительности — условия инвариантности относительно *Пуанкаре группы*. Сорт частиц характеризуется массой покоя m, спином, т. е. собственным моментом s, принимающим целые и полуцелые значения, включая нуль, и различными зарядами (электрическим, барионным, лептонным и т. д.). Первые два числа $[m, s]$ определяют неприводимое представление группы Пуанкаре, по к-рому преобразуется поле, а тем самым и уравнения поля.

Свободное классическое скалярное поле $u(x)$ подчиняется уравнению $(x=(x^0, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4)$

$$(\square+m^2)\,u(x)=0, \quad \square=\partial_\mu\partial^\mu=\partial_0^2-\partial_1^2-\partial_2^2-\partial_3^2. \quad (1)$$

Это — вариационное уравнение Эйлера для функционала действия

$$A=\int dx\mathscr{L}_0(u(x))$$

с плотностью лагранжиана

$$\mathscr{L}_0(u(x))=\frac{1}{2}\,\partial_\mu u\partial^\mu u-\frac{m^2}{2}\,u^2.$$

Если рассматривать $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ как каноническую координату, то сопряженный импульс есть $p(\mathbf{x})=$ $=\partial\mathscr{L}_0/\partial\dot{u}(\mathbf{x})=\dot{u}(\mathbf{x})$ (точка означает производную по времени). Квантование выполняется посредством сопоставления функциям $u(x)$, $p(x)$ операторных функций $\varphi(x)$, $\pi(x)$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (квантовой скобке Пуассона)

$$[\varphi(x),\ \pi(x')] = i\hbar\delta(x-x')$$

($\hbar$ — постоянная Планка, далее принимается $\hbar=1$). Оператор Гамильтона имеет вид:

$$H_0 = \int dx\, H_0(\varphi(x),\ \pi(x)) =$$

$$= \int dx \left\{ : \frac{1}{2}\pi^2(x) + \frac{1}{2}(\nabla\varphi(x))^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2(x) : \right\}$$

т. е. H_0 — та же функция квантовых операторов φ и π, что и классич. гамильтониан, с точностью до порядка (не коммутирующих) операторов. Символ :: нормального произведения уточняет этот порядок. Гамильтоновы уравнения движения

$$\dot{\varphi}(x) = i[H_0,\ \varphi(x)],$$

$$\dot{\pi}(x) = i[H_0, \pi(x)]$$

эквивалентны уравнению

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0. \tag{2}$$

Квантовое поле в 4-мерном пространстве-времени необходимо является обобщенной, а не обыкновенной операторнозначной функцией, поэтому $\varphi(x)$ следует понимать только как символическую запись.

Математич. смысл этим символам придается в формализме пространства Фока, представляющего собой реализацию пространства состояний в К. т. п. Состояние одной частицы в заданный момент времени описывается комплексной функцией $\Psi(\boldsymbol{p})$, квадратично интегрируемой по релятивистски инвариантной мере

$$d\sigma(\boldsymbol{p}) = \frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}; \quad \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3,$$

где $\omega(\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{p}^2 + m^2)^{1/2}$ — релятивистская энергия частицы с массой m. Такие функции образуют гильбертово пространство $\mathscr{H} = L^2(d\sigma)$. Система из n тождественных частиц описывается квадратично интегрируемой функцией $\Psi_n(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$, симметричной (для бозонов — частиц с целым спином) или антисимметричной (для фермионов — частиц с полуцелым спином) относительно перестановки любых двух координат. Эти функции (для бозонов) принадлежат гильбертову пространству $\mathscr{F}_n$ — симметризованному тензорному произведению n экземпляров $\mathscr{H}$. Для описания систем с переменным числом частиц вводится прямая сумма пространств $\mathscr{F}_n$ — фоковское пространство $\mathscr{F} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n$, $\mathscr{F}_0 = \mathbb{C}$. Вектор $\Omega_0 = (1,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ наз. **вакуумом** и интерпретируется как состояние системы без частиц. Векторы вида $(0,\ 0,\ \ldots,\ \Psi_n,\ 0,\ \ldots)$ наз. **частичными векторами** и отождествляются с Ψ_n. Удобно рассматривать функции $\Psi(\boldsymbol{p})$ из $\mathscr{H}$ как функции 4-вектора $p = (p_0, \boldsymbol{p})$, где $p_0 = \omega(\boldsymbol{p})$. Тогда представление группы Пуанкаре $U(a,\ \Lambda)$ дается формулой

$$(U(a,\ \Lambda)\Psi)(p) = e^{-i(p,\,a)}\Psi(\Lambda^{-1}p),$$

где $(p, a) = p_\mu a^\mu = p^0 a^0 - \boldsymbol{p}\boldsymbol{a}$ — лоренц-инвариантная билинейная форма. Представление, заданное в $\mathscr{H}$, естественным образом индуцирует представление во всем фоковском пространстве $\mathscr{F}$. Генератор сдвигов вдоль оси p_0 совпадает с гамильтонианом H_0. Здесь описано простейшее представление группы Пуанкаре, соответствующее спину $s=0$.

Различные операторы в фоковском пространстве выражаются через операторы рождения и уничтожения. Пусть $f(\boldsymbol{p})$ — одночастичная волновая функция (т. е.

$f\in\mathscr{H}$). Тогда оператор уничтожения $a(f):\mathscr{F}_n\to\mathscr{F}_{n-1}$ определяется по формуле

$$(a(f)\Psi_n)(\boldsymbol{p}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{p}_{n-1})=$$
$$=\sqrt{n}\int\Psi_n(\boldsymbol{p}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{p}_n)\,f(\boldsymbol{p}_n)\,d\sigma(\boldsymbol{p}_n),$$

а оператор рождения $a^*(f):\mathscr{F}_{n-1}\to\mathscr{F}_n$ — как ему сопряженный. В частности, $a^*(f)\Omega_0=(0,\ f(\boldsymbol{p}),\ 0,\ \ldots)$, т. е. оператор $a^*(f)$ рождает из вакуума частицу с волновой функцией $f(\boldsymbol{p})$, а $a(f)\Omega_0=0$. Операторы рождения и уничтожения принято записывать в символическом виде

$$a(f)=\int a(\boldsymbol{p})\,f(\boldsymbol{p})\,d\sigma(\boldsymbol{p}),\qquad a^*(f)=\int a^*(\boldsymbol{p})\,f(\boldsymbol{p})\,d\sigma(\boldsymbol{p}).$$

Фурье-преобразование суммы операторов рождения и уничтожения $\varphi(f)=a(\tilde{f})+a^*(\tilde{\bar{f}})$ является для действительных $f\in L^2(R^3_x)$ симметрическим оператором и наз. свободным (скалярным) квантовым полем в нулевой момент времени. Квантовое поле в момент времени x^0 имеет вид

$$\varphi(x^0,\ f)=e^{ix^0H_0}\varphi(f)\,e^{-ix^0H_0}$$

и как операторная обобщенная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на своей области определения уравнению (2) и каноническим коммутационным соотношениям

$$[\varphi(f),\ \pi(g)]=i\int f(x)\,g(x)\,dx. \tag{3}$$

Таким образом, в фоковском пространстве реализуется каноническое квантование, описанное выше.

Теория свободного квантового поля может быть изложена математически строго и последовательно. Для взаимодействующих полей положение иное. Хотя в К. т. п. и получен целый ряд важных результатов по проблемам, допускающим корректную математическую постановку, но до сих пор не решена принципиальная задача обоснования теории взаимодействующих полей: не построено нетривиального примера, удовлетворяющего всем физич. требованиям. Конкретные физич. расчеты опираются на эвристическую схему К. т. п., в основе к-рой в большинстве случаев лежит теория возмущений. Уравнение для взаимодействующего поля содержит нелинейный член — $j(\Phi(x))$:

$$(\Box+m^2)\,\Phi(x)=j\,(\Phi(x)). \tag{4}$$

Это уравнение, так же как (1), может быть получено как вариационное уравнение для $\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_{\text{int}}$, причем

$$j\,(\Phi(x))=\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{int}}}{\partial\Phi(x)}.$$

Лагранжиан взаимодействия $\mathscr{L}_{\text{int}}(\Phi)$ выбирается в виде нелинейной инвариантной комбинации полей, участвующих во взаимодействии, и их производных. В простейшем случае скалярного поля, взаимодействующего с самим собой, $\mathscr{L}_{\text{int}}=-\lambda\Phi^4(x)$. При $\lambda=0$ получается свободное поле. Взаимодействующее квантовое поле $\Phi(x)$ можно явно выразить через начальные данные $\Phi(x)$ и $\Pi(x)=\dot{\Phi}(x)$ по формуле

$$\Phi(x)=e^{ix^0H}\,\Phi(x)\,e^{-ix^0H},$$

где, однако, в экспоненте стоит уже полный гамильтониан

$$H=H_0+H_{\text{int}}=\int dx\,\left\{H_0(\Phi(x),\ \Pi(x))+\lambda{:}\Phi^4(x){:}\right\}.$$

Выбирая в качестве начальных данных значения свободного поля $\varphi(x)$ и $\pi(x)$, можно выразить решение нелинейного уравнения (4) через операторы рождения и уничтожения $a^*(\boldsymbol{p})$ и $a(\boldsymbol{p})$ свободных частиц.

В этой схеме приходится вводить в рассмотрение невзаимодействующие частицы и рассматривать взаимодействие как дополнительный фактор, к-рый в последовательном изложении приходится «включать» и «выключать» с помощью специальной адиабатической процедуры (см. [5]). Между тем взаимодействие может весьма заметно менять спектр и другие характеристики рассматриваемых полей. В стандартных методах считается, что полю Φ отвечает именно та частица, к-рая проявляется в линеаризованном уравнении. Только для достаточно слабого взаимодействия типа $\lambda\Phi^4$ можно доказать, что это так. Однако и в теории возмущений спектр, вообще говоря, меняется. Собственный вектор Ω, отвечающий минимальному собственному значению дискретного спектра H (точнее, следовало бы говорить об операторе массы) наз. перенормированным вакуумом и интерпретируется как состояние без частиц. Собственные значения, отвечающие остальным точкам дискретного спектра, называются перенормированными одночастичными состояниями (обычно считается, что имеется одно такое состояние). Оно отличается от состояния $a^*(f)\Omega_0$ и имеет массу M, отличную от затравочной массы m.

Прямое применение теории возмущений дает бессмысленные расходящиеся выражения (так наз. «ультрафиолетовые расходимости»). Если регуляризацию этих расходимостей проводить в соответствии с физическими принципами (главным условием оказалась релятивистская и калибровочная инвариантность всей процедуры), то весь произвол (в электродинамике) сводится к формально бесконечной перенормировке массы и заряда электрона, как было показано в 1948 Ю. Швингером (J. Schwinger), Р. Фейнманом (R. P. Feynman) и Ф. Дайсоном (F. J. Dyson).

Окончательную формулировку и строгий математич. анализ К. т. п. в рамках теории возмущений дал Н. Н. Боголюбов (1951—55). Он указал, что ультрафиолетовые расходимости в теории возмущений появляются вследствие перемножения обобщенных функций в точках, где их носители пересекаются, и сформулировал такой способ их перемножения, при к-ром выполняются физич. требования релятивистской инвариантности, причинности и др. В практич. расчетах теория возмущений применяется не непосредственно к уравнению (4), а к различным другим объектам, к-рые могут быть из него получены, напр. к S-матрице (см. *Рассеяния матрица*) или к функциям Грина. Вычисление S-матрицы является одной из главных задач в физике элементарных частиц. Ее матричные элементы просто выражаются через функции Грина поля $\Phi(x)$:

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = (\Omega, T(\Phi(x_1) \ldots \Phi(x_n))\,\Omega),$$

где $T(\ldots)$ — символ хронологического упорядочения

$$T(\Phi(x_1) \ldots \Phi(x_n)) = \Phi(x_{i_1}) \ldots \Phi(x_{i_n}), \text{ если}$$

$$x^0_{i_1} \geqslant x^0_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant x^0_{i_n}.$$

Разлагая G_n в ряд по степеням $\mathscr{L}_{\text{int}}$, используя, напр., представление для G_n в виде функционального интеграла

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \frac{1}{C}\int u(x_1) \ldots u(x_n)\, e^{i\int (\mathscr{L}_0(u(x)) + \mathscr{L}_{\text{int}}(u(x))\,dx} \Pi_x du(x), \quad (5)$$

можно выразить ее в каждом порядке теории возмущений через интегралы от произведений простейших функций Грина свободного поля

$$D(x_1 - x_2) = (\Omega_0, T(\varphi(x_1)\varphi(x_2))\,\Omega_0) = \\ = \frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{i(p,\, x_1 - x_2)}}{(p,\, p) - m^2 + i0}\,dp.$$

Для вычислений по теории возмущений разработана техника диаграмм Фейнмана. При этом возникают произведения функций Грина $D(x)$ в совпадающих точках. Напр., функция $G_2(x_1, x_2)$ для модели $\mathscr{L}_{\text{int}}= =-\lambda\Phi^4$ во втором порядке по λ пропорциональна выражению

$$\int dy_1\, dy_2 D(x_1-y_1)\, D^3(y_1-y_2)\, D\,(y_2-x_2). \qquad (6)$$

Этот интеграл расходится, однако его можно регуляризовать, т. е. сопоставить ему нек-рое осмысленное выражение. Прежде всего следует придать смысл произведению обобщенных функций $D^3(x)$. Это можно сделать следующим образом. Рассматривается сглаженная функция

$$D_{\varkappa,\,\varepsilon}(x)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{i(p,\,x)}\rho_{\varkappa}((p,\,p))}{(p,\,p)-m^2+i\varepsilon}\,dp,$$

где $\varepsilon>0$, а $\rho_{\varkappa}(\xi)$ — такая функция, что $D_{\varkappa,\varepsilon}(x)$ — достаточно гладкая, напр., $\rho_{\varkappa}(\xi)=(1+\xi/\varkappa)^{-N}$, $N>2$ и $D_{\varkappa,\varepsilon}(x)\to D(x)$ при $\varkappa\to\infty$, $\varepsilon\to 0$ ($\varkappa$ — называется ультрафиолетовым обрезанием). Можно считать, что лагранжиан $\mathscr{L}$ в (5) заменен на

$$\mathscr{L}^{(\varkappa)}=\frac{1}{2}\,\partial_{\mu}u\rho\,(\Box)\,\partial^{\mu}u-\frac{m^2}{2}\,u^2-\lambda u^4.$$

Найдутся такие константы $a_{\varkappa}$ и $b_{\varkappa}$ (расходящиеся при $\varkappa\to\infty$), что в смысле обобщенных функций существует предел

$$D^3_{\text{reg}}(x)=\lim_{\varkappa\to\infty}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0} D^3_{\varkappa,\,\varepsilon}(x)-a_{\varkappa}\Box\,\delta(x)-b_{\varkappa}\delta(x)\right\}.$$

Функция $D^3{}_{\text{reg}}(x)$ и является регуляризацией $D^3(x)$. Она определяется с точностью до слагаемых $a\Box\delta(x)+ +b\delta(x)$, где a и b — произвольные константы. Таким же образом регуляризуется и все выражение (6), при этом нового произвола не появляется. Аналогично регуляризуются все функции Грина во всех порядках теории возмущений по λ. Подобную процедуру можно провести для $\mathscr{L}_{\text{int}}$, равного любому полиному. Для $\mathscr{L}_{\text{int}}=-\lambda\Phi^4$ процедуру регуляризации можно провести самосогласованно во всех порядках теории возмущений по λ в следующем смысле. Существуют такие константы $A_{\varkappa}$, $B_{\varkappa}$, $C_{\varkappa}$ (представимые в виде рядов по λ степени два и выше; для их вычисления разработаны простые правила), что при подстановке в (5) вместо лагранжиана $\mathscr{L}^{(\varkappa)}$ — перенормированного лагранжиана

$$\mathscr{L}^{(\varkappa)}_{\text{ren}}=\mathscr{L}^{(\varkappa)}+:A_{\varkappa}\,\partial_{\mu}u\partial^{\mu}u+B_{\varkappa}u^2+C_{\varkappa}u^4:$$

в каждом порядке разложения в ряд по λ при $\varkappa\to\infty$ получаются конечные выражения. $\mathscr{L}^{(\varkappa)}_{ren}$ называется перенормированным лагранжианом, и говорят, что к исходному $\mathscr{L}$ добавлены расходящиеся контрчлены. Эти контрчлены имеют ту же структуру, что и исходный лагранжиан (т. е. являются линейной комбинацией выражений $\partial_{\mu}u\partial^{\mu}u$, u^2, u^4). Вследствие этого неоднозначность в величинах $A_{\varkappa}$, $B_{\varkappa}$, $C_{\varkappa}$ можно фиксировать, если считать заданными массу и заряд системы (масса определяется как значение p^2, при к-ром $\tilde{G}_2(p^2)$ имеет полюс, а заряд — как значение $\tilde{G}_4$ в нек-рой определенной точке). Анализ этой неоднозначности приводит к важному понятию ренормализационной группы [5].

Если в данной модели возможно устранить ультрафиолетовые расходимости с помощью добавления контрчленов той же структуры, что и исходный лагранжиан, то такая модель называется перенормируемой; в противном случае — неперенормируемой. Все модели скалярного поля, взаимодействие в к-рых есть полином степени выше четвертой — неперенормируемы. Это относится только к теории возмущений. Последовательная формулировка описанного способа отделения «бесконечностей», возникающих при перемножении сингулярных обобщенных функций во всех порядках теории возмущений, составляет содержание так наз. теоремы об «R-операции» Н. Н. Боголюбова и О. С. Парасюка (1956) [5], [19]. Тем самым была доказана теорема существования квантовой теории взаимодействующих полей во всех порядках теории возмущений. Последующие исследования показали, что ряд теории возмущений является в лучшем случае асимптотическим, и оценки на его основе применимы только при не слишком больших энергиях участвующих в процессе частиц. Устранение ультрафиолетовых расходимостей удается последовательно провести только в рамках теории возмущений.

Все вышесказанное относилось к реальному четырехмерному пространству-времени. В трехмерном пространстве-времени взаимодействие становится менее сингулярным и можно ограничиться добавлением контрчлена $B_\varkappa : u^2$, причем $B_\varkappa$ имеет второй порядок по λ. В двумерном пространстве-времени контрчлены не нужны.

Здесь описана только простейшая модель скалярного поля с взаимодействием $\lambda\Phi^4$. В К. т. п. имеют дело с более сложными многокомпонентными системами взаимодействующих ферми- и бозе-полей. Напр., киральные поля уже на классич. уровне принимают значения в нек-рых не обязательно линейных однородных пространствах (напр., на сфере); калибровочные поля являются связностями в нек-рых векторных расслоениях — к ним относятся электромагнитное поле, гравитационное поле и поле Янга — Миллса (см. [11], [15]).

Метод возмущений не применим в тех случаях, когда константа взаимодействия — основной параметр разложения — заведомо больше единицы, как для сильных ядерных взаимодействий мезонов и нуклонов. Для сильных взаимодействий пользуются другими методами, в к-рых существенную роль играют рассмотрение S-матрицы в целом и изучение общих свойств ее матричных элементов, прямо описывающих интересные для опыта величины — амплитуды процессов рассеяния и рождения. При этом квантовые поля (или токи), к-рые могут быть выражены через S-матрицу, играют важную роль, поскольку на S-матрицу накладывается центральное условие причинности (Н. Н. Боголюбов, 1955) как ограничение на носитель определенных матричных элементов S-матрицы. Вместе с другими физич. требованиями, такими, как релятивистская инвариантность и характер энергетического спектра, условие причинности позволяет установить свойства голоморфности обобщенных функций — амплитуд рассеяния как функций нескольких комплексных переменных. Эти аналитич. свойства оказываются достаточными для вывода специального рода интегральных представлений для амплитуды рассеяния — «дисперсионных соотношений». Строгое доказательство дисперсионных соотношений [4] потребовало развития специальных математич. методов, лежащих на стыке теории обобщенных функций и теории функций многих комплексных переменных и, в частности, доказательства теоремы об острие клина Н. Н. Боголюбова и о C-выпуклой оболочке В. С. Владимирова [8]. Дисперсионные соотношения стали основой большей части конкретных методов расчета в теории сильных взаимодействий [А. А. Логунов, С. Мандельстам (S. Mandelstam) и др.]. Они примыкают к так наз. аксиоматической теории поля, в к-рой выясняются совместность аксиом и их следствия, касающиеся вопросов существования и свойств квантовых полей.

Метод теории возмущений предполагает, что для уравнения (4), решением к-рого является квантовое поле

$\Phi(x)$, выбираются простейшие начальные данные φ, π, заданные в фоковском пространстве свободных частиц. Существует много унитарно неэквивалентных реализаций (представлений) коммутационных соотношений (3), и в этом состоит отличие К. т. п. как системы с бесконечным числом степеней свободы от квантовой механики, где имеется теорема Неймана о единственности этих представлений. Для физики интересны любые реализации начальных данных, для к-рых уравнение (4) имеет решения $\Phi(x)$, и гамильтониан H ограничен снизу. Гильбертово пространство, в к-ром реализовано такое представление, наз. сектором. Нек-рые модели могут иметь по нескольку фаз (фаза — сектор с единственным вакуумом), напр., $\lambda\Phi^4$-модель имеет при достаточно больших λ две фазы — происходит фазовый переход. При построении фаз применяется *квазисредних метод*. Представление о фазовом переходе и связанном с ним явлении спонтанного нарушения симметрии сыграло важную роль в частности в единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий. В 1974 было показано, что в нек-рых двумерных моделях имеются так наз. солитонные сектора, в к-рых вакуум отсутствует, но к-рые имеют богатый спектр частиц, аналогичный спектру частиц соответствующей классич. модели (Л. Д. Фаддеев и др.).

В К. т. п. имеется много задач, требующих для своего решения методов из различных областей математики, в настоящее время интенсивно исследуемых. Условно их можно разбить на следующие группы.

1) Анализ аксиом и их следствий для квантовых полей и S-матрицы. Помимо средств функционального анализа — теории самосопряженных операторов, обобщенных функций, представлений групп,— здесь используются методы теории функций многих комплексных переменных, C^*-алгебры и алгебры Неймана, в последнее время — методы теории вероятностей. Основные величины — функции Грина или функции Уайтмана $w_n(x_1, \ldots, x_n)$ — являются граничными значениями функций, голоморфных в некоторых областях $D_n \subset \mathbb{C}^{4n}$. Нерешенная задача здесь — построение оболочек голоморфности $\mathscr{H}(D_n)$. Область D_n содержит евклидовы точки вида $(ix_1^0, \boldsymbol{x}_1, ix_2^0, \boldsymbol{x}_2, \ldots)$. Для ряда моделей в двух- и трехмерном пространстве-времени доказано, что значения функций Уайтмана в этих точках являются моментами вероятностной меры. Заслуживает внимания дальнейший анализ такого евклидова подхода к К. т. п. с точки зрения теории вероятностей.

Имеется общий алгебраич. подход к теории поля, при к-ром в основу теории кладутся алгебры наблюдаемых — т. е. C^*-алгебры или алгебры Неймана, наделенные нек-рыми естественными с физич. точки зрения структурными свойствами. Здесь одна из основных задач состоит в анализе связи между алгебрами полей и алгебрами наблюдаемых, а также задача об описании динамики в рамках этого подхода.

2) Конструктивная К. т. п. имеет важнейшей задачей доказательство существования моделей К. т. п. в 4-мерном пространстве-времени. В двух- и трехмерном случае существование ряда моделей доказано на основе евклидова (вероятностного) подхода с применением методов, развитых по аналогии со статистической механикой; здесь требуется дальнейший математич. анализ таких вопросов, как спектр гамильтониана, фазовые переходы, свойства S-матрицы и др.

3) В формальной К. т. п., существование к-рой известно в каждом порядке теории возмущений, также имеется ряд проблем, допускающих математич. формулировку. Сюда относятся, напр., анализ рядов теории возмущений (в частности, аналитич. свойства диаграмм Фейнмана), изучение классич. уравнений теории поля

и квазиклассических поправок к ним — здесь возникают нелинейные уравнения эллиптического и гиперболического типов, для анализа к-рых применяются, в частности, метод обратной задачи рассеяния, методы дифференциальной и алгебраической геометрии и топологии, и др.

Лит.: [1] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, 3 изд., М., 1969; [2] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965; [3] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода к квантовой теории поля, М., 1969; [4] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958; [5] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 3 изд., М., 1976; [6] Вайтман А., Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей, пер. с англ., М., 1968; [7] Васильев А. Н., Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, Л., 1976; [8] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [9] Йост Р., Общая теория квантованных полей, пер. с англ., М., 1967; [10] Конструктивная теория поля, пер. с англ., М., 1977; [11] Попов В. Н., Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, М., 1976; [12] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1977, т. 2, М., 1978; [13] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [14] Сигал И., Математические проблемы релятивистской физики, пер. с англ., М., 1968; [15] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в теорию калибровочных полей, М., 1978; [16] Стритер Р., Вайтман А., РСТ, спин и статистика и все такое, пер. с англ., М., 1966; [17] Фам Ф., Введение в топологическое исследование особенностей Ландау, пер. с франц., М., 1970; [18] Фридрихс К., Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, пер. с англ., М., 1969; [19] Хепп К., Теория перенормировок, пер. с франц., М., 1974; [20] Шварц А. С., Математические основы квантовой теории поля, М., 1975; [21] Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, пер. с англ., М., 1963; [22] Квантовая теория калибровочных полей, пер. с англ., М., 1977.

И. В. Волович, М. К. Поливанов.

КВАНТОР — общее название для логических операций, к-рые по предикату $P(x)$ строят высказывание, характеризующее область истинности предиката $P(x)$. В математич. логике наиболее употребительны квантор всеобщности $\forall$ и квантор существования $\exists$. Высказывание $\forall x P(x)$ означает, что область истинности предиката $P(x)$ совпадает с областью значений переменной x. Высказывание $\exists x P(x)$ означает, что область истинности предиката $P(x)$ непуста. Если интересуются поведением предиката $P(x)$ не на всей области значений переменной x, а лишь на ее части, выделяемой предикатом $R(x)$, то часто употребляют так наз. ограниченные кванторы $(\exists x)_{R(x)}$ и $(\forall x)_{R(x)}$, при этом высказывание $(\exists x)_{R(x)} P(x)$ означает то же, что и $\exists x (R(x) \& P(x))$, a $(\forall x)_{R(x)} P(x)$ — то же, что $\forall x (R(x) \supset P(x))$, где $\&$ — знак *конъюнкции*, $\supset$ — знак *импликации*.

В. Е. Плиско.

КВАРТИЛЬ в теории вероятностей — частный случай *квантили*. К. наз. квантили K_p, соответствующие значениям p, равным $^1/_4$ (нижняя К.) и $^3/_4$ (верхняя К.).

КВАТЕРНАРНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА — квадратичная форма от четырех переменных. К. к. ф. над полем F связаны с алгебрами *кватернионов* над тем же полем, а именно, алгебре с базисом $[1, i_1, i_2, i_3]$, $i_1^2 = -a_1 \in F$, $i_2^2 = -a_2 \in F$, $i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3$ отвечает К. к. ф.— норма кватерниона,

$$q(x_0, x_1, x_2, x_3) = N(x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3) = \\ = x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2.$$

Для К. к. ф., отвечающих кватернионным алгебрам, и только для таких определена композиция квадратичных форм:

$$q(x)\, q(y) = q(z),$$

где координаты вектора z суть билинейные формы от x и y. Композиция возможна лишь для квадратичных форм от двух, четырех и восьми переменных.

А. В. Малышев.

КВАТЕРНАРНАЯ ФОРМА — форма от четырех переменных, т. е. однородный многочлен от четырех неизвестных с коэффициентами из заданного коммутативного кольца с единицей. *О. А. Иванова.*

КВАТЕРНИОН — *гиперкомплексное число*, геометрически реализуемое в четырехмерном пространстве. Система К. предложена в 1843 У. Гамильтоном (W. Hamilton). К. явились исторически первым примером гиперкомплексной системы, возникшей при попытках найти обобщение комплексных чисел. Комплексные числа изображаются геометрически точками плоскости, и действия над ними соответствуют простейшим геометрич. преобразованиям плоскости. Из точек пространства трех и выше измерений нельзя «устроить» числовую систему, подобную полю действительных или комплексных чисел. Однако, если отказаться от коммутативности умножения, то из точек 4-мерного пространства можно устроить числовую систему (в пространстве трех, пяти и выше измерений нельзя построить даже такую систему).

К. образуют 4-мерную алгебру над полем действительных чисел с базой 1, i, j, k («базисные единицы») и следующей таблицей умножения «базисных единиц»:

$$\begin{array}{llll} 1\cdot 1=1 & 1\cdot i=i & 1\cdot j=j & 1\cdot k=k \\ i\cdot 1=i & i\cdot i=-1 & i\cdot j=k & i\cdot k=-j \\ j\cdot 1=j & j\cdot i=-k & j\cdot j=-1 & j\cdot k=i \\ k\cdot 1=k & k\cdot i=j & k\cdot j=-i & k\cdot k=-1. \end{array}$$

Всякий К. может быть записан в виде

$$X=x_0\cdot 1+x_1 i+x_2 j+x_3 k$$

или (поскольку 1 играет роль обычной единицы и в записи К. может быть опущена) в виде

$$X=x_0+x_1 i+x_2 j+x_3 k.$$

Различаются с к а л я р н а я ч а с т ь К. x_0 и в е к т о р н а я ч а с т ь

$$V=x_1 i+x_2 j+x_3 k,$$

так что $X=x_0+V$. Если $x_0=0$, то кватернион V наз. вектором, и он может отождествляться с обычным 3-мерным вектором, поскольку умножение в алгебре К. двух таких векторов V_1 и V_2 связано со скалярным (V_1, V_2) и векторным $[V_1, V_2]$ произведениями векторов V_1 и V_2 в 3-мерном пространстве формулой

$$V_1 V_2=-(V_1, V_2)+[V_1, V_2].$$

Это показывает тесную связь К. с векторным исчислением. Исторически последнее и возникло из теории К.

Всякому К. $X=x_0+V$ сопоставляется с о п р я ж е н н ы й к в а т е р н и о н $\overline{X}=x_0-V$, при этом

$$X\cdot\overline{X}=\overline{X}\cdot X=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2.$$

Это действительное число наз. н о р м о й к в а т е р н и о н а X и обозначается $N(X)$. Норма К. удовлетворяет соотношению

$$N(XY)=N(X)N(Y).$$

Любое вращение 3-мерного пространства вокруг начала координат может быть задано при помощи кватерниона P с нормой 1. Вращение, соответствующее P, переводит вектор $X=x_1 i+x_2 j+x_3 k$ в вектор $Y=y_1 i+$ $+y_2 j+y_3 k=PXP^{-1}$.

Алгебра К. является единственной ассоциативной, но не коммутативной, конечномерной нормированной алгеброй над полем действительных чисел, обладающей единицей. Алгебра *К.— тело*, т. е. в ней определено деление, причем К., обратным к К. X, является $\frac{1}{N(X)}\overline{X}$. Тело К. единственная конечномерная действительная ассоциативная, но не коммутативная алгебра без делителей нуля (см. также *Фробениуса теорема*).

Лит.: [1] Калужнин Л. А., Введение в общую алгебру, М., 1973; [2] Кантор И. Л., Солодовников А. С., Гиперкомплексные числа, М., 1973; [3] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973. *Н. Н. Вильямс.*

КВАТЕРНИОННАЯ СТРУКТУРА — 1) К. с. на вещественном векторном пространстве V — структура модуля над телом кватернионов $\mathbb{H}$, т. е. подалгебра H алгебры $\operatorname{End} V$ эндоморфизмов пространства V, порожденная двумя антикоммутирующими *комплексными структурами* J_1, J_2 на пространстве V. Эндоморфизмы J_1, J_2 наз. стандартными образующими К. с. H, а определяемый ими базис $\{id, J_1, J_2, J_3=J_1J_2\}$ алгебры H — стандартным базисом. Стандартный базис определен с точностью до автоморфизмов алгебры H. Алгебра H изоморфна алгебре *кватернионов*. Автоморфизм A векторного пространства V наз. автоморфизмом К. с., если индуцированное им преобразование $\operatorname{Ad} A$ пространства автоморфизмов сохраняет H, т. е. $(\operatorname{Ad} A)H=AHA^{-1}=H$. Если при этом на H индуцируется тождественный автоморфизм, то A наз. специальным автоморфизмом К. с. Группа всех специальных автоморфизмов К. с. изоморфна полной линейной группе $GL(m, \mathbb{H})$ над телом $\mathbb{H}$, при этом $4m=\dim V$. Группа всех автоморфизмов К. с. изоморфна прямому произведению с объединенной подгруппой группы $GL(m, \mathbb{H})$ и группы единичных кватернионов $H_1\approx \operatorname{Sp}(1)$.

2) К. с. на дифференцируемом многообразии — поле кватернионных структур на касательных пространствах, т. е. подрасслоение $\pi: H\to M$ расслоения $\operatorname{End} T(M)\to M$ эндоморфизмов касательных пространств, слой $\mathscr{H}_p=\pi^{-1}(p)$ к-рого суть К. с. на касательном пространстве T_pM для любого $p\in M$. Специальной К. с. наз. пара антикоммутирующих почти комплексных структур J_1, J_2 на многообразии M. Она порождает К. с. H, где

$$H_p=\{J=\lambda_0 id+\lambda_1J_1+\lambda_2J_2+\lambda_3J_1J_2,\ \lambda_i\in\mathbb{R}\}.$$

К. с. H на многообразии M порождается нек-рой специальной К. с. тогда и только тогда, когда расслоение $H\to M$ тривиально. К. с. на многообразии можно рассматривать как $\operatorname{Sp}(1)\cdot GL(m, \mathbb{H})$-структуру, а специальную К. с.— как $GL(m, \mathbb{H})$-структуру в смысле теории G-структур. Отсюда следует, что для существования на многообразии M нек-рой К. с. (специальной К. с.) необходимо и достаточно, чтобы структурная группа его касательного расслоения редуцировалась к группе $\operatorname{Sp}(1)\cdot\operatorname{Sp}(m)$ (соответственно, $\operatorname{Sp}(m)$). Первое продолжение специальной К. с., рассматриваемой как $GL(m, \mathbb{H})$-структура, есть e-структура (поле реперов), к-рая определяет каноническую линейную связность, ассоциированную со специальной К. с. Обращение в нуль кривизны и кручения этой связности является необходимым и достаточным условием того, чтобы специальная К. с. была локально эквивалентна стандартной плоской специальной К. с. на векторном пространстве $\mathbb{R}^{4m}$.

Аналогом кэлерова многообразия для К. с. служит кватернионное риманово многообразие. Оно определяется как риманово многообразие M размерности $4m$, группа голономии Γ к-рого содержится в группе $\operatorname{Sp}(1)\cdot\operatorname{Sp}(m)$. Если $\Gamma\subset\operatorname{Sp}(m)$, то кватернионное риманово многообразие наз. специальным, или кватернионным кэлеровым, многообразием и при $m>1$ имеет нулевую кривизну Риччи. Кватернионное риманово многообразие можно охарактеризовать как риманово многообразие M, в к-ром существует К. с. H, инвариантная относительно параллельного переноса Леви-

Чивиты. Аналогично, специальное кватернионное риманово многообразие есть риманово многообразие, в к-ром существует специальная К. с. (J_1, J_2), инвариантная относительно параллельных переносов Леви-Чивиты: $\nabla J_1 = \nabla J_2 = 0$, где ∇ — оператор ковариантной производной связности Леви-Чивиты.

В кватернионном римановом многообразии существует каноническая параллельная 4-форма, к-рая определяет ряд операторов в кольце $\Lambda(M)$ дифференциальных форм на M, перестановочных с оператором Бельтрами — Лапласа (оператор внешнего умножения, операторы свертки). Это позволяет построить содержательную теорию гармонических дифференциальных форм на кватернионных римановых многообразиях [2], аналогичную теории Ходжа на кэлеровых многообразиях, и получить оценки для чисел Бетти многообразия M. Все однородные специальные кватернионные римановы многообразия исчерпываются локально евклидовыми пространствами. Примером однородного кватернионного риманова многообразия, не являющегося специальным, служит кватернионное проективное пространство, а также другие симметрич. пространства Вольфа, к-рые находятся во взаимно однозначном соответствии с простыми компактными группами Ли без центра. Ими исчерпываются все компактные однородные кватернионные римановы многообразия. Широкий класс некомпактных несимметрических однородных кватернионных римановых многообразий строится с помощью модулей над алгеброй Клиффорда (см. [5]).

Лит.: [1] Chern S. S., в кн.: Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz, N. Y., 1957, p. 103—21; [2] Kraines V. Y., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1966, v. 122, p. 357—67; [3] Jano K., Ako M., «J. of diff. geom.», 1973, v. 8, № 3, p. 341—47; [4] Sommese A. J., «Math. Ann.», 1975, Bd 212, S. 191—214; [5] Алексеевский Д. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1975, т. 39, № 2, с. 315—62; [6] Wolf J. A., «J. Math. and Mech.», 1965, v. 14, № 6, p. 1033—47; [7] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 37—123.

Д. В. Алексеевский.

КВАТЕРНИОНОВ ГРУППА — метабелева 2-группа порядка 8, задаваемая в образующих x, y определяющими соотношениями

$$x^4 = x^2 y^2 = xy\, xy^{-1} = 1.$$

К. г. может быть изоморфно вложена в мультипликативную группу алгебры *кватернионов* (вложение определяется соответствием $x \to i$, $y \to j$). Более того, алгебра кватернионов является *групповой алгеброй* К. г. над полем действительных чисел. Соответствие

$$x \longrightarrow \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad y \longrightarrow \begin{Vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{Vmatrix}$$

задает точное представление К. г. матрицами 2-го порядка с комплексными элементами.

Обобщенная группа кватернионов (частным случаем к-рой при $n=2$ является К. г.) — группа, задаваемая в образующих x и y определяющими соотношениями

$$x^{2^n} = x^{2^{n-1}} y^2 = xy\, xy^{-1} = 1$$

(где n — фиксированное число). Эта группа является 2-группой порядка 2^{n+1} и класса нильпотентности n.

К. г. является *гамильтоновой группой* и минимальной гамильтоновой группой в том смысле, что любая гамильтонова группа содержит подгруппу, изоморфную К. г. Пересечение всех неединичных подгрупп К. г. (а также любой обобщенной К. г.) является неединичной подгруппой. Всякая некоммутативная конечная группа, обладающая этим же свойством, будет одной из обобщенных К. г. Среди конечных абелевых групп таким свойством обладают циклические p-группы и только они. Обобщенные К. г. и циклические p-группы являются единственными p-группами, допускающими собственный L-гомоморфизм, т. е. гомоморфизм решеток подгрупп на нек-рую решетку L, не являющийся изоморфизмом.

Иногда термин «К. г.» используется для обозначения различных подгрупп мультипликативной группы алгебры кватернионов и соответствующих топологич. групп.

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

Н. Н. Вильямс.

КЁБЕ ТЕОРЕМА — 1) К. т. покрытия: существует абсолютная постоянная $K>0$ (постоянная Кёбе) такая, что если $f\in S$ (S — класс функций $f(z)=z+\ldots$, регулярных и однолистных в $|z|<1$), то множество значений функции $w=f(z)$ при $|z|<1$ заполняет круг $|w|<K$, причем K — наибольшее из чисел, для к-рых это справедливо. Л. Бибербах (L. Bieberbach, 1916) доказал, что $K={}^1/_4$ и что на окружности $|w|={}^1/_4$ только в том случае имеются точки, не принадлежащие образу круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$, если

$$f(z)=z\,(1+e^{i\alpha}z)^{-2},$$

где α — действительное число. К. т. покрытия иногда формулируют так: если функция $w=f(z)$, $f(0)=0$, регулярна и однолистна в $|z|<1$ и отображает круг $|z|<1$ на область, не содержащую точку c, то $|f'(0)|\leqslant 4c$.

2) К. т. искажения. а) Существуют такие положительные числа $m_1(r)$, $M_1(r)$, зависящие только от r, что для $f\in S$, $|z|=r$ имеют место неравенства:

$$m_1(r)\leqslant|f(z)|\leqslant M_1(r).$$

б) Существует число $M(r)$, зависящее только от r и такое, что для $f\in S$, $|z_1|\leqslant r$, $|z_2|\leqslant r$ справедливы неравенства:

$$\frac{1}{M(r)}\leqslant\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right|\leqslant M(r).$$

Эту теорему можно также сформулировать следующим образом: существуют положительные числа $m_2(r)$, $M_2(r)$, зависящие только от r и такие, что для $f\in S$, $|z|\leqslant r$

$$m_2(r)\leqslant|f'(z)|\leqslant M_2(r).$$

Л. Бибербах показал, что наилучшие границы в К. т. искажения таковы:

$$m_1(r)=\frac{r}{(1+r)^2},\quad M_1(r)=\frac{r}{(1-r)^2},$$

$$m_2(r)=\frac{1-r}{(1+r)^3},\quad M_2(r)=\frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

3) К. т. об отображении конечно связных областей на канонические области. а) Всякую n-связную область B плоскости z можно однолистно отобразить на круговую область (т. е. на область, ограниченную конечным числом полных окружностей без общих точек, причем нек-рые из них могут вырождаться в точки) плоскости ζ. Среди этих отображений существует только одно нормированное отображение, переводящее заданную точку $z=a\in B$ в $\zeta=\infty$ и такое, что разложение отображающей функции в окрестности $z=a$ имеет вид

$$\frac{1}{z-a}+\alpha_1(z-a)+\ldots\quad\text{или}\quad z+\frac{\alpha_1}{z}+\ldots,$$

смотря по тому, конечно a или нет.

б) Всякую n-связную область B плоскости z с граничными континуумами $K_1,\ldots,K_n$ можно однолистно отобразить на плоскость ζ с n разрезами по дугам логарифмич. спиралей соответственно наклонов $\theta_1,\ldots,\theta_n$, $0\leqslant\theta_\nu\leqslant\pi/2$, $\nu=1,\ldots,n$, к радиальным направлениям и притом так, что континуумы K_ν, $\nu=1,\ldots,n$, переходят соответственно в дуги наклонов θ_ν, заданные точки a, $b \in B$ переходят в 0 и ∞ и разложение отображающей функции в окрестности $z=b$ имеет вид

$$\frac{1}{z-b}+\alpha_0+\alpha_1(z-b)+\ldots \quad \text{или} \quad z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\ldots,$$

смотря по тому, конечно b или нет. Отображение единственно.

Теоремы 1) — 3) установлены П. Кёбе (см.[1] — [4]).

Лит.: [1] Koebe P., «Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Gött., Math.-Phys. Kl.», 1907, Bd 2, S. 191—210; 1909, Bd 4, S. 68—76; [2] его же, «Math. Ann.», 1910, Bd 69, S. 1—81; [3] его же, «Acta Math.», 1918, v. 41, p. 305—44; [4] его же, «Math. Z.», 1918, Bd 2, S. 198—236; [5] Голузин Г. М., «Успехи матем. наук», 1939, в. 6, с. 26—89; [6] его же, Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [7] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962. *Е. Г. Голузина.*

КЁБЕ ФУНКЦИЯ — функция

$$w=f(z)=f_\theta(z)=z(1-e^{i\theta}z)^{-2}=z+\sum\nolimits_{n=2}^{\infty} ne^{i(n-1)\theta}z^n,$$

где $\theta\in[0, 2\pi)$. Эта функция была впервые изучена П. Кёбе [1]. К. ф. отображает круг $|z|<1$ на плоскость w с разрезом по лучу, исходящему из точки $-\frac{1}{4}e^{-i\theta}$ и содержащему на своем продолжении точку $w=0$. К. ф. является экстремальной функцией ряда задач теории однолистных функций.

Лит.: [1] Koebe P., «Math. Ann.», 1910, Bd 69, S. 1—81; [2] Hayman W. K., «J. London Math. Soc.», 1965, v. 40, № 3, p. 385—406; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966. *Е. Г. Голузина.*

КЕЛДЫША ТЕОРЕМА — 1) К. т. о приближении непрерывных функций многочленами: пусть функция $f(z)$ комплексного переменного z голоморфна в области G и непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$; тогда, для того чтобы при любом $\varepsilon>0$ существовал многочлен $P(z)$ такой, что

$$|f(z)-P(z)|<\varepsilon, \quad z\in\overline{G},$$

необходимо и достаточно, чтобы дополнение $C\overline{G}$ состояло из одной единственной области G^*, содержащей бесконечно удаленную точку. Установлена М. В. Келдышем [1]. Эта теорема является одним из основных результатов теории равномерных приближений функций многочленами в комплексной области (см. [2]).

2) К. т. в теории потенциала — теоремы о разрешимости и устойчивости *Дирихле задачи*, установленные М. В. Келдышем в 1938—41.

а) Пусть D — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, с границей $\Gamma=\partial D$. Тогда на Γ существует счетное множество *иррегулярных граничных точек* $\{y_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, такое, что для разрешимости задачи Дирихле в области D с непрерывной граничной функцией $f(y)$ на Γ необходимо и достаточно, чтобы эта задача была разрешима в точках y_k, $k=1, 2, \ldots$, т. е. чтобы

$$\lim_{x\to y_k,\ x\in D} u(x)=f(y_k),\quad k=1, 2, \ldots,$$

где $u(x)$ — обобщенное в смысле Винера — Перрона решение задачи Дирихле (см. *Перрона метод*, а также [3], [4]).

б) Пусть оператор A действует из пространства $C(\Gamma)$ непрерывных функций на Γ в пространство ограниченных гармонических в D функций и удовлетворяет следующим условиям: (а) $A(\alpha f+\beta g)=\alpha A(f)+\beta A(g)$, $f, g\in C(\Gamma)$, где α, β — действительные числа, т. е. оператор A линейный; (б) если $f(y)\geqslant 0$, $f\in C(\Gamma)$, то $A(f)(x)\geqslant\geqslant 0$; (в) если для функции $f\in C(\Gamma)$ задача Дирихле разрешима, то $A(f)$ дает решение этой задачи. При этих условиях оператор A единственный и $A(f)$ для всех $f\in C(\Gamma)$ дает обобщенное в смысле Винера — Перрона решение задачи Дирихле (см. [5]—[7]).

в) Для того чтобы всякая разрешимая в D задача Дирихле была устойчивой в $\bar{D}$, необходимо и достаточно, чтобы множество иррегулярных граничных точек множества $C\bar{D}$ совпадало с множеством иррегулярных граничных точек множества CD. Задача Дирихле с любой функцией $f \in C(\Gamma)$ устойчива внутри D тогда и только тогда, когда множество иррегулярных граничных точек $C\bar{D}$, принадлежащих Γ, имеет в D гармонич. меру нуль (см. [4]).

Лит.: [1] Келдыш М. В., «Матем. сб.», 1945, т. 16, № 3, с. 249—58; [2] Мергелян С. Н., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 2, с. 3—122; [3] Келдыш М. В., «Докл. АН СССР», 1938, т. 18, с. 315—18; [4] его же, «Успехи матем. наук», 1941, т. 8, с. 171—292; [5] его же, «Докл. АН СССР», 1941, т. 32, с. 308—9; [6] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966, гл. 4, 5; [7] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

КЕЛДЫША — ЛАВРЕНТЬЕВА ПРИМЕР — пример односвязной области Δ плоскости комплексного переменного z, ограниченной спрямляемой кривой Жордана, но не принадлежащей классу областей Смирнова S.

Пусть функция $z=f(w)$ реализует конформное отображение единичного круга $E=\{w;\ |w|<1\}$ на односвязную область D, ограниченную спрямляемой кривой Жордана. Известно, что $f(w)$ непрерывна в замкнутом круге $\bar{E}$, а логарифм модуля производной $\ln|f'(w)|$ представим в E интегралом Пуассона — Стилтьеса

$$\ln|f'(\rho e^{i\varphi})| = \int \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\theta)}\, d\mu(\theta), \qquad (*)$$

где μ — нормированная борелевская мера на ∂E, $\int d\mu(\theta)=1$. Класс S состоит из таких областей D, для к-рых мера μ в представлении $(*)$ абсолютно непрерывна по мере Лебега на ∂E и интеграл $(*)$ превращается в интеграл Пуассона — Лебега от существующих почти всюду на ∂E граничных значений $\ln|f'(e^{i\theta})|$.

М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев [1] построили для любого h, $0<h<1$, односвязную область Δ, ограниченную спрямляемой кривой Жордана Γ, расположенную в круге $|z|<h$, $0 \in \Delta$ и такую, что при конформном отображении области Δ на круг E,

$$z=0 \leftrightarrow w=0,$$

произвольной дуге кривой Γ на окружности $\partial E = \{w;\ |w|=1\}$ соответствует дуга той же длины. Эта область Δ не принадлежит классу S, так как $\ln|f'(e^{i\theta})| = 0$ почти всюду на ∂E.

Проблема характеризации областей класса S (областей типа Смирнова) до сих пор (1978) полного решения не получила (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Келдыш М. В., Лаврентьев М. А., «Ann. École norm. supér.», 1937, t. 54, p. 1—38; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [3] Ловатер Дж., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 11, М., 1973, с. 99—179.

Е. Д. Соломенцев.

КЕЛДЫША — ЛАВРЕНТЬЕВА ТЕОРЕМА о равномерном приближении целыми функциями: для того чтобы для любой непрерывной комплексной функции $f(z)$ на континууме E и произвольно быстро убывающей при $r\to\infty$ положительной функции $\varepsilon(r)$, $0\leqslant r$, нижняя грань к-рой на любом конечном интервале положительна, существовала целая функция $g(z)$ такая, что

$$|f(z)-g(z)| < \varepsilon(|z|), \quad z \in E,$$

необходимо и достаточно, чтобы E не содержал внутренних точек и существовала растущая к $+\infty$ функция $\eta(t)$, $0<t<+\infty$, такая, что любую точку z дополнения CE можно соединить с ∞ жордановой кривой, расположенной вне E и вне круга $|\zeta|<\eta(|z|)$.

Этот результат М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [1] подвел итог многочисленным исследованиям по приближениям целыми функциями, начатым *Карлемана теоремой* (п. 3, см. также [2]).

Лит.: [1] Келдыш М. В., Лаврентьев М. А., «Докл. АН СССР», 1939, т. 23, № 8, с. 746—48; [2] Мергелян С. Н., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 2, с. 31—112.

Е. Д. Соломенцев.

КЕЛЛОГА ТЕОРЕМА: пусть функция $w=f(z)$ реализует однолистное конформное отображение круга $\{z\in\mathbb{C};\ |z|<1\}$ на область D, ограниченную гладкой замкнутой жордановой кривой S, у к-рой угол наклона $\theta(l)$ касательной к действительной оси, как функция длины дуги l кривой S, удовлетворяет условию Гёльдера:

$$|\theta(l_1)-\theta(l_2)|\leqslant K\,|l_1-l_2|^{\alpha},\quad 0<\alpha<1;$$

тогда производная $f'(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, а на окружности $|z|=1$ выполняются условия Гёльдера с тем же показателем α:

$$\left|f'\left(e^{i\theta_1}\right)-f'\left(e^{i\theta_2}\right)\right|\leqslant K_1\,|\theta_1-\theta_2|^{\alpha},$$

$$\left|\ln f'\left(e^{i\theta_1}\right)-\ln f'\left(e^{i\theta_2}\right)\right|\leqslant K_2\,|\theta_1-\theta_2|^{\alpha}.$$

К. т. непосредственно следует из более общих результатов О. Келлога (см. [1], [2]) о граничном поведении частных производных порядков $r\geqslant 1$ гармонич. функции $u(x)$, являющейся решением *Дирихле задачи* для области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, ограниченной достаточно гладкой поверхностью Ляпунова S (при $n\geqslant 3$) или кривой Ляпунова S (при $n=2$; см. *Ляпунова поверхности и кривые*), причем заданная на границе S функция $f(y)$ также предполагается достаточно гладкой.

Другие результаты о граничном поведении производной $f'(z)$ отображающей функции см. в [3], [4].

Лит.: [1] Kellogg O. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1912, v. 13, № 1, p. 109—32; [2] его же, там же, 1931, v. 33, № 2, p. 486—510; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [4] Warschawski S. E., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1961, v. 12, p. 614—20.

Е. Д. Соломенцев.

КЕЛЛОГА — ЭВАНСА ТЕОРЕМА, лемма Келлога: множество всех иррегулярных точек границы произвольной области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, относительно обобщенного решения *Дирихле задачи* для D в смысле Винера — Перрона (см. *Перрона метод*) имеет нулевую емкость, является *полярным множеством* и имеет тип F_σ. Следствие К.— Э. т.: если K — компакт положительной емкости в $\mathbb{R}^n$ и D — связная компонента дополнения CK, содержащая бесконечно удаленную точку, то на границе $\partial D\subset K$ существует по крайней мере одна регулярная точка. К.— Э. т. была высказана О. Келлогом [1] в виде гипотезы, доказана впервые Г. Эвансом [2].

Лит.: [1] Kellogg O. D., Foundations of potential theory, B., 1929; [2] Evans G. C., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1933, v. 19, p. 457—61; [3] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1941, в. 8, с. 171—231; [4] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

КЕЛЬВИНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование функций, определенных в областях евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, при к-ром гармонические функции переходят в гармонические. Получено У. Томсоном (лордом Кельвином, [1]).

Если $u(x)$ — гармонич. функция в области $D\subset\mathbb{R}^n$, то ее К. п. есть функция

$$v(y)=\left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2}\quad u\left(\frac{R^2}{|y|^2}\,y\right),\quad v(\infty)=0,$$

гармоническая в области D^*, получающейся из D инверсией относительно сферы $S_R=$

$=\{x : |x|=R\}$, т. е. отображением пространства $\mathbb{R}^n$, определяемым формулами

$$x \longrightarrow y=\frac{R^2}{|x|^2}x, \quad 0 \longrightarrow \infty,$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $|x|=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$.

При инверсии бесконечно удаленная точка ∞ компактифицированного по Александрову пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ переходит в начало координат O, и наоборот. При К. п. гармонич. функции $u(x)$ в областях D, содержащих ∞, регулярные в ∞, т. е. такие, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x)=0$, переходят в гармонич. функции $v(y)$ в ограниченных областях D^*, содержащих начало координат 0, причем $v(0)=0$. Благодаря этому свойству, К. п. позволяет сводить внешние краевые задачи теории потенциала к внутренним, и наоборот (см. [2], [3]).

Кроме К. п., гармоничность функций в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, сохраняется при аналитич. преобразованиях вида $v(y)=\varphi(y)\, u(\psi(y))$ только в случае, когда $\varphi(y)\equiv 1$ и ψ есть отображение подобия, движение или симметрия относительно плоскости; при $n=2$ этим свойством обладает широкий класс конформных отображений ψ.

Лит.: [1] Thomson W., «J. math. pures et appl.», 1847, v. 12, p. 256—64; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976, гл. 5; [3] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964. *Е. Д. Соломенцев.*

КЕЛЬВИНА ФУНКЦИИ, функции Томсона,— функции $\mathrm{ber}(z)$ и $\mathrm{bei}(z)$, $\mathrm{her}(z)$ и $\mathrm{hei}(z)$, $\mathrm{ker}(z)$ и $\mathrm{kei}(z)$, к-рые определяются следующими соотношениями:

$$\mathrm{ber}_\nu(z) \pm \mathrm{bei}_\nu(z) = J_\nu\left(ze^{\pm 3i\pi/4}\right),$$

$$\mathrm{her}_\nu(z) + i\,\mathrm{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(1)}\left(ze^{3i\pi/4}\right),$$

$$\mathrm{her}_\nu(z) - i\,\mathrm{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(2)}\left(ze^{-3i\pi/4}\right),$$

$$\mathrm{ker}_\nu(z) + i\,\mathrm{hei}_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} H_\nu^{(1)}\left(ze^{3i\pi/4}\right),$$

$$\mathrm{ker}_\nu(z) - i\,\mathrm{kei}_\nu(z) = -\frac{i\pi}{2} H_\nu^{(2)}\left(ze^{-3i\pi/4}\right),$$

где H_ν — *Ганкеля функция*, J_ν — *Бесселя функция*. При $\nu=0$ индекс у знака функции опускается. К. ф. составляют фундаментальную систему решений уравнения

$$z^2y''+zy'-(iz^2+\nu^2)\,y=0,$$

переходящего при $z=\sqrt{i}\,x$ в уравнение Бесселя.

Представление в виде ряда:

$$\mathrm{ber}\,(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{4k}}{2^{4k}[(2k)!]^2},$$

$$\mathrm{bei}\,(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{4k+2}}{2^{4k+2}[(2k+1)!]^2},$$

$$\mathrm{ker}\,(z)=\left(\ln\frac{2}{z}-C\right)\mathrm{ber}\,(z)+\frac{\pi}{4}\mathrm{bei}\,(z)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{4k}}{2^{4k}[(2k)!]^2}\sum_{m=1}^{2k}\frac{1}{m},$$

$$\mathrm{kei}\,(z)=\left(\ln\frac{2}{z}-C\right)\mathrm{bei}\,(z)-\frac{\pi}{4}\mathrm{ber}\,(z)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{4k+2}}{2^{4k+2}[(2k+1)!]^2}\sum_{m=1}^{2k+1}\frac{1}{m}.$$

Асимптотическое представление:

$$\mathrm{ber}\,(z)=\frac{e^{\alpha(z)}}{\sqrt{2\pi z}}\cos\beta\,(z),$$

$$\mathrm{bei}\,(z)=\frac{e^{\alpha(z)}}{\sqrt{2\pi z}}\sin\beta\,(z),$$

$$\mathrm{ker}\,(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{\alpha(-z)}\cos\beta\,(-z),$$

$$\operatorname{kei}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{\alpha(-z)}\sin\beta(-z),$$

$$|\arg z|<\frac{5}{4}\pi,$$

где

$$\alpha(z)\sim\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{1}{8z\sqrt{2}}-\frac{25}{384z^3\sqrt{2}}-\frac{13}{128z^4}-\ldots,$$

$$\beta(z)\sim\frac{z}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{8z\sqrt{2}}-\frac{1}{16z^2}-\frac{25}{384z^3\sqrt{2}}+\ldots.$$

Функции введены У. Томсоном (лордом Кельвином, [1]).

Лит.: [1] Thomson W., Mathematical and Physical papers, v. 3, Camb., 1890, p. 492; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 1964; [3] Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 3 изд., М.— Л., 1951. *А. Б. Иванов.*

КЕНДАЛЛА КОЭФФИЦИЕНТ РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ — одна из выборочных мер зависимости двух случайных величин (признаков) X и Y, основанная на ранжировании элементов выборки $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$. К. к. р. к. относится, таким образом, к *ранговым статистикам* и определяется формулой

$$\tau=\frac{2S(r_1,\ldots,r_n)}{n(n-1)},$$

где r_i— ранг Y, принадлежащего той паре (X, Y), для к-рой ранг X равен i, $S=2N-n(n-1)/2$, N— число элементов выборки, для к-рых одновременно $j>i$ и $r_j>r_i$. Всегда $-1\leqslant\tau\leqslant1$. В качестве выборочной меры зависимости К. к. р. к. широко использовался М. Кендаллом (M. Kendall, см. [1]).

К. к. р. к. применяется для проверки гипотезы независимости случайных величин. Если гипотеза независимости верна, то $E\tau=0$ и $D\tau=2(2n+5)/9n(n-1)$. При небольшом объеме выборки $(4\leqslant n\leqslant10)$ проверка статистич. гипотезы независимости производится с помощью специальных таблиц (см. [3]). При $n>10$ пользуются нормальным приближением для распределения τ: если

$$|\tau|>u_{\alpha/2}\sqrt{2(2n+5)/9n(n-1)},$$

то гипотеза о независимости отвергается, в противном случае принимается. Здесь α — уровень значимости, $u_{\alpha/2}$ есть $100\cdot\frac{\alpha}{2}$-процентная точка нормального распределения. К. к. р. к., как и любая ранговая статистика, может использоваться для обнаружения зависимости двух качественных признаков, если только элементы выборки можно упорядочить относительно этих признаков. Если X, Y имеют совместное нормальное распределение с коэффициентом корреляции ρ, то связь между К. к. р. к. и имеет вид:

$$\mathsf{E}\tau=\frac{2}{\pi}\arcsin\rho.$$

См. также *Спирмена коэффициент ранговой корреляции*, *Ранговый критерий*.

Лит.: [1] Кендэл М., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1965. *А. В. Прохоров.*

КЁНИГА ТЕОРЕМА: если прямоугольная матрица составлена из нулей и единиц, то минимальное число линий, содержащих все единицы, равно максимальному числу единиц, к-рые могут быть выбраны так, чтобы никакие две из них не лежали на одной и той же линии (термин «линия» обозначает либо строку, либо столбец в матрице). Сформулирована и доказана Д. Кёнигом [1]. К. т., одна из основных в комбинаторике, представляет собой матричный аналог критерия Холла существования системы различных представителей у семейства подмножеств конечного множества (см. *Выбора теоремы*). Распространена также формулировка К. т. в терминах графов: в *графе двудольном* число ребер в наибольшем паросочетании равно числу вершинного покрытия.

К. т. часто используется в различных комбинаторных вопросах, связанных с проблемами выбора и экстремальными задачами. Известны ее обобщения на случай бесконечных матриц [3].

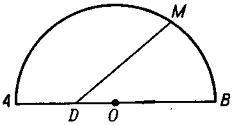
Лит.: [1] König D., «Mat. lapok», 1931, v. 38, p. 116—19; [2] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [3] Тараканов В. Е., в кн.: Вопросы кибернетики. Тр. Семинара по комбинаторной математике, М., 1973, с. 185—99.

В. Е. Тараканов.

КЕПЛЕРА УРАВНЕНИЕ — трансцендентное уравнение вида

$$y - c \sin y = x.$$

Для приложений важен случай $|c| < 1$, когда y определяется по заданным c и x единственным образом. К. у. впервые рассматривалось И. Кеплером (J. Kepler, 1609) в связи с задачей: на диаметре AB полукруга $AOBM$ дана точка D; провести прямую DM так, чтобы она делила площадь полукруга в заданном отношении (см. рис.).



К. у. играет важную роль в астрономии при определении элементов эллиптич. орбит планет. В небесной механике это уравнение обычно записывают в форме

$$E - e \sin E = M,$$

где e — эксцентриситет эллипса, M — средняя аномалия, E — эксцентрическая аномалия.

Лит.: [1] Субботин М. Ф., Курс небесной механики, 2 изд., т. 1, Л.— М., 1941.

БСЭ-3.

КЕРВЕРА ИНВАРИАНТ — инвариант почти параллелизуемого гладкого многообразия M размерности $4k+2$, определяемый как arf-*инвариант* квадратичной формы по модулю 2, возникающий на решетке $(2k+1)$-мерных гомологий многообразия M.

Пусть M — односвязное почти параллелизуемое замкнутое гладкое многообразие размерности $4k+2$, гомологич. группы $H_i(M; \mathbb{Z})$ к-рого при $0 < i < 4k+2$, кроме $V = H_{2k+1}(M; \mathbb{Z})$, равны нулю.

На свободной абелевой группе V имеется кососимметрическая форма пересечения циклов $\Phi(x, y)$, $\Phi : V \times V \to \mathbb{Z}$ и размерность целочисленной решетки V равна $2m$. На группе V существует функция $\Phi_0 : V \to \mathbb{Z}_2$, определяемая следующим образом: если $x \in V$, то существует гладкое вложение сферы S^{2k+1} в M, реализующее данный элемент x, $k \geq 1$. Трубчатая окрестность этой сферы S^{2k+1} в M параллелизуема, она может быть либо тривиальной, либо изоморфной трубчатой окрестности диагонали в произведении $S^{2k+1} \times S^{2k+1}$. При этом трубчатая окрестность диагонали в $S^{2k+1} \times \times S^{2k+1}$ тогда и только тогда нетривиальна, когда $2k+1 \neq \neq 1, 3, 7$ (см. *Хопфа инвариант*). Значение функции Φ_0 равно нулю или единице в зависимости от тривиальности или нетривиальности трубчатой окрестности сферы S^{2k+1}, реализующей элемент x в M, $2k+1 \neq \neq 1, 3, 7$. Так определенная функция $\Phi_0 : V \to \mathbb{Z}_2$ удовлетворяет свойству

$$\Phi_0(x+y) = \Phi_0(x) + \Phi_0(y) + \Phi(x, y) \bmod 2.$$

arf-инвариант для функции Φ_0 и наз. **инвариантом Кервера** многообразия M^{4k+2}, $2k+1 \neq 1, 3, 7$.

Если К. и. многообразия M^{4k+2} равен нулю, то существует симплектич. базис (e_i, f_i) для V такой, что $\Phi_0(e_i) = \Phi_0(f_i) = 0$. В этом случае многообразие M^{4k+2} есть связная сумма произведения сфер

$$M^{4k+2} = (S^{2k+1} \times S^{2k+1})_1 \# \ldots \# (S^{2k+1} \times S^{2k+1})\, m.$$

Если же К. и. многообразия M^{4k+2} не равен нулю, то существует симплектич. базис (e_i, f_i) для V такой, что $\Phi_0(e_i)=\Phi_0(f_i)=0$ для $i\neq 1$ и $\Phi_0(e_1)=\Phi_0(f_1)=1$. В этом случае объединение трубчатых окрестностей двух $(2k+1)$-мерных сфер, вложенных в M^{4k+2} с трансверсальным пересечением в одной точке и реализующих элементы e_1, f_1, дает нек-рое многообразие K^{4k+2}, наз. многообразием Кервера (см. *Древовидное многообразие*); его край ∂K^{4k+2} диффеоморфен стандартной сфере, а само многообразие M^{4k+2} представляет собой связную сумму

$$M^{4k+2}=\widehat{K}^{4k+2}\#(S^{2k+1}\times S^{2k+1})_1\#\ldots$$
$$\ldots\#(S^{2k+1}\times S^{2k+1})_{m-1},$$

где гладкое замкнутое многообразие $\widehat{K}^{4k+2}$ получено из K^{4k+2} добавлением клетки.

Если $M^{4k+2}, k\neq 0,\ 1,\ 3$, есть гладкое параллелизуемое $(2k)$-связное многообразие с краем, к-рый является гомотопич. сферой, то точно так же определен К. и. многообразия M^{4k+2} с теми же свойствами, что и выше, с той разницей, что в разложении M^{4k+2} в связную сумму простейших многообразий слагаемое K_0^{4k+2}, являющееся многообразием Кервера, будет иметь край $\partial K^{4k+2}=\partial M^{4k+2}$ (вообще говоря, не диффеоморфный стандартной сфере).

В случае $k=0,\ 1,\ 3$ исходные многообразия M^2, M^6, M^{14} представляют собой связную сумму $(S^{2k+1}\times\times S^{2k+1})\#\ldots\#(S^{2k+1}\times S^{2k+1})$ (если край пуст), или $(S^{2k+1}\times S^{2k+1})_0\#(S^{2k+1}\times S^{2k+1})_1\#\ldots\#(S^{2k+1}\times\times S^{2k+1})_{m-1}$, (если край непуст), где $(S^{2k+1}\times S^{2k+1})_0$ получено выкидыванием открытой клетки из многообразия $S^{2k+1}\times S^{2k+1}$.

Однако К. и. для замкнутых многообразий M^2, M^6, M^{14} может быть все же определен (см. *Понтрягина инвариант*, *Кервера — Милнора инвариант*) и зависит в этих размерностях от выбора оснащения, т. е. является инвариантом оснащенных перестроек пары $(M^{4k+2}, f_r), k=0,\ 1,\ 3$. В размерностях $k\neq 0,\ 1,\ 3$ многообразие M^{4k+2} тогда и только тогда перестраивается до сферы S^{4k+2}, когда пара (M^{4k+2}, f_r) оснащенно перестраивается до пары (S^{4k+2}, f_r) при любом выборе оснащения f_r на исходном многообразии M^{4k+2} (см. *Перестройка* на многообразии).

К. и. определен для любого стабильно параллелизуемого многообразия M^{4k+2} как инвариант оснащенных перестроек и любой элемент в стабильных гомотопич. группах сфер может быть представлен либо гомотопич. сферой с оснащением, либо замкнутым гладким многообразием Кервера с оснащением (в этом случае $m=$ $=4k+2$, $k\neq 0,\ 1,\ 3$), либо многообразием $S^{2k+1}\times S^{2k+1}$ с оснащением, если $k=0,\ 1,\ 3$.

Иначе говоря, К. и. можно рассматривать как препятствие к тому, чтобы заданное оснащение на многообразии «перенести» на сферу той же размерности, $k\neq 0,\ 1,\ 3$. В этом смысле К. и. для значений $k=0,\ 1,\ 3$ выполняет ту же роль: заданное оснащение на многообразии $S^{2k+1}\times S^{2k+1}$, $k=0,\ 1,\ 3$, вообще говоря, не всегда может быть «перенесено» на сферу S^{4k+2}, $k=$ $=0,\ 1,\ 3$, с помощью оснащенных перестроек.

Впервые такое оснащение на многообразии $S^{2k+1}\times\times S^{2k+1}$ было построено Л. С. Понтрягиным для случая $k=0$, т. е. оснащение на двумерном торе $((S^1\times S^1), f_r)$, которое нельзя «перенести» на S^2. Существуют такие же примеры оснащения на многообразиях $S^3\times S^3$ и $S^7\times S^7$.

Основная задача, касающаяся К. и., заключается в следующем: для каких нечетных значений n существует пара (M^{2n}, f_r) с отличным от нуля К. и.? Ответ на этот вопрос отрицателен для $n\neq 2^i-1$ и положителен для $n=2^i-1$, где $i=1$ (Л. С. Понтрягин, см. [2]), $i=2,\ 3$ (М. Кервер — Дж. Милнор, [5], [6]), $i=4$ (У. Браудер, [3]), $i=5,\ 6$ [М. Баррат (M. Barratt), Маховальд (M. Mahowald), А. Мильграм (A. Milgram)]. Для остальных значений i ответ неизвестен (1978).

Лит.: [1] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 365—474; [2] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976; [3] Browder W., «Ann. Math.», 1969, v. 90, p. 157—86; [4] его же, Surgery on simply-connected manifolds, B., 1972; [5] Kervaire M., «Comm. math. helv.», 1960, v. 34, p. 257—70; [6] Kervaire M. A., Milnor J. W., «Ann. Math.», 1963, v. 77, № 3, p. 504—37. *М. А. Штанько.*

КЕРВЕРА — МИЛНОРА ИНВАРИАНТ — инвариант оснащенных перестроек замкнутого 6- или 14-мерного многообразия с заданным на нем оснащением.

Пусть M^6— стабильно параллелезуемое 2-связное многообразие, на к-ром задано стабильное N-мерное оснащение (M^6, U), т. е. тривиализация стабильного N-мерного нормального расслоения. Пусть S^3_i— сферы, реализующие базис 3-мерных гомологий многообразия M^6. Суммированием заданной N-тривиализации U с некоторыми тривиализациями $\alpha_i \in \pi_3(SO_3)$ трубчатых окрестностей сфер S^3_i в M^6 получаются $(N+3)$-мерные тривиализации стабильных нормальных расслоений к сферам S^3_i и возникают элементы $\alpha^1_i \in \in \pi_3(SO_{N+3})$. Коядро гомоморфизма стабилизации $s: \pi_n(SO_n) \to \pi_n(SO_{N+n})$ изоморфно $\mathbb{Z}_2$ для $n=3$, так что каждой сфере S^3_i сопоставляется элемент из группы $\pi^3(SO_{N+3})/Ims$ (по значению элементов α^1_i, к-рое они принимают в группе $\mathbb{Z}_2$ после факторизации по α^1_i). Это значение не зависит от выбора элементов α_i, а зависит только от классов гомологий, реализуемых сферами S^3_i, и оснащения U. arf-*инвариант* получающейся функции $\varphi_0: H_3(M^6, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_2$, обладающей свойством $\varphi_0(x+y)=\varphi_0(x)+\varphi_0(y)+\varphi(x, y) \mod 2$, где $\varphi(x, y)$ — форма пересечений 3-мерных гомологий на многообразии M^6, и наз. инвариантом Кервера — Милнора этого многообразия с оснащением U. Пара (M^6, U) оснащенно перестраивается до пары (S^6, V) тогда и только тогда, когда К.— М. и. пары (M^6, U) равен нулю.

Аналогичные построения проводятся и для M^{14}. К.— М. и. в размерности шесть является единственным инвариантом стабильного 6-мерного оснащенного кобордизма и задает изоморфизм $\pi_{n+6}(S^n) \approx \mathbb{Z}_2$, $n \geqslant 7$, в размерности же четырнадцать это — не единственный инвариант стабильного четырнадцатимерного оснащенного кобордизма, т. е. стабильная группа $\pi_{n+14}(S^n)$, $n \geqslant 16$, определяется оснащениями на сфере S^{14} и оснащениями на $S^7 \times S^7$.

Лит. см. при статье *Кервера инвариант.* *М. А. Штанько.*

КЕРНФУНКЦИЯ — см. *Бергмана кернфункция.*

КЕРРА МЕТРИКА — решение уравнений Эйнштейна, описывающее внешнее гравитационное поле вращающегося источника с массой m и угловым моментом L. Относится к типу D по классификации А. З. Петрова. Наиболее просто записывается в виде метрики Керра — Шильда:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2hK_\mu K_\nu,$$

где K_μ— нулевой (изотропный) вектор $(K_\mu K_\nu g^{\mu\nu}=0)$, касательный к специальной главной нулевой конгруэнции с вращением (неградиентного типа), $\eta_{\mu\nu}$— метрический тензор пространства Минковского. Характерный параметр К. м. $a=L/m$. В общем случае при наличии заряда e (метрика Керра — Ньюмена) скалярная функция h имеет вид

$$h = \frac{m}{2}(\rho^{-1} + \bar{\rho}^{-1}) + \frac{e^2}{\rho\bar{\rho}},$$

где

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + (z+ia)^2.$$

Поле сингулярно на кольцевой нити радиуса a (при $\rho=0$). При $a=0$ сингулярность стягивается в точку; при $a=e=0$ переходит в *Шварцшильда метрику.*

К. м. получена Р. П. Керром [1].

Лит.: [1] Kerr R. P., «Phys. Rew. Letters», 1963, v. 11, p. 237—38; [2] Мёллер К., Теория относительности, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Рис М., Руффини Р., Уилер Дж., Черные дыры, гравитационные волны и космология, пер. с англ., М., 1977. *А. Я. Буринский.*

КИБЕРНЕТИКА — наука об управлении, связи и переработке информации (буквально «искусство управления рулем»). Первым, кто употребил этот термин для управления в общем смысле, был, по-видимому, древнегреческий философ Платон. А. М. Ампер (A. M. Ampère, 1834) предложил называть К. науку об управлении человеческим обществом. Н. Винер (N. Wiener, 1948) назвал К. науку об управлении и связи в живом организме и машине. На дальнейшее становление К. огромное влияние оказали электронные вычислительные машины (ЭВМ). К началу 70-х гг. 20 в. К. окончательно оформилась как наука физико-математ. профиля с собственным предметом исследования — так наз. кибернетич. системами. Кибернетические системы представляют собой абстракцию под определенным (информационным) углом зрения сложных систем, изучаемых широким спектром естественных, технических и социальных наук (под своими специфическими углами зрения). Выявляя общие аспекты в системах столь различной природы, К. вместе с тем дает общий и притом принципиально новый метод их изучения. Это — так наз. метод машинного эксперимента, промежуточный между классическим дедуктивным и классическим экспериментальным методами. Благодаря этому К., подобно математике, можно использовать в качестве аппарата исследования в других науках. Причем спектр проблем, доступных исследованию кибернетич. методами, по сравнению с классическими (аналитическими) математич. методами значительно шире и охватывает практически все науки. Кибернетическая система в простейшем случае может сводиться к одному элементу. Элемент A кибернетич. системы, рассматриваемый в абстрактном плане, представляет собой набор $\langle x, y, z, f, g\rangle$ пяти объектов. Через $x=x(t)$ обозначается так наз. входной сигнал элемента, т. е. конечное множество функций времени $t: x=\langle x_1(t), \ldots, x_k(t)\rangle$. Во многих конкретных кибернетич. системах время рассматривается как параметр, принимающий лишь дискретные множества значений (обычно целочисленные значения). Однако можно, не нарушая общности, рассматривать и обычное «непрерывное» время (ниже рассматривается именно этот случай). Области значений функций $x_i(t)$ в одном и том же элементе могут быть различными множествами действительных чисел. Чаще всего в качестве областей значений фигурируют обычные непрерывные числовые интервалы, множество целых чисел и различные его конечные подмножества. Сами функции $x_i(t)$ обычно предполагаются кусочно непрерывными. Буквой y обозначается выходной сигнал $y=y(t)$ элемента, представляющий собой конечное множество функций $y=\langle y_1(t), \ldots, y_m(t)\rangle$ той же самой природы, что входные функции $x_i(t)$. Через $z=z(t)$ обозначено внутреннее состояние элемента A, также характеризующееся конечным множеством функций $z=\langle z_1(t), \ldots, z_n(t)\rangle$ той же природы. Через f и g обозначены функционалы, задающие текущие значения внутреннего состояния $z(t)$ и выходного сигнала $y(t)$:

$$z(t)=f(t, x(t), D_t z(t)); \quad y(t)=g(t, x(t), D_t z(t)). \quad (1)$$

Здесь через $D_t z(t)$ обозначено сужение векторной функции $z(t)=\langle z_1(t), \ldots, z_n(t)\rangle$ на область, задаваемую системой полуоткрытых интервалов $[\tau_1, t), \ldots, [\tau_n, t)$, где $\tau_i=\tau_i(t)$ — заданные кусочно непрерывные функции от t, удовлетворяющие условию $\tau_i<t$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Приведенное определение элемента кибернетич. системы предполагает, что время t может принимать любые действительные значения. На практике в большинстве случаев эти значения ограничиваются лишь неотрицательными числами. При этом определение элемента должно быть дополнено заданием его начального состояния $z_0=z(0)$, а также, возможно, заданием начального выходного сигнала $y_0=y(0)$. Зависимости (1) рассматриваются в таком случае лишь при положительных значениях t. Другое обстоятельство связано с тем,что наряду с детерминированными элементами в кибернетич. системах часто приходится иметь дело со стохастич. элементами. Для этого обычно оказывается достаточным в правые части соотношений (1) добавить в качестве аргументов функционалов случайную функцию $\omega(t)$, принимающую значения на непрерывном или дискретном множестве действительных чисел.

Возможны и другие варианты обобщений этого определения, в частности введение бесконечномерных векторных функций для входных и выходных сигналов, а также для внутреннего состояния элемента. Однако следует иметь в виду, что, в отличие от математики, для К. характерен конструктивный подход к изучаемым объектам. Это означает возможность фактического вычисления (с той или иной степенью точности) значений всех рассматриваемых функций. Поэтому на практике рано или поздно при изучении кибернетич. систем, а следовательно, и их элементов приходится переходить к конечным аппроксимациям.

Многоэлементные кибернетические системы строятся из набора (обычно конечного) M элементов путем отождествления выходных сигналов одних элементов с входными сигналами других. Формально такие отождествления задаются системой равенств

$$x_i^p(t)=y_j^r(t)\ (p\in M,\ r\in M),\ i\in I_p,\ j\in J_p, \tag{2}$$

где через $x_i^p(t)$ обозначена i-я компонента входного сигнала p-го элемента, а через $y_j^r(t)$ — j-я компонента выходного сигнала r-го элемента. При подобном отождествлении (соединении элементов в систему) часть компонент входных сигналов тех или иных элементов может оказаться свободной, т. е. не отождествленной ни с какими выходными компонентами. Все такие компоненты объединяются в векторный входной сигнал $x(t)$ построенной системы S. Оставшиеся свободными компоненты выходных сигналов образуют выходной сигнал $y(t)$ построенной системы. В отличие от входного сигнала в выходной сигнал $y(t)$ могут быть включены (по определению строящейся системы) также любые несвободные компоненты выходных сигналов, составляющих систему S элементов. Начальным состоянием системы, по определению, считается вектор, составленный из компонент начальных состояний всех ее элементов (упорядоченных тем или иным образом). Аналогичным образом определяется и вектор $z(t)$ состояния системы в произвольный момент времени.

Определяя систему множеством элементов и множеством отождествляющих соотношений (2), необходимо обеспечить корректность такого определения, под к-рой понимается возможность фактического вычисления выходного сигнала $y(t)$ для всех $t>0$ при задании начального состояния системы $z(0)$ и входного сигнала $x(t)$ для всех $t\geqslant 0$. Необходимым условием корректности определения системы является, напр., вхождение области значений функции $y_j^r(t)$ в соотношениях (2) в область значений функции $x_i^p(t)$. Для упрощения задачи обеспечения корректности определения систем обычно вводится запрет на отождествление любой входной компоненты более чем с одной выходной компонентой.

Множество соотношений (2) задает структуру кибернетич. системы (не путать с абстрактным понятием структуры в математике!). В ряде приложений оказывается полезным рассмотрение систем с переменной структурой. При этом, вводя дополнительные коммутационные элементы, можно любую систему с переменной структурой свести к системе с постоянной структурой.

Приведенное определение абстрактной кибернетич. системы охватывает весьма большой круг конкретных систем, рассматриваемых в различных областях знания. К их числу относятся логические сети и сети абстрактных *автоматов*, механические динамич. системы, различного рода электромеханические и электронные устройства (включая ЭВМ), биологич. организмы и различные их подсистемы (напр., нервная система), экологические, экономические и социальные системы. Для возможности рассмотрения конкретных биологических, технических и социальных систем в качестве абстрактных кибернетич. систем необходимо отвлечься от большинства их специальных свойств (размеров, массы, химич. состава, многих конкретных форм представления сигналов и состояний и т. д.).

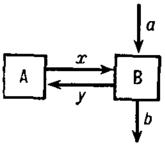
Кибернетический аспект рассмотрения систем является аспектом чисто информационным. Иными словами, состояния элементов и взаимодействие элементов друг с другом описываются системой кодов прежде всего для установления меры их различия (при заданной точности описания), а не для фактич. измерения тех или иных реальных физич. величин. Напр., при наличии в электрич. сети лишь двух уровней напряжения v_1 и v_2 их можно задать числовыми кодами 0 и 1, независимо от фактич. величин этих напряжений. Заметим, что хотя в приведенном выше определении кибернетич. системы употреблялись лишь числовые коды, их нетрудно, в случае необходимости, заменить буквенно-цифровыми кодами с использованием букв любых конечных алфавитов.

Всякая система, имеющая нетривиальный входной сигнал $x(t)$ и выходной сигнал $y(t)$, может рассматриваться как преобразователь информации, перерабатывающий поток информации $x(t)$ в поток информации $y(t)$. В случае дискретного времени и конечных областей определения функций $x(t)$ и $y(t)$ преобразование (при соответствующем кодировании входной информации) можно интерпретировать как соответствие между словами в той или иной паре фиксированных алфавитов. В этом случае система может рассматриваться как дискретный преобразователь информации. Системы с нетривиальным входным сигналом $x(t)$ наз. открытыми. В отличие от них замкнутые системы не оставляют свободных входных компонент ни у одного из своих элементов. Вектор входного сигнала $x(t)$ в таких системах имеет нулевое число компонент и не может, следовательно, нести никакой информации. Замкнутые системы в строгом смысле слова не должны иметь не только входа, но и выхода. Однако даже в этом случае их можно интерпретировать как генераторы информации, рассматривая изменение их внутреннего состояния $z(t)$ во времени. В дальнейшем генерацию удобно рассматривать как частный случай преобразования информации.

Для кибернетич. систем важное значение имеют задачи их анализа и синтеза. Задача анализа системы состоит в нахождении различного рода свойств задаваемого системой преобразования информации, в частности представление в удобной форме алгоритма преобразования. В последнем случае речь идет фактически об агрегации (композиции) системы в один единственный элемент. Задача синтеза системы противоположна задаче анализа. Необходимо по описанию осуществляемого системой преобразования построить систему, фактически выполняющую это преобразование. При этом должен быть предварительно определен класс элементов, из к-рых должна строиться искомая система.

Важное значение имеет задача нахождения формальных преобразований кибернетич. систем, не меняющих задаваемых ими преобразований (а, возможно, и нек-рые другие инварианты). Тем самым вводятся различные определения эквивалентности систем, делающие возможными постановку *задач оптимизации* систем, т. е. задач нахождения в классе эквивалентных систем системы с экстремальными значениями определяемых на системах функционалов.

Задача декомпозиции системы означает представление части системы или всех ее элементов в виде систем, состоящих из более мелких элементов (подсистем). Для большого числа применений важное значение имеют системы, представляемые в виде комбинации двух подсистем (элементов), наз. обычно *управляющей системой и объектом управления*. Для наглядности подобную систему можно представить в виде графа (см. рис.), где через A обозначена управляющая система, через B — объект управления; буквой x обозначен так наз. *канал прямой связи* (выход элемента A, отождествленный с входом элемента B), через y — *канал обратной связи*, через a — входной сигнал системы (воздействие окружающей среды, различного рода помехи) и через b — выходной сигнал, характеризующий качество функционирования подсистемы B (качество управления).



Для подобных систем задача синтеза ставится обычно следующим образом: при заданной системе B, заданном классе внешних воздействий a и заданном критерии качества управления b построить управляющую систему A, обеспечивающую заданное поведение критерия качества b. Под такое определение попадают задачи синтеза систем программного управления (b — заданная векторная функция времени), следящие системы (минимизирующие в том или ином смысле вектор $b—a$), системы оптимального управления (системы, выводящие объект управления в желательную область значений его состояния за кратчайшее время) и т. п.

Важное место в теории кибернетич. систем занимают задачи обеспечения надежности их функционирования. Причем, кибернетич. аспект надежности связан не с обеспечением физич. надежности элементов и связей между ними, а с вопросами организации самой системы (избыточность элементов и связей, специальные системы кодирования и т. п.).

Для достаточно простых систем большинство из перечисленных задач (если не в полных, то хотя бы в упрощенных постановках) могут быть решены средствами классич. математики, дополненными тривиальным перебором вариантов. Для сложных систем, с к-рыми приходится обычно иметь дело на практике, эти методы оказываются, как правило, непригодными. При этом сложность систем в К. понимается не только и не столько в простом количественном смысле (число элементов системы, число связей, размерность векторов состояний, входов и выходов), а прежде всего — в принципиальном качественном смысле. *Сложной* в этом смысле наз. система, не имеющая простых описаний. А это предполагает наряду с большими количествами используемых элементов и параметров большое их разнообразие (не сводящееся к простым закономерностям), а также большое разнообразие и нерегулярность связей между элементами. Эффективное исследование таких систем классическими дедуктивными методами оказывается практически невозможным. Классический экспериментальный метод исследования также оказывается применимым лишь в весьма ограниченных пределах. Во многих случаях его применение ограничивается высокой стоимостью эксперимента, а в ряде случаев (метеорология, экология, макроэкономика и др.) натурные эксперименты становятся либо вовсе невозможными, либо по крайней мере чересчур рискованными.

Поэтому в качестве основного метода исследования сложных систем К. использует метод машинного эксперимента, превратившийся в новый мощный универсальный метод научного познания в результате появления быстродействующих универсальных ЭВМ. Метод машинного эксперимента в чистом виде основан на использовании так наз. имитационных моделей. Такие модели по существу являются простым переложением на машинный язык описаний моделируемых систем. Специальные программы, обслуживающие модель, генерируют различные конкретные реализации входного сигнала $x(t)$ моделируемой системы и строят в соответствии с введенным в ЭВМ описанием системы (включая ее начальное состояние) выходной сигнал $y(t)$. Далее, как и в обычном (натурном) эксперименте, полученные результаты обрабатываются с помощью специальных программ, строящих, напр., гистограммы распределений тех или иных величин, характеризующих поведение исследуемой системы, определяющих различные качественные характеристики (принадлежность системы и определяемого ею преобразования информации к тому или иному классу), и т. п. Таким способом решаются прежде всего задачи анализа кибернетич. систем. Для решения задач синтеза и оптимизации методом машинного эксперимента обслуживающая эксперимент система машинных программ дополняется средствами, обеспечивающими диалог ЭВМ с человеком-исследователем, внесение изменений в описание моделируемой системы по подсказке человека, а также процедуры направленного перебора для организации подобных изменений в автоматич. режиме.

Перевод описаний кибернетич. систем на машинный язык представляет собой достаточно трудоемкую процедуру. Поэтому в современные средства машинного эксперимента включаются специальные программы-трансляторы (или интерпретаторы), автоматизирующие перевод на машинный язык описаний систем на специально разрабатываемых для этой цели языках системного моделирования. Основу таких языков составляют средства (удобные для исследователя) фактич. описания параметров, функций и связей, входящих в описание систем. Сохраняя, как правило, универсальность (т. е. возможность описания произвольных систем), языки моделирования обычно ориентированы на более простое и легкое описание систем тех или иных специальных классов. Кроме того, в языки системного моделирования включаются дополнительные средства для описания процедур, обслуживающих машинный эксперимент, к-рые были описаны выше. В настоящее время (1978) разработаны многие десятки универсальных и специализированных языков системного моделирования и основанных на них систем машинного эксперимента: иностранные языки—симула, симскрипт, отечественные — слэнг, недис и др.

Во многих системах машинного эксперимента имитационное моделирование дополняется возможностями использования аналитич. аппарата тех или иных разделов математики (напр., теории массового обслуживания), а также современных вычислительных методов. В первую очередь это касается различного рода оптимизационных методов: линейное программирование, динамич. программирование, градиентные методы, стохастич. программирование и др.

В ряде случаев для изучения кибернетич. систем оказывается целесообразным дополнять машинный эксперимент натурным. Некоторые части моделируемой кибернетич. системы при этом подключаются к универсальной ЭВМ (через специальные преобразователи) в виде натурных моделей, моделирование же остальных частей, управление экспериментом и обработка его результатов производятся в универсальной ЭВМ уже описанным способом. Использование универсальных и специализированных ЭВМ для автоматизации управления натурными экспериментами, а также для сбора и обработки получаемых экспериментальных данных является важным направлением совершенствования исследовательского процесса во всех экспериментальных науках. Не менее широкие возможности применения имеет и чистый машинный эксперимент.

Взаимоотношения К. с математикой не ограничиваются одним лишь использованием К. математич. методов. Математика и К. имеют и общие объекты исследования. Так, напр., алгоритмы, являющиеся объектом исследования в математич. теории алгоритмов, могут рассматриваться в то же время как кибернетич. системы и служить для К. не только средством, но и объектом исследования. Однако подход к изучению этого объекта, а следовательно, и возникающие при этом задачи у математики и К. сильно отличаются друг от друга. Для математики алгоритм выступает прежде всего как одно из фундаментальных понятий оснований математики. Поэтому главная задача состоит в изучении общих свойств этого понятия, для чего необходимо свести его определение к минимальному числу простейших фундаментальных понятий и операций. К. ставит своей задачей разрабатывать практически удобные методы синтеза конкретных систем, в том числе и алгоритмов. Эта практическая направленность приводит к необходимости разработки достаточно удобных для пользования процедурно и проблемно ориентированных *алгоритмических языков*. Вместо характерного для математики интереса к принципиальной возможности установления эквивалентности в тех или иных классах алгоритмов, К. интересуется прежде всего созданием аппарата, удобного для фактич. выполнения эквивалентных преобразований алгоритмов. Вместо простейшей формы представления информации в виде слов в абстрактном алфавите, К. изучает сложные структуры данных, необходимые для эффективной реализации алгоритмов на ЭВМ. Приведенные примеры достаточно ясно характеризуют особенности подхода К. к изучаемым ею математич. объектам. То же различие подходов обнаруживается при изучении К. других математич. объектов (абстрактные автоматы, логич. сети и т. п.).

Особый интерес с точки зрения взаимоотношения К. с математикой представляет их подход к аппарату классической математич. логики. Математич. аспект предполагает максимальное упрощение системы аксиом и правил вывода, без чего невозможен эффективный анализ общих свойств и возможностей *логических исчислений*. К., ставящая задачу автоматизации дедуктивных построений на практический путь, начала развивать язык практической математич. логики. Этот язык относится к языку классической математич. логики, а как современный язык программирования (напр., *алгол*-68) — к языку алгоритмов Поста или нормальных алгорифмов Маркова. Правила вывода в этом языке (во взаимодействии с конкретными содержательными математич. текстами) имеют доказательную силу, не меньшую, чем сила, к-рая скрывается за словом «очевидно» в современных математич. монографиях.

Автоматизация дедуктивных построений представляет собой одну из наиболее важных частей раздела К., получившего наименование «искусственный интеллект». Естественный человеческий интеллект (мозг вместе с органами восприятия информации и выдачи ее во вне) представляет собой одну из наиболее интересных и сложных кибернетич. систем. Вопрос о том, как человек мыслит, был и продолжает оставаться одним из самых интересных и увлекательных научных вопросов. К. подходит к его решению не только с теоретической, но и с практич. стороны. Речь идет об автоматизации (полной или частичной — с подсказкой человека) различных аспектов интеллектуальной деятельности человека, а в конце концов — и всего интеллекта в целом.

Помимо автоматизации логич. мышления (дедуктивных построений), важными составными частями проблемы «искусственного интеллекта» являются задачи *распознавания образов* (прежде всего зрительных и слуховых), операции в естественных человеческих языках (распознавание смысла фраз и выражений, поддержание диалога и т. п.), задачи обучения и самообучения и т. д. Важное значение имеют задачи изучения и синтеза эффективных алгоритмов управления движениями искусственных конечностей человекоподобных роботов, синтеза искусственного голоса, управления им и др. Особая группа задач возникает при изучении целенаправленного поведения, методов выбора целей и подцелей и планов их достижения. Практический путь к созданию искусственного интеллекта лежит в создании диалоговых (человеко-машинных) систем, повышающих производительность труда человека в различных областях умственной деятельности (логич. вывод, переводы с одних естественных языков на другие, шахматная игра и т. п.). По мере их совершенствования доля ЭВМ в совместной работе будет непрерывно повышаться вплоть до достижения полной автоматизации соответствующего процесса.

Очень важным является вопрос о взаимоотношениях К. с современной вычислительной техникой. Эти взаимоотношения имеют две различные стороны. Во-первых, ЭВМ являются для К. основным инструментом исследований, а во-вторых, будучи сами сложными кибернетич. системами, они выступают в качестве важного объекта исследований К. Разумеется, в задачу К. не входят многие технич. вопросы, разрешающиеся при реальном проектировании ЭВМ. Однако вопросы архитектуры ЭВМ и вычислительных систем, организация управления вычислительным процессом (включая организацию баз данных) входят в компетенцию К. и представляют один из важных ее разделов. На это обстоятельство следует обратить особое внимание, ибо оно отличает понимание предмета К., сложившееся в СССР, от западного (прежде всего американского) понимания, где вопросы архитектуры и управления вычислит. системами относят к специальной компьютерной науке (computer science) и не включают их в К.

Кибернетич. системы встречаются практически во всех областях знания. Отличаясь теми или иными специфич. свойствами, такие системы могут изучаться кибернетич. методами, специально приспособленными к системам соответствующих классов. Тем самым становится возможным более глубокое их изучение. Так возникли и продолжают развиваться специализированные прикладные разделы К.: техническая К., экономическая К., биологическая К., медицинская К., военная К. Применение математических и кибернетических методов в языкознании привело к возникновению так наз. *математической лингвистики*. Эта наука имеет непосредственное отношение к языковым проблемам искусственного интеллекта.

Лит.: [1] Винер Н., Кибернетика..., пер. с англ., 2 изд., М., 1968; [2] Эшби У. Р., Введение в кибернетику, пер. с англ., М., 1959; [3] Глушков В. М., Введение в кибернетику, К., 1964; [4] Энциклопедия кибернетики, т. 1—2, К., 1974.

В. М. Глушков.

КИЛЛИНГА ВЕКТОР, точнее—киллинга векторное поле, или инфинитезимальное движение,— поле скоростей (локальной) однопараметрич. группы движений риманова пространства M. Точнее, векторное поле X на M наз. векторным полем Киллинга (к. в. п.), если оно удовлетворяет следующему уравнению Киллинга

$$L_X g = 0, \qquad (*)$$

где L_X— производная Ли по направлению X, а g — тензорное поле на M, определяющее структуру риманова пространства (риманова метрика). К. в. п. впервые были систематически изучены В. Киллингом [1], к-рый вывел также для них уравнение (*). В полном римановом пространстве любое к. в. п. полно, т. е. является полем скоростей однопараметрич. группы движений. Множество $i(M)$ всех к. в. п. на M образует алгебру Ли размерности не более $n(n+1)/2$, где $n = \dim M$, причем эта размерность равна $n(n+1)/2$ только для пространств постоянной кривизны. Множество всех полных к. в. п. образует подалгебру в $i(M)$, являющуюся алгеброй Ли группы движений пространства M. Производная Ли по направлению к. в. п. аннулирует не только метрику g, но и все другие поля, к-рые канонически строятся по метрике, напр. тензор кривизны Римана, оператор Риччи и т. д. Это позволяет установить связь между свойствами к. в. п. и тензором кривизны. Так, напр., в точке, где собственные значения оператора Риччи попарно различны, к. в. п. не может обращаться в нуль.

К. в. п. X, рассматриваемое как функция

$$X: T^*M \ni \alpha \longrightarrow \alpha(X)$$

на кокасательном многообразии T^*M, является первым интегралом (гамильтонова) геодезич. потока на T^*M, определяемого римановой метрикой. По аналогии, поле S контравариантных симметрич. тензоров на M наз. тензорным полем Киллинга, если соответствующая ему (полиномиальная по слоям) функция

$$S: \alpha \to S(\alpha, \ldots, \alpha)$$

на T^*M является первым интегралом геодезич. потока. Уравнение, задающее тензорное поле Киллинга, также наз. уравнением Киллинга. Множество всех тензорных полей Киллинга, рассматриваемых как функции на T^*M, образует (вообще говоря, бесконечномерную) алгебру Ли относительно скобки Пуассона, задаваемой стандартной симплектич. структурой на T^*M.

Более общо, пусть $Q: \mathrm{Rep}^k M \to W$ — геометрич. объект порядка k на многообразии M, т. е. $GL^k(n)$-эквивариантное отображение многообразия реперов порядка k на M в пространство W, на к-ром действует группа $GL^k(n)$ k-струй в нуле диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$, сохраняющих начало координат. Векторное поле X на M наз. инфинитезимальным автоморфизмом, или полем Киллинга объекта Q, если соответствующая ему (локальная) однопараметрич. группа преобразований φ_t многообразия M индуцирует группу $\varphi_t^{(k)}$ преобразований многообразия реперов $\mathrm{Rep}^k M$, сохраняющую Q: $Q \circ \varphi_t^{(k)} = Q$. Уравнение, задающее поля Киллинга объекта Q, наз. уравнением Ли — Киллинга, а соответствующий ему оператор — оператором Ли.

Лит.: [1] Killing W., «J. reine und angew. Math.», 1892, Bd 109, S. 121—86; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [4] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [5] Kobayashi S., Transformation groups in differential geometry, B.— Hdlb.— N. Y., 1972; [6] Kumpera A., Spencer D., Lie equations. V. 1. General theory, N. Y., 1972; [7] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, v. 2, N. Y., 1969; [8] Егоров И. П., Движения в пространствах аффинной связности, Казань, 1965, с. 5—179.

Д. В. Алексеевский.

КИЛЛИНГА ФОРМА — билинейная форма специального вида на конечномерной алгебре Ли, введенная В. Киллингом [1]. Пусть $\mathfrak{G}$ — конечномерная алгебра Ли над полем k. К. ф. на алгебре $\mathfrak{G}$ наз. билинейная форма

$$B(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y), \quad x, y \in \mathfrak{G},$$

где tr обозначает след линейного оператора, а ad x — образ x при присоединенном представлении алгебры $\mathfrak{G}$, т. е. линейный оператор на векторном пространстве $\mathfrak{G}$, определенный правилом $z \to [x, z]$, $[,]$ — операция коммутирования в алгебре Ли $\mathfrak{G}$. К. ф. симметрична. Операторы ad$x$, $x \in \mathfrak{G}$, кососимметричны относительно К. ф., т. е.

$$B([x, y], z) = B(x, [y, z]) \text{ для всех } x, y, z \in \mathfrak{G}.$$

Если $\mathfrak{G}_0$— идеал алгебры $\mathfrak{G}$, то сужение К. ф. на $\mathfrak{G}_0$ совпадает с К. ф. алгебры $\mathfrak{G}_0$. Всякий коммутативный идеал $\mathfrak{G}_0$ содержится в ядре К. ф. Если К. ф. невырождена, то алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста.

Пусть характеристика поля k равна 0. Радикал алгебры $\mathfrak{G}$ совпадает с ортогональным дополнением относительно К. ф. к производной подалгебре $\mathfrak{G}' = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. Алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G} \perp \mathfrak{G}'$, т. е. когда $B([x, y], z) = 0$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{G}$ (критерий разрешимости Картана). Если алгебра $\mathfrak{G}$ нильпотентна, то $B(x, y) = 0$ для всех $x, y \in \mathfrak{G}$. Алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста тогда и только тогда, когда К. ф. невырождена (критерий полупростоты Картана).

Каждая комплексная полупростая алгебра Ли содержит вещественную форму Г (компактную форму Вейля) (см. *Комплексификация алгебры Ли*), на к-рой К. ф. отрицательно определена.

Лит.: [1] Killing W., «Math. Ann.», 1888, Bd 31, S. 252—90; 1889, Bd 33, S. 1—48; 1889, Bd 34, S. 57—122; 1890, Bd 36, S. 161—89; [2] Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, пер. с франц., М., 1949, с. 259—261; [3] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1976; [4] Капланский И., Алгебры Ли и локально компактные группы, пер. с англ., М., 1974; [5] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976.

Д. П. Желобенко.

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение неравновесной статистич. физики, используемое в теории газов, аэродинамике, физике плазмы, теории прохождения частиц через вещество, теории переноса излучения. Решение К. у. определяет функцию распределения динамич. состояний одной частицы, обычно в зависимости от времени, координаты и скорости.

В 80-х гг. 19 в. Л. Больцман (L. Boltzmann) сформулировал основное К. у. теории газов — нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (см. *Больцмана уравнение*), к-рое описывает движение молекул как нек-рый случайный процесс, определяемый механизмом бинарных соударений молекул. Входящие в уравнение коэффициенты (эффективные сечения) рассчитываются из уравнений классич. механики. Исследуя свойства решений кинетич. уравнения, Л. Больцман дал молекулярно-кинетич. истолкование второго начала термодинамики и установил статистич. смысл понятия энтропии (см. *Больцмана H-теорема*). В квантовой статистич. физике в простейшем случае уравнение Больцмана записывается аналогично классич. случаю, но с использованием квантовых эффективных сечений и с учетом требований симметрии. Для релятивистского газа уравнение Больцмана формулируется в ковариантном виде. Развит метод получения К. у. теории газа, учитывающий корреляции между динамич. состояниями молекул (см. *Боголюбова цепочка уравнений*). Исходя из *Лиувилля уравнения*, этим методом можно в низшем приближении получить уравнение Больцмана, если использовать разложения по степеням плотности газа.

Разложение по степеням малости энергии взаимодействия приводит к *Власова кинетическому уравнению* с самосогласованным полем, а в следующем приближении в пространственно однородном случае — к кинетическому уравнению Ландау, описывающему так наз. «диффузию в пространстве скоростей».

Известно небольшое число точных решений нелинейного К. у. Его численные решения трудны и при использовании ЭВМ. Более исследовано линеаризованное К. у., описывающее малые отклонения от равновесного решения нелинейного уравнения. По форме оно совпадает с линейными уравнениями переноса, возникающими в теории переноса излучения и нейтронов (см. *Переноса излучения теория*), а также в теории прохождения частиц через вещество.

Теория переноса излучения по своим задачам и методам их решения близка к теории переноса нейтронов. Расчет ядерных реакторов и защиты от ядерных излучений потребовал создания эффективных методов решения К. у. переноса нейтронов и гамма-квантов, а также способствовал созданию математич. теории линейного К. у. Если для нелинейного уравнения Больцмана теоремы существования и единственности решения и его асимптотич. поведение исследованы лишь в простейших случаях [1], то для линейного уравнения они получены в самой общей постановке математической теории ядерных реакторов [2], [3], [4]. Ряд задач решается аналитическими методами, в общем случае разработаны многочисл. приближенные методы решения, приспособленные для удобного программирования на ЭВМ (см. *Переноса уравнения*, численные методы решения).

Задача о прохождении заряженных частиц через вещество сводится часто к решению линейного уравнения переноса при анизотропном рассеянии или к решению линеаризованного уравнения Ландау (напр., при определении углового распределения частиц, вылетающих с поверхности тела, или при определении энергетич. спектра заряженных частиц в веществе).

Лит.: [1] Карлеман Т., Математические задачи кинетической теории газов, пер. с франц., М., 1960; [2] Владимиров В. С., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1961, № 61; [3] Шихов С. Б., Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ, М., 1973; [4] Кейз К., Цвайфель П., Линейная теория переноса, пер. с англ., М., 1972; [5] Коган М. Н., Динамика разреженного газа (кинетическая теория), М., 1967; [6] Силин В. П., Введение в кинетическую теорию газов, М., 1971; [7] Соболев В. В., Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., 1956.

В. А. Чуянов.

КИРХГОФА МЕТОД — метод приближенного решения задач теории дифракции коротких волн; предложен Г. Кирхгофом (G. Kirchhoff). В своем простейшем варианте К. м. сводится к следующему: пусть волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца и рассматривается задача рассеяния плоской волны ограниченным выпуклым препятствием Σ, на к-ром выполняется классическое краевое условие $u|_{\Sigma}=0$. Решение сводится к нахождению функции, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца $(\Delta+k^2)u=0$, для указанного краевого условия и представляющейся в виде суммы $u=e^{ikx}+U$, где U отвечает *излучения условиям* Зоммерфельда. Решение задачи существует и для него имеет место интегральное представление

$$u(x)=e^{ikx_1}+\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\frac{\partial u(x')}{\partial n_{x'}}\frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|}\,d\Sigma_{x'},\qquad (1)$$

$$x=(x_1,\ x_2,\ x_3),\ x'=(x_1',\ x_2',\ x_3'),$$

$$|x-x'|=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-x_i')^2},$$

где $\partial/\partial n_{x'}$ —дифференцирование по нормали к Σ. Нормаль берется внешней по отношению к бесконечной области, ограниченной Σ. Предполагается, что на части Σ, освещенной плоской волной e^{ikx}, $\partial u/\partial n_{x'}$ приближенно равна тому выражению, к-рое получается по *лучевому методу*. На теневой части полагают $\partial u(x')/\partial n_{x'}=0$. Полученное таким путем выражение u_K наз. приближением по Кирхгофу для u.

В освещенной области u_K и геометрич. приближении для u в главных членах совпадают. В окрестности границы, отделяющей освещенную область от зоны тени, главный член асимптотич. разложения u_K выражается через интеграл Френеля $\int_0^\alpha \exp\, i\alpha^2 d\alpha$, в зоне тени $u_K=O(1/k)$ (на самом деле u в зоне тени убывает гораздо быстрее, чем $1/k$).

К. м. дает асимптотически правильную в главных членах формулу для u, сохраняющую свою справедливость и при $|x|\to\infty$. В следующих порядках по k приближение по Кирхгофу уже неприменимо.

Лит.: [1] Хёнл X., Мауэ А., Вестпфаль К., Теория дифракции, пер. с нем., М., 1964. *В. М. Бабич.*

КИРХГОФА ФОРМУЛА, Кирхгофа интеграл,— формула

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{f(y,\ t-r)}{r}\,d\Omega_y+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial n}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial r}{\partial n}\right]_{\tau=t-r}d\sigma_y, \qquad (1)$$

которая выражает значение $u(x,\ t)$ решения неоднородного волнового уравнения

$$u_{tt}-u_{x_1x_1}-u_{x_1x_2}-u_{x_3x_3}=f(x,\ t) \qquad (2)$$

в любой точке $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)\in\Omega$ в момент времени t через запаздывающий объемный потенциал

$$v_1(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\frac{f(y,\ t-r)}{r}\,d\Omega_y,\ y=(y_1,\ y_2,\ y_3),$$

с плотностью f и через значения функции $u(y,\ t)$ и ее производных 1-го порядка на границе σ области Ω в момент времени $\tau=t-r$. Здесь Ω — ограниченная область трехмерного евклидова пространства с кусочно гладкой границей σ, n — внешняя нормаль к σ, $r=|x-y|$ — расстояние между точками x и y.

Пусть

$$v_1(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\frac{\mu_1(y,\ t-r)}{r}\,d\sigma_y,$$

$$v_2(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\frac{\partial^*}{\partial^* n}\frac{\mu_2(y,\ t-r)}{r}\,d\sigma_y,$$

где

$$\frac{\partial^*}{\partial^* n}\frac{\mu_2(y,\ t-r)}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial\mu_2(y,\ t-r)}{\partial t}-\mu_2(y,\ t-r)\frac{\partial(1/r)}{\partial n}.$$

Интегралы $v_1(x,\ t)$ и $v_2(x,\ t)$ наз. запаздывающими потенциалами простого и двойного слоев.

К. ф. (1) означает, что любое дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x,\ t)$ уравнения (2) представляется в виде суммы запаздывающих потенциалов простого слоя, двойного слоя и объемного потенциала:

$$u(x,\ t)=v_1(x,\ t)+v_2(x,\ t)+v_3(x,\ t).$$

В случае, когда $u(x,\ t)=u(x)$, $f(x,\ t)=f(x)$ не зависят от t, К. ф. принимает вид

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\frac{f(y)}{r}\,d\Omega_y+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u(y)}{\partial n}-u(y)\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right]d\sigma_y$$

и дает решение уравнения Пуассона $\Delta u=-f(x)$.

К. ф. широко применяется при решении целого ряда задач. Например, если Ω — шар $|y-x|\leqslant t$ радиуса t

с центром в точке x, то формула (1) преобразуется в соотношение

$$u(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int_{r\leqslant t}\frac{f(y,\ t-r)}{r}\,dy+tM_t[\psi]+\frac{\partial}{\partial t}\,tM_t[\varphi], \tag{3}$$

где

$$M_t[\varphi]=\frac{1}{4\pi}\int_{|y|=1}\varphi(x+ty)\,ds_y$$

— среднее значение функции $\varphi(x)$ по поверхности сферы $|y-x|=t$,

$$\varphi(x)=u\Big|_{t=0},\quad \psi(x)=u_t\Big|_{t=0}. \tag{4}$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные в шаре $|x|\leqslant R$ функции, имеющие непрерывные частные производные 3-го и 2-го порядков соответственно, а $f(x,\ t)$ дважды непрерывно дифференцируема при $|x|<R$, $0\leqslant t\leqslant R-|x|$, то функция $u(x,\ t)$, заданная формулой (3), является регулярным решением *Коши задачи* (4) для уравнения (2) при $|x|<R$ и $t<R-|x|$.

Формула (3) также наз. К. ф.

К. ф. в виде

$$u(x,\ t)=tM_t[\psi]+\frac{\partial}{\partial t}\,tM_t[\varphi]$$

для волнового уравнения

$$\Delta u=u_{tt} \tag{5}$$

примечательна тем, что из нее следует *Гюйгенса принцип*: решение (волна) $u(x,\ t)$ уравнения (5) в точке $(x,\ t)$ пространства независимых переменных $x_1,\ x_2,\ x_3,\ t$ вполне определяется значениями φ, $\partial\varphi/\partial n$ и ψ на сфере $|y-x|=t$ с центром в точке x и радиуса $|t|$.

Пусть дано уравнение нормально гиперболического типа

$$\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{m+1}a^{ij}(x)\,u_{x_i y_j}+\sum\nolimits_{j=1}^{m+1}b^j(x)\,u_{x_j}+c(x)\,u=f(x) \tag{6}$$

с достаточно гладкими в нек-рой $(m+1)$-мерной области Ω_{m+1} коэффициентами $a^{ij}(x)$, $b^j(x)$, $c(x)$ и правой частью $f(x)$, т. е. уравнение, форма

$$\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{m+1}a^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j$$

к-рого в любой точке $x\in\Omega_{m+1}$ с помощью невырожденного линейного преобразования приводится к виду

$$y_0^2-\sum\nolimits_{i=1}^{m}y_i^2.$$

К. ф. обобщена на уравнение (6) в случае, когда число $m+1$ независимых переменных $x_1,\ \ldots,\ x_{m+1}$ четно [4]. При этом существенным моментом было построение функции $\overset{k}{\varphi}$, обобщающей на случай уравнения (6) ньютоновский потенциал $^1/r$. Для частного случая уравнения (6)

$$u_{tt}-\sum\nolimits_{i=1}^{m}u_{x_i x_i}=0,\ \ m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2) \tag{7}$$

обобщенная К. ф. принимает вид

$$u(y,\ t)=\gamma\int_\sigma\sum\nolimits_{i=1}^{k}(-1)^k\left\{\frac{\partial\overset{k-i+1}{\varphi}}{\partial n}\left[\frac{\partial^{i-1}u}{\partial t^{i-1}}\right]-\right.$$

$$\left.-\overset{k-i+1}{\varphi}\left[\frac{\partial^i u}{\partial n\,\partial t^{i-1}}\right]-\overset{k-i+1}{\varphi}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right]\right\}d\sigma_x, \tag{8}$$

где γ — некоторое положительное число, σ — кусочно гладкая граница m-мерной ограниченной области Ω_m, содержащей внутри себя точку y, n — внешняя нормаль к σ;

$$\overset{i}{\varphi}=\gamma_i r^{-k-i+1},\ \ \overset{k}{\varphi}=r^{2-m},\ \ r=|y-x|;$$

$$\gamma_i=\mathrm{const},\ \ i=1,\ \ldots,\ k-1;\ \ k=(m-1)/2;$$

[ψ] означает запаздывающее значение $\psi(x, t)$:

$$[\psi(x, t)]=\psi(x, t-r).$$

Формулу (8) для уравнения (6) иногда наз. формулой Кирхгофа — Соболева.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976; [3] Bateman H., Partial Differential equations of Mathematical Physics, N. Y., 1944, Camb., 1959; [4] Mathisson M., «Math. Ann.», 1932, Bd 107, S. 400—19; [5] его же, «Acta Math.», 1939, v. 71, № 3—4, p. 249—82; [6] Михлин С. Г., Линейные уравнения в частных производных, М., 1977; [7] Соболев С. Л., «Докл. АН СССР», 1933, т. 1, № 6, с. 256—62; [8] его же, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [9] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, 3 изд., М., 1957; [10] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972. *А. М. Нахушев.*

КИТАЙСКАЯ ТЕОРЕМА ОБ ОСТАТКАХ: пусть A — ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей и $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ — такая совокупность идеалов кольца A, что $\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j=A$ для любых $i\neq j$; тогда для любого набора элементов $x_1, \ldots, x_n\in A$ найдется элемент $x\in A$ такой, что $x\equiv x_i \pmod{\mathfrak{a}_i}$, $i=1, \ldots, n$. В частном случае, когда A — кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, К. т. об о. утверждает, что для любого набора попарно взаимно простых чисел $a_1, \ldots, a_n$ найдется целое число x, дающее заданные остатки при делении его на $a_1, \ldots, a_n$. В этой форме К. т. об о. была известна еще в Древнем Китае, с чем и связано название теоремы.

Наиболее часто К. т. об о. применяется в случае, когда A — *дедекиндово кольцо* и $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{p}_1^{s_1}, \ldots, \mathfrak{a}_n=\mathfrak{p}_n^{s_n}$, где $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ — различные простые идеалы в A (если идеалы $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ удовлетворяют условию теоремы, то этим же свойством обладают и идеалы $\mathfrak{a}_1^{s_1}, \ldots, \mathfrak{a}_n^{s_n}$ для любых натуральных $s_1, \ldots, s_n$). К. т. об о. в этом случае показывает, что для любого набора $s_1, \ldots, s_n$ найдется $x\in A$ такой, что разложение главного идеала (x) в произведение простых идеалов имеет вид

$$(x)=\mathfrak{p}_1^{s_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{s_n}\mathfrak{q}_1^{t_1}\ldots\mathfrak{q}_m^{t_m}\quad (m\geqslant 0),$$

где идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ попарно различны (теорема о независимости показателей).

Лит.: [1] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] его же, Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966. *Л. В. Кузьмин.*

КЛАСС — 1) Термин, употребляемый в математике в основном как синоним термина «множество» для обозначения произвольных совокупностей объектов, обладающих каким-либо определенным свойством или признаком (напр., в алгебре — классы эквивалентности относительно данного отношения эквивалентности). Иногда К. предпочитают наз. совокупности, элементами которых являются множества (напр., в рекурсивной теории — перечислимые классы). В некоторых случаях под влиянием аксиоматической теории множеств (см. п. 2) термин «К.» применяется для того, чтобы подчеркнуть, что данная совокупность оказывается собственно К., а не множеством в узком смысле (напр., в алгебре — примитивные классы универсальных алгебр, называемые также многообразиями). Теоретико-множественные операции над К. определяются так же, как и над множествами.

2) К. в аксиоматической теории множеств (точнее, в аксиоматич. системе Гёделя — Бернайса) — один из видов исходных объектов, рассматриваемых в этих системах, причем различие между множествами и К. состоит в том, что элементами К. и множеств, рассматриваемых в данной теории, могут быть только множества, но не классы. Идея введения так понимаемых К. в теорию множеств принадлежит

Дж. Нейману (J. Neumann) и основывается на его замечании, что известные противоречия канторовской теории множеств возникают не из-за допущения образования очень больших множеств, а из-за того, что таким множествам разрешается быть элементами других множеств. Кроме указанного ограничения, в названных аксиоматич. системах допускаются все обычные теоретико-множественные операции над К., приводящие к К., а не к множествам; к тому же для всякого в нек-ром смысле допустимого предиката, определенного на множествах, существует К., состоящий в точности из множеств, удовлетворяющих рассматриваемому предикату. Доказано, что непротиворечивость каждой из систем Гёделя — Бернайса и Цермело — Френкеля следует из непротиворечивости другой (чем подтверждается точка зрения Дж. Неймана). См. также *Аксиоматическая теория множеств.*

Лит.: [1] Коэн Пол Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; [2] Френкель А.-А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966. *В. А. Душский.*

3) К. риманова пространства V^l — число p такое, что V^l может быть локально изометрически вложено в $(l+p)$-мерное евклидово пространство E^{l+p} и не может быть вложено в евклидово пространство меньшего числа измерений. От вложения требуется достаточно высокая регулярность (т. к. риманово пространство V^l допускает локальное изометрическое вложение в виде C^1-гладкой гиперповерхности в E^{l+1} (теорема Нэша)); класс аналитич. риманова пространства V^l не превосходит $l(l+1)/2$ (теорема Жане — Картана).

К. риманова пространства равен нулю в том и только том случае, если тензор кривизны многообразия V^l тождественно равен нулю. Метрики постоянной положительной кривизны имеют К. 1 и реализуются в виде гиперсфер евклидова пространства. К. l-мерного пространства постоянной отрицательной кривизны равен $l-1$ (теорема Картана). К. риманова многообразия V^l строго отрицательной двумерной секционной кривизны не меньше $l-1$ (см. [3]). Если риманово многообразие V^l имеет отрицательную k-мерную секционную кривизну, где k — четно, то К. $p \geqslant (l-1)/(k-1)$. Найден алгебраич. критерий [4], позволяющий установить, будет ли К. данного многообразия равен 1, основанный на том факте, что для метрик К. 1 при нек-рых дополнительных условиях уравнения Петерсона — Кодацци являются следствием уравнений Гаусса.

Если риманово многообразие V^l является метрич. произведением римановых многообразий V^{l_i}:

$$V^l = V^{l_1} \times \ldots \times V^{l_k}, \ l_1 + \ldots + l_k = l,$$

причем V^{l_i} — пространства К. 1, то V^l есть пространство К. $p=k$ (см. [5]). Если многообразия V^{l_i} имеют постоянную отрицательную секционную кривизну, то К. их метрич. произведения равен $l-k$ (см. [5]).

К. двумерных римановых многообразий знакопостоянной кривизны равен 1. Вопрос остается открытым (1978) в случае метрики знакопеременной кривизны. Построен [6] пример двумерного риманова многообразия класса $C^{2,1}$, не допускающего локально изометричного погружения класса C^2 в E^3. Однако любая компактная часть полной метрики на плоскости изометрично погружается в E^4 (причем, если метрика имела регулярность $C^{3\alpha}$, то поверхность принадлежит классу $C^{2,\alpha}$), т. е. К. не больше двух [7].

Понятие К. погружения вводится и для псевдориманова пространства. Пусть $V^n(p, q)$ — псевдориманово многообразие, метрический тензор которого имеет p положительных и q отрицательных собственных значений, $p+q=n$, а $E^n(p, q)$ — псевдоевклидово пространство с метрикой

$$ds^2=dx_1^2+\ldots+dx_p^2-dx_{p+1}^2-\ldots-dx_n^2.$$

Пусть k_0 — наименьшее неотрицательное целое число такое, что $V^n(p, q)$ допускает погружение в пространство с $E^{n+k_0}(p, q+k_0)$. Для каждого k из $0\leqslant k\leqslant k_0$ определяется k-й К. погружения многообразия $V^n(p, q)$ как такое наименьшее число N_k, что $V^n(p, q)$ допускает погружение в $E^{n+N_k}(p+a_k, q+k)$, где $a_k=N_k-k$. К. погружения многообразия $V^n(p, q)$ определяется как $\min\limits_{0\leqslant k\leqslant k_0} N_k$.

Любое псевдориманово многообразие $V^n(p, q)$ с аналитич. метрикой допускает аналитич. и изометрич. погружение в $E^m(r, s)$, где $m=n(n+1)/2$, а r, s — любые заданные целые числа, удовлетворяющие условию $r\geqslant p$, $s\geqslant q$, т. е. $N_k\leqslant n(n+1)/2$ для всех k [8]. Если тензор Риччи для $V^n(p, q)$ равен нулю, то $N_k\neq 1$.

Если $V^n(p, q)$ имеет постоянную кривизну, то его К. равен 1, т. е. существует пространство $E^{n+1}(r, s)$ с $r\geqslant p$, $s\geqslant q$ такое, что $V^n(p, q)$ локально изометрично части гиперсферы в $E^{n+1}(r, s)$. Для пространств постоянной отрицательной кривизны $N_0=n-1$, тогда как $N=1$ (см. [9]).

Лит.: [1] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с нем., М., 1948; [2] Moor J., «Pacif. J. Math.», 1972, v. 40, № 1, p. 157—66; [3] Борисенко А. А., «Укр. геометр. сб.», 1973, в. 13, с. 15—18; [4] Розенсон Н. А., «Изв. АН СССР. Сер. Матем.», 1941, т. 5, с. 325—52; 1943, т. 7, с. 253—84; [5] Moor J., «J. Diff. Geometry», 1971, v. 5, № 1—2, p. 159—69; [6] Погорелов А. В., «Докл. АН СССР», 1971, т. 198, № 1, с. 42—43; [7] Позняк Э. Г., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, № 4, с. 47—76; [8] Фридман А., в кн.: Гравитация и топология, пер. с англ., М., 1966, с. 182—88; [9] Борисенко А. А., «Укр. геометр. сб.», 1976, в. 19, с. 11—18. *А. А. Борисенко.*

КЛАССИФИЦИРУЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВО — база B_0 универсального расслоения $\xi=(E_0, p_0, B_0)$.

Универсальность расслоения ξ понимается в следующем смысле. Пусть $k_G(X)$ — множество классов эквивалентности (относительно изоморфизма, накрывающего тождественное отображение X) локально тривиальных расслоений над клеточным разбиением X со структурной группой G. Если $\xi=(E, p, B)$ — локально тривиальное расслоение со структурной группой G, B' — топологич. пространство, $f, g: B'\to B$ — гомотопные отображения, то индуцированные расслоения $f^*(\xi)$ и $g^*(\xi)$ над B' принадлежат одному и тому же классу $k_G(B')$. Локально тривиальное расслоение $\xi^G=(EG, p, BG)$ наз. **универсальным**, если отображение $[X, BG]\to k_G(X)$, $f\to f^*(\xi^G)$ взаимно однозначно. Пространство BG в этом случае наз. также **классифицирующим пространством группы** G. Главное расслоение со структурной группой G универсально (в классе локально тривиальных расслоений над клеточными разбиениями), если пространство расслоения имеет нулевые гомотопич. группы.

Важнейшие примеры К. п. BO_n, BSO_n, BU_n, BSU_n для групп O_n, SO_n, U_n, SU_n соответственно конструируются следующим образом. Пусть $G(n, k)$ — *Грассмана многообразие*, оно является базой главного O_n-расслоения с *Штифеля многообразием* $V(n, k)$ в качестве пространства расслоения. Естественные вложения $G(n, k)\subset G(n, k+1)$ и $V(n, k)\subset V(n, k+1)$ позволяют строить объединения $G(n)=\bigcup_{k=1}^{\infty}G(n, k)$ и $V(n)=\bigcup_{k=1}^{\infty}V(n, k)$. Расслоение $(V(n), p_0, G(n))$ универсально, а $G(n)=BO_n$ есть К. п. для группы O_n ($\pi_i V(n, k)=0$ при $i<k-1$ и $\pi_i V(n)=0$ для всех i). Многообразие Грассмана $\tilde{G}(n, k)$ (пространство с фиксированной ориентацией) приводит аналогично к К. п. $\bigcup_{k=1}^{\infty}\tilde{G}(n, k)=\tilde{G}(n)=BSO_n$ для группы SO_n. К. п. групп BU_n и BSU_n строятся так же, с той разницей, что здесь рассматриваются комплексные многообразия Грассмана.

Для любого O_n-расслоения (E, p, B) (B — клеточное разбиение) существует отображение $f: B \to G(n)$, при к-ром индуцированное расслоение над B изоморфно (E, p, B). В случае, когда B — гладкое n-мерное многообразие, а главное O_n-расслоение (E, p, B) ассоциировано с касательным векторным расслоением к B, построение отображения f особенно просто: многообразие B вкладывается в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+k}$ при достаточно большом k и полагается $f(x)$, $x \in B$, совпадающим с n-мерным подпространством в $\mathbb{R}^{n+k}$, к-рое получается сдвигом касательного пространства к B в точке x. Многообразия Грассмана дают удобный способ конструкции К. п. для векторных расслоений. Имеются также конструкции, позволяющие функториально строить К. п. для любой топологич. группы. Наиболее употребительная из них — конструкция Милнора ω_G (см. *Главное расслоение*), причем расслоение ω_G универсально в более широкой категории всех нумерируемых G-расслоений над произвольным топологич. пространством.

Важную роль играют К. п. для сферических расслоений BG_n над клеточным разбиением B; для построения пространств BG_n (и BSG_n для ориентированных сферич. расслоений) конструкция Милнора не пригодна, так как множество гомотопич. эквивалентностей $S^n \to S^n$ не группа, а H-пространство. Явная конструкция этих пространств изложена в [2].

Существуют также К. п. BPl_n и $BTop_n$ для кусочно линейных и топологич. микрорасслоений.

Имеется естественное отображение $BO_n \to BO_{n+1}$, соответствующее прибавлению к векторному расслоению одномерного тривиального расслоения. Отображение это можно считать вложением, так что имеет смысл объединение $BO = \bigcup_{n=1}^{\infty} BO_n$ в топологии индуктивного предела. Совершенно аналогично строятся пространства BSO, BU, BSU, BG, BSG, BPl, $BTop$ и т. д. Это — К. п. для классов стационарной эквивалентности расслоений, заданных над связными конечными клеточными разбиениями. Все эти пространства имеют структуру H-пространств, связанную с операцией суммы Уитни расслоений.

Термин «К. п.» употребляется не всегда в связи с расслоениями. Иногда К. п. наз. представляющее пространство (объект) для произвольного представимого функтора $T: H \to Ens$ гомотопич. категории в категорию множеств. Примером такого К. п. является пространство $B\Gamma_q$, классифицирующее в нек-ром смысле *слоения* коразмерности q на многообразии, или, более общо, q-структуры Хефлигера на произвольном топологич. пространстве.

Лит.: [1] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [2] Бордман Дж., Фогт Р., Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах, пер. с англ., М., 1977.

А. Ф. Харшиладзе.

КЛАССИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа автоморфизмов нек-рой *полуторалинейной формы* f на правом K-модуле E, где K — кольцо; при этом f и E (а иногда и K) удовлетворяют дополнительным условиям. Точного определения К. г. нет. Предполагается, что f — либо нулевая, либо невырожденная рефлексивная форма; иногда считается, что E — свободный модуль конечного типа. Часто под К. г. понимают также и другие группы, тесно связанные с группами автоморфизмов форм (напр., их коммутанты или факторы по центру) или нек-рые их расширения (напр., группы полулинейных преобразований модуля E, сохраняющие f с точностью до множителя и применения автоморфизма кольца K).

К. г. тесно связаны с геометрией: они могут быть охарактеризованы как группы таких преобразований проективных пространств (а также нек-рых многообразий, связанных с грассманианами, см. [2]), к-рые сохраняют естественные отношения инцидентности. Напр., согласно основной теореме проективной геометрии, группа всех преобразований n-мерного проективного пространства P над телом K, переводящих любые три коллинеарные точки снова в три коллинеарные точки, совпадает при $n \geqslant 3$ с К. г. всех проективных коллинеаций пространства P. По этой причине изучение структуры К. г. имеет геометрический смысл — оно равносильно изучению симметрий (автоморфизмов) соответствующей геометрии.

Теория К. г. наиболее глубоко развита для случая, когда K — тело, а E — векторное пространство над K конечной размерности n. Далее эти условия предполагаются выполненными; в этой ситуации классическими наз. обычно группы из следующих (описываемых ниже) серий: $GL_n(K)$, $SL_n(K)$, $Sp_n(K)$, $O_n(K, f)$, $U_n(K, f)$.

1) Пусть f — нулевая форма. Группа всех автоморфизмов формы f совпадает с группой всех автоморфизмов пространства E (т. е. биективных линейных отображений E в E); она обозначается $GL_n(K)$ и наз. полной линейной группой от n переменных над телом K. Подгруппа в $GL_n(K)$, порожденная всеми *трансвекциями*, обозначается $SL_n(K)$ и наз. специальной линейной группой (или унимодулярной группой) от n переменных над телом K. Она совпадает с множеством автоморфизмов, имеющих *определитель*, равный 1.

2) Пусть f — невырожденная полуторалинейная форма (относительно инволюции J тела K), для которой отношение ортогональности симметрично, т. е.

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow f(y, x) = 0.$$

Такая форма наз. рефлексивной. Группа $U_n(K, f)$ автоморфизмов формы f наз. унитарной группой от n переменных над телом K относительно формы f. Имеются лишь две возможности: либо K — поле, $J=1$ и f — кососимметрическая билинейная форма, либо, умножая f на подходящий скаляр и меняя J, можно добиться того, чтобы f стала эрмитовой формой или косоэрмитовой формой. Для кососимметрич. формы f группа $U_n(K, f)$ наз. симплектической группой от переменных над телом K (если char $K=2$, нужно считать, что f — знакопеременная форма); она обозначается $Sp_n(K)$. Это обозначение не содержит f, поскольку все невырожденные знакопеременные формы на E эквивалентны и определяют изоморфные симплектич. группы. В этом случае n четно. Для эрмитовых и косоэрмитовых форм выделяется случай, когда K — поле характеристики, отличной от 2, $J=1$, а f — симметрическая билинейная форма. Тогда $U_n(K, f)$ наз. ортогональной группой от n переменных над полем K относительно формы f и обозначается $O_n(K, f)$. Ортогональные группы могут быть определены (особым способом) и для полей характеристики 2 (см. [2]). Часто термин «унитарная группа» употребляется в более узком смысле — для групп $U_n(K, f)$, не являющихся ортогональными или симплектическими, т. е. соответствующих нетривиальным инволюциям J.

К каждой из основных серий К. г. относят также и их проективные образы $PGL_n(K)$, $PSL_n(K)$, $PSp_n(K)$, $PO_n(K, f)$, $PU_n(K, f)$, т. е. их факторгруппы по пересечениям с центром Z_n группы $GL_n(K)$. Группу

$$O_n^+(K, f) = O_n(K, f) \cap SL_n(K),$$

коммутант $\Omega_n(K, f)$ группы $O_n(K, f)$ и группу

$$U_n^+(K, f) = U_n(K, f) \cap SL_n(K)$$

и их проективные образы также относят к сериям ортогональных и унитарных К. г. соответственно.

Классическим направлением в теории К. г. является выяснение их алгебраич. строения, к-рое сводится к описанию нормальных рядов подгрупп и их последовательных факторов (в частности, к описанию нормальных делителей и выяснению вопроса о простоте), описанию автоморфизмов и изоморфизмов К. г. (и, более общо, гомоморфизмов), описанию различных типов систем порождающих элементов и соотношений между ними и т. п. Так, основные утверждения о строении групп типа $GL_n(K)$ и $SL_n(K)$ следующие. Коммутантом $GL_n(K)$, $n \geqslant 2$, является $SL_n(K)$, кроме случая $n=2$ и $K=\mathbb{F}_2$ (здесь $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов). Центр Z_n группы $GL_n(K)$ состоит из всех гомотетий $x \to x\alpha$, где α — элемент центра группы K^*. Имеется нормальный ряд подгрупп

$$GL_n(K) \supset SL_n(K) \supset SL_n(K) \cap Z_n \supset \{1\}.$$

Группа $GL_n(K)/SL_n(K)$ изоморфна K^*/C, где K^* — мультипликативная группа тела K, а C — ее коммутант. Группа $SL_n(K) \cap Z_n$ является центром в $SL_n(K)$ и факторгруппа

$$SL_n(K)/(SL_n(K) \cap Z_n) = PSL_n(K)$$

является простой во всех случаях, кроме $n=2$, $K=\mathbb{F}_2$ или $\mathbb{F}_3$. Подробнее см. *Полная линейная группа*, *Специальная линейная группа*, *Симплектическая группа*, *Ортогональная группа*, *Унитарная группа*. Строение К. г. существенно зависит от ее типа, тела K, свойств формы f и числа n. Для одних типов К. г. оно выяснено весьма детально, для других имеются еще открытые вопросы (последнее относится в основном к случаю групп типа $U_n(K, f)$, где f — анизотропная форма). Типичным в построении структурной теории К. г. является наличие утверждений, справедливых почти для всех K, f и n, и исследование различных исключительных случаев, когда эти утверждения не выполняются (такие исключения возникают, напр., для небольших значений n, для конечных полей K маленького порядка или для специальных значений индекса формы f).

Особое место занимает вопрос об изоморфизмах К. г. Среди всего множества изоморфизмов выделяются **типовые изоморфизмы** — изоморфизмы между $G(n, K, f)$ и $G'(n', K', f')$, определение к-рых не зависит от специальных свойств тела K (кроме, быть может, его коммутативности). Все прочие изоморфизмы наз. **нетиповыми**. Напр., существует (типовой) изоморфизм $Sp_2(K)$ на $SL_2(K)$, где K — любое поле, или $U_2^+(K, f)$ на $SL_2(K_0)$, где K — любое поле, $J \neq 1$, f — форма индекса 1 и K_0 — поле инвариантов инволюции J. Подробное описание известных типовых изоморфизмов см. [2], [3]. Из нетиповых изоморфизмов известны следующие:

$$PSL_2(\mathbb{F}_4) \cong PSL_2(\mathbb{F}_5), \; PSL_2(\mathbb{F}_7) \cong PSL_3(\mathbb{F}_2),$$
$$PSp_4(\mathbb{F}_2) \cong PU_4^+(\mathbb{F}_4).$$

Известно также, что группы $PSL_n(K)$ и $PSL_m(K')$, $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, могут быть изоморфны только при $n=m$, кроме случая

$$PSL_2(\mathbb{F}_7) \cong PSL_3(\mathbb{F}_2);$$

при $m=n>2$ изоморфизм возможен лишь, если тела K и K' изоморфны или антиизоморфны, это же верно при $m=n=2$, если K и K' — поля, кроме случая

$$PSL_2(\mathbb{F}_4) \cong PSL_2(\mathbb{F}_5).$$

Группы $PSp_n(K)$ и $PSp_m(K')$ могут быть изоморфны только, если $n=m$ и $K \cong K'$, кроме случая $m=n=2$, $K=\mathbb{F}_4$, $K'=\mathbb{F}_5$. Между группами $PSL_n(K)$, $PSp_m(K)$, $P\Omega_q(K, f)$, где K — конечное поле, нет никаких других изоморфизмов, кроме указанных выше.

Перечисленные результаты о строении К. г. и их изоморфизмах получены классич. методами линейной алгебры и проективной геометрии. Их основу составляет исследование специальных типов преобразований из К. г. и их геометрич. свойств главным образом, изучение инволюций и плоских вращений. Позднее в теорию К. г. были введены методы теории групп Ли и алгебраич. геометрии, после чего теория К. г. стала частью общей теории полупростых алгебраич. линейных групп, в к-рой К. г. появляются в качестве форм: всякая форма простой алгебраической линейной группы классич. типа (т. е. типа A_n, B_n, C_n или D_n) является К. г. (исключение составляет форма D_4, связанная с внешним автоморфизмом третьего порядка). В случае, когда K есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, К. г. естественно снабжается структурой группы Ли, а для p-адических полей — структурой p-адической аналитич. группы. Это позволяет использовать при изучении таких К. г. топологич. методы, а также, наоборот, получать информацию о топологич. строении многообразия К. г. (напр., о его конечно клеточном разбиении) из знания ее алгебраич. структуры.

В более общей ситуации (когда E — модуль над кольцом K) результаты о К. г. не столь исчерпывающи (см. [3]). В этой своей части теория К. г. смыкается с алгебраической K-теорией.

Лит.: [1] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [2] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [3] Автоморфизмы классических групп, сб. пер., пер. с англ. и франц., М., 1976; [4] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966. *В. Л. Попов.*

КЛАССИЧЕСКИ ПОЛУПРОСТОЕ КОЛЬЦО — ассоциативное артиново справа (или, что равносильно, артиново слева) кольцо с нулевым *Джекобсона радикалом.* Строение К. п. к. описывает *Веддерберна — Артина теорема.* Класс К. п. к. может быть охарактеризован и гомологическими свойствами (см. *Гомологическая классификация колец*). К. п. к. является каждая *групповая алгебра* конечной группы над полем, характеристика к-рого взаимно проста с порядком этой группы. Коммутативные К. п. к. суть конечные прямые суммы полей. С К. п. к. связана теорема Голди, утверждающая, что кольцо обладает левым классическим кольцом частных, являющимся К. п. к., тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию максимальности для левых аннуляторов и не содержит прямых сумм левых идеалов. *Л. А. Скорняков.*

КЛАССИЧЕСКИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ — общее название *Якоби многочленов*, *Эрмита многочленов*, *Лагерра многочленов* и *Чебышева многочленов.* Эти системы *ортогональных многочленов* обладают общими свойствами:

1) Весовая функция $\varphi(x)$ на интервале ортогональности (a, b) удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{p_0+p_1x}{q_0+q_1x+q_2x^2}\equiv\frac{A(x)}{B(x)},\quad x\in(a, b),$$

причем на концах интервала ортогональности выполняются условия

$$\lim_{x\to a+0}\varphi(x)B(x)=\lim_{x\to b-0}\varphi(x)B(x)=0.$$

2) Многочлен $y=P_n(x)$ порядка n удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$B(x)y''+[A(x)+B'(x)]y'-n[p_1+(n+1)q_2]y=0.$$

3) Имеет место обобщенная *Родрига формула*

$$P_n(x)=\frac{c_n}{\varphi(x)}\frac{d^n}{dx^n}[\varphi(x)B^n(x)],$$

где c_n — некоторый нормировочный коэффициент.

4) Производные К. о. м. суть также К. о. м. и ортогональны на том же интервале ортогональности, вообще говоря, с другим весом.

5) Для производящей функции

$$F(x,\ w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)}{n!c_n}w^n,\quad x\in(a,\ b),$$

имеет место представление

$$F(x,\ w)=\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\varphi(\lambda)}{1-wB'(\lambda)},\ x\in(a,\ b),$$

где $\lambda=\lambda(x,\ w)$ — тот корень квадратного уравнения $\zeta-x-wB(\zeta)=0$, который при малых $|w|$ ближе расположен к точке x.

Этими свойствами обладают только три из указанных систем ортогональных многочленов, а также системы, полученные из этих трех линейными преобразованиями независимого переменного.

В обобщенной формуле Родрига нормировочный коэффициент c_n обычно выбирается тремя различными способами с целью получения ортонормированных многочленов, либо ортогональных многочленов с единичным старшим коэффициентом, либо так наз. стандартизованных ортогональных многочленов, к-рые вводятся потому, что наиболее удобны в применениях и основные формулы для них имеют наиболее простой вид.

К. о. м. являются собственными функциями нек-рых задач на собственные значения для уравнений типа Штурма — Лиувилля, причем в этих задачах каждая система ортогональных многочленов (многочлены Якоби, многочлены Эрмита, многочлены Лагерра) является единственной последовательностью решений соответствующей системы уравнений (см. [4], с. 110).

Частные случаи К. о. м. определяются следующим выбором весовой функции и интервала ортогональности:

1) Многочлены Якоби $\{P_n(x;\ \alpha,\ \beta)\}$ ортогональны на сегменте $[-1,1]$ с весом $\varphi(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, где $\alpha>-1$, $\beta>-1$. В частности, при $\alpha=\beta$ имеем *ультрасферические многочлены*, или многочлены Гегенбауэра $\{P_n(x;\ \alpha)\}$. *Лежандра многочлены* $\{P_n(x)\}$ соответствуют значениям $\alpha=\beta=0$ и ортогональны на сегменте $[-1,1]$ с весом $\varphi(x)\equiv 1$. Если $\alpha=\beta=-1/2$, т. е. $\varphi(x)=$ $=[(1-x)(1+x)]^{-1/2}$, то имеем многочлены Чебышева первого рода $\{T_n(x)\}$, а при $\alpha=\beta=1/2$ — многочлены Чебышева второго рода $\{U_n(x)\}$.

2) Многочлены Эрмита $\{H_n(x)\}$ ортогональны на интервале $(-\infty,\ \infty)$ с весом $\varphi(x)=\exp(-x^2)$

3) Многочлены Лагерра $\{L_n(x;\ \alpha)\}$ ортогональны на интервале $(0,\ \infty)$ с весом $\varphi(x)=x^{\alpha}e^{-x}$, где $\alpha>-1$.

Лит.: [1] Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, М.—Л., 1950; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Т. 2, Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [3] Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, пер. с англ., М., 1948; [4] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Основы теории специальных функций, М., 1974; [5] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, М., 1976. См. также лит. при ст. *Ортогональные многочлены*. *П. К. Суетин.*

КЛАССИЧЕСКОЙ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, возникающие в астрономии в связи с изучением движения небесных тел в гравитационном поле. Классическими объектами, изучаемыми небесной механикой, являются планеты и спутники Солнечной системы. Движение звезд и звездных систем изучает звездная астрономия (см. *Звездной астрономии математические задачи*). Движение искусственных небесных тел исследует астродинамика. Так как расстояния между телами Солнечной системы велики по сравнению с размерами самих тел, то поступательное и вращательное движения можно изучать отдельно, причем при изучении поступательного движения все тела Солнечной системы можно рассматривать как материальные точки, взаимодействующие по закону тяготения Ньютона,— так наз. **задача N тел**. Идеализированной схемой этой задачи описывается большая часть задач классической небесной механики. Единственным универсальным методом получения решений этой задачи для произвольных начальных значений является численное интегрирование. Однако численное интегрирование не в состоянии выявить эволюцию системы на достаточно больших интервалах времени. Известны нек-рые частные классы решений, пригодные для любого момента времени. (напр., периодич. решения Эйлера и Лагранжа, см. [1]). Более полно изучены общие свойства *трех тел задачи*. В 1912 было найдено аналитич. решение этой задачи и координаты тел в виде рядов по степеням времени, сходящихся для любого момента. Однако эти ряды непригодны для практич. вычислений из-за их крайне медленной сходимости. Большая часть результатов, относящихся к задаче N тел, получена с помощью методов теории возмущений для планетной проблемы, т. е. в случае, когда масса $N-1$ тел мала по сравнению с массой центрального тела. Если пренебречь возмущениями, то уравнения движения вырождаются в уравнения задачи двух тел и интегрируются в замкнутой форме. Движение планеты подчиняется при этом законам Кеплера. Для достаточно малых масс удается получить аналитич. продолжение нек-рых важных классов решений: периодических и квазипериодических. Показано, что наиболее общим видом движения является квазипериодич. движение с несоизмеримыми частотами. Эти результаты позволяют приблизиться к решению проблемы устойчивости Солнечной системы под действием взаимных возмущений планет.

Наиболее полно исследована **ограниченная задача трех тел**, в к-рой два тела конечной массы движутся вокруг центра инерции по эллиптич. орбитам, а третье имеет пренебрежимо малую массу. Довольно полно исследована также **задача Хилла**, описывающая движение спутника, подвергающегося возмущениям со стороны весьма удаленного, но массивного тела. Ограниченная задача имеет важное значение для теории движения малых планет, задача Хилла — для теории движения Луны.

Для построения теорий движения конкретных небесных тел разработаны эффективные вычислительные методы, основанные на разложении решения в ряд по степеням малого параметра. Эти методы могут быть разбиты на две группы в зависимости от того, входит ли время только в аргументы тригонометрич. функций в выражениях для возмущений или эти выражения могут содержать время и в явном виде (так наз. **вековые возмущения**). Методы первой группы значительно сложнее и используются в тех случаях, когда необходимо получить решение на интервалах времени достаточно больших по сравнению с периодами невозмущенного движения (как, напр., в теории движения Луны). Для вычислительных методов небесной механики характерной чертой является необходимость выполнения большого объема вычислений.

Теория движений больших планет сводится к решению задачи N тел при $N=10$, под к-рыми понимается Солнце и девять планет. Уравнения движения интегрируются приближенно с помощью разложений в ряды (аналитич. методы) или численным интегрированием. Идеальная теория движения больших планет должна удовлетворять следующим четырем условиям: 1) она должна быть построена на основе единого математич. метода, 2) постоянные интегрирования должны быть определены, исходя из согласованной системы астрономич. постоянных, 3) точность теории должна соответствовать требованиям современных космич. экспериментов, 4) теория должна быть пригодной на длительные промежутки времени. Существующая к 70-м гг.

20 в. (и лежащая в основе всех астрономич. эфемерид) теория не удовлетворяет указанным выше требованиям. Она была создана разными авторами, различными методами и в разное время. Создание теории, удовлетворяющей современным требованиям, немыслимо без широкого использования ЭВМ и совершенных наблюдений.

Теория движения спутников во многом аналогична теории движения больших планет, однако особенностью этой задачи является то обстоятельство, что масса планеты, относительно к-рой вращается спутник, значительно меньше массы Солнца, притяжение к-рого существенно возмущает движение спутников. Для близких спутников необходимо также учитывать несферичность центрального тела. В связи с этим важное значение приобретает задача двух неподвижных центров, поскольку потенциал несферической планеты может быть довольно точно аппроксимирован потенциалом двух соответствующим образом подобранных точечных масс.

Лит.: [1] Дубошин Г. Н., Небесная механика, 2 изд., М., 1968; [2] Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, М., 1971. *Г. А. Чеботарев.*

КЛАССОВ ДИВИЗОРОВ ГРУППА — факторгруппа группы *дивизориальных идеалов* $D(A)$ *Крулля кольца* A по подгруппе главных идеалов $F(A)$. К. д. г. является абелевой группой и обычно обозначается $C(A)$. Группа $C(A)$ порождается классами простых идеалов высоты 1 в кольце A.

В некотором смысле К. д. г. измеряет отклонение от однозначности разложения элементов кольца A на неразложимые множители. Так, факториальное кольцо имеет нулевую К. д. г.

Пусть $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм колец Крулля, тогда при некоторых дополнительных предположениях (напр., в случае, когда B — целое или плоское расширение кольца A) определен канонич. гомоморфизм К. д. г. $\varphi^* : C(A) \to C(B)$. Если B — локализация кольца A по мультипликативной системе S, то φ^* сюръективно и ядро φ^* порождается простыми дивизориальными идеалами кольца A, пересекающимися с S (теорема Нагата). Если B — кольцо многочленов над A, то канонич. гомоморфизм φ^* биективен (это является обобщением теоремы Гаусса о факториальности кольца многочленов над полем). В более общем случае, когда B — симметрическая нётерова алгебра A-модуля M, канонич. гомоморфизм φ^* будет биективен при условии, что все симметрич. степени $S^i(M)$ рефлексивны. Если B — кольцо формальных степенных рядов над A, то гомоморфизм φ^* инъективен (и даже обратим слева), но, вообще говоря, не биективен.

Подгруппа группы $C(A)$, порожденная обратимыми идеалами, изоморфна *Пикара группе* $\mathrm{Pic}(A)$ кольца A, и функториальные свойства $\mathrm{Pic}(A)$ и $C(A)$ согласованы. Так, если B — строго плоское расширение кольца A и гомоморфизм $\varphi^* : \mathrm{Pic} A \to \mathrm{Pic}\, B$ инъективен, то инъективен и $\varphi^* : C(A) \to C(B)$. В частности, если пополнение $\hat{A}$ локального кольца A факториально, то факториально и A (теорема Мори).

Пусть A — нормальное нётерово кольцо. Группа $\mathrm{Pic}\,(A)$ совпадает с $C(A)$ тогда и только тогда, когда A — локально факториальное кольцо, т. е. все локальные кольца A_m факториальны (напр., когда A — регулярное кольцо). Более точно, если $F = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,(A),\quad A_{\mathfrak{p}}$ — факториально$\}$, то $C(A) = \varinjlim \mathrm{Pic}\,(U)$, где U пробегают систему открытых подсхем в $\mathrm{Spec}(A)$, содержащих F. Это позволяет определить К. д. г. нормальной схемы [5] — группу классов дивизоров Вейля (см. *Дивизор*).

Первоначально изучались К. д. г. колец алгебраич. чисел, первые результаты о конечности этой группы были получены еще Э. Куммером (E. Kummer). Имеется тесная связь свойств К. д. г. с теоретико-числовыми вопросами, напр. с теоремой Ферма. Таблицы порядков

К. д. г. некоторых колец алгебраич. чисел приведены в [1].

Современную общность теория К. д. г. получила в работах В. Крулля (W. Krull); П. Самюэль (P. Samuel) изучил функториальный характер К. д. г. и предложил несколько методов ее вычисления (как, напр., метод спуска). Другие подходы к изучению К. д. г. основаны на сравнении ее с группой Пикара, при этом применяются когомологич. и алгебро-геометрич. средства.

Для любой абелевой группы существует изоморфная ей К. д. г.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, М., 1964; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [3] Samuel P., Topology, [1964], v. 3, Suppl. 1, S. 81—96; [4] Fossum R. M., The divisor class group of a Krull domain, B., 1973; [5] Grothendieck A., Dieudonné J., «Publ. Math. IHES», 1967, t. 32.

В. И. Данилов.

КЛАССОВ ИСЧИСЛЕНИЕ — традиционное, восходящее к Дж. Булю (G. Boole) название раздела математич. логики, изучающего логику классов. К. и. фактически представляет собой логику высказываний, в к-рой дополнительно рассматривается субъектно-предикатная структура элементарных высказываний (т. е. элементарные высказывания имеют вид «элемент x обладает свойством P»), причем с каждым предикатом (свойством) P связывается класс элементов из рассматриваемой области, обладающих этим свойством. К. и. было задумано как математич. эквивалент аристотелевой силлогистики, однако оно не является таковым, поскольку допустимые в К. и. пустой и одноэлементные классы Аристотелем не рассматривались. К. и. обычно не выделяют в самостоятельный раздел математич. логики, так как все его выразительные возможности перекрываются исчислением одноместных предикатов (являющимся, в свою очередь, разрешимым фрагментом узкого исчисления предикатов, см. *Логические исчисления*). Аристотелева силлогистика адекватным образом формализована Я. Лукасевичем [4].

Лит.: [1] Гильберт Д., Аккерман В., Основы теоретической логики, пер. с нем., М., 1947; [2] Кутюра Л., Алгебра логики, [пер. с франц.], Одесса, 1909; [3] Wajsberg M., «Monatsch. für Math. und Phys.», 1933, Bd 40, S. 113—26; [4] Лукасевич Ян, Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики, пер. с англ., М., 1959; [5] Яновская С., Логика классов, в кн.: Философская энциклопедия, т. 3, М., 1964, с. 224—26.

В. А. Душский.

КЛЕБША УСЛОВИЕ — необходимое условие оптимальности в задаче вариационного исчисления на условный экстремум; установлено Р. Клебшем [1]. Если экстремаль $x(t)$, $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, доставляет условный минимум функционалу в *Больца задаче:*

$$J(x)=\int_{t_1}^{t_2} f(t,\ x,\ \dot{x})\,dt+g(t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2)),$$

$$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},$$

$$\varphi(t,\ x,\ \dot{x})=0,\ \varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m,\ m<n,$$

$$\psi(t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2))=0,\ \psi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^p,$$

$$p\leqslant 2m+2,$$

то согласно правилу множителей она является безусловной экстремалью функционала

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t,\ x,\ \dot{x},\ \lambda)\,dt+\lambda_0 g+\sum_{\mu=1}^{p} e_\mu\psi_\mu, \qquad (1)$$

где

$$F(t,\ x,\ \dot{x},\ \lambda)=\lambda_0 f+\lambda_1(t)\varphi_1+\ldots+\lambda_m(t)\varphi_m,$$

а

$$\lambda_0,\ \lambda_i(t),\ i=1,\ \ldots,m,\ e_\mu,\ \mu=1,\ \ldots,\ p,$$

— *Лагранжа множители,* определяемые вместе с $x(t)$ из необходимых условий экстремума функционала (1). Одним из таких необходимых условий является К. у.

Для того, чтобы экстремаль $x(t)$ доставляла минимум в рассматриваемой задаче, необходимо выполнение К. у., требующего, чтобы для любой ненулевой совокупности чисел ξ_i, $i=1, \ldots, n$, удовлетворяющей уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_i} \xi_i = 0, \quad k=1, \ldots, m,$$

имела место неотрицательность квадратичной формы

$$\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(t, x, \dot{x}, \lambda)}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \xi_i \xi_j \geqslant 0.$$

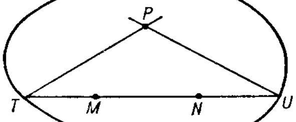
Необходимое К. у. непосредственно связано с более сильным необходимым *Вейерштрасса условием* и может быть получено из последнего как следствие.

В задачах вариационного исчисления на безусловный экстремум, в частности в простейшей задаче вариационного исчисления, аналогом К. у. является *Лежандра условие*.

В задачах оптимального управления К. у. эквивалентно неположительности второго дифференциала *Гамильтона функции*, что является необходимым условием выполнения *Понтрягина принципа максимума* при изменении оптимального управления в открытой области.

Лит.: [1] Clebsch R. F. A., «J. für Math.», 1858, Bd 55, S. 254; [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950. *И. Б. Вапнярский.*

КЛЕЙНА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — модель, реализующая систему аксиом геометрии Лобачевского. В К. и. плоскость Лобачевского интерпретируется как внутренность действительного невырожденного абсолюта (овала) на евклидовой плоскости. Прямые линии плоскости Лобачевского реализуются хордами абсолюта (без концевых точек). Параллели через точку P к прямой MN реализуются прямыми PU и PT, пересекающими прямую MN в точках U и T на абсолюте (см. рис.). Движениями в К. и. служат проективные преобразования, оставляющие абсолют инвариантным. Метрическими величинами служат численные инварианты этих преобразований: расстояния выражаются с помощью ангармонических отношений четверок точек, углы — с помощью ангармонических отношений четверок прямых. Абсолют можно рассматривать как совокупность бесконечно удаленных точек плоскости Лобачевского. К. и. обобщается на многомерный случай.



К. и. предложена Ф. Клейном в [1].

Лит.: [1] Klein F., «Gött. Nachr.», 1871, 419—33; [2] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 2, М., 1956; [3] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971; [4] Погорелов А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968. *А. Б. Иванов.*

КЛЕЙНА КООРДИНАТЫ — см. *Плюккеровы координаты.*

КЛЕЙНА ПОВЕРХНОСТЬ, бутылка Клейна,— замкнутая односторонняя поверхность рода I

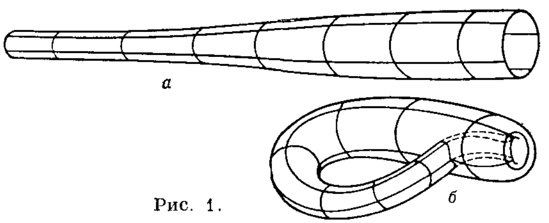


Рис. 1.

(см. рис. 1, *а*, *б*). К. п. может быть получена из квадрата $ABCD$ (см. рис. 2) отождествлением точек отрезков AB и CD, лежащих на прямых, параллельных стороне AD, и точек отрезков BC и AD, симметричных относительно центра квадрата $ABCD$. К. п. топологически вкладывается в 4-мерное евклидово пространство и не вкладывается в 3-мерное евклидово пространство.

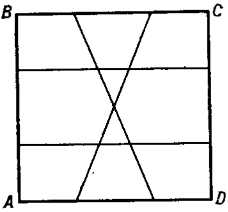


Рис. 2.

К. п. введена в рассмотрение Ф. Клейном (F. Klein, 1874).

Е. В. Шикин.

КЛЕЙНА ПРОСТРАНСТВО, однородное пространство,— топологическое пространство, в к-ром определена группа гомеоморфных отображений этого пространства на себя, обладающая тем свойством, что для каждых двух точек пространства A и B существует преобразование этой группы, переводящее точку A в точку B.

Происхождение термина «К. п.» связано с эрлангенской программой Ф. Клейна (F. Klein, 1872), в к-рой различные геометрии определялись с точки зрения соответствующих групп преобразований. *А. Б. Иванов.*

КЛЕЙНА — ГОРДОНА УРАВНЕНИЕ — релятивистски инвариантное квантовое уравнение, описывающее бесспиновые скалярные или псевдоскалярные частицы, напр. π-, K-мезоны. Уравнение установлено О. Клейном [1] и несколько позднее В. А. Фоком как волновое уравнение при условии цикличности по пятой координате и вскоре было выведено без привлечения пятой координаты многими авторами (напр., В. Гордоном [2]).

Последовательное применение К.—Г. у. как квантового релятивистского уравнения возможно лишь в квантовой теории поля, а не в квантовой механике. В [3] была дана интерпретация К.—Г. у. как уравнения для полей частиц спина нуль. К.—Г. у. применяется для описания π-мезоатомов и соответствующих полей; играет роль одного из фундаментальных уравнений квантовой теории поля.

К.—Г. у. — линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\mu^2\right)\varphi=0, \qquad (1)$$

где $\varphi(x, t)$ — (псевдо) скалярная функция, в общем случае комплексная, $\mu=mc/\hbar$, m — масса покоя частиц. Если φ — действительная функция, то К.—Г. у. описывает нейтральные (псевдо) скалярные частицы, а при комплексном φ — заряженные. В последнем случае уравнение (1) дополняют уравнением для комплексно сопряженной функции φ^*:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\mu^2\right)\varphi^*=0. \qquad (2)$$

Взаимодействие (псевдо) скалярных частиц с электромагнитным полем описывается минимальной подстановкой $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\to\frac{\partial}{\partial x^\alpha}-ieA_\alpha$. К.—Г. у. удовлетворяет также каждая компонента волновой функции частиц любого спина, но только для случая спина 0 функция является инвариантной относительно Лоренца—Пуанкаре группы.

К.—Г. у. может быть получено с помощью соотношения между энергией E и импульсом p частицы в специальной теории относительности

$$\frac{1}{c^2}E^2-p_x^2-p_y^2-p_z^2=m^2c^2$$

путем замены величин операторами (см. [4], [5]):

$$E \to -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \boldsymbol{p} \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Как все релятивистские уравнения К.—Г. у. может быть представлено в форме *Дирака уравнения*, т. е. приведено к линейному уравнению первого порядка:

$$\left(\Gamma^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}-\mu\right)\psi=0, \tag{3}$$

где коэффициенты Γ^{α} — матрицы, аналогичные *Дирака матрицам* γ^{α}. В случае К.—Г. у. матрицы Γ^{α} удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu}\Gamma_{\rho}+\Gamma_{\rho}\Gamma_{\nu}\Gamma_{\mu}=\eta_{\mu\nu}\Gamma_{\rho}+\eta_{\rho\nu}\Gamma_{\mu}, \tag{4}$$

напр., $\Gamma_{\alpha}^{3}=0$ (матрицы Кеммера—Дуффина). Здесь $\eta_{\mu\nu}$ — метрический тензор пространства Минковского. Все Γ^{α} являются особенными матрицами ($\det \Gamma_{\alpha}=0$) и не имеют обратных матриц.

Наряду с тривиальным решением (4) $\Gamma_{\alpha}=0$, $\psi=0$ и в виде пятирядных матриц, описывающим скалярное поле самой функцией φ и четырьмя компонентами ее градиента, соотношение (4) имеет еще решение в виде матриц десятого ранга. Соответствующая десятикомпонентная функция содержит 4 компоненты потенциала A_{α} и 6 компонент напряженности $F_{\alpha\beta}=2\partial_{[\alpha}A_{\beta]}$, т. е. уравнения (3), (4) могут одновременно давать представление для уравнения Прока, описывающего векторные частицы спина 1; при $\mu=0$ и действительной φ дают представление уравнений Максвелла.

При учете взаимодействия (псевдо) скалярных частиц с гравитационным полем в соответствии с общей теорией относительности К.—Г. у. обобщается на произвольное риманово пространство в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\beta}}\right)-\mu^{2}\varphi=0, \tag{5}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор, g — определитель матрицы $\|g_{\alpha\beta}\|$. Часто в уравнение (5) добавляют член $R\varphi/6$, где R — скалярная кривизна, благодаря чему при $\mu=0$ общерелятивистское К.—Г. у.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\beta}}\right)-\frac{R\varphi}{6}=0$$

становится конформно инвариантным.

Лит.: [1] Klein O., «Z. Phys.», 1926, Bd 37, S. 895—906; [2] Gordon W., там же, 1926/1927, Bd 40, S. 117—33; [3] Pauli W., Weisskopf V., «Helv. phys. acta», 1934, Bd 7, S. 709—31; [4] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 3 изд., М., 1976; [5] Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, пер. с англ., М., 1963. *В. Г. Кречет.*

КЛЕЙНОВА ГРУППА — *дискретная подгруппа* Γ группы всех *дробно-линейных отображений*

$$\gamma(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1,$$

расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, являющаяся собственно разрывной. Это означает, что множество $\Lambda(\Gamma)$ точек накопления орбит $\{\gamma(z_0)\}$, $\gamma\in\Gamma$, для всех точек $z_0\in\mathbb{C}$, называемое предельным множеством группы Γ, есть собственное подмножество $\mathbb{C}$. Дополнение $\Omega(\Gamma)=\overline{\mathbb{C}}\setminus\Lambda(\Gamma)$, называемое множеством разрывности группы Γ, открыто и обладает тем свойством, что каждая его точка z имеет окрестность U_z, для к-рой $\gamma(U_z)\cap U_z=\varnothing$ при всех $\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma_z$, где

$$\Gamma_z=\{\gamma\in\Gamma:\gamma(z)=z\}$$

— стабилизатор точки z в Γ. Если точка $z\in\Omega(\Gamma)$ отлична от неподвижных точек эллиптич. элементов Γ, то $\Gamma_z=\{J\}$, где J — тождественное отображение, а для каждой эллиптической неподвижной точки Γ_z — циклическая группа конечного порядка. Основы теории К. г. были заложены в фундаментальных работах А. Пуанкаре [1] и Ф. Клейна [2] еще в 19 в., название «К. г.» восходит к А. Пуанкаре.

Предельное множество $\Lambda(\Gamma)$ либо пусто, либо состоит из одной или двух точек, либо бесконечно. Первые два случая соответствуют элементарным группам (сюда, в частности, входят все циклич. группы). Если $\Lambda(\Gamma)$ бесконечно, то оно есть нигде не плотное в $\overline{\mathbb{C}}$ совершенное множество положительной логарифмич. *емкости*. Часто элементарные группы не включают в К. г.

Факторпространство $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ имеет естественную комплексную (конформную) структуру, в к-рой проекция

$$\pi:\Omega(\Gamma)\to\Omega(\Gamma)/\Gamma$$

голоморфна, и представляет собой конечное или счетное объединение $\bigcup_j S_j$ римановых поверхностей S_j; это накрытие будет разветвленным над проекциями точек $z\in\Omega(\Gamma)$ с нетривиальными стабилизаторами Γ_z. Само $\Omega(\Gamma)$ распадается на компоненты связности Ω_j, число к-рых равно 1,2 или ∞. Если подгруппа

$$\Gamma_{\Omega_j}=\{\gamma\in\Gamma:\gamma(\Omega_j)=\Omega_j\}$$

совпадает с Γ, то компонента Ω_j наз. инвариантной. Инвариантных компонент может быть не больше двух. К. г. с инвариантными компонентами получили название функциональных.

Примеры. 1) *Фуксовы группы.* Каждая такая группа оставляет инвариантной нек-рую окружность (прямую) l с сохранением направления обхода, и $\Lambda(\Gamma)\subset l$. Для того чтобы (неэлементарная) К. г. Γ была фуксовой, необходимо и достаточно, чтобы она не содержала локсодромических элементов. По теореме Клейна — Пуанкаре об униформизации всякая риманова поверхность, за исключением нескольких простейших случаев, униформизируется фуксовой группой, действующей, напр., в верхней полуплоскости $H=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$, т. е. с точностью до конформной эквивалентности представляется в виде H/Γ. Если в H ввести гиперболич. метрику Пуанкаре

$$ds=\frac{|dz|}{\operatorname{Im}z},$$

то элементы Γ становятся неевклидовыми (гиперболическими) движениями. А. Пуанкаре предложил подобную интерпретацию и для произвольной К. г. Γ, основанную на продолжении действия Γ в полупространство

$$\mathbb{R}^3_+=\{x=(x_1,x_2,x_3):\quad x_1+ix_2\in\mathbb{C},x_3>0\}.$$

Именно, поскольку всякий элемент Γ есть суперпозиция четного числа инверсий относительно окружностей $L\subset\overline{\mathbb{C}}$, можно рассмотреть инверсии относительно соответствующих полусфер в $\mathbb{R}^3_+$, опирающихся на L. Продолженная таким образом группа Γ действует в $\mathbb{R}^3_+$ разрывно, а ее элементы становятся гиперболич. движениями $\mathbb{R}^3_+$.

2) Квазифуксовы группы. Они служат непосредственным обобщением фуксовых групп. Квазифуксовой наз. К. г. Γ, оставляющая инвариантной нек-рую ориентированную жорданову кривую $l\subset\mathbb{C}$. Тогда $\Lambda(\Gamma)\subset l$. Если $\Lambda(\Gamma)=l$, то Γ наз. группой первого рода, а при $l\setminus\Lambda(\Gamma)\neq\varnothing$ — второго рода. Римановы поверхности D_1/Γ и D_2/Γ, где D_1 — внутренность, а D_2 — внешность l, гомеоморфны; более того, напр., любые две гомеоморфные римановы поверхности конечного типа (т. е. замкнутые поверхности с

конечным числом проколов) могут быть униформизированы одной квазифуксовой группой. Конечно порожденные квазифуксовы группы сводятся к фуксовым (сопрягаются с ними) с помощью квазиконформных автоморфизмов плоскости.

3) Группы Шотки. Каждая такая группа есть К. г. Г с образующими $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$, $p \geqslant 1$, для к-рых существуют $2p$ непересекающихся жордановых кривых $l_1, l_1', \ldots, l_p, l_p'$, ограничивающих $2p$-связную область D такую, что

$$\gamma_j(D) \cap D = \varnothing, \quad \gamma_j(l_j) = l_j', \quad j = 1, \ldots, p.$$

При этом Г свободна, $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ — замкнутая поверхность рода p, а все элементы $\gamma \in \Gamma \setminus \{J\}$ — гиперболические или локсодромические. Группами Шотки униформизируются все замкнутые римановы поверхности (это — униформизация по Кёбе).

4) Вырожденные группы. Это — неэлементарные конечно порожденные К. г., у к-рых множества разрывности являются односвязными областями. Имеется весьма сложное доказательство существования таких групп, однако явных их примеров пока (1978) не построено. Вырожденные группы являются частным случаем групп с одной инвариантной односвязной компонентой, называемых b-группами.

В основе геометрич. подхода к исследованию К. г. лежит понятие фундаментальной области, т. е. множества $\omega \subset \Omega(\Gamma)$, содержащего по одной точке из каждой орбиты Γz_0, $z_0 \in \Omega(\Gamma)$, и такого, что каждая непустая его компонента $\omega \cap \Omega_j$ связна. Напр., для групп Шотки в качестве ω можно взять указанную область D, присоединив к ней точки кривых $l_1, \ldots, l_p$. Часто фундаментальной областью наз. только внутренность ω. Для любой К. г. можно выбрать каноническую фундаментальную область, ограниченную дугами окружностей. Свойства фундаментальной области позволяют выяснить структуру К. г. Г. Одним из методов построения К. г. служат так наз. комбинационные теоремы, дающие условия, когда группа Г, порожденная данными К. г., снова является К. г. Напр., если взять фуксовы группы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, действующие соответственно в кругах $U_1, \ldots, U_n$, достаточно удаленных друг от друга, и представляющие компактные поверхности U_j/Γ_j соответственно родов p_j, то $\Gamma = \langle \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \rangle$ — функциональная группа, представляющая $n+1$ поверхностей родов $p_1, \ldots, p_n$ и $p_1 + \ldots + p_n$. Весьма полезными оказались методы трехмерной топологии, связанные с рассмотрением 3-многообразия $(\mathbb{R}^3_+ \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$, у к-рого $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ служит краем.

Аналитический подход в теории К. г. связан с рассмотрением *автоморфных форм.* Если Г — неэлементарная К. г. и $\infty \in \Omega(\Gamma)$, то при целых $q \geqslant 2$ сходится ряд $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\gamma'(z)|^q$ (в точках $z \in \Omega(\Gamma)$ с $\Gamma_z = \{J\}$); соответствующие тета-ряды Пуанкаре

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma(z))\, \gamma'^q(z),$$

где f — мероморфная функция в $\Omega(\Gamma)$, дают автоморфные формы веса $(-2q)$. Для конечно порожденных К. г. размерность пространств таких форм подсчитывается с помощью *Римана—Роха теоремы.* Геометрич. структура таких групп Г описывается теоремой Альфорса, согласно к-рой пространство $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ для них состоит из конечного числа поверхностей $S_1, \ldots, S_n$ конечного типа, а π^{-1} может быть разветвлено над каждой S_j лишь в конечном числе точек. Этот результат допускает количественные уточнения. Используются и когомологич. методы, основанные на рассмотрении действия группы Г в векторных пространствах полиномов (см. [5]). Существенную роль в теории К. г. на плоскости играют методы теории квазиконформных отображений [6], [7]. На них опирается, в частности, теория деформаций К. г., тесно связанная с теорией *модулей римановых поверхностей* (см. также *Римановых поверхностей конформные классы*). На этом пути были выявлены и нек-рые новые классы К. г. Однако пока еще не получено полной классификации даже конечно порожденных К. г.

По сравнению с плоскими гораздо слабее изучены К. г. в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n>2$, определяемые как собственно разрывные подгруппы группы конформных автоморфизмов пространства $\overline{\mathbb{R}}^n=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$; здесь появляется ряд совершенно новых эффектов.

Лит.: [1] Poincaré H., «Acta math.», 1883, v. 3, p. 49—92; [2] Klein Ch. F., «Math. Ann.», 1883, Bd 21, S. 141—218; [3] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.— Л., 1936; [4] Lehner J., Discontinuous groups and automorphic functions, Providence, 1964; [5] Кра И., Автоморфные функции и клейновы группы, пер. с англ., М., 1975; [6] Крушкаль С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975; [7] A crash course on Kleinian groups, B.— Hdlb.— N. Y., 1974. *С. Л. Крушкаль.*

КЛЕРО УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка, не разрешенное относительно производной:

$$y=xy'+f(y'), \tag{1}$$

где $f(t)$ — нелинейная функция. Уравнение (1) называется по имени А. Клеро [1], к-рый впервые указал на различие общего и особого решений уравнения такого вида. К. у. является частным случаем уравнения Лагранжа.

Если $f(t)\in C^1(a, b)$ и $f'(t)\neq 0$ при $t\in(a, b)$, то множество *интегральных кривых* уравнения (1) включает в себя: параметрически заданную кривую

$$x=-f'(t), \quad y=-tf'(t)+f(t), \quad a<t<b; \tag{2}$$

однопараметрич. семейство прямых

$$y=Cx+f(C), \quad C\in(a, b), \tag{3}$$

касательных к кривой (2); кривые, составленные из произвольного участка кривой (2) и двух прямых семейства (3), касающихся кривой (2) в концах этого участка. Семейство прямых (3) представляет собой *общее решение*, а кривая (2), являющаяся *огибающей* семейства (3),— *особое решение* (см. [2]). Семейство касательных к гладкой нелинейной кривой удовлетворяет К. у. Поэтому к К. у. приводят геометрич. задачи, в к-рых требуется определить кривую по заданному свойству ее касательных (общему для всех точек кривой).

Уравнением Клеро наз. также уравнение с частными производными 1-го порядка

$$z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

оно имеет интеграл

$$z=\alpha x+\beta y+f(\alpha, \beta),$$

где (α, β) — произвольная точка области определения функции $f(p, q)$ (см. [3]).

Лит.: [1] Clairaut A., в кн.: Histoire de l'Academie Royal des sciences. Année 1734, P., 1736, p. 196—215; [2] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959; [3] Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966. *Н. Х. Розов.*

КЛЕТОЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение $f:(X, A)\to(Y, B)$ одного относительного *клеточного разбиения* (X, A) в другое клеточное разбиение (Y, B) такое, что $f((X, A)^p)\subset(Y, B)^p$, где $(X, A)^p$ и $(Y, B)^p$ — p-мерные остовы пространств X и Y относительно A и B соответственно. В случае, когда $A, B=\varnothing$ получается К. о. f клеточного разбиения X в клеточное разбиение Y.

Гомотопия $F:(X, A)\times I\to(Y, B)$, где $I=[0, 1]$, наз. клеточной, если $F((X, A)\times I)^p\subset(Y, B)^p$

для всех p. Следующая теорема о клеточной аппроксимации является аналогом теоремы о симплициальной аппроксимации (см. *Симплициальное отображение*): пусть дано отображение $f: (X, A) \to (Y, B)$ одного относительного клеточного разбиения (X, A) в другое (Y, B), ограничение к-рого на некоторый подкомплекс $(L, N) \subset (X, A)$ является клеточным. Тогда существует клеточное отображение $g: (X, A) \to (Y, B)$, гомотопное относительно L отображению f.

Лит. см. при ст. *Клеточное разбиение*. *Д. О. Баладзе.*

КЛЕТОЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО — хаусдорфово пространство, наделенное *клеточным разбиением*. Напр., каждое *симплициальное пространство* является К. п. Обратно, для любого К. п. существует гомотопически эквивалентное ему симплициальное пространство той же размерности.

Лит.: [1] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977.

С. Н. Малыгин.

КЛЕТОЧНОЕ РАЗБИЕНИЕ, CW-комплекс, — *клеточный комплекс* X, удовлетворяющий следующим условиям: (C) Для любой точки $x \in X$ комплекс $X(x)$ является конечным, т. е. состоит из конечного числа клеток (для произвольного подмножества A клеточного комплекса X через $X(A)$ обозначается пересечение всех подкомплексов комплекса X, содержащих множество A). (W) Если F — нек-рое множество клеточного комплекса X, и для любой клетки t из клеточного комплекса X пересечение $F \cap \bar{t}$ замкнуто в $\bar{t}$ (а следовательно и в X), то F является замкнутым подмножеством в X. При этом каждая точка $x \in X$ принадлежит некоторой определенной клетке t_x из клеточного комплекса X, и выполняется равенство $X(x) = X(t_x) = X(\bar{t}_x)$.

Обозначение CW получено из первых букв англ. названий вышеприведенных двух условий: (C) — Closure finiteness (конечность замыкания) и (W) — Weak topology (слабая топология).

Конечный клеточный комплекс X удовлетворяет обоим условиям (C) и (W). Вообще, клеточный комплекс X, в к-ром каждая точка x содержится в нек-ром конечном подкомплексе $Y(x)$, есть К. р. Пусть для нек-рого множества F из X множество $F \cap \bar{t}$ замкнуто в $\bar{t}$ при любом выборе клетки t из X. Тогда для любой точки $x \in X$ множество $F \cap Y(x)$ замкнуто в X. Если теперь точка x не принадлежит множеству F, то открытое множество $U_x = X \setminus (F \cap Y(x))$ содержит точку x и не пересекается с F. Множество $X \setminus F = \bigcup_{x \in X \setminus F} U_x$ — открыто, а множество F — замкнуто.

Класс К. р. (или класс пространств, каждое из к-рых имеет гомотопический тип К. р.) является наиболее подходящим классом топологич. пространств для построения содержательной теории гомотопии. Так: если подмножество A К. р. X замкнуто, то отображение f топологич. пространства A в топологич. пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны ограничения отображения f на замыкания клеток комплекса X. Если C — компактное подмножество К. р. X, то комплекс $X(C)$ конечный. Для любой клетки t из К. р. X существует множество D, открытое в $\bar{t}$, к-рое допускает в качестве деформационного ретракта множество $\bar{t} \setminus t$.

Практически К. р. строятся последовательно: каждая стадия состоит в приклеивании клеток данной размерности к результату предшествующей стадии. Клеточная структура такого комплекса находится в прямой связи с его гомотопич. свойствами. Даже для таких «хороших» пространств, как полиэдры, полезно рассматривать их представление в виде К. р.: в таком представлении они обычно имеют меньше клеток, чем при симплициальной триангуляции. Если пространство X получено приклеиванием n-мерных клеток к пространству A, то подмножество $X \times 0 \bigcup A \times I$, где $I=[0, 1]$ является сильным деформационным ретрактом пространства $X \times I$.

Относительным К. р. наз. пара (X, A), состоящая из топологич. пространства X и его замкнутого подпространства A, а также такой последовательности замкнутых подпространств $(X, A)^k$, $k \geqslant 0$, что выполняются следующие условия: а) пространство $(X, A)^0$ получено из A приклеиванием нульмерных клеток; б) при $k \geqslant 1$ пространство $(X, A)^k$ получается приклеиванием k-мерных клеток к пространству $(X, A)^{k-1}$; в) пространство $X=U(X, A)^k$; г) топология пространства X согласована с семейством $\{(X, A)^k\}$. Пространство $(X, A)^k$ наз. k-мерным остовом пространства X относительно A. При $A=\phi$ относительное К. р. $(X, \phi)=X$ есть К. р. в прежнем смысле, его k-мерный остов — X^k.

Примеры: 1) Пара (K, L) симплициальных комплексов K и L, $L \subset K$ определяет относительное К. р. $(|K|, |L|)$, где $(|K|, |L|)^k=(K^k \bigcup L)$. 2) Шар V^n есть К. р.: $(V^n)^k=p_0$ при $k<n-1$, $(V^n)^{n-1}=S^{n-1}$ и $(V^n)^k$ при $k \geqslant n$. Сфера S^{n-1} есть подразбиение этого К. р. V^n. 3) Если пара (X, A) есть относительное К. р., то $(X \times I, A \times I)$ — также К. р., и $(X \times I, A \times I)^k=((X, A)^k \times 0 \times 1) \bigcup ((X, A)^{k-1} \times I)$. 4) Если (X, A) есть относительное К. р., то X/A есть К. р., при этом $(X/A)^k=$ $=(X, A)^k/A$, где X/A —факторпространство пространства X, полученное отождествлением всех точек множества A с одной точкой.

Лит.: [1] Телеман К., Элементы топологии и дифференцируемые многообразия, пер. с рум., М., 1967; [2] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [3] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976.

Д. О. Баладзе.

КЛЕТОЧНЫЙ КОМПЛЕКС — отделимое пространство X являющееся объединением непересекающихся клеток. При этом p-мерной клеткой наз. топологич. пространство, гомеоморфное внутренности единичного куба размерности p. Если: 1) для каждой p-мерной клетки t^p пространства X задано непрерывное отображение f p-мерного куба I^p в пространство X, причем ограничение f' отображения f на внутренность $\mathring{I}^p$ куба I^p взаимно однозначно, и образ $f(I^p)$ совпадает с замыканием $\overline{t}^p$ в X клетки t^p (т. е. f' — гомеоморфизм $\mathring{I}^p$ на t^p) и 2) множество $f(\partial I^p)$, где ∂I^p — граница куба I^p, включено в объединение X^{p-1} клеток t^{p-1} пространства X, то X наз. клеточным комплексом; объединение X^{p-1} наз. остовом размерности $p-1$ К. к. X. Пример К. к.— симплициальный полиэдр.

Подмножество L К. к. X наз. подкомплексом, если L является объединением клеток из X, к-рое вместе с клетками содержит их замыкание. Так, n-мерный остов X^n К. к. X является его подкомплексом. Любое объединение и любое пересечение подкомплексов К. к. X являются подкомплексами X.

Любое топологич. пространство можно рассматривать как К. к.— объединение его точек, к-рые являются клетками размерности нуль. Этот пример показывает, что понятие К.к. слишком обширно и потому для приложений важны более узкие классы К. к., напр. класс *клеточных разбиений*, или CW-комплексов.

Д. О. Баладзе.

КЛИН в векторном пространстве — выпуклое множество, инвариантное относительно преобразования $x \to \lambda x$, $\lambda \geqslant 0$, т. е. множество K такое, что если $x, y \in K$, а числа $\lambda, \mu \geqslant 0$ то $\lambda x+\mu y \in K$. К., удовлетворяющий условию: если $x, -x \in K$, то $x=0$ наз. конусом (выпуклым). Всякий К. порождает в векторном пространстве структуру квазипорядка: $x \geqslant y$, когда $x-y \in K$. К. K в пространстве X наз. воспроизводящим, если $K-K=X$.

Б. З. Вулих.

КЛИНИ — МОСТОВСКОГО КЛАССИФИКАЦИЯ — классификация теоретико-числовых предикатов, введенная независимо С. Клини [1] и А. Мостовским [2]. Через Π_0 и одновременно через Σ_0 обозначается класс всех рекурсивных предикатов. Для всякого $k>0$ класс Σ_k определяется как класс всех предикатов, выразимых в виде $\exists y R(y, x_1, \ldots, x_n)$, где $\exists$ — *квантор* существования, $R(y, x_1, \ldots, x_n)$ — предикат из класса Π_{k-1}, а класс Π_k определяется как класс предикатов, выразимых в виде $\forall y R(y, x_1, \ldots, x_n)$, где $\forall$ — квантор всеобщности, $R(y, x_1, \ldots, x_n)$ — предикат из класса Σ_{k-1}. Таким образом получается последовательность классов:

$$\Sigma_0 = \Pi_0 \begin{array}{l} \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \ldots \\ \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \ldots \end{array}$$

Если предикат принадлежит классу Σ_k или Π_k, то он принадлежит классам Π_j и Σ_j для любого $j>k$, т. е. $\Sigma_k \subseteq \Sigma_j \cap \Pi_j$ и $\Pi_k \subseteq \Sigma_j \cap \Pi_j$ для любого $j>k$. Если $k>0$, то существуют предикаты из класса Σ_k, не принадлежащие Π_k, а также предикаты из класса Π_k, не принадлежащие Σ_k, т. е. $\Sigma_k - \Pi_k \neq \varnothing$ и $\Pi_k - \Sigma_k \neq \varnothing$. Предикат принадлежит одному из классов Σ_k или Π_k тогда и только тогда, когда он выразим в языке *арифметики формальной*. Если предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу Σ_k (или Π_k), то предикат $\neg Q(x_1, \ldots, x_n)$, где $\neg$ — знак отрицания, принадлежит классу Π_k (соответственно Σ_k). Предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$ рекурсивен тогда и только тогда, когда предикаты $Q(x_1, \ldots, x_n)$ и $\neg Q(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежат классу Σ_1, т. е. $\Sigma_1 \cap \Pi_1 = \Sigma_0 = \Pi_0$. Если $k>0$, то $(\Sigma_{k+1} \cap \Pi_{k+1}) - (\Sigma_k \cup \Pi_k) \neq \varnothing$.

На классификации предикатов основана к л а с с и ф и к а ц и я м н о ж е с т в, определимых в языке формальной арифметики: множество M принадлежит классу Π_k или Σ_k, если этому классу принадлежит предикат «$x \in M$».

Лит.: [1] K l e e n e S. C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 53, p. 41—73; [2] M o s t o w s k i A., «Fund. math.», 1947, v. 34, p. 81—112.

В. Е. Плиско.

КЛИФФОРДА АЛГЕБРА — конечномерная ассоциативная алгебра над коммутативным кольцом, впервые рассмотренная У. Клиффордом (W. Clifford) в 1876. Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, E — свободный K-модуль, Q — квадратичная форма на E. К. а. квадратичной формы Q (или пары (E, Q)) наз. факторалгебра $C(Q)$ тензорной алгебры $T(E)$ K-модуля E по двустороннему идеалу, порожденному элементами вида $x \otimes x - Q(x) \cdot 1$, где $x \in E$. Элементы из E отождествляются с соответствующими классами смежности в $C(Q)$. Для любых $x, y \in E$ имеет место тождество $xy + yx = \Phi(x, y) \cdot 1$, где $\Phi: E \times E \to K$ — ассоциированная с Q симметрическая билинейная форма.

Для нулевой квадратичной формы Q алгебра $C(Q)$ совпадает с внешней алгеброй $\Lambda(E)$ K-модуля E. Если $K = \mathbb{R}$ — поле действительных чисел, а Q — невырожденная квадратичная форма на n-мерном векторном пространстве E над $\mathbb{R}$, то $C(Q)$ совпадает с алгеброй ${}^{l}A_{n+1}$ *альтернионов*, где l — число положительных квадратов в канонич. виде формы Q.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис K-модуля E, тогда элементы $1, e_{i_1} \ldots e_{i_k} (i_1 < \ldots < i_k)$ образуют базис K-модуля $C(Q)$. В частности, $C(Q)$ является свободным K-модулем ранга 2^n. Если, кроме того, $e_1, \ldots, e_n$ ортогональны относительно Q, то $C(Q)$ можно задать как K-алгебру с образующими $1, e_1, \ldots, e_n$ и определяющими соотношениями $e_i e_j = -e_j e_i (i \neq j)$ и $e_i^2 = Q(e_i)$. Подмодуль $C(Q)$, порожденный произведениями четного числа элементов из E, образует подалгебру в $C(Q)$, к-рая обозначается через $C^+(Q)$.

Пусть K — поле и квадратичная форма Q невырождена. При четном n алгебра $C(Q)$ является *центральной простой алгеброй* над K размерности 2^n, подалгебра $C^+(Q)$ сепарабельна, а ее центр Z имеет размерность

2 над K. Если K алгебраически замкнуто, то при четном n $C(Q)$ — матричная алгебра, а $C^+(Q)$ — произведение двух матричных алгебр (если же n нечетно, то, наоборот, $C^+(Q)$ — матричная, а $C(Q)$ — произведение двух матричных алгебр).

Обратимые элементы s алгебры $C(Q)$ (соответственно $C^+(Q)$) такие, что $sEs^{-1}=E$, образуют **группу Клиффорда** $G(Q)$ квадратичной формы Q (соответственно **специальную группу Клиффорда** $G^+(Q)$). Ограничение преобразований

$$x \to sxs^{-1} \quad (x \in G(Q))$$

на подпространство E определяет гомоморфизм $\varphi: G(Q) \to O(Q)$, где $O(Q)$ — *ортогональная группа* квадратичной формы Q. Ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ состоит из обратимых элементов алгебры Z и $\operatorname{Ker}\varphi \cap G^+(Q) = K^*$. Если n четно, то $\varphi(G(Q))=O(G)$, а $\varphi(G^+(Q))=O^+(Q)$ есть подгруппа индекса 2 в $O(Q)$, совпадающая со специальной ортогональной группой $SO(Q)$ в случае, когда характеристика K отлична от 2. Если n нечетно, то

$$\varphi(G(Q)) = \varphi(G^+(Q)) = SO(Q).$$

Пусть $\beta: C(Q) \to C(Q)$ — антиавтоморфизм К. а. $C(Q)$, индуцированный антиавтоморфизмом

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \to x_n \otimes \ldots \otimes x_1$$

тензорной алгебры $T(E)$. Группа

$$\operatorname{Spin}(Q) = \{s \in G^+(Q) \mid \beta(s) = s^{-1}\}$$

наз. **спинорной группой** квадратичной формы Q (или К. а. $C(Q)$).
Гомоморфизм $\varphi: \operatorname{Spin}(Q) \to O^+(Q)$ имеет ядро $\{\pm 1\}$. Если $k=\mathbb{C}$ или $k=\mathbb{R}$ и Q положительно определена, то $\operatorname{Im}\varphi = O^+(Q) = SO(Q)$ и $\operatorname{Spin}(Q)$ совпадает с классической *спинорной группой*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Элементы математики, пер. с франц., М., 1966; [2] Дьёдонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [3] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [4] Cartan E., Leçons sur la théorie des spineurs, P., 1938. *И. В. Долгачев.*

КЛИФФОРДА ПАРАЛЛЕЛЬ — прямая эллиптич. пространства, отстоящая от данной (базисной) прямой на постоянном расстоянии. Через каждую точку, лежащую вне данной прямой и вне полярной ей прямой, проходят две К. п. к данной прямой. Поверхность, образуемая вращением К. п. вокруг ее базисной прямой, наз. **поверхностью Клиффорда**. Поверхность Клиффорда имеет постоянную нулевую гауссову кривизну.

На существование К. п. впервые указал У. Клиффорд (W. Clifford, 1873).

Лит.: [1] Богомолов С. А., Введение в неевклидову геометрию Римана, Л.— М., 1934; [2] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *А. Б. Иванов.*

КЛИФФОРДА ТЕОРЕМА — теорема, устанавливающая неравенство между степенью и размерностью специального дивизора на алгебраич. кривой. Доказана У. Клиффордом (W. Clifford).

Пусть X — гладкая проективная кривая над алгебраически замкнутым полем и D — дивизор на X. Пусть $\deg D$ — степень, а $l(D)$ — размерность дивизора D. Положительный дивизор наз. специальным, если $l(K-D)>0$, где K — канонический дивизор на X. К. т. утверждает: для любого специального дивизора D справедливо неравенство $\deg D \geqslant 2l(D)-2$, причем равенство имеет место, если $D=0$ или $D=K$ или X — гиперэллиптич. кривая и D — кратность единственного специального дивизора степени 2 на X. Из К. т. следует, что данное неравенство справедливо для любого дивизора D на X такого, что $0 \leqslant \deg D \leqslant 2g-2$, где $g=l(K)$ — род кривой X.

Лит.: [1] Уокер Р., Алгебраические кривые, пер. с англ., М., 1952; [2] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *В. А. Исковских.*

КЛИФФОРДОВА ПОЛУГРУППА, вполне регулярная полугруппа,— полугруппа, каждый элемент к-рой является групповым, т. е. принадлежит нек-рой подгруппе. Элемент полугруппы будет групповым тогда и только тогда, когда он вполне регулярен (см. *Регулярный элемент*). Свойство полугруппы S быть К. п. эквивалентно каждому из следующих: 1) для любого $a \in S$ имеет место $a \in a^2 S \cap S a^2$, 2) каждый односторонний идеал I из S изолирован, т. е. из того, что $x \notin I$, следует $x^n \notin I$ при любом натуральном n.

К. п. наряду с *инверсными полугруппами* представляют собой один из важнейших типов *регулярных полугрупп*. Их изучение началось с основополагающей работы А. Клиффорда [1]. Произвольная К. п. обладает (единственным) разбиением на группы, классы к-рого суть в точности $\mathscr{H}$-классы (см. *Грина отношения эквивалентности*). Указанное разбиение не всегда будет связкой (см. *Связка полугрупп*); условия, когда это так, известны (см. [3]). Отношения Грина $\mathscr{J}$ и $\mathscr{D}$ на К. п. совпадают. Всякая *вполне простая полугруппа* будет К. п., причем для К. п. свойство быть вполне простой эквивалентно идеальной простоте (см. *Простая полугруппа*). Произвольная К. п. S разлагается в полуструктуру вполне простых полугрупп, это разложение единственно, его компоненты суть в точности $\mathscr{D}$-классы, а соответствующая факторполуструктура изоморфна полуструктуре главных идеалов полугруппы S; обратно, всякая полугруппа, разложимая в полуструктуру вполне простых полугрупп, есть К. п.

Для К. п. S следующие условия эквивалентны: 1) S инверсна; 2) каждый идемпотент из S лежит в центре, т. е. перестановочен с любым элементом из S; 3) каждый односторонний идеал полугруппы S является двусторонним; 4) отношения Грина $\mathscr{H}$ и $\mathscr{D}$ на S совпадают; 5) S есть полуструктура групп; 6) S разложима в подпрямое произведение групп и групп с присоединенным нулем.

Указанное выше разложение произвольной К. п. в полуструктуру вполне простых полугрупп определяет ее «грубое строение». Закон перемножения элементов в компонентах этого разложения описывает теорема Риса (см. *Вполне простая полугруппа*). Дальнейшее изучение К. п. в значительной степени направлено на выяснение «тонкого строения», т. е. закона перемножения элементов из различных компонент. В случае, когда эти компоненты — группы, т. е. для инверсных К. п., известно следующее конструктивное описание в терминах так наз. суммы прямого спектра групп. Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство попарно непересекающихся групп, A — полуструктура (см. *Идемпотентов полугруппа*) и каждой паре элементов $\alpha, \beta \in A$ таких, что $\alpha \geqslant \beta$, поставлен в соответствие гомоморфизм $\varphi_{\alpha, \beta}\colon G_\alpha \to G_\beta$, причем $\varphi_{\alpha, \alpha}$ для любого α есть тождественный автоморфизм и для любых $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ имеет место $\varphi_{\alpha, \beta} \cdot \varphi_{\beta, \gamma} = \varphi_{\alpha, \gamma}$. На объединении $S = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ задается умножение $\cdot$, а именно, $a \cdot b = a\varphi_{\alpha, \alpha\beta} b\varphi_{\beta, \alpha\beta}$ для любых $a \in G_\alpha$ и $b \in G_\beta$.

Тогда S превращается в инверсную К. п. Обратно, каждая инверсная К. п. может быть получена указанным способом.

В общем случае проблема «тонкого строения» К. п. чрезвычайно усложняется, и удовлетворительного ее решения пока (1978) нет. Некоторые весьма сложные конструкции, описывающие К. п. в терминах вполне простых полугрупп, их сдвиговых оболочек, полуструктур, отображений со специальными свойствами, приведены в [5]. Больший прогресс достигнут в случае ортодоксальных К. п. (см. *Регулярная полугруппа*); такие полугруппы наз. ортогруппами. Для них имеется несколько обозримых, хотя и довольно громоздких конструкций (см. [2]). Все упомянутые конструкции так или иначе обобщают приведенное выше описание инверсных К. п., полученное в [1].

Лит.: [1] Clifford A., «Ann. Math.», 1941, v. 42, № 4, p. 1037—49; [2] его же, «J. Pure and Appl. Algebra», 1976, v. 8, № 1, p. 23—50; [3] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [4] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [5] Petrich M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 189, p. 211—36.

Л. Н. Шеврин.

КЛОН операции — всякое замкнутое относительно композиции множество конечноместных операций вида $\omega: A^n \to A$, содержащее все единичные операции $\omega_n^i: A^n \to A$, т. е. такие, что

$$\omega_n^i(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = a_i$$

для любого набора $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ из A^n, где $n \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$, A — произвольное фиксированное множество. Под композицией операций $\omega_1(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ и $\omega_2(y_1, \ldots, y_m)$ понимается операция $\omega_3(z_1, \ldots, z_l)$, задаваемая с помощью формулы вида

$$\omega_1(x_1, \ldots, x_{j-1}, \omega_2(y_1, \ldots, y_m), x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

где для множеств переменных $X = \{x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ и $Z = \{z_1, \ldots, z_l\}$ выполнено

$$Z = (X \setminus \{x_j\}) \cup Y, m \geqslant 1, \ l \geqslant 1.$$

В. Б. Кудрявцев.

КЛОТОИДА — то же, что *Корню спираль.*

КНАСТЕРА КОНТИНУУМ, наследственно неразложимый континуум, — континуум, всякий подконтинуум к-рого неразложим. Пространство X наз. неразложимым, если оно связно и не допускает представления в виде объединения двух замкнутых связных множеств, отличных от X. Первое доказательство существования К. к. было дано Б. Кнастером [1]. В пространстве всех подконтинуумов обычного квадрата I^2 множество всех К. к. составляет всюду плотное G_δ- множество [2].

Лит.: [1] Knaster B., «Fundam. math.», 1922, t. 3, s. 247—86; [2] Mazurkiewicz S., там же, 1930, t. 16, s. 151—59.

Л. Г. Замбахидзе.

КНЕЗЕРА ТЕОРЕМА об одномерных *слоениях* без особенностей на замкнутых поверхностях рода нуль — теорема, устанавливающая свойства такого слоения в зависимости от наличия или отсутствия у него замкнутых слоев и описывающая поведение незамкнутых слоев в областях, ограничиваемых замкнутыми слоями. К. т. принадлежит Х. Кнезеру (говорившему не о слоениях, а о «регулярных семействах кривых на поверхности» [1]; модернизированное изложение основных аспектов К. т. см. в [2], [3]). Чаще всего К. т. упоминается в связи с траекториями потока без положений равновесия на торе или *Клейна поверхности*: эти траектории образуют слоение рассматриваемого в К. т. типа.

Одномерное слоение (без особенностей) на поверхности — это целиком заполняющее последнюю семейство непересекающихся кривых («слоев»), причем у каждой точки имеется такая координатная окрестность U, что в терминах соответствующих локальных координат x_1, x_2 слоение локально выглядит как семейство прямых $x_2 = \text{const}$ (точнее, такое уравнение имеют связные компоненты пересечений слоев с U). Слоение наз. ориентируемым, если можно так определить нек-рое «положительное» направление на каждом его слое (ориентировать слои), чтобы для различных слоев эти направления были согласованы — при непрерывном переходе от слоя к слою положительное направление нигде не менялось скачком. Ориентируемы те и только те слоения, к-рые состоят из траекторий нек-рых потоков без положений равновесия.

Пусть на поверхности M задано **поле направлений** (**поле линейных элементов**) — каждой точке $x \in M$ сопоставлено одномерное подпространство $l(x)$ касательной плоскости T_xM в этой точке (если M лежит в евклидовом пространстве, то $l(x)$ представляется прямой, касающейся M в точке x, см. рис. 1). Если $l(x)$ гладко зависит от x, то интегральные кривые этого поля направлений образуют одномерное слоение, к-рое может и не быть ориентируемым.

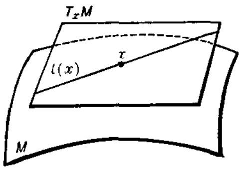


Рис. 1.

Основное содержание К. т. относится к тому случаю, когда у слоения имеются как замкнутые, так и незамкнутые слои. Утверждается, что последние заполняют области, ограниченные первыми, причем эти области могут быть трех типов — см. рис. 2, где подразумевается, что у каждого прямоугольника а), б) и в) надо

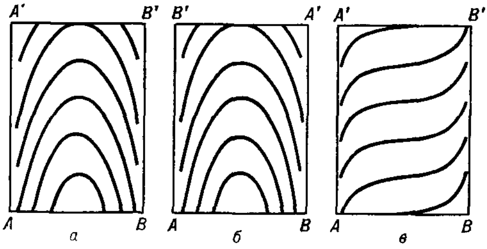


Рис. 2.

верхнюю сторону склеить с нижней, причем A склеивается с A', а B — с B'; (напр., из а) при этом получается «кольцо Кнезера», см. рис. в ст. *Дифференциальные уравнения на торе*. Если на поверхности имеется только один замкнутый слой, то у прямоугольника надо дополнительно склеить еще левую и правую стороны.

Незамкнутый слой, лежащий в одной из этих областей, при неограниченном продолжении в одну сторону навивается на замкнутый слой, ограничивающий данную область, или на один из двух ограничивающих ее замкнутых слоев. При продолжении в другую сторону незамкнутый слой навивается, соответственно, на тот же замкнутый слой (но с другой стороны) или на второй из упомянутых замкнутых слоев.

Областей типа а) и б) может быть лишь конечное число, причем неориентируемая область типа б) возможна только на поверхности Клейна и только для неориентируемого слоения, областей типа в) — конечное или счетное число.

Х. Кнезер доказал также, что тот случай, когда у слоения нет замкнутых слоев, возможен только для ориентируемого слоения на торе, и что в этом случае имеется замкнутая линия L, трансверсальная к слоению и пересекающая все слои. (В общем случае, когда не предполагается, что слои гладкие и что слоение задается нек-рым полем направлений, трансверсальность понимается в том смысле, что у каждой точки линии L имеется координатная окрестность, в к-рой слои задаются уравнением $x_2=\text{const}$, а L — уравнением $x_1=0$.) См. об этом также в ст. *Дифференциальные уравнения на торе*.

Лит.: [1] Kneser H., «Math. Ann.», 1924, Bd 91, № 1—2, S. 135—54; [2] Reinhart B. L., «Amer. J. Math.», 1959, v. 81, № 3, p. 617—31; [3] Aeppli A., Markus L., «Amer. J. Math.», 1963, v. 85, № 4, p. 633—54.

Д. В. Аносов.

КНЕЗЕРА — ТИТСА ГИПОТЕЗА — гипотеза о строении k-простых односвязных изотропных над полем k алгебраич. групп. А именно, К.— Т. г. состоит в том, что группа G_k k-рациональных точек k-простой односвязной и изотропной над k алгебраич. группы G порождается унипотентными элементами. В несколько менее общей форме это утверждение было высказано М. Кнезером (M. Kneser), общая формулировка принадлежит Ж. Титсу [1]. Для групп типа A_n (см. *Полупростая алгебраическая группа*) К.— Т. г. эквивалентна п р о б л е м е Т а н н а к а — А р т и н а о совпадении подгруппы $SL(1, D)$ элементов единичной приведенной нормы конечномерного тела D с коммутантом $[D^*, D^*]$ его мультипликативной группы. К.— Т. г. имеет тесную связь с вопросами аппроксимации в алгебраич. группах, рациональности групповых многообразий и алгебраич. K-теории.

Справедливость К.— Т. г. доказана в случае локально компактных полей [2], а также для глобальных функциональных полей [3]. Более того, для глобальных полей нулевой характеристики метод спуска из [2] дал возможность доказать справедливость К.— Т. г. для всех алгебраич. групп за исключением типов E_6 и E_8. Однако в общем случае К.— Т. г. не верна, что следует из отрицательного решения проблемы Таннака — Артина [4]. Вследствие этого выдвинулись задачи исследования меры отклонения $SL(1, D)$ от $[D^*, D^*]$, выражаемой приведенной группой Уайтхеда. Результаты, полученные в этом направлении ([5] — [6]), составили основы приведенной K-теории. В [7] показано, что К.— Т. г. неверна и в случае унитарных групп, что, в свою очередь, открывает путь к развитию приведенной унитарной K-теории.

Лит.: [1] T i t s J., «Ann. Math.», 1964, v. 80, № 2, p. 313—29; [2] П л а т о н о в В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 6, с. 1211—20; [3] е г о ж е, «Proc. Intern. Congr. Math. Vancouver», 1974, p. 471—76; [4] е г о ж е, «Докл. АН СССР», 1975, т. 221, № 5, с. 1038—41; [5] е г о ж е, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, № 2, с. 227—61; [6] е г о ж е, «Матем. сб.», 1976, т. 100, № 2, с. 191—200; [7] П л а т о н о в В. П., Я н ч е в с к и й В. И., «Докл. АН СССР», 1975, т. 225, № 1, с. 48—51.
В. И. Янчевский.

КНОППА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — *суммирования метод* числовых и функциональных рядов; является обобщением *Эйлера метода суммирования* и носит в литературе название Э й л е р а — К н о п п а м е т о д с у м м и р о в а н и я. *И. И. Волков.*

КОАЛГЕБРА — модуль A над коммутативным кольцом K с такими двумя гомоморфизмами $\varphi : A \to A \otimes_k A$ и $\varepsilon : A \to k$, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \otimes A \arrow[d, "1 \otimes \varphi"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\varphi \otimes 1"'] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[dr, "\varepsilon \oplus 1"'] & A \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, phantom, "//"] & A \otimes A \arrow[dl, "1 \oplus \varepsilon"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

коммутативны, т. е. К. понятие дуальное (в смысле теории категорий) к понятию ассоциативной алгебры над кольцом K.

К. приобрели значение в связи с множеством топологич. приложений, так, например, симплициальный комплекс топологического пространства является К. Тесно связаны с К. *Хопфа алгебры*, несущие на себе структуры алгебры и К. одновременно.

Лит.: [1] М а к л е й н С., Гомология, пер. с англ., М., 1966.
В. Е. Говоров.

КОАЛИЦИОННАЯ ИГРА — игра, в к-рой коалиции действия $\mathfrak{K}_\partial$ и коалиции интересов $\mathfrak{K}_u$ составляют различные семейства (вообще говоря, пересекающихся) подмножеств множества игроков I, а отношение предпочтения для каждой из коалиций интересов $K \in \mathfrak{K}_u$ описывается ее функцией выигрыша H_k (см. *Игр теория*). Исследовался случай, когда $\mathfrak{K}_u \subset \mathfrak{K}_\partial$.

Множество $\mathfrak{K}_\partial$ естественно и полезно понимать как симплициальный комплекс с множеством вершин I. Некоторые топологич. свойства $\mathfrak{K}_\partial$ имеют теоретико-игровой смысл; в частности, если комплекс $\mathfrak{K}_\partial$ нульмерен, то игра оказывается бескоалиционной.

Протекание К. и можно интерпретировать как согласованный набор игроками («на по-коалиционных совещаниях») коалиционных *стратегий* для каждой коалиции действия, после чего в сложившейся ситуации s каждая коалиция интересов K получает выигрыш $H_K(s)$.

Оптимальность в К. и. можно понимать как своего рода «локализацию конфликтов», а именно как устойчивость ситуации s в смысле выполнения набора условий следующего вида: коалиция интересов K не заинтересована в отклонении от своей коалиционной стратегии в s, даже если нек-рая коалиция действия K' отклонится от своей стратегии. Равновесность по Нэшу охватывается этим принципом.

Лит.: [1] Воробьев Н. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, № 2, с. 289—306. *Н. Н. Воробьев.*

КОАЛИЦИЯ (в теории игр) — группа лиц или сторона, принимающая решение в конфликте (коалиция действия), либо отстаивающая нек-рые интересы (коалиция интересов). См. *Игр теория.*

А. С. Михайлова.

КОБАЗИС — *базис* двойственного, или *сопряженного пространства.*

КОБОЛ — *алгоритмический язык*, ориентированный на задачи обработки данных (COBOL — сокр. от Common Business Oriented Language). Способ записи программы приближен к естественному английскому языку, удобен в изучении, документировании и переносе программы с одной ЭВМ на другую. К. разрабатывается в США, начиная с 1959; получил широкое распространение, стал национальным стандартом [1]. Русский вариант К. опубликован в 1968 [2], с 1978 вводится государственный стандарт [3].

Программа на К. состоит из четырех разделов:

1) Раздел идентификации содержит имя программы, автора, дату и другую справочную информацию.

2) Раздел оборудования определяет конфигурацию транслирующей и рабочей ЭВМ, специфические особенности оборудования и управления вводом-выводом.

3) Раздел данных содержит машинно-независимое описание вида и структуры входных, промежуточных и выходных данных. Допускаются цифровые и нецифровые элементарные данные, к-рые могут объединяться в группы, группы групп и т. д. Такая структурная иерархия задается с помощью номеров уровней. Высший уровень присваивается логической записи. Совокупности однородных или разнородных записей образуют файлы. Допустимы указания, повышающие эффективность внутренней интерпретации формата данных.

4) Раздел процедур задает операции обработки данных в виде последовательности предложений, именованных параграфов и секций, составленных из повелительных, условных и управляющих трансляцией операторов.

По назначению элементы К. разделяются на ядро и 11 функциональных обрабатывающих модулей. Ядро содержит элементы языка, необходимые для обработки данных во внутренней памяти ЭВМ. Функциональные модули соответственно содержат средства: обработки таблиц; последовательного, относительного и индексного ввода-вывода для организации доступа к внешним файлам; сортировки-слияния; генерации отчетов; сегментации программы для совмещения памяти в рабочее время; модификации и включения в программу текстов на К. из библиотеки; отладки и контроля данных и процедур; организации межпрограммных связей с другими программами; а также коммуникативные средства посылки и получения сообщений.

Гибкость выбора стандартных подмножеств К. при разработке конкретных трансляторов основана на выделении в ядре и функциональных модулях фиксированных уровней. Элементы языка распределены по уровням так, что более высокие уровни обеспечивают бо́льшую полноту реализации соответствующей функции и содержат нижние уровни как собственные подмножества. Для некоторых функциональных модулей в качестве самого низкого уровня допускается пустое множество.

Основные направления дальнейшего развития К.— организация взаимодействия с базами данных и использование идей структурного программирования.

Лит.: [1] American National Standard. Programming Language COBOL. ANSI X3.23—1974; [2] Бабенко Л. П. [и др.], в кн.: Тр. 1 Всесоюзной конференции по программированию. И. Алгоритмические языки, К., 1968, с. 3—15; [3] ГОСТ 22558—77. «Язык программирования КОБОЛ»; [4] Ющенко Е. Л. [и др.], КОБОЛ, 2 изд., К., 1974.

Г. К. Столяров.

КОБОРДИЗМ, кобордизмов теория,— обобщенная теория когомологий, определенная спектрами пространств Тома и связанная с различными структурами в стабильном касательном или нормальном расслоении к многообразию. Теория К. двойственна (в смысле *S-двойственности*) теории *бордизмов.*

Простейшим примером К. являются ортогональные, или неориентированные К. Пусть O_r — группа ортогональных преобразований евклидова пространства $\mathbb{R}^r$, BO_r — ее *классифицирующее пространство.* Стандартное вложение $O_r \to O_{r+1}$ задает отображение $j_r: BO_r \to BO_{r+1}$, переводящее *универсальное расслоение* γ_{r+1} над BO_{r+1} в расслоение $\gamma_r \oplus \theta$, где θ — одномерное тривиальное расслоение над BO_r. Если TBO_r — *Тома пространство* расслоения γ_r, то получается индуцированное отображением j_r отображение $s_r: STBO_r \to TBO_{r+1}$, где S — оператор *надстройки.* Последовательность $\{TBO_r, s_r\}$ образует *спектр пространств* и, следовательно, задает теорию когомологий, наз. теорией ортогональных К., или O-К., обозначаемую O^*. Группа $O^n(X, A)$ n-мерных O-К. пары пространств (X, A) определяется как

$$\lim_{i \to \infty} [S^i(X/A), TBO_{i+n}],$$

где $[P, Q]$ — множество гомотопич. классов отображений из P в Q. При этом $O^n(X) = O^n(X, \phi)$, где ϕ — пустое множество, а под $X/\phi = X^+$ понимается несвязное объединение X и точки. Группа $O^n(X, x_0)$, где $x_0 \in X$, наз. приведенной группой n-мерных O-К. $\tilde{O}^n(X)$ пространства X. Обобщенная теория гомологий, двойственная теории O-К., наз. теорией O-бордизмов. Группы $O_n(X, A)$ n-мерных бордизмов пары (X, A) определяются как

$$\lim_{i \to \infty} \pi_{i+n}((X/A) \wedge TBO_i).$$

Группы n-мерных O-К. точки обозначаются через Ω_0^n, а n-мерных O-бордизмов точки — через Ω_n^0; последние описываются чисто геометрически. При этом $\Omega_0^{-n} \approx \Omega_n^0 \approx \pi_{n+N}(TBO_N)$, $N \gg n$, так что ее можно интерпретировать как группу К. и как группу бордизмов (см. *Бордизм*), где она обозначена $\mathfrak{N}_n$. Полная группа коэффициентов теории O-К.— градуированная группа $\Omega_0 = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} \Omega_0^n$ — является кольцом: умножение индуцировано прямым произведением многообразий. Более того, для любого конечного CW-комплекса X группа $O(X)=\bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty}O^n(X)$ является естественным по X кольцом, поскольку индуцированное вложением $O_m\times O_n\to O_{m+n}$ отображение $BO_m\times BO_n\to BO_{m+n}$ задает отображение $TBO_m\wedge TBO_n\to TBO_{m+n}$, так что $\{TBO_r\}$ — мультипликативный спектр пространств.

Общая ситуация описывается следующим образом. Структурной серией (B, φ) наз. последовательность расслоений $\varphi_r: B_r\to BO_r$ и отображений $i_r: B_r\to B_{r+1}$ таких, что $\varphi_{r+1}\circ i_r=j_r\circ\varphi_r$. Отображение φ_r задает векторное расслоение $\xi_r=\varphi^*\gamma_r$ над B_r, причем $i_r^*\xi_{r+1}=\xi_r+\varphi_r^*\theta$. Пусть TB_r — пространство Тома расслоения ξ_r; указанное равенство задает отображение $s_r: STB_r\to TB_{r+1}$, так что последовательность $T(B, \varphi)=\{TB_r, s_r\}$ является спектром пространств и, следовательно, задает теорию когомологий, наз. теорией (B, φ)-К., обозначаемую $(B, \varphi)^*$. Таким образом

$$(B\varphi)^i(X, A)=\lim_{N\to\infty}[S^N(X/A), TB_{i+N}].$$

Группа коэффициентов теории (B, φ)-К. обозначается через $\Omega_{(B, \varphi)}$. При этом $\Omega_i^{(B, \varphi)}=\Omega_{(B, \varphi)}^{-i}=\pi_{i+N}(TB_N)$, $N\gg i$, где $\Omega_i^{(B, \varphi)}$ — группа коэффициентов двойственной теории (B, φ)-бордизмов, которая допускает геометрическое определение, использующее понятие так наз. (B, φ)-*структуры*: определяется (B, φ)-бордантность и элементы $\Omega^{(B, \varphi)}$ интерпретируются как классы (B, φ)-бордантных многообразий.

Первые примеры теорий К. возникают из серий линейных групп. Напр., серия ортогональных групп $\{O_r\}$ определяет структурную серию $\{B_r, \varphi_r\}$, где $B_r=BO_r$, $\varphi_r=id$. Серия $\{SO_r\}$ определяет структурную серию $\{B_r, \varphi_r\}$, где $B_r=BSO_r$, $\varphi_r: BSO_r\to BO_r$ — универсальное двулистное накрытие, соответствующее включению $SO_r\subset O_r$. Соответствующая теория К. наз. теорией ориентированных К. и обозначается через SO^*. Серия унитарных групп $\{U_r\}$ определяет теорию унитарных, или квазикомплексных К., обозначаемую U^*. Здесь серия $\{B, \varphi\}$ строится так: $B_{2r}=B_{2r+1}=BU_r$ — классифицирующее пространство группы U_r, а отображения φ_r — отображения классифицирующих пространств $BU_r\to BO_{2r}\to BO_{2r+1}$, индуцированные естественными вложениями $U_r\subset O_{2r}\subset O_{2r+1}$. Серия симплектических групп $\{Sp_r\}$ определяет теорию симплектических К. Sp^*, здесь $B_{4r}=B_{4r+1}=B_{4r+2}=B_{4r+3}=B\,\mathrm{Sp}_r$, и отображения φ_r строятся так же, как и в случае унитарных К. Имеются также теории К., соответствующие сериям групп $\{\mathrm{Spin}_r\}$, $\{SU_r\}$, и т. д. Наконец, серия единичных групп $\{E_r\}$, где $\varphi_r: B_r\to BO_r$ — расслоение со стягиваемым B_r, дает теорию К., совпадающую с теорией стабильных когомотопических групп, и потому двойственная теория бордизмов изоморфна теории стабильных гомотопических групп, $E_i(X)\approx\pi_{i+N}(S^NX)$, $N\gg i$. E-многообразие наз. оснащенным, так как E-структура — это в точности оснащение (тривиализация) стабильного нормального расслоения. Теория E-К. наз. теорией оснащенных К., а ее i-мерная группа коэффициентов обозначается через Ω_{fr}^i [так что $\Omega_{fr}^{-i}=\Omega_i^{fr}=\pi_{i+N}(S^N)$]; это — первый пример К.; он появился у Л. С. Понтрягина (1955), проинтерпретировавшего стабильные гомотопич. группы сфер как (определяемые геометрически) группы оснащенных К. точки Ω_{fr}^i с целью вычисления группы $\pi_{i+N}(S^N)$.

Все описанные теории К., возникающие из серий линейных групп, являются мультипликативными, и потому для любого конечного CW-комплекса X полная (градуированная) группа К. является кольцом.

Например, для серии групп $\{U_r\}$ имеется вложение $U_m \times U_n \to U_{m+n}$, порождающее отображение

$$BU_m \times BU_n \to BU_{m+n}$$

и, следовательно, отображение $TBU_m \wedge TBU_n \to TBU_{m+n}$. Спектр $\{M_r\}$, представляющий теорию U^*, имеет вид $M_{2r} = TBU_r$, $M_{2r+1} = STBU_r$ и потому существуют отображения $M_r \wedge M_s \to M_{r+s}$, так что спектр пространств $\{M_r\}$ мультипликативен.

Развитие теории К. началось с геометрич. определения и вычисления групп Ω_E, Ω_O, Ω_{SO}. Важную роль сыграла теорема Понтрягина о том, что O-бордантные многообразия имеют одни и те же числа Штифеля. Исследование К. было продвинуто Р. Томом (R. Thom). Он ввел пространства TBO_N, $TBSO_N$ и доказал изоморфизм $\pi_{i+N}(TBO_N) \approx \Omega_O^{-i}$, что позволило привлечь к вычислению колец К. точки методы гомотопич. топологии. Конструкции Тома стимулировали введение TBU_n, $TBSp_n$ и т. д. и соответствующих К. Основной задачей первого этапа развития теории К. и было вычисление колец К. точки.

При изучении К. точки большую роль играют *характеристические классы* — Чжэня для Ω_U, Штифеля для Ω_O, Понтрягина и Штифеля для Ω_{SO}. Вообще, для любой структурной серии (B, φ) и любой мультипликативной теории когомологий h^*, в к-рой все расслоения ξ_r над B_r ориентируемы, можно определить характеристические классы как элементы группы $h^*(B)$, где $B = \lim(B_r, j_r)$. При этом соответствующие характеристич. числа, являющиеся элементами кольца h^* (точка), будут инвариантны относительно (B, φ)-бордантности. Пусть x_i — образующие Ву для классов Чжэня и S_ω — симметрич. функция от n переменных, соответствующая нек-рому разбиению $\omega = (i_1, \ldots i_k)$ числа n. Характеристич. класс $S_\omega(x_1, \ldots, x_n)$ обозначается через S_ω^c. Аналогичные конструкции для классов Понтрягина и Штифеля обозначаются через S_ω^p и S_ω^w соответственно.

1) Унитарные К. Кольцо Ω_U — свободная градуированная полиномиальная алгебра от счетного числа однородных образующих

$$\Omega_U = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, \ldots], \ \deg x_i = -2i.$$

Множество $\{x_n\}$, $\deg x_n = -2n$ является системой полиномиальных образующих тогда и только тогда, когда

$$S^c_{(n)}(x_n) = \begin{cases} \pm 1, n \neq p^r - 1 & \text{ни для какого простого } p \\ & \text{и целого } r, \\ \pm p, \ n = p^r - 1 & \text{для некоторого простого } p, \end{cases}$$

где (n) — разбиение числа n, состоящее из одного слагаемого. Одну из систем полиномиальных образующих кольца Ω_U можно описать так. Пусть $\mathbb{C}P^n$ есть n-мерное комплексное проективное пространство. Комплексная алгебраич. гиперповерхность бистепени (1,1) в $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ является комплексным многообразием. Класс его унитарных К. обозначим $H_{i,j}$, $\dim_{\mathbb{R}} H_{i,j} = 2(i+j-1)$. Оказывается, что $S_{i+j-1}(H_{i,j}) = \binom{i+j}{i}$, так что подходящая целочисленная линейная комбинация элементов $H_{i,j}$ задает образующую кольца Ω_U степени $2(1-i-j)$.

Из отсутствия кручения в кольце Ω_U и того, что $H^*(BU; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n \ldots]$, где c_n — *Чжэня классы*, $\deg c_n = 2n$, следует, что *Чжэня числа* полностью определяют класс унитарных К. квазикомплексного многообразия.

Пусть n — натуральное число $(i_1, \ldots, i_k)$, $i_s > 0$, $\sum i_s = n$ — его разбиение. Каждому $2n$-мерному (размерность действительная) квазикомплексному многообразию M соответствует набор $\{a_{i_1\ldots i_k}\}=\{c_{i_1}\ldots c_{i_k}(M)\}$ целых чисел, где мультииндекс $i_1,\ldots i_k$ пробегает все разбиения числа n. Набор таких целых чисел $\{b_{i_1},\ldots, b_{i_k}\}$ реализуется как набор чисел Чжэня нек-рого квазикомплексного многообразия в следующей ситуации. Пусть $S^c_\omega(e)\in H^{**}(BU;\ \mathbb{Q})$ — *характеристический класс*, заданный симметрич. функцией S_ω от переменных $e^{x_i}-1$, $i=1, 2,\ldots, |\omega|$, а $T\in H^{**}(BU;\mathbb{Q})$— характеристический класс, заданный произведением функций $x_i/(e^{x_i}-1)$, где x_i — образующие Ву. Пусть $x(M)$ — значение характеристич. класса $x\in$ $\in H^n\ (BU;\ \mathbb{Q})$ на фундаментальном классе $[M]\in H_n(M,$ $\mathbb{Z})$ квазикомплексного многообразия M с касательным расслоением TM.

Для гомоморфизма $\varphi: H^n(BU;\ \mathbb{Q})\to\mathbb{Q}$ тогда и только тогда существует такое замкнутое квазикомплексное многообразие M, что $\varphi(x)=x(M)$ для всех $x\in H^n(BU;$ $\mathbb{Q})$, когда φ принимает целые значения на всех n-мерных компонентах каждого характеристич. класса $S^c_\omega(e)T$ (теорема Стонга). Эквивалентно, гомоморфизм Гуревича

$$\pi_{2(k+N)}(TBU_N)\to\tilde{K}_{2(k+N)}(TBU_N),$$

где $N\geqslant k$,— мономорфизм на прямое слагаемое (теорема Хаттори). Здесь $\tilde{K}$ — приведенная *К-теория.*

2) Неориентированные, или ортогональные, К. Каждый элемент кольца Ω_O имеет порядок 2, и

$$\Omega_O\mathbb{Z}_2[x_1,\ \ldots,x_n,\ \ldots],\ \deg x_i=-i,\quad i\neq 2^k-1,$$

т. е. Ω_O — свободная полиномиальная $\mathbb{Z}_2$-алгебра. В качестве образующей x_i можно выбрать любой элемент $[M]$ с $S^\omega_{(i)}(M)\neq 0$, напр. $x_{2i}=\mathbb{R}P^{2i}$. В этой теории есть аналоги многообразий $H_{i,j}$, если вместо $\mathbb{C}P^k$ брать $\mathbb{R}P^k$; подходящее многообразие $H_{i,j}$ может служить образующей степени $1-i-j$. *Штифеля числа* полностью определяют класс неориентируемых К. многообразия, соотношения между числами Штифеля дает следующая теорема: для гомоморфизма φ: $H^n(BO;\ \mathbb{Z}_2)\to$ $\mathbb{Z}_2$. Тогда и только тогда существует такое n-мерное замкнутое многообразие M, что $\varphi(x)=x(M)$ для всех $x\in H^n(BO;\mathbb{Z}_2)$, когда $\varphi(Sqb+vb)=0$ для всех $b\in H^*(BO;$ $\mathbb{Z}_2)$, где $v=Sq^{-1}w$. Здесь $Sq=Sq^1+Sq^2+\ldots$ — полная *Стинрода операция*, $w=w_1+w_2+\ldots$ — полный класс Штифеля. Образом гомоморфизма $\Omega_U\to\Omega_0$ является кольцо $(\Omega_0)^2$

3) Ориентированные К. с кольцом Ω_{SO}. Все элементы подгруппы кручения Tors этого кольца имеют порядок 2. Кольцо $\Omega_{SO}/\mathrm{Tors}$ является кольцом полиномов над $\mathbb{Z}$ от классов x_i степени $-4i$, образующие выделяются условием

$$S^p_{(i)}(x_i)=\begin{cases}\pm 1, & 2i=p^r-1 \text{ для некоторого простого } p \text{ и целого } r,\\ \pm p, & 2^i=p^{r-1} \text{ для некоторого простого } p.\end{cases}$$

Класс SO -К. многообразия определяется *Понтрягина числами* и числами Штифеля. Инвариантом класса К. является также *сигнатура многообразия.* Соотношения между числами Штифеля вытекают из следующего факта: образ гомоморфизма «забывания» $\Omega_{SO}\to\Omega_0$ состоит точно из тех классов К., у которых все числа, содержащие класс w_1, равны нулю. Для любого разбиения $\omega=(i_1,\ldots,i_k)$ имеет место

$$p_\omega(M)\bmod 2=w^2_{2\omega}=\left[w_{2i_1}w_{2i_2}\ldots w_{2i_k}(M)\right],$$

где p_ω — соответствующее число Понтрягина. Не существует 2-примарных соотношений между числами Понтрягина.

Подобно тому, как для унитарных К. вводились классы $S^c_\omega(l)$, вводятся классы $S^p_\omega(e)$ — симметрич. функции от $e^{x_i}+e^{-x_i}-2$. Пусть L — характеристич. класс, задающий *L-род* Хирцебруха. Все соотношения между числами Понтрягина следуют из того, что числа Понтрягина целые, и $(S^p_\omega(e)L)\ [M]\in\mathbb{Z}[^1/_2]$. Гомоморфизм $\Omega_U\to\Omega_{SO}/\mathrm{Tors}$ эпиморфен.

4) Специальные унитарные К. с кольцом Ω_{SU}. U-многообразие M допускает SU-структуру тогда и только тогда, когда $C_1(M)=0$. Все элементы подгруппы кручения Tors имеют порядок 2. Ядро гомоморфизма $\Omega_{SU}\to\Omega_U$ есть в точности Tors. Группы Ω^n_{SU} конечно порождены, и $\Omega_{SU}\otimes\mathbb{Q}$ есть кольцо полиномов над $\mathbb{Q}$ от классов x_i степени $-2i$, $i>1$. Подгруппа кручения Tors имеет вид $\mathrm{Tors}^{-n}=0$ при $n\neq 8k+1$, $8k+2$, а для $n=8k+1$, $8k+2$ группа Tors^{-n} есть векторное пространство над $\mathbb{Z}_2$, размерность к-рого равна числу разбиений числа k. Два SU-многообразия бордантны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же характеристич. числа в целочисленных когомологиях и в KO-теории.

Все соотношения между числами Чжэня для n-мерных SU-многообразий вытекают из следующих: $c_1c_\omega(M)=0$ для всех ω; $(S^c_\omega(e)T)\ [M]\in\mathbb{Z}$ для всех ω; если $n=4 \bmod 8$, то $(S^p_\omega(e)T)\ [M]\in 2\mathbb{Z}$ для всех ω. Образ гомоморфизма $\Omega_{SU}\to\Omega_O$ состоит из классов $[M]^2$, где M — ориентированное многообразие, у к-рого все числа Понтрягина, содержащие класс p_1, четны.

Полностью вычислены также кольца Ω_{Spin} и $\Omega_{\mathrm{Spin}\mathbb{C}}$. Кольца Ω_{Sp} и Ω_{fr} до сих пор (1978) не вычислены. Кольцо $\Omega_{Sp}\otimes\mathbb{Z}\ [^1/_2]$ является кольцом полиномов от $(-4i)$-мерных образующих. Все известные (1978) элементы группы Tors Ω_{Sp} имеют порядок 2. Что касается кольца Ω_{fr}, то здесь основным результатом является теорема Серра о конечности этих групп. Изучается также кольцо самосопряженных К. Ω_{SC}, где объекты — квазикомплексные многообразия с заданным в нормальном расслоении оператором, изоморфно отображающим комплексную структуру на сопряженную. Спектр $TBSC$ построен; о группах Ω_{SO} известно, что там есть лишь 2-примарное кручение, но, в отличие от Ω_{Sp}, найдены элементы порядка 4^k с любым k, именно $[\mathbb{R}P^{4k-3}]$. Вычислен также образ $\mathrm{im}(\Omega_{SC}\to\Omega_O)$ с помощью техники *формальных групп*.

Отображение одной теории К. в другую, напр. $SU^*\to U^*$, индуцирует отображение спектров $TBSU\to TBU$. Конус этого отображения в категорию спектров задает обобщенную теорию когомологий. Кольцо точки полученной теории имеет следующую геометрич. интерпретацию. Пусть (U, SU) — U-многообразие, на краю к-рого (возможно, пустом) фиксирована SU-структура. Введением для (U, SU)-многообразий соответствующего отношения бордантности получается кольцо $\Omega_{U,SU}$. Так же вводятся группы Ω_U, fr, $\Omega_{O,SO}$ и др.

Выше рассматривались гладкие многообразия или, эквивалентно, линейные представления групп (структурные серии возникали из расслоений над SO_r). Можно рассматривать различные структуры на топологич. многообразиях, т. е. исходить из группы гомеоморфизмов (и даже собственных гомотопич. эквивалентностей) пространства $\mathbb{R}^r$. Здесь известны следующие примеры (буква S везде означает переход к ориентированному случаю).

5) Кусочно линейные К. Объекты — кусочно линейные многообразия. Соответствующее отношение бордантности приводит к группам Ω_{PL}, Ω_{SPL}. Определив группу PL_n (соответственно SPL_n) как группу кусочно линейных гомеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, сохраняющих начало координат (соот-

ветственно и сохраняющих ориентацию), можно ввести классифицирующие пространства BPL_n, $BSPL_n$ и пространства Тома $TBPL_n$, $TBSPL_n$ и построить теории К. PL, SPL. При этом $\Omega_{PL}^{-i}\approx\pi_i(TBPL)$, $\Omega_{SPL}^{-i}\approx\approx\pi_i(TBSPL)$. Группы Ω_{PL} вычислены. Класс К. кусочно линейного многообразия полностью определяется своими характеристич. числами, т. е. элементами группы $H^*(BPL;\ \mathbb{Z}_2)$.

6) Топологические К. Объекты — топологич. многообразия, для к-рых определяются группы Ω_{Top}, Ω_{STop}. Рассматривая группу Top_n, сохраняющих начало координат гомеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, можно определить пространства $BTop$ и $TBTop_n$. Группы $\pi_i(TBTop)$ и $H^*(BTop,\ \mathbb{Z}_2)$ вычислены. Однако изоморфизм $\Omega_{Top}^{-i}\approx\pi_i(TBTop)$ установлен при всех i, кроме $i=4$. Отсутствие доказательства этого изоморфизма связано с тем, что теорема трансверсальности, на к-рой основан изоморфизм $\Omega_{B,\varphi}^{-i}\approx\pi_i(T\ (B,\ \varphi))$, для топологич. многообразий. в общем случае не доказана (но и не опровергнута, 1978).

7) К. комплексов Пуанкаре Ω_G, Ω_{SG}. Объекты — комплексы с *Пуанкаре двойственностью*, бордантность — соответствующее отношение эквивалентности. Такие комплексы имеют нормальное сферич. расслоение, к-рое индуцируется из универсального расслоения над BG_N(или BSG_N). Здесь G_N (соответственно SG_N) — *Н-пространство* гомотопич. эквивалентностей (соответственно степени 1) сферы S^N на себя. Возникающие спектры Тома TBG и $TBSG$ имеют конечные гомотопич. группы, в то время как сигнатура задает нетривиальный гомоморфизм $\sigma:\Omega_{SG}^{-4k}\to\mathbb{Z}$, так что отображение $\Omega_{SG}^{-i}\to\pi_{i+N}(TBG_N)$ заведомо не изоморфизм.

Еще одну серию примеров дают К. многообразий с особенностями специального типа. На этом пути можно построить теорию К., совпадающую с обычной теорией сингулярных когомологий, и теорию К., совпадающую со связной K-теорией.

Второй этап развития теории К. связан с изучением К. как специфических обобщенных теорий когомологии. Пусть F — одно из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$, GF — соответствующая серия групп ($G\mathbb{R}_n=O_n$, $G\mathbb{C}_n=U_n$, $G\mathbb{H}_n=Sp_n$) и GF^* — соответствующая теория К. Мультипликативная обобщенная теория когомологий h^* наз. F-ориентируемой, если любое F-векторное расслоение h^*-ориентируемо или, эквивалентно, каноническое одномерное F-векторное расслоение $\xi\to FP^\infty$, где FP^∞ — проективное пространство, h^* ориентируемо. F-ориентацией теории h^* наз. h^*-ориентация $U_h(\xi)\in h^*(FP^\infty)$ расслоения ξ, и теория с выбранной ориентацией наз. ориентированной. Теории GF-К. имеют канонич. ориентацию благодаря отождествлению $FP^\infty=TBGF_1$. Теория GF^* является универсальной в классе F-ориентированных теорий, т. е. для любой F-ориентированной теории h^* с F-ориентацией $U_h(\xi)$ существует единственный мультипликативный гомоморфизм теорий $\varphi^h: GF^*\to h^*$, при к-ром канонич. ориентация теории GF^* переходит в U_h. При этом, когда F_0 — одно из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, то для любой F_0-ориентированной теории h^* и любого конечного CW-комплекса X существуют спектральные последовательности $E^r_{p,q}(X)$ и $E_r^{p,q}(X)$ с

$$E^2_{p,q}(X)=\mathrm{Tor}^{\Omega_{GF_0}}_{p,q}(GF_0^*(X),\ h^*(\text{точка})),$$

$$E_2^{p,q}(X)=\mathrm{Ext}^{p,q}_{\Omega_{GF_0}}(GF_0^*(X),\ h^*(\text{точка})),$$

сходящиеся к $h^*(X)$ и естественные по X и h^*, где h^*(точка) сделано Ω_{GF_0}-модулем посредством гомоморфизма φ^h(точка). Если h_* — теория гомологий, двойственная F-ориентированной теории когомологий h^*, то имеется гомоморфизм $\varphi_h : GF_* \to h_*$. В случае, когда h_* — обычная теория гомологий, он совпадает с гомоморфизмом Стинрода—Тома реализации циклов (см. *Стинрода задача*).

Наиболее важные и удачные применения теории К.: доказательство теоремы Атьи—Зингера об индексе эллиптич. оператора и общей теоремы Римана—Роха; изучение неподвижных точек действий групп; классификация гладких (кусочно линейных) многообразий данного гомотопич. типа; доказательство теоремы о топологич. инвариантности рациональных классов Понтрягина и решение проблемы триангулируемости топологич. многообразия.

Лит.: [1] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [2] Коннер П., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [3] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 4, с. 855—951; [4] Bröcker T., Dieck T., Kobordismentheorie, B., 1970; [5] Бухштабер В. М., Итоги науки и техники. Алгебра. Геометрия. Топология, т. 13, М., 1975, с. 231—72. См. также лит. при статье *Бордизм*. *Ю. Б. Рудяк.*

***h*-КОБОРДИЗМ** — *бордизм* $(W;\ M_0,\ M_1)$, где W — компактное многообразие, край к-рого ∂W — объединение непересекающихся замкнутых многообразий M_0 и M_1, являющихся *деформационными ретрактами* W. Простейший пример — тривиальный h-К.

$$(M\times[0,\ 1];\ M\times\{0\},\ M\times\{1\}).$$

Многообразия M_0 и M_1 наз. h-кобордантными, если существует h-К. W, соединяющий их.

Если $(W;\ M_0,\ M_1)$ — такой h-К., что W, M_0, M_1 — односвязные дифференцируемые (кусочно линейные) многообразия и $\dim W\geqslant 6$, то W диффеоморфно (кусочно линейно изоморфно) $M_0\times[0,\ 1]$: $W\approx M_0\times[0,\ 1]$ и, следовательно, $M_0\approx M_1$ (теорема об h-кобордизме [4]). Таким образом, установление изоморфизма $M_0\approx M_1$ сводится к установлению их h-кобордантности, что удается сделать методами алгебраич. топологии, и по этой причине эта теорема является основным средством перехода от гомотопич. классификации односвязных многообразий к их классификации с точностью до диффеоморфизма (кусочно линейного изоморфизма). Так, если W^n, $n\geqslant 6$,— дифференцируемое компактное многообразие односвязным краем, то оно диффеоморфно диску D^n. Если M^n, $n\geqslant 5$,— многообразие, гомотопически эквивалентное сфере S^n, то оно гомеоморфно (и даже кусочно линейно изоморфно) сфере S^n (обобщенная гипотеза Пуанкаре).

Теорема об h-К. позволила классифицировать дифференцируемые структуры на сфере, S^n, $n\geqslant 5$ [6], а также на гомотопическом типе произвольного замкнутого односвязного многообразия [1].

В случае h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ с $\pi_1 W\neq\{1\}$ диффеоморфизма $W\approx M_0\times[0,\ 1]$, вообще говоря, нет.

Все h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ с $\dim W\geqslant 6$ и фиксированным M_0 классифицируются нек-рой абелевой группой — *Уайтхеда группой* $Wh\pi_1$ группы $\pi_1 M_0$. Данному h-К. соответствует элемент $Wh\pi_1$, являющийся инвариантом пары $(W,\ M_0)$; он обозначается $\tau(W,\ M_0)$ и наз. кручением (иногда кручением Уайтхеда) данного h-К. Если $\tau(W,\ M_0)=0$ (или равносильно $\tau(W,\ M_1)=0$), то h-К. наз. s-кобордизмом. Если $(W;\ M_0,\ M_1)$ — такой h-К., что $\dim W\geqslant 6$, то кручение $\tau(W,\ M_0)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда $W\approx M_0\times[0,\ 1]$ (теорема об s-кобордизме). Теорема об h-К. есть частный случай этой теоремы ввиду $Wh\ \{1\}=0$. Теорема об s-кобордизме справедлива и для топологич. многообразий [9].

Для h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ наряду с $\tau(W,\ M_0)$ определяется кручение $\tau(W,\ M_1)$; если данный h-К. ориентируем, то $\tau(W,\ M_0)=(-1)^{n-1}\tau^*(W,\ M_1)$, где $n=\dim W$, а элемент τ^* сопряжен к τ в группе $Wh\pi_1$. В частности, если π_1 конечна и абелева, то $\tau^*=\tau$.

Если два h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ и $(W';\ M_1,\ M_2)$ склеены по M_1 в h-К. $(W \cup W';\ M_0,\ M_1)$, то

$$\tau(W \cup W',\ M_0)=\tau(W,\ M_0)+\tau(W',\ M_1).$$

Если склеить две копии W по M_1, причем $\dim W$ нечетно и $\pi_1=\mathbb{Z}_5$, то получится h-К. $(2W,\ M_0,\ M_0')$, где $M_0=M_0'$ при отсутствии диффеоморфизма $W \approx M_0 \times \times [0,\ 1]$, т. е. из $M_0 \approx M_1$ не следует тривиальность связывающего их h-К.

Если M_0 — замкнутое связное многообразие, и $\dim M_0 \geqslant \geqslant 5$, то для любого $\tau \in Wh\pi_1 M_0$ существует h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ с $\tau(W,\ M_0)=\tau$. Если h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ и $(W';\ M_0,\ M_1')$ с $\dim W \geqslant 6$ имеют одинаковые кручения $\tau(W,\ M_0)=\tau(W',\ M_0)$, то $W \approx W'$ rel M_0. При четной $\dim\ M_0$ и конечной $\pi_1 M_0$ существует конечное множество различных многообразий, h-кобордантных M_0, в случае нечетной размерности это не так.

Если гомотопич. эквивалентные многообразия M_1 и M_2 вложены в $\mathbb{R}^N$ с достаточно большим N, и их нормальные расслоения тривиальны, то многообразия $M_1 \times \times S^N$ и $M_2 \times S^N$ h-кобордантны. Если же M_1 и M_2 — одного и того же *простого гомотопического типа*, т. е. кручение этой гомотопич. эквивалентности равно нулю, то $M_1 \times S^N \approx M_2 \times S^N$.

Для h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ и замкнутого многообразия P имеет место h-К. $(W \times P,\ M_0 \times P,\ M_1 \times P)$, причем $\tau(W \times P,\ M_0 \times P)=\tau(W,\ M_0)\chi(P)$, где $\chi(P)$ — эйлерова характеристика P. Если $\dim\ W \geqslant S$ и $P=S^1$, то

$$W \times S^1 \approx M_0 \times S^1 \times [0,\ 1] \approx M_1 \times S^1 \times [0,\ 1].$$

В частности, $M_0 \times S^1 \approx M_1 \times S^1$; кроме того, замкнутые многообразия M_0 и M_1 одинаковой размерности $\geqslant 5$ h-кобордантны тогда и только тогда, когда $M_0 \times \mathbb{R}^1 \approx \approx M_1 \times \mathbb{R}^1$.

Структура h-К. при $n<6$ полностью не выяснена (1978). Так, имеет место [8] следующий отрицательный результат: существует h-К. $(W;\ T^4,\ T^4)$, где T^4 — четырехмерный тор, где нет диффеоморфизма $W \approx T^4 \times \times [0,\ 1]$, и поскольку $Wh\pi_1 T^4=0$, то теорема об s-кобордизме при $n=5$ неверна.

Лит.: [1] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 365—474; [2] Милнор Дж., Теорема об h-кобордизме, пер. с англ., М., 1969; [3] его же, «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 3—43; [4] Смейл С., там же, 1964, т. 8, № 4, с. 95—108; [5] Milnor J., «Bull. Soc. Math. France», 1959, t. 87, p. 439—44; [6] Kervaire M., Milnor J., «Ann. Math.», 1963, v. 77, p. 504—37; [7] Mazur B., там же, p. 232—49; [8] Siebenmann L., Topology of Manifolds, Chi., 1969; [9] Kirby R., Siebenmann L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 75, p. 742—49; [10] Kervaire M., «Lect. Notes Math.», 1967, v. 48, p. 83—95; [11] Thom R., Topologia algebraico, Méx., 1958; [12] Рурк К., Сандерсон Б., Введение в кусочно линейную топологию, пер. с англ., М., 1974.

Ю. Б. Рудяк.

КОВАРИАНТ тензора t на конечномерном векторном пространстве V — такое отображение φ пространства T тензоров фиксированного типа на V в некоторое пространство S ковариантных тензоров на V, что $\varphi(g(t))=g(\varphi(t))$ для любого невырожденного линейного преобразования g пространства V и любого $t \in T$. Это — определение ковариянта тензора относительно полной линейной группы $GL(V)$. Если же g не любое, а принадлежит фиксированной подгруппе $G \subset GL(V)$, то получается определение К. тензора относительно группы G, или просто К. группы G.

На координатном языке К. тензора на конечномерном векторном пространстве представляет собой набор функций

$$s_i=\varphi_i\ (t_1,\ \ldots,\ t_n), \quad i=1,\ \ldots,\ m,$$

от координат тензора t, обладающий свойством: при изменении набора чисел $t_1, \ldots,\ t_n$, определенным невырожденным линейным преобразованием $g \in G$, набор чисел $s_1, \ldots, s_m$ меняется так же, как меняются координаты нек-рого ковариантного тензора s на V при преобразовании g. Аналогично (рассматривая вместо одного тензора t конечный набор тензоров) определяется совместный К. системы тензоров. Если же вместо ковариантности тензора s требовать контравариантность, получится понятие контраварианта.

Понятие К. возникло в классической теории инвариантов и является частным случаем понятия *комитанта*. Координаты любого тензора на V могут рассматриваться как коэффициенты соответствующей формы от нескольких контравариантных и ковариантных векторов (т. е. векторов пространства V и его сопряженного пространства V^*). Пусть тензору t соответствует таким образом форма f, а его ковариантну s — форма h. Тогда h — форма только от контравариантных векторов. В классич. теории инвариантов форма h называлась К. формы f. Особенно часто рассматривался случай, когда h — форма от одного контравариантного вектора. Степень этой формы наз. порядком К. Если коэффициенты формы h являются многочленами от коэффициентов формы f, то наивысшая из степеней этих многочленов наз. степенью К.

Пример. Пусть $f=\sum a_{i_1 \ldots i_r} x^{i_1} \ldots x^{i_r}$ — n-арная форма порядка r, где $x^1, \ldots, x^r$ — координаты контравариантного вектора. Форма f соответствует симметрическому ковариантному тензору t r-й валентности с координатами $a_{i_1} \ldots i_r$. Пусть

$$h=\frac{1}{r^n (r-1)^n}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1\, \partial x^n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n\, \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{(\partial x^n)^2} \end{vmatrix}.$$

Тогда коэффициенты формы h являются координатами нек-рого ковариантного тензора s. Тензор s (форма h) есть К. тензора t (формы f). Форма h наз. гессианом формы f.

Лит.: [1] Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М.— Л., 1948. *В. Л. Попов.*

КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — обобщение понятия производной для полей различных геометрических объектов на многообразиях — векторов, тензоров, форм и т. д. Это — линейный оператор ∇_X, действующий на модуле тензорных полей T^r_s данной валентности и определяемый по векторному полю X на многообразии M следующими свойствами:

1) $\nabla_{fX+gY} U = f\nabla_X U + g\nabla_Y U$,

2) $\nabla_X (fU) = f\nabla_X U + (Xf)\, U$,

где $U \in T^r_s(\mathrm{M})$, f, g — дифференцируемые функции на M. По линейности это отображение распространяется на алгебру тензорных полей, причем для тензорного произведения $\otimes$ тензоров U и V:

$$\nabla_X (U \otimes V) = \nabla_X U \otimes V + U \otimes \nabla_X V.$$

Таким образом, отображение ∇_X является *дифференцированием* алгебры тензорных полей; оно обладает дополнительными свойствами перестановочности с операциями свертки, альтернирования и симметрирования тензоров.

Свойства 1) и 2) отображения ∇_X позволяют ввести на M линейную связность (и соответствующее параллельное перенесение) и на ее основе дать локальное определение К. п., к-рая, будучи распространенной на все многообразие, совпадает с определенным здесь оператором ∇_X; см. также *Ковариантное дифференцирование*.

И. Х. Сабитов.

КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ, абсолютное дифференцирование, — операция, инвариантным образом определяющая понятия производной и дифференциала для полей геометрич. объектов на многообразиях — векторов, тензоров, форм и т. д. Основные понятия теории К. д. (под названием абсолютное дифференциальное исчисление) были даны в конце 19 в. в работах Г. Риччи (G. Ricci) и в наиболее полной форме изложены им в 1901 в совместной работе его с Т. Леви-Чивита (T. Levi-Civita) (см. [1]). Сначала теория К. д. строилась на римановых многообразиях и предназначалась в первую очередь для исследования инвариантов дифференциальных форм. Впоследствии оказалось, что определение и свойства К. д. естественным образом связаны с введенными позже понятиями *связности* и *параллельного перенесения* на многообразиях, и теперь теория К. д. строится в общих рамках теории связностей. Как аппарат тензорного анализа, К. д. широко употребляется в теоретич. физике, особенно в общей теории относительности.

Пусть на n-мерном многообразии M введена аффинная связность и соответствующее параллельное перенесение векторов и вообще тензоров. Пусть X — гладкое векторное поле, $X_p \neq 0$, $p \in M$, и U — тензорное поле типа (r, s), т. е. r раз контравариантное и s раз ковариантное; ковариантной производной (относительно данной связности) тензорного поля U в точке $p \in M$ вдоль векторного поля X наз. тензор того же типа (r, s)

$$(\nabla_X U)_p = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_t^{-1}\left(U_{x(t)}\right) - U_p}{t},$$

где $x(t)$ — точка интегральной кривой γ_X векторного поля X с начальным условием $x(0)=p$, U_p и $U_{x(t)}$ — локализации (значения) тензорного поля U в точках p и $x(t)$ соответственно, $\tau_t^{-1}(U_{x(t)})$ — результат параллельного перенесения тензора $U_{x(t)}$ вдоль γ_X из $x(t)$ в p. Таким образом, основная идея определения ковариантной производной тензорного поля U вдоль векторного поля X заключается в том, что ввиду отсутствия операций между тензорами U_p и $U_{x(t)}$, принадлежащими разным слоям тензорного расслоения над M, т. е. принадлежащими тензорным пространствам T_s^r над разными касательными к M плоскостями T_pM и $T_{x(t)}M$, в качестве «приращения» тензора U рассматривается разность между $U_p \in T_s^r(T_pM)$ и образом параллельно перенесенного в $T_s^r(T_pM)$ вдоль γ_X тензора $U_{x(t)} \in T_s^r(T_{x(t)}M)$, и дальше, как обычно, берется предел отношения этого «приращения» к приращению аргумента t. В частности, если для точек $x(t)$, близких к p, поле U получено параллельным перенесением тензора U_p вдоль γ_X, то $(\nabla_X U)_p = 0$, и тем самым в общем случае ковариантная производная поля U в точке p вдоль X определяет начальную скорость отличия поля U вдоль γ_X от результата параллельного перенесения U_p вдоль γ_X. Для тензорных полей нулевой валентности, т. е. для функций f из кольца дифференцируемых функций $\mathcal{F}$ на M

$$(\nabla_X f)_p = \lim_{t \to 0} \frac{f(x(t)) - f(p)}{t},$$

что приводит к совпадению $(\nabla_X f)_p$ с производной f по вектору X_p, т. е. с $X_p f$. При $X_p = 0$ для любого тензорного поля U, по определению, считается $(\nabla_X U)_p = 0$.

Введение ковариантной производной позволяет определить ковариантный дифференциал DU для тензорного поля U вдоль гладкой кривой $\gamma(t)$ как

$$(DU)_{\gamma(0)} = \left(\nabla_{\dot\gamma(t)} U\right)_{\gamma(0)} dt,$$

и его можно рассматривать как главную линейную часть «приращения» тензора U (в описанном выше смысле) при перемещении точки вдоль γ на бесконечно малый участок $d\gamma = \dot\gamma(0)dt$.

Знание $\nabla_X U$ для тензорного поля U типа (r, s) в каждой точке $p \in M$ вдоль каждого векторного поля X позволяет ввести два поля: 1) поле ковариантного дифференциала DU как тензорной 1-формы со значениями в модуле $T_s^r(M)$, определенной на векторах X по формуле $(DU)(X)=\nabla_X U$; 2) поле ковариантной производной ∇U как тензорного поля типа $(r, s+1)$, канонически соответствующего форме DU и действующего на 1-формах ω^i и векторах X_i по формуле

$$(\nabla U)(\omega^1, \ldots, \omega^r; X_1, \ldots, X_s, X)= \\ =(\nabla_X U)(\omega^1, \ldots, \omega^r; X_1, \ldots, X_s).$$

Обычно под ковариантным дифференциалом понимается не сама 1-форма DU, а ее значения на векторах X, и в таком толковании $(DU)(X)$ тоже превращается в тензорное поле типа (r, s), локализация к-рого, в частности, при $p=\gamma(0)$ и $X=\dot\gamma$ совпадает с введенным выше ковариантным дифференциалом $(DU)_{\gamma(0)}$ вдоль кривой $\gamma(t)$. Иногда ковариантная производная ∇U называется градиентом тензора U; а производная — ковариантным дифференциалом.

Если x^i — локальные координаты, $e_i=\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ — базисные векторные поля, e^i — сопряженные базисные 1-формы, X^i и $U_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r}$ — координаты векторного и тензорного полей в этих базисах, Γ_{ij}^k — коэффициенты введенной на M аффинной связности, то, обозначая через $\nabla_k U_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r}$ или $U_{j_1 \ldots j_s,\, k}^{i_1 \ldots i_r}$ координаты тензорного поля ∇U, получают следующие выражения (для примера взяты $r=2$, $s=1$)

$$(\nabla_X U)_j^{i_1 i_2}=$$

$$=\left(\frac{\partial U_j^{i_1 i_2}}{\partial x_k}+\Gamma_{km}^{i_1} U_j^{m i_2}+\Gamma_{km}^{i_2} U_j^{i_1 m}-\Gamma_{kj}^{m} U_m^{i_1 i_2}\right) X^k \equiv$$

$$\equiv \nabla_k U_j{}^{i_1 i_2} X^k;$$

$$(DU_{\gamma(t)})_j^{i_1 i_2}=\nabla_k U_j^{i_1 i_2} dx^k,\ dx^k=\dot x^k dt,\ \gamma(t)=\{x^k(t)\},$$

$$DU=\left(U_{j,\,k}^{i_1 i_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e^j\right) e^k,\ \nabla U=U_{j,\,k}^{i_1 i_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e^j \otimes e^k,$$

$$\nabla_X U=(DU)(X)=U_{j,\,k}^{i_1 i_2} X^k e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e^j=C_2^3(\nabla U \otimes X),$$

где C_2^3 — операция *свертки* по последним (третьему) контравариантному и (второму) ковариантному индексам.

Если M — аффинное пространство, x^i — аффинные координаты, то $(\nabla_X U)_p$ является обычной производной тензорного поля U по векторному полю X, $(\nabla_k U)_p$ — частными производными U в точке p по x^k, $(DU)_{\gamma(t)}$ — обычным дифференциалом U вдоль кривой $\gamma(t)$ и, таким образом, К. д. выступает как обобщение обычного дифференцирования с сохранением известных связей между частными производными и дифференциалами первого порядка.

Значение К. д. заключается в том, что оно дает удобный аналитический аппарат для изучения и записи свойств геометрич. объектов и операций в инвариантной форме. Напр., условие параллельного перенесения тензора U вдоль кривой γ дается уравнением $\nabla_{\dot\gamma} U=0$, уравнение геодезической γ записывается в виде $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$, условие интегрируемости системы уравнений в ковариантных производных 1-го порядка сводится к нек-рому уравнению для альтернированной разности $\nabla_\lambda \nabla_\mu U-$ $-\nabla_\mu \nabla_\lambda U$; внешнее дифференцирование форм на многообразии и в расслоениях над ним можно также выразить через К. д., и т. д.

Определение ковариантных производных высших порядков дается индуктивно: $\nabla^m U=\nabla(\nabla^{m-1}U)$. Вообще говоря, получаемый при этом тензор $\nabla^m U$ не симметричен относительно последних ковариантных индексов; высшие ковариантные производные вдоль разных векторных полей также зависят от порядка дифференцирования. Альтернированные разности компонент ковариантных производных высших порядков выражаются через *кривизны тензор* R^i_{jkl} и *кручения тензор* S^i_{jk}, совместно характеризующих отличие многообразия M с данной связностью от аффинного пространства. Напр.,

$$\nabla_\lambda\nabla_\mu U^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}-\nabla_\mu\nabla_\lambda U^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}=$$
$$=\sum_{k=1}^r R^{i_k}_{j\lambda\mu}U^{i_1\ldots i_{k-1}ji_{k+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}-$$
$$-\sum_{k=1}^s R^i_{j_k\lambda\mu}U^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{k-1}ij_{k+1}\ldots j_s}-S^k_{\lambda\mu}\nabla_k U^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s},$$

(тождество Риччи)

$$\nabla_X\nabla_Y U-\nabla_Y\nabla_X U=\Big(\sum_{k=1}^r R^{i_k}_{j\lambda\mu}U^{i_1\ldots i_{k-1}ji_{k+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}-$$
$$-\sum_{k=1}^s R^i_{j_k\lambda\mu}U^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{k-1}ij_{k+1}\ldots j_s}\Big)X^\lambda X^\mu+$$
$$+\nabla_{[X,Y]}U^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s},$$

где $[X, Y]$ — коммутатор векторов X и Y, а

$$R^i_{jkl}=\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj}-\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj}+\Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{lj}-\Gamma^p_{kj}\Gamma^i_{lp},$$
$$S^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}.$$

Определение К. д. и его свойства остаются в силе и в более общем случае, когда вместо сечения U тензорного расслоения с аффинной связностью рассматривается сечение φ произвольного (действительного или комплексного) *векторного расслоения*, ассоциированного нек-рому *главному расслоению* со связностью Γ и со структурной группой G, к-рая действует на слое своим представлением в группе невырожденных матриц. Существуют определения К. д. в более общей ситуации, когда расслоение не обязательно является векторным; общий смысл [9] этих определений заключается в аналитическом выражении параллельного перенесения объекта или параллельности определяющего его сечения как равенства нулю результата К. д. Подобные подходы имеются и для бесконечномерных многообразий.

Лит.: [1] Ricci G., Levi-Civita T., «Math. Ann.», 1901, Bd 54, № 1, S. 125—201; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1967; [3] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [4] Лихнерович А., Теория связности в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [5] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [6] Бишоп Р., Криттенден Р., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [7] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [8] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, v. 1—2, N. Y.—L., 1963—69; [9] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1971, с. 123—68; [10] Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975. *И. Х. Сабитов.*

КОВАРИАНТНЫЙ ВЕКТОР — элемент векторного пространства E^*, сопряженного к n-мерному векторному пространству E, то есть линейный функционал (линейная форма) на E. В упорядоченной паре (E, E^*) элемент пространства E наз. *контравариантным вектором*. В общей схеме построения тензоров К. в. отождествляется с ковариантным тензором валентности 1.

Координатная запись К. в. особенно проста, если в E и E^* выбраны так наз. взаимные, или дуальные, базисы $e_1, \ldots, e_n$ в E и $e^1, \ldots, e^n$ в E^*, т. е. такие базисы, что $(e^i e_j)=\delta^i_j$ (где δ^i_j — *Кронекера символ*); тогда произвольный К. в. $\omega \in E^*$ представляется в виде $\omega = f_i e^i$ (суммирование по i от 1 до n), где f_i — значение линейной формы ω их вектора e_i. При переходе от взаимных базисов (e_i) и (e^j) к взаимным базисам $(e_{i'})$ и $(e^{j'})$ по формулам

$$e_{i'} = p^i_{i'} e_i, \quad e^{j'} = q^{j'}_i e^i, \quad p^i_{k'} q^{k'}_j = \delta^i_j,$$

координаты x^i контравариантного вектора $x = x^i e_i$ изменяются по контравариантному закону $x^{i'} = q^{i'} x^i$, а координаты f_i К. в. ω изменяются по ковариантному (соизменяющемуся с базисом) закону $f_{i'} = p^i_{i'} t_i$.

Лит.: [1] Широков П. А., Тензорное исчисление, 2 изд., Казань, 1961; [2] Беклемишев Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1971; [3] Схоутен Я. А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965.
И. Х. Сабитов.

КОВАРИАНТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ — обобщение понятия дифференциала для полей различных геометрич. объектов. Это — тензорная 1-форма DU на многообразии со значениями в модуле тензорных полей U, определенных формулой

$$(DU)(X) = \nabla_X U,$$

где $\nabla_X U$ — *ковариантная производная* поля U вдоль X. См. также *Ковариантное дифференцирование*.

И. Х. Сабитов.

КОВАРИАНТНЫЙ ТЕНЗОР валентности $s \geqslant 1$ — тензор типа $(0, s)$, элемент тензорного произведения $T_s(E) = E^* \otimes \ldots \otimes E^*$ s экземпляров пространства E^*, сопряженного (дуального) к векторному пространству E над полем K. Относительно операции сложения К. т. одной и той же валентности и умножения их на скаляр $T_s(E)$ является в свою очередь векторным пространством над K. Пусть E — конечномерно и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в E, а $e^1, \ldots, e^n$ — сопряженный с ним базис в E^*. Тогда $\dim T_s(E) = n^s$ и базис в $T_s(E)$ состоит из всевозможных разложимых тензоров вида $e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_s}$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_s \leqslant n$. Любой К. т. $t \in T_s(E)$ может быть представлен в виде $t = t_{i_1 \ldots i_s} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_s}$. Числа $t_{i_1 \ldots i_s}$ наз. координатами или компонентами К. т. относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$ в E. При изменении базиса в E по формулам $e_{i'} = a^i_{i'} e_i$ и соответственно базиса в $T_s(E)$ координаты К. т. t изменяются по так наз. ковариантному закону

$$t_{i'_1 \ldots i'_s} = a^{i_1}_{i'_1} \ldots a^{i_s}_{i'_s} t_{i_1 \ldots i_s}.$$

При валентности $s \geqslant 2$ К. т. наз. *ковариантным вектором*; при $s \geqslant 2$ К. т. можно инвариантным образом связать с s-линейным отображением прямого произведения $E^s = E \times \ldots \times E$ (s раз) в K, приняв координаты К. т. t относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$ за значения r-линейного отображения $\tilde{t}$ на базисных в E^s векторах $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_s})$, и обратно; поэтому иногда К. т. определяют как полилинейный функционал на E^s.

Лит. см. при статье *Ковариантный вектор*.

И. Х. Сабитов.

КОВАРИАЦИОННАЯ МАТРИЦА — матрица, образованная из попарных ковариаций нескольких случайных величин; точнее, для k-мерного случайного вектора $X = (X_1, \ldots, X_k)$ К. м. наз. квадратная матрица $\Sigma = \mathsf{E}[(X - \mathsf{E}X)(X - \mathsf{E}X)^T]$, где $\mathsf{E}X = (\mathsf{E}X_1, \ldots, \mathsf{E}X_k)$ — вектор средних значений. Компоненты К. м. равны

$$\sigma_{ij} = \mathsf{E}\,[(X_i - \mathsf{E}X_i)(X_j - \mathsf{E}X_j)] = \operatorname{cov}(X_i, X_j),$$
$$i, j = 1, \ldots, k,$$

и при $i=j$ совпадают с $\mathsf{D}X_i$ (т. е. на главной диагонали К. м. находятся дисперсии величин X_i). К. м. представляет собой симметричную неотрицательно определенную матрицу. Если К. м. является положительно определенной, то распределение X — невырожденное распределение, в противном случае — вырожденное. Для случайного вектора X К. м. играет роль дисперсии. Если дисперсии случайных величин $X_1, \ldots, X_k$ равны 1, то К. м. для вектора $X=(X_1, \ldots, X_k)$ совпадает с *корреляционной матрицей*.

Выборочная К. м. для выборки $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$, где $X^{(m)}$, $m=1, \ldots, n$ — независимые одинаково распределенные случайные k-мерные векторы, состоит из оценок дисперсий и ковариаций:

$$S=\frac{1}{n-1}\sum_{m=1}^{n}(X^{(m)}-\overline{X})(X^{(m)}-\overline{X})^T,$$

где $\overline{X}$ — вектор арифметического среднего $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$. Если случайные векторы $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ имеют нормальное распределение с К. м. Σ, то S является оценкой максимального правдоподобия Σ; в этом случае совместное распределение элементов матрицы $(n-1)S$ наз. *Уишарта распределением*, оно является одним из основных распределений в многомерном статистич. анализе, с помощью к-рого проверяются гипотезы о К. м. Σ. *А. В. Прохоров.*

КОВАРИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ — совокупность методов математич. статистики, относящихся к анализу моделей зависимости среднего значения нек-рой случайной величины Y от набора неколичественных факторов F и, одновременно, от набора количественных факторов x. По отношению к Y переменные x наз. сопутствующими; факторы F задают сочетания условий качественной природы, при к-рых получены наблюдения Y и x, и описываются с помощью так наз. индикаторных переменных; среди сопутствующих и индикаторных переменных могут быть как случайные, так и не случайные (контролируемые в эксперименте); если случайная величина Y является вектором, то говорят о многомерном К. а.

Основные теоретические и прикладные проблемы К. а. относятся к линейным моделям. В частности, если анализируется схема из n наблюдений $Y_1, \ldots, Y_n$ с p сопутствующими переменными и k возможными типами условий эксперимента, то линейная модель соответствующего К. а. задается уравнениями

$$Y_i=\sum_{j=1}^{k} f_{ij}\theta_j+\sum_{s=1}^{p}\beta_s(F_i)\,x_i^{(s)}+\varepsilon_i(F_i), \qquad (*)$$

$$i=1, \ldots, n,$$

где индикаторные переменные f_{ij} равны 1, если j-е условие эксперимента имело место при наблюдении Y_i, и равны 0 в ином случае; коэффициенты θ_j определяют эффект влияния j-го условия; $x_i^{(s)}$ — значение сопутствующей переменной $x^{(s)}$, при к-рой получено наблюдение Y_i, $i=1, \ldots, n$; $s=1, \ldots, p$; $\beta_s(F_i)$ — значения соответствующих коэффициентов регрессии Y по $x^{(s)}$, вообще говоря, зависящие от конкретного сочетания условий эксперимента, т. е. от вектора $F_i=(f_{i1}, \ldots, f_{ik})$; $\varepsilon_i(F_i)$ — случайные ошибки, имеющие нулевые средние значения. Основное содержание К. а. — в построении статистич. оценок для неизвестных параметров $\theta_1, \ldots, \theta_k$; $\beta_1, \ldots, \beta_p$ и статистич. критериев для проверки различных гипотез относительно значений этих параметров.

Если в модели (*) постулировать априори $\beta_1=\ldots=\beta_p=0$, то получится модель *дисперсионного анализа*; если из (*) исключить влияние неколичественных факторов (положить $\theta_1=\ldots=\theta_k=0$), то получится модель *регрессионного анализа*. Своим названием К. а. обязан тому обстоятельству, что в его вычислениях используются разбиения *ковариации* величин Y и X точно так же, как в дисперсионном анализе используются разбиения суммы квадратов отклонений Y.

Лит.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] «Biometrics», 1957, v. 13, № 3. *С. А. Айвазян.*

КОВАРИАЦИЯ — числовая характеристика совместного распределения двух случайных величин, равная математич. ожиданию произведения отклонений случайных величин от их математич. ожиданий. К. определяется для случайных величин X_1 и X_2 с конечными дисперсиями и обычно обозначается $\operatorname{cov}(X_1, X_2)$. Таким образом,

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \mathsf{E}\,[(X_1 - \mathsf{E}X_1)(X_2 - \mathsf{E}X_2)],$$

при этом $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \operatorname{cov}(X_2, X_1)$; $\operatorname{cov}(X, X) = \mathsf{D}X$. К. естественным образом появляется в выражении для дисперсии суммы случайных величин

$$\mathsf{D}(X_1 + X_2) = \mathsf{D}X_1 + \mathsf{D}X_2 + 2\operatorname{cov}(X_1, X_2).$$

Если величины X_1 и X_2 независимы, то $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$. К. служит характеристикой взаимозависимости случайных величин, с помощью К. определяется *корреляции коэффициент.* В математич. статистике оценкой К. служит выборочная К., вычисляемая по формуле

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_1^{(i)} - \overline{X}_1\right)\left(X_2^{(i)} - \overline{X}_2\right),$$

где $(X_1^{(i)}, X_2^{(i)})$, $i = 1, \ldots, n$, — независимые величины, а $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ — арифметические средние. *А. В. Прохоров.*

КОВАРИАЦИЯ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ — понятие в *дисперсионном методе*, вводимое при сравнении чисел решений уравнений

и $$n = \varphi + D'\nu \tag{1}$$

$$n = \psi + D'\nu, \tag{2}$$

где φ и ψ принадлежат к некоторым последовательностям натуральных чисел, D' пробегает некоторую заданную систему чисел сегмента

$$(D) = [D_1, D_1 + D_2],$$

ν пробегает систему чисел сегмента

$$(\nu) = [\nu_0, \nu_0 + \nu_0'].$$

Пусть

$$U_1(m) = \sum\nolimits_{\varphi = m} 1, \quad U_2(m) = \sum\nolimits_{\psi = m} 1,$$

тогда дисперсия разности решений уравнений (1) и (2) будет

$$V' = \sum\nolimits_{D' \in (D)} \left(\sum\nolimits_1' - \sum\nolimits_2'\right)^2,$$

где

$$\sum\nolimits_1' = \sum\nolimits_{\nu \in (\nu)} U_1(n - D'\nu), \quad \sum\nolimits_2' = \sum\nolimits_{\nu \in (\nu)} U_2(n - D'\nu)^2.$$

Применяя идею И. М. Виноградова по сглаживанию двойных сумм, можно распространить суммирование по D′ на все D из (D). Дисперсия при этом может только увеличиться; таким образом

$$V' \leqslant V = V_1 - 2V_2 + V_3,$$

где

$$V_1 = \sum\nolimits_{D \in (D)} \left(\sum\nolimits_1\right)^2,$$

$$V_3 = \sum\nolimits_{D \in (D)} \left(\sum\nolimits_2\right)^2,$$

$$V_2 = \sum\nolimits_{D \in (D)} \left(\sum\nolimits_1 \sum\nolimits_2\right);$$

здесь

$$\sum\nolimits_1 = \sum\nolimits_{\nu \in (\nu)} U_1 (n - D\nu),$$
$$\sum\nolimits_2 = \sum\nolimits_{\nu \in (\nu)} U_2 (n - D\nu).$$

По аналогии с теоретико-вероятностными концепциями выражение V_2 наз. ковариацией числа решений уравнений (1) и (2). Асимптотический расчет V_1, V_3 и ковариации V_2 может показать, что дисперсия V' относительно мала, а это существенно при рассмотрении аддитивных задач, приводимых к уравнениям (1) и (2).

Лит.: [1] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961. *Б. М. Бредихин.*

КОГЕРЕНТНОЕ КОЛЬЦО — кольцо, в к-ром каждый конечно порожденный левый идеал является конечно представимым, т. е. фактормодулем конечно порожденного свободного модуля по конечно порожденному свободному подмодулю. Такое К. к. наз. когерентным слева кольцом, аналогично, но с помощью правых идеалов, может быть определено когерентное справа кольцо. Когерентное слева кольцо R может быть определено также любым из следующих двух эквивалентных условий: 1) каждый левый конечно порожденный подмодуль конечно представимого R-модуля конечно представим; 2) прямое произведение левых плоских R-модулей — левый плоский R-модуль.

Многие конструкции, известные для модулей над *нётеровыми кольцами*, оказались осуществимыми и для модулей над К. к. Напр., всякий конечно порожденный модуль над К. к. обладает проективной резольвентой из конечно порожденных модулей. В то же время класс К. к. шире класса нётеровых колец, так как включает в себя, напр., все *регулярные кольца* (в смысле Неймана) и кольца многочленов над нётеровыми кольцами от любого (конечного или бесконечного) числа переменных.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *В. Е. Говоров.*

КОГЕРЕНТНЫЕ ЧИСЛА — натуральные числа, отличающиеся друг от друга только квазипростыми множителями (см. *Квазипростое число*). При решении *аддитивных проблем* часто используется тот факт, что числа решений некоторых аддитивных уравнений, относящихся к различным К. ч., асимптотически совпадают. *Б. М. Бредихин.*

КОГЕРЕНТНЫЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПУЧОК — когерентный пучок модулей на алгебраич. многообразии или схеме. Структурный пучок нётеровой схемы и, в частности, алгебраич. многообразия является когерентным.

К. а. п. — удобное средство исследования алгебраич. многообразий. Интуитивно К. а. п. соответствуют представлению о непрерывной алгебраич. системе линейных пространств на многообразии (см. *Векторное расслоение* на алгебраическом многообразии) и возникают при рассмотрении линейных и алгебраич. семейств дивизоров, вложений многообразия в проективное пространство, дифференциальных форм, векторных полей и автоморфизмов, деформаций многообразий и подмногообразий, одним словом — при линеаризации всевозможных задач алгебраич. геометрии (см. [3]). Результаты при этом формулируются в терминах когомологий К. а. п. Теория когомологий К. а. п. включает: а) *конечности теоремы* (в алгебраической геометрии), утверждающие конечномерность пространств когомологий $H^i(X, \mathcal{F})$, $i \geqslant 0$, когерентного пучка $\mathcal{F}$ на полном многообразии X; б) *Римана — Роха теорему*, вычисляющую характеристику Эйлера — Пуанкаре К. а. п.; в) теоремы об обращении в нуль высших когомологий типа теоремы Серра (см. *Аффинная схема*) или *Кодаиры теоремы* (см.

[4], [5]); г) теоремы двойственности (см. *Двойственность* в алгебраической геометрии), связывающие i-мерные и $(n-i)$-мерные когомологии пучков на гладком многообразии размерности n; д) *Кюннета формулы*, выражающие когомологии некоторых пучков на произведении многообразий; е) сравнения теоремы в алгебраич. геометрии с другими теориями когомологий — аналитическими, формальными, этальными; ж) теорию *локальных когомологий*, полезную при изучении К. а. п. на неполных многообразиях. Одно из важнейших ее применений относится к *Лефшеца теореме*, сравнивающей свойства многообразия и его гиперплоского сечения.

Многие результаты обобщаются на случай, когда одно многообразие X заменяется семейством многообразий, т. е. на случай морфизма $f: X \to Y$. Пространства когомологий заменяются при этом пучками $R^n f_*$ производных от функтора прямого образа f_*; большую роль здесь играет поведение этих функторов при *замене базы*.

См. также *Квазикогерентный пучок*, *Когомологии со значениями в пучке*.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., в сб.: Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1958, с. 372—450; [2] Grothendieck A., Eléments de géométrie algébrique, t. 3, P., 1961 (Publs math. IHES, № 11); [3] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [4] Кодаира К., «Математика», 1958, т. 2, № 6, с. 126—31; [5] Mumford D., «Amer. J. Math.», 1967, v. 89, № 1, p. 94—104; [6] Итоги науки и техники. Алгебра. Геометрия. Топология, т. 10, М., 1972, с. 47—112. *В. И. Данилов.*

КОГЕРЕНТНЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПУЧОК — когерентный пучок $\mathcal{O}$-модулей на *аналитическом пространстве* $(X, \mathcal{O})$. Пространство $(X, \mathcal{O})$ наз. когерентным, если $\mathcal{O}$ — когерентный пучок колец. Любое аналитич. пространство над алгебраически замкнутым полем когерентно. Важнейшими примерами К. а. п. на таком пространстве $(X, \mathcal{O})$ являются любой локально свободный пучок (т. е. аналитич. пучок, локально изоморфный пучку $\mathcal{O}^p$), а также пучок идеалов аналитического множества $Y \subset X$, т. е. пучок ростков аналитич. функций, равных 0 на Y [1].

Если $\mathcal{F}$ — К. а. п. на комплексном аналитич. пространстве $(X, \mathcal{O})$, то пространство его сечений $\Gamma(X, F)$ снабжается естественной топологией, превращающей его в пространство Фреше, если X сепарабельно. Для $F = \mathcal{O}$ эта топология совпадает с топологией равномерной сходимости аналитич. функций на компактах. При этом $\mathcal{F}$ превращается в пучок Фреше, т. е. для любых открытых множеств $U \subset V \subset X$ отображение ограничения $\Gamma(V, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ непрерывно. Аналитич. гомоморфизм когерентных пучков $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ порождает непрерывное линейное отображение $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G})$. Если $\mathcal{F}$ — К. а. п. на X и M — подмодуль в $\mathcal{F}_x$, $x \in X$, то для любой окрестности U точки x подмодуль $\{s \in \Gamma(U, \mathcal{F}) | s(x) \in M\}$ замкнут в $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Пространства когомологий $H^p(X, \mathcal{F})$ также обладают естественной топологией, к-рая, вообще говоря, не отделима для $p > 0$ (они являются факторпространствами пространств Фреше) [2], [4].

К. а. п. были введены в связи с задачами теории аналитич. функций в областях пространства $\mathbb{C}^n$ (см. [3], [5]). Впоследствии К. а. п. и их когомологии стали основным аппаратом глобальной теории аналитич. пространств. Важную роль в этой теории играют критерии обращения в 0 когомологий со значениями в К. а. п. (см. *Кодаиры теорема*, *Обильное векторное расслоение*, *Штейна пространство*), а также критерии их конечномерности и отделимости (см. *Конечности теоремы* в теории аналитических пространств).

См. также *Векторное аналитическое расслоение*, *Двойственность* в теории аналитических пространств.

Лит.: [1] Abhyankar S. S., Local analytic geometry, N. Y.— L., 1964; [2] Bănică C., Stănăşilă O., Metode algebrice în teoria globală a spaţiilor complexe, Buc., 1974; [3] Cartan H., «Bull. Soc. math. France», 1950, t. 78, p. 28—64; [4] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [5] Oka K., «Bull. Soc. math. France», 1950, t. 78, p. 1—27.
А. Л. Онищик.

КОГЕРЕНТНЫЙ ПУЧОК на окольцованном пространстве $(X, \mathcal{O})$ — пучок модулей $\mathcal{F}$ над пучком колец $\mathcal{O}$, обладающий следующими свойствами: 1) $\mathcal{F}$ — пучок конечного типа, т. е. локально порождается над $\mathcal{O}$ конечным числом сечений; 2) ядро любого гомоморфизма пучков модулей $\mathcal{O}^p|_U \to \mathcal{F}|_U$ над открытым множеством $U \subset X$ является пучком конечного типа. Если в точной последовательности $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ пучков $\mathcal{O}$-модулей два из трех пучков $\mathcal{F}_i$ когерентны, то и третий пучок когерентен. Если $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ — гомоморфизм когерентных пучков $\mathcal{O}$-модулей, то $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Coker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$ — также когерентные пучки. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}$ когерентны, то $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{S}$ и $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{S})$ также когерентны [4].

Структурный пучок $\mathcal{O}$ наз. когерентным пучком колец, если $\mathcal{O}$ когерентен как пучок модулей над самими собой, что сводится к выполнению условия 2). Если $\mathcal{O}$ — когерентный пучок колец, то пучок $\mathcal{O}$-модулей $\mathcal{F}$ когерентен тогда и только тогда, когда каждая точка пространства X обладает окрестностью U, над которой существует точная последовательность пучков $\mathcal{O}$-модулей:

$$\mathcal{O}^p \mid U \to \mathcal{O}^q \mid U \to \mathcal{F} \mid U \to 0$$

[4]. Далее, при этом условии для любых когерентных $\mathcal{F}$, $\mathcal{S}$ пучки $\operatorname{Ext}^p_{\mathcal{O}}(F, \mathcal{S})$ когерентны для всех p (см. [2]).

Основными классами окольцованных пространств с когерентным структурным пучком $\mathcal{O}$ являются: аналитич. пространства над алгебраически замкнутым полем [1], нётеровы схемы и, в частности, алгебраич. многообразия [4]. Классический частный случай представляет собой пучок $\mathcal{O}$ ростков голоморфных функций в области пространства $\mathbb{C}^n$; утверждение о его когерентности известно как теорема Ока [3], [5]. Структурный пучок вещественного аналитич. пространства, вообще говоря, не когерентен.

См. также *Когерентный аналитический пучок*, *Когерентный алгебраический пучок.*

Лит.: [1] Abhyankar S. S., Local analytic geometry, N. Y.— L., 1964; [2] Bănică C., Stănăşilă O., Metode algebrice în teoria globală a spaţiilor complexe, Buc., 1974; [3] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [4] Серр Ж.-П., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 372—450; [5] Фукс Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963.
А. Л. Онищик.

КОГОМОЛОГИИ — термин, употребляемый по отношению к функторам гомологической природы, которые, в отличие от гомологий, как правило, контравариантно зависят от объектов основной категории, на которой они определены. В отличие от гомологий, связывающие гомоморфизмы в когомологической точной последовательности повышают размерность. В типичных ситуациях когомологии возникают одновременно с соответствующими гомологиями.
Е. Г. Скляренко.

Когомологии топологического пространства — градуированная группа

$$H^*(X, G) = \sum\nolimits_{n \geqslant 0} H^n(X, G),$$

которая ставится в соответствие топологич. пространству и абелевой группе G. Понятие К. двойственно понятию гомологий (см. *Гомологии теория*, *Гомологии группа*, *Александрова — Чеха гомологии и когомологии*). Если G — кольцо, то в группе $H^*(X, G)$ определено естественное умножение (произведение Колмогорова — Александера или $\cup$-произведение), превращающее эту группу в градуированное кольцо (кольцо когомологий). В случае, когда X — дифференцируемое многообразие, кольцо когомологий $H^*(X, \mathbb{R})$ может быть вычислено при помощи дифференциальных форм на X (см. *де Рама теорема*).

Когомологии со значениями в пучке абелевых групп — обобщение обычных когомологий топологич. пространств. Имеются две теории когомологий со значениями (или с коэффициентами) в пучках абелевых групп: когомологии Чеха и когомологии Гротендика.

Когомологии Чеха. Пусть X — топологич. пространство, $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на X, $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ — открытое покрытие пространства X. n-мерной коцепью покрытия $\mathfrak{U}$ наз. отображение f, к-рое всякому упорядоченному набору $i_0, \ldots, i_n \in I$, такому, что

$$U_{i_0\ldots i_n}=U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_n}\neq\varnothing,$$

сопоставляет сечение $f_{i_0\ldots i_n}$ пучка F над $U_{i_0\ldots i_n}$. Множество всех n-мерных коцепей $C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ является абелевой группой относительно сложения. Кограничный оператор

$$\delta_n: C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\to C^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

определяется следующим образом:

$$(\delta_n f)_{i_0\ldots i_{n+1}}=\sum\nolimits_{j=0}^{n+1}(-1)^j f_{i_0\ldots\hat{i}_j\ldots i_{n+1}},$$

где символ $\wedge$ означает, что соответствующий индекс опускается.

Последовательность

$$C^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F}): C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\xrightarrow{\delta_1}C_1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\xrightarrow{\delta_2}\ldots$$

является комплексом (комплекс Чеха). Когомологии этого комплекса обозначаются $H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ и наз. когомологиями Чеха покрытия $\mathfrak{U}$ со значениями в $\mathcal{F}$. Группа $H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ совпадает с группой $\Gamma(X, \mathcal{F})$ сечений пучка $\mathcal{F}$. При вычислении этих когомологий комплекс Чеха можно заменить его подкомплексом, состоящим из альтернированных коцепей, т. е. коцепей, меняющих знак при перестановке двух индексов и равных 0 в случае, когда два индекса совпадают.

Если покрытие $\mathfrak{U}$ вписано в $\mathfrak{B}=\{V_j\}$, т. е. для каждого $i\in I$ указано $\tau(i)\in J$ так, что $U_i\subseteq V_{\tau(i)}$, то определен канонический гомоморфизм $H^n(\mathfrak{B}, \mathcal{F})\to H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, не зависящий от вписывания τ. n-мерная группа когомологий Чеха пространства X со значениями в $\mathcal{F}$ определяется формулой:

$$\check{H}^n(X, F)=\varinjlim H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}),$$

где индуктивный предел берется по направленному (по отношению вписанности) множеству классов открытых покрытий (два покрытия эквивалентны тогда и только тогда, когда каждое из них можно вписать в другое). Определение когомологий Чеха применимо и к предпучкам.

Недостатком когомологий Чеха является то, что они (для непаракомпактных пространств) не образуют когомологич. функтора (см. *Гомологический функтор*). В случае, когда $\mathcal{F}$ — постоянный пучок, соответствующий абелевой группе $\mathcal{F}$, группы $\check{H}^n(X, \mathcal{F})$ совпадают с когомологиями Александрова — Чеха с коэффициентами в группе $\mathcal{F}$.

К о г о м о л о г и и   Г р о т е н д и к а. Рассматривается функтор $\mathcal{F} \to \Gamma(X, \mathcal{F})$ из категории пучков абелевых групп на X в категорию абелевых групп. Правые производные этого функтора наз. n-м е р н ы м и   г р у п п а м и   к о г о м о л о г и й   Г р о т е н д и к а   с о   з н а ч е н и я м и   в   п у ч к е $\mathcal{F}$ и обозначаются $H^n(X, \mathcal{F})$, $n=0, 1, \ldots$. Точной последовательности пучков абелевых групп

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

соответствует точная последовательность

$$\ldots \longrightarrow H^{n-1}(X, \mathcal{F}_3) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}_1) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}_2) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}_3) \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{F}_1) \longrightarrow \ldots,$$

т. е. $\{H^n(X, \mathcal{F})_{n=0, 1, \ldots}$ образуют когомологич. функтор. При этом $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Если $\mathcal{F}$ — *вялый пучок*, то $H^n(X, \mathcal{F})=0$ $(n>0)$. Эти три свойства когомологий Гротендика характеризуют функтор $\mathcal{F} \mapsto$ $\mapsto \{H^n(X, \mathcal{F})\}_{n=0, 1, \ldots}$ однозначно с точностью до изоморфизма.

Для вычисления когомологий Гротендика пучка $\mathcal{F}$ можно воспользоваться левой резольвентой пучка $\mathcal{F}$, состоящей из пучков, когомологии Гротендика к-рых равны 0 в положительных размерностях. Напр., на произвольных топологич. пространствах можно взять резольвенту из вялых пучков, а на паракомпактных пространствах — из *мягких пучков* или из *тонких пучков*.

Когомологии Гротендика связаны с когомологиями покрытий следующим образом. Пусть $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие пространства X. Тогда существует спектральная последовательность $\{E_r^{p, q}\}$, сходящаяся к $\{H^n(X, \mathcal{F})\}$ и такая, что

$$E_2^{p, q} = H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^q(X, \mathcal{F})),$$

где $\mathcal{H}^q(X, \mathcal{F})$ — предпучок, сопоставляющий открытому множеству $V \subset X$ группу $H^q(V, \mathcal{F})$. Если когомологии всех $U_{i_0 \ldots i_n}$ со значениями в $\mathcal{F}$ равны 0 в положительных размерностях, то последовательность вырождается и

$$H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong H^n(X, \mathcal{F}), \quad n=0, 1, \ldots,$$

(т е о р е м а   Л е р е). В общем случае спектральная последовательность определяет функторный гомоморфизм

$$H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F})$$

и, после перехода к пределу,— функторный гомоморфизм

$$\check{H}^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}).$$

Последний гомоморфизм биективен для $n=0, 1$, инъективен (но, вообще говоря, не сюръективен) для $n=2$ и биективен для всех n, если X паракомпактно. Таким образом, для паракомпактного пространства X

$$\check{H}^n(X, \mathcal{F}) \cong H^n(X, \mathcal{F}), \quad n=0, 1, \ldots$$

Обобщением определенных выше групп когомологий являются г р у п п ы   к о г о м о л о г и й $H^n_\Phi(X, \mathcal{F})$ с   н о с и т е л я м и   в   с е м е й с т в е Φ. Семейство Φ замкнутых подмножеств пространства X наз. с е м е й с т в о м   н о с и т е л е й, если 1) замкнутое подмножество любого множества из Φ принадлежит Φ; 2) объединение любых двух подмножеств из Φ лежит в Φ. Группы $H^n_\Phi(X, \mathcal{F})$ определяются как правые производные функтора $\mathcal{F} \mapsto \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F})$, где $\Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}) = H^0_\Phi(X, \mathcal{F})$ — группа сечений пучка $\mathcal{F}$, носители к-рых лежат в Φ. Они образуют когомологич. функтор.

Если Φ — семейство всех замкнутых множеств, то $H^n_\Phi(X, \mathcal{F}) = H^n(X, \mathcal{F})$. Другой важный частный случай: $\Phi = c$ — семейство всех компактных подмножеств. Группы $H^n_c(X, \mathcal{F})$ наз. группами когомологий с компактными носителями.

В случае, когда $\mathcal{F}$ — пучок колец, в группе

$$H^*(X, \mathcal{F}) = \sum_{n \geqslant 0} H^n(X, \mathcal{F})$$

естественным образом определяется умножение, превращающее ее в градуированное кольцо (кольцо когомологий). При этом ассоциативность в пучке $\mathcal{F}$ влечет за собой ассоциативность умножения в $H^*(X, \mathcal{F})$, а пучок коммутативных колец или колец Ли приводит к градуированно-коммутативному кольцу или градуированному кольцу Ли когомологий соответственно. Если $\mathcal{F}$ — пучок модулей над пучком колец $\mathcal{A}$, то $H^n(X, \mathcal{F})$ являются модулями над кольцом $\Gamma(X, \mathcal{A})$.

О когомологиях со значениями в пучке неабелевых групп см. *Неабелевы когомологии*.

Лит.: [1] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [2] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [3] Серр Ж.-П., в сб.: Расслоенные пространства, М., 1958, с. 372—450. *Д. А. Пономарев.*

Когомологии пространства с операторами — когомологические инварианты топологич. пространства с заданным на нем действием группы. Пусть группа G действует на пространстве X, причем для каждого $g \in G$ отображение $x \mapsto gx$ является гомеоморфизмом $X \to X$, тогда G-пучком абелевых групп на X наз. пучок абелевых групп на X вместе с заданным на нем действием группы G, к-рое непрерывно, согласовано с действием на X и изоморфно отображает слои пучка друг на друга. В группе сечений G-пучка $\mathcal{F}$ (и вообще в группах когомологий $H^n(X, \mathcal{F})$) определена естественная структура G-модуля. G-пучки абелевых групп на X образуют абелеву категорию, всякий объект к-рой вкладывается в инъективный объект. Функтор $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})^G$ из этой категории в категорию абелевых групп, где $\Gamma(X, \mathcal{F})^G$ — группа G-инвариантных сечений G-пучка $\mathcal{F}$, обладает правыми производными функторами $\mathcal{F} \mapsto H^n(X, G, \mathcal{F})$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где $H^0(X, G, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})^G$, составляющими когомологич. функтор. Группы $H^n(X, G, \mathcal{F})$ играют основную роль в изучении связи между когомологиями пространства X, факторпространства $Y = X/G$ и группы G. Существует спектральная последовательность $\{E_r\}$ со вторым членом $E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, \mathcal{F}))$, сходящаяся к $H^*(X, G, \mathcal{F})$. Пусть $\mathcal{F}^G$ — пучок инвариантов прямого образа $f_*\mathcal{F}$ ($f: X \to Y$ — естественная проекция), рассматриваемого как G-пучок на пространстве Y, на к-ром G действует тривиально. Если G действует на X собственно разрывно (см. *Дискретная группа преобразований*) и свободно, то $H^*(X, G, \mathcal{F}) \cong H^*(Y, \mathcal{F}^G)$ (см. [1]). В частности, если A — некоторый G-модуль, то постоянный пучок $\mathcal{F} = A$ на X обладает естественной структурой G-пучка, а пучок $\mathcal{F}^G$ на Y будет локально постоянным. В этом случае спектральная последовательность $\{E_r\}$ удовлетворяет условию $E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, A))$ и сходится к $H^*(Y, \mathcal{F}^G)$ (**спектральная последовательность накрытия**). Если при этом X связно и $H^q(X, A) = 0$ для $q > 0$, то $H^p(G, A) \cong H^p(Y, \mathcal{F}^G)$, что дает топологич. интерпретацию когомологий группы G [2]. Если G собственно разрывна и Y паракомпактно, то группы $H^n(X, G, \mathcal{F})$ можно вычислять аналогично когомологиям Чеха при помощи G-инвариантных покрытий пространства X (см. [1]).

В случае, когда G — группа Ли, дифференцируемо и свободно действующая на дифференцируемом многообразии X, причем X/G — дифференцируемое многообразие, известен аналог $\{E_r\}$ спектральной последовательности накрытия [3]. Последовательность $\{\tilde{E}_r\}$ сходится к когомологиям комплекса G-инвариантных дифференциальных форм на X и $\tilde{E}_2^{p,q}=H^p(G, H^q(X, \mathbb{R}))$, где когомологии группы G вычисляются при помощи коцепей класса C^∞.

См. также *Когомологии групп*, *Эквивариантные когомологии*.

Лит.: [1] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [2] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [3] van Est W. T., «Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A», 1958, v. 61, p. 399—413.

А. Л. Онищик, Д. А. Пономарев.

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР — группы

$$H^n(R, A)=\operatorname{Ext}_R^n(K, A), \quad n\geqslant 0,$$

(см. *Функтор* Ext), где R — ассоциативная алгебра над коммутативным кольцом K с фиксированным гомоморфизмом K-алгебр $\varepsilon: R\to K$, позволяющим рассматривать кольцо K как R-модуль, а A есть R-модуль. Это определение охватывает наиболее распространенные теории когомологий нек-рых типов (универсальных) алгебр.

Впервые группы когомологий групп во всех размерностях были введены С. Эйленбергом и С. Маклейном [3] в связи с топологич. исследованиями и Д. К. Фаддеевым [5] — с чисто алгебраич. точки зрения — как группы классов обобщенных систем факторов, в 40-х гг. 20 в. Ранее изучались в той или иной форме когомологии групп в малых размерностях (см. [1], [2], [4]).

Примеры групп когомологий. 1) Если $K=\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, G — группа, $R=\mathbb{Z}G$ — групповая алгебра группы G над $\mathbb{Z}$,

$$\varepsilon\left(\sum n_i g_i\right)=\sum n_i, \quad n_i\in\mathbb{Z}, \quad g_i\in G,$$

то группы $H^n(R, A)$ наз. группами когомологий группы G с коэффициентами (или со значениями) в R-модуле A и обозначаются $H^n(G, A)$. Можно вместо группы G рассмотреть моноид G и аналогично получить группы когомологий $H^n(G, A)$ моноида G. 2) Если S — ассоциативная K-алгебра, S^0 — антиизоморфная ей K-алгебра,

$$R=S\otimes_K S^0, \quad \varepsilon\left(\sum s_i\otimes t_i\right)=\sum s_i t_i,$$

то группы $H^n(R, A)$ наз. группами когомологий ассоциативной алгебры S с коэффициентами в S-бимодуле A (т. е. в R-модуле A) и обозначаются $H^n(S, A)$. Если K — поле, то группы $H^n(S, A)$ наз. группами когомологий Хохшильда K-алгебры S.

3) Если S-алгебра Ли над полем K, $R=U_S$ — ее универсальная обертывающая алгебра с пополнением $\varepsilon: R\to K$, то группы $H^n(R, A)$ наз. группами когомологий алгебры Ли S с коэффициентами в U_S-модуле A (т. е. в лиевом S-модуле A) и обозначаются $H^n(S, A)$.

При $n=0$, 1, 2 группы когомологий в ряде случаев допускают простую интерпретацию.

а) Если G — группа, то группа $H^0(G, A)$ изоморфна группе

$$A^G=\{a\in A \mid ga=a, \quad \forall g\in G\}$$

инвариантных элементов; группа $H^1(G, A)$ изоморфна факторгруппе $\operatorname{Der}(G, A)/\operatorname{Ider}(G, A)$, где

$$\operatorname{Der}(G, A)=\{f: G\longrightarrow A \mid f(xy)=xf(y)+f(x), \ \forall x, \ y\in G\}$$

— группа дифференцирований (или скрещенных гомоморфизмов),

$$\operatorname{Ider}(G, A)=\{f: G\longrightarrow A \mid \exists a\in A, \ f(x)=xa-a, \ \forall x\in G\}$$

— группа внутренних дифференцирований (или главных скрещенных гомоморфизмов), при этом точна последовательность

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{Der}(G, A) \longrightarrow H^1(G, A) \longrightarrow 0;$$

для абелевой группы G группа $H^2(G, A)$ изоморфна группе расширений группы A с помощью группы G (см. *Бэра умножение*); третья группа когомологий группы G связана с препятствиями для расширений (см. [9], гл. IV).

б) Если S — ассоциативная K-алгебра, то группа $H^0(S, A)$ изоморфна группе

$$\{a \in A \mid xa = ax, \quad \forall x \in S\};$$

группа $H^1(S, A)$ изоморфна факторгруппе

$$\mathrm{Der}(S, A)/\mathrm{Ider}(S, A),$$

где

$$\mathrm{Der}(S, A) = \{f: S \otimes_K S^0 \longrightarrow A \mid f(xy) = xf(y) + f(x)y, \\ \forall x, y \in S \otimes_K S^0\},$$

$$\mathrm{Ider}(S, A) = \{f: S \otimes_K S^0 \longrightarrow A \mid \exists a \in A, f(x) = xa - ax, \\ \forall x \in S \otimes_K S^0\};$$

группа $H^2(S, A)$ описывает сингулярные расширения S-бимодуля A с помощью кольца S (см. [14]).

в) Если S — алгебра Ли, то группа $H^0(S, A)$ изоморфна K-модулю $\{a \in A \mid xa = 0, \forall x \in S\}$; группа $H^1(S, A)$ изоморфна факторгруппе

$$\mathrm{Der}(S, A)/\mathrm{Ider}(S, A),$$

где

$$\mathrm{Der}(S, A) = \{f: S \longrightarrow A \mid f([x, y]) = xf(y) - yf(x), \\ \forall x, y \in S\},$$

$$\mathrm{Ider}(S, A) = \{f: S \longrightarrow A \mid \exists a \in A, f(x) = xa, \forall x \in S\};$$

двумерная группа когомологий $H^2(S, A)$ алгебры Ли соответствуют K-расщепляющимся расширениям алгебр Ли (см. [6], гл. XVI); в нек-рых случаях элементы группы $H^3(S, A)$ являются препятствиями в задаче о расширении.

Группы когомологий находят широкое применение в различных областях алгебры. Так, напр., если G — группа и $H^2(G, A) = 0$ для всех $\mathbb{Z}G$-модулей A, то G — свободная группа (т е о р е м а С т о л л и н г с а, см. *Гомологическая размерность*). Если G — группа, $\mathbb{C}^*$ — мультипликативная группа поля комплексных чисел, то группа $M(G) = H^2(G, \mathbb{C}^*)$ наз. м у л ь т и п л и к а т о р о м Ш у р а группы G. Она играет важную роль при изучении центральных расширений групп и в теории проективных представлений конечных групп [1]. Если G — группа, A — $\mathbb{Z}G$-модуль и $pA = 0$ для простого числа p, то

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) \cong \mathrm{Ext}^n_{kG}(k, A),$$

где $k = GF(p)$ — поле из p элементов. Если G — конечная p-группа, то $d(G) = \dim_k H^1(G, k)$ — минимальное число образующих группы G, $r(G) = \dim_k H^2(G, k)$ — минимальное число определяющих соотношений для G, рассматриваемой как про-p-группа, $r(G) \leqslant R(G)$, где $R(G)$ — минимальное число соотношений дискретной группы G. Тот факт, что $r(G) - d(G)$ стремится к бесконечности при $d(G) \to \infty$, приводит к отрицательному решению проблемы башни полей, проблемы Куроша о нильалгебрах и общей проблемы Бернсайда [10].

Если G — про-p-группа, $\{U_i, i \in I\}$ — семейство всех ее открытых нормальных делителей, то группа

$$\varinjlim H^n\left(G/U_i, A^{U_i}\right)$$

наз. n-й г р у п п о й к о г о м о л о г и й п р о-p-г р у п п ы G с коэффициентами в $\mathbb{Z}G$-модуле A и обозначается $H^n(G, A)$. Если E — расширение Галуа поля L с группой Галуа $G=G(E/L)$, то группа G является про-p-группой, группы $H^n(G, A)$ наз. группами когомологий Галуа. Важную роль играют группы $H^q(G, E^*)$, где E^* — мультипликативная группа поля E. Так, $H^1(G, E^*)=0$, а следствием этого факта является известная теорема Гильберта (о циклических расширениях) 90. Если же E — сепарабельное замыкание поля L, то группа $H^2(G(E/L), E^*)$ наз. группой Брауэра поля L (см. *Брауэра группа*). В настоящее время (1978) развита теория Галуа коммутативных колец, в к-рой существенную роль играют когомологии Галуа коммутативных колец и группа Брауэра.

Если S — ассоциативная алгебра, то из $H^2(S, S)=0$ следует, что алгебра S жесткая (см. *Деформация алгебры*).

Группы когомологий $H^n(R, A)$ в нек-ром смысле двойственны группам гомологий

$$H_n(R, A)=\operatorname{Tor}_n^R(A, K)$$

ассоциативной K-алгебры R с коэффициентами в R-модуле A. Если G — группа, $R=\mathbb{Z}G$ и $K=\mathbb{Z}$, то группы $H_n(R, A)$ наз. группами гомологий группы G с коэффициентами в R-модуле A и обозначаются $H_n(G, A)$; если S — ассоциативная K-алгебра и $R=S\otimes_K S^\circ$, то группы $H_n(R, A)$ наз. группами гомологий ассоциативной алгебры S с коэффициентами в S-бимодуле A и обозначаются $H_n(S, A)$; если S — алгебра Ли и $R=U_S$ — ее универсальная обертывающая алгебра, то группы $H_n(R, A)$ наз. группами гомологий алгебры Ли S с коэффициентами в лиевом S-модуле A и обозначаются $H_n(S, A)$. Группы гомологий в малых размерностях в ряде случаев также допускают простую интерпретацию. Так, если G — группа, то $H_0(G, \mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$, $H_1(G, \mathbb{Z})\cong G/[G, G]$.

Если в абелевой категории функтор Hom обладает производным функтором Ext и определен функтор $\otimes$ с его производным функтором Tor, то приведенная схема определяет теории гомологий и когомологий в этой категории. Весьма общий подход к построению теории когомологий может быть развит с использованием котроек [11]. Понятие (ко)тройки возникло при анализе минимальных средств, необходимых для построения симплициальных резольвент. Тройкой $T=(T, k, p)$ над категорией $\mathfrak{A}$ наз. совокупность функтора $T:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ и двух естественных преобразований функторов $k: 1_{\mathfrak{A}}\to T$, $p: T^2\to T$, подчиненных условиям

$$p\circ Tk=p\circ kT=1, \quad p\circ Tp=p\circ pT.$$

Понятие котройки двойственно, т. е. получается из приведенного обращением стрелок. Если объект $X\in\mathfrak{A}$ и морфизм $q: T(X)\to X$ удовлетворяют условиям $q\circ k(X)=1_X: X\to X$, $q\circ T(q)=q\circ p(X): T^2(X)\to X$, то пару (X, q) наз. T-алгеброй. Пусть $\mathfrak{A}^T$ — категория T-алгебр. Если $X\in\mathfrak{A}$, то $F(X)=(T(X), p(X))\in\mathfrak{A}^T$. Тем самым определен функтор $F:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}^T$ (в нек-ром смысле $F(X)$ — объект, свободный над X). Пусть $U:\mathfrak{A}^T\to\mathfrak{A}$ — функтор, забывающий T-структуру. Тогда функторы F и U сопряжены, $UF=T$, а $G=FU:\mathfrak{A}^T\to\mathfrak{A}^T$ с $l: G\to 1_{\mathfrak{A}^T}$, $q: G\to G^2$ определяют котройку (G, l, q) и комплекс

$$X\xleftarrow{d_0}G(X)\xleftarrow{d_1}G^2(X)\xleftarrow{d_a}G^3(X)\longleftarrow\ldots$$

с дифференцированием $d_n=\sum_{i=0}^n(-1)^iG^{n-i}lG^i$ (этот комплекс является аналогом свободной резольвенты объекта X). Если категория $\mathfrak{A}^T$ абелева и полученный комплекс ацикличен, то стандартное применение функтора Hom (соответственно $\otimes$) приводит к построению групп когомологий (соответственно гомологий) объекта

X. В общем случае над T-алгеброй (X, q) надо построить новую абелеву категорию (X, q)-модулей, на к-рой имеется естественная структура котройки, позволяющая уже построить группы, называющиеся группами когомологий первоначальной категории (аналогично построению групп когомологий для категорий групп, ассоциативных алгебр и алгебр Ли). В эту схему включаются как когомологии групп, ассоциативных алгебр, алгебр Ли, так и ряд других теорий когомологий (когомологии коммутативных алгебр Харрисона, когомологии Андре — Квиллена, когомологии Амицура и др., см. [8]).

Все приведенные конструкции относились так или иначе к абелевым категориям. В то же время ряд разделов математики (напр., теория расширений групп) приводит к необходимости построения теории когомологий с коэффициентами в неабелевой категории (напр., в неабелевом G-модуле A в случае группы G) (см. [8], [11]). Отправной точкой для построения различных теорий неабелевых когомологий алгебр служат интерпретации когомологий в размерностях 0 и 1, но при этом приходится отказываться от нек-рых привычных аспектов классической теории (структуры группы на когомологиях и др.). Рассматривались когомологии топологических алгебраических структур (напр., когомологии топологич. групп [5], банаховых алгебр и др.).

Лит.: [1] Schur J., «J. reine und angew. Math.», 1907, Bd 132, S. 85—137; [2] Baer R., «Math. Z.», 1934, Bd 38, S. 374—416; [3] Eilenberg S., MacLane S., «Proc. Nath. Acad. Sci. USA», 1943, v. 29, p. 155—58; [4] Hopf H., «Comment. math. helv.», 1944/45, v. 17, p. 39—79; [5] Фаддеев Д. К., «Докл. АН СССР», 1947, т. 58, № 3, с. 361—64; [6] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [7] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [8] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 203—35; [9] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [10] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [11] Seminar on Triples and Categorical Homology Theory. Zürich. 1966—67, B.— Hdlb.— N. Y., 1969; [12] Gruenberg K. W., Cohomological topics in group theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1970; [13] Stammbach Urs., Homology in group theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1973; [14] Fossum R., Griffith Ph., Reiter I., Trivial extensions of abelian categories. Homological algebra of trivial extensions of abelian categories with application to ring theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1975.

В. Е. Говоров, А. В. Михалев.

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ЛИ — специальный случай когомологий алгебр. Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли над коммутативным кольцом K с единицей и пусть задан левый $\mathfrak{G}$-модуль V, т. е. линейное над K представление алгебры $\mathfrak{G}$ в K-модуле V. Модулем p-мерных когомологий алгебры Ли $\mathfrak{G}$ со значениями в V наз. $H^p(\mathfrak{G}, V)=\mathrm{Ext}^p_{U(\mathfrak{G})}(K, V)$, $p=0, 1, 2, \ldots$, где $U(\mathfrak{G})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{G}$ [3]. Иначе говоря, соответствие $V \mapsto H^p(\mathfrak{G}, V)$ есть p-й правый производный функтор для функтора $V \to V^{\mathfrak{G}}$ из категории $\mathfrak{G}$-модулей в категорию K-модулей, где $V^{\mathfrak{G}}=\{v \in V \mid xv=0 \ (x \in \mathfrak{G})\}$. Функтор $V \to H^*(\mathfrak{G}, V)=\sum_{p \geqslant 0} H^p(\mathfrak{G}, V)$ является когомологическим (см. *Гомологический функтор*).

В малых размерностях К. а. Ли интерпретируются следующим образом. Модуль $H^0(\mathfrak{G}, V)$ совпадает с $V^{\mathfrak{G}}$. Если V', V'' — $\mathfrak{G}$-модули, то $H^1(\mathfrak{G}, \mathrm{Hom}_K(V'', V'))$ можно отождествить с множеством классов эквивалентных расширений $\mathfrak{G}$-модуля V'' с ядром V'. Если рассматривать $\mathfrak{G}$ как $\mathfrak{G}$-модуль относительно *присоединенного представления* ad, то $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ изоморфен фактормодулю $\mathrm{Der}\,\mathfrak{G}/\mathrm{ad}\,\mathfrak{G}$ модуля всех дифференцирований по подмодулю внутренних дифференцирований. Если $\mathfrak{G}$ есть свободный K-модуль (напр., K — поле), то $H^2(\mathfrak{G}, V)$ отождествляется с множеством классов эквивалентных расширений алгебры $\mathfrak{G}$, ядром к-рых служит абелева алгебра Ли V с заданным представлением алгебры $\mathfrak{G}$. Модуль $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ интерпретируется также как множество инфинитезимальных *деформаций* алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Имеется следующая связь между К. а. Ли и когомологиями ассоциативных алгебр; если $\mathfrak{G}$ — свободный K-модуль и V — произвольный двусторонний $U\mathfrak{G}$-модуль, то $H^p(U\mathfrak{G}, V) \cong H^p(\mathfrak{G}, V)$, где представление алгебры $\mathfrak{G}$ в V определяется формулой $(x, v) \mapsto xv - vx$.

Другой способ введения К. а. Ли (см. [6], [14]) использует коцепной комплекс $C^*(\mathfrak{G}, V) = \sum_{p \geq 0} C^p(\mathfrak{G}, V)$, где $C^p(\mathfrak{G}, V) = C^p$ — модуль всех кососимметрических p-линейных отображений $\mathfrak{G}^p \to V$, снабженный кограницей $d: C^p \to C^{p+1}$ вида

$$(d\omega)(x_1, \ldots, x_{p+1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} x_i \omega(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{p+1}) +$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{p+1})$$
$$\omega \in C^p; \; x_1, \ldots, x_{p+1} \in \mathfrak{G},$$

где знак $\wedge$ показывает, что соответствующий аргумент пропускается. В случае, когда $\mathfrak{G}$ — свободный K-модуль, когомологии этого комплекса естественно изоморфны модулям $H^p(\mathfrak{G}, V)$. С каждой подалгеброй $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ связывается подкомплекс $C^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V) \subset C^*(\mathfrak{G}, V)$, приводящий к **относительным когомологиям** $H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V) = \sum_{p \geq 0} H^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V)$. Если V — алгебра над K, на к-рой $\mathfrak{G}$ действует дифференцированиями, то в когомологиях возникает естественное умножение, к-рое превращает $H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V)$ в градуированную алгебру.

Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{X}(M)$ — алгебра Ли (над $\mathbb{R}$) гладких векторных полей на дифференцируемом многообразии M, $V = F(M)$ — пространство гладких функций на M с естественной структурой $\mathfrak{G}$-модуля. Определение кограницы в $C^*(\mathfrak{X}(M), F(M))$ формально совпадает с определением внешнего дифференциала дифференциальной формы. Точнее, комплекс де Рама есть подкомплекс в $C^*(\mathfrak{X}(M), F(M))$, состоящий из коцепей, линейных над $F(M)$. С другой стороны, если $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли связной вещественной группы Ли G, то комплекс $C^*(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$ отождествляется с комплексом левоинвариантных дифференциальных форм на G. Аналогично, если $\mathfrak{H}$ — подалгебра, отвечающая связной замкнутой подгруппе $H \subset G$, то $C^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; \mathbb{R})$ естественно изоморфен комплексу G-инвариантных дифференциальных форм на многообразии G/H. В частности, если G компактна, то отсюда получаются изоморфизмы градуированных алгебр:

$$H^*(\mathfrak{G}, \mathbb{R}) \cong H^*(G, \mathbb{R}); \quad H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; \mathbb{R}) \cong H^*(G/H, \mathbb{R}).$$

Именно эти факты послужили отправной точкой при определении К. а. Ли. На них основаны и приложения аппарата К. а. Ли к изучению когомологий главных расслоений и однородных пространств (см. [8], [14]).

Двойственным образом определяются **гомологии алгебры Ли $\mathfrak{G}$ с коэффициентами в правом $\mathfrak{G}$-модуле V**. А именно, p-мерная группа гомологий есть K-модуль $H_p(\mathfrak{G}, V) = \mathrm{Tor}_p^{U\mathfrak{G}}(V, K)$. В частности, $H_0(\mathfrak{G}, V) = V/V\mathfrak{G}$, а если V — тривиальный $\mathfrak{G}$-модуль, то $H_1(\mathfrak{G}, V) \cong V \otimes_K \mathfrak{G}/[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$.

При вычислении К. а. Ли широко используются следующие спектральные последовательности, часто наз. **спектральными последовательностями Хохшильда — Серра**. Пусть $\mathfrak{H}$ — идеал в $\mathfrak{G}$ и V — некоторый $\mathfrak{G}$-модуль. Если $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ — свободные K-модули, то существует спектральная последовательность $\{E_r^{p,q}\}$ с $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}, H^q(\mathfrak{H}, V))$, сходящаяся к $H^*(\mathfrak{G}, V)$ (см. [3], [14]). Аналогичная спектральная последовательность существует для гомологий [3]. Далее, пусть $\mathfrak{G}$ — конечномерная алгебра Ли над полем K характеристики 0, $\mathfrak{G}''\subset\mathfrak{G}'$ — ее подалгебры, причем $\mathfrak{G}'$ редуктивна в $\mathfrak{G}$, V — $\mathfrak{G}$-модуль, являющийся полупростым $\mathfrak{G}$-модулем. Тогда существует спектральная последовательность $\{F_r^{p,q}\}$ с $F_2^{p,q}=H^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'; V)\otimes H^q(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}''; K)$, сходящаяся к $H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}''; V)$ (см. [12], [14]).

Полностью изучены когомологии конечномерных редуктивных и, в частности, полупростых алгебр Ли над полем характеристики 0. Если $\mathfrak{G}$ — полупростая конечномерная алгебра Ли над таким полем, то для любого конечномерного $\mathfrak{G}$-модуля V имеют место равенства

$$H^1(\mathfrak{G}, V)=0; \quad H^2(\mathfrak{G}, V)=0$$

(леммы Уайтхеда). Первое из этих свойств является и достаточным условием полупростоты конечномерной алгебры $\mathfrak{G}$ и равносильно также полупростоте всех конечномерных $\mathfrak{G}$-модулей. Второе свойство равносильно теореме Леви (см. *Леви — Мальцева разложение*) для алгебр Ли с абелевым радикалом [1], [5], [14]. Если $\mathfrak{G}$ — редуктивная алгебра Ли, $\mathfrak{H}$ — ее подалгебра и V — конечномерный полупростой модуль, то $H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V)\cong H^*(\mathfrak{G},\mathfrak{H}; V^{\mathfrak{G}})$, что сводит вычисление когомологий к случаю тривиального $\mathfrak{G}$-модуля $V=K$ (см. [5], [14]). Алгебра когомологий $H^*(\mathfrak{G}, K)$ редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ естественно изоморфна алгебре $C^*(\mathfrak{G}, K)^{\mathfrak{G}}$ коцепей, инвариантных относительно ad. В этом случае $H^*(\mathfrak{G}, K)$ является алгеброй Хопфа и, следовательно, есть внешняя алгебра над пространством $P_{\mathfrak{G}}$ примитивных элементов, градуированных нечетными степенями $2m_i-1$, $i=1,\ldots, r$. В частности, $\dim H^1(\mathfrak{G},K)=\dim P^1_{\mathfrak{G}}$ есть размерность центра алгебры $\mathfrak{G}$, а $P^3_{\mathfrak{G}}$ изоморфно пространству инвариантных квадратичных форм на $\mathfrak{G}$ (см. [12], [14]). Если K алгебраически замкнуто, то r есть ранг алгебры $\mathfrak{G}$, т. е. размерность ее подалгебры Картана $\mathfrak{A}$, а m_i суть степени свободных образующих в алгебре многочленов на $\mathfrak{G}$, инвариантных относительно ad (или в изоморфной ей алгебре многочленов на $\mathfrak{A}$, инвариантных относительно группы Вейля). В этом случае числа $2m_i-1$ совпадают с размерностями примитивных классов когомологий соответствующей компактной группы Ли.

Алгебра гомологий $H_*(\mathfrak{G}, K)$ редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ над полем характеристики 0 есть внешняя алгебра, двойственная к $H^*(\mathfrak{G}, K)$. Для любой n-мерной унимодулярной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ справедлив аналог двойственности Пуанкаре:

$$H^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; K)\cong H_{n-m-p}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; K),$$

где $0\leqslant p\leqslant n-m$ и $\mathfrak{H}$ — любая m-мерная редуктивная в $\mathfrak{G}$ подалгебра (см. [14], [16]).

Для когомологий разрешимых алгебр Ли известны лишь немногие сколько-нибудь общие утверждения. Напр., пусть $\mathfrak{G}$ — конечномерная нильпотентная алгебра Ли над бесконечным полем, а V — конечномерный $\mathfrak{G}$-модуль. Тогда $H^p(\mathfrak{G}, V)=0$ для всех p, если в V нет тривиальных $\mathfrak{G}$-подмодулей, и $H^p(\mathfrak{G}, V)\neq 0$ для $p=0, 1,\ldots,n=\dim \mathfrak{G}$, причем $\dim H^p(\mathfrak{G}, K)\geqslant 2$ для $1\leqslant p\leqslant n-1$, если такой $\mathfrak{G}$-подмодуль существует (см. [7]). Хорошо изучены группы $H^p(\mathfrak{n}, V)$, где $\mathfrak{n}$ — нильпотентный радикал параболической подалгебры $\mathfrak{P}$ в некоторой полупростой алгебре Ли $\mathfrak{G}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, а представление алгебры $\mathfrak{n}$ в V является ограничением некоторого представления алгебры $\mathfrak{G}$ в V (см. [11]). Эти когомологии тесно связаны с когомологиями комплексного однородного пространства G/P, отвечающего паре $\mathfrak{G}\supset\mathfrak{P}$, со значениями в пучках ростков голоморфных сечений однородных векторных расслоений над

G/P. Для вычисления когомологий неполупростых конечномерных алгебр Ли над полем характеристики 0 полезна формула

$$H^*(\mathfrak{G},\ V) \cong H^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{h},\ K) \otimes H^*(\mathfrak{h},\ V)^{\mathfrak{G}},$$

где $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{G}$, причем $\mathfrak{G}/\mathfrak{h}$ полупроста [14].

В некоторых случаях можно установить связь между К. а. Ли и *когомологиями групп*. Пусть G — связная вещественная группа Ли, K — ее максимальная компактная подалгебра, $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{K}$ — их алгебры Ли, V — конечномерный гладкий G-модуль. Если определить в V естественную структуру $\mathfrak{G}$-модуля, то когомологии $H^*(\mathfrak{G},\ \mathfrak{K};\ V)$ изоморфны когомологиям группы G (как абстрактной группы), вычисленным с помощью непрерывных коцепей [10]. С другой стороны, пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли односвязной разрешимой группы Ли G, Γ — решетка в G и $\rho: G \to GL(V)$ — гладкое конечномерное линейное представление. Если $\rho(\Gamma) \times \times \mathrm{Ad}\,\Gamma$ плотна по Зарискому в алгебраич. замыкании группы $\rho(G) \times \mathrm{Ad}\, G$, то $H^*(\mathfrak{G},\ V) \cong H^*(\Gamma,\ V)$ (см. [4]). В общем случае $\dim H^p(\Gamma, V) \geqslant \dim H^p(\mathfrak{G} V)$ $(p=0, 1, \ldots)$. Для нильпотентной $\mathfrak{G}$ достаточно потребовать, чтобы ρ было унипотентным. Если решетка Γ в односвязной разрешимой группе G такова, что $\mathrm{Ad}\,\Gamma$ плотна в алгебраич. замыкании группы $\mathrm{Ad}\,\Gamma$ (напр., G нильпотентна), то $H^*(\mathfrak{G},\ \mathbb{R}) \cong H^*(G/\Gamma,\ \mathbb{R})$.

В последние годы стали систематически изучаться когомологии некоторых бесконечномерных алгебр Ли. К ним относятся алгебра $\mathfrak{X}(M)$ векторных полей на дифференцируемом многообразии M, алгебра Ли формальных векторных полей, подалгебры этих алгебр, состоящие из бездивергентных, гамильтоновых или канонических векторных полей (см. [2], [13]), а также некоторые классические банаховы алгебры Ли [9].

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 37—123; [3] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [4] Рагунатан М., Дискретные подгруппы групп Ли, пер. с англ., М., 1977; [5] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1961; [6] Chevalley C., Eilenberg S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 63, p. 85—124; [7] Dixmier J., «Acta scient. mat. Szeged», 1955, v. 16, № 3—4, p. 246—50; [8] Greub W., Halperin S., Vanstone R., Connections, curvature and cohomology. Vol. 3: Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces, N. Y.— L., 1975; [9] de la Harpe P., Classical Banach — Lie algebras and Banach — Lie groups of operators in Hilbert space, B.— Hdlb.— N. Y., 1972; [10] Hochschild G., Mostow G. D., «Ill. J. Math.», 1962, v. 6, № 3, p. 367—401; [11] Kostant B., «Ann. Math.», 1961, v. 74, № 2, p. 329—87; [12] Koszul J. L., «Bull. Soc. math. France», 1950, t. 78, p. 65—127; [13] Lichnerowicz A., «J. math. pures appl.», 1974, t. 53, № 4, p. 459—83; [14] Verona A., Introducere în coomologia algebrelor Lie, Buc., 1974. *А. Л. Онищик.*

КОГОМОЛОГИИ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР — группы $H^n(A,\ X)$, $n \geqslant 0$, где X — банахов бимодуль над банаховой алгеброй A, определяемые как когомологии коцепного комплекса

$$0 \longrightarrow C^0(A,\ X) \longrightarrow \ldots \longrightarrow C^n(A,\ X) \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}(A,\ X) \longrightarrow \ldots,$$

n-мерные цепи к-рого являются непрерывными n-линейными операторами из A в X, а

$$\delta^n f(a_1,\ \ldots,\ a_{n+1}) = a_1 f(a_2,\ \ldots,\ a_{n+1}) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(a_1,\ \ldots,\ a_k a_{k+1},\ \ldots,\ a_{n+1}) +$$
$$+ (-1)^{n+1} f(a_1,\ \ldots,\ a_n)\, a_{n+1}.$$

К. б. а. могут быть также введены с помощью банахова аналога функтора Ext, есть и их аксиоматическое определение.

Аналогично когомологиям алгебр, элементы одномерных К. б. а. реализуются как непрерывные дифференцирования из A в X «по модулю внутренних», а элементы двумерных — как препятствия к расщепимости сингулярных расширений A с ядром X. В то же время на языке К. б. а. выражается ряд специфических понятий анализа и топологии.

Алгебра A такая, что $H^2(A, X)=0$ для всех X, наз. вполне отделимой; эти алгебры характеризуются тем, что все их сингулярные расширения расщепимы. Специфика банаховых структур сказывается в том, что такое требование является весьма жестким: вполне отделимая коммутативная банахова алгебра необходимо имеет конечный спектр (пространство максимальных идеалов). В частности, вполне отделимая алгебра функций совпадает с прямой суммой конечного числа полей комплексных чисел.

Класс банаховых алгебр с тривиальными когомологиями в высших ($n\geqslant 3$) размерностях уже не столь узок: таковы, напр., бипроективные алгебры — алгебры A, проективные, как банахов A-бимодуль. Бипроективными являются L^1- и C^*-алгебра компактной группы, а также алгебры ядерных операторов во всех классических примерах банаховых пространств. При нек-рых условиях на банахову структуру топологически простые бипроективные алгебры допускают полное описание, а любая полупростая бипроективная алгебра разлагается в их топологич. прямую сумму.

Коммутативная алгебра наз. слабо наследственной, если ее максимальные идеалы проективны. Это свойство эквивалентно тривиальности $H^2(A, X)$ с теми X, у к-рых $xa=\lambda x$ при всех $x\in X$, $a\in A$. Для прективности идеала в коммутативной банаховой алгебре A необходимо, а при $A=C(\Omega)$ и достаточно, чтобы его спектр был паракомпактен. В частности, слабая наследственность алгебры $C(\Omega)$ эквивалентна паракомпактности всех множеств вида $\Omega\setminus\{t\}$, $t\in\Omega$.

Пространство, сопряженное к A-бимодулю X, само есть A-бимодуль. Алгебры с $H^n(A, X^*)=0$ при всех X и $n>0$ наз. аменабельными, поскольку для $A=L^1(G)$ такое свойство равносильно аменабельности (усреднимости) самой G. В общем случае A аменабельна тогда и только тогда, когда алгебра

$$I_\Delta=\left\{u=\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} a_k\otimes b_k\in A_t\hat{\otimes} A_t:\ \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} a_kb_k=0\right\}$$

обладает ограниченной аппроксимативной единицей.

Лит.: [1] Johnson B. E., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1972, № 127; [2] Хелемский А. Я., Труды семинара им. Петровского, 1978, в. 3, с. 223—42. *А. Я. Хелемский.*

КОГОМОЛОГИИ ГРУПП — исторически первая теория *когомологий алгебр.*

Любой паре (G, A), где G — группа, а A — левый G-модуль, т. е. модуль над целочисленным групповым кольцом $\mathbb{Z}(G)$, сопоставляется последовательность абелевых групп $H^n(G, A)$, называемых группами когомологий группы G с коэффициентами в A. Число n, пробегающее все целые неотрицательные значения, наз. размерностью группы $H^n(G, A)$. Группы К. г. являются важными инвариантами, содержащими информацию как о группе G, так и о модуле A.

Группа $H^0(G, A)$ равна, по определению, $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, A)\simeq A^G$, где A^G — подмодуль G-инвариантных элементов в A. Группы $H^n(G, A)$ для $n\geqslant 1$ определяются как значения n-го *производного функтора* от функтора $A\rightsquigarrow H^0(G, A)$. Пусть

$$\ldots\xrightarrow{d_n} P_n\xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-1}\longrightarrow\ldots\longrightarrow P_0\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

— некоторая проективная *резольвента* тривиального G-модуля $\mathbb{Z}$ в категории G-модулей, т. е. точная последовательность, в которой все модули P_i проективны. Тогда $H^n(G, A)$ — это n-я группа когомологий *комплекса*

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_G(P_0, A)\xrightarrow{d_0'}\mathrm{Hom}_G(P_1, A)\longrightarrow\ldots,$$

где отображения d_n' индуцированы отображениями d_n, т. е. $H^n(G, A) = \operatorname{Ker} d_n' / \operatorname{Im} d_{n-1}'$.

Группы гомологий групп определяются при помощи двойственной конструкции с заменой всюду функтора Hom_G функтором $\otimes_G$.

Набор функторов $A \leadsto H^n(G, A)$, $n=0, 1, \ldots$, является когомологическим функтором (см. *Гомологический функтор*) на категории левых G-модулей.

Модуль вида $B = \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}[G], X)$, где X — абелева группа, а G действует на B по формуле

$$(g\varphi)(t) = \varphi(tg) \quad (\varphi \in B, \ t \in \mathbb{Z}(G)),$$

наз. коиндуцированным. Для инъективных и коиндуцированных модулей A $H^n(G, A) = 0$ при $n \geqslant 1$. Любой модуль A изоморфен подмодулю нек-рого коиндуцированного модуля B. Точная когомологическая последовательность для последовательности

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0$$

определяет изоморфизмы $H^n(G, B/A) \simeq H^{n+1}(G, A)$ $(n \geqslant 1)$ и точную последовательность

$$B^G \longrightarrow (B/A)^G \longrightarrow H^1(G, A) \longrightarrow 0.$$

Таким образом, вычисление $n+1$-мерной группы когомологий для модуля A сводится к вычислению n-мерной группы когомологий для модуля B/A. Этот прием наз. сдвигом размерностей.

Сдвиг размерностей позволяет дать аксиоматическое определение групп когомологий, а именно, их можно определить как последовательность функторов $A \leadsto H^n(G, A)$ из категории G-модулей в категорию абелевых групп, образующую когомологический функтор и удовлетворяющую условию $H^n(G, B) = 0$ при $n \geqslant 1$ для любого коиндуцированного модуля B.

Группы $H^n(G, A)$ можно определить также как классы эквивалентности точных последовательностей G-модулей вида

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow M_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_n \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

относительно подходящим образом определенной эквивалентности (см. [1], гл. 3, 4).

Для вычисления групп когомологий обычно используют стандартную резольвенту тривиального G-модуля $\mathbb{Z}$, в которой $P_n = \mathbb{Z}[G^{n+1}]$ и для $(g_0, \ldots, g_k) \in G^{n+1}$

$$d_n(g_0, \ldots, g_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n),$$

где знак $\wedge$ означает, что член g_i опущен. Коцепи из $\operatorname{Hom}_G(P_n, A)$ — это функции $f(g_0, \ldots, g_n)$ такие, что $gf(g_0, \ldots, g_n) = f(gg_0, \ldots, gg_n)$. Делая замену переменных по формулам $g_0 = 1$, $g_1 = h_1$, $g_2 = h_1 h_2$, $g_n = h_1 h_2 \ldots h_n$, можно перейти к неоднородным коцепям $f(h_1, \ldots, h_n)$. Действие кограничного оператора на них таково:

$$d'f(h_1, \ldots, h_{n+1}) = h_1 f(h_2, \ldots, h_{n+1}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(h_1, \ldots, h_i h_{i+1}, \ldots, h_{n+1}) +$$
$$+ (-1)^{n+1} f(h_1, \ldots, h_n),$$

напр., одномерный коцикл — это функция $f: G \to A$ такая, что $f(g_1 g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1)$ для $g_1, g_2 \in G$, а кограница — функция вида $f(g) = ga - a$ для нек-рого $a \in A$. Одномерный коцикл наз. также скрещенным гомоморфизмом, а одномерная коцепь — тривиальным скрещенным гомоморфизмом. В случае, когда G действует на A тривиально, скрещенные гомоморфизмы совпадают с обычными гомоморфизмами, а все тривиальные скрещенные гомоморфизмы равны 0, т. е. в этом случае $H^1(G, A) = \operatorname{Hom}(G, A)$.

Элементы группы $H^1(G, A)$ можно интерпретировать как классы автоморфизмов группы F, содержащейся в точной последовательности $1 \to A \to F \to G \to 1$, тождественные на A и на G по модулю сопряжений элементами $a \in A$. Элементы группы $H^2(G, A)$ интерпретируются как классы расширений группы A с помощью G. Наконец, группа $H^3(G, A)$ допускает интерпретацию в качестве препятствий для расширений неабелевой группы H с центром A с помощью G (см. [1]). Для $n>3$ аналогичная интерпретация групп $H^n(G, A)$ неизвестна (1978).

Если H — подгруппа группы G, то ограничение коциклов с G на H определяет для всех n функториальные гомоморфизмы ограничения

$$\text{res}: H^n(G, A) \longrightarrow H^n(H, A).$$

При $n=0$ res совпадает с вложением $A^G \subset A^H$. Если G/H — некоторая факторгруппа группы G, то подъем коциклов с G/H на G индуцирует функториальные гомоморфизмы инфляции

$$\text{inf}: H^n(G/H, A^H) \longrightarrow H^n(G, A).$$

Пусть $\varphi: G' \to G$ — некоторый гомоморфизм. Тогда любой G-модуль A можно превратить в G'-модуль, полагая для $g' \in G'$, $g'a = \varphi(g')a$. Комбинируя отображения res и inf, получают отображения $H^n(G, A) \to \to H^n(G', A)$. В этом смысле $H \to (G, A)$ является контравариантным функтором по G. Если Π — некоторая группа автоморфизмов группы G, то группы $H^n(G, A)$ можно превратить в Π-модули. Напр., если H — нормальный делитель в G, то группы $H^n(H, A)$ можно снабдить естественной структурой G/H-модулей. Это возможно благодаря тому, что внутренние автоморфизмы группы G индуцируют тождественные отображения на группах $H^n(G, A)$. В частности, для нормального делителя $H \in G$ $\operatorname{Im}\text{res} \subset H^n(H, A)^{G/H}$.

Пусть H — подгруппа группы G конечного индекса. Тогда отображение нормы $N_G/H: A^H \to A^G$ позволяет, при помощи сдвига размерностей, определить для всех n функториальные гомоморфизмы коограничения

$$\text{cores}: H^n(H, A) \longrightarrow H^n(G, A),$$

удовлетворяющие соотношению $\text{cores} \cdot \text{res} = (G:H)$.

Если H — нормальный делитель в G, то существует спектральная последовательность Линдона, со вторым членом $E_r^{p,q} = H^p(G/H, H^q(H, A))$, сходящаяся к когомологиям $\otimes_n H^n(G, A)$ (см. [1], гл. 2).В малых размерностях она приводит к точной последовательности

$$0 \longrightarrow H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\text{res}} H'(H, A)^{G/H} \xrightarrow{\text{tr}}$$
$$\longrightarrow H^2(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(G, A),$$

где tr — отображение трансгрессии.

Для конечной группы G норменное отображение N_G: $A \to A$ индуцирует отображение $\hat{N}_G: H_0(G, A) \to H^0(G, A)$, где $H_0(G, A) = A/J_G A$ и J_G — идеал кольца $\mathbb{Z}(G)$, порожденный всеми элементами вида $g-1$ для $g \in G$. Отображение N_G позволяет срастить точные последовательности когомологий и гомологий. Точнее, можно определить модифицированные группы когомологий — $\hat{H}^n(G, A)$ (называемые также **когомологиями Тейта**) для всех целых n. При этом

$$\hat{H}^n(G, A) = H^n(G, A) \quad \text{для } n \geqslant 1,$$
$$\hat{H}^n(G, A) = H_{-n-1}(G, A) \quad \text{для } n \leqslant -1,$$
$$\hat{H}^{-1}(G, A) = \operatorname{Ker} \hat{N}_G \quad \text{и} \quad \hat{H}_0(G, A) = \operatorname{Coker} \hat{N}_G.$$

Для этих когомологий существует точная бесконечная в обе стороны когомологическая последовательность. G-модуль A наз. **когомологически тривиальным**, если $\hat{H}^n(H, A) = 0$ для всех n и любой подгруппы $H \subseteq G$. Модуль A когомологически тривиален тогда и только тогда, когда для нек-рого $i \hat{H}^i(H, A)=0$ и $\hat{H}^{i+1}(H, A)=0$ для любой подгруппы $H \subseteq G$. Любой модуль A можно представить как подмодуль или фактормодуль когомологически тривиального модуля, что позволяет применять сдвиг размерностей как для повышения, так и для понижения размерности. В частности, сдвиг размерностей позволяет определить отображения res и cores (но не inf) для всех целых n. Для конечно порожденного G-модуля A группы $\hat{H}^n(G, A)$ конечны.

Группы $\hat{H}^n(G, A)$ аннулируются умножением на порядок G, а отображения $\hat{H}(G, A) \to \oplus_p \hat{H}^n(G_p, A)$, индуцированные ограничениями, где G_p — некоторая силовская p-подгруппа группы G, мономорфны. Это позволяет сводить ряд вопросов о когомологиях конечных групп к рассмотрению когомологий p-групп. Когомологии циклической группы имеют период 2, т. е. для любого n $\hat{H}^n(G, A) \simeq \hat{H}^{n+2}(G, A)$.

Для любых целых n и m определено отображение (наз. $\smile$-произведением)

$$\hat{H}^n(G, A) \otimes \hat{H}^m(G, B) \longrightarrow \hat{H}^{n+m}(G, A \otimes B),$$

где тензорное произведение групп A и B рассматривается как G-модуль. В частном случае, когда A — кольцо, и операции из группы G являются автоморфизмами, то $\smile$-произведение превращает группу $\oplus_n \hat{H}^n(G, A)$ в градуированное кольцо. Теорема двойственности для $\smile$-произведения утверждает, что для любой полной абелевой группы C и G-модуля A $\smile$-произведение

$$\hat{H}^n(G, A) \otimes \hat{H}^{-n-1}(G, \mathrm{Hom}(A, C)) \longrightarrow \hat{H}^{-1}(G, C)$$

определяет изоморфизм между группами $\hat{H}^n(G, A)$ и $\mathrm{Hom}(\hat{H}^{-n-1}(G, \mathrm{Hom}(A, C)), \hat{H}^{-1}(G, C))$ (см. [2]). $\smile$-произведение определено и для бесконечной группы G при условии, что $n, m > 0$.

Многие задачи приводят к необходимости рассмотрения когомологий топологич. группы G, непрерывно действующей на топологич. модуле A. В частности, если G — *проконечная группа* (случай наиболее близкий конечным группам) и A — дискретная абелева группа, являющаяся непрерывным G-модулем, то можно рассмотреть когомологии группы G с коэффициентами в A, вычисляемые в терминах непрерывных коцепей [5]. Эти группы можно определить также как пределы $\lim H^n(G/U, A^U)$ относительно отображений инфляции, где U пробегает все открытые нормальные делители в G. Эти когомологии обладают всеми основными свойствами когомологий конечных групп. Если G — про-p-группа, то размерности над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ первой и второй групп ее когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ интерпретируются как минимальное число образующих и соотношений (между этими образующими) группы G.

О различных вариантах непрерывных когомологий, а также нек-рых других типах групп когомологий см. [6]. О К. г. с неабелевой группой коэффициентов см. *Неабелевы когомологии*.

Лит.: [1] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [2] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [4] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [5] Кох Х., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [6] Итоги науки. Математика. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 203—35. *Л. В. Кузьмин.*

КОГОМОЛОГИИ КОМПЛЕКСА — см. *Гомологии комплекса.*

КОГОМОЛОГИЙ ГРУППА коцепного комплекса $K^{\cdot}=(K^n, d_n)$ абелевых групп — градуированная группа $H^{\cdot}(K)=\oplus H^n(K)$, где $H^n(K)=\mathrm{Ker}\, d_{n+1}/\mathrm{Im}\, d_n$ (см. *Комплекс*). Группа $H^n(K)$ наз.

n-мерной, или n-й, К. г. комплекса $K^{\cdot}$ Это понятие двойственно понятию группы гомологий цепного комплекса (см. *Гомологии комплекса*).

Модули когомологий коцепного комплекса в категории модулей также часто наз. К. г.

Когомологий группа цепного комплекса $K.=(K_n, d_n)$ Λ-модулей с коэффициентами или со значениями, в A, где Λ — некоторое ассоциативное кольцо с единицей, а A — Λ-модуль, есть К. г.

$$H^{\cdot}(K., A)=\bigotimes H^n(K., A)$$

коцепного комплекса

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(K., A)=(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(K_n, A), d_n^*),$$

где $d_n^*(\gamma)=\gamma\circ d_n$, $\gamma\in\mathrm{Hom}_{\Lambda}(K_n, A)$. Частным случаем этой конструкции являются К. г. полиэдра, сингулярные К. г. топологич. пространства, К. г. групп, алгебр и т. д.

Если $0\to K.\xrightarrow{\alpha}L.\xrightarrow{\beta}M.\to 0$ — точная последовательность комплексов Λ-модулей, причем образы K_n — прямые слагаемые в L_n, то естественным образом возникает точная последовательность

$$\ldots\longrightarrow H^n(M., A)\xrightarrow{\alpha^*}H^n(L., A)\xrightarrow{\beta^*}H^n(K., A)\xrightarrow{d^*}$$
$$\longrightarrow H^{n+1}(M., A)\longrightarrow\ldots$$

С другой стороны, если $K.$ — комплекс Λ-модулей, причем все K_n проективны, то с каждой точной последовательностью $0\to A\to B\to C\to 0$ Λ-модулей связана точная последовательность К. г.

$$\ldots\longrightarrow H^n(K., A)\longrightarrow H^n(K., B)\longrightarrow H^n(K., C)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{n+1}(K., A)\longrightarrow\ldots$$

О К. г. топологич. пространства см. *Гомологии группа* топологич. пространства, *Когомологии*.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [3] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966.

Л. В. Кузьмин.

КОГОМОЛОГИЙ КОЛЬЦО — кольцо, аддитивной группой к-рого является градуированная группа когомологий

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty}H^n(X, A),$$

где X — некоторый цепной комплекс, A — группа коэффициентов, а умножение определяется по линейности набором отображений

$$\nu_{m,n}\colon H^m(X, A)\otimes H^n(X, A)\longrightarrow H^{m+n}(X, A)$$

для всех $m, n\geqslant 0$, являющихся внутренними когомологич. умножениями. К. к. оказывается при этом снабженным структурой градуированного кольца.

Для существования отображений $\nu_{m,n}$ достаточно иметь набор отображений $\hat{\nu}_{m,n}\colon X_{m+n}\to X_m\otimes X_n$, удовлетворяющих нек-рым дополнительным свойствам, и отображение $A\otimes A\to A$, т. е. умножение в группе коэффициентов A (см. [2]). Тогда отображения $\hat{\nu}_{m,n}$ индуцируют отображения

$$\mathrm{Hom}(X_m, A)\otimes\mathrm{Hom}(X_n, A)\longrightarrow\mathrm{Hom}(X_{m+n}, A),$$

к-рые в свою очередь индуцируют на когомологиях отображения $\nu_{m,n}$.

В частности, структура кольца определена на градуированной группе $H(G, \mathbb{Z})=\bigoplus_{n=0}^{\infty}H^n(G, \mathbb{Z})$, где G — некоторая группа и $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел с тривиальным действием группы G. Соответствующие отображения $\nu_{m,n}$ совпадают с $\smile$-произведением. Это ассоциативное кольцо с единицей, а для однородных элементов $a, b\in H(G, \mathbb{Z})$ степеней p и q соответственно выполняется соотношение $ab=(-1)^{pq}ba$.

Аналогично, $\smile$-произведение определяет структуру кольца на группе $\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(X, \mathbb{Z})$, где $H^n(X, \mathbb{Z})$ — n-мерная группа сингулярных когомологий топологич. пространства X с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966. *Л. В. Кузьмин.*

КОГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ — естественное преобразование одних когомологич. функторов в другие (чаще всего — в себя).

Когомологической операцией типа $(n, m; \pi, G)$, n, m — целые числа, π, G — абелевы группы, наз. такое семейство заданных для любого пространства X отображений (не обязательно гомоморфизмов) групп когомологий $\theta_X : H^n(X; \pi) \to H^m(X; G)$, что для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$, $\theta_X \circ f^* = f^* \circ \theta_Y$ (естественность). Множество всех К. о. типа $(n, m; \pi, G)$ образует абелеву группу относительно сложения: $(\theta+\psi)_X = \theta_X + \psi_X$, обозначаемую $O(n, m; \pi, G)$.

Примеры К. о.: *Стинрода приведенные степени* Sq^i и $\mathcal{P}^i$; *Понтрягина квадрат* $\mathcal{P}_1$; *Постникова квадрат*; возведение в k-ю степень μ_k: для $x \in H^s(X; \pi)$, где π — кольцо, $\mu_k(x) = x^k$, $\mu_k \in O(s, ks, \pi, \pi)$; гомоморфизм Бокштейна β; К. о., индуцированные гомоморфизмами $\pi \to G$ групп коэффициентов, например mod $p : H^n(X) \to H^n(X; \mathbb{Z}_p)$.

К. о. представляют собой дополнительную структуру в когомологич. функторах, ввиду чего они позволяют решать такие задачи гомотопич. топологии, к-рые нельзя решить «на уровне» групп когомологий. Примеры: 1) пусть X и Y — два пространства и $x \in H^n(X; \pi)$, $y \in H^n(Y; \pi)$ — два элемента. Существует ли отображение $f : X \to Y$ с $f^*(y) = x$? Первым достаточным условием отсутствия такого f является отсутствие гомоморфизма $g : H^*(Y; \pi) \to H^*(X; \pi)$ с $g(y) = x$ (таким приемом доказывается, напр., *Брауэра теорема* о неподвижной точке). Если g существует, то несуществование отображения f можно установить так: пусть имеется К. о. $\theta \in O(n, m; \pi, G)$ с $\theta_Y(y) = 0$, $\theta_X(x) \neq 0$. Тогда $0 \neq \theta_X(x) = \theta_X(f^*(y)) = f^*(\theta_Y(y)) = f^*(0) = 0$, что невозможно; в частности $\theta(0) = O$. 2) Существенно ли отображение $f : S^m \to S^n$? Пусть $C_f = S^n \smile fe^m$. Тогда (при $m \neq n$) $H^{m+1}(C_f; G) = G$, $H^n(C_f; \pi) = \pi$. Если существует К. о. $\theta \in O(n, m+1; \pi, G)$ с $\theta_{C_f} \neq 0$, то f существенно. В этом случае операция θ детектирует отображение f или элемент $[f] \in \pi_m(S^n)$.

Имеет место изоморфизм группы $O(n, m; \pi, G) \approx H^m(K(\pi, n); G)$, где $K(\pi, n)$ — *Эйленберга—Маклейна пространство*, и потому $O(n, m; \pi, G) \approx [K(\pi, n), K(G, m)]$ (см. *Представимый функтор*). Группы $H^m(K(\pi, n); G)$ вычислены для всех m и n и любых конечно порожденных π и G [9].

Когомологическая надстройка ${}^1\theta \in O(n-1, m-1; \pi, G)$ над К. о. $\theta \in O(n, m; \pi, G)$, определяется отображением ${}^1\theta_X$, заданным композицией

$$H^{n-1}(X; \pi) \longrightarrow H^n(SX; \pi) \xrightarrow{\theta_{SX}} H^m(SX; G) \longrightarrow \longrightarrow H^{m-1}(X; G),$$

где SX — *надстройка* над X. Напр., ${}^1\mu_k = 0$, ${}^1Sq^i = Sq^i$, ${}^1\mathcal{P}^i = \mathcal{P}^i$. При $m \leqslant 2n - 1{}^1(\theta)$ есть изоморфизм. Для любого X ${}^1\theta_X$ есть гомоморфизм групп.

Стабильной (или стационарной) когомологической операцией типа (π, G) степени k наз. набор $\{\theta_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ с $\theta_n \in O(n, n+k; \pi, G)$ и ${}^1\theta_n = \theta_{n-1}$. Такие К. о. образуют абелеву группу $O_S(k; \pi, G)$, изоморфную группе $\varprojlim_n H^{n+k}(K(\pi, n); G)$ — обратному пределу последовательности

$$\ldots \longleftarrow H^{n+k}(K(\pi, n); G) \longleftarrow \longleftarrow H^{n+k-1}(K(\pi, n-1); G) \longleftarrow \ldots$$

Группа $\bigoplus_k O_S(k; \pi, G)$ обозначается $O_S(\pi, G)$.

П р и м е р ы с т а б и л ь н ы х К. о.: степени Стинрода $Sq^i \in O_S(i;\ \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2)$ и $\mathcal{P}^i \in O_S(2(p^i-1);\ \mathbb{Z}_p,\ \mathbb{Z}_p)$, $p>2$ — простое, и гомоморфизмы Бокштейна $\beta \in O_S(1;\ \mathbb{Z}_m,\ \mathbb{Z}_m)$.

Если $\theta \in O(n,\ m;\ \pi,\ G)$ и $\varphi \in O(m,\ l;\ G,\ \tau)$, то определена К. о. $\varphi \circ \theta \in O(n,\ l;\ \pi,\ \tau)$. В частности, можно определить композицию $\varphi \circ \theta \in O_S(\pi,\ \tau)$ любых двух стабильных К. о. $\theta \in O_S(\pi,\ G)$ и $\varphi \in O_S(G,\ \tau)$, так что группа $O_S(\pi,\ \pi)$ является кольцом; $O_S(\mathbb{Z}_p,\ \mathbb{Z}_p)$ наз. *Стинрода алгеброй* A_p.

К. о. впервые появилась при решении задачи классификации отображений $(n+1)$-мерного полиэдра в n-мерную сферу ($n=2$ в [1] и $n>2$ в [2]). Т е о р е м а к л а с с и ф и к а ц и и [2]. Имеет место точная последовательность групп:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(Sq^2 \colon H^{n-1}(X;\ \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{n+1}(X;\ \mathbb{Z}_2)) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow [X,\ S^n] \longrightarrow \ker\,(H^n(X) \xrightarrow{\bmod 2} H^n(X;\ \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{Sq^2}$$
$$\longrightarrow H^{n+2}(X;\ \mathbb{Z}_2)) \longrightarrow 0.$$

Т е о р е м а п р о д о л ж е н и я [2]. Пусть Y — $(n+2)$-мерный полиэдр, Y^{n+1} — его $(n+1)$-мерный остов. Отображение $f \colon Y^{n+1} \to S^n$ определяет элемент $y=f^*(s) \in H^n(Y^{n+1})$, где $s \in H^n(S^n)$ — образующая. Это отображение продолжается до $g \colon Y \to S^n$ тогда и только тогда, когда $Sq^2(y \bmod 2)=0$.

Отвечающее К. о. $\theta \in O(n,\ m;\ \pi,\ G)$ отображение $\theta \colon K(\pi,\ n) \to K(G,\ m)$ из стандартного *Серра расслоения*

$$K(G,\ m-1) \longrightarrow PK(G,\ m) \longrightarrow K(G,\ m)$$

индуцирует расслоение

$$F=K(G,\ m-1) \xrightarrow{i} E(\theta) \xrightarrow{p} K(\pi,n)=B.$$

В т о р и ч н ы е к о г о м о л о г и ч е с к и е о п е р а ц и и — классы когомологий пространств $E(\theta)$. Более точно, пусть задан элемент $\varphi \in H^q(E(\theta);\ H)$, H — абелева группа. Для любого $u \in H^n(X;\ \pi)$ с $\theta_X(u)=0$ существует $\tilde{u} \in [X,\ E(\theta)]$ с $p_{\#}\tilde{u}=u$, где $p_{\#} \colon [X,\ E(\theta)] \to [X,\ B]$ — индуцированное p отображение, и элемент $v=\varphi \circ \tilde{u}=\tilde{u}^*(\varphi) \in H^q(X;\ H)$, зависящий от выбора элемента $\tilde{u}$. Произвол в выборе $\tilde{u}$ определяется прообразом $p^{-1}(u)$, т. е. орбитой действия группы $[X,\ F]=H^{m-1}(X;G)$ на множестве $[X,\ E(\theta)]$. При $m<2n-1$ и $q<2n-1$ $i_{\#}$ и $\varphi_{\#}$ будут гомоморфизмами групп, и потому при другом выборе $\tilde{u}$ элемент v может измениться лишь на нек-рый элемент подгруппы $\mathrm{Im}(i^*\varphi \colon H^m(X;\ G) \to H^q(X;\ H))=Q$ группы $H^q(X;\ H)$. Определим вторичную К. о. Φ, полагая $\Phi_X(u)=u+Q$ (смежный класс $u+Q$ однозначно определен элементом u). Таким образом, отображение Φ_X определено на подгруппе $\mathrm{Ker}\ \theta_X$ и принимает значения в факторгруппе $H^q(X;\ H)/Q$, где Q наз. н е о п р е д е л е н н о с т ь ю К. о. Φ. Другое название: Φ — ч а с т и ч н а я м н о г о з н а ч н а я К. о. из $H^n(\cdot;\ \pi)$ в $H^q(\cdot;\ H)$.

Вторичные К. о. естественны в следующем смысле: для любого $f \colon Y \to X$ и любого $u \in \mathrm{Ker}\ \theta \subset H^n(X;\ \pi)$ имеет место: $f^*(\Phi_X(u)) \subset \Phi_Y(f^*(u))$ [3]. Если $i^*(\varphi)=0$, то $\varphi=p^*(\theta')$ для нек-рой $\theta' \in H^q(B;\ H)$, так что $\tilde{u}^*(\varphi)=\theta'(u)$, и потому $\Phi u=u^*(\theta')=\theta'(u)$ с нулевой неопределенностью. При этом для К. о. $\theta'' \in H^m(B;\ H)$ с $p^*(\theta'')=\varphi$ и элемента $u \in \mathrm{Ker}\ \theta$ выполнено $\theta'(u)=\theta''(u)$, так что К. о. Φ является однозначной К. о. θ', ограниченной на $\mathrm{Ker}\ \theta$.

Каждой вторичной К. о. отвечает нек-рое соотношение между обычными (п р и м а р н ы м и) К. о. Если $q<2m-1$, то К. о. $i^*(\varphi) \in H^q(K(G,\ m-1);\ H)$ однозначно представляется в виде ${}^1\psi$ с $\psi \in H^{q+1}(K(G,\ m+1);\ H)$ и $\psi \circ \theta=0$. Если $\varphi' \in H^m(E(\theta);\ H)$ такова, что $i^*(\varphi-\varphi')=0$, то К. о. Φ' отвечает то же самое соотношение $\psi \circ \theta=0$. Обратно, любому соотношению вида

$\psi\circ\theta=0$ отвечает множество вторичных К. о. $\{\Phi\}$, любые две из к-рых отличаются друг от друга на примарную К. о., определенную на ядре К. о. θ.

Более общее понятие вторичной К. о. получается, если исходить из набора $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ с $\theta_i \in H^{m_i}(K(\pi, n); G)$ и соотношения $\sum \Psi_i \circ \theta_i=0$ (см. [3]).

Пример вторичной К. о. Пусть

$$\theta=Sq^2\circ\mathrm{mod}\ 2: H^n(\cdot; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{n+2}(\cdot, \mathbb{Z}_2)$$

и пусть $\varphi \in H^{n+3}(E(\theta); \mathbb{Z}_2)$ — $\mathbb{Z}_2$-образующая. Возникает вторичная К. о. $\alpha: H^n(\cdot; \mathbb{Z}) \to H^{n+3}(\cdot; \mathbb{Z}_2)$, соответствующая соотношению $Sq^2\circ(Sq^2\circ\mathrm{mod}\ 2)=0$. Она позволяет классифицировать отображения $(n+2)$-мерного полиэдра в n-мерную сферу, $n>2$. Решение соответствующей задачи продолжения таково. Пусть Y — $(n+3)$-мерный полиэдр и пусть дано отображение $f: Y^{n+1} \to S^n$, так что имеется элемент $y \in H^n(Y^{n+1})$, $y \in f^*(s)$. Для продолжения f на Y^{n+2} необходимо условие $Sq^2(y \bmod 2)=0$; если f продолжается на Y^{n+2}, то на y определена α. Оказывается, что f можно продолжить на Y тогда и только тогда, когда $0 \in \alpha(y)$. При этом α детектирует отображение $S^{n+2} \to S^{n+1} \to S^n$, являющееся композицией надстроек над отображением Хопфа $S^3 \to S^2$ и задающее образующую группы $\pi_{n+2}(S^n)=\mathbb{Z}_2$.

С помощью вторичных К. о. было дано также первое решение проблемы «нечетного инварианта Хопфа» [7]. Для отображения $f: S^{2n-1} \to S^n$ инвариант Хопфа $H(f) \in \mathbb{Z}$ определяется формулой $u^2=H(f)v$, где $v \in H^{2n}(S^n \cup f e^{2n})=\mathbb{Z}$, $u \in H^n(S^n \cup f e^{2n})=\mathbb{Z}$ — образующие. Нечетность $H(f)$ равносильна условию $Sq^n u_n \neq 0$, где $u_n \in H^n(S^n \cup f e^{2n}; \mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2$. При $n \neq 2^s$ операция Sq^n разложима в классе примарных операций, т. е. $Sq^n=\sum_{t<n} a_t Sq^t$, так что $H(f)$ может быть нечетным лишь при $n=2^s$. Но в классе вторичных операций Sq^{2^s} разложимы при $s \neq 1, 2, 3$, и поэтому $H(f)$ нечетно лишь при $n=2, 4, 8$.

Наряду с вторичными К. о. существуют третичные К. о. и вообще К. о. любого порядка. Примарной операции θ и элементу $\varphi \in H^q(E(\theta); H)$, определяющим вторичную К. о. Φ, отвечает отображение $E(\theta) \to K(H; q)$, индуцирующее из расслоения Серра над $K(H; q)$ расслоение $K(H, q-1) \to E(\Phi) \to E(\theta)$; при этом $E(\Phi)$ наз. пространством когомологической операции Φ. Имея класс когомологий $\gamma \in H^r(E(\Phi); A)$, можно построить третичную К. о. $\Gamma: H^n(X; \pi) \to H^r(X; A)$, определенную на $\mathrm{Ker}\,\Phi$, неопределенность к-рой (при подходящих размерностных ограничениях) есть $\mathrm{Im}(i^*\gamma)$. Этой К. о. отвечает соотношение $\psi\circ\Phi=0$, где ψ — примарная К. о., ${}^1\psi=i^*\gamma$. Индуктивное продолжение этого процесса приводит к определению когомологической операции n-го порядка. Иными словами, для К. о. ξ n-го порядка, пространство к-рой есть $E(\xi)$, и элемента $\lambda \in H^s(E(\xi); C)$ строится К. о. $(n+1)$-го порядка Λ, определенная на $\mathrm{Ker}\,\xi$. При этом пространство $E(\Lambda)$ является пространством расслоения, индуцированного из расслоения Серра над $K(C, s)$ отображением $\lambda: E(\xi) \to K(C, s)$. Построена [12] аксиоматика высших К. о.

Простейшими примерами высших К. о. являются высшие гомоморфизмы Бокштейна. Пусть дана точная последовательность групп

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

и соответствующая точная последовательность

$$\ldots H^n(X) \xrightarrow{p} H^n(X) \xrightarrow{\mathrm{mod}\ p} H^n(X; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X) \longrightarrow \ldots$$

Гомоморфизм $\beta=\mathrm{mod}\ p\circ\delta: H^n(X; \mathbb{Z}_p) \to H^{n+1}(X; \mathbb{Z}_p)$ и есть гомоморфизм Бокштейна; $\beta \in O_S(1; \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$.

Имеет место $\beta\circ\beta=0$; этому соотношению отвечает вторичная К. о. β_2. При этом $\beta\circ\beta_2=0$, так что возникает третичная К. о. β_3. И вообще β_r— это К. о. порядка r, построенная по соотношению $\beta\circ\beta_{r-1}=0$. При этом β_r определен на $\operatorname{Ker}\beta_{r-1}$. Явное описание К. о. β_r выглядит так: пусть $x\in H^n(X;\ \mathbb{Z}_p)$ и пусть c — представляющий его коцикл с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$; равенство $\beta_{r-1}x=0$ означает, что существует целочисленный представитель z коцикла c, кограница δz которого делится на p^r. Тогда $\beta_r x$ — класс когомологий $\operatorname{mod} p$ коцикла $\frac{\delta z}{p^r}$. Таким образом, информация о действии высших К. о. Бокштейна в группах $H^*(X;\ \mathbb{Z}_p)$ позволяет полностью вычислить свободную часть и p-компоненту группы $H^*(X)=H^*(X;\ \mathbb{Z})$.

Каждой частичной К. о. Φ отвечает гомотопически простое пространство $E(\Phi)$ с конечным числом (нетривиальных) гомотопич. групп. Обратно, каждому такому пространству E можно сопоставить К. о. Φ, для к-рой E и $E(\Phi)$ слабо гомотопически эквивалентны, $E\overset{w}{\sim}E(\Phi)$. Напр., если E — пространство с двумя нетривиальными гомотопич. группами $\pi_n(E)=\pi$, $\pi_m(E)=G$, $m>n$, то имеется отображение $E\to K(\pi,\ n)$, индуцирующее изоморфизм $\pi_n(E)\to\pi_n(K(\pi,\ n))$. Это отображение можно превратить в расслоение, слоем к-рого будет $K(G,\ m)$; это расслоение индуцируется из расслоения Серра над $K(G,\ m+1)$ нек-рым отображением $K(\pi,\ n)\to K(G,\ m+1)$, последнее задает К. о. $\theta\in O(n,\ m+1;\ \pi,\ G)$.

Эти соображения позволяют описать слабый гомотопич. тип любого пространства, сопоставив ему набор частичных К. о. $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, наз. его n-ми постниковскими факторами (см. *Постникова системы*). Напр., для сферы S^n, $n>3$, первым постниковским фактором является Sq^2, а вторым — α.

Другим важным типом К. о. являются ф у н к ц и о н а л ь н ы е к о г о м о л о г и ч е с к и е о п е р а ц и и [3]. Для их определения задается отображение $f: Y\to X$ («функция») и К. о. $\theta\in O(n,\ m;\ \pi,\ G)$. При $m\leqslant 2n-2$ θ лежит в образе когомологич. надстройки и является гомоморфизмом групп. Если f — замкнутое вложение (корасслоение) и $j: X\to(X,\ Y)$ — включение, то функциональная К. о. θ_f: $H^n(X;\ \pi)\to H^{m-1}(Y,\ G)$ определяется как частичное многозначное отображение

$$\theta_f: H^n(X;\pi)\xleftarrow{j^*}H^n(X,Y;\pi)\xrightarrow{\theta(X,Y)}H^m(X,Y;\ G)\xleftarrow{\delta}$$
$$\longleftarrow H^{m-1}(Y;\ G);$$

$\theta_f=\delta^{-1}\circ\theta\circ(j^*)^{-1}$. Эта К. о. определена на подгруппе $\operatorname{Ker}f^*\cap\operatorname{Ker}\theta_X$ группы $H^n(X,\pi)$, а ее неопределенность есть подгруппа $\operatorname{Im}({}^1\theta_y)+\operatorname{Im}(f^*)$ группы $H^{n-1}(Y;\ G)$. Конструкция функциональной К. о. естественна по f. П р и м е р: если для отображения $f: Y\to X$ существует такая (примарная) К. о. θ и такой класс когомологий u пространства X, что $\theta_f(u)$ определена и $0\notin\theta_f(u)$, то отображение f существенно. Функциональные и вторичные К. о. связаны между собой формулами Петерсона — Штейна (см. [3]), позволяющими в ряде случаев сводить вычисление вторичных К. о. к вычислению примарных и функциональных К. о. Существуют также функциональные К. о. высшего порядка [6].

Конструкцией, аналогичной по построению и приложениям высшим К. о., является *Масси произведение*.

Понятие К. о. было перенесено и в обобщенные теории когомологий. К. о. типа $(n,\ m)$ в обобщенной теории когомологий h^* наз. естественное по X преобразование $h^n(X)\to h^m(X)$. Эти К. о. образуют группу, изоморфную группе $h^m(M_n)$, где $\{M_k,\ s_k\}$ — Ω-спектр, представляющий теорию h^*. Группа всех стабильных К. о. является (относительно композиции) кольцом A^h, так что $h^*(X)$ — естественный по X A^h-модуль. Понятия частичной и функциональной К. о. также имеют аналоги в обобщенных теориях когомологий.

С помощью частичных К. о. в обычной теории когомологий можно решить в принципе любую гомотопич. задачу, однако практич. применение К. о. порядка $n>3$ весьма трудоемко. В то же время часто бывает, что задача, требующая для своего решения обычных К. о. высшего порядка, может быть решена применением примарных К. о. в подходяще выбранной обобщенной теории когомологий. Напр., проблема «инварианта Хопфа» легко решается с помощью примарных когомологич. операций Адамса ψ^k в K-теории [10]. Эти К. о., введенные [8] для решения задачи о векторных полях на сферах, явились первым примером К. о. в обобщенной теории когомологий.

Алгебра A^h вычислена [4] для $h=U^*$ — теории унитарных *кобордизмов* и использована при построении спектральной последовательности типа Адамса, начальный член к-рой есть когомологии алгебры A^U. Информация о действии кольца A^h в группах $h^*(X)$ оказывается полезной при вычислении спектральной последовательности Атья — Хирцебруха в теории h^* [11].

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Матем. сб.», 1941, т. 9, с. 331—63; [2] Steenrod N., «Ann. Math.», 1947, v. 48, p. 290—320; [3] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970; [4] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 4, с. 855—951; [5] Стинрод Н., «Математика», 1958, т. 2, № 6, с. 11—48; [6] Петерсон Ф., там же, 1958, т. 2, № 2, с. 47—60; [7] Адамс Дж., там же, 1961, т. 5, № 4, с. 3—86; [8] его же, там же, 1963, т. 7, № 6, с. 49—79; [9] Картан А., там же, 1959, т. 3, № 5, с. 3—50; т. 3, № 6, с. 3—45; [10] Атья М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [11] Бухштабер В. М., «Матем. сб.», 1969, т. 78, с. 307—20; 1974, т. 83, с. 61—76; [12] Maunder C., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1963, v. 13, p. 125—154.

Ю. Б. Рудяк.

КОГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — см. *Гомологическая последовательность.*

КОГОМОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ — 1) К. р. ($\dim_G X$) топологического пространства X относительно группы коэффициентов G — максимальное целое число p, для к-рого в X найдутся замкнутые подмножества A такие, что когомологии $H^p(X, A; G)$ отличны от нуля. Аналогично определяется *гомологическая размерность* $h\dim_G X$. Конечная лебегова размерность совпадает с $\dim_G$ (с $h\dim_G$), если G — целые числа (приведенные по модулю 1 действительные числа). В евклидовом пространстве $X\subset\mathbb{R}^n$ равенство $\dim_G X=p$ равносильно тому, что X локально зацепляется $(n-p-1)$-мерными циклами (с коэффициентами в G). Для паракомпактных пространств X неравенство $\dim_G X\leqslant p$ равносильно существованию мягких резольвент для G длины p. Поскольку мягкие пучки ацикличны, этим устанавливается связь с общим определением размерности в гомологич. алгебре, напр. инъективная (проективная) размерности модуля $\leqslant p$, если он обладает инъективными (проективными) резольвентами длины p; глобальная размерность кольца есть максимум инъективных (проективных) размерностей модулей над кольцом и является аналогом лебеговой размерности X.

Лит.: [1] Александров П. С., «Ann. Math.», 1929, v. 30, p. 101—87; [2] его же, «Math. Ann.», 1932, Bd 106, S. 161—238; [3] его же, Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975; [4] Харлап А. Э., «Матем. сб.», 1975, т. 96, № 3, с. 347—73; [5] Кузьминов В. И., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, № 5, с. 3—49; [6] Bredon G. E., Sheaf theory, N. Y., 1967; [7] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960. *Е. Г. Скляренко.*

2) К. р. схемы — аналог понятия когомологической размерности топологич. пространства для алгебраич. многообразия или схемы с выбранной теорией когомологий на них. Пусть X — алгебраич. многообразие или нётерова схема размерности n. К. р. схемы X наз. целое число $\mathrm{cd}(X)$, равное нижней грани в тех i,

для к-рых $H^j(X, \mathcal{F})=0$ для всех абелевых пучков на топологическом пространстве X при $j>i$. Справедливо неравенство

$$\mathrm{cd}(X) \leqslant n.$$

Когерентной когомологической размерностью схемы X наз. число $\mathrm{cohcd}(X)$, равное нижней грани тех i, для к-рых $H^j(X, \mathcal{F})=0$ для всех когерентных алгебраич. пучков $\mathcal{F}$ на X при $j>i$. В силу определения $\mathrm{cohcd}(X) \leqslant \mathrm{cd}(X)$. По теореме Серра $\mathrm{cohcd}(X)=0$ тогда и только тогда, когда X — аффинная схема. С другой стороны, если X — алгебраич. многообразие над полем k, то $\mathrm{cohcd}(X)=n$ тогда и только тогда, когда X собственно над k (теорема Лихтенбаума) (см. [3]).

Пусть X — собственная схема над полем k, Y — ее замкнутая подсхема коразмерности d и $U=X-Y$. Тогда имеют место следующие утверждения ([2] — [4]).

Если Y — теоретико-множественное полное пересечение обильных дивизоров на X, то

$$\mathrm{cohcd}(U) \leqslant d-1;$$

если X — проективное многообразие Коэна — Маколея (напр., неособое проективное многообразие) и Y нульмерно, то $\mathrm{cohcd}(U)=n-1$. Условие $\mathrm{cohcd}(U) \leqslant n-2$ равносильно тому, что Y связно. Если $X=P^n$ — проективное пространство и Y связно и размерности $\geqslant 1$, то

$$\mathrm{cohcd}(U) < n-1.$$

Если X — алгебраич. комплексное многообразие, то можно рассматривать гомологич. размерность соответствующего топологич. пространства $X(C)$. В общем случае, когда X — нётерова схема, аналогом гомологич. размерности является понятие этальной когомологической размерности схемы X. Точнее, пусть X_{et} — этальная топология Гротендика схемы X и l — простое число. Когомологической l-размерностью схемы X (или этальной К. р.) наз. число $\mathrm{cd}_l(X)$, равное нижней грани тех i, для к-рых $H^j(X_{et}, \mathcal{F})=0$ для всех l-периодических абелевых пучков $\mathcal{F}$ на X_{et} при $j>i$. Если $X=\mathrm{Spec}\, A$ — аффинная схема, то $\mathrm{cd}_l(\mathrm{Spec}\, A)$ наз. также К. р. кольца A. В частности, если A — поле, то понятие $\mathrm{cd}_l(A)$ совпадает с понятием К. р. поля, к-рое изучается в теории *Галуа когомологий*.

Если X — алгебраич. многообразие размерности n над полем k и $l \neq \mathrm{char}\, k$, то $\mathrm{cd}_l(X) \leqslant 2n + cd_l(k)$. В частности, если k — сепарабельно замкнутое поле, то $\mathrm{cd}_l(X) \leqslant 2n$. Если X — аффинное алгебраич. многообразие над сепарабельно замкнутым полем k, то $\mathrm{cd}_l(X) \leqslant \dim X$.

Пусть k — поле конечной характеристики p, тогда для любой нётеровой схемы X над полем k имеет место неравенство

$$\mathrm{cd}_p(X) \leqslant \mathrm{cohcd}(X)+1.$$

В частности, для любого нётерова коммутативного кольца A

$$\mathrm{cd}_p(A) \leqslant 1.$$

Если X — квазипроективное алгебраич. многообразие над сепарабельно замкнутым полем k, то $\mathrm{cd}_p(X) \leqslant \dim X$, где p — характеристика k.

Лит.: [1] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [2] Hartshorne R., «Ann. Math.», 1968, v. 88, p. 403—50; [3] его же, Ample subvarieties of algebraic varieties, В., 1970; [4] его же, «Compositio math.», 1971, t. 23, № 3, p. 257—64; [5] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, В.— Hdlb.— N. Y., t. 2, 1972; t. 3, 1973. *И. В. Долгачев.*

КОГОМОЛОГИЧЕСКИЙ ФУНКТОР — см. *Гомологический функтор.*

КОГОМОЛОГИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — см. *Гомологическое многообразие.*

КОГОМОТОПИЧЕСКАЯ ГРУППА — одно из обобщений одномерной группы когомологий, понятие, в нек-ром смысле дуальное понятию *гомотопической группы*. Пусть $\pi^n(X)=[X, S^n]$ — множество гомотопич. классов непрерывных отображений пунктированного топологич. пространства X в пунктированную сферу. Множество $\pi^n(X)$ не всегда имеет естественную структуру группы (это так лишь при $n=1, 3, 7$, поскольку тогда S^n является *Н-пространством*). Группа $\pi^1(X)$ совпадает с $H^1(X, \mathbb{Z})$.

Если X — *клеточное разбиение* размерности, не превосходящей $2n-2$, то на множестве $\pi^n(X)$ следующим образом задается структура группы. Для $[\alpha], [\beta] \in \pi^n(X)$ рассматривается отображение

$$(\alpha \times \beta) \circ \Delta : X \longrightarrow S^n \times S^n,$$

здесь $\Delta : X \to X \times X$ — диагональное отображение, $\alpha, \beta : X \to S^n$ — представители классов $[\alpha]$, $[\beta]$. Ввиду ограничения на размерность X существует единственный гомотопич. класс отображений $f : X \to S^n \vee S^n$ (здесь $S^n \vee S^n$ — букет пунктированных сфер), композиция к-рого с естественным включением $S^n \vee S^n \subset S^n \times S^n$ совпадает с гомотопич. классом отображения $(\alpha \times \beta) \circ \Delta$. Гомотопич. класс $[\theta \circ f] \in \pi^n(X)$ отображения $\theta \circ f : X \to S^n$, где $\theta : S^n \vee S^n \to S^n$ — складывающее отображение, полагается равным $[\alpha]+[\beta] \in \pi^n(X)$. Относительно описанной операции множество $\pi^n(X)$ представляет собой абелеву группу, поэтому часто функтор π^n рассматривается как функтор, определенный лишь на категории клеточных разбиений размерности, не превосходящей $2n-2$, со значениями в категории абелевых групп. Для клеточных разбиений X размерности, меньшей n, $\pi^n(X)=0$. Таким образом, функтор π^n представляет интерес в размерностях от n до $2n-2$, т. е. в так наз. стабильных размерностях.

Если $\dim X \leq 2n-2$, то $\pi^n(X) \approx \pi^{n+1}(SX)$, где SX — *надстройка* над X. Этот изоморфизм задается функтором надстройки: $[X, S^n] \to [SX, SS^n]=[SX, S^{n+1}]$. Если X — произвольное конечномерное клеточное разбиение, то при достаточно большом N множество $\pi^{n+N}(S^N X)$ имеет структуру группы (при $N \geq \dim X - 2n+2$ выполнено соотношение $\dim(S^N X)=N+\dim X \leq 2(n+N)-2$. Группа $\pi^n_S(X)=\pi^{n+N}(S^N X)$ при $N \geq \dim X-2n+2$ наз. стабильной когомотопической группой клеточного разбиения, она определена для любого конечномерного клеточного разбиения. Группы $\pi^n_S(X)$ определены при всех целых n (а не только при положительных). Если в качестве X взять две точки (одна из к-рых отмечена), то $\pi^n_S(X)=0$ при $n>0$, $\pi^0_S(X)=\mathbb{Z}$, а $\pi^n_S(X)=\pi_{N-n}(S^N)$ — стабильные гомотопич. группы сфер при $n<0$.

Если (X, A) — пара клеточных разбиений размерности m, то при $m \leq 2n-2$ определена относительная когомотопическая группа $\pi^n(X, A)=\pi^n(X/A)$. Имеет место точная последовательность абелевых групп

$$\pi^i(X) \longrightarrow \pi^i(A) \longrightarrow \pi^{i+1}(X, A) \longrightarrow \pi^{i+1}(X) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \pi^{i+1}(A) \longrightarrow \pi^{i+2}(X, A) \longrightarrow \ldots,$$

продолжающаяся вправо неограниченно, однако, начиная с нек-рого места, все группы будут нулевыми: $\pi^i(X, A)=\pi^i(X)=\pi^i(A)=0$ при $i>m$. Влево эта последовательность продолжается лишь до тех значений i, при к-рых $m \leq 2i-2$. В этой последовательности гомоморфизмы $\pi^i(X) \to \pi^i(A)$ и $\pi^i(X/A) \to \pi^i(X)$ индуцированы естественными отображениями $A \subset X$ и $X \to X/A$. Гомоморфизм $\pi^i(A) \to \pi^{i+1}(X/A)$ устроен следующим образом. Для класса $[f] \in \pi^i(A)=[A, S^i]$ и для его представителя $f : A \to S^i$ выбирается продолжение

$F: X \to D^{i+1}$ отображения f, заданного на подпространстве $A \subset X$ со значениями в $S^i \subset D^{i+1}$. Отображение F индуцирует отображение $X/A \to D^{i+1}/S^i = S^{i+1}$, гомотопич. класс к-рого (элемент группы $\pi^{i+1}(X, A)$) ставится в соответствие с классом $[f] \in \pi^i(A)$.

Если (X, A) — пара пунктированных клеточных разбиений конечной размерности, то для стабильных К. г. имеет место точная последовательность

$$\ldots \to \pi_S^i(X) \to \pi_S^i(A) \to \pi_S^{i+1}(X, A) \to \pi_S^{i+1}(X) \to \ldots,$$

продолжающаяся неограниченно в обе стороны. Это обстоятельство позволяет превратить стабильные К. г. в обобщенную теорию когомологий. Для произвольного (непунктированного) конечномерного клеточного разбиения X пусть $\pi_S^i(X) = \pi_S^i(X \cup x_0, x_0)$, где $(X \cup x_0, x_0)$ — пунктированное клеточное разбиение, полученное из X несвязным присоединением отмеченной точки. Функтор π_S^*, определенный на категории конечномерных клеточных разбиений, задает обобщенную теорию когомологий, если положить

$$\pi_S^*(X, A) = \tilde{\pi}_S^*(X/A) = \mathrm{Ker}\,[\pi_S^*(X/A) \longrightarrow \pi_S^*(pt)].$$

Значение на точке этой теории совпадает со стабильными гомотопич. группами сфер.

К. г., так же как и гомотопические, не могут быть явно вычислены даже в самых простых случаях, и это сильно ограничивает возможность практич. применения описанных выше функторов.

Лит.: [1] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964; [2] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971. *А. Ф. Харшиладзе.*

КОД — конечное или счетное множество *слов* в нек-ром *алфавите*, изучаемое в теории *кодирования и декодирования*. См. *Код с исправлением арифметических ошибок*, *Код с исправлением выпадений и вставок*, *Код с исправлением ошибок*.

КОД С ИСПРАВЛЕНИЕМ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОШИБОК, код, исправляющий арифметические ошибки,— код, предназначенный для контроля работы сумматора. При сложении чисел, представленных в двоичной системе счисления, одиночный сбой в работе сумматора приводит, как правило, к изменению результата на нек-рую степень числа два. В связи с этим в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ вводится понятие (одиночной) арифметической ошибки как преобразования числа N в число $N' = N \pm 2^i$, $i = 0, 1, \ldots$. Функция $\rho(N_1, N_2)$ на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, определяемая как минимальное число арифметич. ошибок, преобразующих N_1 в N_2, является метрикой. Произвольное конечное подмножество (код) $K \subset \mathbb{Z}$ характеризуется расстоянием

$$\rho(K) = \min \rho(N_1, N_2),$$

где минимум берется по всем различным $N_1, N_2 \in K$. Последовательности из t или менее арифметич. ошибок преобразуют любое число N в метрический шар радиуса t с центром в N. Поэтому если метрические шары радиуса t, описанные вокруг любых двух чисел кода, не пересекаются (т. е. расстояние кода больше $2t$), то код наз. кодом, исправляющим t арифметических ошибок. Если же метрический шар радиуса s, описанный вокруг любого числа кода, не содержит других чисел кода (т. е. расстояние кода больше s), то код наз. кодом, обнаруживающим s арифметических ошибок. Метрика ρ допускает другое описание:

$$\rho(N_1, N_2) = w(N_1 - N_2),$$

где $w(N)$ — (арифметический) вес числа N, равный минимально возможному числу ненулевых коэффициентов в представлениях

$$N=\sum_{i=0}^{k} N_i 2^i, \quad N_i=0, \ \pm 1, \ k=0, \ 1, \ \ldots \qquad (*)$$

Для каждого числа N существует единственное представление (*), в к-ром $N_k \neq 0$ и $N_i N_{i+1}=0$, $i=0, 1, \ldots, k-1$, число ненулевых коэффициентов в этом представлении равно $w(N)$. Напр., $23=2^4+2^2+2^1+2^0=$ $=2^5-2^3-2^0$ и $w(23)=3$. Так как $\rho(N_1+N, N_2+N)=$ $=\rho(N_1, N_2)$ для любых N_1, N_2, $N \in \mathbb{Z}$, то ограничиваются рассмотрением кодов, не содержащих отрицательных чисел. Длиной кода K наз. величина $[\log_2 B(K)]+1$, где $B(K)$ — наибольшее число кода K. Произвольному числу B кода длины n однозначно соответствует слово $\beta(B)=b_{n-1}\ldots b_1 b_0$ в алфавите $\{0, 1\}$ такое, что $B=\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$. Если код $K \subset \mathbb{Z}$ исправляет t арифметич. ошибок, то код $\{\beta(B) : B \in K\}$ исправляет t ошибок (типа замещения) в силу того, что $d(\beta(B_1), \beta(B_2)) \geqslant \rho(B_1, B_2)$, где $d(\cdot, \cdot)$ — метрика Хемминга (см. *Код с исправлением ошибок*). При исследовании задачи контроля сумматора обычно рассматривают кодирования $f:\{0, 1, \ldots, M-1\} \to \mathbb{Z}$ (см. *Кодирование и декодирование*), обладающие свойством $f(i+j)=f(i)+f(j)$ при $i+j<M$ (что равносильно $f(i)=A \cdot i$, где $A=f(1)$). В этом случае операция кодирования состоит в умножении кодируемого числа на A, а обнаружение ошибок в работе сумматора заключается в проверке делимости на A результата сложения. Код $K_{A,M}=\{0, A, \ldots, A(M-1)\}$ наз. A-кодом мощности M. Расстояние A-кода равно минимальному $w(A \cdot i)$, $i=1, \ldots, M-1$. Напр., расстояние 3-кода произвольной мощности равно 2, код обнаруживает одиночные арифметич. ошибки и часто применяется в ЭВМ (в виде контроля по модулю 3). Наиболее исследованы (циклические и негациклические) A-коды мощности $M=2^n \mp 1/A$, характеризующиеся тем свойством, что вместе с числом $B=\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$, $b_i=0, 1$, число $B'=$ $=\pm b_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1} b_i 2^i$ также принадлежит коду. Такие коды, называемые (n, A)-кодами, удобно рассматривать как подмножества метрического пространства $\mathbb{N}_m=\{0, 1, \ldots, m-1\}$, $m=2^n \mp 1$ с метрикой $\rho_m(x, y)=w_m(x-y)=\min\{w(x-y), \quad w(x-y-m)\}$. Расстояния (n, A)-кода в метриках ρ и ρ_m равны. С каждым (n, A)-кодом связан (n, A^*)-код, где $AA^*=m$, называемый двойственным. Если 2 или -2 — первообразный корень по модулю простого числа p, то $((p-1)/2, p)$-код исправляет одиночные арифметич. ошибки и является совершенным в метрике ρ_m, т. е. метрические шары радиуса 1, описанные вокруг чисел кода, не только попарно не пересекаются, но и заполняют все $\mathbb{N}_m$. В двойственном коде все расстояния между различными числами кода равны$]\,(p+1)/6\,[$. Перечисленные результаты для кодов имеют аналоги в классе двоичных линейных циклических кодов, исправляющих ошибки. В то же время не известны арифметич. аналоги БЧХ-кодов, а также не известны верхние границы мощности кодов с заданными длиной и расстоянием, аналогичные границам для кодов, исправляющих ошибки. Еще большей спецификой обладают коды, исправляющие q-ичные ($q>2$) арифметич. ошибки (q-ичной арифметической ошибкой наз. преобразование числа N в число $N'=N \pm aq^i$, $a=1, \ldots, q-1$; $i=0, 1, \ldots$), интерес к к-рым возрастает с развитием вычислительной техники. Так, в отличие от кодов, исправляющих ошибки при $q=2^l$ ($l>1$), не существует совершенных A-кодов, исправляющих одиночные q-ичные арифметич. ошибки, а при $q=6$ известны примеры таких кодов. Условия существования совершенных A-кодов имеют теоретико-числовой характер и связаны с изучением законов взаимности в числовых полях.

Лит.: [1] Дадаев Ю. Г., Арифметические коды, исправляющие ошибки, М., 1969; [2] Питерсон У., Уэлдон Э., Коды, исправляющие ошибки, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; [3] Massey J. L., Garcia O. N., в кн.: Advances in Information Systems Science, v. 4, N. Y.— L., 1972, p. 273—326; [4] Бояринов И. М., Кабатянский Г. А., «Проблемы передачи информации», 1976, т. 12, в. 1, с. 16—23.

Г. А. Кабатянский.

КОД С ИСПРАВЛЕНИЕМ ВЫПАДЕНИЙ И ВСТАВОК — код, предназначенный для исправления ошибок двух типов, встречающихся при передаче и перфорации информации. Выпадением буквы в слове $\beta=b_1\ldots b_n$ длины n в нек-ром алфавите B наз. преобразование слова β в слово $\beta'=b_1\ldots b_{i-1}b_{i+1}\ldots b_n$ длины $n-1$, $1\leqslant i\leqslant n$. Для числа $N_s(\beta)$ слов, получаемых из слова β выпадениями s букв, справедливы следующие оценки $C^s_{\tau(\beta)-s+1}\leqslant N_s(\beta)\leqslant C^s_{\tau(\beta)+s-1}$, где $\tau(\beta)$ — число серий слова β (серией слова $\beta=b_1\ldots b_n$ наз. слово $b_{i+1}b_{i+2}\ldots b_j$, $j\geqslant i+1$, такое, что 1) $b_{i+1}=\ldots=b_j$, 2) если $i\geqslant 1$, то $b_i\neq b_{i+1}$, 3) если $j<n$, то $b_{j+1}\neq b_j$). В частности, $N_1(\beta)=\tau(\beta)$. Вставкой буквы в слове $\beta=b_1\ldots b_n$ наз. преобразование слова β в слово $\beta'=b_1\ldots b_ibb_{i+1}\ldots b_n$ длины $n+1$, где $b\in B$ и $0\leqslant i\leqslant n$. Число слов, получаемых из произвольного слова β длины n вставками s букв алфавита B, равно $\sum_{j=0}^{s} C^j_{n+s}(r-1)^j$, где r — число букв алфавита B. Множество K слов в алфавите B наз. кодом с исправлением s выпадений (вставок, выпадений или вставок), если никакое слово в алфавите B не может быть получено из двух различных слов из K в результате s или менее выпадений (вставок, выпадений или вставок) букв в каждом из них. Функция, определенная на парах (β_1, β_2) слов в алфавите B и равная минимальному числу выпадений и вставок букв, преобразующих β_1 в β_2, является метрикой. Множество K слов в алфавите B является кодом с исправлением s выпадений (вставок, выпадений или вставок) тогда и только тогда, когда расстояние между любыми двумя различными словами из K больше $2s$, так что указанные три определения кодов эквивалентны. Примером кода с исправлением одного выпадения или одной вставки является множество слов $\{\beta=b_1\ldots b_n\}$ длины n в алфавите $B=\{0, 1\}$, для к-рых $\sum_{i=1}^{n} ib_i\equiv 0 \pmod{n+1}$. Число слов в этом коде равно $\frac{1}{2(n+1)}\sum\varphi(d)\,2^{(n+1)/d}$, где суммирование производится по всем нечетным делителям d числа $n+1$ и $\varphi(d)$ — функция Эйлера, и является асимптотически максимальным при $n\to\infty$.

В. И. Левенштейн.

КОД С ИСПРАВЛЕНИЕМ ОШИБОК, код, корректирующий ошибки,— множество сообщений, предназначенных для передачи по *каналу связи* с шумами, обладающее тем свойством, что окрестность ошибок каждого сообщения (т. е. совокупность искаженных вариантов этого сообщения) не пересекается с окрестностями ошибок других сообщений. Это свойство К. с и. о. позволяет правильно корректировать ошибки (т. е. правильно восстанавливать переданное сообщение) в тех (полученных на выходе канала) искаженных сообщениях, к-рые принадлежат своей окрестности ошибок. Элементы К. с и. о. используются при кодировании последовательностей информационных символов, вырабатываемых *источником сообщений*. Кодирование заключается в представлении информационной последовательности в специальной форме и введении в нее дополнительной информации (*избыточности*). Избыточность обычно вводят путем добавления в сообщение тем или иным способом дополнительных символов. Напр., последовательность символов разбивается на блоки фиксированной длины k, а затем независимо один от другого блоки заменяются другими блоками большей длины n, к-рые являются элементами так наз. блокового К. с и. о. Известны [1] и другие способы введения избыточности и связанные с ними К. с и. о.

Элементы блокового К. с и. о. выбираются из нек-рого множества n-мерных векторов L^n, снабженного метрикой $\lambda(,)$, а их окрестности ошибок задаются в виде шара с центром в элементе кода. Радиус этого шара определяет корректирующую способность блокового кода. Метрика $\lambda(,)$ зависит от характера ошибок, для исправления к-рых предназначен код. Дальнейшее изложение касается только блоковых К. с и. о. как наиболее распространенных.

Для того чтобы иметь возможность передать максимальное количество сообщений по каналу связи, необходимо использовать коды с максимальным числом элементов при заданной корректирующей способности. Построение таких кодов является одной из основных задач теории К. с и. о. Эта задача достаточно далеко продвинута только для нек-рых рассматриваемых ниже конечных множеств L^n. В то же время как для приложений, так и для теории интересны коды на нек-рых бесконечных множествах, напр. на сфере в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

При практическом использовании К. с и. о. возникают задачи отображения информации, предназначенной для передачи в множество элементов К. с и. о. и нахождения по принятому элементу x' переданного элемента кода x. Первая задача наз. *задачей кодирования*, вторая — *задачей декодирования*. Сложность кодирования и декодирования в значительной мере определяется свойствами используемого К. с и.о. Это обстоятельство приводит к изучению относительно узких классов кодов, как, например, рассматриваемых ниже двоичных линейных кодов.

Наиболее широко исследовались *блоковые r-ичные коды* в метрике Хемминга, ввиду того что они находят многочисленные применения, а методы их построения связаны с известными ранее математическими структурами. Элементами этих кодов являются нек-рые элементы множества B_r^n, состоящего из всех векторов длины n, координаты к-рых принадлежат множеству из r элементов. *Расстоянием Хемминга* $d(x, y)$ между векторами x, y из B_r^n наз. число их несовпадающих координат. Окрестность ошибок $U_t(x)$ кратности t (t — целое) вектора x состоит из всех векторов из B_r^n, отличающихся от x не более чем в r координатах, т. е. $U_t(x)$ — шар в метрике $d(,)$ радиуса t с центром в точке x. В частности, $U_1(x)$ состоит из $(r-1)n+1$ векторов. Для произвольного множества $K \subset B_r^n$ функция $d(K) = \min\limits_{x,\, y \in K,\, x \neq y} d(x, y)$ наз. *кодовым расстоянием* r-ичного кода K. Код K является К. с и. о. кратности t, если $d(K) \geqslant 2t+1$. При выполнении последнего неравенства каждая окрестность ошибок $U_t(x)$, $x \in K$, не пересекается ни с какой другой окрестностью ошибок кратности t вектора y из K.

Значительный прогресс в изучении r-ичных кодов получен для случая, когда r является степенью простого числа. В этом случае в качестве множества координат берут конечное поле $GF(q)$ из q элементов и используют алгебраические свойства этого понятия. Ниже предполагается, что координатами элементов множества B_q^n являются элементы поля $GF(q)$. Множество B_q^n является линейным пространством над полем $GF(q)$. Если векторы кода K образуют линейное подпространство пространства B_q^n, то код наз. линейным. Линейный код K может быть задан как своим базисом, так и базисом линейного пространства, двойственного к K. Последний способ более распространен. Матрица A, строками к-рой служат базисные векторы пространства, двойственного к K, наз. проверочной матрицей K. Для векторов $x \in K$ справедливо соотношение: $xA^T=0$, где A^T — транспонированная матрица A. Далее n — длина кода, k — размерность линейного кода и d — кодовое расстояние. Код над B_2^n наз. двоичным кодом.

Для оценки качества конкретных кодов изучают поведение функции $m(n, d)$, равной максимальному числу векторов двоичного кода длины n с кодовым расстоянием d. Относительно хорошо функция $m(n, d)$ изучена при больших d, $2d \geqslant n$, и малых d, $d=\mathrm{const}$, $n \to \infty$. В первом случае величина $m(n, d)$ не превосходит $2n$ при $2d=n$ и $2d/(2d-n)$ при $2d-n>0$, а во втором — равна по порядку $n^{-t}2^n$ при $d=2t+1$. Если $d=3$, $n=2^l-1$, то $m(n, 3)=2^n/(n+1)$.

Код, на к-ром достигается последнее равенство, носит название двоичного кода Хемминга. Двоичный код Хемминга, корректирующий ошибки кратности $t=1$, обладает следующим свойством: шары радиуса $t=1$ с центрами в точках кода не пересекаются и в то же время заполняют все множество B_2^n. Подобные коды наз. совершенными. Известно, что, кроме кодов Хемминга, существует еще лишь конечное число нетривиальных двоичных совершенных кодов.

В случае $n \to \infty$, $d/n \to \delta$, $0<\delta<1/2$, изучают функцию

$$\overline{\lim} \log_2 \frac{m(n, d)}{n} = R(\delta)$$

(логарифмич. асимптотику $m(n, d)$), называемую скоростью передачи максимальным кодом с относительным кодовым расстоянием δ. Для скорости $R(\delta)$ известны существенно различающиеся верхние и нижние оценки. Нижняя оценка (оценка Варшамова — Гилберта) имеет вид

$$R(\delta) \geqslant 1-H(\delta), \tag{*}$$

где

$$H(\delta)=\delta \log_2 \frac{1}{\delta} + (1-\delta) \log_2 \frac{1}{1-\delta},$$

и гарантирует существование кодов с указанными параметрами. Коды с параметрами, лежащими на границе (*), к настоящему времени (1978) могут быть построены только методом перебора. Существенно новые верхние оценки получены в [6], [7]. Весьма правдоподобна гипотеза, по к-рой $R(\delta)=1-H(\delta)$.

Далее рассматриваются конструктивные методы (т. е. методы, требующие для своей реализации относительно небольшого числа операций) построения К. с и. о. К важнейшим конструктивным кодам относятся: коды Рида — Соломона (РС-коды), коды Боуза — Чоудхури — Хоквингема (БЧХ-коды) и коды Рида — Маллера (РМ-коды). Перечисленные коды являются линейными. Отправной конструкцией для построения первых двух служит матрица A_r с элементами из $GF(q)$:

$$A_r = \left\| \begin{matrix} 1 & \ldots & \alpha^j & \ldots & \alpha^{q-2} \\ 1 & \ldots & \alpha^{2j} & \ldots & \alpha^{2(q-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \ldots & \alpha^{(r+1)j} & \ldots & \alpha^{(r-1)(q-2)} \end{matrix} \right\|,$$

где α — первообразный корень $GF(q)$. Матрица A_r является проверочной матрицей РС-кода C_r над $GF(q)$, к-рый имеет следующие параметры: $n=q-1$, $k=q-r$, $d=r$. Кодовое расстояние кода C_r является максимальным среди всех линейных кодов длины $q-1$ и размерности $q-r$. Двоичный БЧХ-код H_r состоит из всех векторов РС-кода C_r над $GF(2^l)$, координаты к-рых принадлежат полю $GF(2)$, т. е. $H_r=C_r \cap B_2^n$. БЧХ-код H_r при $r=2t+1$ имеет следующие параметры: $n=2^l-1$, $k \geqslant n-lt$, $d \geqslant 2t+1$. Упомянутый выше код Хемминга совпадает с БЧХ-кодом H_3. Если $t<2^{[(l+1)/2]}$($[x]$ — целая часть x), то размерность кода H_{2t+1} равна $n-lt$. БЧХ-код является ц и к л и ч е с к и м, т. е. обладает тем свойством, что вместе с вектором x содержит все его циклич. сдвиги. Число векторов БЧХ-кодов в случае $n \to \infty$, $r=\mathrm{const}$ совпадает по порядку с мощностью наилучшего кода $m(n, r)$.

Двоичный РМ-код определяется как множество двоичных векторов вида $(f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n))$, где $n=2^l$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$— всевозможные двоичные векторы длины l и $f(x)$ пробегает множество всех функций *алгебры логики*, представимых в виде многочлена над $GF(2)$ степени не выше r от l двоичных переменных. РМ-код имеет следующие параметры: $n=2^l$, $k=\sum_{l=0}^{r} C_l^j$, $d=2^{l-r}$.

Скорость передачи $R(K)$ двоичного кода K длины n с числом векторов m определяется как

$$R(K)=\frac{\log_2 m}{n}.$$

Если K — линейный код, то $R(K)=k/n$. Скорость передачи перечисленных выше конструктивных кодов при $n \to \infty$, $d/n \to \delta$, $\delta>0$, стремится к 0. Известны конструктивные коды со скоростью передачи большей нуля при $n \to \infty$, $d/n \to \delta$, $1/2>\delta>0$, но меньшей скорости передачи кодов, существование к-рых устанавливает граница (*).

При практическом использовании К. с и. о. кратности t для коррекции ошибок канала связи необходимо устройство (д е к о д е р), к-рое по искаженному вектору $x' \in U_t(x)$ указывает переданный кодовый вектор x. При этом предпочтительно использовать такие К. с и. о., для к-рых декодер имеет небольшую сложность. Под с л о ж н о с т ь ю д е к о д е р а двоичного кода K с кодовым расстоянием $2t+1$ понимается, напр., минимальное число функциональных элементов, к-рое необходимо для реализации булева оператора $F(x')=x$, $x' \in U_t(x)$, $x \in K$. Малую сложность декодера имеют рассмотренные конструктивные коды. Кроме того, известны другие К. с и. о. со скоростью передачи, не стремящейся к 0 при $n \to \infty$, $d/n \to \delta$, $\delta>0$, и малой сложностью декодера. К таким кодам относятся, напр., каскадные коды и коды с малой плотностью проверок на четность. К а с к а д н ы й к о д в простейшем случае представляет собой итерацию РС-кода над полем $GF(2^l)$ и двоичного кода длины n_1 размерности l с кодовым расстоянием d_1. С помощью какого-либо линейного отображения устанавливается взаимно однозначное соответствие между элементами поля $GF(2^l)$ и векторами двоичного кода. Затем координаты РС-кода заменяются соответствующими векторами двоичного кода. В результате получается двоичный линейный каскадный код с параметрами $n=n_1(2^l-1)$, $k=l(2^l-r)$, $d \geqslant r_1$. Лучшие результаты достигаются, если для замены различных разрядов РС-кода использовать различные двоичные коды. Таким способом могут быть получены коды длины n, исправляющие с помощью декодера со сложностью, равной по порядку $n \log n$, фиксированную долю от n ошибок. Ансамбль д в о и ч н ы х к о д о в с м а л о й п л о т н о с т ь ю п р о в е р о к н а ч е т н о с т ь определяется ансамблем проверочных матриц $\{A\}$, состоящим из двоичных матриц нек-рого вида, размера $n \times r$, к-рые содержат в каждом столбце и каждой строке соответственно l и h единиц, $4<l<h$. При фиксированных l и h и $n \to \infty$ типичный код длины n ансамбля

с помощью декодера со сложностью, по порядку равной $n \log n$, может исправлять фиксированную долю от n ошибок. Скорость передачи как каскадных, так и кодов с малой плотностью проверок лежит ниже оценки (*).

Достаточно широко исследовались коды на множествах B_q^n в метриках, отличных от метрики Хемминга. Направление и результаты этих исследований во многом сходны с соответствующими результатами для метрики Хемминга. В частности, рассматривались коды в метриках, связанных с синхронизационными ошибками, с ошибками в арифметич. устройствах ЭВМ (арифметические коды), с пачками ошибок, с несимметричными ошибками, с ошибками в непрерывном канале связи. Напр., в последнем случае множеством L^n является сфера единичного радиуса S^n в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат, а окрестностью ошибок $U_\varphi(x)$, $x \in S^n$,— поверхность, высекаемая из S^{n-1} круговым конусом с полууглом φ и с осью, проходящей через точки 0 и x. Следует также заметить, что коды в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ в несколько иной трактовке рассматривались, начиная с конца 19 в., в геометрии.

Развитие теории К. с и. о. стимулировалось работами К. Шеннона (C. Shannon) по теории информации, в к-рых была показана принципиальная возможность передачи по каналу связи с шумами информации со скоростью меньшей пропускной способности канала и произвольной малой ошибкой. Первоначально теория К. с и. о. удовлетворяла потребности техники связи в математических конструкциях, обеспечивающих надежную передачу информации при ограничениях на число и вид ошибок в сообщении. Затем результаты и методы теории К. с и. о. нашли применение в других областях. В частности, в математике этими методами удалось получить наилучшие (к 1978) оценки плотности укладки шаров в евклидовом пространстве, получить значительное продвижение при оценке сложности тупиковых дизъюнктивных форм для почти всех функций алгебры логики, построить нек-рые новые объекты в комбинаторике, построить самокорректирующиеся схемы из функциональных элементов и т. д.

Лит.: [1] Питерсон У., Уэлдон Э., Коды, исправляющие ошибки, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; [2] Берлекэмп Э., Алгебраическая теория кодирования, пер. с англ., М., 1971; [3] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., 1974; [4] Блох Э. Л., Зяблов В. В., Обобщенные каскадные коды, М., 1976; [5] Колесник В. Д., Мирончиков Е. Т., Декодирование циклических кодов, М., 1968; [6] Сидельников В. М., «Пробл. передачи информ.», 1974, т. 10, в. 2, с. 43—51; [7] Левенштейн В. И., там же, с. 26—42; [8] Зяблов В. В., Пинскер М. С., «Пробл. передачи информ.», 1975, т. 11, в. 1, с. 23—36. *В. М. Сидельников.*

КОДАИРЫ РАЗМЕРНОСТЬ — численный инвариант алгебраич. многообразия, названный по имени К. Кодаиры (K. Kodaira), впервые указавшего на важность этого инварианта в теории классификации алгебраич. многообразий.

Пусть V — неособое алгебраич. многообразие и $\Phi_m : V \to \mathbb{P}(n)$ — рациональное отображение, определяемое линейной системой $|mK_V|$, где K_V— канонический класс многообразия V. **Размерность Кодаиры** $\varkappa(V)$ многообразия V определяется как $\max_{m \geqslant 1} \{\dim \Phi_m(V)\}$. При этом, если $|mK_V| = \varnothing$ для всех $m \geqslant 1$, то считается, что $\varkappa(V) = -\infty$. К. р. является бирациональным инвариантом, т. е. не зависит от представителя в классе бирациональной эквивалентности.

Пусть основное поле есть поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если m достаточно большое, то имеет место оценка

$$\alpha m^{\varkappa(V)} \leqslant \dim |mK_V| \leqslant \beta m^{\varkappa(V)},$$

где α, β — некоторые положительные числа. Если $\varkappa(V) > 0$, то существует сюръективный морфизм $f : V^* \to$

$\to W$ алгебраич. многообразий такой, что: а) V^* бирационально эквивалентно V; б) $\varkappa(V)=\dim W$; в) для некоторого плотного открытого множества $U \subset W$ все слои $f^{-1}(\omega)$, $\omega \in U$, являются многообразиями параболич. типа.

Существует обобщение понятия К. р. (см. [2]) на случай, когда в линейной системе $|mK_V|$ канонич. класс K_V заменяется на произвольный дивизор D.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Ueno K., Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, B.— Hdlb.— N. Y., 1975; [3] Iitaka S., «J. Math. Soc. Jap.», 1971, v. 23, p. 256—73. *И. В. Долгачев.*

КОДАИРЫ ТЕОРЕМА об обращении в нуль, теорема Кодаиры об исчезновении,— теорема о равенстве нулю групп когомологий $H^i(X, \mathcal{O}(L))$, $i<\dim X$, где $\mathcal{O}(L)$ — пучок голоморфных сечений отрицательного *векторного расслоения* L ранга 1 на компактном комплексном многообразии X. Эквивалентная формулировка К. т. состоит в том, что

$$H^i(X, \mathcal{O}(L \otimes K_X))=0, \quad i>0,$$

для любого положительного векторного расслоения ранга 1 (здесь K_X обозначает каноническое линейное расслоение на X). В терминах дивизоров К. т. формулируется как равенство $H^i(X, O_X(-D))=0$ для $i<$ $<\dim X$ и любого дивизора D такого, что для некоторого $n \geqslant 1$ nD является гиперплоским сечением в каком-либо проективном вложении многообразия X.

К. т. была доказана трансцендентными методами К. Кодаирой [1] (см. также [2]) как обобщение на случай произвольной размерности классич. теоремы о регулярности присоединенной системы на алгебраич. поверхности. Существует пример нормальной алгебраич. поверхности над полем положительной характеристики, для к-рой К. т. неверна [4]. Неизвестно (1978), справедлива ли К. т. для неособого алгебраич. многообразия над полем положительной характеристики.

К. т. справедлива и для голоморфных векторных расслоений произвольного ранга, отрицательных в смысле Накано. Обобщением К. т. является также следующий результат:

$$H^i(X, \Omega^p(L))=0 \quad \text{для } p+i \geqslant \dim X+r,$$

где L — слабо положительное векторное расслоение ранга r на компактном комплексном многообразии X, $\Omega^p(L)=\Omega^p \otimes \mathcal{O}(L)$ — пучок *голоморфных форм* степени p со значениями в L. Для слабо отрицательных векторных расслоений L обращение в 0 имеет место при $p+i \leqslant \dim X-r$. Аналоги этих теорем получены для слабо 1-полных многообразий X, т. е. многообразий, допускающих гладкую плюрисубгармонич. функцию ψ такую, что множества $\{x \in X, \psi(x)<c\}$ относительно компактны в X для всех $c \in \mathbb{R}$, и для компактных комплексных пространств X, обладающих $n=\dim X$ алгебраически независимыми мероморфными функциями [5].

Лит.: [1] Kodaira K., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1953, v. 39, p. 1268—73; [2] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразных, М., 1976; [3] Mumford D., «Amer. J. Math.», 1967, v. 89, № 1, p. 94—104; [4] Zariski O., Algebraic surfaces, B.— Hdlb.— N. Y., 1971; [5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 93—171. *И. В. Долгачев.*

КОДИРОВАНИЕ АЛФАВИТНОЕ, кодирование неравномерное,— представление информации в стандартной форме, при к-рой элементарным синтаксическим единицам языка сообщений (буквам алфавита языка) последовательно сопоставляются кодовые комбинации символов из нек-рого заданного алфавита (здесь под информацией понимается линейная запись букв). Примером К. а. может служить известный код Морзе, в к-ром слова кодируются побуквенно, а буквам сопоставлены слова в алфавите трех символов $\{\cdot, —, \wedge\}$, где $\wedge$ — пробел. Примером естественно сложившегося кодирования, к-рое не укладывается в модель К. а., является десятичная система счисления. Источником идей для развития теории К. а. являются кибернетич. точка зрения на информационные процессы и системы, с одной стороны, и потребность техники связи (где часто возникает необходимость преобразования информации к более удобной в каком-то отношении форме) — с другой; отправным пунктом была фундаментальная работа К. Шеннона [1], опубликованная в 1948. Теория К. а.— раздел прикладной математики, включающий в себя изучение различных математич. моделей каналов связи с использованием разнообразных математич. методов. Лучше всего изучено равномерное или блочное кодирование, при к-ром кодовые комбинации имеют фиксированную длину. Для этого класса имеется развитый математич. аппарат (см. *Код с исправлением ошибок*). Более общей абстрактной схемой является автоматное кодирование, при к-ром соответствие реализуется конечным автоматом. В практич. отношении равномерное кодирование обеспечивает, как правило, удовлетворительные результаты, поэтому использование других методов кодирования должно иметь очень веские достоинства (напр., существенное сжатие информации) при не слишком серьезных недостатках (усложнение кодирования и декодирования).

Основные результаты общего характера можно сформулировать для случая побуквенного К. а. (когда кодирующий автомат имеет одно внутреннее состояние), так как известные обобщения не имеют принципиального значения, а исследования, связанные с другими моделями, не получили еще значительного теоретич. развития. Рассматривается следующая модель канала связи:

| источник сообщений | → | схема кодирования | —...→ | схема декодирования | → | адресат |,

$A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ — алфавит канала связи, т. е. перечень сигналов, к-рые могут передаваться по каналу, $\tau(a_i)$ — длительность сигнала a_i, $B=\{b_1, \ldots, b_m\}$ — алфавит языка сообщений. В простейшем случае источник сообщений есть вероятностная схема, на выходе к-рой в каждый момент дискретного времени появляется одна из букв B, причем вероятности $p_i=p(b_i)$ появления букв не зависят от времени. Схема кодирования f отображает буквы B в слова A^* (A^* — моноид, порожденный A), $f(b_i)=v_i$ и слова B^* кодируются побуквенно: $f(b_{i_1} \ldots b_{i_k})=f(b_{i_1})\ldots f(b_{i_k})$. Таким образом, отображение f полностью задается кодом $V=\{v_1, \ldots, v_m\}$. Если f взаимно однозначно, то задача схемы декодирования — восстановить переданное сообщение, реализуя отображение f^{-1}.

Оценочными факторами для модели являются *информации скорость передачи* и сложность декодирования, определяемые выбором кода V. Скорость передачи характеризуется количественно величиной математич. ожидания времени, к-рое требуется для передачи одной буквы сообщения: длительность передачи буквы b_i есть

$$\tau(b_i)=\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\tau(a_j),$$

где ω_{ij} — число вхождений буквы a_j в слово v_i, а искомое математическое ожидание есть

$$\mathsf{E}_f=\sum_{i=1}^{m} p_i \tau(b_i)$$

(E_f наз. также стоимостью кодирования

f). В общем случае E_f зависит от структуры кода, к-рая описывается структурным многочленом

$$S_f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{\omega_{ij}}\right)$$

— производящей функцией, перечисляющей слова кода по их составу. В частном случае, когда $\tau(a_1) = \ldots = \tau(a_n) = \tau$, имеем $\mathsf{E}_f = \tau \sum_{i=1}^{m} p_i l_i$, т. е. E_f определяется только спектром длин слов кода $\{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$, где l_i — длина слова v_i. Для этого случая проблема выбора оптимального кода (т. е. минимизирующего стоимость) решается полностью; доказано [2] необходимое и достаточное спектральное условие для существования однозначно декодируемого кода

$$\sum_{i=1}^{m} n^{-l_i} \leqslant 1. \quad (1)$$

Показано [4], что вместе с неравенством (1) условие

$$\text{НОД}(l_1, l_2, \ldots, l_m) = 1$$

необходимо и достаточно для существования кода с данным спектром, имеющего так наз. свойство самосинхронизации, к-рое состоит в том, что ошибка при декодировании автоматически локализуется с вероятностью 1.

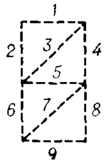
Для сложности декодирования, с абстрактной точки зрения, наиболее интересна качественная мера: наличие свойства конечности задержки декодирования, означающее возможность реализации декодирования конечным автоматом (количественные оценки сложности схемной реализации автоматов выходят за рамки теории кодирования). Так наз. префиксные коды (свойство префиксности состоит в том, что никакое слово V не является начальным отрезком другого слова из V) все имеют это свойство. Было показано [2], что любой код, для к-рого f взаимно однозначно, спектрально эквивалентен нек-рому префиксному коду. Класс префиксных кодов относительно хорошо обозрим, чем и объясняется результативность исследования случая $\tau(a_1) = \ldots = \tau(a_n)$.

В общем случае известны алгоритмич. решения вопросов распознавания свойств взаимной однозначности кодирования и конечности задержки декодирования. Свойство взаимной однозначности f можно рассматривать как минимальный уровень помехоустойчивости кода V. Имеется алгоритмич. решение задачи вычисления фактической корректирующей способности произвольного кода в общем случае и с дополнительным требованием конечной задержки декодирования. Класс всех свободных кодов (т. е. однозначно декодируемых) устроен весьма сложно, но экстремальные требования к кодам часто приводят к существенным ограничениям. Напр., показано, что для максимальных по включению кодов (для к-рых неравенство (1) обращается в равенство и к-рые наз. полными, так как для них и только для них алфавит канала используется полностью в том смысле, что любое слово из A^* является частью нек-рого закодированного сообщения) свойство конечной задержки имеет место в том и только в том случае, если код префиксный.

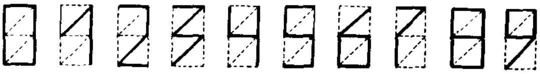
Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963; [2] Мак-Миллан Б., «Кибернетич. сб.», 1961, в. 3, с. 88—92; [3] Хаффмен Д., там же, с. 79—87; [4] Schützenberger M. P., «Information and Control», 1967, v. 11, p. 396—401; [5] Марков Ал. А., «Пробл. кибернетики», 1962, в. 8, с. 169—86; 1964, в. 12, с. 137—53; 1967, в. 19, с. 307—09; 1976, в. 31, с. 77—108.

Ал. А. Марков.

КОДИРОВАНИЕ И ДЕКОДИРОВАНИЕ — процесс представления *информации* в определенной стандартной форме и обратный процесс восстановления информации по ее такому представлению. В математич. литературе кодированием наз. отображение произвольного множества A в множество конечных последовательностей (слов) в нек-ром алфавите B, а д е к о д и р о в а н и е м — обратное отображение. Примерами кодирования являются: представление натуральных чисел в r-ичной системе счисления, при к-ром каждому числу $N=1, 2, \ldots$ ставится в соответствие слово $b_1 b_2 \ldots b_l$ в алфавите $B_r=\{0, 1, \ldots, r-1\}$ такое, что $b_1 \neq 0$ и $b_1 r^{l-1}+\ldots+b_{l-1}r+b_l=N$; преобразование текстов на русском языке с помощью телеграфного кода в последовательности, составленные из посылок тока и пауз различной длительности; отображение, применяемое при написании цифр почтового индекса (см. рис.). В последнем случае каждой десятичной цифре соответствует слово в алфавите $B_2=\{0, 1\}$ длины 9, в котором символами 1 отмечены номера использованных линий (напр., цифре 5 соответствует слово 110010011).



Исследование различных свойств К. и д. и построение эффективных в определенном смысле кодирований, обладающих требуемыми свойствами, составляет проблематику т е о р и и к о д и р о в а н и я. Обычно критерий эффективности кодирования так или иначе связан с минимизацией длин кодовых слов (образов



элементов множества A), а требуемые свойства кодирования связаны с обеспечением заданного уровня *помехоустойчивости*, понимаемой в том или ином смысле. В частности, под помехоустойчивостью понимается возможность однозначного декодирования при отсутствии или допустимом уровне искажений в кодовых словах. Помимо помехоустойчивости, к кодированию может предъявляться ряд дополнительных требований. Напр., при выборе кодирования для цифр почтового индекса необходимо согласование с обычным способом написания цифр. В качестве дополнительных требований часто используются ограничения, связанные с допустимой сложностью схем, осуществляющих К. и д. Проблематика теории кодирования в основном создавалась под влиянием разработанной К. Шенноном (С. Shannon, [1]) теории передачи информации. Источником новых задач теории кодирования служат создание и совершенствование автоматизированных систем сбора, хранения, передачи и обработки информации. Методы решения задач теории кодирования главным образом комбинаторные, теоретико-вероятностные и алгебраические.

Произвольное кодирование f множества (алфавита) A словами в алфавите B можно распространить на множество A^* всех слов в A (сообщений) следующим образом:

$$f(a_1 a_2 \ldots a_k)=f(a_1)\, f(a_2) \ldots f(a_k),$$

где $a_i \in A$, $i=1, 2, \ldots, k$. Такое отображение $f: A^* \to B^*$ наз. п о б у к в е н н ы м к о д и р о в а н и е м сообщений. Более общий класс кодирований сообщений образуют а в т о м а т н ы е к о д и р о в а н и я, реализуемые инициальными асинхронными *автоматами*, выдающими в каждый момент времени нек-рое (быть может, пустое) слово в алфавите B. Содержательный смысл этого обобщения заключается в том, что автомат в разных состояниях реализует различные кодирования букв алфавита сообщений. Побуквенное кодирование — это автоматное кодирование, реализуемое автоматом с одним состоянием. Одним из направлений теории кодирования является изучение общих свойств кодирования и построение алгоритмов распознавания этих свойств (см. *Кодирование алфавитное*). В частности, для побуквенных и автоматных кодирований найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы:

1) декодирование было однозначным, 2) существовал декодирующий автомат, т. е. автомат, реализующий декодирование с нек-рой ограниченной задержкой, 3) существовал самонастраивающийся декодирующий автомат (позволяющий в течение ограниченного промежутка времени устранить влияние сбоя во входной последовательности или в работе самого автомата).

Большинство задач теории кодирования сводится к изучению конечных или счетных множеств слов в алфавите B_r. Такие множества наз. кодами. В частности, каждому однозначному кодированию $f: B_m \to B_r^*$ (и побуквенному кодированию $f: B_m^* \to B_r^*$) соответствует код $\{f(0), \ldots, f(m-1)\} \subset B_r^*$. Одно из основных утверждений теории кодирования состоит в том, что условие взаимной однозначности побуквенного кодирования $f: B_m^* \to B_r^*$ накладывает следующее ограничение на длины $l_i = l_i(f)$ кодовых слов $f(i)$:

$$\sum_{i=0}^{m-1} r^{-l_i} \leqslant 1. \qquad (1)$$

Справедливо и обратное утверждение: если $(l_0, \ldots, l_{m-1})$ — набор натуральных чисел, удовлетворяющих (1), то существует взаимно однозначное побуквенное кодирование $f: B_m^* \to B_r^*$ такое, что слово $f(i)$ имеет длину l_i. При этом, если числа l_i упорядочены по возрастанию, то в качестве $f(i)$ можно взять первые после запятой l_i символов разложения числа $\sum_{j=0}^{i-1} r^{-l_j}$ в r-ичную дробь (метод Шеннона).

Наиболее законченные результаты в теории кодирования связаны с построением эффективных взаимно однозначных кодирований. Описанные здесь конструкции используются на практике для сжатия информации и выборки информации из памяти. Понятие эффективности кодирования зависит от выбора критерия стоимости. При определении стоимости $L(f)$ взаимно однозначного побуквенного кодирования $f: B_m^* \to B_r^*$ предполагается, что каждому числу $i \in B_m$ поставлено в соответствие положительное число p_i и $P = \{p_0, \ldots, p_{m-1}\}$. Исследованы следующие варианты определения стоимости $L(f)$:

1) $L_{\text{ср}}(f) = \sum_{i=0}^{m-1} p_i l_i$,

2) $L^{(t)}(f) = \frac{1}{t} \log_r \sum_{i=0}^{m-1} p_i r^{tl_i}, \quad 0 < t < \infty$,

3) $L'(f) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant m-1} (l_i - p_i)$,

причем предполагается, что в первых двух случаях p_i — вероятности, с к-рыми некоторый бернуллиевый источник порождает соответствующие буквы алфавита B_m $\left(\sum_{i=0}^{m-1} p_i = 1\right)$, а в третьем случае p_i — заданные длины кодовых слов. При первом определении стоимость равна средней длине кодового слова, при втором определении с ростом параметра t более длинные кодовые слова оказывают все большее влияние на стоимость ($L^{(t)}(f) \to L_{\text{ср}}(f)$ при $t \to 0$ и $L^{(t)}(f) \to \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant m-1} l_i$ при $t \to \infty$), при третьем определении стоимость равна максимальному превышению длины l_i кодового слова над заданной длиной p_i. Задача построения взаимно однозначного побуквенного кодирования $f: B_m^* \to B_r^*$, минимизирующего стоимость $L(f)$, равносильна задаче минимизации функции $L(f)$ на наборах $(l_0, \ldots, l_{m-1})$ из натуральных чисел, удовлетворяющих (1). Решение этой задачи известно при каждом из указанных определений стоимости.

Пусть минимум величины $L(f)$ на наборах $(l_0, \ldots, l_{m-1})$ из произвольных (не обязательно натуральных) чисел равен $L_r(P)$ и достигается на наборе $(l_0(P), \ldots,$

$l_{m-1}(P)$). Неотрицательная величина $I(f)=L(f)-L_r(P)$ наз. избыточностью, а величина $I(f)/L(f)$ — относительной избыточностью кодирования f. Для избыточности взаимно однозначного кодирования $f: B_m^* \to B_r^*$, построенного по методу Шеннона для длин l_i, $l_i(P) \leqslant l_i < l_i(P)+1$, справедливо неравенство $I(f)<1$. При первом, наиболее употребительном, определении стоимости как среднего числа кодовых символов, приходящихся на одну букву порождаемого источником сообщения, величина $L_r(P)$ равна энтропии Шеннона

$$H_r(P) = -\sum_{i=0}^{m-1} p_i \log_r p_i$$

источника, вычисленной по основанию r, а $l_i(P)=-\log_r p_i$. Граница избыточности $I(f)=L_{\text{ср}}(f)-H_r(P)<1$ может быть улучшена с помощью так наз. кодирования блоками длины k, при к-ром сообщения длины k (а не отдельные буквы) кодируются по методу Шеннона. Избыточность такого кодирования не превышает $1/k$. Этот же прием используется для эффективного кодирования зависимых источников. В связи с тем, что определение длин l_i при кодировании по методу Шеннона основано на знании статистики источника, для нек-рых классов источников разработаны методы построения универсального кодирования, гарантирующего определенную верхнюю границу избыточности для любого источника из этого класса. В частности, построено кодирование блоками длины k, избыточность к-рого для любого бернуллиевого источника асимптотически не превышает $\frac{m-1}{2k}\log_r k$ (при фиксированных m, r и $k\to\infty$), причем эта асимптотическая граница не может быть улучшена.

Наряду с задачами эффективного сжатия информации рассмотрены задачи оценки избыточности конкретных видов сообщений. Напр., была оценена относительная избыточность нек-рых естественных языков (в частности, английского и русского) в предположении, что тексты на них порождаются марковскими источниками с большим числом состояний.

При исследовании задач построения эффективных помехоустойчивых кодирований обычно рассматривают кодирования $f: B_m \to B_r^*$, к-рым соответствуют коды $\{f(0), \ldots, f(m-1)\}$, принадлежащие множеству B_r^n слов длины n в алфавите B_r, и предполагают, что буквы алфавита сообщений B_m равновероятны. Эффективность такого кодирования оценивают избыточностью $I(f)=n-\log_r m$ или скоростью передачи $R(f)=\frac{1}{n}\log_r m$. При определении помехоустойчивости кодирования формализуется понятие ошибки и вводится в рассмотрение нек-рая модель образования ошибок. Ошибкой типа замещения (или просто ошибкой) наз. преобразование слова, состоящее в замещении одного из его символов другим символом алфавита B_r. Напр., проведение лишней линии при написании цифры почтового индекса приводит к замещению в кодовом слове символа 0 символом 1, а отсутствие нужной линии — к замещению символа 1 символом 0. Возможность обнаружения и исправления ошибок основана на том, что для кодирования f, обладающего ненулевой избыточностью, декодирование f^{-1} может быть произвольным образом доопределено на r^n-m словах из B_r^n, не являющихся кодовыми. В частности, если множество B_r^n разбито на m непересекающихся подмножеств $D_0, \ldots, D_{m-1}$ таких, что $f(i) \in D_i$, а декодирование f^{-1} доопределено так, что $f^{-1}(D_i)=i$, то при декодировании будут исправлены все ошибки, преобразующие кодовое слово $f(i)$ в D_i, $i=0, \ldots, m-1$. Аналогичная возможность имеется и в случае ошибок других типов таких, как стирание символа (замещение символом другого алфавита), изменение числового значения кодового слова на $\pm br^i$, $b=1, \ldots, r-1$, $i=0, 1, \ldots$ (арифметическая ошибка), выпадение или вставка символа и т. п.

В теории передачи информации (см. *Информации передача*) рассматриваются вероятностные модели образования ошибок, называемые каналами. Простейший канал без памяти задается вероятностями p_{ij} замещения символа i символом j. Для канала определяется величина (пропускная способность)

$$C = \max \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-1} q_i p_{ij} \log_r \left(p_{ij} \Big/ \sum_{h=0}^{m-1} q_h p_{hj} \right),$$

где максимум берется по всем наборам $(q_0, \ldots, q_{m-1})$ таким, что $q_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=0}^{m-1} q_i = 1$. Эффективность кодирования f характеризуется скоростью передачи $R(f)$, а помехоустойчивость — средней вероятностью ошибки декодирования $P(f)$ (при наилучшем разбиении B_r^n на подмножества D_i). Основной результат теории передачи информации (теорема Шеннона) состоит в том, что пропускная способность C является верхней гранью чисел R таких, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех n, начиная с нек-рого, существует кодирование $f: B_m \to B_r^n$, для к-рого $R(f) \geqslant R$ и $P(f) < \varepsilon$.

Другая модель образования ошибок (см. *Код с исправлением ошибок*, *Код с исправлением арифметических ошибок*, *Код с исправлением выпадений и вставок*) характеризуется тем, что в каждом слове длины n происходит не более заданного числа t ошибок. Пусть $E_i(t)$ — множество слов, получаемых из $f(i)$ в результате t или менее ошибок. Если для кода

$$\{f(0), \ldots, f(m-1)\} \subset B_r^n$$

множества $E_i(t)$, $i=0, \ldots, m-1$, попарно не пересекаются, то при декодировании таком, что $E_i(t) \subseteq D_i$, будут исправлены все ошибки, допустимые рассматриваемой моделью образования ошибок, и такой код наз. кодом с исправлением t ошибок. Для многих типов ошибок (напр., замещений, арифметич. ошибок, выпадений и вставок) функция $d(x, y)$, равная минимальному числу ошибок данного типа, преобразующих слово $x \in B_r^n$ в слово $y \in B_r^n$, является метрикой, а множества $E_i(t)$ — метрическими шарами радиуса t. Поэтому задача построения наиболее эффективного (т. е. максимального по числу слов m) кода в B_r^n с исправлением t ошибок равносильна задаче плотнейшей упаковки метрического пространства B_r^n шарами радиуса t. Код для цифр почтового индекса не является кодом с исправлением одной ошибки, так как $d(f(0), f(8))=1$ и $d(f(5), f(8))=2$, хотя все другие расстояния между кодовыми словами не менее 3.

Задача исследования величины $I_r(n, t)$ — минимальной избыточности кода в B_r^n с исправлением t ошибок типа замещения распадается на два основных случая. В первом случае, когда t фиксировано, а $n \to \infty$, справедлива асимптотика

$$I_2(n, t) \sim t \log_2 n, \tag{2}$$

причем достигается «мощностная» граница, основанная на подсчете числа слов длины n в шаре радиуса t. Асимптотика величины $I_r(n, t)$ при $r > 2$, а также при $r=2$ для многих других типов ошибок (напр., арифметич. ошибок, выпадений и вставок) не известна (1978). Во втором случае, когда $t=[pn]$, где p — некоторое фиксированное число, $0 < p < (r-1)/2r$, а $n \to \infty$, «мощностная» граница

$$I_r(n, [pn]) \gtrsim nT_r(p),$$

где $T_r(p) = -p \log_r(p/(r-1)) - (1-p) \log_r(1-p)$, существенно улучшена. Имеется предположение, что верхняя граница

$$I_r(n, [pn]) \leqslant n T_r(2p), \tag{3}$$

полученная методом случайного выбора кода, является асимптотически точной, т. е. $I_r(n, [pn]) \sim n T_r(2p)$. Доказательство или опровержение этого предположения — одна из центральных задач теории кодирования.

Большинство конструкций помехоустойчивых кодов являются эффективными, когда длина n кода достаточно велика. В связи с этим особое значение приобретают вопросы, связанные со сложностью устройств, осуществляющих кодирование и декодирование (кодера и декодера). Ограничения на допустимый тип декодера или его сложность могут приводить к увеличению избыточности, необходимой для обеспечения заданной помехоустойчивости. Напр., минимальная избыточность кода в B_2^n, для к-рого существует декодер, состоящий из регистра сдвига и одного мажоритарного элемента и исправляющий одну ошибку, имеет порядок $\sqrt{n}$ (ср. с (2)). В качестве математич. модели кодера и декодера обычно рассматривают схемы из функциональных элементов и под сложностью понимают число элементов в схеме. Для известных классов кодов с исправлением ошибок проведено исследование возможных алгоритмов К. и д. и получены верхние границы сложности кодера и декодера. Найдены также нек-рые соотношения между скоростью передачи кодирования, помехоустойчивостью кодирования и сложностью декодера (см. [5]).

Еще одно направление исследований в теории кодирования связано с тем, что многие результаты (напр., теорема Шеннона и граница (3)) не являются «конструктивными», а представляют собой теоремы существования бесконечных последовательностей $\{K_n\}$ кодов $K_n \subseteq B_r^n$. В связи с этим предпринимаются усилия, чтобы доказать эти результаты в классе таких последовательностей $\{K_n\}$ кодов, для к-рых существует машина Тьюринга, распознающая принадлежность произвольного слова длины l множеству $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ за время, имеющее медленный порядок роста относительно l (напр., $l \log l$).

Нек-рые новые конструкции и методы получения границ, разработанные в теории кодирования, привели к существенному продвижению в вопросах, на первый взгляд весьма далеких от традиционных задач теории кодирования. Здесь следует указать на использование максимального кода с исправлением одной ошибки в асимптотически оптимальном методе реализации функций алгебры логики *контактными схемами*; на принципиальное улучшение верхней границы для плотности упаковки n-мерного евклидова пространства равными шарами; на использование неравенства (1) при оценке сложности реализации формулами одного класса функций алгебры логики. Идеи и результаты теории кодирования находят свое дальнейшее развитие в задачах синтеза самокорректирующихся схем и надежных схем из ненадежных элементов.

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963; [2] Берлекэмп Э., Алгебраическая теория кодирования, пер. с англ., М., 1971; [3] Питерсон У., Уэлдон Э., Коды, исправляющие ошибки, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; [4] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., 1974, раздел 5; [5] Бассалыго Л. А., Зяблов В. В., Пинскер М. С., «Пробл. передачи информации», 1977, т. 13, № 3, с. 5—17; [6] Сидельников В. М., «Матем. сб.», 1974, т. 95, в. 1, с. 148—58.

В. И. Левенштейн.

КОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство, получаемое из евклидова применением принципа двойственности проективного пространства такой же размерности. Обозначается $\mathbb{R}_n^*$, где n — размерность пространства. К. п. $\mathbb{R}_n^*$ является пространством с проективной метрикой, к-рая задается в соответствии с общей схемой введения проективных метрик. Если проективная метрика евклидова пространства $\mathbb{R}_n$ определяется абсолютом, состоящим из совокупности $(n-1)$-плоскости и $(n-2)$-мнимой квадрики в этой плоскости, то проективная метрика К. п. $\mathbb{R}_n^*$ определяется двойственным абсолютом: мнимым конусом 2-го порядка, к-рый наз. абсолютным конусом, с вершиной в качестве абсолютной точки абсолюта.

Расстояние между точками в пространстве $\mathbb{R}_n^*$ определяется в соответствии с общей схемой определения расстояния между точками в пространствах с проективной метрикой с учетом двойственного характера этого пространства по отношению к $\mathbb{R}_n$. Пусть

$$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{x})+u_0=0, \quad (\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{y})+v_0=0$$

— нормальные уравнения нек-рых плоскостей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$, двойственном для $\mathbb{R}_n^*$, где

$$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u})=1, \quad (\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v})=1, \quad (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{x})$$

— скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}_n$. В пространстве $\mathbb{R}_n^*$ этим плоскостям ставятся в соответствие точки $X(x^0,\ \boldsymbol{x})$ и $Y(y^0,\ \boldsymbol{y})$ с координатами

$$x^0=\rho u_0, \quad x^i=\rho u_i, \quad y^0=\rho v_0, \quad y^i=\rho v_i, \quad \rho\in\mathbb{R},$$

координаты этих точек нормированы условиями

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=\rho^2>0, \quad (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})=\rho^2>0$$

(x^0 и y^0 — координаты точек X и Y в бесконечно удаленной плоскости). Расстояние δ между точками X и Y определяется соотношением

$$\cos^2\frac{\delta}{\rho}=\frac{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})^2}{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})\ (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})},$$

т. е. выражается через величину угла между плоскостями, двойственными точкам X и Y. В соответствии с нормировкой векторов точек X и Y это соотношение можно записать в виде

$$\cos\frac{\delta}{\rho}=\frac{1}{\rho^2}\,|\,(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\,|.$$

Действительное число ρ наз. радиусом кривизны К. п.

В случае, когда точкам $X,\ Y\in\mathbb{R}_n^*$ в двойственном пространстве $\mathbb{R}_n$ соответствуют параллельные плоскости, то $\delta=0$, а расстояние между точками X и Y определяются как евклидово расстояние между этими параллельными плоскостями.

Углы между двумя плоскостями определяются в $\mathbb{R}_n^*$ как нормированное евклидово расстояние между соответствующими по принципу двойственности двумя точками в $\mathbb{R}_n$. Этот угол равен также нормированному расстоянию между точками данных плоскостей в $\mathbb{R}_n^*$, являющихся полюсами $(n-2)$-плоскости их пересечения относительно квадрик, высекаемых абсолютным конусом на этих плоскостях. При этом всегда определяется тот из углов между плоскостями, к-рый не содержит абсолютной точки. В частности, между двумя прямыми на коевклидовой плоскости $\mathbb{R}_2^*$ он равен нормированному расстоянию между такими двумя точками этих прямых, к-рые вместе с точкой пересечения данных прямых гармонически делят точки пересечения прямых с абсолютными прямыми.

Движения К. п. $\mathbb{R}_n^*$ определяются как преобразования этого пространства, индуцируемые движениями соответствующего двойственного пространства $\mathbb{R}_n$, тем самым движения К. п. $\mathbb{R}_n^*$ описываются ортогональными операторами.

Геометрия коевклидовой плоскости $\mathbb{R}_2^*$ обладает свойствами, двойственными свойствам плоскости $\mathbb{R}_2$.

Так, из инвариантности длин сторон в треугольнике ABC относительно движений плоскости $\mathbb{R}_2$ следует, что угловой избыток $\Delta=\hat{A}+\hat{C}-\hat{B}$ инвариантен при движениях плоскости $\mathbb{R}_2^*$ и всегда положителен. (Здесь и далее предполагается, что внутренний угол B треугольника ABC в $\mathbb{R}_2^*$ содержит абсолютную точку.) За площадь S треугольника на плоскости $\mathbb{R}_2^*$ берется величина, пропорциональная угловому избытку, к-рый является аддитивной функцией треугольника: $S=\rho^2\Delta$.

Вследствие двойственного характера величин углов и длин сторон треугольника на плоскости $\mathbb{R}_2^*$ имеют место следующие тригонометрич. соотношения в треугольнике ABC:

$$b \quad a+c,$$

$$\hat{A}^2=\hat{B}^2+\hat{C}^2-2\hat{C}\hat{B}\cos\frac{a}{\rho},$$

$$\frac{\sin\frac{a}{\rho}}{\hat{A}}=\frac{\sin\frac{b}{\rho}}{\hat{B}}=\frac{\sin\frac{c}{\rho}}{\hat{C}}.$$

На плоскости $\mathbb{R}_2^*$ метрика расстояний (на прямых) является проективной эллиптической, метрика углов — параболической. В пространстве $\mathbb{R}_3^*$ проективная метрика расстояний (на прямых) — эллиптическая, в плоскостях — также эллиптическая, а в пучках плоскостей — параболическая.

К. п. $\mathbb{R}_n^*$ является предельным случаем как эллиптического пространства, так и Лобачевского пространства: проективная метрика К. п. $\mathbb{R}_n^*$ может быть получена предельными переходами из проективных метрик указанных пространств.

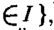
Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

КОКСТЕРА ГРУППА — группа с отмеченной системой образующих $\{r_i\colon i\in I\}$, допускающая определяющую систему соотношений

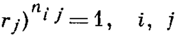
$$(r_i,\ r_j)^{n_{ij}}=1,\quad i,\ j\in I,$$

где $n_{ii}=1$ (так что $r_i^2=1$ при любом i) и $n_{ij}=n_{ji}$ при $i\neq j$ — целое число $\geqslant 2$ или ∞ (в последнем случае соотношения между r_i и r_j нет). При этих условиях n_{ij} совпадает с порядком элемента r_ir_j. Если $n_{ij}=2$, то r_i и r_j коммутируют. Матрица (n_{ij}), $i, j\in I$ наз. матрицей Кокстера данной К. г. Эта матрица (и, тем самым, группа) может быть задана посредством графа Кокстера — графа с вершинами a_i $(i\in I)$, в к-ром вершины a_i и a_j соединены $(n_{ij}-2)$-кратным ребром, если $n_{ij}<\infty$ (в частности, вообще не соединены, если $n_{ij}=2$), и соединены жирным ребром, если $n_{ij}=\infty$. В другой системе обозначений вершины a_i и a_j графа Кокстера соединяются простым ребром с отметкой n_{ij}.

Примеры. 1. Всякая группа, порождаемая двумя элементами порядка 2, есть К. г. с графом



2. Симметрическая группа S_n является К. г. относительно образующих $r_i=(i,\ i+1)$, $i=1,\ \ldots,\ n-1$; ее граф Кокстера имеет вид



3. Группа $PGL_2(\mathbb{Z})=GL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ является К. г. относительно образующих

$$r_1=\left\{\pm\begin{Vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}\right\},\ r_2=\left\{\pm\begin{Vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{Vmatrix}\right\},\ r_3=\left\{\pm\begin{Vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}\right\};$$

ее граф имеет вид

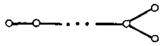
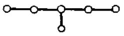
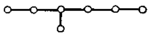
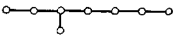
Группа $PGL_2(\mathbb{Z})$ содержит подгрупну $PSL_2(\mathbb{Z})=$

$=SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ индекса 2, изоморфную модулярной группе Клейна.

Понятие К. г. возникло в теории дискретных групп, порождаемых отражениями относительно гиперплоскостей (см. *Отражений группа*, в дальнейшем — о. г.). Всякая о. г. является К. г., если в качестве образующих взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник. К числу о. г. относятся *Вейля группы* (обычные и аффинные) полупростых групп Ли.

В 1934 Х. С. М. Коксгер [1] перечислил все о. г. в n-мерном евклидовом пространстве E^n и доказал, что все они являются, как говорят сейчас, К. г. В следующей работе [2] он доказал, что всякая конечная К. г. изоморфна некоторой о. г. в E^n, элементы которой имеют общую неподвижную точку, и тем самым получил классификацию конечных К. г. (см. табл. 1).

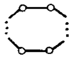
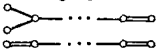
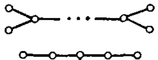
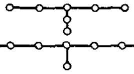
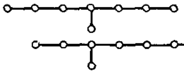
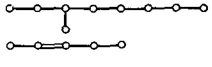
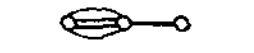
Табл. 1. — Неразложимые конечные К. г.

Обозначение группы	Ее граф Кокстера	Ее показатели
A_n $n \geqslant 1$		1, 2, ..., n
B_n или C_n, $n \geqslant 2$		1, 3, ..., $2n-1$
D_n $n \geqslant 4$		1, 3, ..., $2n-3$, $n-1$
E_6		1, 4, 5, 7, 8, 11
E_7		1, 5, 7, 9, 11, 13, 17
E_8		1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
F_4		1, 5, 7, 11
$G_2^{(m)}$, $m \geqslant 5$		1, $m-1$
H_3		1, 5, 9
H_4		1, 11, 19, 29

Число образующих равно нижнему индексу в обозначении группы.

Среди бесконечных К. г. выделяются параболические и гиперболические К. г. По определению, К. г. является параболической (соответственно гиперболической), если она изоморфна о. г. в E^n (соответственно в пространстве Лобачевского L^n), элементы к-рой не имеют общей инвариантной плоскости размерности $<n$ (в гиперболическом случае плоскостью следует считать и бесконечно удаленную точку).

Табл. 2.—Неразложимые параболические К. г.

Обозначение группы	Ее граф Кокстера
$\widetilde{A}_1$	
$\widetilde{A}_n$, $n \geqslant 2$	
$\widetilde{B}_n$, $n \geqslant 3$	
$\widetilde{C}_n$, $n \geqslant 2$	
$\widetilde{D}_n$, $n \geqslant 4$	
$\widetilde{E}_6$	
$\widetilde{E}_7$	
$\widetilde{E}_8$	
$\widetilde{F}_4$	
$\widetilde{G}_2$	

Число образующих на единицу больше индекса в обозначении группы.

Параболические К. г. перечислены Х. С. М. Кокстером (см. табл. 2); они возникают в теории полупростых групп Ли как аффинные группы Вейля.

К. г. с k образующими является двумерной гиперболической К. г. тогда и только тогда, когда, при подходящей нумерации образующих,

$$\frac{1}{n_{12}}+\frac{1}{n_{23}}+\ldots+\frac{1}{n_{k1}}<1$$

и $n_{ij}=\infty$ при $|i-j|>1$. Что касается n-мерных гиперболических К. г. при $n>2$, то их полное перечисление не представляется возможным, хотя были достигнуты определенные успехи в изучении наиболее важных классов таких групп (см. *Отражений группа*).

Конечные, параболические и гиперболические К. г. и их прямые произведения составляют лишь небольшую часть К. г. Произвольная К. г. с конечным числом образующих допускает конечномерное вещественное линейное представление, указанное явно Х. С. М. Кокстером [2], при к-ром образующие переходят в линейные отражения. Доказано [4], что это представление является точным, из чего вытекает, в частности, решение проблемы тождества слов в К. г. [5].

Стандартные подгруппы К. г. Пусть G — К. г. с системой образующих $\{r_i,\ i\in I\}$. Для любого подмножества $J\subset I$ подгруппа G_J, порожденная множеством $\{r_i,\ i\in J\}$, является К. г., причем $r_i\notin G_J$ при $i\notin J$. Подгруппы такого вида наз. стандартными. Всякая максимальная конечная подгруппа К. г. сопряжена стандартной подгруппе.

К. г. наз. неразложимой, если она не является прямым произведением двух нетривиальных стандартных подгрупп; это эквивалентно связности ее графа Кокстера. Все конечные (соответственно параболические) К. г. суть прямые произведения неразложимых К. г. того же типа; все гиперболические К. г. неразложимы. Неразложимая К. г. является конечной (соответственно параболической, гиперболической) тогда и только тогда, когда симметрическая матрица $\left\|-\cos\frac{\pi}{n_{ij}}\right\|$ положительно определенна (соответственно неотрицательно определенна и вырождена, имеет отрицательный индекс инерции 1).

В теории конечных К. г. важную роль играют так наз. показатели (см. табл. 1) — уменьшенные на единицу степени образующих инвариантов соответствующей о. г. Через показатели выражаются порядок группы, число отражений (элементов, сопряженных образующим) и пр.— см. *Отражений группа.*

Произведение всех образующих конечной К. г. с точностью до сопряженности не зависит от порядка множителей и наз. элементом Киллинга — Кокстера.

Лит.: [1] Coxeter H. S. M., «Ann. Math.», 1934, v. 35, p. 588—621; [2] его же, «J. London Math. Soc.», 1935, v. 10, p. 21—25; [3] его же, «Duke Math. J.», 1951, v. 18, p. 765—82; [4] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1972, гл. 4—6; [5] Tits J., в кн.: Symposia Mathematica, v. 1, L.— N. Y., 1969, p. 175—85. *Э. Б. Винберг.*

КОЛЕБАНИЕ ФУНКЦИИ на множестве E — разность между верхней и нижней гранями значений функции на множестве E. Иначе, К. ф. равно

$$\omega_E(f)=\sup_{P',\ P''\in E}\{|f(P')-f(P'')|\}.$$

Если функция не ограничена на множестве E, К. ф. полагается равным ∞. Для постоянных на E функций (и только для них) колебание на E равно нулю. Если функция f определена на подмножестве E пространства $\mathbb{R}^n$, то К. ф. в любой точке Q замыкания E определяется по формуле

$$\omega_{Q,E}(f)=\inf_{U:Q\in U}\omega_{U\cap E}(f),$$

где нижняя грань берется по всем окрестностям точки Q. Если $Q \in E$, то для непрерывности f в точке Q по множеству E необходимо и достаточно, чтобы $\omega_{Q, E}(f)=0$.

А. А. Конюшков.

КОЛЕБАНИЙ ТЕОРИЯ — раздел прикладной теории дифференциальных уравнений, связанный с изучением колебательных явлений в естествознании и технике. Основные проблемы К. т. состоят в доказательстве существования и фактич. отыскании колебательных (периодических, почти периодических и др.) движений — решений заданной системы, и исследовании поведения остальных решений по отношению к данным колебательным. Различают теорию линейных колебаний и теорию нелинейных колебаний.

В теории линейных колебаний дело сводится к изучению линейных систем дифференциальных уравнений, это обычно бывает связано с тем, что рассматриваемые величины (искомые функции системы дифференциальных уравнений) столь малы, что оказывается возможным пренебречь нелинейными членами в правых частях системы. Рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=P(t)\,x+f(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ и $f(t)$ суть n-мерные векторы, а $P(t)$ — квадратная матрица порядка n, причем $P(t)$ и $f(t)$ чаще всего являются периодич. или почти периодич. функциями. Основные проблемы теории линейных колебаний: построение периодич. и почти периодич. решений системы (1) и исследование свойств их устойчивости. Наиболее детально с этих точек зрения изучены случаи, когда заданная система близка к системе уже изученной, иными словами, те случаи, когда удается ввести малый параметр следующим образом:

$$\frac{dx}{dt}=(P(t)+\mu Q(t, \mu))\,x+f(t) \tag{2}$$

в предположении, что система

$$\frac{dx}{dt}=P(t)\,x \tag{3}$$

полностью исследована, а μ — малый параметр. Для таких систем в большинстве случаев удается исследовать вопрос о существовании периодических (соответственно почти периодических) решений и фактически построить их. При весьма широких предположениях относительно матриц P и Q дается представление характеристич. показателей системы (3) в виде функций параметра (см. [7], [10]), в частности исследовано интересное явление параметрич. резонанса в линейных системах [5].

В теории нелинейных колебаний как по постановке задач, так и по методам исследования существенным образом различаются так наз. локальные и нелокальные проблемы. К первым из них относятся такие задачи, в к-рых удается выделить какие-либо «малости» (напр., малы сами исследуемые величины, или в системе имеются малые параметры).

Если в исследуемой задаче искомые функции можно считать малыми, то дело сводится к исследованию окрестности состояния равновесия для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=X(x, t), \tag{4}$$

где $x(t)$ и $X(x, t)$ суть n-мерные векторы и $X(0, t)\equiv 0$. Здесь широко применяются методы локальной качественной теории дифференциальных уравнений [4] и методы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова [1]. Весьма важный результат для теории нелинейных колебаний был получен А. Н. Колмогоровым и его последователями (см. [4]): было доказано существование квазипериодич. решений в окрестности состояния равновесия $x=0$ для системы (4).

Часто в заданные системы дифференциальных уравнений входят малые параметры, т. е. рассматриваются системы вида

$$\frac{dx}{dt}=X(x, t)+\mu R(x, t, \mu), \tag{5}$$

где μ — малый параметр. С такого рода системами связывают следующую проблему: наряду с системой (5) рассматривают так наз. «порождающую» систему — ту, в к-рую обращается система (5) при $\mu=0$, т. е. систему вида (4). Предполагается, что «порождающая» система обладает нек-рым свойством; ставится вопрос: не будет ли и система (5) обладать тем же свойством при малых, но отличных от нуля μ. Напр., пусть система (4) имеет периодич. или почти периодич. решение $x=\psi(t)$, будет ли при этом система (5) обладать периодич. или почти периодич. решением $x=\varphi(t, \mu)$ таким, что

$$\lim_{\mu\to 0}\varphi(t, \mu)=\psi(t)?$$

Еще А. Пуанкаре [2] разработал мощные методы для решения такого рода проблем. В ряде случаев им было не только доказано существование периодич. решения, но и указан алгоритм для его построения (см., напр.,[5]).

Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов и их ученики (см. [3], [6], [11]) развивали для систем вида (5) асимптотич. методы. Среди этих методов особо важную роль играет метод осреднения, к-рый состоит в следующем. Рассматривается так наз. стандартная система:

$$\frac{dx}{dt}=\mu X(x, t, \mu). \tag{6}$$

Оказывается, что к такой системе могут быть сведены многие системы теории нелинейных колебаний. Наряду с системой (6) рассматривается «осредненная» система

$$\frac{dy}{dt}=\mu Y(y), \tag{7}$$

где

$$Y=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t X(x, \tau, 0)\,d\tau.$$

Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов показали, что система (7) приближает систему (6) с точностью до величин порядка μ^2. С помощью дальнейших осреднений можно избавиться от зависимости от t в членах сколь угодно высокого порядка малости по μ. Однако этот процесс, как правило, расходится, так что описанный метод является по существу асимптотическим.

Весьма важную роль в теории нелинейных колебаний играет метод интегральных поверхностей. Основы этого метода были заложены А. М. Ляпуновым [1]. При весьма общих предположениях было доказано (см. [3], [6], [11]), что если «порождающая» система (4) имеет интегральную поверхность с определенными свойствами, то и система (5) обладает такой же интегральной поверхностью.

С описанным кругом проблем тесно связана теория *релаксационных колебаний*. Эти колебания описываются системами дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных:

$$\frac{dx}{dt}=X(x, y, t, \mu), \quad \mu\frac{dy}{dt}=Y(x, y, t, \mu), \tag{8}$$

где x и X — n-мерные векторы, y и Y — m-мерные векторы, а μ — малый параметр. Наряду с системой (8) рассматривается вырожденная система:

$$\frac{dx}{dt}=X(x, y, t, 0), \quad Y(x, y, t, 0)=0. \tag{9}$$

Если система (9) имеет специальное «разрывное» периодическое решение, то и (8) в ряде случаев располагает при малых μ истинным периодич. решением (см. [12]).

В приложениях весьма часто встречаются системы дифференциальных уравнений, в к-рых нельзя выделить никаких малостей. Здесь сталкиваются с нелокальными проблемами К. т. При исследовании нелокальных проблем возникают весьма серьезные трудности. Однако в ряде частных, но важных для приложений, случаев удается провести полное исследование соответствующей системы или получить достаточно существенную информацию о поведении ее решений. Напр., для уравнения

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0, \tag{10}$$

представляющего собой обобщение *Ван дер Поля уравнения*, Н. Левинсон и О. Смит [15] доказали существование, устойчивость и единственность предельного цикла. При доказательстве существенно использовался тот факт, что уравнение (10) есть уравнение 2-го порядка. В дальнейшем было доказано существование периодич. решения у нелинейного уравнения 3-го порядка и различных автономных систем высших порядков.

При исследовании периодических неавтономных систем, т. е. систем вида (4), у к-рых $X(x, t+\omega)=X(x, t)$, с системой связывают ее преобразование Пуанкаре T, вводимое формулой $Tx_0=x(\omega, 0, x_0)$, где $x(t, t_0, x_0)$ — решение системы (4) такое, что $x(t_0, t_0, x_0)=x_0$. Если x^* есть неподвижная точка преобразования T, то решение $x(t, 0, x^*)$ имеет период ω по t. Это дает возможность для доказательства существования периодич. решений применять различные теоремы о существовании неподвижной точки (см. [8], [9]).

В теории нелинейных колебаний важную роль играют диссипативные системы (это такие системы вида (4), у к-рых все решения при достаточно больших t остаются в фиксированном шаре) и системы с конвергенцией (у таких систем все решения сходятся к одному устойчивому); разработаны достаточно надежные методы доказательства конвергентности и диссипативности конкретных систем [8].

Поведение решений диссипативной периодич. системы во многом определяется структурой нек-рого асимптотически устойчивого интегрального множества этой системы. Поэтому для теории нелинейных колебаний существенно исследование структуры таких множеств. В случае, если заданная система имеет лишь конечное число периодич. решений, такое множество удается охарактеризовать достаточно полно [13]. Если же система имеет бесконечно много периодич. решений, то в этом случае оказывается, что асимптотически устойчивые интегральные множества имеют чрезвычайно сложную структуру [13]. Исследование таких систем связано, как правило, с преодолением значительных трудностей, и его удается провести лишь в исключительных случаях. Пример такого исследования дан М. Картрайт и Дж. Литлвудом [16] при исследовании уравнения Ван дер Поля с вынуждением:

$$\ddot{x}+k(x^2-1)\dot{x}+x=kb\sin t.$$

В частности, они показали, что это уравнение при соответствующем выборе параметров b и k имеет бесконечно много периодич. решений.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Хар., 1892; [2] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste, t. 1, P., 1892; [3] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Новые методы нелинейной механики, М.—Л., 1934; [4] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., 1949; [5] Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М.—Л., 1956; [6] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 3 изд., М., 1963; [7] Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963; [8] Плисс В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М.— Л., 1964; [9] Красносельский М. А., Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М., 1966; [10] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами, М., 1972; [11] Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б., Интегральные многообразия в нелинейной механике, 1973; [12] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975; [13] Плисс В. А., Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений, М., 1977; [14] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 91—192; [15] Levinson N., Smit O. K., «Duke Math. J.», 1942, v. 9, p. 382—403; [16] Littlewood J. E., «Acta math.», 1957, v. 97, № 3—4, p. 267—308. *В. А. Плисс.*

КОЛЕБЛЮЩЕЕСЯ РЕШЕНИЕ — решение $x(t)$ дифференциального уравнения

$$x^{(n)}=f(t,\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(n-1)}),\quad t\in[t_0,\ \infty),\qquad (*)$$

обладающее свойством: для любого $t_1\geqslant t_0$ найдется точка $t_2>t_1$, при переходе через к-рую функция $x(t)$ меняет знак. Во многих прикладных задачах возникает вопрос о существовании К. р. или о колеблемости всех решений уравнения (*). Известно много достаточных условий, при к-рых уравнение (*) имеет К. р. (см. [1] — [3]). Напр., любое нетривиальное решение уравнения $x''+2\delta x'+\omega^2x=0$ с постоянными коэффициентами колеблется, если $\delta^2<\omega^2$; любое нетривиальное решение уравнения

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0$$

с ω-периодическими коэффициентами колеблется, если

$$\int_0^\omega dt\int_t^{t+\omega}q(s)\exp\left(-\int_s^t p(r)\,dr\right)ds\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{1}{2}\left(1-\exp\int_0^\omega p(t)\,dt\right)\int_0^\omega p(t)\,dt$$

и $q(t)\not\equiv 0$ на $[0,\ \omega]$.

В ряде приложений возникает вопрос о К. р. (в определенном смысле) системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Напр., в теории регулирования изучают колеблемость относительно заданной гиперплоскости $\sum_{i=1}^n c_ix_i=0$ решений $x(t)=(x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t))$ системы уравнений $x'=f(t,\ x)$, т. е. вопрос о колеблемости функции $\sigma(t)=\sum_{i=1}^n c_ix_i(t)$. Изучают также $[\alpha,\ \beta]$-колеблющиеся решения, при этом ограниченное решение $x(t)$ системы $x'=f(t,\ x)$ наз. $[\alpha,\ \beta]$-*колеблющимся*, если функция $\sigma(t)$ колеблется и для любого $t_1\geqslant t_0$ найдутся точки t_2 и t_3 такие, что $t_1<t_2<t_3$, $\sigma(t_2)<\alpha$, $\sigma(t_3)>\beta$, причем $\alpha<0<\beta$. Для системы (2) существуют и др. определения колеблемости решений.

Лит.: [1] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [2] Swanson C. A., Comparison and oscillation theory of linear differential equations, N. Y.— L., 1968; [3] Кигурадзе И. Т., Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, Тб., 1975. *Ю. В. Комленко, Е. Л. Тонков.*

КОЛЕЦ МНОГООБРАЗИЕ — класс колец $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих заданной системе полиномиальных тождеств. К. м. можно определить аксиоматически, как наследственный класс алгебр, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и полных прямых сумм (см. *Алгебраических систем многообразие*). Так как совокупность полиномиальных тождеств, выполнимых в данном кольце, образует вполне характеристич. идеал (*T-идеал*) свободного кольца, то существует взаимно однозначное соответствие между многообразиями колец и T-идеалами счетно порожденного свободного кольца. Если для К. м. имеет место включение $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{M}$, то говорят, что $\mathfrak{N}$ является подмногообразием в $\mathfrak{M}$. Многообразие, соответствующее T-идеалу тождеств кольца A, наз. многообразием, порожденным кольцом A. Каждое многообразие колец порождается своим «универсальным объектом» — свободным кольцом данного многообразия, к-рое обладает свободной системой образующих: всякое отображение множества свободных образующих в произвольное кольцо из многообразия продолжается до гомоморфизма.

Пусть M_n— многообразие, порожденное алгеброй квадратных матриц порядка n. Для всякого многообразия ассоциативных колец нулевой характеристики (т. е. колец, аддитивная группа к-рых без кручения) существует такое натуральное число $n=n(\mathfrak{M})$, что $M_n\subseteq\mathfrak{M}$, но $M_{n+1}\not\subseteq\mathfrak{M}$. Многообразие колец наз. шпехтовым, если всякое его кольцо обладает конечным базисом тождеств. Многообразие, порожденное конечным ассоциативным кольцом или конечным кольцом Ли, является шпехтовым. Вопрос о том, всякое ли многообразие ассоциативных алгебр шпехтово, составляет содержание (пока открытой, 1978) проблемы Шпехта. Если многообразие $\mathfrak{M}$ порождено ассоциативной алгеброй с конечным числом образующих над полем нулевой характеристики и $M_2\not\subseteq\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ шпехтово.

См. также PI-*алгебра*.

Лит.: [1] Procesi C., Rings with polynomial identities, N. Y., 1973; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968. *В. Н. Латышев.*

КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ — векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. Для того чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны. Нулевой вектор коллинеарен всякому вектору. Аналогично, коллинеарными наз. точки, лежащие на одной прямой. *А. Б. Иванов.*

КОЛЛИНЕАЦИЯ — *проективное преобразование* проективного пространства Π_n, представимое в виде произведения конечного числа перспектив; если ν есть К., то для любого подпространства S_q существует такое произведение π не более чем $q-1$ перспектив, что $\nu(S_p)=\pi(S_p)$ для любого $S_p\subset S_q$. Напр., проективное преобразование, оставляющее неподвижной каждую точку нек-рой прямой, является К.,— это гомология (в узком смысле).

Пусть Π_n интерпретируется как совокупность подпространств линейного пространства $A^e_{n+1}(K)$ над телом K. Для того чтобы проективное преобразование было К., необходимо и достаточно, чтобы оно индуцировалось линейным преобразованием $A^e_{n+1}(K)$. Совокупность всех К. образует подгруппу G_0 группы проективных преобразований G, являющуюся нормальным делителем G.

К. тогда и только тогда исчерпывают все проективные преобразования, когда каждый автоморфизм тела K является внутренним. Поле обладает этим свойством в том и только в том случае, когда любой его автоморфизм — тождественный, таково, напр., поле действительных чисел $\mathbb{R}$. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ этим свойством не обладает, в то время как каждый автоморфизм тела кватернионов $\mathbb{H}$ является внутренним. Если K — некоммутативное тело, то существует нетождественная К., оставляющая неподвижной каждую точку данного симплекса. Каждый симплекс тогда и только тогда отображается на любой другой симплекс одной и только одной К., когда K — поле (вторая основная теорема проективной геометрии). *М. И. Войцеховский.*

КОЛЛОКАЦИИ МЕТОД — проекционный метод решения интегральных и дифференциальных уравнений, в к-ром приближенное решение определяется из условия удовлетворения уравнению в нек-рых заданных точках. Напр., для приближенного решения интегрального уравнения

$$u(t)=\int_a^b K(t,\ s,\ u(s))\,ds+f(t)$$

выбираются нек-рое n-параметрич. семейство функций

$\varphi(t, c_1, \ldots, c_n)$ и нек-рые точки (**у з л ы к о л л о к а ц и и**) $t_1, \ldots, t_n$ на отрезке $[a, b]$. Приближенное решение $u_n(t)=\varphi(t, c_1, \ldots, c_n)$ определяется из условий

$$u_n(t_i)=\int_a^b K(t_i, s, u_n(s))\,ds+f(t_i), \quad i=1, \ldots, n,$$

представляющих собой систему n уравнений относительно неизвестных $c_1, \ldots, c_n$. Если данное уравнение линейно, а приближенное решение ищется в виде линейной комбинации $u_n(t)=c_1\varphi_1(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t)$ заданных (так наз. координатных) функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, то и система уравнений относительно $c_1, \ldots, c_n$ получается линейная.

С х о д и м о с т ь К. м. д л я л и н е й н ы х к р а е в ы х з а д а ч. Пусть поставлена краевая задача

$$Lu=u^{(m)}+a_1(t)\,u^{(m-1)}+\ldots+a_m(t)\,u=f(t), \quad (1)$$
$$-1<t<1;$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}[\alpha_{ij}u^{(j)}(-1)+\beta_{ij}u^{(j)}(1)]=0, \quad i=1, \ldots, m. \quad (2)$$

Приближенное решение задачи разыскивается в виде

$$u_n(t)=c_1\varphi_1(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t),$$

где $\varphi_j(t)$ — некоторый многочлен степени $m+j-1$, удовлетворяющий краевым условиям (2). Коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ определяются из линейной системы

$$[Lu_n-f]_{t=t_i}=0, \quad i=1, \ldots, n, \quad (3)$$

с чебышевскими узлами $t_i=t_i^{(u)}=\cos\frac{2i-1}{2n}\pi$, $i=1,\ldots,n$. Справедлива следующая теорема [1]. Пусть функции f и a_j, $j=1, \ldots, m$, непрерывны на $[-1, 1]$ и пусть краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $u(t)$. Тогда существует n_0 такое, что при $n\geqslant n_0$ система (3) однозначно разрешима, и

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}\left|u_n^{(k)}(t)-u^{(k)}(t)\right|\leqslant cE_n(u^{(m)})\longrightarrow 0,$$
$$k=0, 1, \ldots, m-1,$$

$$\left\{\int_{-1}^{1}\frac{\left|u_n^{(m)}(t)-u^{(m)}(t)\right|^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right\}^{1/2}\leqslant cE_n(u^{(m)})\longrightarrow 0,$$

где $c=\mathrm{const}$,

$$E_n(v)=\min_{b_0, \ldots, b_{n-1}}\ \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}\left|v(t)-\sum_{j=0}^{n-1}b_jt^j\right|.$$

Аналогичный результат верен (см. [1]), если узлы корни ортогональных по какому-либо весу многочленов. При равноотстоящих узлах рассматриваемый метод расходится.

Развиваются также эффективные вычислительные схемы К. м. с координатными сплайн-функциями (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [2] R u s s e l l R. D., S h a m p i n e L. F., «Numerische Mathematik», 1972, Bd 19, № 1, S. 1—28; [3] B o o r C. de, S w a r t z B., «SIAM Journal of Numerical Analysis», 1973, v. 10, № 4, p. 582—606. *Г. М. Вайникко.*

КОЛМОГОРОВА АКСИОМА, а к с и о м а T_0, — самая слабая из всех *отделимости аксиом* в общей топологии; введена А. Н. Колмогоровым. Топологич. пространство удовлетворяет этой аксиоме, или есть T_0-п р о с т р а н с т в о, п р о с т р а н с т в о К о л м о г о р о в а, если, каковы бы ни были две различные точки пространства, в этом пространстве существует открытое множество, содержащее одну из этих точек, но не содержащее другую. Если потребовать, чтобы каждая из двух (произвольно данных) точек содержалась в открытом множестве, не содержащем другую точку, то получим следующую по силе аксиому отделимости, называемую аксиомой T_1; удовлетворяющие ей топологич. пространства наз. T_1-пространствами. Простейшим примером T_0-пространства, не являющегося T_1-пространством, служит связное *двоеточие*.

В T_0-пространстве одноточечные множества могут не быть замкнутыми; T_1-пространства могут быть определены как такие T_0-пространства, в к-рых все одноточечные множества замкнуты. T_0-пространство, в к-ром пересечение любого числа открытых множеств открыто, наз. дискретным (в широком смысле) пространством. В таком и только в таком пространстве замыкание объединения любого числа множеств совпадает с объединением замыканий этих множеств. В любом дискретном пространстве и даже в любом пространстве Колмогорова может быть определен (частичный) порядок между его точками x и y : пишем $x \leqslant y$, если точка x содержится в замыкании одноточечного множества, состоящего из точки y. Обратно, определяя в произвольном частично упорядоченном множестве замыкание какой-либо точки x как множество всех точек $x' \leqslant x$ и называя замыканием любого множества объединение замыканий всех его точек, получим дискретное пространство. Таким образом, изучение дискретных пространств равносильно изучению частично-упорядоченных множеств. К важным примерам дискретных пространств относятся симплициальные (и более общие) комплексы комбинаторной топологии: для симплексов x, y отношение порядка $x \leqslant y$ означает, что x есть грань (возможно, несобственная) симплекса y.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977. *В. И. Зайцев.*

КОЛМОГОРОВА ДВОЙСТВЕННОСТЬ — двойственность в алгебраич. топологии, состоящая в изоморфизме

$$H_r(A, G) \sim H_{r+1}(R \setminus A, G)$$

r-мерной группы гомологии $H_r(A, G)$ замкнутого множества A хаусдорфова локально компактного пространства R с нулевыми r- и $(r+1)$-мерными группами гомологий $(r+1)$-мерной группе гомологии с абелевой группой коэффициентов G дополнения $R \setminus A$ и в изоморфизме

$$H^r(A, G) \sim H^{r+1}(R \setminus A, G)$$

соответствующих групп когомологии при $H^r(R, G)=0$ и $H^{r+1}(R, G)=0$.

Группы гомологии и когомологии, участвующие в этих изоморфизмах, определяются так. За r-мерную цепь принимается любая кососимметрическая, аддитивная относительно каждого аргумента функция $c_r(e_0, e_1, \ldots, e_r)$ от $r+1$ подмножеств пространства R, имеющих компактные замыкания, принимающая значения из G и равная нулю, когда пересечение $\bar{e}_0 \cap \ldots \cap \bar{e}_r$ пусто. Граничный оператор ∂ определяется по формуле

$$\partial c_r(e_0, \ldots, e_{r-1}) = c_r(U, e_0, \ldots, e_{r-1}),$$

где U — любое открытое множество из R с компактным замыканием, содержащее $\bar{e}_0 \cup \ldots \cup \bar{e}_{r-1}$. Циклами считаются цепи c_r с нулевыми границами, $\partial c_r = 0$, а циклами, гомологичными нулю,— цепи c_r, являющиеся границами, $c_r = \partial c_{r+1}$. Группа $Z_r(R, G)$ всех r-мерных циклов по обычному сложению функций содержит группу $B_r(R, G)$ всех r-мерных границ в качестве подгруппы. Факторгруппа $Z_r(R, G)/$ $/B_r(R, G)$ и есть группа $H_r(R, G)$. Группу G коэффициентов А. Н. Колмогоров всегда рассматривал как компактную группу и компактно топологизировал и группу гомологии. Однако на построение группы гомологии топология группы коэффициентов не оказывает влияния, и гомологии можно брать над любой абелевой группой.

Для определения коцепей рассматриваются такие кососимметрические функции $f^r(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ от $r+1$

точек $x_0, x_1, \ldots, x_r$ пространства R со значениями в G, что для каждой f^r существует конечная система S_{f^r} попарно непересекающихся подмножеств из R с компактными замыканиями, удовлетворяющая условиям: $f^r(x_0, \ldots, x_r)=f^r(x_0', \ldots, x_r')$, если x_i и x_i' принадлежат одному и тому же элементу системы S_{f^r} для любого i; $f^r(x_0, \ldots, x_r)=0$, если хотя бы одно x_i не содержится ни в каком элементе из S_{f^r}. Кограничный оператор δ определяется по формуле

$$\delta f^r(x_0, \ldots, x_{r+1})= \\ =\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i f^r(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{r+1}).$$

Функции f_1^r и f_2^r считаются эквивалентными, если каждая точка x из R имеет такую окрестность U, что $f_1^r(x_0, \ldots, x_r)=f_2^r(x_0, \ldots, x_r)$, как только все x_i принадлежат U, и за коцепь принимается класс эквивалентных функций. Кограница коцепи определяется как класс кограниц входящих в эту коцепь функций. Коцикл есть коцепь c^r с нулевой кограницей, $\delta c^r=0$, а когомологичным нулю считается коцикл, являющийся кограницей, $c^r=\delta c^{r-1}$. Группа $B^r(R, G)$ всех r-мерных кограниц есть подгруппа группы $Z^r(R, G)$ всех r-мерных коциклов; фактор-группа $Z^r(R, G)/B^r(R, G)$ и есть группа $H^r(R, G)$.

Определенные так группы гомологии и когомологии, часто называемые функциональными, были введены А. Н. Колмогоровым [1]. Тогда же, кроме выше указанных изоморфизмов двойственностей, им были доказаны двойственность между гомологиями и когомологиями $H_r(R, G^*) \mid H^r(R, G)$ в смысле теории характеров Понтрягина, когда компактная группа G^* двойственна группе G, и двойственности Пуанкаре

$$H_r(R, G^*) \sim \tilde{H}^{n-r}(R, G^*), \quad H^r(R, G) \sim \tilde{H}_{n-r}(R, G),$$

где R — открытое n-мерное многообразие, $H_r(R, G^*)$ и $H^r(R, G)$ — функциональные группы над компактной (соответственно, дискретной) группой G^* (соответственно G), $\tilde{H}^{n-r}(R, G^*)$ и $\tilde{H}_{n-r}(R, G)$ — группы когомологии (соответственно гомологии) бесконечных коцепей (соответственно конечных цепей) произвольного клеточного разбиения многообразия R.

В случае, когда R есть n-мерное евклидово пространство, из указанных двойственностей получается теорема двойственности Понтрягина (см. *Александера двойственность*). Частным случаем этих двойственностей является и теорема двойственности Стинрода (см. *Двойственность* в алгебраич. топологии), поскольку К. д. для гомологии справедлива и для произвольной группы коэффициентов [2].

Функциональные группы гомологии изоморфны: группам Вьеториса (см. *Вьеториса гомологии*) в случае компактных метрич. пространств и компактной группы коэффициентов [1]; спектральным группам гомологии Александрова относительно особых подкомплексов [3] в случае локально компактных пространств и компактной группы коэффициентов [4] и, следовательно: группам гомологии Александрова — Чеха одноточечной компактификации данного локально компактного пространства [5]; группам гомологии Стинрода [8] в случае компактных метрич. пространств и произвольной группы коэффициентов [7]. Таким образом, гомологии Колмогорова, введенные на четыре года раньше гомологий Стинрода, представляют собой и их обобщение на более широкий класс пространств.

Функциональные гомологии и когомологии удовлетворяют всем *Стинрода — Эйленберга аксиомам* на категории локально компактных пространств с допустимыми отображениями (т. е. когда прообраз каждого компактного множества компактен) [6] и, кроме того, двум аксиомам Милнора на категории компактных метрич. пространств [7].

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 202, p. 1144—47; 1325—27; 1558—60; 1641—43; [2] Мдзинаришвили Л. Д., «Докл. АН СССР», 1974, т. 216, № 3, с. 502—04; [3] Александров П. С., «Уч. зап. МГУ», 1940, т. 45, с. 1—60; [4] Чогошвили Г. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1951, т. 15, № 5, с. 421—38; [5] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, М., 1958; [6] Балавадзе М. Б., «Тр. Тбил. матем. ин-та», 1972, т. 41, с. 5—40; [7] Мдзинаришвили Л. Д., «Тр. Тбил. матем. ин-та», 1972, т. 41, с. 143—63; [8] Steenrod N., «Ann. Math.», 1940, v. 41, p. 831—51. *Г. С. Чогошвили.*

КОЛМОГОРОВА ИНТЕГРАЛ — общая схема построения интеграла, включающая в себя *Лебега — Стилтьеса интеграл*, *Бёркиля интеграл*, *Хеллингера интеграл* и др. Предложена А. Н. Колмогоровым [1]. Рассматривается направленное семейство разбиений пространства E произвольной природы. На элементах разбиения определена функция множества Ф, вообще говоря многозначная. Сумма значений этой функции, взятая по всем элементам разбиения, задает многозначную функцию разбиения. Эта сумма представляет собой, в частности, обобщение суммы Римана $\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$, где многозначность является следствием произвольности выбора точек ξ_i на элементах разбиения. Предел многозначной функции разбиения по направлению и определяет К. и. $\int_E d\Phi$. К. и. рассматривается как для конечных, так и для счетных разбиений. Можно рассматривать К. и. от функций со значениями в коммутативной топологич. группе.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1930, Bd 103, S. 654—96. *В. А. Скворцов.*

КОЛМОГОРОВА КРИТЕРИЙ — статистический критерий, применяемый для проверки простой непараметрической гипотезы H_0, согласно к-рой независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют заданную непрерывную функцию распределения $F(x)$, причем альтернативная гипотеза H_1 предполагается двусторонней:

$$|\mathsf{E}F_n(x)-F(x)|>0,$$

где $\mathsf{E}F_n$ — математическое ожидание функции эмпирического распределения $F_n(x)$. Критическое множество К. к. выражается неравенством

$$D_n=\sup_{|x|<\infty}|F_n(x)-F(x)|>\lambda_n$$

и основано на теореме, доказанной А. Н. Колмогоровым в 1933: в случае справедливости гипотезы H_0 распределение статистики D_n не зависит от функции $F(x)$, причем если $n\to\infty$, то

$$\mathsf{P}\left\{\sqrt{n}\,D_n<\lambda\right\}\to K(\lambda),\quad \lambda>0,$$

где
$$K(\lambda)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{-2m^2\lambda^2}.$$

В 1948 Н. В. Смирнов [4] табулировал функцию распределения Колмогорова $K(\lambda)$. Согласно К. к. с уровнем значимости α, $0<\alpha<0{,}5$, гипотезу H_0 следует отвергнуть, если $D_n\geqslant\lambda_n(\alpha)$, где $\lambda_n(\alpha)$ — критическое значение К. к., соответствующее заданному уровню значимости α и являющееся корнем уравнения $\mathsf{P}\{D_n\geqslant\lambda\}=\alpha$.

Для определения $\lambda_n(\alpha)$ рекомендуется пользоваться аппроксимацией допредельного закона статистики Колмогорова D_n ее предельным распределением; см. [3], где показано, что если $n\to\infty$ и $0<\lambda_0<\lambda=O(n^{1/3})$, то

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{18n}(6nD_n+1)^2\geqslant\lambda\right\}=$$
$$=\left[1-K\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \qquad (*)$$

Применение аппроксимации (*) дает следующее приближение критического значения

$$\lambda_n(\alpha) \approx \sqrt{\frac{z}{2n} - \frac{1}{6n}},$$

где z — корень уравнения $1 - K(\sqrt{\lambda/2}) = \alpha$.

На практике для вычисления значения статистики D_n пользуются тем обстоятельством, что

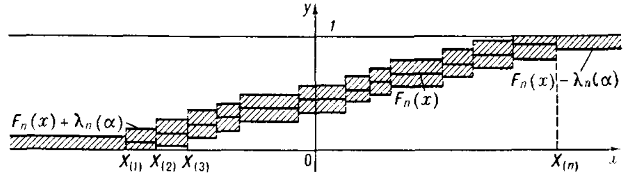
$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-),$$

где

$$D_n^+ = \max_{1 \leqslant m \leqslant n} \left(\frac{m}{n} - F(X_{(m)}) \right),$$

$$D_n^- = \max_{1 \leqslant m \leqslant n} \left(F(X_{(m)}) - \frac{m-1}{n} \right),$$

$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)}$ — *вариационный ряд*, построенный по выборке $X_1, \ldots, X_n$. К. к. имеет следующее геометрич. истолкование (см. рис.). Изобразим на



плоскости xOy графики функций $F_n(x)$, $F_n(x) \pm \lambda_n(\alpha)$. Заштрихованная область является доверительной зоной уровня $1-\alpha$ для функции распределения $F(x)$, так как если гипотеза H_0 верна, то согласно теореме Колмогорова

$$\mathsf{P}\{F_n(x) - \lambda_n(\alpha) < F(x) < F_n(x) + \lambda_n(\alpha)\} \approx 1 - \alpha.$$

Если график функции $F(x)$ не выходит из заштрихованной области, то по К. к. с уровнем значимости α гипотезу H_0 следует принять, в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

К. к. дал мощный толчок развитию математич. статистики, в результате чего были получены совершенно новые методы статистич. исследований, к-рые легли в основу непараметрич. статистики.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Giorn. Istit. Ital. Attuari», 1933, v. 4, p. 83—91; [2] Смирнов Н. В., «Бюлл. МГУ», секц. А, 1939, т. 2, в. 2, с. 3—14; [3] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, с. 129—55; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968. *М. С. Никулин.*

КОЛМОГОРОВА НЕРАВЕНСТВО — 1) К. н. в теории приближений — мультипликативное неравенство между нормами в пространствах $L_s(J)$ функций и их производных на действительной оси (или полуоси):

$$\|x^{(k)}\|_{L_q} \leqslant C \|x\|_{L_r}^{\nu} \cdot \|x^{(n)}\|_{L_p}^{1-\nu},$$

где $0 \leqslant k < n$, $\nu = \left(n - k - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Big/ \left(n - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)$,

а C не зависит от x. Впервые такие неравенства изучали Г. Харди (G. Hardy, 1912), Дж. Литлвуд (J. Littlewood, 1912), Э. Ландау (E. Landau, 1913), Ж. Адамар (J. Hadamard, 1914). А. Н. Колмогоров [1] нашел наименьшую константу C для наиболее важного случая $J = (-\infty, +\infty)$, $p = q = r = \infty$ и любых k, n.

К. н. связаны с задачей наилучшего численного дифференцирования и устойчивого вычисления (неограниченного) оператора D^k k-кратного дифференцирования. Именно, модуль непрерывности

$$\omega(\delta) = \sup\{\|x^{(k)}\|_{L_q} : \|x\|_{L_r} \leqslant \delta, \quad \|x^{(n)}\|_{L_p} \leqslant 1\}$$

оператора D^k на классе $\{x \in L_r : ||x^n||_{L_p} \leqslant 1\}$ выражается формулой $\omega(\delta) = \omega(1)\delta$, т. е. имеет место К. н. с константой $C = \omega(1)$.

К. н.— частный случай неравенств, связанных с вложением классов дифференцируемых функций (см. *Вложения теоремы*).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Ученые зап. Моск. ун-та, математика», 1939, в. 30, кн. 3, с. 3—16; [2] Стечкин С. Б., «Матем. заметки», 1967, т. 1, в. 2, с. 137—48; [3] Тайков Л. В., «Матем. заметки», 1968, т. 4, в. 2, с. 233—238; [4] Арестов В. В., «Acta Sci. Math.», 1972, v. 33, р. 243—67. *Ю. Н. Субботин.*

2) К. н. в теории вероятностей — неравенство для максимума сумм независимых случайных величин — обобщение классического *Чебышева неравенства.* Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$— независимые случайные величины с конечными математич. ожиданиями $a_n = \mathsf{E}X_n$ и дисперсиями $\sigma_n^2 = \mathsf{D}X_n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1 \leqslant m \leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k - a_k)\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2,$$

и если величины ограничены ($|X_i| \leqslant c$ с вероятностью 1), то

$$1 - \frac{(\varepsilon+2c)^2}{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2} \leqslant \mathsf{P}\left\{\max_{1 \leqslant m \leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k - a_k)\right| \geqslant \varepsilon\right\}.$$

К. н. установлено А. Н. Колмогоровым [1]. К. н. замечательно как доказательством — способ рассуждений был новым в теории вероятностей, так и самим результатом — оценка для максимума сумм такова же, что и для последней суммы в неравенстве Чебышева.

При доказательстве К. н. существенно используются вытекающие из взаимной независимости X_k свойства условных математич. ожиданий функций от сумм S_{k+p} при условии, что $X_1, \ldots, X_k$ фиксированы.

К. н. допускает многочисленные обобщения, из которых можно отметить следующие:

1) К. н. остается справедливым, если условие взаимной независимости величин X_n заменить условием, что $\{X_n\}$ есть *абсолютно беспристрастная последовательность*, т. е. что последовательность сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n}X_k$ образует мартингал.

2) Если $g(t) \geqslant 0$ — выпуклая монотонная функция, $\mathsf{E}g(|S_n|) < \infty$, то

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1 \leqslant m \leqslant n}|S_m| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \mathsf{E}g(|S_n|)\frac{1}{g(\varepsilon)}.$$

3) Если X_k, $k=1, \ldots, n$, симметричны относительно начала координат, то

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1 \leqslant m \leqslant n}|S_m| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant 2\mathsf{P}\{|S_n| \geqslant \varepsilon\},$$

см. *Леви неравенство.*

4) Для произвольных независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1 \leqslant m \leqslant n}|S_m| > \delta + \varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{1-p}\mathsf{P}\{|S_n| > \varepsilon\},$$

если только числа $\delta > 0$ и $0 < p < 1$ выбраны так, что $\mathsf{P}\{|S_m| > \delta\} \leqslant p$ при всех m, $1 \leqslant m \leqslant n$.

Во всех вариантах К. н. можно увидеть следующее свойство сумм независимых величин — «размах» максимальной суммы имеет тот же порядок, что и «размах» последней суммы.

Как неравенство Чебышева применяется при выводе *больших чисел закона*, так и К. н. применяется при доказательстве *больших чисел усиленного закона* (критерий Колмогорова сходимости $S_n/n \to 0$ почти всюду). На использовании К. н. основано доказательство теорем о сходимости рядов из случайных величин.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1928, Bd 99, S. 309—19; 1929, Bd 102, S. 484—88; [2] его же, Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962. *А. В. Прохоров.*

КОЛМОГОРОВА ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, удовлетворяющее *Колмогорова аксиоме*.

КОЛМОГОРОВА УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -A_s f \tag{1}$$

(обратное, или первое, уравнение; $s < t$)
или вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A_t^* f \tag{2}$$

(прямое, или второе, уравнение; $t > s$)

для *переходной функции* [$f = P(s, x; t, \Gamma)$, $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, $(E, \mathfrak{B})$ — измеримое пространство] или ее плотности [$f = p(s, x; t, \Gamma)$, если она существует], к уравнению (1) для переходной функции $P(s, x; t, \Gamma)$ присоединяется условие

$$\lim_{s \uparrow t} P(s, x; t, \Gamma) = I_\Gamma(x),$$

а к уравнению (2) — условие

$$\lim_{t \downarrow s} P(s, x; t, \Gamma) = I_\Gamma(x),$$

где $I_\Gamma(x)$ — индикатор множества Γ; в этом случае оператор A_s — оператор, действующий в пространстве функций, а A_t^* — в пространстве обобщенных мер.

Для марковских процессов со счетным множеством состояний переходная функция полностью определяется вероятностями перехода $p_{ij}(s, t) = P(s, i; t, \{j\})$ (из состояния i в момент s в состояние j в момент t), для к-рой обратное и прямое уравнения Колмогорова имеют (при некоторых дополнительных предположениях) следующий вид:

$$\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial s} = \sum_k \alpha_{ik}(s)\, p_{kj}(s, t), \quad s < t, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial t} = \sum_k p_{ik}(s, t)\, \alpha_{kj}(t), \quad t > s, \tag{4}$$

где

$$\alpha_{ij}(s) = \lim_{s_1 \uparrow s,\ s_2 \uparrow s} \frac{p_{ij}(s_1, s_2) - \delta_{ij}}{s_2 - s_1}. \tag{5}$$

В случае конечного числа состояний уравнения (3), (4) справедливы, если только предположить существование пределов в (5).

Другой важный класс процессов, для к-рых детально изучен вопрос о справедливости уравнений (1) и (2), — это процессы диффузионного типа, определяемые тем, что их переходная функция $P(s, x; t, \Gamma)$, $x \in \mathbb{R}$, $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям: а) для всякого $x \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ равномерно по s, $s < t$,

$$\int_{|x-y| > \varepsilon} P(s, x; t, dy) = o(t-s),$$

б) существуют функции $a(s, x)$ и $b(s, x)$ такие, что для всякого x и $\varepsilon > 0$ равномерно по s, $s < t$,

$$\int_{|x-y| \leqslant \varepsilon} (y-x)\, P(s, x; t, dy) = a(s, x)(t-s) + o(t-s),$$

$$\int_{|x-y| \leqslant \varepsilon} (y-x)^2\, P(s, x; t, dy) = b(s, x)(t-s) + o(t-s).$$

Тогда, если существует плотность $p = p(s, x; t, y)$, то (при некоторых дополнительных предположениях) справедливо (по $t > s$ и $y \in \mathbb{R}$) прямое уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(ap) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(bp)$$

(называемое также уравнением Фоккера — Планка), а обратное уравнение (по $s < t$ и $x \in \mathbb{R}$) имеет следующий вид

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 5—41; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973. *А. Н. Ширяев.*

КОЛМОГОРОВА — СЕЛИВЕРСТОВА ТЕОРЕМА: если выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)W(n)<\infty$$

с $W(n)=\log n$, то ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

сходится почти всюду. Установлена А. Н. Колмогоровым и Г. А. Селиверстовым (см. [1], [2]). В [1] доказано, что можно брать $W(n)=\log^{1+\delta}n$ для любого $\delta>0$, а в [2] было усилено это утверждение: доказана его справедливость и при $\delta=0$. Это усиление было получено также А. И. Плеснером [3]. До К.—С. т. была известна теорема Г. Х. Харди (G. H. Hardy, 1916), где $W(n)=\log^2 n$. К.—С. т. оставалась наиболее сильным результатом в этом направлении до 1966, когда была доказана *Карлесона теорема*, согласно к-рой можно брать $W(n)\equiv 1$. С. Качмаж [4] перенес К.—С. т. с тригонометрической системы на произвольные ортонормированные системы, показав, что для сходимости рядов по таким системам почти всюду на нек-ром множестве в качестве $W(n)$ можно брать монотонную мажоранту функций Лебега на этом множестве.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Селиверстов Г. А., «C. r. Acad. sci.», 1924, t. 178, p. 303—06; [2] их же, «Atti Accad. naz. Lincei», 1926, v. 3, p. 307—10; [3] Plessner A., «J. reine und angew Math.», 1925, Bd 155, S. 15—25; [4] Kaczmarz S., «Studia math.», 1929, t. 1, p. 87—121. *С. А. Теляковский.*

КОЛМОГОРОВА — СМИРНОВА КРИТЕРИЙ — непараметрический критерий, применяемый для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют заданную непрерывную функцию распределения $F(x)$ против односторонней альтернативы H_1^+: $\sup\limits_{|x|<\infty}(\mathsf{E}F_n(x)-F(x))>0$, где $\mathsf{E}F_n(x)$ — математическое ожидание функции эмпирического распределения $F_n(x)$. К.— С. к. построен на статистике

$$D_n^+=\sup_{|x|<\infty}(F_n(x)-F(x))=\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left(\frac{m}{n}-F(X_{(m)})\right),$$

где $X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\ldots\leqslant X_{(n)}$ — вариационный ряд, полученный по выборке $X_1, \ldots, X_n$. Таким образом, К.—С. к. является вариантом *Колмогорова критерия* для проверки гипотезы H_0 против односторонней альтернативы H_1^+. Изучая распределение статистики D_n^+, Н. В. Смирнов [1] показал, что

$$\mathsf{P}\{D_n^+\geqslant\lambda\}=$$
$$=\sum_{k=0}^{[n(1-\lambda)]}C_n^k\lambda\left(\lambda+\frac{k}{n}\right)^{k-1}\left(1-\lambda-\frac{k}{n}\right)^{n-k},\quad(1)$$

где $0<\lambda<1$, $[a]$ — целая часть числа a. Кроме точного распределения (1) статистики D_n^+, Н. В. Смирнов получил также ее предельное распределение, именно: если $n\to\infty$ и $0<\lambda_0<\lambda=O(n^{1/6})$, то

$$\mathsf{P}\{D_n^+\geqslant\lambda\}=e^{-2\lambda^2}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где λ_0— любое положительное число. С помощью техники асимптотических пирсоновских преобразований было показано [2], что если $n\to\infty$ и $0<\lambda_0<\lambda=O(n^{1/3})$, то

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{18n}(6nD_n^++1)^2\geqslant\lambda\right\}=e^{-\lambda}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right].\quad(2)$$

Согласно К.— С. к. с уровнем значимости α гипотезу H_0 следует отвергнуть, коль скоро

$$\exp[-(6nD_n^++1)^2/18n]\leqslant\alpha,$$

причем, в силу (2),

$$\mathsf{P}\left\{\exp\left[-(6nD_n^+ + 1)^2/18n\right] \leqslant \alpha\right\} = \alpha\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Аналогично поступают при проверке гипотезы H_0 против альтернативы H_1^- : $\inf\limits_{|x|<\infty} (\mathsf{E}F_n(x) - F(x)) < 0$.

В этом случае статистикой К.— С. к. является случайная величина

$$D_n^- = -\inf_{|x|<\infty} (F_n(x) - F(x)) = \max_{1\leqslant m\leqslant n}\left(F(X_{(m)}) - \frac{m-1}{n}\right),$$

распределение к-рой, при справедливости гипотезы H_0, совпадает с распределением статистики D_n^+.

Лит.: [1] Смирнов Н. В., «Успехи матем. наук», 1944, в. 10, с. 179—206; [2] Большев Л. Н., «Теория вероятностей и ее применения», 1963, т. 8, в. 2, с. 129—55; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [4] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

М. С. Никулин.

КОЛМОГОРОВА — ЧЕПМЕНА УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$P(s, x; u, \Gamma) = \int_E P(s, x; t, dy)\, P(t, y; u, \Gamma),\ s < t < u,$$

то есть условие, налагаемое на *переходную функцию* $P(s, x; t, \Gamma)$ $(0 \leqslant s \leqslant t < \infty,\ x \in E,\ \Gamma \in \mathfrak{B},\ (E, \mathfrak{B})$ — измеримое пространство), позволяющее (при некоторых условиях на $(E, \mathfrak{B})$) построить *марковский процесс*, для которого условная вероятность $P_{s,x}(x_t \in \Gamma)$ совпадает с $P(s, x; t, \Gamma)$. Обратно, для марковского процесса его переходная функция $P(s, x; t, \Gamma)$, по определению равная $P_{s,x}(x_t \in \Gamma)$, удовлетворяет К.—Ч. у., что непосредственно следует из общих свойств условных вероятностей. Указано С. Чепменом [1], исследовано А. Н. Колмогоровым в 1931 (см. [2]).

Лит.: [1] Chapman S., «Pros. Roy. Soc., Ser. A», 1928, v. 119, p. 34—54; [2] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 5—41; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

А. Н. Ширяев.

КОЛОКОЛООБРАЗНАЯ ИГРА — *игра на единичном квадрате*, у к-рой функция выигрыша имеет вид $\varphi(x-y)$, где φ — положительная аналитическая регулярная частотная функция Пойа, то есть: 1) $\varphi(u)$ определена при всех $u \in (-\infty, \infty)$, 2) для любого n и любых наборов $-\infty < x_1 < \ldots < x_n < \infty$ и $-\infty < y_1 < \ldots < y_n < \infty$ имеет место неравенство $\det\|\varphi(x_i - y_j)\| \geqslant 0$, 3) для любого набора $\{x_k\}$ (соответственно $\{y_k\}$) найдется такой набор $\{y_k\}$ (соответственно $\{x_k\}$), что $\det\|\varphi(x_i - y_j)\| > 0$, 4) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\,du < \infty$. Примером К. и. может служить игра с функцией выигрыша $e^{-(x-y)^2}$. Оптимальные стратегии игроков в К. и. единственны и являются кусочно постоянными распределениями с конечным числом скачков. Значение игры с функцией выигрыша $\varphi(\lambda(x-y))$ при $\lambda \to \infty$ стремится к нулю, а число точек в носителе оптимальных стратегий неограниченно возрастает.

Лит.: [1] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964.

В. К. Доманский.

КОЛЬЦА И АЛГЕБРЫ — множества с двумя бинарными операциями, к-рые обычно принято наз. сложением и умножением. Кольцом наз. множество: 1) являющееся *абелевой группой* относительно сложения (в частности, в кольце существует нулевой элемент, обозначаемый 0, и противоположный элемент $-x$ для каждого элемента x), 2) операция умножения в к-ром удовлетворяет правому и левому законам дистрибутивности относительно сложения, т. е. $x(y+z) = xy + xz$ и $(y+z)x = yx + zx$, для любых элементов x, y, z из кольца.

Если кольцо K не имеет делителей нуля, т. е. $xy \neq 0$ для любых ненулевых элементов $x, y \in K$, то множество всех ненулевых элементов кольца будет *группоидом* относительно умножения. Кольцо будет *телом*, если множество его ненулевых элементов образует группу относительно умножения. Кольцо K наз. ассоциативным, если умножение в нем удовлетворяет закону ассоциативности, т. е. $(xy)z=x(yz)$, для любых x, y, z из K. Если умножение в кольце коммутативно, то кольцо наз. коммутативным. Единицей наз. такой элемент 1 кольца, что

$$x\cdot 1=1\cdot x=x$$

для всех $x\in K$. Кольцо, вообще говоря, не обязано обладать единицей. Любое тело является ассоциативным кольцом с единицей и без делителей нуля. Ассоциативно-коммутативное кольцо без делителей нуля и с единицей наз. областью целостности.

Пусть Φ — произвольное ассоциативное кольцо с единицей 1. Кольцо A (не обязательно ассоциативное) наз. алгеброй над Φ, или *операторным кольцом* с кольцом операторов Φ, если для любых элементов $\alpha\in\Phi$, $a\in A$ однозначно определено произведение $\alpha a\in A$, причем так, что для всех α, $\beta\in\Phi$, a, $b\in A$ справедливы соотношения

$$\left.\begin{array}{lll}(\alpha+\beta)\,a=\alpha a+\beta a, & & \alpha\,(a+b)=\alpha a+\alpha b,\\ \alpha\,(\beta a)=(\alpha\beta)\,a, & 1a=a, & \alpha\,(ab)=(\alpha a)\,b.\end{array}\right\}\quad(1)$$

Если кольцо Φ коммутативно, то принято требовать усиления последнего из условий (1):

$$\alpha\,(ab)=(\alpha a)b=a\,(\alpha b).$$

Любое кольцо можно считать алгеброй над кольцом целых чисел, если понимать произведение na (где n — целое число) обычно, т. е. как $\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\text{ раз}}$. Поэтому кольца можно рассматривать как частный случай алгебр.

Если A — алгебра над полем Φ, то, по определению, A является *векторным пространством* над Φ, а значит, имеет базис. Это дает возможность строить алгебры над полем по базису, для чего достаточно задать таблицу умножения базисных элементов. Алгебра над полем наз. конечномерной, если она имеет конечный базис, т. е. если она конечномерна как векторное пространство над своим полем.

Наиболее известными примерами алгебр являются алгебры квадратных матриц, алгебры многочленов и алгебры формальных степенных рядов над полями.

В теории К. и а., как и в любой другой алгебраич. теории, большую роль играют понятия гомоморфизма и изоморфизма. Многие рассуждения и описания проводятся «с точностью до изоморфизма», т. е. изоморфные кольца и алгебры не различаются. Понятие гомоморфизма тесно связано с понятиями *идеала* и подалгебры (подкольца).

Пусть A и B — две алгебры (над некоторым фиксированным кольцом Φ с единицей). Отображение $\varphi: A\to B$ множества A в множество B наз. гомоморфизмом алгебры A в алгебру B, если оно «сохраняет операции алгебры», т. е.

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),$$

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\,\varphi(y),$$

$$\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$$

для любых x, $y\in A$, $\alpha\in\Phi$. Гомоморфизм φ наз. изоморфизмом, если φ — взаимно однозначное отображение множества A на множество B. Последнее равносильно тому, что образ гомоморфизма φ:

$$\operatorname{Im}\varphi=\varphi(A)=\{\varphi(a)\mid a\in A\},$$

вообще говоря, являющийся подалгеброй алгебры B, совпадает со всей алгеброй B, а ядро гомоморфизма φ:

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\},$$

вообще говоря, являющееся двусторонним идеалом в A, в этом случае — нулевой идеал. Двусторонние идеалы алгебры A и только они служат ядрами гомоморфизмов этой алгебры, а гомоморфные образы A, с точностью до изоморфизма, исчерпываются фактор-алгебрами алгебры A по всевозможным ее двусторонним идеалам.

Переход от алгебры к ее подалгебрам и гомоморфным образам является одним из способов получения новых алгебр. Так, напр., из алгебры многочленов (от достаточно большого числа переменных) над полем Ф можно получить, в качестве гомоморфного образа, любую ассоциативно-коммутативную алгебру над Ф. Среди других часто применяемых конструкций следует отметить прямые суммы, прямые и подпрямые произведения К. и а.

Историческая справка. Примерно до середины 19 в. были известны лишь отдельные примеры колец: числовые кольца, т. е. подкольца поля комплексных чисел, появившиеся в связи с потребностями теории алгебраич. уравнений, кольца вычетов целых чисел — в теории чисел. Общего понятия кольца не существовало.

Первые примеры некоммутативных К. и а. встречаются (1843—44) в работах У. Р. Гамильтона (W. R. Hamilton) и Г. Грассмана (H. Grassman). Это — тело *кватернионов*, алгебра бикватернионов, *внешняя алгебра*. Начинает формироваться понятие гиперкомплексной системы, т. е., в современной терминологии, конечномерной ассоциативной алгебры над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел либо над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. К 1870 в работах Б. Пирса (B. Peirce) появились понятия идемпотентного элемента *(идемпотента)* и *нильпотентного элемента* и было доказано, что если не все элементы гиперкомплексной системы нильпотентны, то в ней имеется хотя бы один ненулевой идемпотент. Полученные результаты позволили развить «технику идемпотентов» и «пирсовских разложений», широко применявшихся при изучении конечномерных алгебр.

После 1870 начинается общее исследование гиперкомплексных систем. В работах Р. Дедекинда (R. Dedekind) встречается общее понятие (ассоциативного) кольца, тела и алгебры над полем (гиперкомплексной системы), хотя кольцо у него называлось не кольцом, а порядком. Термин «кольцо» был введен Д. Гильбертом (D. Hilbert) позднее. К. Вейерштрасс (K. Weierstrass) и Р. Дедекинд доказали, что любая конечномерная ассоциативно-коммутативная алгебра без нильпотентных элементов над полем действительных чисел является прямой суммой полей, изоморфных либо полю $\mathbb{R}$ действительных чисел, либо полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Г. Фробениус (G. Frobenius) в 1878 доказал, что единственное некоммутативное тело конечной размерности над полем действительных чисел — тело кватернионов.

К началу 20 в. в работах С. Э. Молина и Э. Картана (E. Cartan) были получены наиболее значительные результаты по теории гиперкомплексных систем. К этому времени уже была достаточно развита теория гомоморфизмов, выяснена связь их с идеалами, появилось понятие прямой суммы алгебр. С. Э. Молин, рассматривая конечномерные ассоциативные алгебры над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, ввел понятие простой алгебры и доказал, что простые алгебры — это в точности полные алгебры матриц над полем $\mathbb{C}$. Он же ввел понятие радикала (теперь называемого классическим радикалом) и доказал, по существу, что если радикал алгебры равен нулю, то алгебра является прямой суммой простых алгебр. Эти результаты были вновь найдены Э. Картаном, к-рый, кроме того, распространил их на алгебры над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел.

В начале 20 в. начинают рассматривать алгебры (ассоциативные и конечномерные) над произвольным полем, а не только над полями действительных или комплексных чисел. Дж. М. Веддерберн (J. M. Wedderburn), совершенствуя технику идемпотентов Пирса, перенес результаты С. Э. Молина и Э. Картана на случай произвольного поля. Он же доказал, что любое конечное тело коммутативно.

Наконец, в 20—30-х гг. 20 в. стали изучать произвольные *ассоциативные кольца и алгебры*. При этом большую роль начинают играть левые и правые идеалы колец. В. Крулль (W. Krull) и Э. Нётер (E. Noether) в 1925—26 ввели и систематически использовали условие максимальности и минимальности для левых идеалов. В 1927 Э. Артин (E. Artin) перенес результаты Дж. М. Веддерберна о разложении полупростых алгебр на все ассоциативные кольца и алгебры, левые идеалы к-рых одновременно удовлетворяют и условию максимальности и условию минимальности. В 1929 Э. Нётер показала, что при этом достаточно требовать только условий минимальности. К 1939 было доказано, что при условии минимальности (также как и при условии максимальности) радикал кольца является его наибольшим нильпотентным левым идеалом (см. *Артиново кольцо*, *Нётерово кольцо*). Таким образом, к 1940 теория Молина — Картана — Веддерберна была перенесена на случай ассоциативных колец и алгебр с условием минимальности для левых (или правых) идеалов.

Основные направления теории колец и алгебр. Структурная теория дает описание алгебр (как правило, удовлетворяющих нек-рым условиям конечности), представляя их в виде прямой суммы или подпрямого произведения более просто устроенных алгебр. К настоящему времени (70-е гг. 20 в.) для ассоциативных К. и а. классич. теория Молина — Картана — Веддерберна — Артина перенесена на случай К. и а. с условием минимальности для главных левых идеалов. При этом же условии доказано, что если алгебра не имеет нильпотентных идеалов, то она разлагается в прямую (не обязательно конечную) сумму простых алгебр, а если она не имеет даже нильпотентных элементов, то — в прямую сумму тел. В случае, когда алгебра имеет нильпотентные идеалы, ее строение значительно сложнее. Наиболее известной теоремой о таких алгебрах является *Веддерберна — Мальцева теорема* «об отщеплении радикала» — о разложении конечномерной ассоциативной алгебры в полупрямую сумму радикала и полупростой подалгебры. Содержательная структурная теория создана для альтернативных алгебр (см. *Альтернативные кольца и алгебры*), на к-рые фактически перенесена вся теория Молина — Картана — Веддерберна — Артина, а также для *йордановых алгебр*.

Ряд структурных теорем получен и без условий конечности. Еще В. Крулль доказал, что любое ассоциативно-коммутативное кольцо без нильпотентных элементов разлагается в подпрямое произведение колец без делителей нуля. В дальнейшем было доказано, что в теореме Крулля требование коммутативности можно опустить, а затем был найден ряд критериев разложимости произвольной неассоциативной алгебры в подпрямое произведение алгебр без делителей нуля и алгебр с однозначным делением.

Теория простых алгебр и тел тесно связана со структурной теорией, так как многие структурные теоремы сводят изучение рассматриваемых колец и алгебр к изучению простых алгебр и тел. Получено описание ассоциативных простых алгебр с единицей, обладающих минимальными левыми идеалами, а также конечномерных альтернативных и йордановых простых алгебр. Рассмотрены автоморфизмы и дифференцирования простых ассоциативных алгебр и тел (см. *Алгебраической системы автоморфизм*, *Дифференциальная алгебра*).

Теория радикалов также тесно связана со структурной теорией; сами структурные теоремы — это, как правило, теоремы о К. и а. полупростых в смысле некоторого радикала. Для получения новых структурных теорем было введено множество различных радикалов: нижний нильрадикал Бэра, локально нильпотентный радикал Левицкого, квазирегулярный *Джекобсона радикал*, радикал Брауна — Маккоя и др. В начале 50-х гг. 20 в. была создана общая теория радикалов, тесно связанная с теорией модулей и представлений (см. *Радикалы* колец и алгебр).

Алгебры с тождественными соотношениями начали привлекать внимание алгебраистов с тех пор, как обнаружилось, что наличие (нетривиального) тождества сильно влияет на строение К. и а. В этом отношении показательна теорема Капланского об ассоциативных алгебрах: если A — примитивная алгебра с полиномиальным тождеством степени d, то A — конечномерная простая алгебра над своим центром и ее размерность не превосходит $[d/2]^2$ (см. [6]). Имеется немало результатов и о неассоциативных алгебрах с тождественными соотношениями (см. *Колец многообразие*).

Свободные алгебры и *свободные произведения* алгебр являются важными конструкциями в теории К. и а., поскольку любая алгебра (некоторого многообразия) является гомоморфным образом свободной алгебры этого многообразия. Доказано, что любая подалгебра свободной неассоциативной алгебры сама свободна, а также что свободны все подалгебры свободных коммутативных, антикоммутативных алгебр и свободных алгебр Ли. Исследования в этой области тесно связаны с исследованиями алгебр с тождественными соотношениями и многообразий алгебр, так как тождества данного многообразия — это определяющие соотношения в свободной алгебре данного многообразия.

Теория вложений изучает в основном вопросы вложения ассоциативных К. и а. в тела или простые алгебры, в к-рых разрешимы те или иные уравнения (см. *Вложение кольца*). Стимулом к развитию этой теории послужил пример ассоциативной алгебры без делителей нуля, не вложимой в тело. Затем был найден критерий существования (классического) тела дробей для ассоциативных К. и а. без делителей нуля, а также необходимые и достаточные условия вложимости кольца в тело. К теории вложений можно отнести и теорию колец частных (см. *Частных кольцо*).

Аддитивная теория идеалов возникла при обобщении основной теоремы арифметики, равносильной теореме о представлении любого идеала кольца целых чисел в виде пересечения степеней простых идеалов, на произвольные ассоциативно-коммутативные кольца с условием максимальности (т. е. нётеровы кольца). Основная цель этой теории — представление любого идеала кольца в виде пересечения конечного числа идеалов нек-рого специального вида (примарных, примальных, терциарных и т. д.). При этом вид «специальных» идеалов и вид разложений подбирается так, что при нек-рых условиях конечности верны и «теоремы существования» (т. е. любой идеал имеет разложение) и «теорема единственности» (с каждым идеалом связывается нек-рое множество простых идеалов, не зависящее от разложения). Для нётеровых колец эта цель была достигнута в классической нётеровой теории примарных идеалов. Найдено обобщение этой теории и на некоммутативный случай.

Коммутативная алгебра занималась сначала числовыми кольцами, возникшими в теории алгебраич. чисел. В настоящее время теория коммутативных колец является бурно развивающейся областью на границе алгебры и алгебраич. геометрии.

Нормированные, топологические, упорядоченные и нек-рые другие К. и а. с дополнительными структурами часто встречаются в функциональном анализе и других областях математики. Подробнее о кольцах с дополнительными структурами см. *Нормированное кольцо*, *Топологическая алгебра*, *Упорядоченное кольцо*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963; [2] его же, Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [3] его же, Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [4] его же, Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [5] Джекобсон Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947; [6] его же, Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [7] его же, Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [8] Зариский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 1—2, пер. с англ., М., 1963; [9] Атья М., Макдональд И., Введение в коммутативную алгебру, пер. с англ., М., 1972; [10] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [11] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, М., 1962; [12] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [13] Ван-дер-Варден Б. Л., Алгебра, М., 1976; [14] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [15] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [16] Фейс К., Алгебра. Кольца, модули и категории, т. 1, пер. с англ., М., 1977. *В. А. Андрунакиевич.*

КОЛЬЦЕВАЯ ГРАНИЦА — подмножество Γ пространства M_A максимальных идеалов *коммутативной банаховой алгебры* A с единицей над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, на к-ром модули *Гельфанда представлений* $\hat{a}$ всех элементов $a \in A$ достигают максимума. Напр., можно положить $\Gamma = M_A$ (тривиальная граница). Интерес представляют нетривиальные границы с тем или иным свойством минимальности. Среди замкнутых границ $\Gamma \subset M_A$ существует минимальная ∂M_A — такая замкнутая граница, что $\partial M_A \subset \Gamma$ для каждой замкнутой границы Γ; она наз. границей Шилова. Точки границы Шилова характеризуются тем, что для каждой окрестности $V \subset M_A$ такой точки ξ и каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $a \in A$, для к-рого $\max|\hat{a}| = 1$ и $|\hat{a}| < \varepsilon$ вне V. Точки $\xi \in \partial M_A$ составляют «наиболее устойчивую» часть множества M_A максимальных идеалов: если B — коммутативное банахово расширение алгебры A, то максимальные идеалы (мультипликативные функционалы), отвечающие таким точкам, расширяются до максимальных идеалов (мультипликативных функционалов) алгебры B, тогда как за пределами ∂M_A такое расширение, вообще говоря, невозможно. Это обстоятельство аналогично устойчивости границы спектра ограниченного линейного оператора банахова пространства. Типичный пример: алгебра A состоит из непрерывных функций в диске $|\lambda| \leqslant 1$, аналитических при $|\lambda| < 1$. В этом случае M_A отождествляется с замкнутым диском, а ∂M_A — с его топологич. границей; максимальные идеалы, отвечающие внутренним точкам диска, не продолжаются до максимальных идеалов алгебры всех непрерывных функций на границе, в к-рую естественно (согласно принципу максимума) вкладывается A, а максимальные идеалы, отвечающие граничным точкам,— продолжаются.

Подобно алгебрам аналитич. функций, для общих коммутативных банаховых алгебр имеет место локальный принцип максимума модуля: если V — открытое подмножество пространства M_A, то

$$\max\{|\hat{a}(\xi)| : \xi \in \overline{V}\} = \max\{|\hat{a}(\xi)| : \xi \in (\partial M_A \cap V) \cup \partial V\}$$

для всех $a \in A$, где $\overline{V}$ — замыкание и ∂V — топологич. граница множества V в M_A. Грубо говоря, это означает, что точка локального максимума непременно является точкой глобального максимума (нек-рого, быть может, другого элемента).

Понятие К. г. используется при изучении равномерных алгебр, т. е. замкнутых, разделяющих точки и содержащих константы подалгебр A алгебры $C(X)$ всех непрерывных функций на компакте X. В данной ситуации $\partial M_A \subset X \subset M_A$. Для каждой точки $\xi \in M_A$ существует представляющая мера, сосредоточенная на границе Шилова, т. е. такая вероятностная мера μ, что

$$\hat{a}(\xi) = \int_{\partial M_A} \hat{a}\, d\mu$$

при всех $a \in A$ (это верно для произвольных коммутативных банаховых алгебр). В простейшем (описанном выше) случае диска и алгебры аналитич. функций последняя формула сводится к *Пуассона формуле*. Вообще говоря, представляющая мера μ не единственна. Для точек ξ, принадлежащих одной и той же доле Глисона (см. *Алгебра функций*), меры μ можно выбирать взаимно абсолютно непрерывными, что при нек-рых дополнительных условиях типа единственности представляющих мер позволяет наделять доли Глисона пространства максимальных идеалов одномерной аналитич. структурой, согласованной с алгеброй. Каждая точка границы Шилова равномерной алгебры составляет одноточечную долю Глисона, но обратное, вообще говоря, неверно.

Равенство $\partial M_A = X = M_A$ для равномерных алгебр служит простейшим необходимым условием совпадения A с $C(X)$. Без дополнительных предположений оно не является достаточным для такого совпадения даже в случае алгебр $A = R(X)$ равномерных пределов рациональных функций на плоском компакте X.

Пусть X — метризуемый компакт и A — равномерная алгебра на X. Тогда существует минимальная среди всех границ: $\partial_0 M_A$. Замыкание минимальной границы совпадает с ∂M_A, однако, вообще говоря, $\partial_0 M_A$ не замкнуто: пример доставляет подалгебра тех аналитич. внутри диска $|\lambda| \leqslant 1$ функций, для к-рых $f(0) = f(1)$. Граница $\partial_0 M_A$ совпадает с множеством точек пика относительно A, т. е. таких точек $\xi \in M_A$, для к-рых существует $a \in A$ с $|\hat{a}(\xi)| > |\hat{a}(\eta)|$ при всех $\eta \neq \xi$. С другой стороны, известно формально гораздо более слабое достаточное условие принадлежности к $\partial_0 M_A$. Именно, если точка $\xi \in M_A$ такова, что при нек-рых $0 < c < 1$ и $d \geqslant 1$ для каждой окрестности V точки ξ в A имеется элемент a, для к-рого $\hat{a}(\xi) = 1$, $\max|\hat{a}| = d$ и $|\hat{a}(\eta)| \leqslant c$ при $\eta \notin V$, то $\xi \in \partial_0 M_A$. Абстрактная формула Пуассона усиливается следующим образом: для любой точки $\xi \in M_A$ существует представляющая мера, сосредоточенная на $\partial_0 M_A$ (при этом $\partial_0 M_A$ есть G_δ-множество), и в таком виде она с успехом применяется в нек-рых вопросах теории приближений. Точки $\xi \in \partial_0 M_A$ характеризуются тем, что для них такая мера единственна и совпадает с δ-мерой, т. е. минимальная граница есть частный случай границы Шоке.

Для алгебры $A = R(X)$ равномерных пределов рациональных функций на плоском компакте X совпадение A с $C(X)$ равносильно совпадению $X = M_A$ с $\partial_0 M_A$. Для произвольных равномерных алгебр это не так: существует равномерная алгебра A, отличная от $C(M_A)$, для к-рой M_A метризуемо, и каждая точка $\xi \in M_A$ является точкой пика (т. е. $\partial_0 M_A = M_A$). Существует и такая равномерная алгебра, что все доли Глисона тривиальны (одноточечны), однако даже граница Шилова составляет собственную часть пространства максимальных идеалов.

Одно из алгебраич. обобщений понятия границы Шилова заключается в следующем. Пусть $\partial_1 M_A = \partial M_A$ и I — замкнутый идеал, порожденный набором элементов $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$, $n \geqslant 2$. Пространство $M_{A/I}$ естественно отождествляется с множеством общих нулей функций $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1}$. Замыкание объединения границ $\partial M_{A/I}$ по всем $(n-1)$-наборам обозначается $\partial_n M_A$. Напр., для алгебры непрерывных функций в бидиске $|\lambda_1| \leqslant 1$, $|\lambda_2| \leqslant 1$, аналитических внутри его, $\partial_1 M_A$ — остов $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, $\partial_2 M_A$ — топологич. граница $|\lambda_1| = 1$, $|\lambda_2| \leqslant 1$; $|\lambda_1| \leqslant 1$, $|\lambda_2| = 1$, $\partial_3 M_A = M_A$. Эти обобщения полезны при доказательстве теорем о многомерной аналитич. структуре в пространстве максимальных идеалов.

Понятия К. г. (или функциональных границ), аналогичные описанным, встречаются в теории аналитич. функций (граница Бергмана), теории вероятностей (граница Мартина) и в ряде других разделов математики. При этом исходный запас функциональных элементов не обязательно предполагается составляющим алгебру или кольцо.

Лит.: [1] Basener R., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1975, v. 47, № 1, p. 98—104; [2] Browder A., Introduction to function algebras, N. Y.— Amst., 1969; [3] Гамелин Т. В., Равномерные алгебры, пер. с англ., М., 1973; [4] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, М., 1960; [5] Гончар А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1963, т. 27, № 4, с. 949—55; [6] Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, пер. с англ., М., 1968.

Е. А. Горин.

КОЛЬЦЕВАЯ ОБЛАСТЬ — 1) Двусвязная плоская область между двумя замкнутыми жордановыми кривыми без общих точек, из к-рых одна охватывает другую. 2) К. о. относительно квадратичного дифференциала — см. *Глобальная структура траекторий* квадратичного дифференциала. *Е. Д. Соломенцев.*

КОЛЬЦО — множество R, в к-ром заданы две бинарные алгебраич. операции: сложение и умножение, причем по сложению это множество — абелева группа (аддитивная группа кольца R), а умножение связано со сложением законами дистрибутивности:

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (b+c)a = ba + ca,$$

где $a, b, c \in R$. На умножение в общем случае не накладывается никаких ограничений, т. е. R по умножению — *группоид* (наз. мультипликативным группоидом кольца R).

Непустое подмножество $A \subset R$ наз. подкольцом в R, если A само является кольцом относительно операций, определенных в R, т. е. A должно быть подгруппой аддитивной группы кольца R и подгруппоидом мультипликативного группоида этого кольца. Естественно, подкольцами всякого кольца служат само это кольцо и нульподкольцо, состоящее из одного нуля. Пересечение (теоретико-множественное) подколец любого кольца есть подкольцо. Объединением подколец A_α, $\alpha \in I$, кольца R наз. пересечение всех подколец, каждое из к-рых содержит все A_α. Множество всех подколец данного кольца является *решеткой* $S(R)$ относительно операций пересечения и объединения подколец. Множество *идеалов* этого кольца образуют подрешетку в $S(R)$.

О направлениях в теории колец см. *Кольца и алгебры, Ассоциативные кольца и алгебры, Неассоциативные кольца и алгебры.* *О. А. Иванова.*

КОЛЬЦО С ДЕЛЕНИЕМ — кольцо (не обязательно ассоциативное), в к-ром для любых элементов a и b, где $a \neq 0$, уравнения

$$ax = b, \quad ya = b$$

обладают решениями. Если решения этих уравнений определены однозначно, то К. с д. наз. квазителом. Квазитело, в отличие от произвольного К. с д., не может содержать *делителей нуля*; ненулевые элементы квазитела составляют по умножению *квазигруппу.* Всякое (не обязательно ассоциативное) кольцо без делителей нуля вкладывается в квазитело. Ассоциативное К. с д. является (ассоциативным) *телом*. См. также *Алгебра с делением*.

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973. *О. А. Иванова.*

КОЛЬЦОИД — обобщение понятия ассоциативного кольца. Пусть (Ω, Λ) — многообразие *универсальных алгебр* сигнатуры Ω. Алгебра $G=\{G, \Omega \cup (\cdot)\}$ наз. кольцоидом над алгеброй G^+ многообразия (Ω, Λ), или (Ω, Λ)-кольцоидом, если $G^+=\{G, \Omega\}$ принадлежит многообразию (Ω, Λ), по умножению $(\cdot)$ алгебра G является полугруппой и выполняется закон дистрибутивности на втором месте относительно умножения

$$(x_1x_2\ldots x_n\omega)\cdot y=(x_1y)(x_2y)\ldots(x_ny)\,\omega,\ \forall\omega\in\Omega,\ x_i\in G.$$

Операции из Ω наз. аддитивными операциями кольцоида G, а G^+ — аддитивной алгеброй кольцоида. К. наз. дистрибутивным, если законы дистрибутивности выполняются также и на первом месте, т. е.:

$$y\,(x_1x_2\ldots x_n\omega)=(yx_1)(yx_2)\ldots(yx_n)\,\omega.$$

Обычное ассоциативное кольцо G есть дистрибутивный К. над абелевой группой (и G^+ — аддитивная группа кольца G). К. над группой наз. почтикольцом, К. над полугруппой — полукольцом, К. над лупой — неокольцом. Рассматривались также (под разными названиями, одно из которых — менгерова алгебра) К. над кольцами.

Лит.: [1] Курош А. Г., Общая алгебра, лекции 1969—1970 учебного года, М., 1974. *О. А. Иванова.*

КОМБИНАТОРИКА — см. *Комбинаторный анализ.*

КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел математики, объединяющий круг задач, в к-рых исследуются экстремальные свойства комбинаторного характера для систем фигур. Эти задачи связаны, в первую очередь, с оптимальным в нек-ром смысле расположением выпуклых множеств. Примером одной из старейших задач такого рода может служить задача о 13 шарах: каково максимальное число равных материальных шаров, к-рые можно приложить к равному всем им шару в евклидовом пространстве? И. Кеплер (J. Kepler, 1611) указал число 12, но строгое решение этой задачи было дано в сер. 20 в. Б. Л. Ван дер Варденом (B. L. Van der Waerden) и К. Шютте (K. Schütte).

Термин «К. г.», по-видимому, впервые появился в 1955 (см. [1]). Обычно с этим годом связывают возникновение К. г. как направления в математике, хотя к ней можно отнести и более ранние результаты (см., напр., [2]). Для К. г. характерна наглядность ее задач. В К. г. широко используются комбинаторные соображения и сочетания приемов из различных областей математики (топологии, функционального анализа, геометрии в целом, теории графов и др.).

Одной из центральных групп задач К. г. являются задачи о *разбиении* фигур на части, напр. *Борсука проблема*.

Большую группу задач К. г. составляют задачи о *покрытиях*, в к-рых исследуется возможность покрытия заданного множества фигурами специального вида (см., напр., *Хадвигера гипотезу* о покрытии выпуклого тела минимальным числом меньших гомотетичных ему тел с коэффициентом гомотетии k, $0<k<1$); *освещения задачи* о минимальном числе направлений пучков параллельных лучей или источников, освещающих границу выпуклого тела и др.

К. г. родственна дискретной геометрии, см., напр., определенным образом связанную с гипотезой Хадвигера и задачами освещения *Эрдёша задачу* о нахождении максимального числа точек евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, любые три из к-рых образуют треугольник с углами, не превосходящими $\pi/2$.

К. г. тесно примыкает к теории выпуклых множеств. См., напр., *Хелли теорему*, к-рая описывает пересечения нек-рых семейств выпуклых множеств в зависимости от пересечения их подсемейств.

Лит.: [1] Hadwiger H., «J. reine angew. Math.», 1955, Bd 194, S. 101—10; [2] Alexandroff P., Hopf H., Topologie, Bd 1, B., 1935; [3] Хадвигер Г., Дебруннер Г., Комбинаторная геометрия плоскости, пер. с нем., М., 1965; [4] Грюнбаум Б., Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел, пер. с англ., М., 1971; [5] Hadwiger H., Debrunner H., Combinatorial Geometry in the Plane, N. Y., 1964; [6] Яглом И. М., О комбинаторной геометрии, М., 1971; [7] Болтянский В. Г., Солтан П. С., Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Киш., 1978. *П. С. Солтан.*

КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — конечное множество S вместе с отношением замыкания

$$A \to \overline{A},$$

определенным для всех подмножеств A из S (т. е. $A \subseteq \overline{A}$, $A \subseteq B$ влечет $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ и $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, но не обязательно $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$), удовлетворяющим условиям: 1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$ для пустого множества $\varnothing$; 2) $\overline{p} = p$ для каждого элемента $p \in S$; 3) если $p, q \in S$ и $A \subseteq S$ и если $q \in \overline{A \cup p}$, но $q \notin \overline{A}$, то $p \in \overline{A \cup q}$ (свойство замены). Замкнутые множества, или плоскости ($\overline{A} = A$), образуют геометрическую решетку. Подмножество $I \subseteq S$ независимо, если $p \notin \overline{I \setminus p}$ для всех $p \in I$; все максимальные независимые множества, или базисы, имеют одинаковую мощность. Обычным образом определяются прямая сумма К. г. и сужение К. г. на подмножество A. Мощность базисов сужения К. г. на A наз. рангом $r(A)$ множества A. Ранг удовлетворяет условию:

$$r(A \cup B) + r(A \cap B) \leqslant r(A) + r(B).$$

Множество $A \subseteq S$, для к-рого $r(A) < |A|$, наз. зависимым; минимальные зависимые множества К. г. наз. циклами. Опуская условия 1) и 2) в определении К. г., получают определение предгеометрии, или *матроида.* Рассматриваются также бесконечные К. г., при этом требуется конечность базисов.

Пример К. г.— подмножество S векторного пространства V с отношением

$$A \to \overline{A} = \mathrm{sp}(A) \cap S,$$

определенным для всех $A \subseteq S$, где $\mathrm{sp}(A)$ — линейная оболочка, натянутая на A в V.

Одной из основных проблем в теории К. г. является так наз. критическая проблема. Для К. г., заданной множеством S в проективном пространстве размерности n над полем Галуа, эта проблема состоит в том, чтобы найти наименьшее положительное целое число k (критическую экспоненту), для к-рого существует семейство гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_k$, различающих S (семейство гиперплоскостей различает множество S, если для всякого $t \in S$ существует хотя бы одна гиперплоскость, не содержащая t).

Лит.: [1] Whitney H., «Amer. J. Math.», 1935, v. 57, p. 509—33; [2] Crapo H. H., Rota G. C., On the foundations of combinatorial theory: combinatorial geometries, Camb.— L., 1970; [3] Tutte W. T., Introduction to the theory of matroids, N. Y., 1971; [4] Уилсон Р., Введение в теорию графов, пер. с англ., М., 1977; [5] Рыбников К. А., Введение в комбинаторный анализ, М., 1972. *А. М. Ревякин.*

КОМБИНАТОРНАЯ ЛОГИКА — раздел логики, посвященный изучению и анализу таких понятий и методов, как переменная, функция, операция подстановки, классификация предметов по типам или категориям и другие.

В качестве основных понятий в К. л. выбираются одноместная функция и операция применения функции к аргументу (аппликация), при этом понятие функции рассматривается как первичное по отношению к понятию множества и обобщается таким образом, что функция может принимать объекты одного с ней уровня как в качестве аргументов, так и в качестве значений. В частности, аргументом функции f может служить сама эта функция. Поскольку функции могут выступать в качестве как аргументов, так и значений, понятие многоместной функции сводится к понятию одноместной функции. Результат аппликации функции f к аргументу x обозначают (fx). Для простоты часто скобки опускают, понимая при этом запись $fx_1x_2...x_n$ как $(...((fx_1)x_2)...x_n)$. Функция f, удовлетворяющая равенству

$$fx_1x_2...x_n = \mathfrak{X},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geqslant 1$, — произвольные функции, а $\mathfrak{X}$ — объект, построенный из этих функций (быть может, не из всех) с помощью операции аппликации, наз. комбинатором (существование комбинаторов неявно постулируется). Всякий комбинатор может быть выражен через два комбинатора S и K, удовлетворяющих следующим равенствам:

$$Sxyz = xz(yz), \quad Kxy = x$$

(здесь x, y, z — произвольные функции).

Одной из первых в К. л. была задача, к-рая состояла в сведе́нии первичных логич. понятий к минимальному числу достаточно простых понятий. Была введена индивидуальная функция U, к-рая обобщала штрих Шеффера [если f и g — одноместные пропозициональные функции, то Ufg интерпретируется как $(\forall x)(f(x) \Rightarrow \Rightarrow \neg g(x))$], и было показано, что каждую формулу исчисления предикатов можно представить в виде комбинации из букв U, S, K (и скобок), откуда и название «К. л.» [Х. Карри (H. Curry), 1930]. Переменные в таком представлении совсем не использовались, что позволило избавиться от переменной как исходного понятия (понятия индивидуальной константы, высказывания и пропозициональной функции при этом также элиминировались как исходные понятия). Однако, как показало дальнейшее развитие К. л., построение на такой основе логич. систем встретило значительные трудности. Первые логич. исчисления такого типа, предложенные А. Чёрчем (A. Church) и Х. Карри, оказались противоречивыми (парадокс Клини — Россера, см. [4]). Чтобы избежать этого противоречия, К. л. приходится строить либо как обладающую очень бедными дедуктивными возможностями, либо как содержащую объекты разных категорий. Основное развитие К. л. пошло по второму пути.

Часть К. л., к-рая не имеет дела с «логикой», а интересуется только свойствами комбинаторов, наз. теорией комбинаторов. Показано, что эта теория непротиворечива. В результате формализации она принимает вид различных исчислений. Все они распадаются на два внешне различных класса: исчисления комбинаторов и λ-исчисления.

Лит.: [1] Curry H., Feys R., Combinatory logic, v. 1, Amst., 1958; [2] Curry H., Hindley J., Seldin J., Combinatory logic, v. 2, Amst.— L., 1972; [3] Church A., The calculi of lambda-conversion, Princeton, 1941; [4] Kleene S., Rosser J., «Ann. Math.», 1935, v. 36, p. 630—36; [5] Яновская С. А., Логика комбинаторная, в кн.: Философская энциклопедия, т. 3, М., 1964, с. 226—27; [6] Кузичев А. С., в сб.: История и методология естественных наук, в. 14, 1973, с. 131—41.

Л. В. Шабунин.

КОМБИНАТОРНАЯ МАТЕМАТИКА — см. *Комбинаторный анализ.*

КОМБИНАТОРНАЯ ТОПОЛОГИЯ — раздел топологии, в к-ром топологич. свойства геометрич. фигур изучаются при помощи их *разбиений* на более элементарные фигуры (напр., разбиение полиэдров на симплексы) или при помощи *покрытий* системами множеств. Эти методы применимы в самых широких предположениях об изучаемых фигурах.

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; [2] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд., М., 1976. *С. П. Новиков.*

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ классические — задачи выбора и расположения элементов конечного множества, имеющие в качестве исходной нек-рую формулировку развлекательного содержания типа головоломок.

Одной из классических К. з., фигурирующей еще в мифах Древнего Востока, является построение магического квадрата, т. е. расположение первых n^2 натуральных чисел в квадрате $n\times n$ так, чтобы все суммы по строкам, столбцам и диагоналям были равны одному и тому же числу. Напр.,

$$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$$

— магический квадрат при $n=3$. Известен ряд методов построения таких квадратов (см., напр., [1]). Определение числа магических квадратов порядка n при $n>4$ представляет трудную еще нерешенную (1978) задачу.

Ряд К. з. был рассмотрен Л. Эйлером (L. Euler). Одна из них — задача о 36 офицерах, состоящая в том, чтобы указанное число офицеров 6 различных воинских званий и из 6 различных полков так расположить в ячейках квадрата 6×6 (каре), чтобы каждая колонна и каждая шеренга содержали одновременно одного и только одного офицера каждого ранга и каждого полка. Квадрат размером $n\times n$, содержащий в ячейках элементы 1, 2, ..., n, наз. латинским, если элементы в каждой строке и каждом столбце различны. Два латинских квадрата наз. ортогональными, если при их наложении все n^2 пар элементов в ячейках различны. Задача о 36 офицерах эквивалентна задаче о существовании пары ортогональных латинских квадратов порядка 6. Л. Эйлер высказал гипотезу о несуществовании ортогональных латинских квадратов порядка $n=4k+2$, $k=1, 2, \ldots$ В 1900 Г. Тарри (G. Tarry) подтвердил эту гипотезу для $n=6$ и тем самым доказал, что задача о 36 офицерах не имеет решения. В 1959—60 была доказана теорема о существовании пары ортогональных латинских квадратов для каждого $n=4k+2$, $k=2, 3, \ldots$ (см. [2]).

Другая задача, рассмотренная Л. Эйлером,— задача о кёнигсбергских мостах, формулируемая следующим образом. Имеется семь мостов, соединяющих берега реки, протекающей через город, и два острова, расположенные на ней. Спрашивается, можно ли обойти все мосты, проходя по каждому только один раз, и возвратиться в исходную точку. Полагая, что вершины соответствуют районам суши, а ребра — мостам, эту задачу можно сформулировать в виде вопроса о возможности последовательного обхода графа, изображенного на рис. 1, с условием однократного использования его ребер и возвращения в исходную точку (см. *Графа обход*). Если в графе такой обход возможен, то говорят, что он обладает эйлеровым циклом. Л. Эйлер установил, что такой цикл в графе существует тогда и только тогда, когда он связен, и число ребер, инцидентных каждой вершине, четно. Так как граф на рис. 1 не удовлетворяет этому требованию, то задача о кёнигсбергских мостах неразрешима. Она неразрешима и в том случае, если отбросить требование совпадения точек начала и конца обхода. В этом случае решается вопрос о существовании эйле-

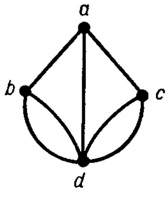


Рис. 1.

ровой цепи в графе. Граф обладает эйлеровой цепью тогда и только тогда, когда он связен и число вершин, инцидентных нечетному числу ребер, равно 0 или 2. Граф на рис. 1 не удовлетворяет и этому условию (см. [3]).

В 1859 У. Гамильтон (W. Hamilton) придумал игру «Кругосветное путешествие», состоящую в отыскании такого пути, проходящего через все вершины (города́) графа, изображенного на рис. 2, чтобы посетить каждую вершину однократно и вернуться в исходную. Пути в графах, обладающие таким свойством, наз. гамильтоновыми циклами. Необходимые и достаточные условия существования гамильтонова цикла в графе пока (1978) неизвестны (см. [3]).

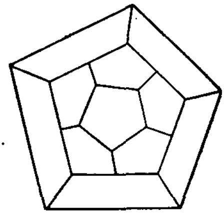


Рис. 2.

Задача о гамильтоновых циклах в графе получила различные обобщения. Одно из этих обобщений — задача коммивояжера, имеющая ряд приложений в исследовании операций, в частности при решении нек-рых транспортных проблем. Она состоит в следующем: имеется нек-рое количество городов, расстояния между к-рыми известны; нужно найти кратчайший путь, проходящий через все города и возвращающийся в исходный.

В 1847 Р. Киркман (R. Th. Kirkman) поставил и решил задачу о 15 школьницах. Они должны были гулять ежедневно пятью группами по три в каждой группе. При этом необходимо было так составить расписание для их прогулок, чтобы каждая школьница в течение семи дней смогла точно один раз попасть в одну группу с каждой из остальных. Эта задача связана с задачей построения системы троек, поставленной Я. Штейнером (J. Steiner, 1853). Системой троек Штейнера порядка v наз. такой набор троек из множества, содержащего v элементов, что каждая пара элементов входит точно в одну тройку. Системы троек Штейнера описаны для $v \leqslant 15$. Оказывается, что для $v=3$, 7, 9 системы троек единственны с точностью до эквивалентности (подстановка v элементов, перестановка троек); для $v=13$ существуют две неэквивалентные системы троек; при $v=15$ таких троек 80. Для $v>15$ число различных систем троек Штейнера пока (1978) неизвестно. При $v>3$ система троек Штейнера является частным случаем неполной частично уравновешенной *блок-схемы*.

Классическая задача о встречах состоит в следующем. Имеются две одинаковые колоды из n различных карт каждая. Необходимо определить D_{nr}, $r=0, 1, \dots, n$,— число расположений карт во второй колоде таких, что при сравнении соответствующих карт первой и второй колоды число совпадений равно r, $r=0, 1, \dots, n$. Частный случай этой задачи при $r=0$ впервые был сформулирован П. Монмором (P. Montmort, 1708). Л. Эйлер рассматривал задачу отыскания числа членов определителя, не имеющих общих элементов с главной диагональю, эквивалентную определению D_{n0}.

Задача о встречах была исходным пунктом для возникновения раздела комбинаторного анализа, связанного с исследованием перестановок с ограниченными позициями. На совокупности S_n подстановок степени n, действующих на множестве X, можно ввести расстояние ρ, полагая

$$\rho(s, s') = |\{x : s(x) \neq s'(x),\ x \in X\}|, \quad s,\ s' \in S_n.$$

Тогда

$$D_{nr} = |\{s : \rho(s, s') = n - r, s \in S_n\}|,$$

причем

$$D_{nr}=\frac{n!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\frac{1}{k!},\quad r=0,\,1,\,\ldots,\,n.$$

В терминах расстояний между подстановками можно сформулировать и другую классическую К. з., называемую обычно задачей о супружеских парах. Она состоит в определении числа M_n рассаживаний n супружеских пар на $2n$ местах за круглым столом так, чтобы ни один муж не сидел рядом со своей женой. Тогда

$M_n=2\cdot n!U_n$, $U_n=|\{s:\rho(s,e)=n,\ \rho(s,c)=n,\ s\in S_n\}|$, где e — единичная подстановка, а $c=(1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Получена формула:

$$U_n=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Если

$$U_n(s_1,s_2)=|\{s:\rho(s,s_1)=n,\ \rho(s,s_2)=n,\quad s\in S_n\}|,$$

то величина $U_n(s_1,\ s_2)$ зависит только от цикловой структуры $s_1^{-1}s_2$ и может быть выражена в виде формулы с использованием *Чебышева многочленов* (см. [4]).

Тесную связь с приведенными задачами имеет проблема определения числа L_{kn} *латинских прямоугольников* $k\times n$ и числа L_n латинских квадратов. Латинский прямоугольник $k\times n$ может рассматриваться как упорядоченный набор подстановок $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_k$ степени n таких, что $\rho(s_i,\ s_j)=n,\ i\neq j$. Показано, что

$$L_{1n}=n!,\quad L_{2n}=D_n\cdot n!,\quad D_n=D_{n0}$$

$$L_{3n}=n!\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{k}D_kD_{n-k}U_{n-2k},\ U_0=D_0=1.$$

Установлено, что при $k<n^{1/3-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$,

$$L_{kn}=(n!)^k\cdot e^{-\binom{k}{2}}(1+\delta_n),$$

где $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$. Число латинских квадратов порядка n известно до $n=9$ включительно.

Задача о числе разбиений натурального числа n на слагаемые впервые появилась в письме Г. Лейбница (G. Leibniz) к Я. Бернулли (J. Bernoulli) в 1669. Однако разработка методов решения целого класса задач такого типа была осуществлена Л. Эйлером, к-рый эффективно использовал для этой цели производящие функции, задаваемые в виде бесконечных произведений. Он, в частности, установил, что число разбиений $m+n$ на n слагаемых равно числу разбиений m на не более чем n слагаемых, равно числу разбиений m на слагаемые, не превосходящие n, и равно числу разбиений $m+\binom{n+1}{2}$ на n различных слагаемых.

Классическая задача размещения состоит в определении числа $C_{nm}(r)$ способов размещения m различных предметов в n различных ячейках с заданным числом r пустых ячеек. Получено, что

$$C_{nm}(r)=\binom{n}{r}\Delta^{n-r}0^m,\quad r=0,1,\ldots,n,$$

где

$$\Delta^k 0^m=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^m.$$

Исследования здесь велись в плане теоретико-вероятностных приложений, включая разнообразные обобщения и модификации. Наиболее интересная часть этих исследований касается получения различных асимптотических результатов, когда m и n неограниченно возрастают.

Лит.: [1] Постников М. М., Магические квадраты, М., 1964; [2] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [3] Оре О., Теория графов, пер. с англ., М., 1968;

[4] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [5] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973. *В. Н. Сачков.*

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ, комбинаторная математика, комбинаторика,— раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов нек-рого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения нек-рой конструкции из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией. Поэтому можно сказать, что целью К. а. является изучение комбинаторных конфигураций. Это изучение включает в себя вопросы существования комбинаторных конфигураций, алгоритмы их построения, оптимизацию таких алгоритмов, а также решение задач перечисления, в частности определение числа конфигураций данного класса. Простейшими примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, сочетания и размещения.

Множество X из n элементов наз. n-множеством; любое его m-подмножество, $m \leqslant n$, наз. сочетанием объема m. Число сочетаний объема m из n различных элементов равно

$$C(n, m) = \binom{n}{m} = n(n-1)\ldots(n-m+1)/m!$$

Имеет место формула:

$$(1+t)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} t^m, \quad \binom{n}{0} = 1,$$

обычно называемая формулой бинома Ньютона. Числа $\binom{n}{m}$ наз. биномиальными коэффициентами. Упорядоченное m-подмножество наз. размещением объема m. Число размещений объема m из n различных элементов равно

$$A(n, m) = n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

При $m=n$ размещение представляет собой перестановку элементов множества X, причем число таких перестановок равно $P(n)=n!$

Возникновение основных понятий и развитие К. а. шло параллельно с развитием других разделов математики, таких, как алгебра, теория чисел, теория вероятностей, с к-рыми К. а. тесно связан. Еще математикам Древнего Востока были известны формула, выражающая число сочетаний через биномиальные коэффициенты, и формула бинома Ньютона с натуральным показателем n. С мистическими целями изучались *магические квадраты* 3-го порядка. Рождение К. а. как раздела математики связано с трудами Б. Паскаля (B. Pascal) и П. Ферма (P. Fermat) по теории азартных игр. Эти труды, составившие основу теории вероятностей, одновременно содержали принципы определения числа комбинаций элементов конечного множества, устанавливая тем самым ставшую затем традиционной связь К. а. с теорией вероятностей.

Большой вклад в систематическое развитие комбинаторных методов был сделан Г. Лейбницем (G. Leibniz) в его диссертации «Ars Combinatoria» («Комбинаторное искусство»), где, по-видимому, впервые появился термин «комбинаторный». Большое значение для становления К. а. имела работа Я. Бернулли (J. Bernoulli) «Ars conjectandi» («Искусство предположений»), посвященная основным понятиям теории вероятностей, где обстоятельно изложен ряд комбинаторных понятий и указаны их применения для вычисления вероятностей. Можно считать, что с появлением работ Г. Лейбница и Я. Бернулли комбинаторные методы выделились в самостоятельную часть математики.

Большой вклад в развитие комбинаторных методов сделал Л. Эйлер (L. Euler). В его работах по разбиениям и композициям натуральных чисел на слагаемые было положено начало одному из основных методов перечисления комбинаторных конфигураций — методу производящих функций.

Возрождение интереса к К. а. относится к 50-м гг. 20 в. в связи с бурным развитием кибернетики и дискретной математики и широким использованием электронно-вычислительной техники. В этот период активизировался интерес к классическим комбинаторным задачам.

На формирование направлений исследований в дальнейшем оказывают влияние два фактора. С одной стороны, выбор объектов исследований, с другой стороны — формулировка целей исследования, зависящая в конечном счете от сложности изучаемых объектов. Если исследуемая комбинаторная конфигурация имеет сложный характер, то целью исследования является выяснение условий ее существования и разработка алгоритмов построения.

Большой развивающийся раздел К. а. составляет теория *блок-схем* (см. также [2], [3], [10]); основные проблемы этого раздела связаны с вопросами классификации, условиями существования и методами построения нек-рых классов блок-схем. Частным случаем блок-схем являются так наз. уравновешенные неполные блок-схемы, или $(b,\ v,\ r,\ k,\ \lambda)$-конфигурации, к-рые определяются как совокупности из b k-подмножеств нек-рого v-множества, называемых блоками, с условием, что каждый элемент появляется в r блоках, а каждая пара элементов — в λ блоках. При $b=v$ и, следовательно, $r=k$ $(b,\ v,\ r,\ k,\ \lambda)$-конфигурация наз. $(v,\ k,\ \lambda)$-конфигурацией, или симметричной уравновешенной неполной блок-схемой. Даже для $(v,\ k,\ \lambda)$-конфигураций вопрос о необходимых и достаточных условиях их существования остается пока (1978) открытым. Для существования $(v,\ k,\ \lambda)$-конфигураций необходимо, чтобы при v четном $k-\lambda$ было квадратом, а при v нечетном уравнение

$$z^2=(k-\lambda)\,x^2+(-1)^{(v-1)/2}\,\lambda y^2$$

имело решение в целых числах x, y, z, одновременно не равных нулю.

При $v=n^2+n+1$, $k=n+1$, $\lambda=1$ $(v,\ k,\ \lambda)$-конфигурация представляет собой проективную плоскость порядка n, являющуюся частным случаем конечной геометрии, содержащей конечное число точек и прямых с заданными условиями их инцидентности. Каждой проективной плоскости порядка $n-1$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие полное множество из $n-1$ попарно ортогональных *латинских квадратов* порядка n. Для существования проективной плоскости порядка n необходимо, чтобы при $n\equiv 1,\ 2 \pmod 4$ существовали целые числа a и b, удовлетворяющие равенству

$$n=a^2+b^2.$$

Вопрос о существовании проективных плоскостей порядка n решен положительно только для $n=p^\alpha$, где p — простое, а α — натуральное числа. Даже для $n=10$ этот вопрос является открытым (1978). К этому кругу вопросов относится результат, связанный с опровержением гипотезы Эйлера о несуществовании пары ортогональных латинских квадратов порядка $n=4k+2$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ (см. *Комбинаторные задачи*).

Другое направление К. а. связано с *выбора теоремами.* В основе целого ряда результатов этого направления лежит теорема Ф. Холла о существовании системы различных представителей (трансверсали) семейства подмножеств $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ множества X, т. е. системы элементов $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ такой, что $x_i \in X$ и $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$: трансверсаль существует тогда и только тогда, когда для любых $i_1,\ \ldots$

..., i_k таких, что $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$, справедливо неравенство

$$|X_{i_1} \cup \ldots \cup X_{i_k}| \geqslant k,$$

где $|Y|$ — число элементов в множестве Y. Из теоремы Ф. Холла вытекает теорема о существовании латинского квадрата, состоящая в том, что любой латинский прямоугольник размера $k \times n$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, можно дополнить до латинского квадрата порядка n. Другое следствие теоремы Ф. Холла: любую неотрицательную матрицу $A = \|a_{ij}\|$, $i, j=1, \ldots, n$, такую, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = t > 0,$$

можно представить в виде

$$A = \alpha_1 \Pi_1 + \ldots + \alpha_s \Pi_s,$$

где $\Pi_1, \ldots, \Pi_s$ — матрицы подстановки порядка n и $s \leqslant (n-1)^2+1$. Из теоремы Ф. Холла следует также теорема о том, что минимальное число строк и столбцов неотрицательной матрицы, содержащих все положительные элементы, равно максимальному числу элементов, попарно не расположенных в одной и той же строке или в одном и том же столбце. Экстремальное свойство частично упорядоченных множеств, аналогичное этой теореме, устанавливает теорема, утверждающая, что минимальное число непересекающихся цепей совпадает с объемом максимального подмножества, состоящего из попарно несравнимых элементов. Экстремальный характер носит и следующая теорема: если для n-множества X составить все $\binom{n}{r}$ сочетаний по r элементов и разбить их на k непересекающихся классов, то для целого m существует число $n_0 = n_0(m, r, k)$ такое, что при $n \geqslant n_0$ найдется подмножество из m элементов $Y \subset X$, для к-рого все $\binom{m}{r}$ сочетаний принадлежат одному классу.

Экстремальной является задача коммивояжера, заключающаяся в составлении кратчайшего маршрута посещения n городов с возвращением в исходный пункт при условии, что расстояния между городами известны. Эта задача имеет приложения к изучению транспортных сетей. Комбинаторные задачи экстремального характера рассматриваются в теории потоков в сетях и в теории графов.

Значительную часть К. а. составляют *перечислительные задачи*. При их решении либо указывается метод перебора комбинаторных конфигураций из данного класса, либо определяется их число, либо делается то и другое. Типичные результаты перечислительных задач: число подстановок степени n с k циклами равно $|S(n, k)|$, где $S(n, k)$ — числа *Стирлинга 1-го рода*, определяемые равенством

$$x(x-1)\ldots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)\, x^k;$$

число разбиений множества из n элементов на k подмножеств равно *числу Стирлинга 2-го рода*

$$\sigma(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n;$$

число размещений m различных предметов в n различных ячейках, когда пустых ячеек нет, равно $n!\sigma(m, n)$.

Полезным инструментом для решений перечислительных задач является *перманент матрицы*. Перманент матрицы $A = \|a_{ij}\|$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, m$, $n \leqslant m$, с элементами из нек-рого кольца определяется равенством

$$\operatorname{per} A = \sum_{(j_1, \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n},$$

где суммирование производится по всевозможным размещениям объема n из m различных элементов, Число трансверсалей нек-рого семейства подмножеств конечного множества равно перманенту соответствующей матрицы инцидентности.

К вычислению перманентов сводится целый класс задач по определению числа перестановок с ограниченными позициями. Эти задачи для удобства иногда формулируются как задачи о расстановке взаимно неатакующих фигур на шахматной доске размером $n \times n$. С определением перманентов нек-рых классов матриц связаны варианты задачи о димерах, возникающей при изучении явления адсорбции и заключающейся в определении числа способов объединения атомов в двухатомные молекулы на нек-рой поверхности. Ее решение может быть также получено через пфаффианы — некоторые функции от матриц, близкие к определителям. Проблема о числе латинских прямоугольников (квадратов) также связана с разработкой эффективных методов вычисления перманентов нек-рых (0, 1)-матриц.

Для вычисления перманентов применяется формула:

$$\operatorname{per} A = \sum_{k=m-n}^{m} (-1)^{k-m+n} \binom{k}{m-n} S_k,$$

$$S_k = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant m} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} a_{il} - \sum_{r=1}^{k} a_{ij_r} \right).$$

Имеется большое число неравенств, дающих оценку величины перманента в нек-рых классах матриц. Представляет интерес определение экстремальных значений перманента в определенных классах неотрицательных матриц, однако эта задача не решена (1978) даже для (0, 1)-матриц с заданным значением числа единиц в строках и столбцах. К этой проблеме примыкает гипотеза Ван дер Вардена о том, что минимум перманента дважды стохастической матрицы порядка n равен $n!/n^n$, подтвержденная только для положительно полуопределенных матриц.

Большую роль в решении перечислительных задач играет метод *производящих функций.* Производящая функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

ставится в соответствие последовательности $(a_0, a_1, \ldots)$ с элементами из нек-рого поля и рассматривается как формальный степенной ряд. При таком определении производящие функции эффективно используются для решения перечислительных задач параллельно с методами рекуррентных соотношений и конечно разностных уравнений. При получении асимптотических формул в качестве производящих функций обычно используются аналитические функции действительного или комплексного переменного. В последнем случае для отыскания выражений коэффициентов применяют интегральную формулу Коши.

Имеются результаты в направлении возможной унификации методов перечисления, связанные с рассмотрением так наз. алгебр инцидентности и использованием функции Мёбиуса на частично упорядоченных множествах (см., напр., [10]). При решении перечислительных задач существенную роль играет формализация понятия неразличимости объектов. Использование для этих целей понятия эквивалентности объектов относительно нек-рой группы подстановок в сочетании с применением метода производящих функций было положено в основу так наз. теории перечисления Пойа (см. [10]). Сущность этой теории состоит в следующем. Рассматривается Y^X — множество конфигураций

$$f: X \to Y, \quad |X| = m, \quad |Y| = n.$$

На множестве X действует группа подстановок A, определяющая на Y^X отношение эквивалентности $\sim$, при к-ром $f \sim f_1$, если существует такое $\alpha \in A$, что $f(\alpha(x)) = f_1(x)$ для всех $x \in X$, $f, f_1 \in Y^X$. Каждому $y \in Y$ ставится в соответствие характеристика $[y] = (s_1, \ldots, s_k)$, где s_i, $i = 1, \ldots, k$, — элементы абелевой группы. Характеристика конфигурации f задается равенством

$$[f] = \sum_{x \in X} [f(x)].$$

Если $a(s_1, \ldots, s_k)$ — число элементов $y \in Y$ с заданным значением характеристики и $b_m(s_1, \ldots, s_k)$ — число неэквивалентных конфигураций $f \in Y^X$,

$$F(y_1, \ldots, y_k) = \sum_{(s_1, \ldots, s_k)} a(s_1, \ldots, s_k)\, y_1^{s_1} \ldots y_k^{s_k},$$

$$\Phi_m(y_1, \ldots, y_k) = \sum_{(s_1, \ldots, s_k)} b(s_1, \ldots, s_k)\, y_1^{s_1} \ldots y_k^{s_k},$$

то основная теорема Пойа утверждает, что

$$\Phi_m(y_1, \ldots, y_k) = \\ = Z(F(y_1, \ldots, y_k),\ F(y_1^2, \ldots, y_k^2), \ldots, F(y_1^m, \ldots, y_k^m)),$$

где Z есть циклический индекс группы A, определяемый равенством

$$Z(t_1, \ldots, t_m; A) = \\ = \sum_{j_1 + 2j_2 + \ldots + mj_m = n} C(j_1, \ldots, j_m; A)\, t_1^{j_1} \ldots t_m^{j_m},$$

$C(j_1, \ldots, j_m;\ A)$ — число элементов циклового класса $\{1^{j_1} 2^{j_2} \ldots m^{j_m}\}$ группы A. Эта теорема основана на лемме Бернсайда: число классов эквивалентности $N(A)$, определяемых на множестве X группой подстановок A, дается формулой

$$N(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} j_1(\alpha),$$

где $j_1(\alpha)$ — число единичных циклов $\alpha \in A$. Теория Пойа имеет применения при решении перечислительных задач теории графов и перечислении углеродных химических соединений. Имеется обобщение теории Пойа на случай, когда эквивалентность конфигураций определяется двумя группами G и H, действующими на X и Y соответственно (см. [4] и [10]). В таком виде она применяется, напр., для определения числа неизоморфных абстрактных автоматов.

Если $X = \{1, \ldots, m\}$, $Y = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\sigma : X \to Y$, где a_j используется α_j раз в качестве образа, то выражение

$$[\sigma] = \left[a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}\right], \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m,$$

наз. первичной спецификацией σ. Если числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ содержат β_0 нулей, β_1 единиц и т. д., то выражение

$$[[0^{\beta_0} 1^{\beta_1} \ldots m^{\beta_m}]], \ \beta_0 + \ldots + \beta_m = n,$$

$$\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + m\beta_m = m,$$

наз. вторичной спецификацией. При нек-рой специализации групп G и H, определяющих эквивалентность конфигураций $\sigma : X \to Y$, можно указать способ построения производящих функций для перечисления неэквивалентных конфигураций. Этот способ, называемый общей комбинаторной схемой, подразделяется на четыре частных случая в соответствии с тем, принимают группы G и H значения единичной E или симметрической S_n групп соответствующих степеней. Эти частные случаи являются моделями для большинства известных комбинаторных схем (см. [9], [10]).

1. Коммутативный несимметричный случай: $G = S_m$, $H = E$. Моделирует схемы сочетаний, заполнений одинаковых предметов в различные ячейки и др. Производящая функция для пере-

числения неэквивалентных конфигураций σ таких, что

$$[\sigma]=\left[a_1^{\alpha_1}\dots a_n^{\alpha_n}\right],$$

$$\alpha_i\in\Lambda_i\subseteq N_0=\{0, 1, \dots\},\quad \Lambda=(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n),$$

имеет вид:

$$\Phi(t; x_1, \dots, x_n; \Lambda)=\prod_{j=1}^n\sum_{\alpha_j\in\Lambda_j}(tx_j)^{\alpha_j}.$$

2. Некоммутативный несимметричный случай: $G=E$, $H=E$. Моделирует схемы размещений, заполнений различимых предметов в различные ячейки и др. Производящая функция для перечисления неэквивалентных конфигураций σ таких, что

$$[\sigma]=\left[a_1^{\alpha_1}\dots a_n^{\alpha_n}\right],\ \alpha_i\in\Lambda_i,\ \Lambda=(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n),$$

имеет вид:

$$\tilde{\Phi}(t; x_1, \dots, x_n; \Lambda)=\prod_{j=1}^n\sum_{\alpha_j\in\Lambda_j}\frac{t^{\alpha_j}}{\alpha_j!}x_j^{\alpha_j}.$$

3. Коммутативный симметричный случай: $G=S_m$, $H=S_n$. Моделирует схемы заполнения одинаковых предметов в одинаковые ячейки, перечисления разбиений натуральных чисел и др. Перечисление конфигураций σ таких, что

$$[[\sigma]]=\left[\left[0^{\beta_0}1^{\beta_1}\dots m^{\beta_m}\right]\right],\ \beta_j\in\Lambda_j,\ \Lambda=(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots),$$

основано на использовании производящей функции вида:

$$\Psi(t; x_1, \dots; \Lambda)=\prod_{j=1}^\infty\sum_{\beta_j\in\Lambda_j}(x_jt^j)^{\beta_j}.$$

4. Некоммутативный симметричный случай: $G=E$, $H=S_n$. Моделирует схемы разбиений конечных множеств на блоки, заполнения различимых предметов в одинаковые ячейки и др. Перечисление конфигураций σ таких, что

$$[[\sigma]]=\left[\left[0^{\beta_0}1^{\beta_1}\dots m^{\beta_m}\right]\right],\ \beta_j\in\Lambda_j,\ \Lambda=(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots),$$

основано на использовании производящей функции вида:

$$\tilde{\Psi}(t; x_1, \dots; \Lambda)=\prod_{j=1}^\infty\sum_{\beta_j\in\Lambda_j}\left(\frac{x_jt^j}{j!}\right)^{\beta_j}\frac{1}{\beta_j!}.$$

Значительное место в К. а. занимают асимптотические методы. Они применяются как для упрощения сложных конечных выражений при больших значениях входящих в них параметров, так и при получении приближенных формул обходными путями, когда точные формулы неизвестны. Комбинаторную задачу перечислительного характера иногда удобно сформулировать как задачу отыскания характеристик распределения нек-рой случайной величины. Такая интерпретация дает возможность применять развитый аппарат теории вероятностей, а для отыскания асимптотик — предельные теоремы. Детальному исследованию с этих позиций подвергнута классическая схема случайных размещений предметов в ячейки, случайные разбиения множеств, цикловая структура случайных подстановок, а также различные классы случайных графов, включая графы отображений (см. [8], [9]).

Вероятностный подход применяется при изучении комбинаторных свойств симметрических групп и полугрупп. Исследовано предельное распределение порядка случайного элемента симметрической группы S_n при $n\to\infty$, а также асимптотика вероятности порождения ее случайными элементами. Для нек-рых классов случайных неотрицательных матриц изучались распределения числа нулевых линий в матрице и перманентов, даны оценки вероятности примитивности таких матриц. Для доказательства существования комбинаторных конфигураций без их конструирования иногда используется нек-рый специфический вероятностный прием. Сущность этого приема заключается в установлении существования конфигурации без ее конструирования с помощью оценки вероятности нек-рого события (см. [7]).

Лит.: [1] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Райзер Г.-Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [3] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [4] Прикладная комбинаторная математика, сб. статей, пер. с англ., М., 1968; [5] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [6] Харари Ф., Палмер Э., Перечисление графов, пер. с англ., М., 1977; [7] Эрдёш П., Спенсер Дж., Вероятностные методы в комбинаторике, пер. с англ., М., 1976; [8] Колчин В. Ф., Чистяков В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 11, М., 1974, с. 5—45; [9] Сачков В. Н., в кн.: Вопросы кибернетики. Тр. семинара по комбинаторной математике, М., 1973, с. 146—64; [10] его же, Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

В. Н. Сачков.

КОМИТАНТ, конкомитант, группы G, действующей на множествах X и Y,— такое отображение $\varphi: X \to Y$, что

$$g(\varphi(x)) = \varphi(g(x))$$

для любых $g \in G$, $x \in X$. В этом случае говорят также, что φ коммутирует с действием G, или, что φ — эквивариантное отображение. Если G действует на каждом множестве семейства $\{X_i, i \in I\}$, то К. $\coprod_{i \in I} X_i \to Y$ наз. совместным (или одновременным) К. группы G.

Понятие К. происходит из классической *инвариантов теории*, в к-рой, однако, К. понимается в более узком смысле: G — полная линейная группа нек-рого конечномерного линейного пространства U, X и Y — пространства тензоров на U определенного (вообще говоря, различного) типа, на к-рых G действует естественным образом, а φ — эквивариантное полиномиальное отображение X в Y. Если, кроме того, Y есть пространство ковариантных тензоров, то К. наз. ковариантом группы G, а если Y — пространство контравариантных тензоров, то К. наз. контравариантом группы G.

Пример. Пусть f — бинарная кубическая форма от переменных x и y:

$$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3.$$

Ее коэффициенты являются координатами ковариантного симметрического тензора. Коэффициенты гессиана формы f, т. е. формы

$$H = \frac{1}{36}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_0a_2 - a_1^2)\,x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)\,xy + (a_1a_3 - a_2^2)\,y^2$$

также являются координатами ковариантного симметрического тензора и отображение

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \longmapsto \left(a_0a_2 - a_1^2,\ \frac{1}{2}(a_0a_3 - a_1a_2),\ a_1a_3 - a_2^2\right)$$

соответствующих пространств тензоров есть К. (так наз. К. формы f). Аналогично можно определить гессиан произвольной формы, к-рый также дает пример К. (см. *Ковариант*).

В современной геометрич. теории инвариантов под К. часто понимают любой эквивариантный морфизм $X \to Y$, где X и Y — алгебраич. многообразия, снабженные регулярным действием алгебраич. группы G. Если X и Y аффинны, то К. определяет гомоморфизм (и сам определяется им) $k[Y] \to k[X]$ G-модулей регулярных функций на многообразиях Y и X соответственно (k — основное поле).

Лит.: [1] Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М.— Л., 1948; [2] Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974. *В. Л. Попов.*

КОММУТАНТ группы, производная группа, второй член нижнего центрального ряда группы,— подгруппа, порождаемая в группе G всевозможными *коммутаторами* элементов группы G. Обычно К. группы G обозначается $[G, G]$, или G', или $\Gamma_2(G)$. К. группы является *вполне характеристической подгруппой*, а любая подгруппа, содержащая К., является нормальным делителем этой группы. Факторгруппа по некоторому нормальному делителю абелева тогда и только тогда, когда этот нормальный делитель содержит К. группы.

К. кольца R — идеал, порожденный всеми произведениями ab, $a, b \in R$; он наз. также квадратом кольца R и обозначается $[R, R]$ или R^2.

Оба введенные понятия — частные случаи понятия К. мультиоператорной Ω-группы G, определяемого как идеал, порожденный всеми коммутаторами и элементами вида

$$-a_1a_2\ldots a_n\omega - b_1b_2\ldots b_n\omega + (a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots$$
$$\ldots(a_n+b_n)\,\omega,$$

где ω — n-арная операция из Ω, а

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in G.$$

Н. Н. Вильямс, О. А. Иванова.

КОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРА — раздел алгебры, изучающий свойства коммутативных *колец* и связанных с ними объектов (*идеалов*, *модулей*, *нормирований* и т. д.).

К. а. выросла из задач, возникавших в теории чисел и алгебраич. геометрии. Задачи эти, как правило, относились к конкретным классам колец. Фундаментальным объектом теории чисел является кольцо $\mathbb{Z}$ целых рациональных чисел, и основной факт его арифметики состоит в том, что любое целое число по существу однозначно разлагается в произведение простых чисел. В 30-е гг. 19 в. К. Гауссом (C. Gauss), Э. Куммером (E. Kummer) и другими была обнаружена связь различных вопросов теории чисел (напр., квадратичные формы, теорема Ферма) с арифметикой квадратичных и круговых расширений поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (см. [11]). Распространению классических рассуждений на кольца алгебраич. чисел препятствовало, однако, то обстоятельство, что разложение на далее неразложимые множители в них перестает быть однозначным (см. *Алгебраическая теория чисел*). Догадка Э. Куммера состояла в том, что если добавить к обычным числам некие «идеальные» числа (подобно тому, как в проективной геометрии добавляются бесконечно удаленные точки), однозначность разложения сохранится (см. *Идеальное число*).

Э. Куммеру удалось построить такие «идеальные» числа, или, как сейчас говорят, *дивизоры*, только для круговых полей; однако его результаты побудили Р. Дедекинда (R. Dedekind) и Л. Кронекера (L. Kronecker) распространить теорию дивизоров на произвольные кольца алгебраич. чисел. В построенной Р. Дедекиндом к 1882 теории была выявлена роль целых элементов поля; но что еще более важно — это появление понятия идеала и *простого идеала*. Так были заложены основы одномерной К. а.

Параллельно в алгебраич. геометрии происходило формирование многомерной К. а. Алгебраич. геометрия того времени изучала свойства алгебраич. кривых на плоскости, а также более общих алгебраич. многообразий, задаваемых как множество $M \subset \mathbb{C}^n$ общих нулей нескольких многочленов $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ (различие между аффинными и проективными многообразиями здесь не существенно). То же многообразие

M можно задавать и другими уравнениями, так что более инвариантно с многообразием M связывается идеал $\mathfrak{A}$ всех многочленов, обращающихся в нуль на M. Это еще один путь, приводящий к понятию идеала. Однако до 1890 алгебраич. основы алгебраич. геометрии находились в зачаточном состоянии. Положение изменилось после опубликования работ Д. Гильберта (D. Hilbert). В 1893 он доказал теорему о нулях (см. *Гильберта теорема*). Несколько раньше он же установил следующие факты, во многом определившие дальнейшее направление развития К. а.: теорему о базисе (любой идеал в $C[x_1, \ldots, x_n]$ порождается конечным числом многочленов), теорему о сизигиях и существование *Гильберта многочлена* для однородного идеала в кольце многочленов.

Опыт работы с алгебраич. многообразиями малой размерности убеждал в том, что они состоят из конечного числа неприводимых подмногообразий, что приводило к алгебраич. задаче о представлении идеала в виде пересечения более просто устроенных идеалов. Эта задача была решена Э. Ласкером (E. Lasker, см. [4]), к-рый ввел понятие *примарного идеала*, заменяющего в многомерном случае степень простого идеала, и ассоциированного с ним простого идеала, а также доказал существование примарного разложения произвольного идеала в кольце многочленов. Вопрос об однозначности такого разложения рассматривался Ф. Маколеем (F. Macaulay, 1913). Было установлено, что хотя само примарное разложение и не однозначно, множество ассоциированных с ним простых идеалов определяется однозначно, как и «изолированные» примарные компоненты. Естественное стремление избавиться от неоднозначности примарного разложения побудило Б. Л. Ван дер Вардена (B. L. Van der Waerden, 1931) ввести более грубое отношение эквивалентности для идеалов, чем равенство. Это привело к теории *дивизориальных идеалов*, или дивизоров, и позволило обобщить теорию Куммера — Дедекинда на более широкий класс колец (см. *Крулля кольцо*).

Начиная с Л. Кронекера и Э. Ласкера, с простыми идеалами в кольце многочленов связывают их размерность, определяемую пока как степень трансцендентности соответствующего факторкольца; современное комбинаторное определение размерности было предложено В. Круллем (W. Krull) позже. Если все простые идеалы, ассоциированные с идеалом $\mathfrak{A}$, имеют одну размерность, то идеал $\mathfrak{A}$ наз. несмешанным. В кольце многочленов идеалы главного ряда несмешаны, или, в современной терминологии, кольцо многочленов является *Коэна — Маколея кольцом*.

Наконец, ряд своих результатов Э. Ласкер распространил на кольцо сходящихся степенных рядов, рассматривая последнее с алгебраич. точки зрения.

К началу 20 в. были получены результаты, относящиеся к кольцам алгебраич. чисел и многочленов. Здесь же стоит упомянуть о конструктивном направлении, отыскивающем явные алгоритмы для установления принадлежности многочлена нек-рому идеалу. Однако конкретность материала мешала увидеть общие закономерности и связи. Толчком к развитию современной К. а. послужила теория p-адических чисел К. Гензеля (K. Hensel); именно возможность применения классических методов к такому нетрадиционному объекту позволила осознать и выделить общие идеи, применимые к произвольным кольцам (удовлетворяющим тем или иным условиям, напр. условиям конечности). Начинается новый этап — этап абстрактной К. а., систематич. изучение строения различных классов коммутативных колец. Это проявилось уже в работах Э. Нётер (E. Noether). Связав условие конечности базиса для любого идеала с условием максимальности, т. е. с условием обрыва возрастающих цепочек идеалов (кольца с этим условием наз. нётеровыми), она получила в наиболее общем виде теорию примарных разложений Ласкера — Маколея, казавшуюся ранее сугубо вычислительной и громоздкой. Ею было дано также аксиоматич. описание дедекиндовых колец. В то же время Э. Артин (E. Artin) изучает кольца с условием минимальности — артиновы кольца; Х. Грелль (H. Grell) вводит понятие локализации целостного кольца — операции, обобщенной затем К. Шевалле (C. Chevalley) и А. И. Узковым. В. Крулль доказывает теорему о главном идеале, положившую начало теории размерности нётеровых колец, а также теорему о пересечении степеней идеала в нётеровом кольце, являющуюся основой при изучении $\mathfrak{A}$-адических топологий. Теория дивизориальных идеалов (1931) и теория нормирования обобщают более ранние исследования К. Гензеля и А. Островского (A. Ostrowski). Наконец, следует упомянуть теорему Нётер о нормализации, выяснение роли понятия целой зависимости в рамках общей теории коммутативных колец, а также теоремы Крулля о подъеме простых идеалов для целых расширений.

Новое направление открыла работа В. Крулля о *локальных кольцах* [7]. Так называются кольца, имеющие единственный максимальный идеал; примером может служить кольцо ростков аналитич. функций на комплексном многообразии. В абстрактном случае к локальным кольцам приводят операции локализации и пополнения, а также операция перехода к *Гензеля кольцу*. В. Крулль развил теорию размерности локальных колец и ввел понятие регулярного локального кольца, соответствующего геометрич. понятию неособой точки многообразия. В 40-е гг. 20 в. интенсивно развивается локальная алгебра и ее алгебро-геометрич. приложения. Локальное кольцо снабжается естественной топологией; это позволяет использовать операцию пополнения и сравнивать свойства кольца и его пополнения. Устанавливается, что для колец алгебраич. геометрии (геометрич. кольца) переход к пополнению сохраняет ряд важных свойств. Вместе с исследованиями о конечности целого замыкания это сформировалось в целое направление теории колец (см. *Превосходное кольцо*). В 1946 И. С. Коэн (I. S. Cohen) описал структуру полных локальных колец. Другое направление связано с обоснованием теории пересечений. Развивая идеи В. Крулля, П. Самюэль (P. Samuel) вводит понятие градуированного кольца, связанного с локальным кольцом, возрождает характеристич. функции Гильберта, приводящие к еще одному определению размерности локального кольца, определяет кратность идеала.

Последующее развитие идей К. а. связано с гомологич. методами, функториальным подходом и дальнейшей геометризацией. Этому способствовала восходящая к Р. Дедекинду и Э. Нётер тенденция к линеаризации К. а., в соответствии с к-рой идеалы кольца рассматриваются как частный случай модулей. Последние являются обобщением векторных пространств и в геометрич. представлении соответствуют понятию семейства векторных пространств. К модулям применимы обычные конструкции линейной алгебры — прямой суммы, модуля гомоморфизмов, тензорного произведения. Плодотворность такого более широкого взгляда видна уже из возможности применять *резольвенты*, а вместе с ними и гомологич. алгебру, сформировавшуюся к 50-м гг. 20 в. и представляющую далеко идущее обобщение теории сизигий. Это привлекло внимание к модулям специального вида (см. *Проективный модуль*, *Инъективный модуль*, *Плоский модуль*). Изучение любого класса колец тесно связано с изучением модулей над ними (см. *Гомологическая классификация колец*). Серьезное продвижение было достигнуто в локальной алгебре: Ж. П. Серр (J.-P. Serre) охарактеризовал регулярные кольца как кольца конечной гомологич. размерности и установил Tor-формулу для кратности пересечений, М. Ауслендер и Д. А. Буксбаум (M. Auslander, D. A. Buchsbaum) доказали факториальность регулярного локального кольца. Началось изучение функторов Ext и Tor, связанных с гомоморфизмами и тензорными произведениями модулей, *Горенштейна колец* и колец Коэна — Маколея, допускающих гомологич. описание, чисел Бетти локальных колец.

Другая особенность современной К. а.— функториальный подход, проявляющийся в изучении свойств не изолированного кольца или модуля, а целой системы таких объектов, связанных между собой морфизмами. Замена базисного кольца, теория спуска, изучение различных функториальных конструкций — все это отражение упомянутой тенденции. Так, напр., сохранение многих свойств при локализации и пополнении связано с плоскостностью соответствующего расширения.

Третья особенность — геометризация. Она соответствует взгляду (естественному в алгебраич. геометрии и функциональном анализе) на элементы кольца как на функции на нек-ром пространстве. В качестве такого пространства предлагалось брать сначала множество максимальных идеалов кольца, а затем множество всех простых идеалов, снабженное *Зариского топологией* (простой спектр кольца). В частности, появилась возможность использовать теорию пучков и их когомологий. К. а. становится составной частью алгебраич. геометрии, значительно расширившей благодаря этому свои рамки и возможности. Напр., появилась возможность использовать и интерпретировать в геометрич. терминах кольца с делителями нуля и нильпотентными элементами. В свою очередь геометрич. методы оживили те направления К. а., к-рые можно назвать глобальной К. а. К ним относятся *инвариантов теория*, *алгебраическая К-теория*, когомологич. образования (*Пикара группа*, *Брауэра группа* и др.), изучение группы автоморфизмов и различных инвариантов колец, теория разрешения особенностей и т. д. Однако здесь уже стираются грани между К. а. и алгебраич. геометрией.

Лит.: [1] Kummer E., «J. reine und angew. Math.», 1847, Bd 35, S. 319—26; [2] Dedekind R., Gesammelte mathematische Werke, Bd 3, Braunschweig, 1932; [3] Hilbert D., Gesammelte Abhandlungen, Bd 2, B., 1933; [4] Lasker E., «Math. Ann.», 1905, Bd 60, S. 20—116; [5] Noether E., «Math. Ann.», 1921, Bd 83, S. 24—66; [6] ее же, там же, 1926, Bd 96, S. 26—61; [7] Krull W., «J. reine und angew. Math.», 1938, Bd 179, S. 204—26; [8] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, в. 5, с. 3—93; [9] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, т. 2, пер. с нем., М.— Л., 1947; [10] Krull W., Idealtheorie, B., 1935; [11] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [12] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 1—2, пер. с англ., М., 1963; [13] Nagata M., Local rings, N. Y., 1962; [14] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [15] Kaplansky I., Commutative rings, Boston, 1970. *В. И. Данилов.*

КОММУТАТИВНАЯ БАНАХОВА АЛГЕБРА — банахова алгебра A с единицей над полем $\mathbb{C}$, в к-рой $xy=yx$ для всех $x, y \in A$.

Всякий максимальный идеал К. б. а. A является ядром нек-рого линейного непрерывного мультипликативного функционала φ на A, т. е. гомоморфизма алгебры A в поле комплексных чисел. Обратно, всякий линейный мультипликативный функционал на К. б. а. непрерывен, имеет норму 1, и его ядром служит максимальный идеал в A. Пусть Φ — множество линейных мультипликативных функционалов на A. Элемент $a \in A$ тогда и только тогда обратим, когда $\varphi(a) \neq 0$ для всех $\varphi \in \Phi$. Более того, спектр $\sigma(a)$ состоит в точности из чисел вида $\varphi(a)$. Если линейный непрерывный функционал ψ на A таков, что $\psi(a) \in \sigma(a)$ для любого $a \in A$, то ψ — мультипликативный функционал; для алгебр над полем действительных чисел это, вообще говоря, уже неверно.

Примеры описания максимальных идеалов в К. б. а. Пусть $A=C(X)$ — алгебра всех непрерывных функций на компакте X. Если x_0— фиксированная точка из X, то совокупность функций $f\in A$, для к-рых $f(x_0)=0$, образует максимальный идеал, и в $C(X)$ нет других максимальных идеалов. Если X — компакт на комплексной плоскости и $A=R(X)$ — замкнутая подалгебра в $C(X)$, состоящая из функций, к-рые равномерно аппроксимируются на X рациональными функциями с полюсами вне X, то максимальные идеалы в $R(X)$ устроены так же, как и в $C(X)$. Пусть $L^1(G)$ — групповая алгебра, где G — дискретная абелева группа, и каждому элементу $f\in L^1(G)$ ставится в соответствие его преобразование Фурье. Если φ — мультипликативный линейный функционал на $L^1(G)$, то $\varphi(f)=\hat{f}(\chi_0)$ для нек-рого χ_0 из группы характеров $\hat{G}$ группы G, поэтому множество максимальных идеалов в $L^1(G)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством элементов группы $\hat{G}$. В применении к группе целых чисел $\mathbb{Z}$ последний пример приводит к доказательству известной теоремы Винера: если функция $\hat{f}(t)$ разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрич. ряд и не обращается в нуль на $[0, 2\pi]$, то $1/\hat{f}(t)$ также разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрич. ряд.

Так как мультипликативные линейные функционалы имеют норму 1, то каждый такой функционал является элементом из единичной сферы банахова пространства, сопряженного A. Множество Φ всех мультипликативных линейных функционалов на A замкнуто в слабой топологии сопряженного пространства. Так как единичный шар сопряженного пространства есть компакт в слабой топологии сопряженного пространства, то и Φ в этой топологии является компактом, к-рый наз. **пространством максимальных идеалов** алгебры A и обозначается через $\mathfrak{M}$.

Если К. б. а. содержит нетривиальный идемпотент, т. е. такой элемент $f\in A$, что $f\neq 0$, $f\neq e$ и $f^2=f$, то пространство максимальных идеалов алгебры A несвязно. Обратно, если пространство X максимальных идеалов алгебры A представимо в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств X_0 и X_1, то существует элемент $f\in A$ такой, что $\hat{f}|_{X_0}=0$ и $\hat{f}|_{X_1}=1$ (**теорема Шилова**). В частности, пространство максимальных идеалов К. б. а. связно тогда и только тогда, когда эта алгебра не может быть представлена в виде прямой суммы двух своих нетривиальных идеалов.

Пусть $\varepsilon_1(A)$ — подгруппа в группе $\varepsilon(A)$ обратимых элементов алгебры A, состоящая из экспонент, т. е. элементов вида $\exp a=\sum_0^\infty \frac{a^n}{n!}$. Подгруппа $\varepsilon_1(A)$ образует связную компоненту единицы в группе $\varepsilon(A)$. Для любого компакта X имеется канонический изоморфизм между группами $H^1(X, \mathbb{Z})$ и $\varepsilon(C)/\varepsilon_1(C)$, где $C=C(X)$ — алгебра всех непрерывных функций на X (**теорема Брушлинского — Эйленберга**). Оказывается, этот изоморфизм естественно индуцирует изоморфизм между $H^1(X, \mathbb{Z})$ и $\varepsilon(A)/\varepsilon_1(A)$, где A — любая К. б. а., пространством максимальных идеалов к-рой является X (**теорема Аренса — Ройдена**). В нек-рых случаях аналогичную интерпретацию допускают группы $H^q(X, \mathbb{Z})$ с нечетным q. Алгебра A допускает следующее каноническое представление в алгебру $C(\mathfrak{M})$. **Преобразованием Гельфанда** элемента $a\in A$ наз. функция $\hat{a}$ на $\mathfrak{M}$, значение к-рой в каждой точке $x\in\mathfrak{M}$ определяется правилом $\hat{a}(x)=\varphi_x(a)$, где φ_x— линейный мультипликативный функционал, соответствующий точке $x\in\mathfrak{M}$. Ядром гомоморфизма $a\mapsto\hat{a}$ служит совокупность элементов $a\in A$, принадлежащих всем максимальным идеалам, т. е. радикал алгебры A. Если алгебра A полупроста, т. е. Rad $A=\{0\}$, то гомоморфизм $a\mapsto\hat{a}$ оказывается (алгебраическим) изоморфизмом A в $C(\mathfrak{M})$. Полупростые К. б. а. часто наз. алгебрами функций.

Представление Гельфанда хорошо приспособлено для изучения полупростых алгебр: один из основных результатов теории К. б. а. есть возможность изоморфного представления полупростой алгебры в алгебру непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов. Об общих алгебрах с радикалом известно гораздо меньше, чем о полупростых. Описаны все идеалы в алгебре комплексных полиномов степени $\leqslant m$. Эта алгебра состоит из формальных полиномов $\xi=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_m\lambda^m$, к-рые перемножаются по обычным правилам, но с учетом соотношения $\lambda^{m+1}=0$. Такая алгебра конечномерна, все нормы в ней эквивалентны и любой идеал замкнут. Совокупность I_k тех ξ, для к-рых $a_j=0$ при $j<k$, образует замкнутый идеал; других идеалов в этой алгебре нет. Всякая алгебра с единственным нетривиальным идеалом изоморфна алгебре полиномов первой степени. До сих пор неизвестно (1978), верно ли это для алгебр с единственным замкнутым идеалом.

Естественным бесконечномерным аналогом алгебры полиномов служат алгебры бесконечных комплексных формальных степенных рядов $\xi=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots$ с обычными операциями и нормой $\|\xi\|=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\alpha_k$, где α_k— положительная последовательность, удовлетворяющая условию $\alpha_{k+l}\leqslant\alpha_k\alpha_l$. Если $\alpha_k^{1/k}\to 0$ при $k\to\infty$, то единственным нетривиальным гомоморфизмом алгебры в поле комплексных чисел служит $\xi\mapsto a_0$. Таким образом, I_1 является единственным максимальным идеалом, и этот идеал совпадает с радикалом. Идеалы I_k, определяемые аналогично конечномерному случаю, дают счетный набор различных замкнутых идеалов. Если последовательность α_{k+1}/α_k монотонна, то этим набором идеалов исчерпываются все замкнутые идеалы. В общем случае алгебра может содержать континуальное семейство различных замкнутых идеалов.

При надлежащем выборе последовательности α_k в рассматриваемой алгебре (не имеющей нетривиальных нильпотентов) можно задать ненулевое непрерывное дифференцирование, т. е. ограниченный линейный оператор D такой, что $D(\xi\eta)=D(D\xi)\eta+\xi(D\eta)$. В полупростых алгебрах нет нетривиальных непрерывных дифференцирований, так как в любой (не обязательно коммутативной) алгебре имеет место тождество

$$(D\xi)^n=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}\binom{n}{k}\xi^{n-k}D^n\xi^k,$$

если ξ и $D\xi$ коммутируют. В частности, если D непрерывен, то $D\xi$ — обобщенный нильпотент.

Любая конечномерная алгебра разлагается в прямую сумму радикала и полупростой алгебры. В бесконечномерном случае аналогичное утверждение, вообще говоря, перестает быть справедливым даже для К. б. а. Кроме того, приходится различать случаи алгебраической и сильной (топологической) разложимости.

Оказывается, никакие условия, наложенные только на радикал, не обеспечивают даже алгебраич. разложимости: радикал может быть одномерным и аннулирующим нек-рый максимальный идеал и, тем не менее, не выделяться в качестве прямого слагаемого хотя бы в алгебраич. смысле.

С другой стороны, если радикал конечномерен, а факторалгебра есть алгебра всех непрерывных функций (или алгебра всех операторов в гильбертовом пространстве), то имеется сильная разложимость. Если факторалгебра есть алгебра всех непрерывных функций и R — ее аннуляторный радикал (т. е. такой, что квадрат любого элемента в R равен нулю) и A имеет банахово дополнение, то A сильно разложима; вместо условия дополняемости R можно потребовать, чтобы пространство максимальных идеалов A удовлетворяло первой аксиоме счетности в каждой точке.

Полностью исследован также случай, когда фактор-алгебра по радикалу есть алгебра непрерывных функций на вполне несвязном компакте: необходимое и достаточное условие сильной разложимости состоит в равномерной ограниченности идемпотентов исходной алгебры.

Пусть V — некоторая ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ и A — замкнутая подалгебра алгебры $C(\overline{V})$, состоящая из функций, голоморфных на V. Известно, что в достаточно общих предположениях относительно V любой максимальный идеал алгебры A, отвечающий точке $z^0=(z_1^0, \ldots, z_n^0)\in V$, конечно порожден, а именно, порождается функциями $f_i=z_i-z_i^0$. Это утверждение допускает следующее локальное обращение. Пусть A — полупростая К. б. а. с пространством максимальных идеалов X. Если максимальный идеал, соответствующий нек-рой точке $x_0\in X$, порожден конечным набором элементов $f_1, \ldots, f_n\in A$, то максимальные идеалы, соответствующие точкам из нек-рой окрестности точки x_0, порождаются элементами вида $f_i-\lambda_i e$, отображение $\psi: x\mapsto(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ взаимно однозначно в нек-рой окрестности точки x_0, функция $g\circ\psi^{-1}$ для любого $g\in A$ голоморфна в нек-рой фиксированной окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$ и, кроме того, X вблизи x_0 допускает введение нек-рой естественной аналитической структуры.

Множество S элементов алгебры A наз. **системой образующих**, если наименьшей замкнутой подалгеброй с единицей в A, содержащей множество S, служит сама алгебра A. Единица обычно не включается в число образующих. Если существует конечная система S с указанными свойствами, то A наз. **алгеброй с конечным числом образующих**. Числом образующих алгебры A называют в этом случае наименьшее возможное число элементов в системе образующих.

Если $f_1, \ldots, f_n$ — система образующих нек-рой алгебры, то отображение $x\mapsto(\hat{f}_1(x), \ldots, \hat{f}_n(x))$ осуществляет гомеоморфизм пространства максимальных идеалов этой алгебры на нек-рый полиномиально выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$. Всякий полиномиально выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$ служит пространством максимальных идеалов нек-рой банаховой алгебры (напр., алгебры равномерных на этом компакте пределов полиномов).

Пространство максимальных идеалов алгебры с n образующими удовлетворяет условию $\dim X\leqslant 2n$ и обладает рядом других свойств; напр., $H^i(X, \mathbb{C})=0$ при $i\geqslant n$. Отсюда, в частности, следует, что число образующих в алгебре $C(S^n)$, где S^n есть n-мерная сфера, равно $n+1$; аналогичный результат имеет место для любого n-мерного компактного многообразия X. Для любого конечного клеточного n-мерного полиэдра X алгебра $C(X)$ допускает систему из $n+1$ образующей.

Наименьшее замкнутое множество $\Gamma\subset X$, где X — пространство максимальных идеалов алгебры A, на к-ром все функции $|\hat{f}|$ достигают максимума, наз. **границей Шилова** пространства X. Для любой К. б. а. с единицей такое множество существует и единственно.

Точка $x_0\in X$ тогда и только тогда принадлежит Γ, когда для любой ее окрестности U существует такой элемент $f\in A$, для к-рого $\max\limits_X |\hat{f}|=1$, но $|\hat{f}(x)|<1$ вне U. Более того, если U — открытое множество в X и существует такое замкнутое множество $F\subset U$ и такой элемент $g\in A$, что $|\hat{g}(x)|<\max\limits_F|\hat{g}|$ для точек $x\in U\setminus F$, то пересечение $\Gamma \cap U$ непусто. В частности, если $X = [0, 1]$, то $\Gamma = X$.

Любой мультипликативный линейный функционал φ непрерывен относительно нормы, определяемой спектральным радиусом; более того, $|\varphi(t)| \leqslant \max\limits_X |\hat{f}|$, где X — пространство максимальных идеалов. В этом неравенстве можно, по определению границы Шилова, заменить X на Γ; поэтому существует положительная регулярная мера μ на Γ, «представляющая» функционал φ, т. е. такая, что для любого $f \in A$ имеет место равенство $\varphi(f) = \int_\Gamma \hat{f} d\mu$. Для случая алгебры аналитич. функций в круге эта формула сводится к классической формуле Пуассона. Среди представляющих мер существует мера μ, удовлетворяющая неравенству Иенсена $\ln|\varphi(t)| \leqslant \int_\Gamma \ln|\hat{f}| d\mu$ для всех $f \in A$.

Пусть B есть К. б. а. с единицей и A — некоторая ее замкнутая подалгебра. Алгебра A наз. **максимальной подалгеброй** алгебры B, если B не содержит никакой замкнутой собственной подалгебры, содержащей A и не совпадающей с A. Во всякой достаточно широкой алгебре B имеются максимальные подалгебры с единицей и даже замкнутые подалгебры коразмерности 1. Действительно, если φ_1, φ_2 — два различных гомоморфизма алгебры B в поле комплексных чисел и $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, то ядро функционала ψ является замкнутой подалгеброй A алгебры B такой, что $\dim B/A = 1$. Аналогично, ядро «точечного дифференцирования», т. е. функционала ψ такого, что $\psi(fg) = \psi(f)\varphi(g) + \psi(g)\psi(f)$, где φ — мультипликативный функционал, есть подалгебра коразмерности 1. В комплексном случае эти примеры исчерпывают всевозможные подалгебры коразмерности 1. В частности, всякая такая подалгебра алгебры $C(X)$ не разделяет точки компакта X, так как на $C(X)$ нет никаких (даже разрывных) дифференцирований. Близкое описание допускают все подалгебры конечной коразмерности.

Алгебра A тех непрерывных функций на единичной окружности, к-рые допускают аналитич. продолжение внутрь единичного круга, является максимальной подалгеброй алгебры непрерывных функций на окружности; это утверждение может рассматриваться как обобщение теоремы Вейерштрасса, к-рая означает, что замкнутая подалгебра алгебры $C(\Gamma)$, где $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$, содержащая A и функцию $\bar{z}$, совпадает с $C(\Gamma)$. Алгебра $L^1_+(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : f(t) = 0$ при $t < 0\}$ является замкнутой подалгеброй алгебры $L^1(\mathbb{R})$; эта подалгебра максимальна.

Пусть α — иррациональное число, A_α — алгебра, состоящая из всех тех непрерывных функций на двумерном торе, коэффициенты Фурье к-рых $c_{mn} = 0$ при $m + n\alpha < 0$. Эта алгебра является максимальной подалгеброй алгебры всех непрерывных функций тора. Тор служит границей Шилова относительно A_α, и A_α есть алгебра Дирихле. Если тор реализовать в виде остова единичного бицилиндра в $\mathbb{C}^2$, то пространство максимальных идеалов A_α идентифицируется с подмножеством бицилиндра, к-рое описывается уравнением $|z_1| = |z_2|^\alpha$. Точка $(0, 0)$ не принадлежит границе Шилова, но является одноточечной долей Глисона (два мультипликативных функционала φ_1 и φ_2 на равномерной алгебре принадлежат, по определению, одной и той же доле, если $\|\varphi_1 - \varphi_2\| < 2$). Алгебра A_α аналитична (в смысле свойства единственности: $f = 0$, если $\hat{f}(\xi) = 0$ для точек непустого открытого множества) на пространстве максимальных идеалов, хотя вещественная размерность пространства максимальных идеалов равна 3. Алгебра непрерывных функций на n-мерном торе, допускающих распространение внутрь соответствующего полицилиндра, не является максимальной при $n>1$, но она максимальна в классе подалгебр, инвариантных относительно голоморфных автоморфизмов тора.

Лит. см. при статье *Банахова алгебра*. *Е. А. Горин.*

КОММУТАТИВНАЯ ГРУППА — то же, что *абелева группа*.

КОММУТАТИВНАЯ ГРУППОВАЯ СХЕМА — групповая схема G над базисной схемой S, значение к-рой на любой S-схеме является абелевой группой. Примерами К. г. с. служат *абелевы схемы* и *алгебраические торы*. Обобщением алгебраич. торов в рамках теории групповых схем служит следующее понятие. Говорят, что К. г. с. есть групповая схема мультипликативного типа, если для любой точки $s \in S$ существует открытая окрестность $U \ni s$ и абсолютно плоский квазикомпактный морфизм $f: U \to U$ такой, что К. г. с. $G' = G \times_U U'$ является диагонализируемой над U'. При этом диагонализируемой групповой схемой наз. групповая схема

$$D_S(M) = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_S(M)),$$

где M — абелева группа и $\mathcal{O}_S(M)$ — ее групповая алгебра с коэффициентами в структурном пучке $\mathcal{O}_S$ схемы S. В случае, когда S есть спектр алгебраически замкнутого поля, это понятие сводится к понятию диагонализируемой группы. Если $M = \mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел, то $D_S(M)$ совпадает с мультипликативной групповой схемой $G_{m,\,S}$.

Пусть G — групповая схема над S, слой к-рой над точкой $s \in S$ является групповой схемой мультипликативного типа над полем вычетов $k(s)$. Тогда существует окрестность U точки s такая, что $G \times_S U$ является групповой схемой мультипликативного типа над U (теорема жесткости Гротендика).

Строение К. г. с. изучено лишь в случае, когда базисная схема S есть спектр поля k, а К. г. с. G имеет конечный тип над k. В этом случае К. г. с. содержит максимальную инвариантную групповую аффинную подсхему, фактор по к-рой является абелевым многообразием. Любая аффинная К. г. с. G такого типа обладает максимальной инвариантной групповой подсхемой G_m мультипликативного типа, фактор по к-рой является унипотентной группой. Если поле k совершенно, то $G \simeq G^m \times G^n$, где G^n — максимальная унипотентная подгруппа в G.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [2] Grothendieck A., в кн.: Schémas en groupes, t. 2, В.— Hdlb.— N. Y., 1970, p. 1—179; [3] Demazure M., Gabriel P., Groupes algébriques, P.— Amst., 1970; [4] Oort F., Commutative group schemes, B.— Hdlb.— N. Y., 1966. *И. В. Долгачев.*

КОММУТАТИВНОЕ КОЛЬЦО — кольцо, умножение в к-ром удовлетворяет закону *коммутативности*. Теория ассоциативно-коммутативных колец с единицей наз. *коммутативной алгеброй*. Примером неассоциативных К. к. могут служить йордановы кольца (см. *Йорданова алгебра*). *О. А. Иванова.*

КОММУТАТИВНОСТЬ, перестановочность,— свойство *алгебраической операции*. Для сложения и умножения К. выражается формулами

$$a+b=b+a \quad \text{и} \quad ab=ba.$$

Произвольная бинарная операция $*$ коммутативна (или, что то же, для $*$ выполняется закон коммутативности), если в данной алгебраич. системе справедливо тождество $x*y=y*x$. *Д. М. Смирнов.*

КОММУТАТОР элементов a и b мультиоператорной группы — элемент

$$-a-b+a+b.$$

Для групп без мультиоператоров (где операцию принято наз. умножением) К. элементов a и b будет элемент $a^{-1}b^{-1}ab$. Множество всевозможных К. в группе G порождает подгруппу, наз. *коммутантом* группы G.

В ассоциативной алгебре **произведением** **Ли**, или К. элементов a и b, наз. элемент $[x, y]=xy-yx$.

О. А. Иванова.

КОММУТАЦИОННЫХ И АНТИКОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — линейное слабо непрерывное отображение $f \to a_f$, $f \in L$, нек-рого предгильбертова пространства L в совокупность (вообще говоря, неограниченных) операторов, действующих в каком-либо гильбертовом пространстве H, такое, что выполнены либо соотношения коммутации

$$a_{f_1}a^*_{f_2}-a^*_{f_2}a_{f_1}=(f_1, f_2)\,E,\quad a_{f_1}a_{f_2}-a_{f_2}a_{f_1}=0, \qquad (1)$$

либо соотношения антикоммутации

$$a_{f_1}a^*_{f_2}+a^*_{f_2}a_{f_1}=(f_1, f_2)\,E,\quad a_{f_1}a_{f_2}+a_{f_2}a_{f_1}=0, \qquad (2)$$

где a^*_f, $f \in L$,— оператор в H, сопряженный оператору a_f, E — единичный оператор в H и $(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение в L.

В случае, когда пространство L конечномерно, все неприводимые представления как соотношений (1), так и соотношений (2) унитарно эквивалентны друг другу. В случае бесконечномерного пространства существует бесконечно много различных (не унитарно эквивалентных) неприводимых представлений соотношений (1) и (2); для полного сепарабельного пространства L все они описаны [2] — [5].

Операторы a_f, $f \in L$, удовлетворяющие соотношениям (1) и (2), лежат в основе формализма так наз. вторичного квантования (где a_f наз. обычно **оператором уничтожения** частицы в состоянии $f \in L$, а оператор a^*_f — **оператором рождения** этой частицы), часто используемого при исследовании квантовых физич. систем с большим числом степеней свободы. Однако во вторичном квантовании используются в основном наиболее простые, так наз. фоковские, К. и а. с. п., то есть неприводимые представления, у к-рых пространство индексов L — сепарабельное гильбертово пространство, а в пространстве H существует так наз. вакуумный вектор, обращаемый всеми операторами a_f, $\sqrt{f} \in L$, в нуль.

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Обобщенные функции, в. 4, М., 1961; [3] Голодец В. Я., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 4, с. 3—64; [4] Gårding L., Wightman A., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1954, v. 40, № 7, p. 617—26; [5] Segal I. E., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1958, v. 88, № 1, p. 12—41.

Р. А. Минлос.

КОМПАКТ — метризуемое *бикомпактное пространство.* Примеры К.: отрезок, окружность, n-мерные куб, шар, сфера, *канторово множество*, *гильбертов кирпич*; n-мерное евклидово пространство не является К., а подмножество такого пространства будет К. тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Замкнутое подмножество К. есть К., и всякий К. гомеоморфен замкнутому подмножеству гильбертова кирпича (**теорема Урысона**). Для существования гомеоморфизма К. в евклидово пространство необходимо и достаточно, чтобы он был конечномерен (**теорема Понтрягина — Нёбелинга**). Непрерывный образ К., являющийся T_2-пространством, есть К., и всякий К. есть непрерывный образ канторова множества (**теорема Александрова**). Произведение конечного или счетного множества К. есть К. Любой К. сепарабелен; среди всех бикомпактов К. характеризуются тем, что обладают конечной или счетной базой. К. характеризуется также тем, что он вполне ограничен относительно какой-нибудь метрики, совместимой его топологией (**теорема Хаусдорфа**).

К.— один из важнейших классов топологич. пространств. Свойство метризуемого пространства быть К. равносильно каждому из следующих свойств.

1) Из любого счетного открытого покрытия пространства X можно выделить конечное подпокрытие (аналог леммы Гейне — Бореля — Лебега о покрытии отрезка интервалами).

2) Любая счетная система таких замкнутых в X непустых множеств F_i, что $F_{i+1} \subset F_i$, $i=1, 2, \ldots$, имеет непустое пересечение (обобщение принципа вложенных отрезков Кантора).

3) Из любой последовательности точек пространства X можно выделить сходящуюся в X подпоследовательность (обобщенная теорема Больцано — Вейерштрасса).

4) Любое бесконечное подмножество пространства X имеет в X хотя бы одну предельную точку (обобщенная теорема Больцано — Вейерштрасса).

5) Любая непрерывная на X функция ограничена (обобщенная теорема Вейерштрасса).

6) Любая непрерывная на X функция принимает в нек-рой точке максимальное (минимальное) значение (обобщенная теорема Вейерштрасса).

7) Любая непрерывная на X функция равномерно непрерывна на X относительно какой-либо метрики, совместимой с топологией пространства X (обобщенная теорема Гейне — Кантора).

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976, гл. 2.

Б. А. Пасынков.

КОМПАКТНАЯ ГРУППА — *топологическая группа*, компактная как топологич. пространство. Напр., всякая конечная группа (в дискретной топологии) является К. г. Алгебраическая группа, хотя она и является компактным топологич. пространством (относительно топологии Зариского), не будет топологич. группой относительно этой топологии и потому не будет К. г.

Два важнейших типа К. г. представляют следующие группы. 1) Локально связные компактные группы. Примерами таких К. г. являются группа $U(n, \mathbb{C})$ всех унитарных комплексных матриц порядка n, группа $O(n, \mathbb{R})$ всех ортогональных вещественных матриц порядка n (с топологией, индуцированной топологией полей $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ соответственно, определенной обычным абсолютным значением) и, более общо, любая компактная вещественная группа Ли. 2) Вполне несвязные компактные группы. Такова группа $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ невырожденных матриц порядка n с коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел (с топологией, индуцированной топологией кольца $\mathbb{Z}_p$, определенной p-адическим нормированием) (см. *Вполне несвязное пространство*).

Любая вполне несвязная К. г. является *проконечной группой*, и обратно, всякая проконечная группа будет вполне несвязной К. г. Вполне несвязные хаусдорфовы К. г. могут быть охарактеризованы как К. г. нулевой топологич. размерности. Если же G локально связна и конечномерна, то G — вещественная группа Ли [1]. Структура К. г. общего вида до нек-рой степени определена структурой этих двух типов К. г. А именно: в произвольной конечномерной К. г. G имеется такой нульмерный нормальный делитель N (лежащий в центре группы G), что G/N — вещественная группа Ли и, более того, нек-рая окрестность единицы в G является прямым произведением группы N и вещественной *Ли локальной группы*. Всякая связная конечномерная К. г. имеет вид $(P \times C)/Z$, где P — односвязная компактная полупростая вещественная группа Ли, C — связная конечномерная коммутативная К. г., а Z — конечный центральный нормальный делитель, у к-рого лишь единица лежит в C. Изучение строения связных компактных вещественных групп Ли доведено до их полной классификации (см. *Ли компактная группа*); строение коммутативных К. г. выясняется в теории двойственности Понтрягина. Любая К. г. (не обязательно конечномерная) является проективным пределом компактных вещественных групп Ли [2]. Топологич. строение указанных двух типов К. г. следующее: всякая локально связная конечномерная К. г. является топологич. многообразием, а всякая бесконечная нульмерная К. г. со счетной базой гомеоморфна канторову совершенному множеству.

Изучение строения К. г. основано на том, что всякая К. г. G обладает достаточной системой конечномерных линейных представлений, т. е. для любого элемента $g \in G$ существует такое непрерывное конечномерное линейное представление ρ, для к-рого $g \notin \operatorname{Ker} \rho$. Этот факт является одним из важных результатов далеко развитой общей теории линейных представлений К. г. Эта теория существенно использует то, что каждая К. г. обладает двусторонне инвариантной мерой $\mu(g)$, к-рая позволяет определить на G инвариантное интегрирование. Важнейшие факты этой теории состоят в следующем. Всякое непрерывное представление К. г. G в предгильбертовом пространстве эквивалентно унитарному представлению. Пусть $L^2(G)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом по инвариантной мере $\mu(g)$ комплекснозначных функций на G. Действие группы G на функции левыми и правыми сдвигами определяет на $L^2(G)$ структуры левого и правого G-модулей. Соответствующие представления наз. соответственно левым и правым регулярным представлением группы G; они унитарны и унитарно эквивалентны. Пусть $\{R^\alpha, \alpha \in I\}$ — семейство всевозможных попарно неэквивалентных конечномерных неприводимых унитарных представлений К. г. G и $m_{ij}^\alpha(g)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n_\alpha = \dim R^\alpha$ — набор матричных элементов представления R^α в некотором ортонормированном базисе. Тогда функции $m_{ij}^\alpha(g)$ лежат в $L^2(G)$ и образуют там полную ортонормированную систему, причем норма функции $m_{ij}^\alpha(g)$ равна $n_\alpha^{-1/2}$. Любая непрерывная на G комплекснозначная функция может быть с любой точностью равномерно аппроксимирована конечными линейными комбинациями функций $m_{ij}^\alpha(g)$ (теорема Петера — Вейля). Характеры неприводимых унитарных конечномерных представлений попарно ортогональны и имеют норму 1. Непрерывные конечномерные унитарные представления эквивалентны тогда и только тогда, когда их характеры равны. Непрерывное конечномерное унитарное представление неприводимо тогда и только тогда, когда норма его характера (который лежит в $L^2(G)$) равна 1. Всякое неприводимое непрерывное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве конечномерно. Всякое непрерывное унитарное представление группы в гильбертовом пространстве является ортогональной прямой суммой унитарных представлений, кратных конечномерным неприводимым представлениям. В частности, кратность вхождения представления R^α в правое регулярное представление равна $n_\alpha = \dim R^\alpha$; при этом сумма всех G-подмодулей в G-модуле $L^2(G)$, изоморфных R^α, является в точности линейной оболочкой всех функций $m_{ij}^\alpha(g)$.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, М., 1950; [3] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [4] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970.

В. Л. Попов.

КОМПАКТНОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество M топологич. пространства X такое, что каждая бесконечная последовательность $\{x_i, i \in \mathbb{Z}\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к нек-рой точке x_0 пространства X. Если $x_0 \in M$, то M наз. компактным в себе множеством. Оно является *компактным пространством* в индуцированной из X топологии. Обратно, всякое К. м. метрич. пространства является в такой топологии компактным пространством. Множество, замыкание к-рого — К. м., наз. относительно компактным множеством.

М. И. Войцеховский.

КОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство, обладающее свойством *компактности.* Метризуемое К. п. является *компактом.* Иногда под К. п. понимается *бикомпактное пространство*, причем требуется его отделимость; пространство без этого условия наз. квазикомпактным. Пространство, представимое в виде счетного объединения К. п., наз. σ-компактным. *М. И. Войцеховский.*

КОМПАКТНОЙ СХОДИМОСТИ ТОПОЛОГИЯ — одна из топологий в пространстве непрерывных отображений, по существу, то же, что и *бикомпактно открытая топология*, в определении к-рой бикомпактность заменена свойством *компактности* (в том или ином смысле). Для пространства отображений $L(E, F)$ локально выпуклых пространств E и F К. с. т.— одна из σ-топологий, т. е. топологий равномерной сходимости на множествах из семейства σ ограниченных множеств в E; она согласуется со структурой векторного пространства $L(E, F)$ и локально выпукла.

М. И. Войцеховский.

КОМПАКТНОСТИ ПРИНЦИП в теории функций комплексного переменного — условие компактности семейств аналитических функций. Бесконечное семейство $\Phi=\{f(z)\}$ голоморфных функций в области D комплексной плоскости z называется компактным, если из любой последовательности $\{f_k(z)\}\subset\Phi$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к аналитической функции в D или, что то же самое, равномерно сходящуюся внутри D, т. е. равномерно сходящуюся на любом компакте $K\subset D$. К. п. был дан П. Монтелем (P. Montel, 1927, см. [1]): для того чтобы семейство Φ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным внутри D, т. е. равномерно ограниченным на любом компакте $K\subset D$.

Пусть H_D — комплексное векторное пространство голоморфных функций в области D пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, с топологией равномерной сходимости на компактах $K\subset D$. К. п. можно сформулировать и в более абстрактной форме: замкнутое множество $\Phi\subset H_D$ компактно в H_D тогда и только тогда, когда оно ограничено в H_D. Понятие компактных семейств аналитич. функций тесно связано с *нормальными семействами.* См. также *Витали теорема.*

Лит.: [1] Монтель П., Нормальные семейства аналитических функций, пер. с франц., М.— Л., 1936; [2] Мальгранж Б., Лекции по теории функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969. *Е. Д. Соломенцев.*

КОМПАКТНОСТЬ — свойство топологич. пространства, состоящее в том, что каждое бесконечное его подмножество имеет предельную точку. Для метрич. пространства понятие К. совпадает с понятием *бикомпактности.* Свойство К. может быть выражено в такой форме: всякое счетное подмножество имеет предельную точку, так что компактные пространства естественно называть компактными для мощности $\aleph_0$.

В связи с этим возникают понятия инициальной и финальной К. или, более общо, компактности в отрезке мощностей $[a, b]$, или $[a, b]$-компактности, выражаемой в трех эквивалентных формах: 1) всякое множество $M\subset X$ мощности $m\in[a, b]$ имеет точку полного накопления, т. е. такую точку ξ, что для каждой ее окрестности O_ξ множество $O_\xi\cap M$ имеет ту же мощность, что и M; 2) всякая вполне упорядоченная система порядкового типа $\omega\in[\omega_a, \omega_b]$ замкнутых множеств имеет непустое пересечение; 3) всякое открытое покрытие мощности $m\subset[a, b]$ содержит покрытие мощности $<m$. Если $a=\aleph_0$, то X наз. инициально компактным вплоть до мощности b. Просто К. означает инициальную К. до мощности $\aleph_0$ и поэтому иногда К. наз. счетной К. Если $b \geqslant a$ — любое, то X наз. финально компактным, начиная с мощности a; так, всякое пространство со счетной базой финально компактно с $a=\aleph_1$. Бикомпактные пространства инициально компактны до любой (бесконечной) мощности и одновременно финально компактны, начиная с любой мощности,— отсюда их название. Таким образом, всякое бикомпактное пространство компактно, но не наоборот: пространство $W(\omega_1)$ всех порядковых чисел $<\omega_1$ компактно, но не бикомпактно. Из К. пространства X, вообще говоря, не следует, что X является *компактным множеством*, напр. в пространстве (неметризуемом) I^c существует замкнутое (и следовательно бикомпактное) множество, не содержащее никакой нестационарной сходящейся последовательности. *М. И. Войцеховский.*

КОМПАКТНЫЙ ОПЕРАТОР — оператор A, определенный на множестве M топологич. векторного пространства X, со значениями в топологич. векторном пространстве Y такой, что всякое ограниченное подмножество множества M он отображает в предкомпактное множество пространства Y. Если, кроме того, оператор A непрерывен на M, то он наз. вполне непрерывным на этом множестве. В случае, когда X и Y банаховы или, более общо, борнологические пространства, а оператор $A: X \to Y$ линеен, то понятия компактного и вполне непрерывного оператора совпадают. Если A — компактный, а B — непрерывный операторы, то $A \circ B$ и $B \circ A$ — К. о., так что множество К. о. есть двусторонний идеал в кольце всех непрерывных операторов. В частности, К. о. не имеет непрерывного обратного. Свойство компактности играет существенную роль в теории неподвижных точек оператора и при изучении его спектра, к-рый в этом случае обладает рядом «хороших» свойств.

Примерами К. о. являются *интегральные операторы* Фредгольма

$$Ax = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

Гаммерштейна

$$Ax = \int_a^b K(t, s)\, g(s, x(s))\, ds,$$

и Урысона

$$Ax = \int_a^b K(t, s, x(s))\, ds$$

в нек-рых функциональных пространствах при соответствующих ограничениях на функции $K(t, s)$, $g(t, u)$ и $K(t, s, u)$.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [3] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975; [4] Красносельский М. А. и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966.
В. И. Соболев.

КОМПАКТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ решетки — элемент a решетки L, для которого условие

$$a \leqslant \vee_{j \in J} x_j,\ x_j \in L,$$

влечет

$$a \leqslant x_{j_1} \vee \ldots \vee x_{j_k}$$

для некоторого конечного подмножества $\{j_1, \ldots, j_k\} \subseteq J$.
Т. С. Фофанова.

КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ — векторы, параллельные одной плоскости. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов

$$\boldsymbol{a}_1 = \{x_1, y_1, z_1\},\ \boldsymbol{a}_2 = \{x_2, y_2, z_2\},\ \boldsymbol{a}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}$$

является равенство:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

КОМПЛЕКС — частично упорядоченное рефлексивным, правильным и транзитивным отношением $<$ множество $K = \{t\}$ каких-либо элементов t, вместе с целочисленной функцией $\dim t$, называемой размерностью элемента t, $[t:t']$, называемой коэффициентом инцидентности элементов t и t', которые удовлетворяют условиям: 1) из $t'<t$ следует, что $\dim t' < \dim t$; 2) $[t:t'] = [t':t]$; 3) из $[t:t'] \neq 0$ следует, что либо $t'<t$, либо $t<t'$, и $|\dim t - \dim t'| = 1$; 4) для любой пары элементов t, t'', из K, размерности к-рых отличаются на две единицы, в K найдется не более, чем конечное число таких элементов t', что

$$[t:t'] \, [t':t''] \neq 0 \text{ и } \sum_{t'} [t:t'] \, [t':t''] = 0.$$

Заменой $[t:t']$ на $\alpha(t)\alpha(t')\,[t:t']$, где $\alpha(t)$ — функция со значениями ± 1, получается К., отождествляемый с K; иначе говоря, инциденции $[t:t']$ задаются с точностью до множителя $\alpha(t)\alpha(t')$; переход от одного значения к другому наз. переменой ориентации К. K; элемент t сохраняет или меняет ориентацию, смотря по тому, что $\alpha(t) = \pm 1$ или, соответственно, -1.

К. K наз. конечномерным, а именно — n-мерным, если n есть максимальная размерность симплексов из K; если же в K не существует симплекса максимальной размерности, то K наз. бесконечномерным. Звездой элемента t К. K наз. множество всех таких элементов t' из K, что $t'>t$. Замыканием элемента t из K наз. множество всех таких элементов t' из K, что $t'<t$. Границей элемента t из K наз. множество всех таких элементов t' из K, что $t'<t$ и $t' \neq t$. Элемент t' наз. гранью элемента t из K, если $t'<t$; грань t' элемента t наз. истинной гранью, если $t' \neq t$. Элементы t и t' из K наз. инцидентными, если $t'<t$ или $t<t'$. К. K наз. конечным, если множество его элементов конечно. К. наз. звездно конечным, или замкнуто конечным, если звезда (соответственно замыкание каждого его элемента) состоит из конечного числа элементов. К. наз. локально конечным, если он является и звездно конечным, и замкнуто конечным.

Подкомплексом К. K наз. любое подмножество множества K, являющееся К. при тех же размерностях и коэффициентах инцидентности, что и в K. Подкомплекс наз. замкнутым, если он содержит замыкание каждого своего элемента, и открытым, если он содержит звезду каждого своего элемента. Дополнение замкнутого К. есть открытый К., и наоборот. Звезда каждого элемента любого К. является открытым подкомплексом, а замыкание и граница — замкнутыми подкомплексами. r-мерным остовом K^r К. K наз. множество всех таких элементов t из K, что $\dim t \leqslant r$; он является замкнутым подкомплексом.

К. $K = \{t\}$ и L наз. изоморфными, если существует такое взаимно однозначное отображение f множества K на множество L, что $\dim f(t) = \dim t$ и $[t:t'] = [f(t):f(t')]$.

Важнейшим типом К. является симплициальный К., к-рый в свою очередь имеет две разновидности: абстрактный К. и геометрический К.

Абстрактный симплициальный комплекс K имеет элементами абстрактные симплексы различных размерностей. r-мерный симплекс t^r есть множество каких-либо $r+1$ объектов $a^0, a^1, \ldots, a^r$.

Эти объекты, т. е. O-мерные симплексы, наз. **вершинами** К. K. Симплекс **ориентирован**, если множество его вершин упорядочено, причем порядки, отличающиеся друг от друга четной перестановкой, задают одну и ту же ориентацию. **s-мерными гранями** симплекса t^r наз. s-мерные симплексы, вершины к-рых содержатся среди вершин t^r. Вместе с данным симплексом симплициальный К. содержит и все его грани. Порядок $t^s < t^r$ означает, что t^s есть грань t^r. Грани $(a^0, \ldots, a^s)$ и $(a^{s+1}, \ldots, a^r)$ наз. **противоположными гранями** симплекса t^r. Если t^{r-1} есть грань t^r, противоположная вершине a^i, то

$$[t^{r-1}:t^r] = [t^r:t^{r-1}] = \pm 1,$$

смотря по тому, ориентирован ли t^r так же, как $a^i t^{r-1}$, или нет. Если t^{r-1} не есть грань t^r, то

$$[t^{r-1}:t^r] = [t^r:t^{r-1}] = 0.$$

Ориентацией каждого симплекса симплициального К. получается ориентированный К.

Абстрактный симплициальный К. определен, если известны множество его вершин и система, так наз. **схема**, всех тех конечных подмножеств этого множества, к-рые приняты за симплексы; при этом требуется, чтобы каждая вершина принадлежала хотя бы одному элементу системы и чтобы с каждым входящим в систему элементом ей принадлежали и все подмножества этого элемента. Размерность, ориентация и т. д. определяются как и выше.

Полиэдральный (клеточный) комплекс n-мерного евклидова пространства E^n есть счетный локально конечный К. K, элементами к-рого являются r-мерные клетки t^r — ограниченные выпуклые открытые подмножества нек-рого E^r из E^n, $0 \leqslant r \leqslant n$, причем клетки попарно не пересекаются, объединение клеток, принадлежащих замыканию элемента t^r, есть топологич. замыкание $\overline{t^r}$ множества t^r в E^r, и топологич. замыкание объединения клеток, не принадлежащих звезде элемента t^r, не пересекается с t^r. При этом $t^r < t^s$ означает, что либо $t^r = t^s$, либо $t^r \subset \overline{t^s} \setminus t^s$, а $[t^{r-1}:t^r]$ определяется с помощью коэффициента инцидентности $[E_1^{r-1}:E^r] = -[E_2^{r-1}:E^r]$, где E_1^{r-1} и E_2^{r-1} — те две области, на к-рые пространство E^{r-1}, содержащее t^{r-1}, делит пространство E^r. Объединение клеток полученного таким образом полиэдрального К. K с индуцированной из E^n топологией, наз. **полиэдром** и обычно обозначается через $|K|$. Частным видом полиэдрального К. является евклидов **геометрический симплициальный К.**, элементы к-рого — евклидовы симплексы из E^n. **r-мерный евклидов симплекс** t^r состоит из точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, заданных соотношениями

$$x_k = \sum_{i=0}^{r} \lambda^i a_k^i, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $a^i = (a_1^i, \ldots, a_n^i)$, $i = 0, \ldots, r$ — независимые точки из E^n (т. е. не содержащиеся ни в одном E^{r-1} из E^n), $0 < \lambda^i < 1$,

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda^i = 1 \quad (\text{если } r = 0,\ x = a^0),$$

a^i наз. **вершинами** t^r, λ^i — **барицентрическими координатами** точки x, а t^r — **геометрическим симплексом**, порожденным абстрактным симплексом $(a^0, a^1, \ldots, a^r)$.

Пусть K — счетный локально конечный абстрактный симплициальный К., вершины к-рого принадлежат E^n, причем если какие-либо вершины образуют симплекс, то они независимы, если два симплекса из K не имеют общей вершины, то порожденные ими геометрич. симплексы не пересекаются, и замыкание объединения всех тех геометрич. симплексов, к-рые порождены симплексами из K и к-рые не принадлежат одному какому-либо из этих порожденных симплексов, не пересекаются с последним. На множество порожденных геометрич. симплексов переносятся из K понятия размерности, порядка, инцидентности, и т. п., это превращает указанное множество в полиэдральный К., наз. **евклидовой реализацией** K.

Геометрич. реализация, не обязательно евклидова, возможна и для любого абстрактного симплициального К. Пусть $\{a^i\}$ — совокупность вершин произвольного абстрактного симплициального К. K, обозначенных индексами i из нек-рого вполне упорядоченного множества I, $|K|$ — множество всех таких систем $\{\lambda_i\}$, $i \in I$, неотрицательных действительных чисел λ_i, что вершины, соответствующие отличным от нуля координатам $\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_r}$ системы $\{\lambda_i\}$, образуют симплекс $(a^{i_0}, \ldots, a^{i_r})$ из K (число таких координат конечно) и $\sum_i \lambda_i = 1$. Симплексу $t^r = (a^{i_0}, \ldots, a^{i_r})$ из K ставится в соответствие множество $|t^r|$ всех таких систем $\{\lambda_i\}$, что $\lambda_i \neq 0$ тогда и только тогда, когда i есть один из $i_0, \ldots, i_r$; тогда $|K|$ есть объединение множеств $|t^r|$. Пусть $|t^r|$ гомеоморфно вложено в E^{r+1}: точке $\{\lambda_i\}$ из $|t^r|$ соответствует точка $\{\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_r}\}$ из E^{r+1}. Это вносит топологию в $|t^r|$ и в $|K|$: множество из $|K|$ считается открытым, если его пересечение с каждым $|t^r|$ открыто в $|t^r|$. Полиэдр $|K|$ и наз. **геометрической реализацией** К. K, а K — **триангуляцией полиэдра** $|K|$. К. K конечен (соответственно локально конечен) тогда и только тогда, когда $|K|$ является компактным (соответственно локально компактным) пространством. Локальная конечность К. K является также необходимым и достаточным условием метризуемости $|K|$, причем метрика задается формулой

$$\rho(\{\lambda_i\}, \{\mu_i\}) = \sqrt{\sum_i (\lambda_i - \mu_i)^2}.$$

Если K — счетный локально конечный n-мерный К., то он может быть реализован в $(2n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{2n+1}. К. K реализуем в гильбертовом пространстве, если $|K|$ можно гомеоморфно вложить в это пространство так, чтобы каждый замкнутый симплекс из $|K|$ получал евклидову реализацию; это возможно тогда и только тогда, когда K есть счетный локально конечный симплициальный К.

Конечный геометрический К. есть такое множество открытых геометрич. симплексов, к-рое вместе с нек-рым симплексом содержит и все его грани, а пересечение различных симплексов пусто. При рассмотрении замкнутых симплексов второе условие заменяется требованием, чтобы пересечение двух замкнутых симплексов было пусто или являлось замкнутой гранью обоих этих симплексов.

Понятие К. находит наибольшее применение в теории гомологии. Использование симплициальных К. при вычислении топологич. инвариантов полиэдров осложняется тем, что при триангуляции полиэдра может понадобиться слишком много симплексов. В этом отношении преимущество принадлежит *клеточному разбиению*, при к-ром количество клеток может быть гораздо меньшим, чем количество симплексов при любом симплициальном разбиении этого полиэдра. С другой стороны, и симплициальные комплексы и триангуляции имеют свои преимущества, напр. при симплициальной аппроксимации непрерывного отображения, при составлении и применении матриц инцидентности, при использовании комплексов для гомологич. исследования общих топологич. пространств и т. п.

Симплициальным отображением К. K в К. L наз. функция $f: K \to L$, ставящая в соответствие каждой вершине a К. K нек-рую вершину $f(a)$ К. L так, что если какие-либо вершины $a^{i_0}, \ldots, a^{i_r}$ К. K образуют в нем симплекс, то и вершины $f(a^{i_0}), \ldots, f(a^{i_r})$, среди к-рых могут быть и совпадающие, должны образовывать симплекс К. L. Функция f каждому симплексу t^r К. K приводит в соответствие нек-рый симплекс $t^s = f(t^r)$ К. L. Симплициальным отображением $f: (K, L) \to (K', L')$ пары (K, L) в пару (K', L'), где L, L' — замкнутые подкомплексы комплексов K, K' соответственно, наз. такое симплициальное отображение $f: K \to K'$, что $f(L) \subset L'$. Множество всех симплициальных К. и всех их симплициальных отображений также, как и множество всех пар симплициальных К. и всех их симплициальных отображений, образуют категории.

Гомологии К., выражавшиеся сначала числовыми инвариантами, позднее стали представляться алгебраич. средствами — группами, модулями, пучками и т. п. Схема их построения такова. Пусть K — произвольный К., а G — абелева группа; r-мерной цепью (вообще говоря, бесконечной) К. K над группой коэффициентов G наз. функция c_r, областью определения к-рой является множество всех r-мерных элементов К. K, а множеством значений — группа G. Совокупность $\{c_r\}$ всех r-мерных цепей c_r К. K, обозначаемая через $C_r(K; G)$ относительно операции сложения

$$(c_r + c'_r)(t^r) = c_r(t^r) + c'_r(t^r), \quad c_r, c'_r \in C_r(K; G), \quad t \in K,$$

образует группу, наз. группой r-мерных цепей К. K над G. В предположении, что K — звездно конечный К., в $C_r(K; G)$ вводится граничный оператор ∂_r с помощью формулы

$$\partial c_r = \sum_j \left(\sum_i c_r(t_i^r)\,[t_i^r : t_j^{r-1}]\right) t_j^{r-1},$$

к-рый определяет гомоморфизм

$$\partial_r : C_r(K; G) \to C_{r-1}(K; G).$$

В силу равенства $\partial_{r-1}\partial r = 0$ получается цепной К. $\{C_r(K; G), \partial_r\}$, группа гомологии $H_r(K; G)$ к-рого, т. е. факторгруппа группы $\operatorname{Ker} \partial_r$ по подгруппе $\operatorname{Im} \partial_{r+1}$, наз. r-мерной группой гомологии К. K над G (группа $\operatorname{Ker} \partial_r$ часто обозначается через $Z_r(K; G)$ и наз. группой r-мерных циклов К. K над G, а группа $\operatorname{Im} \partial_{r+1}$ обозначается через $B_r(K; G)$ и наз. группой r-мерных ограничивающих циклов К. K над G).

Наряду с группами гомологий для К. определяются группы когомологии. При их определении исходной является опять же группа цепей, называемая в этом случае группой коцепей и обозначаемая через $C^r(K; G)$. К. K предполагается здесь замкнуто конечным, а кограничный оператор δ^r задается формулой

$$\delta^r c^r = \sum_j \left(\sum_i c^r(t_i^r)\,[t_i^r : t_j^{r+1}]\right) t_j^{r+1},$$

определяющей гомоморфизм

$$\delta^r : C^r(K; G) \to C^{r+1}(K; G).$$

Когомологическая группа $H^r(K; G)$ этого коцепного комплекса $\{C^r(K; G), \delta^r\}$, $\delta^{r+1}\delta^r = 0$, т. е. факторгруппа группы $\operatorname{Ker} \delta^r$ по подгруппе $\operatorname{Im} \delta^{r-1}$, наз. r-мерной когомологической группой К. K над G (группа $\operatorname{Ker} \delta^r$ часто обозначается через $Z^r(K; G)$ и наз. группой r-мерных коциклов К. K над G, а группа $\operatorname{Im} \delta^{r-1}$ обозначается через $B^r(K; G)$ и наз. группой r-мерных кограничивающих коциклов К. K над G).

Звездная (соответственно замкнутая) конечность К. требуется для того, чтобы суммирование при определении граничного (соответственно кограничного) оператора было конечным. В случае звездно конечного К. определяются гомологии произвольных (бесконечных) циклов и когомологии конечных коциклов. В случае замкнуто конечного К.— когомологии бесконечных коциклов и гомологии конечных циклов. В случае локально конечного К. определяются как конечные, так и бесконечные гомологии и когомологии. Если К. произвольный, то его группы гомологии (соответственно когомологии) определяются как пределы прямого (соответственно обратного) спектра групп гомологии (соответственно когомологии) всех локально конечных подкомплексов данного К., упорядоченных по возрастанию.

При исследовании гомологии и когомологии К. рассматривается категория пар симплициальных К. (K, L) и их симплициальных отображений $f:(K, L)\to(K', L')$ и группы $C_r(K, L; G)$ r-мерных конечных цепей К. K по модулю L над G, являющаяся факторгруппой группы $C_r(K; G)$ r-мерных цепей К. K над G по подгруппе $C_r(L; G)$ r-мерных цепей К. L над G. Гомологическая группа $H_r(K, L; G)$ цепного комплекса $\{C_r(K; L; G), \partial_r\}$ наз. *r-мерной относительной группой гомологии* К. K по модулю L над группой коэффициентов G.

Симплициальное отображение f порождает гомоморфизм f_1 группы $C_r(K; G)$ в группу $C_r(K'; G)$ по формуле

$$(f_1c_r)(t^r_{K'})=\sum(\pm c_r(t^r_K)),$$

где $c_r\in C_r(K; G)$, а сумма распространяется на все такие симплексы t^r_K из K, к-рые отображаются на данный симплекс $t^r_{K'}$ из K', причем знак $+$ или $-$ берется в зависимости от того, совпадают или не совпадают ориентации $t^r_{K'}$ и $f(t^r_K)$. Гомоморфизм f_1, распространенный на факторгруппы, порождает гомоморфизм группы $C_r(K, L; G)$ в $C_r(K', L', G)$; последний гомоморфизм коммутирует с граничным оператором ∂_r, так что получается гомоморфизм относительных групп гомологии

$$f_{*r}:H_r(K, L; G)\to H_r(K', L'; G),$$

наз. *гомоморфизмом, индуцированным симплициальным отображением* f. Пара (H_r, f_{*r}) является ковариантным функтором из категории пар симплициальных К. и симплициальных отображений в категорию абелевых групп.

Отображения включения $L\overset{\varphi}{\subset}K\overset{\psi}{\subset}(K, L)$, где L и K — пары $(L, \varnothing)$ и $(K, \varnothing)$, порождают точную последовательность

$$0\to C_r(L; G)\xrightarrow{\varphi}C_r(K; G)\xrightarrow{\psi}C_r(K,L; G)\to 0.$$

Пусть z_r — произвольный цикл К. K по модулю L из любого элемента h_r группы $H_r(K, L; G)$; существует такая цепь c_r К. K, что $\psi(c_r)=z_r$ (ψ — эпиморфизм), цепь $\psi(\partial_r c_r)=\partial_r\psi(c_r)=\partial_r z_r$ К. K лежит на L (т. е. равняется нулю на симплексах из $K\setminus L$) и принадлежит $\operatorname{Ker}\psi$; совпадающая с ней цепь — прообраз $\varphi^{-1}(\partial_r z_r)$ при мономорфизме φ — является циклом К. L. Данному элементу h_r ставится в соответствие класс гомологии $h_{r-1}\in H_{r-1}(L; G)$ соответствующего цикла, и получается гомоморфизм

$$\partial_{*r}:H_r(K, L; G)\to H_{r-1}(L; G),$$

наз. *связывающим гомоморфизмом*. Он согласован с функтором $\{H_r, f_{*r}\}$, т. е. имеет место равенство $\partial_{*r}f_{*r}=(f|_L)_{*r}\partial_{*r}$, где $f|_L$ — ограничение f на L. Отображения вложения $\varphi: L\subset K$, $\psi: K\subset(K, L)$

порождают точную последовательность групп

$$\ldots \xleftarrow{\varphi_{*(r-1)}} H_{r-1}(L;\,G) \xleftarrow{\partial_{*r}} H_r(K,L;\,G) \xleftarrow{\psi_{*r}}$$

$$\longleftarrow H_r(K;\,G) \xleftarrow{\varphi_{*r}} H_r(L;\,G) \xleftarrow{\partial_{*(r+1)}} \ldots,$$

наз. гомологической последовательностью пары $(K,\ L)$.

Симплициальные отображения $f,\ g:(K,\ L)\to(K',\ L')$ наз. смежными, если для каждого симплекса t^r из K симплексы $f(t^r)$ и $g(t^r)$ являются гранями одного и того же симплекса из K'. В категории пар симплициальных К. и их симплициальных отображений это отношение играет роль отношения гомотопности: для любых смежных симплициальных отображений $f,\ g:(K,\ L)\to(K',\ L')$ и для любого r индуцированные гомоморфизмы f_{*r}, g_{*r} группы $H_r(K,\ L;\ G)$ в группу $H_r(K',\ L';\ G)$ совпадают.

Вложение $i:(K_1,\ L_1)\subset(K,\ L)$ наз. отображением вырезания, если $K_1-L_1=K-L$. Свойство вырезания состоит в том, что всякое отображение вырезания симплициальных пар i для любого r индуцирует изоморфизм $i_{*r}:H_r(K_1,\ L_1;\ G)\approx\approx H_r(K,\ L;\ G)$. r-мерная группа гомологии любого К. K, состоящего из одной точки над произвольной группой коэффициентов G, является нулевой группой для всех $r\neq0$ и изоморфна группе G при $r=0$.

Таким образом, тройка $(H_r,\ f_{*r},\ \partial_{*r})$ представляет собой теорию гомологий в смысле Стинрода — Эйленберга (см. *Стинрода — Эйленберга аксиомы*).

Аналогично строится теория когомологии. Группа $C^r(K,\ L;\ G)$ r-мерных бесконечных коцепей К. K по модулю подкомплекса L над G является множеством всех таких r-мерных коцепей c^r К. K, к-рые равны нулю на симплексах t^r подкомплекса L К. K, а r-мерная относительная группа когомологии $H^r(K,\ L;\ G)$ К. K по модулю L над группой коэффициентов G есть когомологич. группа коцепного комплекса $\{C^r(K,\ L;\ G),\ \delta^r\}$.

Симплициальное отображение f порождает гомоморфизм f^1 группы $C^r(K';\ G)$ в группу $C^r(K;\ G)$

$$(f^1c^r)(t^r_K)=c^r(f(t^r_K)),\ t^r_K\in K,\ c_r\in C^r(K';\ G).$$

Гомоморфизм f^1 порождает также гомоморфизм группы $C^r(K',\ L';\ G)$ в группу $C^r(K,\ L;\ G)$; последний гомоморфизм коммутирует с кограничным оператором δ^r, и получается гоморфизм f^{*r} относительных групп когомологии

$$f^{*r}:H^r(K',\ L';\ G)\to H^r(K,L;\ G),$$

наз. гомоморфизмом, индуцированным симплициальным отображением f. Пара $(H^r,\ f^{*r})$ является контравариантным функтором из категории пар симплициальных К. и симплициальных отображений в категорию абелевых групп.

Имеет место точная последовательность

$$0\longleftarrow C^r(L;\ G)\xleftarrow{\varphi} C^r(K;\ G)\xleftarrow{\psi} C^r(K,\ L,\ G)\longleftarrow 0,$$

порожденная вложениями $\varphi:L\subset K$, $\psi:K\subset(K,\ L)$. В классе когомологии $h^r\in H^r(L;\ G)$ произвольный коцикл $z^r\in Z^r(L;\ G)$ распространяется до коцепи $z^r_1\in C^r(K;\ G)$ произвольно, когда t^r не принадлежит подкомплексу L К. K. Кограница $\delta^r z^r_1$ получающейся коцепи равна нулю на L и принадлежит группе $Z^{r+1}(K,\ L;\ G)$. Класс когомологии $\delta^r h^r\in H^{r+1}(K,\ L;\ G)$ этого коцикла приводится в соответствие выбранному классу h^r. Это соответствие $h^r\to\delta^r h^r$ определяет гомоморфизм

$$\delta^{*r}:H^r(L;\ G)\to H^{r+1}(K,\ L;\ G),$$

наз. связывающим гомоморфизмом. Гомоморфизм δ^{*r} согласован с функтором $\{H^r,\ f^{*r}\}$, т. е. имеет место равенство $\delta^{*r}(f|_L)^{*r}=f^{*r}\delta^{*r}$.

Прямая последовательность групп

$$\ldots \xrightarrow{\varphi^{*r}} H^r(L;\ G) \xrightarrow{\delta^{*r}} H^{r+1}(K,\ L;\ G) \xrightarrow{\psi^{*(r+1)}}$$
$$\longrightarrow H^{r+1}(K;\ G) \xrightarrow{\varphi^{*(r+1)}} H^{r+1}(L;\ G) \xrightarrow{\delta^{*(r+1)}} \ldots,$$

где $\varphi: L \subset K$ и $\psi: K \subset (K,\ L)$ — отображения вложения, является точной последовательностью и наз. когомологической последовательностью пары $(K,\ L)$.

Для любых смежных симплициальных отображений $f,\ g: (K,\ L) \to (K',\ L')$ и любого r индуцированные гомоморфизмы f^{*r}, g^{*r} группы $H^r(K',\ L',\ G)$ в группу $H^r(K,\ L;\ G)$ совпадают; всякое отображение вырезания симплициальных пар $i: (K_1,\ L_1) \subset (K,\ L)$ индуцирует изоморфизм $i^{*r}: H^r(K,\ L;\ G) \approx H^r(K_1,\ L_1;\ G)$. Для любого одноточечного К. K группы $H^r(K;\ G) = 0$ для всех $r \neq 0$, а $H^0(K;\ G) \approx G$. Таким образом, тройка $(H^r,\ f^{*r},\ \delta^{*r})$ является теорией когомологии (в смысле Стинрода — Эйленберга).

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; [2] его же, Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975; [3] Лефшец С., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1948; [4] Хилтон П.-Дж., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, пер. с англ., 1966; [5] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд., М., 1976. *Д. О. Баладзе.*

КОМПЛЕКС — одно из основных понятий гомологической алгебры. Пусть A — абелева категория. Градуированным объектом наз. последовательность $K = (K_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ объектов K_n из A. Последовательность $a = (a_n)$ морфизмов $a_n: K'_n \to K_n$ наз. морфизмом $a: K' \to K$ градуированых объектов. Полагая $K(h)_n = K_{n+h}$, можно определить объект $K(h)$. Морфизм градуированных объектов $K' \to K(h)$ наз. морфизмом степени h из K' в K. Градуированный объект наз. положительным, если $K_n = 0$ для $n < 0$, ограниченным снизу, если $K(h)$ положителен для нек-рого h, и конечным, если $K_n = 0$ для всех, кроме конечного множества, чисел n. Цепной комплекс в категории A состоит из градуированного объекта K и морфизма $d: K \to K$ степени -1 такого, что $d^2 = 0$. Подробнее: $d = (d_n)$, где $d_n: K_n \to K_{n-1}$ и $d_{n-1} d_n = 0$ для любого n. Морфизм цепных комплексов

$$(K',\ d') \longrightarrow (K,\ d)$$

это морфизм $a: K' \to K$ градуированных объектов такой, что $ad' = da$. Двойственным образом (как градуированный объект с морфизмом d степени $+1$) определяется коцепной комплекс.

Наиболее часто рассматриваются К. в категориях абелевых групп, модулей, пучков абелевых групп на топологич. пространстве. Так, К. абелевых групп есть градуированная дифференциальная группа, дифференциал в к-рой имеет степень -1 или $+1$.

С каждым цепным К. K связаны три градуированные объекта:

$B = B(K)$: $B_n = \operatorname{Im}(K_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} K_n)$ — границы;

$Z = Z(K)$: $Z_n = \operatorname{Ker}(K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1})$ — циклы;

$H = H(K)$: $H_n = Z_n / B_n$ — n-мерные гомологии (см. *Гомологии комплекса*).

Для коцепного К. аналогичные объекты наз. кограницами, коциклами и когомологиями.

Если $H(K) = 0$, то говорят, что К. K — ацикличен.

Морфизм $a: K' \to K$ комплексов индуцирует морфизмы

$$Z(K') \longrightarrow Z(K), \quad B(K') \longrightarrow B(K)$$

и, следовательно, морфизм гомологий или когомологий

$$H(a): H(K') \longrightarrow H(K).$$

Два морфизма $a,\ b: K' \to K$ наз. гомотопными (что обозначается $a \simeq b$), если существует такой морфизм $s: K' \to K(1)$ (или $s: K' \to K(-1)$ для коцепных К.) градуированных объектов (называемый гомотопией), что

$$a - b = ds + sd'$$

(откуда следует, что $H(a) = H(b)$). Комплекс K наз. стягиваемым, если $1_K \simeq 0$ (в этом случае К. K ацикличен).

Если $0 \to K' \to K \to K'' \to 0$ — точная последовательность К., то существует связывающий морфизм $\partial: H(K'') \to H(K)$ степени -1 $(+1)$, естественный относительно морфизмов точных последовательностей и такой, что ассоциированная с ним длинная гомологическая последовательность (т. е. последовательность

$$\ldots \longrightarrow H_n(K') \longrightarrow H_n(K) \longrightarrow H_n(K'') \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} H_{n-1}(K') \longrightarrow H_{n-1}(K) \longrightarrow \ldots$$

для цепного К. и последовательность

$$\ldots \longrightarrow H_n(K') \longrightarrow H_n(K) \longrightarrow H_n(K'') \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} H_{n+1}(K') \longrightarrow H_{n+1}(K) \longrightarrow \ldots$$

для коцепного К.) является точной.

Конус морфизма цепных комплексов $a: K' \to K$ есть К. $MC(a)$, определенный следующим образом:

$$MK(a)_n = K_n \oplus K'_{n-1},$$

$$d(a)_{n+1} = \begin{pmatrix} d_{n+1}, & a_n \\ 0, & -d'_n \end{pmatrix} : K_{n+1} \oplus K'_{n-1} \longrightarrow K_n \oplus K'_{n-1}.$$

Разложение К. $MK(a)$ в прямую сумму приводит к точной последовательности К.

$$0 \to K \to MK(a) \to K'(-1) \to 0,$$

для к-рой ассоциированная длинная гомологич. последовательность изоморфна последовательности

$$\ldots \longrightarrow H_n(K) \longrightarrow H_n(MK(a)) \longrightarrow H_{n-1}(K') \xrightarrow{H_{n-1}(a)}$$
$$\xrightarrow{H_{n-1}(a)} H_{n-1}(K) \longrightarrow H_{n-1}(MK(a)) \longrightarrow \ldots$$

Следовательно, цепной К. $MK(a)$ ацикличен тогда и только тогда, когда $H(a)$ — изоморфизм. Аналогичные понятия и факты имеют место для коцепных К.

Лит.: [1] Басс Х., Алгебраическая К-теория, пер. с англ., М., 1973.

А. В. Михалев.

КОМПЛЕКС прямых — множество K прямых в трехмерном пространстве (проективном, аффинном, евклидовом), зависящее от трех параметров. Прямая $l \in K$ наз. лучом К. Через каждую точку M пространства проходит однопараметрическая совокупность лучей К.— конус K_M. К. определяет соответствие между точками луча К. и плоскостями, проходящими через этот луч: каждой точке M луча l соответствует плоскость П, касательная к конусу K_M в точке M. Такое соответствие наз. нормальной корреляцией. В каждой плоскости пространства располагается однопараметрическое семейство лучей К., огибающих плоскую кривую s. Инфлекционным центром луча $l \in K$ наз. точка $M \in l$, в к-рой кривая s плоскости П, соответствующей точке M в нормальной корреляции, имеет возврат. На каждом луче К. имеется в общем случае четыре инфлекционных центра. Точкой прикосновения линейчатой поверхности К. наз. такая точка M на ее образующей, в к-рой касательная плоскость поверхности совпадает с плоскостью П, соответствующей точке M в нормальной корреляции. На каждой образующей линейчатой поверхности К. имеется в общем случае две и только две точки прикосновения. Линии, описанные этими точками, наз. линиями прикосновения линейчатой поверхности. Главными поверхностями К. наз. линейчатые поверхности, у к-рых линии прикосновения суть их асимптотич. линии. Проективную классификацию К. можно осуществлять по кратности инфлекционных центров их лучей.

В евклидовом пространстве на каждом луче l определяется инвариантная точка C (центр луча), в к-рой вектор нормали к плоскости П, соответствующей в нормальной корреляции точке C, ортогонален нормали к плоскости П, соответствующей несобственной точке луча l. Примеры К.: специальный К.— множество всех касательных к данной поверхности; линейный К., задаваемый линейным однородным уравнением относительно грассмановых координат луча К.; специальный линейный К.— множество прямых трехмерного пространства, пересекающих данную прямую.

Наряду с К. прямых рассматривают К. (трехпараметрич. семейства) плоскостей, коник, квадрик и других фигур (см. *Фигур многообразие*).

Лит.: [1] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.— Л., 1950; [2] Кованцов Н. И., Теория комплексов, К., 1963.

В. С. Малаховский.

КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{G}$ над $\mathbb{R}$ — комплексная алгебра Ли $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$, являющаяся *тензорным произведением* алгебры $\mathfrak{G}$ на поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{G}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{G} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Таким образом, К. а. Ли $\mathfrak{G}$ получается из $\mathfrak{G}$ расширением поля скаляров с $\mathbb{R}$ до $\mathbb{C}$. Элементами алгебры $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ можно считать пары (u, v), $u, v \in \mathfrak{G}$; тогда операции в $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ будут определяться формулами:

$$(u_1, v_1)+(u_2, v_2)=(u_1+u_2, v_1+v_2),$$
$$(\alpha+i\beta)(u, v)=(\alpha u-\beta v, \alpha v+\beta u) \text{ для любых } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$
$$[(u_1, v_1), (u_2, v_2)]=([u_1, u_2]-[v_1, v_2], [v_1, u_2]+[u_1, v_2]).$$

Алгебра $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ наз. также комплексной оболочкой алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Нек-рые важные свойства алгебр наследуются при комплексификации: $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ нильпотентна, разрешима или полупроста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G}$ обладает этим свойством. Однако простота $\mathfrak{G}$ не влечет, вообще говоря, простоту $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$.

Понятие К. а. Ли тесно связано с понятием вещественной *формы* комплексной алгебры Ли. Вещественная подалгебра Ли $\mathfrak{f}$ в комплексной алгебре Ли $\mathfrak{h}$ наз. вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{h}$, если всякий элемент $x \in \mathfrak{h}$ однозначно представим в виде $x=u+iv$, где $u, v \in \mathfrak{f}$. К. а. Ли $\mathfrak{f}$ естественно изоморфна алгебре $\mathfrak{h}$. Не всякая комплексная алгебра Ли имеет вещественную форму. С другой стороны, заданная комплексная алгебра Ли, вообще, может иметь несколько неизоморфных вещественных форм. Так, алгебра Ли всех вещественных матриц порядка n и алгебра Ли всех антиэрмитовых матриц порядка n являются неизоморфными вещественными формами алгебры Ли всех комплексных матриц порядка n (у к-рой имеются и другие вещественные формы).

Лит.: [1] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Гантмахер Ф., «Матем. сб.», 1939, т. 5, в. 2, с. 217—50.

В. Л. Попов.

КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА — комплексное векторное пространство $V^{\mathbb{C}}$, полученное из вещественного векторного пространства

V путем расширения поля скаляров. Пространство $V^{\mathbb{C}}$ определяется как тензорное произведение $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Его можно определить также как множество формальных выражений $x+iy$, где x, $y \in V$, с естественно заданными операциями сложения и умножения на комплексные числа. Пространство V вкладывается в $V^{\mathbb{C}}$ в качестве вещественного подпространства и наз. **вещественной формой** пространства $V^{\mathbb{C}}$. Всякий базис пространства V будет базисом пространства $V^{\mathbb{C}}$ (над $\mathbb{C}$). В частности, $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$. Операция $V \mapsto V^{\mathbb{C}}$ является функтором из категории векторных пространств над $\mathbb{R}$ в категорию векторных пространств над $\mathbb{C}$. *А. Л. Онищик.*

КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ ГРУППЫ ЛИ G над $\mathbb{R}$ — комплексная группа Ли $G_{\mathbb{C}}$, содержащая G в качестве вещественной подгруппы Ли и такая, что алгебра Ли $\mathfrak{G}$ группы G является вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ группы $G_{\mathbb{C}}$ (см. *Комплексификация алгебры Ли*). Группа G при этом наз. **вещественной формой группы Ли** $G_{\mathbb{C}}$. Напр., группа $U(n)$ всех унитарных матриц порядка n является вещественной формой группы $GL(n, \mathbb{C})$ всех невырожденных матриц порядка n с комплексными элементами.

Имеется взаимно однозначное соответствие между комплексно аналитическими линейными представлениями связной односвязной комплексной группы Ли $G_{\mathbb{C}}$ и вещественно аналитич. представлениями ее связной вещественной формы G, при к-ром неприводимым представлениям соответствуют неприводимые. Это соответствие устанавливается следующим образом: если ρ — (неприводимое) конечномерное комплексно аналитическое представление группы $G_{\mathbb{C}}$, то ограничение ρ на G является (неприводимым) вещественно аналитич. представлением группы G.

Не всякая вещественная группа Ли обладает комплексификацией. В частности, связная полупростая группа Ли G обладает комплексификацией тогда и только тогда, когда G линейна, т. е. изоморфна подгруппе некоторой группы $GL(n, \mathbb{C})$. Например, универсальная накрывающая группы вещественных матриц второго порядка с определителем 1 не имеет комплексификации. Однако всякая компактная группа Ли комплексификацией обладает.

Отсутствие комплексификации у нек-рых вещественных групп Ли инспирировало введение более общего понятия — **универсальной комплексификации** $(\tilde{G}, \tau)$ вещественной группы Ли G. Здесь $\tilde{G}$ — комплексная группа Ли, $\tau : G \to \tilde{G}$ — вещественно аналитич. гомоморфизм такой, что для любой комплексной группы Ли H и любого вещественно аналитич. гомоморфизма $\alpha : G \to H$ существует единственный комплексно аналитич. гомоморфизм $\beta : \tilde{G} \to H$, для к-рого $\alpha = \beta \circ \tau$. Универсальная К. г. Ли всегда существует и определена однозначно [3]. Однозначность означает, что если $(\tilde{G}', \tau')$ — другая универсальная К. г. Ли G, то существует единственный изоморфизм $\lambda : \tilde{G} \to \tilde{G}'$, для к-рого $\lambda \circ \tau = \tau'$. В общем случае $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{G} \leqslant \dim_{\mathbb{R}} G$, если же G односвязна, то $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{G} = \dim_{\mathbb{R}} G$ и ядро гомоморфизма τ дискретно.

См. также *Форма* группы Ли.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976. *В. Л. Попов.*

КОМПЛЕКСНАЯ СТРУКТУРА — 1) К. с. на действительном векторном пространстве V — структура комплексного векторного пространства на V, согласованная с исходной структурой. К. с. на V полностью определяется заданием оператора умножения на число i, роль к-рого может играть произвольное линейное преобразование $I: V \to V$, удовлетворяющее условию $I^2=-E$. Поэтому преобразование такого типа часто наз. К. с. на V. Если V снабжено К. с. и $v_1, \ldots, v_n$ — базис этого пространства над $\mathbb{C}$, то $v_1, \ldots, v_n, Iv_1, \ldots, Iv_n$ образуют его базис над $\mathbb{R}$, так что $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$. Если I — К. с. на V, то комплексификация $V^{\mathbb{C}}$ пространства V распадается в прямую сумму $V^{\mathbb{C}} = V_+ \dot{+} V_-$, где $V_\pm$ — собственные подпространства преобразования I, продолженного на $V^{\mathbb{C}}$, отвечающие собственным значениям $\pm i$, причем $V_- = \overline{V}_+$. Обратно, всякое комплексное подпространство $S \subset V^{\mathbb{C}}$ такое, что $V^{\mathbb{C}} = S \dot{+} \overline{S}$, определяет на V К. с., для к-рой $V_+ = S$.

Любые две К. с. на $2n$-мерном действительном пространстве V переводятся друг в друга нек-рым автоморфизмом пространства V. Множество всех К. с. на V является, таким образом, однородным пространством группы $GL(2n, \mathbb{R})$ и отождествляется с факторпространством $GL(2n, \mathbb{R})/H$, где $H \cong GL(n, \mathbb{C})$ — подгруппа, состоящая из невырожденных матриц вида $\left\| \begin{matrix} A & B \\ -B & A \end{matrix} \right\|$.

2) К. с. — структура комплексного *аналитического многообразия*. Если M — дифференцируемое многообразие, то К. с. на M — это комплексный аналитич. атлас на M, согласованный с заданным на M действительным дифференцируемым атласом. При этом $\dim_{\mathbb{R}} M = 2 \dim_{\mathbb{C}} M$. К. с. на M индуцирует К. с. на каждом касательном пространстве $T_x(M)$ и тем самым индуцирует на M *почти комплексную структуру*, к-рая ее полностью определяет.

Лит.: [1] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [2] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976. *А. Л. Онищик.*

КОМПЛЕКСНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ МЕТОД, контурного интегрирования метод, — один из наиболее универсальных методов исследования и приложений *дзета-функций*, *L-функций*, вообще, функций, определяемых рядами Дирихле.

К. и. м. в теорию чисел впервые ввел Б. Риман (B. Riemann) [1] в 1876 в связи с изучением свойств дзета-функции. Известные в настоящее время применения К. и. м., опирающиеся на теорему Коши о вычетах, теорему Фрагмена — Линделёфа для рядов Дирихле, метод перевала и т. п., весьма разнообразны по своей форме и содержанию. К. и. м. используется для аналитич. продолжения и вывода функциональных уравнений функций Дирихле; для вывода приближенных функциональных уравнений этих функций; для оценок числа их нетривиальных нулей и оценок плотности распределения таких нулей в той или иной части критической полосы; для получения асимптотич. формул и разного рода оценок важнейших арифметич. функций.

Классический вариант К. и. м. иллюстрируется нижеследующим примером аналитич. продолжения и вывода функционального уравнения дзета-функции Римана (см. [2], [3]). При $s=\sigma+it$, $\sigma>0$, $n>0$

$$n^{-s}\Gamma(s) = n^{-s}\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx = \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}\,dx.$$

После суммирования получается, что функция $\zeta(s)$, первоначально определенная рядом $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, при $\sigma>1$, представляется также формулой

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx. \qquad (1)$$

Пусть рассматривается интеграл

$$J(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,dz,$$

взятый вдоль (бесконечного) контура $C=\alpha+\beta+\gamma$, где α, γ проходят по нижнему и верхнему краям разреза вдоль отрицательной действительной оси плоскости z, обходя начало координат по окружности β радиуса $r<2\pi$. Интеграл $J(s)$ сходится при всех s и притом равномерно в любом круге $|s|<\Delta$, ибо на α и γ подинтегральная функция меньше $e^{-0.5|z|}$ для всех $|x|>>z_0(\Delta)$. По теореме Коши он не зависит от r и, значит, представляет целую функцию s. Полагая, что на α, β, γ соответственно $z=\delta e^{-i\pi}$, $z=re^{i\theta}$, $z=\delta e^{i\pi}$ и $f(z)=1/(e^z-1)$, легко расписать $J(s)$ в виде интегралов по действительным переменным:

$$\pi J(s)=\sin\pi s\int_r^\infty \delta^{s-1}f(-\delta)\,d\delta+\frac{r^s}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta s}f(re^{i\theta})\,d\theta.$$

В круге $|z|<\pi$ будет $|zf(z)|<A$. Поэтому второе слагаемое правой части этого равенства меньше, чем $2\pi A r^{\sigma-1}e^{\pi|t|}$, что для любого фиксированного s с $\sigma>1$ стремится к нулю при $r\to 0$. Следовательно, в силу формулы (1), $\pi J(s)=\sin\pi s\Gamma(s)\zeta(s)$ и

$$\zeta(s)=\frac{\pi J(s)}{\sin\pi s\Gamma(s)}\,\Gamma=(1-s)\,J(s). \qquad (2)$$

Эта формула, доказанная в предположении $\sigma>1$, дает продолжение функции $\zeta(s)$ на всю плоскость. Из нее видно, что $\zeta(s)$ является однозначной аналитич. функцией во всей плоскости s, имеющей единственной особенностью простой полюс в точке $s=1$ с вычетом 1.

Для вывода функционального уравнения $\zeta(s)$ предполагается, что $\sigma<0$, N — целое >4. Пусть

$$J_N(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(N)} \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,dz,$$

где $C(N)$ — контур, отличающийся от прежнего контура замыканием α, γ дугой окружности радиуса $R=2N+1$ с центром в начале координат. Интеграл по внешней дуге контура $C(N)$ оценивается в виде $AR^\sigma e^{\pi|t|}$, что при $\sigma<0$ стремится к нулю при $N\to\infty$. Отсюда, $J_N(s)\to J(s)$ при $N\to\infty$. С другой стороны по теореме о вычетах

$$J_N(s)=\sum_{n=1}^N\{(2\pi ni)^{s-1}+(-2\pi i)^{s-1}\}=$$

$$=2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^N n^{s-1}.$$

Поэтому при $\sigma<0$

$$J(s)=\lim J_N(s)=2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\,\zeta(1-s).$$

Это равенство в соединении с формулой (2) дает соотношение:

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\,\zeta(s),$$

к-рое по теории аналитич. продолжения имеет место уже во всей плоскости s и наз. **функциональным уравнением дзета-функции Римана**.

К. и. м. играет большую роль в получении приближенных функциональных уравнений, к-рые лежат в основе современных оценок функций Дирихле (см. [4], [5]).

К. и. м. является основным в исследованиях распределения нулей функций $\zeta(s)$, $L(s, \chi)$ и др. До недавнего времени здесь он применялся в форме известных теоремы Литлвуда о числе нулей в прямоугольнике регулярной при $\sigma>0$ функции $F(s)$ и теоремы Баклунда об $\arg F(s)$, а также теорем о выпуклости средних значений аналитич. функций (см. [2]). В 1969 Х. Монтгомери (G. Montgomerie) [6] нашел новый прямой и более сильный путь использования К. и. м. для этих целей.

К. и. м. в приложениях к теории чисел естественно возникает в связи с формулой суммирования коэффициентов рядов Дирихле (см. [2], [7]).

Лит.: [1] Риман Б., Сочинения, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [3] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [4] Лаврик А. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 2, с. 431—42; [5] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, № 1, с. 134—185; [6] Монтгомери Х., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1974; [7] Карацуба А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 3, с. 475 83. *А. Ф. Лаврик.*

КОМПЛЕКСНОЕ МНОГООБРАЗИЕ, комплексное аналитическое многообразие,— *аналитическое многообразие* над полем комплексных чисел.

КОМПЛЕКСНОЕ ПРОСТРАНСТВО, комплексное аналитическое пространство,— аналитическое пространство над полем комплексных чисел. Наиболее простым и употребительным К. п. является числовое комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, точками, или элементами, к-рого являются всевозможные n-строки $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $z'=(z'_1, \ldots, z'_n)$, ..., составленные из произвольных комплексных чисел $z_\nu=x_\nu+iy_\nu$, $z'_\nu=x'_\nu+iy'_\nu$, $\nu=1, 2, \ldots, n$. К. п. $\mathbb{C}^n$ есть векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с операциями сложения

$$z+z'=(z_1+z'_1, \ldots, z_n+z'_n)$$

и умножения на число $\lambda\in\mathbb{C}$

$$\lambda z=(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n),$$

а также метрическое пространство с евклидовой метрикой

$$\rho(z, z')=|z-z'|=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|z_\nu-z'_\nu|^2}=$$
$$=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-x'_\nu)^2+(y_\nu-y'_\nu)^2}.$$

Иначе говоря, К. п. $\mathbb{C}^n$ получается в результате комплексификации числового действительного пространства $\mathbb{R}^{2n}$. К. п. $\mathbb{C}^n$ есть топологич. произведение n комплексных плоскостей $\mathbb{C}^1=\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n=\mathbb{C}\times\ldots\times\mathbb{C}$.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969. *Е. Д. Соломенцев.*

КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО — число вида $z=x+iy$, где x и y — *действительные числа*, а $i=\sqrt{-1}$ — так наз. мнимая единица, т. е. число, квадрат к-рого равен -1 (в технической литературе применяется также обозначение $j=\sqrt{-1}$); x наз. действительной, или вещественной, частью К. ч. z, а y — его мнимой частью (обозначения $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$). Действительные числа — частный случай К. ч. при $y=0$; К. ч., не являющиеся действительными, т. е. такие, что $y\neq 0$, иногда наз. мнимыми числами. В приведенных терминах, в основном традиционного происхождения, нашел свое отражение сложный исторический процесс развития понятия К. ч.

Алгебраическая природа К. ч. состоит в том, что К. ч. есть элемент (алгебраического) расширения $\mathbb{C}$ поля действительных чисел $\mathbb{R}$, получаемого алгебраич. присоединением к полю $\mathbb{R}$ корня i многочлена X^2+1.

Получающееся таким путем поле $\mathbb{C}$ наз. **полем комплексных чисел**. Наиболее важное свойство поля $\mathbb{C}$ состоит в том, что оно алгебраически замкнуто, т. е. любой многочлен с коэффициентами из $\mathbb{C}$ разлагается на линейные множители. Иначе это свойство алгебраич. замкнутости выражается в том, что любой многочлен степени $n \geq 1$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$ имеет в $\mathbb{C}$ по крайней мере один корень (**теорема Д'Аламбера — Гаусса**).

Фактическое построение поля $\mathbb{C}$ осуществляется следующим образом. В качестве элементов $z=(x, y)$, $z'=(x', y')$, ..., или **комплексных чисел**, принимаются точки (x, y), (x', y'), ..., плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми прямоугольными координатами x и y, x' и y', ..., причем **суммой** К. ч. $z=(x, y)$ и $z'=(x', y')$ наз. К. ч. $(x+x', y+y')$, т. е.

$$z+z'=(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y'), \tag{1}$$

а **произведением** этих К. ч. наз. К. ч. $(xx'-yy', xy'+x'y)$, т. е.

$$zz'=(x, y)(x', y')=(xx'-yy', xy'+x'y). \tag{2}$$

Нулевой элемент $0=(0, 0)$ совпадает с началом координат, К. ч. $(1, 0)$ есть единица поля $\mathbb{C}$.

Плоскость $\mathbb{R}^2$, точки к-рой отождествлены с элементами поля $\mathbb{C}$, наз. **комплексной плоскостью**. Действительные числа x, x', ... отождествляются при этом с точками $(x, 0)$, $(x', 0)$, ... оси абсцисс, к-рая применительно к плоскости $\mathbb{C}$ наз. **действительной**, или **вещественной**, **осью**. Точки $(0, y)=iy$, $(0, y')=iy'$, ... располагаются на оси ординат, называемой на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ **мнимой осью**; числа вида iy, iy', ... наз. **чисто мнимыми**. Это представление элементов z, z', ... поля $\mathbb{C}$, или К. ч., в виде точек комплексной плоскости с правилами действий (1) и (2) равносильно указанной выше наиболее употребительной форме записи К. ч.:

$$z=(x, y)=x+iy,\ z'=(x', y')=x'+iy', \ldots,$$

называемой также **алгебраической**, или **декартовой**, **формой** записи К. ч. Применительно к алгебраич. форме правила (1) и (2) сводятся к простому условию, что все действия с К. ч. выполняются как с многочленами с учетом свойства мнимой единицы: $i \cdot i = i^2 = -1$.

К. ч. $z=(x, y)=x+iy$ и $\bar{z}=(x, -y)=x-iy$ наз. **сопряженными**, на плоскости $\mathbb{C}$ они располагаются симметрично относительно действительной оси. Сумма и произведение сопряженных К. ч. суть действительные числа:

$$z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z, \qquad z\bar{z}=|z|^2,$$

где $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$ наз. **модулем**, или **абсолютной величиной**, К. ч. z.

Всегда

$$||z|-|z'|| \leq |z+z'| \leq |z|+|z'|.$$

К. ч. z отлично от 0 тогда и только тогда, когда $|z|>0$. Отображение $z \to \bar{z}$ есть автоморфизм комплексной плоскости порядка 2 (т. е. $\bar{z} \to \bar{\bar{z}}=z$), оставляющий на месте все точки действительной оси. При этом $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$, $\overline{zz'}=\bar{z}\bar{z}'$.

Операции сложения и умножения (1) и (2) коммутативны и ассоциативны, связаны соотношением дистрибутивности и для них существуют обратные действия **вычитания** и **деления** (кроме деления на нуль), записываемые в алгебраич. форме следующим образом:

$$z-z'=(x+iy)-(x'+iy')=(x-x')+i(y-y'),$$

$$\frac{z'}{z}=\frac{x'+iy'}{x+iy}=\frac{z'\bar{z}}{|z|^2}=\frac{xx'+yy'}{x^2+y^2}+i\,\frac{yx'-xy'}{x^2+y^2},\ z \neq 0. \tag{3}$$

Деление К. ч. z' на К. ч. $z \neq 0$ сводится, таким образом, к умножению z' на К. ч.

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

На важный вопрос о том, является ли построенное расширение $\mathbb{C}$ поля действительных чисел с указанными выше правилами действий единственно возможным или же мыслимы существенно иные варианты, дает ответ теорема единственности: всякое (алгебраическое) расширение поля $\mathbb{R}$, получающееся из $\mathbb{R}$ присоединением корня i уравнения $X^2+1=0$, изоморфно $\mathbb{C}$, т. е. с требованием алгебраич. присоединения корня i совместимы только указанные выше правила действий с К. ч. Этому факту, однако, не противоречит наличие других интерпретаций К. ч., отличных от истолкования К. ч. как точек комплексной плоскости. Наиболее часто в приложениях используются следующие две интерпретации.

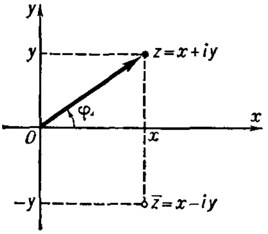
Векторная интерпретация. К. ч. $z=x+iy$ можно отождествить с вектором (x, y) с координатами x и y, приложенным в начале координат (см. рис.). При такой интерпретации сложение и вычитание К. ч. производится по правилам сложения и вычитания векторов. Однако умножение и деление К. ч., совершаемые необходимо по формулам (2) и (3), не имеют непосредственных аналогов в векторной алгебре (см. [4], [5]). Векторная интерпретация К. ч. непосредственно применяется, напр., в электротехнике для изображения переменных синусоидальных токов и напряжений.

Матричная интерпретация. К. ч. $w=u+iv$ можно отождествить с матрицей второго порядка специального вида

$$w = \begin{Vmatrix} u & v \\ -v & u \end{Vmatrix},$$

причем действия сложения, вычитания и умножения выполняются по обычным правилам матричной алгебры.

Применяя полярные координаты на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т. е. радиус-вектор $r=|z|$ и полярный угол $\varphi = \operatorname{Arg} z$, называемый здесь аргументом К. ч. z (иногда также фазой, или амплитудой, К. ч. z), получают тригонометрическую, или полярную, форму К. ч.:



$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad r\cos\varphi = \operatorname{Re} z,\ r\sin\varphi = \operatorname{Im} z. \qquad (4)$$

Аргумент $\varphi = \operatorname{Arg} z$ является многозначной действительной функцией К. ч. $z \neq 0$, значения к-рой для данного z отличаются одно от другого на целое кратное 2π; аргумент К. ч. $z=0$ не определен. Обычно используется главное значение аргумента $\varphi = \arg z$, определяемое дополнительным условием $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. *Эйлера формулы* $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ преобразуют тригонометрич. форму (4) в показательную форму К. ч.:

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (5)$$

Формы (4) и (5) особенно удобны для выполнения умножения и деления К. ч.:

$$zz' = rr'[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')] = rr'e^{i(\varphi+\varphi')},$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}[\cos(\varphi'-\varphi) + i\sin(\varphi'-\varphi)] = \frac{r'}{r}\,e^{i(\varphi-\varphi')},\ r>0.$$

При умножении (делении) К. ч. модули перемножаются (модуль делимого делится на модуль делителя), а аргументы складываются (из аргумента делимого вычитается аргумент делителя). Возведение в степень К. ч. и извлечение корня из К. ч. производятся по так наз. формулам Муавра:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

причем первая из них применима и для целых отрицательных показателей n. Геометрически умножение К. ч. z на К. ч. $z'=r'e^{i\varphi'}$ сводится к повороту вектора z на угол φ' (против часовой стрелки при $\varphi'>0$) и последующему изменению его длины в $|z'|=r'$ раз; в частности, умножение на К. ч. $z'=e^{i\varphi'}$, по модулю равное единице, есть не что иное как поворот на угол φ'. Таким образом, К. ч. могут быть истолкованы и как операторы специального вида *(аффиноры)*. В связи с этим иногда удобна смешанная векторно-матричная интерпретация умножения К. ч.:

$$(x,\ y)\cdot\begin{Vmatrix} u & v \\ -v & u\end{Vmatrix} = (xu-yv,\ xv+yu),$$

при к-рой множимое трактуется как матрица-вектор, а множитель — как матрица-оператор.

Биективное отображение $(x,\ y)\to x+iy$ переносит в поле К. ч. $\mathbb{C}$ топологию двумерного действительного числового пространства $\mathbb{R}^2$, эта топология согласуется со структурой поля $\mathbb{C}$ и, таким образом, $\mathbb{C}$ есть топологическое тело. Модуль $|z|$ есть евклидова норма К. ч. $z=(x,\ y)$, и поле $\mathbb{C}$, наделенное этой нормой, есть комплексное одномерное евклидово пространство, называемое также **плоскостью комплексного переменного** $\mathbb{C}$. Топологич. произведение $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}\times\ldots\times\mathbb{C}$ (n раз, $n\geq 1$) есть комплексное n-мерное евклидово пространство. Вследствие алгебраич. замкнутости поля К. ч. $\mathbb{C}$, изучение функций и математич. анализ вообще приобретают должную полноту и законченность только при рассмотрении поведения функций в комплексной области. В частности, даже поведение таких элементарных функций, как z^n, $\cos z$, $\sin z$, e^z, может быть правильно понято только при условии их рассмотрения как функций комплексного переменного (см. *Аналитическая функция*).

Впервые, по-видимому, мнимые величины появились в известном труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах» Дж. Кардано (G. Cardano, 1545), к-рый счел их бесполезными, непригодными к употреблению. Пользу мнимых величин, в частности при решении *кубического уравнения* в так наз. неприводимом случае (когда действительные корни выражаются через кубические корни из мнимых величин) впервые оценил Р. Бомбелли (R. Bombelli, 1572). Он же дал нек-рые простейшие правила действий с К. ч. Вообще, выражения вида $a+b\sqrt{-1}$, $b\neq 0$, появляющиеся при решении квадратных и кубических уравнений, стали называть в 16—17 вв. «мнимыми». Однако даже для многих крупных ученых 17 в. алгебраич. и геометрич. сущность мнимых величин представлялась неясной и даже загадочной и мистической. Известно, напр., что И. Ньютон (I. Newton) не включал мнимые величины в понятие числа, а Г. Лейбницу (G. Leibniz) принадлежит фраза: «Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием».

Задача о выражении корней степени n из данного числа была в основном решена в работах А. Муавра (A. de Moivre, 1707, 1724) и Р. Котеса (R. Cotes, 1722). Символ $i=\sqrt{-1}$ предложил Л. Эйлер (L. Euler, 1777, опубл. 1794). Он же высказал в 1751 мысль об алгебраич. замкнутости поля $\mathbb{C}$, к такому же выводу пришел Ж. Д'Аламбер (J. D'Alembert, 1747), но первое строгое доказательство этого факта принадлежит К. Гауссу (С. Gauss, 1799). Он же ввел в употребление термин «К. ч.» в 1831. Полное геометрич. истолкование К. ч. и действий над ними появилось впервые в работе К. Весселя (С. Wessel, 1799). Геометрич. представление К. ч., иногда называемое «диаграммой Аргана», вошло в обиход после опубликования в 1806 и 1814 работы Ж. Р. Аргана (J. R. Argand), повторявшей в основном независимо выводы К. Весселя.

Чисто арифметич. теория К. ч. как пар действительных чисел была построена У. Гамильтоном (W. Hamilton, 1837). Ему же принадлежит важное пространственное обобщение К. ч.— *кватернионы*, алгебра к-рых некоммутативна. Вообще, в конце 19 в. было доказано, что всякое расширение понятия числа за пределы поля К. ч. возможно только при отказе от каких-либо обычных действий (прежде всего коммутативности). См. также *Гиперкомплексное число*, *Двойные и дуальные числа*, *Кэли число*.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 9 изд., М., 1968; [2] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 1, 2 изд., М., 1967; [4] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1, 2 изд., М., 1976; [5] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, 2 изд., М., 1977; [6] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [7] Харди Г. Х., Курс чистой математики, пер. с англ., М., 1949; [8] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними пространства, пер. с франц., М., 1969.

Е. Д. Соломенцев.

КОМПЛЕКСНЫЙ ТОР — комплексная абелева группа Ли, получаемая из n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ факторизацией по решетке $\Gamma\subset\mathbb{C}^n$ ранга $2n$. К. т.— это единственные связные компактные комплексные группы Ли [1]. Каждое эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ определяет на $T=\mathbb{C}^n/\Gamma$ кэлерову метрику, инвариантную относительно сдвигов. К. т. могут быть охарактеризованы также как единственные компактные кэлеровы параллелизуемые многообразия [2]. Группа автоморфизмов комплексного многообразия T совпадает с *голоморфом группы* T как комплексной группы Ли.

Голоморфные p-формы на К. т. T имеют вид

$$\sum\nolimits_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p}\, dz_{i_1}\wedge\ldots\wedge dz_{i_p},$$

где $a_{i_1\ldots i_p}\in\mathbb{C}$, а $z_1, \ldots, z_n$ — координаты в $\mathbb{C}^n$, и кольцо когомологий Дольбо $\sum\nolimits_{p,q=0}^{n} H^{p,q}(T)$ естественно изоморфно $\wedge\mathbb{C}^{n*}\otimes\wedge\bar{\mathbb{C}}^{n*}$ (см. [1]).

Как вещественные группы Ли все n-мерные К. т. являются $2n$-мерными торами и изоморфны между собой при фиксированном n. С точки зрения комплексной структуры положение гораздо сложнее. Базис решетки $\Gamma\subset\mathbb{C}^n$ можно задать матрицей Ω размера $n\times 2n$, наз. **матрицей периодов** тора $T=\mathbb{C}^n/\Gamma$. Торы $T_i=\mathbb{C}^n/\Gamma_i$ с матрицами периодов Ω_i $(i=1, 2)$ изоморфны между собой (как комплексные группы Ли или как комплексные многообразия) тогда и только тогда, когда существуют такие матрицы $C\in GL(n, \mathbb{C})$ и $Z\in GL(2n, \mathbb{Z})$, что $\Omega_2=C\Omega_1 Z$.

Матрицу периодов любого n-мерного тора можно привести к виду $\|EA\|$, где $\mathrm{Im}|A|>0$. Торы с матрицами такого вида образуют голоморфное семейство, дающее эффективно параметризованную версальную деформацию любого n-мерного К. т., зависящую от n^2 параметров [3]. В частности, при $n=1$ пространство параметров есть верхняя полуплоскость $\mathrm{Im}\, a>0$ и множество классов изоморфных одномерных К. т. отождествляется с фактором $\{\mathrm{Im}\, a>0\}/\Delta$, где Δ — *модулярная группа*.

К. т., являющиеся алгебраич. многообразиями, наз. *абелевыми многообразиями.* К. т. $\mathbb{C}^n/\Gamma$ — абелево многообразие тогда и только тогда, когда в $\mathbb{C}^n$ существует эрмитово скалярное произведение, мнимая часть к-рого целочисленна на $\Gamma \times \Gamma$ [1]. В терминах матрицы периодов это условие выражается как условие Римана — Фробениуса: должна существовать такая кососимметрич. матрица $Q \in GL(2n, \mathbb{Z})$, что $\Omega Q \Omega' = 0$ и что $-i\Omega Q \bar{\Omega}'$ положительно определена. При $n=1$ эти условия всегда выполнены; соответствующие алгебраич. кривые суть *эллиптические кривые.* Матрица периодов

$$\Omega = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & i\sqrt{2} & i\sqrt{5} \\ 0 & 1 & i\sqrt{3} & i\sqrt{7} \end{Vmatrix}$$

дает пример двумерного К. т., не являющегося абелевым многообразием. На этом торе не существует даже непостоянных мероморфных функций [5]. Необходимым и достаточным условием алгебраичности n-мерного К. т. является также наличие на нем n алгебраически независимых мероморфных функций.

Интерес к К. т. возник в 19 в. в связи с изучением *абелевых функций,* а также *Якоби многообразий* алгебраич. кривых. С любым n-мерным компактным кэлеровым многообразием M связан набор n К. т. — его многообразий Якоби, к-рые являются абелевыми многообразиями, если M алгебраично [7].

Лит.: [1] Мамфорд Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [2] Wang H. C., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1954, v. 5, p. 771—76; [3] Kodaira K., Spencer D. C., «Ann. Math.», 1958, v. 67, p. 328—466; [4] Вейль А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [5] Зигель К. Л., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954; [6] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [7] Чжень Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961. *А. Л. Онищик.*

КОМПОЗИТ расширений поля — наименьшее подрасширение $A \cdot B$ расширения Ω поля k, содержащее заданные два подрасширения $A \subset \Omega$ и $B \subset \Omega$; оно совпадает с образом гомоморфизма $\varphi : A \otimes_K B \to \Omega$, сопоставляющего тензорному произведению $a \otimes b$ произведение $ab \in \Omega$.

КОМПОЗИЦИОННЫЙ РЯД — конечное подмножество $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ частично упорядоченного множества с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1 такое, что

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$$

и все интервалы $[a_i, a_{i+1}]$ являются *простыми интервалами.* Можно говорить также о К. р. любого интервала $[a, b]$ частично упорядоченного множества. К. р. существует далеко не всегда.

Под К. р. универсальной алгебры понимается К. р. в решетке ее конгруэнций. Поскольку конгруэнции в группах определяются нормальными подгруппами, К. р. группы может быть определен как ее нормальный ряд (см. *Подгрупп ряды*), не имеющий отличных от него самого уплотнений (без повторений). Ряд

$$E = G_0 \subset \ldots \subset G_{k-1} \subset G_k = G$$

будет К. р. группы G тогда и только тогда, когда всякая подгруппа G_{i-1}, $i=1, 2, \ldots, k$, является максимальным истинным нормальным делителем подгруппы G_i.

Все факторы К. р. будут простыми группами. Всякий нормальный ряд, изоморфный с некоторым К. р., сам будет композиционным. Для К. р. групп имеет место *Жордана — Гёльдера теорема.* Аналогично определяются и аналогичными свойствами обладают К. р. колец и, вообще, Ω-групп (см. [2]).

Лит.: [1] Кон П. М., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973. *О. А. Иванова, Л. А. Скорняков.*

КОМПОЗИЦИЯ — бинарная *алгебраическая операция*. Напр., К. (или суперпозицией) двух функций $f(x)$ и $g(x)$ наз. функция $h(x)=f[g(x)]$. О К. в теории вероятностей см. *Свертка*.

КОМПОНЕНТА вектора a по оси — вектор, образованный проекциями концов вектора a на эту ось.

КОМПОНЕНТА пространства — связное подмножество C топологич. пространства X, обладающее следующим свойством: для любого связного множества $C_1 \subset X$ из включения $C \subset C_1$ вытекает, что $C=C_1$. К. пространства являются непересекающимися множествами. Всякое непустое связное множество содержится в одной и только одной К. Если C — К. пространства X, и при этом $C \subset Y \subset X$, то C есть К. подпространства Y. Если $f: X \to Y$ — монотонное непрерывное отображение на, то множество C является компонентой Y тогда и только тогда, когда $f^{-1}(C)$ — К. X.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, т. 2, пер. с англ., М., 1969. *Б. А. Ефимов.*

КОНГРУЭНТНОСТЬ — отношение эквивалентности на множестве геометрич. фигур (отрезков, углов и т. д.). Оно вводится либо аксиоматически (см. *Гильберта система аксиом*), либо на основе какой-либо группы преобразований, чаще всего *движений*. Так, в евклидовой геометрии (и вообще в геометрии пространств постоянной кривизны) две фигуры наз. конгруэнтными, или равными, если одна из них движением может быть переведена в другую.

М. И. Войцеховский.

КОНГРУЭНЦ-ПОДГРУППА — подгруппа H полной линейной группы $GL(n, R)$ над кольцом R, обладающая следующим свойством: существует такой ненулевой двусторонний идеал $\mathfrak{P}$ кольца R, что $H \supseteq GL(n, R, \mathfrak{P})$, где

$$GL(n, R, \mathfrak{P}) = \operatorname{Ker}(GL(n, R) \longrightarrow GL(n, R/\mathfrak{P}),$$

т. е. H содержит все матрицы из $GL(n, R)$, сравнимые с единичной матрицей по модулю $\mathfrak{P}$. Более общо, подгруппа H линейной группы Γ степени n над R наз. К.-п., если для некоторого ненулевого двустороннего идеала $\mathfrak{P} \subseteq R$

$$H \supseteq \Gamma \cap GL(n, R, \mathfrak{P}).$$

В случае

$$H = \Gamma \cap GL(n, R, \mathfrak{P})$$

подгруппа H наз. главной К.-п., соответствующей идеалу $\mathfrak{P}$. Понятие К.-п. первоначально возникло для $R=\mathbb{Z}$. Оно особенно эффективно и важно с точки зрения применений для дедекиндова кольца R и $\Gamma=G_R$, где G — алгебраическая группа, определенная над полем отношений кольца R.

Лит.: [1] Басс Х., Милнор Дж., Серр Ж.-П., «Математика», 1970, т. 14, № 6, с. 64—128. *В. П. Платонов.*

КОНГРУЭНЦ-ПРОБЛЕМА: всякая ли подгруппа конечного индекса группы G_O, где O — кольцо целых элементов поля алгебраич. чисел k, а G — связная линейная алгебраическая k-определенная группа, является *конгруэнц-подгруппой*? Это — классическая постановка К.-п. Современный вариант К.-п. основывается на понятии конгруэнц-ядра, выражающего меру отклонения от ее положительного решения. А именно, пусть $\hat{G}_O$ и G_O — пополнения группы O — точек G_O в топологии, определяемой соответственно всеми подгруппами конечного индекса и конгруэнц-подгруппами группы G_O. Тогда существует сюръективный и непрерывный гомоморфизм $\pi: \hat{G}_O \to \overline{G}_O$. Ядро $\operatorname{Ker} \pi$ наз. конгруэнц-ядром и обозначается через $c(G)$. Положительное решение К.-п. в классической постановке эквивалентно $c(G)=1$. К.-п. в современной форме заключается в вычислении конгруэнц-ядра $c(G)$.

Для $G_O=SL(\pi, \mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, еще в конце 19 в. было известно, что при $n=2$ К.-п. решается отрицательно. В 1965 было показано, что при $n>2$ всякая подгруппа конечного индекса группы $SL(n, \mathbb{Z})$ является конгруэнц-подгруппой (см. [1]). Вслед за этим было получено [1] решение К.-п. для $G_O=SL(n, O)$, $n>2$, или $Sp(2n, O)$, $n>1$, где Sp обозначает симплектическую группу. Для этих групп результат таков: $c(G)\neq 1$ только для вполне мнимого поля k, для к-рого конгруэнц-ядро $c(G)$ изоморфно циклической группе корней из единицы, содержащихся в k. Оказывается, точно такой же результат справедлив для всех односвязных групп Шевалле, кроме SL (2) (см. [3]). Условие односвязности является существенным, ибо из теоремы о сильной аппроксимации следует, что для неодносвязной полупростой группы G конгруэнц-ядро $c(G)$ бесконечно. Для неполупростой группы G всегда $c(G)=c(S)$, где S — максимальная полупростая подгруппа в G; в частности, для разрешимой G всегда $c(G)=1$.

Более общая форма К.-п. получается заменой кольца O на кольцо

$$O_V=\{x\in k \mid v(x)\leqslant 1, \text{ при всех } v\notin V\},$$

где V — произвольное конечное множество неэквивалентных нормирований поля k, содержащее все архимедовы нормирования. В этой ситуации конгруэнц-ядро, обозначаемое $c(G, V)$, существенно зависит от V (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Басс Х., Милнор Дж., Серр Ж.-П., «Математика», 1970, т. 14, № 6, с. 64—128; 1971, т. 15, № 1, с. 44—60; [2] Серр Ж.-П., «Математика», 1971, т. 15, № 6, с. 12—45; [3] Matsumoto H., «Ann. sci. École norm. supér.», 1969, t. 2, № 1, p. 1—62; [4] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 5—37; [5] Raghunathan M., «Publ. Math. IHES», 1976, № 46, p. 107—61.

В. П. Платонов.

КОНГРУЭНЦИЯ — отношение эквивалентности π на *универсальной алгебре* $A=\{A, \Omega\}$, перестановочное с любой операцией из Ω, т. е. такое отношение эквивалентности, для которого из $a_i\pi a_i'$ следует $(a_1, \ldots, a_n\omega)\times\pi(a_1', \ldots, a_n'\omega)$, где a_i, $a_i'\in A$, $i=1, \ldots, n$, $\omega\in\Omega$ — n-арная операция. Аналогично определяется К. в алгебраич. системе. Таким образом классы по К. π образуют однотипную с A универсальную алгебру (алгебраич. систему) A/π, называемую факторалгеброй (факторсистемой) по К. π. Естественное отображение A на A/π (сопоставляющее элементу a класс по π, к-рому он принадлежит) является сюръективным гомоморфизмом. Обратно, всякий гомоморфизм $\varphi: A\to B$ определяет однозначно К., классами к-рой служат полные прообразы элементов B.

Пересечение К. π_i, $i\in I$, в решетке соответствий на универсальной алгебре (алгебраич. системе) является К. Объединение К. в решетке соответствий, вообще говоря, не обязано быть К. Произведение $\pi_1\pi_2$ К. π_1 и π_2 тогда и только тогда будет К., когда π_1 и π_2 перестановочны, т. е. $\pi_1\pi_2=\pi_2\pi_1$.

Лит.: [1] Курош А. Г., Общая алгебра. Лекции..., М., 1974.

В. С. Малаховский.

КОНГРУЭНЦИЯ прямых — множество C прямых трехмерного пространства (проективного, аффинного, евклидова), зависящее от двух параметров. Прямая $l\in C$ наз. лучом К. Порядком К. наз. число прямых К., проходящих через произвольную точку пространства; классом — число прямых К., лежащих в произвольной плоскости.

Лучи К. можно двумя способами разложить на однопараметрич. семейство *торсов* так, что через каждый луч $l\in C$ проходят два торса действительных различных (гиперболический луч), мнимых (эллиптический луч) или действительных совпадающих (параболический луч). Точки касания луча $l\in C$ с ребрами возврата этих торсов наз.

ф о к у с а м и л у ч а l. Поверхности, образованные фокусами лучей К., наз. ее ф о к а л ь н ы м и п о в е р х н о с т я м и. Касательные плоскости к фокальным поверхностям, проходящие через луч l К., наз. ф о к а л ь н ы м и п л о с к о с т я м и луча l. Торсы К. высекают на каждой фокальной поверхности сеть линий, к-рая наз. ф о к а л ь н о й с е т ь ю К. Фокальная сеть линий на каждой фокальной поверхности сопряжена. В гиперболич. области К. представляет собой множество общих касательных двух фокальных поверхностей; в эллиптич. области К. образована действительными общими касательными двух сопряженных мнимых поверхностей; в параболич. области К. образована касательными к одному семейству асимптотич. линий единственной фокальной поверхности. Ц е н т р о м л у ч а К. наз. середина отрезка, определяемого фокусами луча. Поверхность, описанная центрами лучей, наз. с р е д н е й п о в е р х н о с т ь ю К. Основания общих перпендикуляров двух смежных лучей $l\ (u, v)$ и $l'(u+du,\ v+dv)$ заполняют на луче l отрезок, концы к-рого наз. г р а н и ч н ы м и т о ч к а м и луча. Плоскости, перпендикулярные к направлению общего перпендикуляра в граничных точках, наз. г л а в н ы м и п л о с к о с т я м и; линейчатые поверхности, линии сжатия к-рых пересекают лучи в их граничных точках, наз. г л а в н ы м и п о в е р х н о с т я м и. Множество граничных точек луча наз. г р а н и ч н о й п о в е р х н о с т ь ю. П р и м е р ы К.: W-конгруэнция, у к-рой асимптотич. линии на фокальных поверхностях соответствуют друг другу; линейная К.— множество прямых пространства, пересекающих две данные прямые, называемые д и р е к т р и с а м и; нормальная К.— множество нормалей нек-рой поверхности; изотропная К.— К. с неопределенными главными поверхностями.

Наряду с К. прямых рассматриваются К. (двупараметрич. семейства) плоскостей, коник, квадрик и других фигур (см. *Фигур многообразие*). К. произвольных линий в пространстве называются к р и в о л и н е й н ы м и К.

Лит.: [1] Ф и н и к о в С. П., Теория конгруэнций, М.— Л., 1950. *В. С. Малаховский.*

КОНДЕНСАЦИИ ТОЧКА множества M, лежащего в евклидовом пространстве E,— точка из E, в любой окрестности к-рой содержится несчетное множество точек множества M. Множество К. т. любого множества замкнуто; если оно непусто, то является совершенным множеством и имеет мощность континуума. Понятие К. т. обобщается для произвольного топологич. пространства. *Б. А. Ефимов.*

КОНДУКТОР х а р а к т е р а — целое число, сопоставляемое характеру нек-рого представления группы Галуа конечного расширения локальных полей. Пусть K — полное поле дискретного нормирования с полем вычетов k характеристики $p \geqslant 0$, L/K — его расширение Галуа степени n с группой Галуа G. Если χ — характер некоторого конечномерного комплексного представления группы G, то его К. $f(\chi)$ определяется формулой:

$$f(\chi)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n_i}{n_0} (\chi(1)-\chi(G_i)),$$

где

$$G_i=\{g \in G \mid \nu_L(g(\Pi)-\Pi) \geqslant i+1\},$$

$$n_i=|G_i|,\quad \chi(G_i)=\frac{\sum_{g \in G_i} \chi(g)}{n_i},$$

причем Π обозначает простой элемент поля L, а ν_L — соответствующее нормирование. Для $(n, p)=1$ будет $G_0=G$, $G_i=\{1\}$ для $i>0$ и $f(\chi)=\chi(1)-\chi(G_i)$. Если χ — характер рационального представления M, то $\chi(G_i)=$

$=\dim M^{G_i}$. К. $f(\chi)$ является целым положительным числом, равным 0 только, если $n=1$.

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [2] Artin E., Tate J., Class field theory, N. Y.— Amst., 1967; [3] Серр Ж.-П., Абелевы l-адические представления и эллиптические кривые, пер. с англ., М., 1973.

И. В. Долгачев.

КОНДУКТОР целого замыкания — идеал целостного коммутативного кольца A, являющийся аннулятором A-модуля $\bar{A}/A$, где $\bar{A}$ — целое замыкание кольца A в его поле частных. Иногда К. рассматривается также как идеал кольца $\bar{A}$. Если $\bar{A}$ является A-модулем конечного типа (напр., когда A — геометрич. кольцо), то простой идеал $\mathfrak{P}$ кольца A содержит К. тогда и только тогда, когда локализация $A_{\mathfrak{P}}$ не является целозамкнутым локальным кольцом. В геометрич. терминах это означает, что К. определяет замкнутую подсхему аффинной схемы $\mathrm{Spec}(A)$, состоящую из точек, не являющихся нормальными точками.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963.

И. В. Долгачев.

КОНЕЧНАЯ ГРУППА — группа с конечным числом элементов. Это число наз. порядком группы. Исторически К. г. послужили исходным материалом для формирования многих понятий абстрактной теории групп.

Обычно говорят, что целью теории К. г. является описание, с точностью до изоморфизма, групп любого порядка. Это верно лишь отчасти. Наивный подход, основанный на полном переборе всех групп, заведомо обречен на неудачу. Напр., составление списка всех неизоморфных групп сравнительно небольшого порядка 1024 явилось бы трудным испытанием для лучших современных ЭВМ. Вообще, перебор конечных p-групп (групп порядка p, где p — простое число) — «дикая», или плохо поставленная задача. Напротив, существуют некие экстремальные классы групп, играющие принципиальную роль в теории, для к-рых проблема классификации (перечисления с точностью до изоморфизма) либо решена, либо представляется вполне осмысленной.

Так, для абелевых К. г. имеется законченная теория (см. *Абелева группа*). Отдельные типы конечных p-групп (регулярные, свободные экспоненты p, максимального класса, заданные образующими и минимально возможным числом соотношений) также допускают качественное описание. Простые группы (т. е. группы с тривиальными нормальными подгруппами), являющиеся «строительными блоками» для всех К. г., несмотря на настойчивые попытки пока не удается описать. Существует гипотеза, что должно существовать не более двух (чаще всего — нуль) неизоморфных простых групп любого фиксированного порядка n. Это проверено для $n \leqslant 10^6$. При конкретном анализе простых групп оказалось успешным применение ЭВМ, хотя, разумеется, их роль — чисто вспомогательная. Гораздо более значительными являются теоретические результаты о простых группах (см. *Простая конечная группа*). К настоящему времени (1978) известно несколько бесконечных серий простых групп (*Шевалле группы*) и около трех десятков изолированных примеров (*спорадические простые группы*). Описание конечных групп целочисленных матриц — еще один пример важной классификационной задачи, решенной лишь для небольших размеров матриц.

После периода становления в теории К. г., связанного с именами О. Коши (A. Cauchy), Ж. Лагранжа (J. Lagrange), К. Гаусса (C. Gauss), Н. Абеля (N. Abel) и, в первую очередь, Э. Галуа (E. Galois), К. г. изучались почти исключительно как группы перестановок (см. неудачно укоренившийся термин *подстановок группа*), причем эта точка зрения остается плодотворной и в наши дни. Напр., если абстрактная К. г. G допускает реализацию (вложение в симметрич. группу S_m) в виде кратно-транзитивной группы перестановок, то в ряде случаев G определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Классификационные результаты, относящиеся к простым 2-транзитивным группам перестановок, составляют богатый раздел теории К. г., начало к-рому было заложено более ста лет тому назад К. Жорданом (C. Jordan). Вычислительные методы в теории групп перестановок, развившиеся за последние годы, отчасти вызваны к жизни запросами комбинаторики, теории графов, теории кодирования, необходимостью проверки различных гипотез.

В начале 20 в. трудами Г. Фробениуса (G. Frobenius), У. Бёрнсайда (W. Burnside), И. Шура (I. Schur) и др. была развита теория линейных представлений К. г. (см. *Конечной группы представление*), давшая мощный инструмент исследования абстрактных групп и послужившая прототипом для аналогичной теории представлений групп Ли, а затем и других алгебраич. систем. Выражение свойств групп и их представлений на языке теории характеров — одно из проявлений взаимных связей между различными разделами алгебры. Интенсивно изучаются представления К. г. над коммутативными кольцами и над полями ненулевой характеристики (Р. Брауэр (R. Brauer) и др., см. [2]). Выделившаяся в результате этих исследований область конечных линейных групп изобилует многими глубокими результатами.

Почти очевидное соображение, что свойства конечной группы G должны быть в какой-то мере арифметическими, зависящими от канонического разложения $|G|=$ $=p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k}$ ее порядка, нашло свое воплощение в *Силова теоремах* о существовании и сопряженности подгрупп порядка $p_i^{n_i}$. Если $|G|=nm$, где n и m — произвольные взаимно простые натуральные числа, то подгруппа порядка n, называемая холловской, существует, вообще говоря, не всегда, но для обширного класса разрешимых групп холловские подгруппы полностью наследуют свойства силовских. Открытая У. Бёрнсайдом разрешимость групп порядка p^aq^b (p, q — простые числа) — типичный пример арифметич. свойства. Разрешимость групп нечетного порядка, установленная много лет спустя Дж. Томпсоном и У. Фейтом (J. Thompson, W. Feit, см. *Бёрнсайда проблема* 1),— достижение, к-рое поставило теорию К. г. на принципиально новую основу. Существование инволюций (элементов порядка два) в неразрешимых группах — иная формулировка теоремы Томпсона — Фейта и выражение свойств группы в терминах централизаторов инволюций — одно из главных направлений исследований в области К. г. за последние два десятилетия.

Длительное время изучаются свойства групп, представимых в виде произведения подгрупп специальных типов. Если, напр., $G=AB$, где A и B — нильпотентные подгруппы, то G — разрешимая группа. Произвольная 2-транзитивная группа преобразований допускает факторизацию $G=ABA$, где A — стабилизатор точки, а B — подгруппа порядка 2. Остается недоказанной пока (1978) гипотеза С. А. Чунихина о непростоте К. г., представимой в виде произведения централизаторов двух неединичных элементов.

Видное место занимает изучение К. г. с выделенным действием на них групп автоморфизмов. Согласно не доказанной в полной общности гипотезе, К. г. G с автоморфизмом φ, оставляющим на месте лишь единичный элемент из G, должна быть разрешимой. Если G — простого порядка, то G нильпотентна, и уже отсюда следует, что К. г., обладающая нильпотентной максимальной подгруппой нечетного порядка, разрешима. Как видно, критерии разрешимости К. г. могут быть самой различной природы.

Расширения К. г. изучаются средствами теории когомологий (см. *Когомологии групп*), имеющей самостоятельное значение.

Лит.: [1] Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.—Л., 1937; [2] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [3] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977; [4] Кострикин А. И., в кн.: Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 1—46; [5] Чунихин С. А., Шеметков Л. А., в кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1971, с. 7—70; [6] Мазуров В. Д., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 5—56; [7] Speiser A., Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 4 Aufl., Basel, 1956; [8] Wielandt H., Finite permutations groups, N. Y.— L., 1964; [9] Huppert B., Endliche Gruppen, B.— Hdlb.— N. Y., 1967; [10] Gorenstein D., Finite groups, N. Y., 1968; [11] Isaacs I. M., Character theory of finite groups, N. Y., 1976. *А. И. Кострикин.*

КОНЕЧНАЯ ГРУППОВАЯ СХЕМА — групповая схема, конечная и плоская над базисной схемой. Если G — К. г. с. над схемой $(S, \mathcal{O}_S)$, то $G=\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — конечный плоский квазикогерентный пучок алгебр над $\mathcal{O}_S$. В дальнейшем предполагается, что S локально нётерова. В этом случае пучок $\mathcal{A}$ является локально свободным. Если S связна, то ранг алгебры $\mathcal{A}\times_{\mathcal{O}_S} k(s)$ над полем вычетов $k(s)$ точки $s\in S$ не зависит от s и наз. **рангом** К. г. с. Пусть $n_G: G\to G$ морфизм S-схем, отображающий элемент $x\in G(T)$ в элемент $x^n\in G(T)$ для любой S-схемы T. Морфизм n_G является нулевым, если ранг G делит n и S — приведенная схема или G — коммутативная К. г. с. (см. *Коммутативная групповая схема*). К. г. с. ранга p, где p — простое число, коммутативна [2].

Если G' — подгруппа коммутативной К. г. с. G, то определяется К. г. с. G/G', причем ранг схемы G равен произведению рангов схем G' и G/G'.

Примеры. 1) Пусть $G=G_{mS}$ — мультипликативная групповая схема (соответственно абелева схема $\mathcal{A}$ над S); тогда $\mathrm{Ker}\, n_G$ является К. г. с. ранга $|n|$ (соответственно $|n|^{2\dim\mathcal{A}}$). 2) Пусть S — схема над простым полем $\mathbb{F}_p$ и $F: G_{aS}\to G_{aS}$ — гомоморфизм Фробениуса аддитивной групповой схемы $G_{a\,S}$. Тогда $\mathrm{Ker}\, F$ является К. г. с. ранга p. 3) Для любой конечной абстрактной группы Γ порядка n постоянная групповая схема Γ_S является К. г. с. ранга n.

Классификация К. г. с. над произвольными базами проведена только для случая, когда ранг схемы G есть простое число [2]. Хорошо изучен случай, когда G — коммутативная К. г. с., а S — спектр поля характеристики p (см. [1], [3], [7]).

Лит.: [1] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 3—90; [2] Тэйт Дж., Оорт Ф., «Математика», 1973, т. 16, № 1, с. 165—83; [3] Demazure M., Gabriel P., Groupes algébriques, t. 1, P.— Amst., 1970; [4] Oort F., Commutative group schemes, B.— Hdlb.— N. Y., 1966; [5] Shatz S., «Ann. Math.», 1964, v. 79, p. 411—49; [6] Mazur B., «Ann. sci. École norm. supér.», 1973, t. 6, p. 521—52; [7] Kraft H., Kommutative algebraische Gruppen und Ringe, B.— Hdlb.— N. Y., 1975. *И. В. Долгачев.*

КОНЕЧНАЯ МАТЕМАТИКА — область математики, занимающаяся изучением свойств структур финитного (конечного) характера, к-рые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях. К числу таких конечных структур могут быть отнесены, напр., *конечные группы*, конечные *графы*, а также нек-рые математич. модели преобразователей информации, *автоматы конечные*, *Тьюринга машина* и т. п. Иногда допускают расширение предмета К. м. до произвольных дискретных структур и приходят к **дискретной математике**, отождествляя последнюю с К. м. К таким структурам могут быть отнесены нек-рые *алгебраические системы*, бесконечные графы, определенные виды вычислительных схем, клеточные автоматы и т. д. В качестве синонима понятий «К. м.» и «дискретная математика» употребляется термин *дискретный анализ*.

КОНЕЧНАЯ РАЗНОСТЬ — см. *Конечных разностей исчисление.*

КОНЕЧНАЯ РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ — *риманова поверхность* конечного рода, имеющая конечное число невырожденных компонент края. К. р. п. может быть вложена в замкнутую риманову поверхность — *дубль римановой поверхности.*

Лит.: [1] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957. *Е. Д. Соломенцев.*

КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЕННАЯ ГРУППА — группа, обладающая конечным числом образующих и задаваемая в этих образующих конечным числом соотношений. Таких групп с точностью до изоморфизма счетное множество. Для любой конечной системы образующих К. о. г. из всякой системы определяющих соотношений, связывающих эти образующие, можно выбрать конечную подсистему, уже достаточную для задания группы.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *О. А. Иванова.*

КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННАЯ ГРУППА — группа G, обладающая конечным порождающим множеством $M=\{a_1, \ldots, a_d\}$. Состоит из всевозможных произведений $a_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots a_{i_n}^{\varepsilon_n}$, где $i_k \in \{1, \ldots, d\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$. Если M содержит d элементов, то G наз. d-порожденной. Из любого порождающего множества К. п. г. можно выбрать конечное порождающее множество. 1-порожденные группы наз. циклическими (они исчерпываются с точностью до изоморфизма группой $\mathbb{Z}$ целых чисел относительно сложения и группами $\mathbb{Z}_n$ классов вычетов по данному модулю n относительно сложения, $n=1, 2, \ldots$).

Множество всех неизоморфных 2-порожденных групп имеет мощность континуума. Всякая счетная группа изоморфно вкладывается в нек-рую 2-порожденную группу; можно считать при этом, что последняя проста, а ее порождающие элементы имеют порядки 2 и 3. Всякая счетная n-ступенно разрешимая группа изоморфно вкладывается в 2-порожденную $(n+2)$-ступенно разрешимую группу. Подгруппа конечного индекса в К. п. г. сама является К. п. г. Во всякой К. п. г. имеется лишь конечное число подгрупп данного конечного индекса. К. п. г. может быть бесконечной периодической; более того, для всякого натурального числа $d \geqslant 2$ и всякого нечетного числа $n \geqslant 665$ существует бесконечная d-порожденная группа периода n (см. *Бёрнсайда проблема*). К. п. г. может быть нехопфовой, т. е. изоморфной своей истинной факторгруппе; более того, существуют разрешимые нехопфовы К. п. г. Если К. п. г. финитно аппроксимируема (см. *Финитно аппроксимируемая группа*), то она хопфова. Всякая К. п. г. матриц над полем финитно аппроксимируема. Существуют бесконечные К. п. г., и даже *конечно определенные группы*, являющиеся простыми.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977. *Ю. И. Мерзляков.*

КОНЕЧНОЕ ПОЛЕ — см. *Галуа поле.*

КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — гомоморфизм конечной группы G в группу обратимых линейных операторов в векторном пространстве над полем K. Теория К. г. п. является наиболее разработанным (и одним из наиболее важных) разделом теории представлений групп.

Теория К. г. п. над полем $\mathbb{C}$ является частью теории представлений компактных групп, и все результаты этой теории (теорема Петера — Вейля, теория характеров, соотношения ортогональности и т. д.) справедливы (и притом упрощаются) для К. г. п. В частности, любое К. г. п. в топологич. векторном пространстве является суммой представлений, кратных неприводимым. С другой стороны, в теории К. г. п. есть ряд существенных результатов, использующих специфику конечных групп. Напр., для данной конечной группы G число различных классов эквивалентности К. г. п. равно числу классов сопряженных элементов в G; сумма квадратов размерностей представителей классов эквивалентности К. г. п. равна порядку $|G|$ группы G; размерность любого неприводимого К. г. п. является делителем индекса любого абелева нормального делителя в G (в частности, делителем порядка $|G|$) и не превосходит индекса абелевых подгрупп в G. Если χ — характер К. г. п. π, d — размерность π, то для всех $s \in G$ и всех классов сопряженных элементов $Q \subset G$ числа $\chi(s)$ и $d^{-1}\sum_{S \in G}\chi(s)$ являются целыми алгебраическими. Каждый характер группы G является линейной комбинацией характеров К. г. п., индуцированных (см. *Индуцированное представление*) представлениями ее циклических подгрупп и линейной комбинацией с целыми коэффициентами характеров К. г. п., индуцированных одномерными представлениями подгрупп. Группа H наз. p-элементарной, если она является произведением группы, порядок к-рой равен степени простого числа p, и циклич. группы порядка, взаимно простого с p; группа H наз. элементарной, если она p-элементарна для нек-рого простого p. Любой характер конечной группы G является линейной комбинацией с целыми коэффициентами характеров К. г. п., индуцированных представлениями элементарных подгрупп $H \subset G$ (теорема Брауэра, допускающая обобщение на случай поля произвольной характеристики). Если группа G сверхразрешима, т. е. допускает композиционный ряд из нормальных делителей с циклическими факторами, то любое неприводимое К. г. п. для G индуцировано одномерным представлением нек-рой подгруппы.

В случае, если характеристика p поля K не является делителем порядка $|G|$, теория мало отличается от случая $K=\mathbb{C}$. В частности, любое конечномерное К. г. п. вполне приводимо; если K — алгебраически замкнутое поле, то число классов эквивалентности неприводимых К. г. п. над K равно числу классов сопряженных элементов группы, а сумма квадратов размерностей представителей этих классов равна порядку группы. Но для алгебраически замкнутого поля K могут существовать представления, неприводимые над K, но приводимые над его расширениями; поле K наз. полем разложения неприводимого К. г. п. π, если π остается неприводимым над любым расширением поля K, и — полем разложения для G, если K есть поле разложения для любого неприводимого К. г. п. для G. Если K — поле характеристики нуль или конечное поле, содержащее корни из единицы степени m, где m — наименьшее общее кратное порядков элементов группы G, то K — поле разложения для G; теория К. г. п. над полем, не являющимся полем разложения, связана с группой Галуа расширения данного поля, получаемого присоединением всех корней m-й степени из единицы. В частности, число классов неприводимых представлений группы G над полем рациональных чисел равно числу классов сопряженности циклич. подгрупп этой группы; если K — совершенное поле, то существует поле разложения для G, конечное над K. Для любого поля K характер любого К. г. п. принимает значение во множестве конечных сумм корней из единицы в поле K, и для матричных элементов и характеров справедлив аналог соотношений ортогональности и их следствий; в частности, если K — поле разложения для G характеристики нуль, то К. г. п. с характером χ неприводимо тогда и только тогда, когда $\sum_{g \in G}\chi(g)\chi(g^{-1})=|G|$. Если характеристика p поля K — делитель порядка $|G|$, то групповая алгебра группы G над полем K не полупроста, и существуют не вполне приводимые К. г. п. над K. Пусть k — локальное поле характеристики нуль, полное относительно нек-рого дискретного нормирования, K — конечное поле классов вычетов поля k с характеристикой p; К. г. п.

группы G над K наз. **модулярными**. Теория модулярных К. г. п. устанавливает более глубокие связи между строением группы и свойствами представлений этой группы, чем теория К. г. п. над $\mathbb{C}$. Теория упрощается в случае, если k и K содержат все корни m-й степени из единицы (и поэтому являются полями разложения); в этом случае для матричных элементов и характеров справедлив аналог соотношений ортогональности. Пусть π — К. г. п. над K, χ — его характер, Δ — первообразный корень m-й степени из единицы в поле k, δ — его канонический образ в K; пусть $s \in G$ — элемент, порядок к-рого взаимно прост с p, т. е. p-регулярный элемент, G_{reg} — множество p-регулярных элементов. Преобразование $\pi(s)$ диагонализуемо и $\chi(s)=\delta^{a_1}+\ldots+\delta^{a_n}$ для нек-рых целых $a_1, \ldots, a_n$; формула $\eta(s)=\Delta^{a_1}+\ldots+\Delta^{a_n}$ определяет функцию $\eta: G_{\mathrm{reg}} \to k$, наз. **характером Брауэра** представления π; он однозначно определяет композиционные факторы представления π над K. Неразложимые двусторонние идеалы в групповой алгебре $K(G)$ группы G над полем K наз. блоками; существует классификация неэквивалентных неприводимых представлений над k, неизоморфных представлений над K и неизоморфных компонент разложения левого регулярного представления группы G над K в алгебре $K(G)$ в прямую сумму ненулевых неразложимых представлений в терминах блоков; эти результаты допускают распространение на случай, когда поля k и K не являются полями разложения для G.

Лит.: [1] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр., пер. с англ., М., 1969; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [3] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [4] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] Серр Ж.-П., Линейные представления конечных групп, пер. с франц., М., 1970.

А. И. Штерн.

КОНЕЧНОКРАТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение $f: X \to Y$ такое, что прообраз $f^{-1}y$ любой точки $y \in Y$ состоит из конечного числа n_y точек. Если $n_y = n$ — одно и то же для всех y, то f наз. **n-кратным отображением**.

Понятию К. о. в дифференцируемом случае соответствует понятие конечного отображения. Дифференцируемое отображение дифференцируемых многообразий $f: X \to Y$ наз. **конечным** в точке $x \in X$, если размерность *локального кольца* $R_f(x)$ отображения f в точке x конечна. Все отображения такого рода являются К. о. на компактных подмножествах X, более того, существует открытая окрестность U точки x такая, что $f^{-1}(f(x)) \cap U$ состоит только из одной точки. Число $k = \dim R_f(x)$ измеряет кратность x как корня уравнения $f(y)=x$: существует окрестность V точки x такая, что для всякого y, достаточно близкого к $f(x)$, множество $f^{-1}(y) \cap V$ состоит не более, чем из k точек.

Если $\dim X \leqslant \dim Y$, то конечные отображения образуют *массивное множество* в пространстве $C^\infty(X, Y)$, более того, множество неконечных отображений имеет в этом пространстве бесконечную коразмерность (**теорема Тужрона**).

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977.

М. И. Войцеховский.

КОНЕЧНОМЕРНАЯ АССОЦИАТИВНАЯ АЛГЕБРА — ассоциативное кольцо A, являющееся одновременно конечномерным векторным пространством над полем F, в к-ром выполняется следующее условие

$$\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$$

для всех $a, b \in A$ и $\alpha \in F$. Размерность $n=\dim_F A$ пространства A над полем F наз. размерностью алгебры A над F. Принято также говорить, что алгебра A является n-мерной. Всякая n-мерная ассоциативная алгебра A над полем F имеет точное представление матрицами порядка $n+1$ над F, т. е. существует изоморфизм алгебры A на нек-рую подалгебру алгебры всех квадратных матриц порядка $(n+1)\times(n+1)$ над F. Если, кроме того, алгебра A содержит единицу, то она имеет точное представление матрицами порядка n над F.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый базис векторного пространства A над F (он наз. также базисом алгебры A) и

$$e_ie_j=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}e_k,\ \gamma_{ij}^{k}\in F.$$

Элементы γ_{ij}^{k}, поля F наз. структурными константами алгебры A в данном базисе. Они образуют тензор третьего ранга в пространстве A.

Основные теоремы о К. а. а. Радикал Джекобсона К. а. а. нильпотентен и, если основное поле сепарабельно, отщепляется полупрямым слагаемым (см. *Веддерберна — Мальцева теорема*). Полупростая К. а. а. над полем разлагается в прямую сумму матричных алгебр над телами. Если основное поле F алгебраически замкнуто, то полупростая К. а. а. распадается в прямую сумму матричных алгебр над F. Простые конечномерные алгебры исчерпываются полными матричными алгебрами над телами (теорема Веддерберна). В частности, К. а. а. без делителей нуля оказывается телом. Над полем действительных чисел К. а. а. с делением (т. е. тела) исчерпываются следующими примерами: поле действительных чисел, поле комплексных чисел, тело кватернионов (теорема Фробениуса).

Многие из упомянутых структурных свойств К. а. а. имеют место и в более широких классах нётеровых и артиновых колец (см., напр., *Веддерберна — Артина теорема*).

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] Albert A. A., Structure of algebras, N. Y., 1939.

В. Н. Латышев.

КОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — линейное представление топологич. группы в конечномерном векторном пространстве. Теория К. п. является одним из наиболее разработанных и важных разделов общей теории представлений групп. Неприводимое К. п. вполне неприводимо (см. *Шура лемма*), но операторно неприводимое К. п. может быть приводимым. Измеримое К. п. локально компактной группы совпадает локально почти всюду с нек-рым непрерывным К. п. Ограниченное К. п. локально компактной группы эквивалентно унитарному представлению. Локально компактная группа, имеющая точное К. п., является группой Ли [7].

Унитарное К. п. есть прямая сумма неприводимых унитарных К. п. Пересечение ядер непрерывных гомоморфизмов топологич. группы G совпадает с пересечением ядер неприводимых унитарных К. п. группы G; если это множество содержит лишь единичный элемент группы G, то группа G допускает непрерывный мономорфизм в нек-рую компактную группу и группа G наз. вложимой в компактную группу, или максимальной почти периодической (МПП-группой). Если G — МПП-группа, то семейство матричных элементов неприводимых унитарных К. п. группы G разделяет точки группы G. Коммутативные и компактные группы являются МПП-группами; связная локально компактная группа тогда и только тогда является МПП-группой, когда она есть прямое произведение связной компактной группы и группы $\mathbb{R}^n$ (см. [5]). МПП-группа может иметь бесконечномерные неприводимые унитарные представления и даже быть группой не типа 1. Для того чтобы любое непрерывное неприводимое унитарное представление локально компактной группы G было К. п., необходимо и достаточно [8], чтобы группа G являлась проективным пределом конечных расширений групп H вида $(K\cdot D)\times V$, где K, D, V —

замкнутые подгруппы группы H, причем группа V изоморфна $\mathbb{R}^n$, K — компактная группа, D — дискретная группа, центральная в H; достаточно, чтобы факторгруппа группы G по ее центру была компактна. Кроме того, для многих локально компактных групп (в частности, для некомпактных простых групп Ли) единственным неприводимым унитарным К. п. является единичное представление.

Неунитарные К. п. топологич. групп расклассифицированы (с точностью до эквивалентности) лишь для нек-рых групп, в частности для групп $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$, где задача описания К. п. решается приведением матрицы к жордановой форме и — в случае группы $\mathbb{R}$ — связана с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, так как пространство решений такого уравнения является конечномерным инвариантным подпространством регулярного представления группы $\mathbb{R}$ в пространстве непрерывных функций на $\mathbb{R}$. Кроме того, известны К. п. связных полупростых групп Ли. А именно, К. п. таких групп являются прямыми суммами неприводимых К. п., к-рые описываются следующим образом. Если G — полупростая комплексная группа Ли, U — ее максимальная компактная подгруппа, то любое непрерывное неприводимое унитарное представление π группы U в пространстве E может быть продолжено: 1) до неприводимого представления π^G группы G в E, матричные элементы к-рого являются аналитич. функциями на G; 2) до неприводимого представления группы $\bar{\pi}^G$ группы G, матричные элементы к-рого комплексно сопряжены аналитич. функциями на G; представления π^G и $\bar{\pi}^G$ определяются представлением π однозначно. Тензорное произведение $\pi_1^G \otimes \bar{\pi}_2^G$ является неприводимым К. п. группы G для любых неприводимых унитарных К. п. π_1, π_2 группы G, и любое неприводимое К. п. группы G эквивалентно одному из представлений вида $\pi_1^G \otimes \bar{\pi}_2^G$. Описание К. п. односвязной связной комплексной полупростой группы Ли может быть дано также в терминах экспонент К. п. ее алгебры Ли, а также с помощью *Гаусса разложения* $G \supset Z_- D Z_+$ группы G: пусть α — такая непрерывная функция на G, что $\alpha(z_- \delta z_+) = \alpha(\delta)$ для всех $z_- \in Z_-$, $\delta \in D$, $z_+ \in Z_+$, и пусть линейная оболочка Φ_α функций $g \to \alpha(gg_0)$, $g_0 \in G$ конечномерна; тогда формула $[T_\alpha(g_0)f](g) = f(gg_0)$, $g, g_0 \in G$, $f \in \Phi_\alpha$, определяет неприводимое К. п. группы G, и все неприводимые К. п. группы G могут быть получены таким образом. Если G — действительная полупростая группа Ли, имеющая комплексную форму $G^{\mathbb{C}}$, то любое неприводимое К. п. группы G является сужением на G нек-рого однозначно определенного неприводимого К. п. группы $G^{\mathbb{C}}$, матричные элементы к-рого аналитичны на $G^{\mathbb{C}}$ (так что теория К. п. полупростых связных групп Ли по существу сводится к теории представлений компактных групп Ли). К. п. любой группы Ли является действительно аналитическим; если G — односвязная группа Ли, то между К. п. группы G и ее алгебры Ли существует взаимно однозначное соответствие (сопоставляющее представлению группы Ли его дифференциал; обратное соответствие сопоставляет представлению алгебры Ли его экспоненту). Но классификация К. п. произвольных групп Ли далека (1978) от полного решения даже для частных случаев групп $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, как и для групп $\mathbb{Z}^n$, $n \geqslant 2$ (см. [6]). С другой стороны, неприводимые К. п. π связной группы Ли G известны [2]: они имеют вид $\pi = \chi \otimes \pi_0$, где χ — одномерное представление группы G (т. е. фактически — ее коммутативной факторгруппы по коммутанту), а π_0 — К. п. полупростой факторгруппы группы G по максимальному связному разрешимому нормальному делителю группы G (см. *Леви—Мальцева разложение*).

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [4] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [5] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с франц., М., 1950; [6] Гельфанд И. М., Пономарёв В. А., «Функциональный анализ и его применения», 1969, т. 3, № 4, с. 81—82; [7] Глушков В. М., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, № 2, с. 3—41; [8] Штерн А. И., «Матем сб.», 1973, т. 90, № 1, с. 86—95. *А. И. Штерн.*

КОНЕЧНОСТИ ТЕОРЕМЫ — 1) К. т. в алгебраической геометрии — утверждения о различных объектах алгебраич. геометрии (пространствах когомологий, алгебраич. многообразиях, схемах, расслоениях и т. п.), состоящие в том, что эти объекты зависят от конечного числа параметров или же образуют конечное множество.

Первый круг теорем конечности относится к пространствам когомологий когерентных алгебраич. пучков. Фундаментальная теорема состоит в том, что эти пространства конечномерны над основным полем k, если многообразие собственно (для $k=\mathbb{C}$ это свойство равносильно компактности) (см. [2]). В рамках теории схем были получены весьма широкие обобщения этой теоремы. Одно из них обобщает данную теорему на случай собственных морфизмов схем и утверждает, что прямой образ когерентного пучка относительно такого отображения когерентен (см. [3], [4]). Другое обобщение относится к изучению когомологий несобственных многообразий. Оказывается, что если рассматриваемое многообразие X получается выбрасыванием нек-рого подмногообразия Y из собственного многообразия, то можно оценить те размерности, в к-рых группы когомологий конечномерны. Эти оценки зависят от коразмерности многообразия Y и свойств его особых точек (см. [5], [6]). Известны также соответствующие К. т. для этальных когомологий.

Другой круг К. т. относится к подсхемам и, более общо, когерентным пучкам на фиксированной собственной схеме. Эти объекты могут быть параметризованы в весьма широкой ситуации *Гильберта схемами* (или для обратимых пучков — *Пикара схемами*). Наиболее общая из таких К. т. утверждает, что эти схемы квазипроективны, если ограничиться подсхемами или пучками с одним и тем же *Гильберта многочленом* [4]. Ее частным случаем является тот факт, и что алгебраич. подмногообразия данной степени в проективном пространстве зависят от конечного числа параметров, а также теорема о конечности базиса *Нерона — Севери группы.*

Эти теоремы находят применение в целом ряде проблем конечности, возникающих в диофантовой геометрии. Среди таких проблем: вопрос о конечности множества рациональных точек алгебраич. многообразия, определенного над глобальным полем (многомерный аналог гипотезы Морделла), гипотеза Шафаревича о конечности числа алгебраич. кривых, определенных над данным глобальным полем и с фиксированными вырождениями, вопрос о конечной порожденности группы рациональных точек алгебраич. группы.

Лит.: [1] Serre J.-P., «J. math. pures et appl.», 1957, t. 36, № 5, p. 1—16; [2] Расслоение пространства и их приложения, М., 1958, с. 372—450; [3] Grothendieck A., Eléments de géométrie algébrique, ch. 3, pt 2, P., 1963 (Publ. Math. IHES, № 17); [4] его же, Fondements de géométrie algébrique, P., 1962; [5] Hartshorne R., Ample Subvarieties of Algebraic Varieties, B.—Hdlb.—N. Y., 1970; [6] Ogus A., «Ann. Math.», 1973, v. 98, № 2, p. 327—65; [7] Шафаревич И. Р., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Stockh., 1962, p. 163—76; [8] Аракелов С. Ю., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 6, с. 1269—93. *А. Н. Паршин.*

2) К. т. в теории аналитических пространств — критерии конечномерности групп когомологий со значениями в *когерентных аналитических пучках.* Первой общей теоремой такого рода явилась

теорема конечности Картана — Серра [1]: если X — компактное комплексное пространство и $\mathcal{F}$ — когерентный аналитич. пучок на X, то пространства когомологий $H^k(X, \mathcal{F})$ конечномерны и отделимы для всех $k \geqslant 0$. Обобщение этой теоремы на случай выпукло-вогнутых пространств [2], [3] утверждает: если X — сильно (p, q)-выпукло-вогнутое пространство (см. *Псевдовыпуклость и псевдовогнутость*) и $\mathcal{F}$ — когерентный аналитич. пучок на X, то $H^k(X, \mathcal{F})$ конечномерны при $p \leqslant k \leqslant \operatorname{prof} \mathcal{F} - q - 1$ и отделимы при $p \leqslant k \leqslant \operatorname{prof} \mathcal{F} - q$, а $H^k_c(X, \mathcal{F})$ конечномерны при $q+1 \leqslant k \leqslant \operatorname{prof} \mathcal{F} - p$ и отделимы при $q+1 \leqslant k \leqslant \operatorname{prof} \mathcal{F} - p + 1$.

К К. т. относят также обобщения указанных выше теорем на относительный случай, т. е. критерии когерентности прямых образов когерентных аналитич. пучков при аналитич. отображениях. Обобщением теоремы Картана — Серра является следующая теорема Грауэрта [4], [5]: если $\pi : X \to Y$ — собственное аналитич. отображение комплексных пространств и F — когерентный аналитич. пучок на X, то прямые образы $R^k \pi_* \mathcal{F}$ когерентны при всех $k \geqslant 0$. Это свойство оказывается и достаточным для собственности отображения π. Аналогичные К. т. доказаны для сильно p-выпуклых и сильно q-вогнутых отображений (см. [6]). Аналог теоремы Грауэрта доказан также для *жестких аналитических пространств* над полем с неархимедовым нормированием [7].

С К. т. тесно связаны теоремы об оценке степени трансцендентности поля мероморфных функций на различных классах комплексных пространств (см. *Зигеля теорема*). Простым следствием теоремы Грауэрта является следующая теорема Реммерта [4]: если $\pi : X \to Y$ — собственное аналитич. отображение комплексных пространств и Z — аналитич. множество в X, то множество $\pi(Z)$ аналитично в Y. Эта теорема переносится и на случай жестких пространств [7].

Лит.: [1] Cartan H., Serre J.-P., «C. r. Acad. sci.», 1953, t. 237, p. 128—30; [2] Андреотти А., Грауэрт Г., в кн.: Комплексные пространства, М., 1965, с. 105—89, пер. с франц.; [3] Ramis J. P., «Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.», 1973, ser. 3, t. 27, № 4, p. 933—97; [4] Грауэрт Г., в кн.: Комплексные пространства, М., 1965, с. 205—299, пер. с нем.; [5] Bănică C., Stănăşilă O., Metode algebrice în teoria globală a spaţiilor complexe, Buc., 1974; [6] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 93—171; [7] Kiehl R., «Invent. math.», 1967, Bd 2, № 3, S. 191—214.

А. Л. Онищик.

КОНЕЧНОСТРОЧНЫЙ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — *матричный метод суммирования*, определенный конечнострочной матрицей — матрицей, каждая строка к-рой содержит только конечное число отличных от нуля элементов. Важным частным случаем К. м. с. являются *треугольные методы суммирования*.

Для любого регулярного матричного метода суммирования последовательностей можно построить К. м. с. равносильный и совместный (см. *Включение методов суммирования* и *Совместность методов суммирования*) с ним на множестве ограниченных последовательностей (см. [3]). Однако существуют регулярные матричные методы суммирования, для к-рых нет равносильных К. м. с. на множестве всех последовательностей (пример см. [4]).

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Брудно А. Л., «Матем. сб.», 1945, т. 16, с. 191—247; [4] Erdos P., Piranian G., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1950, v. 1, p. 397—401.

И. И. Волков.

КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ ФОРМУЛА, формула конечных приращений Лагранжа,— формула, выражающая приращение функции через значение производной в промежуточной точке. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ числовой оси и дифференцируема в его внутренних точках, тогда

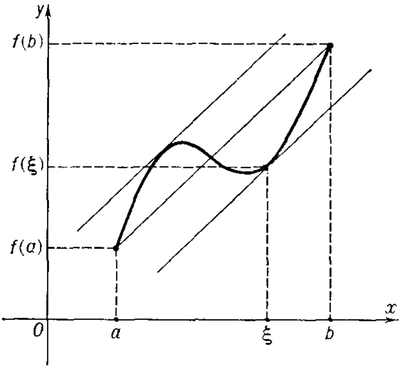
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \quad a < \xi < b.$$

К. п. ф. записывают также в виде

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \quad a<\theta<1.$$

Геометрич. смысл К. п. ф.: для хорды графика функции f с концами в точках $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ существует такая точка ξ, $a<\xi<b$, что касательная к графику функции в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна указанной хорде (см. рис.).

К. п. ф. обобщается на функции многих переменных: если функция f дифференцируема в каждой точке вы-



пуклой области G n-мерного евклидова пространства, то для каждой пары точек $x=(x_1, \ldots, x_n)\in G$, $x+\Delta x=(x_1+\Delta x_1, \ldots, x_n+\Delta x_n)\in G$ существует такая точка $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, лежащая на отрезке с концами в точках x и $x+\Delta x$, что

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i}\Delta x_i.$$

Л. Д. Кудрявцев.

КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ИСЧИСЛЕНИЕ — раздел математики, в к-ром изучаются функции при дискретном изменении аргумента, в отличие от дифференциального и интегрального исчислений, где аргумент изменяется непрерывно. Пусть функция $y=f(x)$ задана в точках $x_k=x_0+kh$ (h — постоянная, k — **целое**). Тогда

$$\Delta y_k=\Delta f_k=f(x_{k+1})-f(x_k)$$

— (конечные) разности первого порядка,

$$\Delta^2 y_k=\Delta^2 f_k=\Delta f_{k+1}-\Delta f_k=f(x_{k+2})-2f(x_{k+1})+f(x_k)$$

— разности второго порядка, ...,

$$\Delta^n y_k=\Delta^n f_k=\Delta^{n-1}f_{k+1}-\Delta^{n-1}f_k$$

— разности n-го порядка. Разности удобно располагать в таблицу:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	...
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				
...					

Разность n-го порядка через величины $y_0, y_1, \ldots$ выражается формулой:

$$\Delta^n y_n=y_{k+n}-C_n^1 y_{k+n-1}+C_n^2 y_{k+n-2}-\ldots+(-1)^n y_k.$$

Наряду с разностями вперед Δy_k употребляются разности назад:

$$\nabla y_k=f(x_k)-f(x_{k-1}).$$

В ряде вопросов (в частности, при построении интерполяционных формул) используют центральные разности:

$$\delta^{2m-1} y_{i+\frac{1}{2}}, \; \delta^{2m} y_i,$$

к-рые определяются следующим образом:

$$\delta y_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+1} - y_i,$$

$$\delta^2 y_i = \delta y_{i+\frac{1}{2}} - \delta y_{i-\frac{1}{2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta^{2m-1} y_{i+\frac{1}{2}} = \delta^{2m-2} y_{i+1} - \delta^{2m-2} y_i,$$

$$\delta^{2m} y_i = \delta^{2m-1} y_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{2m-1} y_{i-\frac{1}{2}}.$$

Между центральными $\delta^n y_i$ и обычными разностями $\Delta^n y_k$ имеется связь

$$\delta^{2m} y_i = \Delta^{2m} y_{i-m}, \; \delta^{2m+1} y_{i+\frac{1}{2}} = \Delta^{2m+1} y_{i-m}.$$

В случае, когда промежутки $x_{k+1} - x_k$ не постоянны, рассматривают так наз. разделенные разности:

$$[x_0;\ x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1},$$

$$[x_0;\ x_1;\ x_2] = \frac{[x_0;\ x_1] - [x_1;\ x_2]}{x_0 - x_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n] = \frac{[x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_{n-1}] - [x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n]}{x_0 - x_n}.$$

Имеет место формула

$$[x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{y_j}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)}.$$

Иногда вместо $[x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n]$ употребляется обозначение $f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)$. Если $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$[x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}.$$

Если функция $f(x)$ в интервале $x_k < x < x_{k+n}$ имеет n-ю производную $f^n(x)$, то

$$\Delta^n y_k = h^n f^{(n)}(\xi), \; x_k < \xi < x_{k+n}.$$

К. р. и. тесно связано с общей теорией приближения функций, используется в приближенном дифференцировании и интегрировании, в приближенном решении дифференциальных уравнений и других вопросах. Пусть поставлена задача (интерполяционная задача) о восстановлении функции $f(x)$, если известны значения $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Строится многочлен $P(x)$ степени n, к-рый в указанных точках принимает те же значения, что и $f(x)$. Его можно записать в различных формах — в форме Лагранжа, в форме Ньютона и т. д. В форме Ньютона интерполяционный многочлен имеет вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + [x_0;\ x_1](x - x_0) +$$
$$+ [x_0;\ x_1;\ x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + [x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}),$$

а в случае равноотстоящих значений независимого переменного:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\, h^k} (x - x_0) \ldots (x - x_{k-1}).$$

Функцию $f(x)$ принимают приближенно равной $P_n(x)$. Если $f(x)$ имеет $n+1$ производную, то ошибка от замены $f(x)$ на $P_n(x)$ оценивается соотношением

$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\ldots(x-x_n),$$

где ξ лежит в интервале, в к-ром находятся точки x, $x_0, \ldots, x_n$. В случае, если $f(x)$ — многочлен степени $\leqslant n$, то $f(x)=P_n(x)$.

При неограниченном увеличении числа узлов интерполяции многочлен $P_n(x)$ становится в пределе многочленом $P(x)$ «бесконечной» степени и естественно возникает вопрос: когда $f(x)=P(x)$, т. е. когда будет выполняться равенство

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\,h^k}(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1}) \quad (1)$$

(для простоты рассматривается случай равноотстоящих узлов). Пусть $x_0=0$, $h=1$, так что $x_n=n\,(n\geqslant 0)$. Если ряд (1) сходится в точке α, отличной от узлов (ряд (1) всегда сходится в узлах $x_0, x_1, \ldots$), то он сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} x>\alpha$ и представляет собой в этой полуплоскости аналитич. функцию, к-рая в полуплоскости $\operatorname{Re} x\geqslant\beta>\alpha$ удовлетворяет условию $(\varepsilon>0)$:

$$|f(re^{i\varphi})|<ce^{rh(\varphi)}r^{\alpha+\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

$$h(\varphi)=\cos\varphi\ln(2\cos\varphi)+\varphi\sin\varphi.$$

Обратно, если $f(x)$ аналитична в нек-рой полуплоскости и имеет оценку роста, подобную указанной (несколько лучше ее), то она представляется рядом (1). Таким образом, в ряд (1) (так наз. ряд Ньютона) разлагаются функции из весьма узкого класса (только аналитич. функции с определенным ростом). Изучаются ряды Ньютона, когда узлы — вообще комплексные числа. Такие ряды нашли большое применение в теории трансцендентных чисел. Пусть теперь узлы интерполяции образуют треугольную матрицу

$$\begin{array}{llll}
x_{0,0} & & & \\
x_{1,0} & x_{1,1} & & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
x_{n,0} & x_{n,1} & \ldots & x_{n,n} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}$$

и интерполяционный многочлен $P_n(x)$ строится по узлам, расположенным в $(n+1)$-й строчке. Класс функций, для к-рых $P_n(x)$ стремится к $f(x)$ при $n\to\infty$, зависит от матрицы узлов. Напр., в случае, когда

$$x_{n,k}=\cos\frac{2k+1}{2n}\pi,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

($x_{n,k}$ — корни *Чебышева многочлена*), для сходимости интерполяционного процесса на отрезке $[-1,1]$ достаточно выполнения условия

$$\lim_{n\to\infty}\omega(1/n)\ln n=0,$$

где $\omega(\delta)$ — *непрерывности модуль* $f(x)$ на $[-1,1]$.

Другая важная задача К. р. и — задача суммирования функций. Пусть дана нек-рая функция $f(x)$. Требуется найти в конечном виде, точно или приближенно, сумму

$$S_n=f(x_0)+f(x_0+h)+\ldots+f(x_0+nh),$$

при фиксированных x_0 и h и большом n, если известны нек-рые аналитич. свойства $f(x)$. Иначе говоря, исследуется асимптотич. поведение S_n при $n\to\infty$. Пусть $x_0=0$, $h=1$ (для простоты) и найдена функция $F(x)$ такая, что

$$\Delta F(x)=F(x+1)-F(x)=f(x). \quad (2)$$

Тогда

$$S_n = F(n+1) - F(0). \qquad (3)$$

Напр., пусть $f(x)=x^2$. Решение уравнения (2) ищется в виде многочлена третьей степени

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

с неопределенными коэффициентами. При подстановке в уравнение (2) и приравнивании коэффициентов левой и правой частей при соответствующих степенях многочлен имеет вид:

$$Q(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$$

и

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Не всегда удается в конечном виде получить решение уравнения (2). Поэтому полезно иметь приближенные формулы для S_n. Такой формулой является *Эйлера — Маклорена формула* суммирования. В случае, если $f(x)$ имеет k производных и k — четное, формулу Эйлера — Маклорена можно записать в виде

$$\sum_{x=0}^{n-1} f(x) = \int_0^n f(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{B_\nu}{\nu!} \{f^{(\nu-1)}(n) - f^{(\nu-1)}(0)\} +$$

$$+ \frac{B_k}{k!} \sum_{x=0}^{n-1} f^{(k)}(x+\theta),$$

где $0<\theta<1$ (θ вообще зависит от n), B_ν — *Бернулли числа*. Если $f(x)$ — многочлен степени, меньшей k, то остаточный член равен нулю.

Имеется аналогия между задачами К. р. и. и дифференциальным и интегральным исчислениями. Операция разыскания разности соответствует нахождению производной; решение уравнения (2) как операция, обратная разысканию конечной разности, соответствует нахождению первообразной, т. е. неопределенному интегрированию. Формула (3) есть прямой аналог *Ньютона — Лейбница формулы*. Эта аналогия проявляется при рассмотрении уравнений в конечных разностях. Уравнением в конечных разностях наз. соотношение

$$F(x,\ f(x),\ \Delta f(x),\ \ldots,\ \Delta^n f(x)) = 0,$$

где F — заданная функция, а $f(x)$ — искомая. Если выразить все $\Delta^n f(x)$ через $f(x)$, $f(x+1), \ldots, f(x+n)$, то уравнение в конечных разностях запишется в виде

$$\Phi(x, f(x), f(x+1), \ldots, f(x+n)) = 0. \qquad (4)$$

Его решение относительно $f(x+n)$:

$$f(x+n) = \psi(x,\ f(x),\ \ldots,\ f(x+n-1)). \qquad (5)$$

При задании начальных значений $f(x_0)$, $f(x_0+1), \ldots$, $f(x_0+n-1)$ можно последовательно найти $f(x_0+n)$, $f(x_0+n+1)$ и т. д. После решения уравнения (4) относительно $f(x)$:

$$f(x) = \varphi(x, f(x+1), \ldots, f(x+n)),$$

можно, положив $x=x_0-1$, найти $f(x_0-1)$, затем найти $f(x_0-2)$ и т. д. Таким образом, из уравнения через начальные данные могут быть найдены значения $f(x)$ во всех точках x_0+k, где k — целое. Пусть рассматривается линейное уравнение

$$f(x+k) + P_1(x)\,f(x+k-1) + \ldots + P_k(x)\,f(x) =$$

$$= Q(x),\ x = 0,\ 1,\ \ldots, \qquad (6)$$

где $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ и $Q(x)$ — заданные функции на множестве $x=0, 1, 2\ldots$. Общее решение неоднородного уравнения (6) есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения

$$f(x+k)+P_1(x) f(x+k-1)+\ldots+P_k(x) f(x)=0. \quad (7)$$

Если $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ — линейно независимые решения уравнения (7), то общее решение уравнения (7) выражается формулой

$$f(x)=c_1 f_1(x)+\ldots+c_k f_k(x),$$

где $c_1, \ldots, c_k$ — произвольные постоянные. Постоянные $c_1, \ldots, c_k$ можно найти, задав начальные условия, значения $f(0), f(1), \ldots, f(k-1)$. Линейно независимые решения $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ (фундаментальная система) легко находятся в случае уравнения с постоянными коэффициентам

$$f(x+k)+a_1 f(x+k-1)+\ldots+a_n f(x)=0. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) ищется в виде $f(x)=\lambda^x$. Характеристическое уравнение для λ:

$$\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+\ldots+a_k=0.$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — его корни и все они различны. Тогда фундаментальная система решений уравнения (8) есть система $\lambda_1^x, \ldots, \lambda_k^x$ и общее решение уравнения (8) представляется формулой:

$$f(x)=c_1\lambda_1^x+\ldots+c_n\lambda_k^x.$$

Если λ_1 есть s-кратный корень характеристич. уравнения, то ему соответствуют частные решения $\lambda_1^x, x\lambda_1^x, \ldots, x^{s-1}\lambda_1^x$.

Пусть, напр., рассматривается последовательность чисел, начинающаяся с нуля и единицы, в к-рой каждый последующий член равен сумме двух непосредственно предшествующих ему: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 15, ... (*Фибоначчи числа*). Ищется выражение для общего члена последовательности. Пусть $f(x)$, $x=0, 1, 2, 3, \ldots$, — общий член последовательности; условие

$$f(x+2)=f(x+1)+f(x), \quad f(0)=0, \quad f(1)=1,$$

является разностным уравнением с заданными начальными условиями. Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2-\lambda-1=0$, его корни $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, поэтому

$$f(x)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x;$$

$c_1=1/\sqrt{5}$ и $c_2=-1/\sqrt{5}$ находятся из начальных условий.

Уравнение (4) можно изучать не только тогда, когда x изменяется дискретно, принимая значения 0, 1, 2, ..., но и тогда, когда x изменяется непрерывно. Пусть $f(x)$ задана произвольно в полуинтервале $[0, n)$. Из (5), положив $x=0$, получают $f(n)$. Если $f(x)$ задана непрерывной в $[0, n)$, то в замкнутом интервале $[0, n]$ функция $f(x)$ может оказаться разрывной. Желая иметь дело с непрерывными решениями, надо $f(x)$ так задать в $[0, n)$, чтобы, в силу (5), $f(x)$ оказалась непрерывной в $[0, n]$. Зная $f(x)$ в $[0, n]$, из (5) находят $f(x)$ для $x\in(n, n+1]$, затем для $x\in(n+1, n+2]$ и т. д.

Более общим, чем уравнение (8), является уравнение

$$f(x+h_k)+a_1 f(x+h_{k-1})+\ldots+a_k f(x)=0, \quad (9)$$

$$0<h_1<h_2<\ldots<h_k.$$

Здесь $h_1, \ldots, h_k$ — необязательно целые и необязательно соизмеримы между собой. Уравнение (9) имеет частные решения

$$f(x)=e^{\lambda x},$$

где λ — корень уравнения

$$L(\lambda)\equiv e^{h_k\lambda}+a_1 e^{h_{k-1}\lambda}+\ldots+a_k=0.$$

Это уравнение имеет бесконечно много корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Следовательно, уравнение (9) имеет бесконечно много частных решений $e^{\lambda_m x}$, $m=1, 2, \ldots$. Пусть все корни простые. Для выражения решения уравнения (9) через эти элементарные частные решения уравнение удобнее записать в виде:

$$\int_0^\alpha f(x+t)\, d\sigma(t)=0,\ \alpha=h_k, \tag{10}$$

где $\sigma(t)$ — кусочно постоянная функция, имеющая скачки в точках $0, h_1, \ldots, h_k$, равные соответственно $1, a_1, \ldots, a_k$. Пусть

$$\psi_\nu(t)=\frac{1}{L'(\lambda_\nu)}\int_0^t e^{\lambda_\nu \xi}\, d\sigma(\xi),\ \ \nu\geqslant 1.$$

Функции $\psi_\nu(t)$ обладают свойством:

$$\int_0^\alpha e^{\lambda_m t}\psi_\nu(t)\, dt=\delta_{m\nu}$$

($\delta_{m\nu}=1$, если $m=\nu$, и $\delta_{m\nu}=0$, если $m\neq\nu$), т. е. они образуют систему, биортогональную к системе $\{e^{\lambda_n t}\}$. На этом основании решению $f(x)$ уравнения (10) приводится в соответствие ряд

$$f(x)\sim\sum_{\nu=1}^\infty a_\nu e^{\lambda_\nu x}, \tag{11}$$

$$a_\nu=\int_0^\alpha f(t)\,\psi_\nu(t)\, dt.$$

В случае, когда уравнение (9) имеет вид

$$f(x+2\pi)-f(x)=0 \tag{12}$$

(т. е. $f(x)$ — периодическая функция с периодом 2π); $L(\lambda)=e^{2\pi\lambda}-1$; корни уравнения $L(\lambda)=0$ суть mi; ($m=0, \pm1, \ldots$) и ряд (11) есть ряд Фурье для функции $f(x)$, записанный в комплексной форме. Ряд (11) можно рассматривать как обобщение на случай разностного уравнения (9) обычного ряда Фурье, соответствующего простейшему разностному уравнению (12). При определенных условиях ряд (11) сходится к решению $f(x)$. Если $f(x)$ — аналитическая функция, то уравнение (9) представимо в виде *бесконечного порядка уравнения*

$$\sum_{n=0}^\infty \alpha_n f^{(n)}(x)=0.$$

Аналогично разностям функций одного переменного вводятся разности функций многих переменных. Так, напр., пусть требуется решить задачу численного решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

в прямоугольнике $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, при заданных значениях $u(x, y)$ на границе прямоугольника. Прямоугольник разбивается на мелкие прямоугольные ячейки со сторонами $\Delta x=a/N$, $\Delta y=b/M$. В вершинах этих ячеек ищутся значения решения. В вершинах, к-рые лежат на границе исходного прямоугольника, значения $u(x, y)$ известны. Принимая приближенно (в числителях стоят разности второго порядка)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{u(x+\Delta x,\ y)-2u(x,\ y)+u(x-\Delta x,\ y)}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\approx\frac{u(x,\ y+\Delta y)-2u(x,\ y)+u(x,\ y-\Delta y)}{\Delta y^2},$$

вместо уравнения Лапласа получают систему уравнений

$$\frac{u(x+\Delta x,\ y)-2u(x,\ y)+u(x-\Delta x,\ y)}{\Delta x^2}+$$

$$+\frac{u(x,\ y+\Delta y)-2u(x,\ y)+u(x,\ y-\Delta y)}{\Delta y^2}=0.$$

Точка (x, y) пробегает те вершины ячеек, к-рые расположены внутри основного прямоугольника. Тем самым строится система $(N-1)(M-1)$ уравнений, содержащая то же число неизвестных. Решая эту алгебраич. систему уравнений, получают значения $u(x, y)$ в вершинах ячеек. Когда Δx и Δy малы, а решение задачи имеет определенную гладкость, найденные значения близки к точным значениям.

К. р. и. развивалось параллельно с развитием основных разделов математич. анализа. Начала К. р. и. содержатся в трудах П. Ферма (P. Fermat), И. Барроу (I. Barrow), Г. Лейбница (G. Leibniz). В 18 в. К. р. и. приобрело характер самостоятельной математич. дисциплины. Первое систематич. изложение К. р. и. было дано Б. Тейлором (B. Taylor) в 1715. Труды математиков 19 в. подготовили почву для современных глав К. р. и. Идеи и методы К. р. и. получили существенное развитие в применении к аналитич. функциям комплексного переменного и задачам вычислительной математики.

Лит.: [1] Марков А. А., Исчисление конечных разностей, 2 изд., Од., 1910; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 1—2, 3 изд., М., 1966; [3] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

А. Ф. Леонтьев.

КОНИКА — линия 2-го порядка, т. е. множество точек плоскости (проективной, аффинной, евклидовой), однородные координаты x_0, x_1, x_2 к-рых (относительно проективной, аффинной или декартовой систем координат) удовлетворяют однородному уравнению второй степени:

$$F(x) \equiv \sum_{i,\, j=0}^{2} a_{ij}x_i x_j = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Билинейная симметричная форма

$$\Phi(x, \tilde{x}) = \sum_{i,\, j=0}^{2} a_{ij}x_i\tilde{x}_j$$

наз. полярной формой относительно $F(x)$. Две точки $M'(x_0', x_1', x_2')$, $M''(x_0'', x_1'', x_2'')$, для к-рых $\Phi(x', x'') = 0$, наз. полярно сопряженными относительно К. Если прямая (M', M'') пересекает К. в точках N_1, N_2 и точки M', M'' полярно сопряжены относительно К., то точки N_1, N_2 и M', M'' образуют гармонич. четверку. Точки К. и только они являются самосопряженными относительно К. Полюсом данной прямой относительно К. наз. точка, полярно сопряженная со всеми точками этой прямой. Множество точек плоскости, полярно сопряженных с данной точкой M' относительно К., наз. полярой точки M' относительно К. Поляра точки M' определяется линейным уравнением $\Phi(x, x') = 0$ относительно координат x_0, x_1, x_2. Если $\Phi(x, x') \not\equiv 0$, то поляра точки M' — прямая линия; если $\Phi(x, x') \equiv 0$ то поляра точки M' — вся плоскость. В этом случае точка M' принадлежит К. и наз. ее особой точкой. Если число $R = \operatorname{rang}(a_{ij}) = 3$, то К. не имеет особых точек и наз. невырождающейся, или нераспадающейся. На проективной плоскости это — действительный овал, или мнимый овал. Нераспадающаяся К. определяет на проективной плоскости корреляцию — биективное отображение множества точек на множество прямых. Касательная к нераспадающейся К. есть поляра точки касания. Если $R = 2$, то К. является парой действительных или парой мнимых прямых, пересекающихся в особой точке. Если $R = 1$, то каждая точка К. является особой, а сама К.— парой совпадающих действительных прямых (сдвоенной прямой). Аффинные свойства К. выделяются спецификой ее расположения и ассоциированных с ней точек и прямых относительно выделенной прямой $x_0 = 0$ — несобственной прямой. К. имеет гиперболический, эллиптический или параболический тип в зависимости от того, пересекает она несобственную прямую ($\delta < 0$, $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$), не пересекает

($\delta>0$) или касается ее ($\delta=0$). Центр К.— полюс несобственной прямой, диаметр — поляра несобственной точки, асимптота — касательная к К. в несобственной точке. Два диаметра сопряжены относительно К., если их несобственные точки полярно сопряжены относительно К.

Метрические свойства К. выделяются из аффинных инвариантностью расстояния между двумя произвольными точками. Диаметр К., ортогональный сопряженному с ним диаметру, является осью симметрии К. и наз. ее осью. Директриса К.— поляра ее фокуса.

Лит.: [1] Фиников С. П., Аналитическая геометрия, 2 изд., М., 1952; [2] Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 5 изд., М., 1960. *В. С. Малаховский.*

КОНИЧЕСКАЯ КОНСТРУКЦИЯ — сопоставление с каждым непрерывным отображением топологич. пространств $f: X \to Y$ топологич. пространства $C_f \supset Y$, к-рое получается из топологич. суммы (несвязного объединения $CX \oplus Y$ (здесь $CX=(X\times[0,1])/(X\times\{0\})$ — конус над X) отождествлением $x\times\{1\}=f(x)$, $x\in X$. Пространство C_f наз. конусом отображения f. Если пространства X, Y пунктированы отмеченными точками $x\in X$, $y\in Y$, то дополнительно стягивается в точку образующая $x\times[0, 1]$ конуса CX, и само C_f наз. стянутым конусом отображения f. Для любого пунктированного топологич. пространства K последовательность $X\xrightarrow{f}Y\subset C_f$ индуцирует точную последовательность

$$[X, K] \leftarrow [Y, K] \leftarrow [C_f, K]$$

пунктированных множеств. Отображение f гомотопно постоянному отображению в отмеченную точку тогда и только тогда, когда Y является *ретрактом* пространства C_f.

Лит.: [1] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [2] Мошер Р. Э., Тангора М. К., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970. *А. Ф. Харшиладзе.*

КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, конус, — поверхность, образуемая движением прямой (образующей), проходящей через данную точку (вершину К. п.) и пересекающей данную линию (направляющую). К. п. имеет две полости, расположенные симметрично относительно вершины.

Коническая поверхность 2-го порядка — один из видов *поверхностей второго порядка*. Каноническое уравнение действительной К. п. 2-го порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

если $a=b$, то К. п. наз. круглой (круговой) К. п., или К. п. вращения; каноническое уравнение мнимой К. п. 2-го порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0;$$

единственная действительная точка мнимой К. п.— точка (0, 0, 0).

Конической поверхностью n-го порядка наз. алгебраич. поверхность, задаваемая в аффинной системе координат x, y, z уравнением:

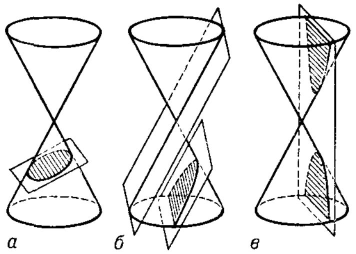
$$f(x, y, z)=0,$$

где $f(x, y, z)$ есть однородный многочлен (форма n-й степени от переменных x, y, z). Если точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит на К. п., то и вся прямая OM лежит на К. п. (точка O — начало координат). Справедливо и обратное утверждение: всякая алгебраич. поверхность, к-рая состоит из прямых, проходящих через одну точку, есть К. п. *А. Б. Иванов.*

КОНИЧЕСКАЯ СЕТЬ — сопряженная сеть на поверхности трехмерного пространства, образованная коническими линиями, т. е. линиями касания конусов, описанных около поверхности. Поверхности, несущие К. с., наз. *Петерсона поверхностями. Переноса сеть* можно рассматривать как частный случай К. с. Вершины конусов К. с. расположены на двух кривых. К. с. зависят самое большее от четырех параметров. Только невырожденные поверхности 2-го порядка несут 4-параметрическое семейство К. с. Поверхности, несущие 2-параметрическое семейство К. с.,— линейчатые, принадлежащие линейной конгруэнции (т. е. конгруэнции, образованной общими секущими двух прямых).

Лит.: [1] Бланк Я. П., «Тр. геометр. семинара. Ин-т науч. информ. АН СССР», 1971, т. 3, с. 5—27. *В. Т. Базылев.*

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ — линии, к-рые получаются сечением прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину. К. с. могут быть трех типов: 1) секущая плоскость пересекает все образующие конуса в точках одной его полости (рис., *а*): линия пересечения есть замкнутая овальная кривая — *эллипс*; окружность как частный случай эллипса получается, когда секущая плоскость перпендикулярна оси конуса. 2) Секущая плоскость параллельна одной из касательных плоскостей конуса (рис., *б*); в сечении получается незамкнутая, уходящая в бесконечность кривая — *парабола*, целиком лежащая на одной плоскости. 3) Секущая плоскость пересекает обе полости конуса (рис., *в*); линия пересечения — *гипербола* — состоит из двух одинаковых незамкнутых, простирающихся в бесконечность частей (ветвей гиперболы), лежащих на обеих полостях конуса.



а б в

С точки зрения аналитич. геометрии К. с.— действительные нераспадающиеся *линии второго порядка.*

В тех случаях, когда К. с. имеет центр симметрии (центр), т. е. является эллипсом или гиперболой, его уравнение может быть приведено (путем перенесения начала координат в центр) к виду:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=a_{33}.$$

Дальнейшие исследования таких (наз. центральными) К. с. показывают, что их уравнения могут быть приведены к еще более простому виду:

$$Ax^2+By^2=C, \qquad (*)$$

если за направления осей координат выбрать так наз. главные направления — направления главных осей (осей симметрии) К. с. Если A и B имеют одинаковые знаки (совпадающие со знаком C), то уравнение (*) определяет эллипс; если A и B разного знака, то — гиперболу.

Уравнение параболы привести к виду (*) нельзя. При надлежащем выборе осей координат (одна ось координат — единственная ось симметрии параболы, другая — перпендикулярная к ней прямая, проходящая через вершину параболы) ее уравнение можно привести к виду:

$$y^2=2px.$$

К. с. были известны уже математикам Древней Греции. Наиболее полным сочинением, посвященным этим кривым, были «Конические сечения» Аполлония Пергского (ок. 200 до н. э.). Дальнейшие успехи теории К. с. связаны с созданием в 17 в. новых геометрич. методов: проективного [Ж. Дезарг (G. Désargues), Б. Паскаль (B. Pascal)] и в особенности координатного [Р. Декарт (R. Descartes), П. Ферма (P. Fermat)].

При надлежащем выборе системы координат (ось абсцисс — ось симметрии К. с., ось ординат — касательная в вершине К. с.) уравнение К. с. может быть приведено к виду:

$$y^2 = 2px + \lambda x^2$$

(p и λ — постоянные). Если $p \neq 0$, то оно определяет параболу при $\lambda = 0$, эллипс при $\lambda < 0$, гиперболу при $\lambda > 0$. Геометрич. свойство К. с., содержащееся в последнем уравнении, было известно уже древнегреч. геометрам и послужило для Аполлония Пергского поводом присвоить отдельным типам К. с. названия, сохранившиеся до сих пор: слово «парабола» (греч. parabolḗ) означает приложение (т. к. в греч. геометрии превращение прямоугольника данной площади y^2 в равновеликий ему прямоугольник с данным основанием $2p$ наз. приложением данного прямоугольника к этому основанию); слово «эллипс» (греч. élleipsis) — недостаток (приложение с недостатком); слово «гипербола» (греч. hyperbolḗ) — избыток (приложение с избытком).

С переходом к современным методам исследования стереометрич. определение К. с. было заменено планиметрич. определениями этих кривых как множеств точек на плоскости. Так, напр., эллипс определяется как множество точек, для к-рых сумма расстояний от двух данных точек (фокусов) имеет данное значение. Можно дать другое планиметрич. определение К. с., охватывающее все три типа этих кривых: К. с.— множество точек, для каждой из к-рых отношение ее расстояний до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) равно данному положительному числу (эксцентриситету) e. Если при этом $e < 1$, то К. с.— эллипс; если $e > 1$, то — гипербола; если $e = 1$, то — парабола.

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии, М., 1968; [2] Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

В. И. Битюцков.

КОННЕКС, коннекс Клебша,— связь точек и прямых на плоскости, выражаемая уравнением

$$f(x^1, x^2, x^3, u_1, u_2, u_3) = 0, \tag{1}$$

где x^i и u_i — однородные координаты соответственно точки и прямой. Напр., уравнение

$$u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 = 0 \tag{2}$$

задает так наз. главный коннекс, выражающий инцидентность точки x и прямой u. То, что два К. имеют общее, наз. конциденцией. Понятие К. введено А. Клебшем (A. Clebsch) в 1871 для однородной формулировки дифференциальных уравнений.

Так, уравнение

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

определяется конциденцией К. (1) и (2), и задача интегрирования (3) заключается в том, чтобы из x определенных таким образом соответствующих точек и прямых u составить кривые, для к-рых x и u являются соответствующими точками интегральной кривой и касательными к ней. Введение такой проектной точки зрения (равноправности координат x и u) дает также нек-рый принцип классификации дифференциальных уравнений.

Аналогичные построения могут быть проведены для уравнений с частными производными, причем не обязательно первого порядка.

Лит.: [1] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.—Л., 1939.

М. И. Войцеховский.

КОНОИД — *Каталана поверхность*, все прямолинейные образующие к-рой пересекают фиксированную прямую — ось К. Напр., гиперболич. параболоид есть К. с двумя осями.

Радиус-вектор К.

$$r = \{u \cos v + \alpha f(v), \quad u \sin v + \beta f(v), \quad \gamma f(v)\},$$

где $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — единичный вектор, имеющий направление оси К., $f(v)$ — некоторая функция. Для прямого К. $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, и тогда его ось является стрикционной линией. Прямой К. с $f(v) = av$ есть *геликоид*.

И. Х. Сабитов.

КОНОРМАЛЬ — термин, употребляемый в теории *краевых задач* для дифференциальных уравнений с частными производными. Пусть $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — внешняя нормаль в точке x к гладкой поверхности S, расположенной в евклидовом пространстве E^n с координатами $x^1, \ldots, x^n$, g^{ij} — контравариантный невырожденный тензор, обычно представляющий коэффициенты нек-рого дифференциального оператора второго порядка $D = g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$. Тогда **к о н о р м а л ь ю** (относительно D) наз. вектор

$$n = (\nu^1, \ldots, \nu^n),$$

где $\nu^i = g^{ik}\nu_k$. Другими словами, К.— контравариантная запись (в пространстве с метрикой, определяемой тензором, обратным g^{ij}) нормального к S ковариантного (в пространстве с евклидовой метрикой) вектора ν.

Лит.: [1] Б и ц а д з е А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] М и р а н д а К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

М. И. Войцеховский.

КОНСТАНТА в м а т е м а т и ч е с к о й л о г и к е — символ *формального языка* для обозначения некоторого фиксированного элемента (индивида), фиксированной операции или отношения на какой-либо структуре, описываемой этим языком. В соответствии с этим различают *индивидные константы*, **ф у н к ц и о н а л ь н ы е к о н с т а н т ы** и **п р е д и к а т н ы е к о н с т а н т ы**. Совокупность всех К. языка наз. **с и г н а т у р о й** этого языка. Напр., сигнатура языка *арифметики формальной* состоит из индивидной К. «0» (нуль), двуместных функциональных К. «+» (сложение) и «·» (умножение), одноместной функциональной К. «′» (прибавление единицы) и двуместной предикатной К. «=» (равенство).

С. К. Соболев.

КОНСТРУКТИВНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ — раздел математической физики, изучающий свойства моделей *квантовой теории поля* (к. т. п.). Одна из задач К. к. т. п. состоит в исследовании квантовых полей в реальном 4-мерном пространстве-времени. Однако само существование этих полей остается (1978) математически недоказанным. Основные усилия были направлены на изучение менее сингулярных моделей к. т. п. в 2- и 3-мерном пространстве-времени. К. к. т. п. представляет собой синтез идей и методов аксиоматич. теории поля и теории перенормировок с современными математич. методами. Само понятие релятивистского квантового поля допускает различные эквивалентные математич. интерпретации, что позволяет использовать в к. т. п. методы различных областей математики.

Квантовое поле можно трактовать либо в терминах теории нелинейных гиперболич. уравнений для операторных обобщенных функций, либо в терминах теории обобщенных случайных полей (устанавливая тесный контакт со статистич. механикой), либо как систему аналитич. функций многих комплексных переменных (при изучении аналитич. свойств S-матрицы), либо же рассматривать его с точки зрения C^*-алгебр и теории представлений.

В первых работах по К. к. т. п. использовались в основном средства функционального анализа. Релятивистское квантовое поле в 2-мерном пространстве-времени, удовлетворяющее аксиомам Уайтмана, впервые удалось построить [8], только используя евклидову формулировку [9] к. т. п., позволившую привлечь методы теории вероятностей и статистич. механики.

Релятивистское квантовое поле полностью характеризуется последовательностью своих функций Уайтмана $W_n(x_1, \ldots, x_n)$. Эквивалентная евклидова формулировка к. т. п. дается последовательностью функций Швингера $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ (они получаются из W_n аналитич. продолжением в евклидовы точки $(ix_1^0, \mathbf{x}_1, ix_2^0, \mathbf{x}_2, \ldots)$), удовлетворяющих аксиомам Остервальдера — Шрадера (ОШ). При некоторых дополнительных предположениях можно доказать, что S_n являются моментами *вероятностной меры*, обладающей специальными свойствами. Способ построения моделей к. т. п., при к-ром сначала строится вероятностная мера, а затем проверяются аксиомы ОШ для ее моментов, оказался наиболее удобным и является общепринятым.

В простейшем случае одного скалярного поля рассматривается *измеримое пространство* $(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d), \mathscr{B})$, где $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ — пространство обобщенных функций умеренного роста, $\mathscr{B}$ есть σ-алгебра, генерируемая цилиндрическими множествами, и класс вероятностных мер μ на $(\mathscr{S}', \mathscr{B})$, обладающих следующими специальными свойствами.

1) На $(\mathscr{S}', \mathscr{B})$ задано естественное представление связной компоненты единицы G евклидовой группы движений $\mathbb{R}^d$ автоморфизмами σ-алгебры $\mathscr{B}$. Требуется, чтобы мера μ была G-инвариантна. Это условие есть евклидово выражение релятивистской инвариантности.

2) Пусть $\Phi(f)$ — непосредственно заданное обобщенное случайное поле на $(\mathscr{S}', \mathscr{B}, \mu)$, т. е. $\Phi(f)(\omega) = \omega(f)$, $\omega \in \mathscr{S}'$, $f \in \mathscr{S}$. Для любой функции $F(\omega)$ на $\mathscr{S}'$ определяется $F_\theta(\omega) = F(\omega_\theta)$, где $\omega_\theta(f) = \omega(f_\theta)$, $f_\theta(x_1, \ldots, x_d) = f(x_1, \ldots, -x_d)$. Пусть $\mathscr{B}_+$ — σ-алгебра, генерируемая функциями $\Phi(f)$ с $\operatorname{supp} f \subset \{x \in \mathbb{R}^d, x_d > 0\}$. Требуется выполнение условия положительности ОШ:

$$\int \bar{F}_\theta(\omega) F(\omega)\, d\mu(\omega) \geqslant 0$$

для любой $\mathscr{B}_+$-измеримой функции F на $\mathscr{S}'$. Это условие выражает положительную определенность скалярного произведения в релятивистском гильбертовом пространстве. Для двумерных моделей широко используется несколько более сильное условие марковости поля $\Phi(f)$.

3) Требуется существование нормы $\|\cdot\|$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ такой, что

$$\int e^{\Phi(f)}\, d\mu$$

равномерно ограничена и непрерывна по норме $\|\cdot\|$ на

$$\{f : f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\ \|f\| \leqslant 1\}.$$

4) Подгруппа трансляций группы G должна действовать эргодически. Это есть выражение единственности вакуума в релятивистской теории.

Если мера μ удовлетворяет условиям 1—4, то она называется к в а н т о в о й м е р о й, а соответствующее обобщенное случайное поле $\Phi(f)$ наз. е в к л и д о в ы м п о л е м. Моменты квантовой меры

$$S_n(f_1, \ldots, f_n) = \int \Phi(f_1) \ldots \Phi(f_n)\, d\mu$$

— функции Швингера, удовлетворяют аксиомам ОШ. Существует единственное релятивистское квантовое поле, удовлетворяющее всем аксиомам Уайтмана, такое, что аналитич. продолжение его функций Уайтмана в евклидовы точки совпадает с функциями Швингера данной квантовой меры μ. Если некоторая мера μ удовлетворяет лишь условиям 1—3, то для всех ее эргодич. компонент выполняются условия 1—4.

Один класс квантовых мер строится легко — это гауссовы меры (зависящие от параметра $m>0$) с характеристич. функционалом

$$\int \exp\{i\Phi(f)\}\, d\nu_m = \exp\left\{-\frac{1}{2}\,(f,\,(-\Delta+m)^{-1}f)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right\},$$

здесь Δ — оператор Лапласа (при $d \geqslant 3$ допускается $m=0$). Соответствующее евклидово поле называют свободным (скалярным) евклидовым полем массы m.

Построение негауссовых мер представляет большие трудности, и результаты существенно зависят от размерности d. Обычная процедура следующая. Строится нек-рая функция $V(\Lambda, \varkappa)$ на $\mathcal{S}'$ (потенциал взаимодействия), зависящая от параметров Λ, наз. объемным обрезанием, и $\varkappa$, наз. ультрафиолетовым обрезанием. Эвристически $V=-\mathcal{L}_{\text{int}}$ (см. *Квантовая теория поля*). Желательно, чтобы $V(\Lambda, \varkappa)$ обладала свойствами а д д и т и в н о г о ф у н к ц и о н а л а. Затем строится мера

$$d\mu_{\Lambda,\varkappa} = e^{-V(\Lambda,\varkappa)}\, d\nu_m^{\Lambda} \Big/ \int e^{-V(\Lambda,\varkappa)} d\nu_m^{\Lambda}$$

(определение $d\nu_m^{\Lambda}$ см. ниже) и изучаются пределы последовательности мер $d\mu_{\Lambda,\varkappa}$ при $\Lambda, \varkappa \to \infty$. Для некоторых потенциалов V (каких именно — определяется из физич. соображений; вид V и задает модель) предельная мера μ будет удовлетворять условиям 1—4. Сходимость мер обычно понимается в смысле сходимости всех моментов и характеристич. функционалов.

Напр., для модели со взаимодействием $\lambda\Phi^4$ при $d=2$ эта процедура конкретизируется следующим образом. Пусть $d\nu_m^{\Lambda}$ — гауссова мера на $(\mathcal{S}', \mathcal{B})$ с характеристич. функционалом

$$\int \exp\{i\Phi(f)\}\, d\nu_m^{\Lambda} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(f,\ (-\Delta_{\Lambda}+m^2)^{-1}f)_{L^2}\right\},$$

где Δ_{Λ} — самосопряженное расширение оператора Лапласа с нек-рыми краевыми условиями на границе $\partial\Lambda$ области Λ на плоскости $\mathbb{R}^2$ (обычно Λ — прямоугольник); ядром $(-\Delta_{\Lambda}+m^2)^{-1}(x, y)$ может быть, например, функция Грина для задачи Дирихле. Пусть, далее, $h_{\varkappa} \in \mathcal{S}$ и $h_{\varkappa}(x-y) \to \delta(x-y)$ при $x \to \infty$. Случайная величина $\Phi_{\varkappa}(x) = \Phi(h_{\varkappa}(x-.))$ при $\varkappa < \infty$ является гладкой функцией параметра $x \in \mathbb{R}^2$ и

$$\int \Phi_{\varkappa}(x)\, f(x)\, dx \to \Phi(f)$$

при $\varkappa \to \infty$. Положим

$$V(\Lambda,\ \varkappa) = \lambda \int_{\Lambda} :\Phi_{\varkappa}^4(x):dx,\ \ \lambda \geqslant 0,$$

где $:\Phi_{\varkappa}^4(x):$ виковская степень случайной величины $\Phi_{\varkappa}(x)$ (см. *Фока пространство*). Тогда

$$e^{-V(\Lambda,\varkappa)} \in L^p\left(d\nu_m^V\right),\quad p \geqslant 1,$$

$$Z_{\varkappa,\Lambda} = \int e^{-V(\Lambda,\varkappa)} d\nu_m^{\Lambda} \neq 0.$$

Пусть, наконец,

$$d\mu_{\Lambda,\varkappa} = \exp\{-V(\Lambda,\ \varkappa)\}\, d\nu_m^{\Lambda} / Z_{\varkappa,\Lambda}.$$

При $\varkappa \to \infty$, $\Lambda \to \mathbb{R}^2$ все моменты и характеристич. функционалы мер $\mu_{\Lambda,\varkappa}$ сходятся к моментам и характеристич. функционалу нек-рой квантовой меры μ. Оказывается, что при достаточно больших λ меры $\mu_{\Lambda} = \lim\limits_{\varkappa\to\infty} \mu_{\Lambda,\varkappa}$ с разными краевыми условиями на $\partial\Lambda$ имеют, вообще говоря, разные пределы при $\Lambda \to \mathbb{R}^2$. В этом случае говорят, что имеет место фазовый переход.

Задача К. к. т. п. состоит в том, чтобы описать все квантовые меры (фазы), отвечающие данному потенциалу взаимодействия, и исследовать свойства соответствующих релятивистских квантовых полей. В первую очередь интересуются спектральными свойствами оператора массы группы Пуанкаре (его изучение сводится к рассмотрению поведения функций Швингера на больших расстояниях) и свойствами S-матрицы — аналитичность, унитарность и другие (S-матрица изучается при помощи аналитического продолжения функций Швингера).

Существование квантовых мер при $d=2$ доказано (1978) для потенциалов взаимодействия $V=P(\Phi)$, P — любой полуограниченный снизу полином, $V=\lambda \cos g\Phi$ (уравнение синус-Гордона) и нек-рых других неполиномиальных взаимодействий, а также для нек-рых многокомпонентных полей $\vec{\Phi}=(\Phi_1, \ldots, \Phi_N)$. Для полиномиального достаточно слабого взаимодействия начато изучение спектра массового оператора в зависимости от вида полинома и установлено существование S-матрицы. Исследуется также взаимодействие Юкавы фермионных и скалярных полей. Евклидово фермионное поле не является обобщенным случайным полем, оно принимает значения в алгебре Грассмана. Однако по фермионным переменным можно «проинтегрировать», и задача сводится к оценкам нек-рых континуальных интегралов по обычным гауссовым мерам. Все эти модели при нек-рых значениях параметров имеют фазовые переходы.

Описанная выше конструкция релятивистских квантовых полей приводит только к так называемым вакуумным секторам, т. е. к квантовым полям, удовлетворяющим аксиомам Уайтмана, включая существование вакуума. Эти поля являются решением нелинейных уравнений с простейшими начальными условиями. Для ряда 2-мерных моделей (синус-Гордона и др.) построены солитонные сектора, у которых вакуум отсутствует, но которые имеют весьма интересный с физич. точки зрения спектр оператора массы. Эти новые сектора строятся при помощи специальных автоморфизмов C^*-алгебры, наблюдаемых в вакуумном секторе.

При $d=3$ доказано существование квантовых мер для модели с $\lambda(\vec{\Phi}, \vec{\Phi})^2$ взаимодействием, где

$$(\vec{\Phi}(x),\ \vec{\Phi}(x)) = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i(x)\,\Phi_i(x).$$

Потенциал взаимодействия здесь имеет вид

$$V(\Lambda, \varkappa) = \lambda \int_{\Lambda} :(\vec{\Phi}_\varkappa(x),\ \vec{\Phi}_\varkappa(x))^2: dx +$$
$$+ \lambda^2 \delta m_\varkappa \int_{\Lambda} :(\vec{\Phi}_\varkappa(x),\ \vec{\Phi}_\varkappa(x)): dx + C_{\varkappa,\,\Lambda},$$

где $\delta m_\varkappa$ и $C_{\varkappa,\,\Lambda}$ — некоторые определенные функции от $\varkappa$ и Λ, т. е. добавлены контрчлены. В этой модели также происходит фазовый переход при достаточно больших λ, причем он сопровождается нарушением $O(N)$-симметрии.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; [2] Конструктивная теория поля, пер. с англ., М., 1977; [3] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., М., т. 1, 1977, т. 2, 1978; [4] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [5] Хепп К., Теория перенормировок, пер. с франц., М., 1974; [6] Эвклидова квантовая теория поля. Марковский подход, пер. с англ., М., 1978; [7] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67—122; [8] Glimm J., Jaffe A., Spencer T., «Ann. Math.», 1974, v. 100, № 3, p. 585—632; [9] Nelson E., «J. Funct. Anal.», 1973, v. 12, № 1, p. 97—112; [10] Fröhlich J., «Adv. Math.», 1977, v. 23, № 2, p. 119—81. *И. В. Волович, М. К. Поливанов.*

КОНСТРУКТИВНАЯ ЛОГИКА — раздел математической логики, изучающий рассуждения о *конструктивных объектах* и конструкциях. При таком понимании К. л. шире, чем логика *конструктивной математики.* Самое заметное отличие от традиционной (классической) логики состоит в отсутствии *исключенного третьего закона* $A \vee \neg A$ и *двойного отрицания закона* $\neg\neg A \to A$.

При обозначении систем чистой логики (исчисление высказываний, предикатов) термины «конструктивное», «интуиционистское», «гейтинговское» часто считаются синонимами (см. *Гейтинга формальная система*). Под конструктивной арифметикой иногда понимают гейтинговскую арифметику, а иногда — ее расширение, получаемое добавлением принципа Маркова (см. *Конструктивного подбора принцип*) и схемы $A \leftrightarrow \exists e (e \, r \, A)$, выражающей эквивалентность формулы и утверждения о ее реализуемости (см. *Конструктивная семантика*). Эта расширенная система, достаточная для доказательства основных результатов конструктивного математич. анализа, не является, в отличие от гейтинговских систем, подсистемой классич. арифметики: в ней опровергается закон исключенного третьего $\forall x (A(x) \vee \neg A(x))$.

Иногда к К. л. относят системы *интуиционистской логики*, содержащие средства описания специфически интуиционистских понятий. Общая черта подавляющего большинства систем К. л., отражающая специфику конструктивного понимания связки $\vee$ и квантора $\exists$,— явная реализация этих связок: выводимость $A \vee B$ (соответственно $\exists x A(x)$) влечет выводимость одной из формул A, B (соответственно $A(t)$ для нек-рого терма t). При этом в случае прикладных систем (арифметика, анализ) требуется замкнутость рассматриваемых формул. Большинство систем К. л. (включая все гейтинговские системы) корректны относительно различных понятий реализуемости, включая реализуемость по Клини и *Гёделя интерпретацию*: все выводимые формулы реализуемы, в частности истинны, в конструктивной семантике. С другой стороны, формальные системы К. л. обычно неполны относительно естественной конструктивной семантики. Для систем, содержащих арифметику, это следует из *Гёделя теоремы о неполноте*.

Множество реализуемых предикатных формул неперечислимо, поэтому конструктивное исчисление предикатов неполно относительно реализуемости, а из его полноты относительно «наивной» конструктивной семантики следовала бы интуиционистская истинность принципа конструктивного подбора. Конструктивное исчисление высказываний также неполно относительно реализуемости, но полно при нек-рой интерпретации в терминах систем Поста. Арифметическая полуформальная система, полная относительно конструктивной семантики Маркова — Шанина, получается, если добавить к формальной конструктивной арифметике со схемой $A \leftrightarrow \exists e (e \, r \, A)$ и принципом конструктивного подбора эффективное ω-правило: из $A(0)$, $A(1)$, ... вывести $\forall x A(x)$. Для гейтинговских систем установлены теоремы полноты относительно теоретико-модельных семантик Крипке и Бета, использующих «возможные миры» (эти семантики связаны с теоретико-множественным вынуждением), а также относительно алгебраических и топологических моделей.

Классические формальные системы обычно погружаются в соответствующие системы К. л. (с сохранением отношения выводимости из гипотез) с помощью негативного перевода, т. е. приписывания двойного отрицания $\neg\neg$ перед всеми подформулами. Поэтому системы арифметики, анализа и *типов теории*, основанные на классич. логике, изоморфно вкладываются в соответствующие системы, основанные на К. л. Имеются системы теории множеств, основанные на К. л., в к-рые погружаются классич. системы. Гейтинговские системы погружаются в модельные расширения классических с помощью d-перевода, т. е. приписывания знака необходимости D перед всеми подформулами. При этом D можно читать «доказуемо».

В нек-рых системах К. л. справедливы суждения, ложные при классическом истолковании, напр. отрицание закона исключенного третьего или специфически интуиционистские утверждения о последовательностях. Такие системы S сводятся к классическим системам S° с помощью подходящего понятия реализуемости ρ. Доказывают, что $S\vdash A$ влечет существование t такого, что $S^\circ\vdash(t\rho A)$, причем если A — числовое равенство, то $S^\circ\vdash(A\leftrightarrow t\rho A)$. Отсюда следует непротиворечивость S относительно S°.

К. л. исследует истинность суждений также в нетрадиционных языках, отличных от языков логики предикатов арифметики, анализа и т. д. Наряду с традиционным отрицанием $\neg$, основанным на приведении к противоречию, изучается сильное отрицание $\sim$, предусматривающее построение контрпримера. Для $\sim$ справедливы многие из законов классич. логики, напр.

$$\sim(p\& q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q,\quad \sim\sim p\leftrightarrow p,$$

но теорема об эквивалентной замене верна лишь в виде

$$((p\leftrightarrow q)\,\&\,(\sim p\leftrightarrow\sim q))\supset(A\,(p)\leftrightarrow A\,(q)).$$

К системе сильного отрицания близки системы, основанные на симметричной трактовке истинности и ложности. Семантика для них предусматривает указание не только вида конструкций, обосновывающих истинность, но и вида конструкций, обосновывающих ложность рассматриваемого суждения.

Безотрицательная логика Грисса — Нельсона стремится избежать использования отрицания и ограничить класс свойств, о к-рых делаются утверждения, такими, для к-рых уже построены объекты, удовлетворяющие этим свойствам. Язык такой логики содержит связку $\underset{x}{\to}$ причем $A\underset{x}{\to}B$ понимается приблизительно как

$$\forall x\,(A\supset B)\,\&\,\exists xA.$$

В теории конструкций исследуются сами правила построения и доказательства, лежащие в основе конструктивной математики. Конструкции строятся из исходных с помощью фиксированного набора комбинаторов и операции применения функции к аргументу. Формулы строятся из равенства с помощью связок логики высказываний и предиката доказуемости π, причем $\pi(a,\,x\cdot\alpha(x))$ читается «a есть доказательство того, что $\alpha(x)$ верно для всех x». В качестве аксиом берутся, в частности, все классические тавтологии (включая закон исключенного третьего), т. е. отношение «быть доказательством» предполагается разрешимым. Имеется корректная и точная интерпретация гейтинговских систем в теории конструкций.

Рассмотрение в К. л. бескванторных систем вызвано стремлением получить финитные (в том или ином смысле) доказательства рассматриваемых суждений или их мажорант (см. *Конструктивная семантика*). Многие традиционные системы S К. л. погружаются в бескванторные системы S^- таким образом, что выводимость в S суждения $\forall x\exists yR(x,\,y)$ с бескванторной формулой R влечет выводимость в S^- формулы $R(x,\,\varphi(x))$ для подходящего φ. Если S — арифметика без индукции, то S^- примитивно рекурсивная арифметика; если S — гейтинговская арифметика, то S^- — система гёделевских примитивно рекурсивных функционалов.

Для формальных систем К. л. доказаны теоремы нормализации: любой вывод может быть конечным числом стандартных преобразований (редукций) приведен к нормальной форме, не содержащей «лишних» участков (см. *Генцена формальная система*). Нормальные выводы обладают (в полной мере или, в случае арифметики и более широких систем, частично) свойством подформульности.

Имеются связи между К. л. и теорией категорий. Так, понятию «декартовой замкнутой категории» соответствует гейтинговское исчисление высказываний.

Иногда к К. л. относят все логические рассмотрения, в к-рых требуется, чтобы все изучаемые объекты были конструктивными, независимо от применяемой логики. С этой тенденцией связано название *конструктивных по Гёделю множеств.*

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Troelstra A. S., в кн.: Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis, B.—Hdlb.—N. Y., 1973; [3] Новиков П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977; [4] Kreisel G., Mathematical logic, в кн.: Lectures on modern mathematics, v. 3, N. Y., 1965, p. 95—195. *Г. Е. Минц.*

КОНСТРУКТИВНАЯ МАТЕМАТИКА, конструктивное направление в математике,— математика, строящаяся в соответствии с тем или иным конструктивным математич. мировоззрением, обыкновенно стремящимся связывать утверждения о существовании математич. объектов с возможностью их построения и отвергающим в силу этого ряд установок традиционной теоретико-множественной математики, приводящих к появлению чистых теорем существования (в частности, *абстракцию актуальной бесконечности* и универсальный характер *исключенного третьего закона*). Конструктивная тенденция в математике проявлялась в той или иной форме на протяжении всей ее истории, хотя, по-видимому, только К. Гаусс (C. Gauss) впервые отчетливо выразил принципиальное для К. м. различие становящейся (потенциальной) и актуальной математич. бесконечности и возразил против употребления последней. Дальнейшие критические шаги в этом направлении были сделаны Л. Кронекером (L. Kronecker), А. Пуанкаре (H. Poincaré) и особенно Л. Брауэром (L. Brouwer). В критике Л. Брауэра, совпавшей по времени с кризисом оснований математики конца 19 — нач. 20 вв., энергично отвергалась как вера в экзистенциальный характер бесконечных множеств, так и убеждение в допустимости неограниченной экстраполяции классических логических принципов, в особенности закона исключенного третьего. В качестве альтернативы теоретико-множественному подходу Л. Брауэр, а затем и его последователи, разработали оригинальную программу построения математики, известную ныне под названием *интуиционизм.* Интуиционистскую математику Л. Брауэра можно считать первой систематич. попыткой построения математики на конструктивной основе. Параллельно успехам интуиционистов в созданной Д. Гильбертом (D. Hilbert) с целью обоснования теоретико-множественной математики *доказательств теории* был четко выявлен ряд первоначальных понятий, послуживший впоследствии отправной точкой отличных от интуиционизма конструктивных течений. Значительная часть соответствующих работ (при этом обнаружился достаточно широкий спектр толкования различными исследователями терминов «конструктивный», «эффективный» и пр.) опиралась на успехи, достигнутые (опять-таки под влиянием идей Д. Гильберта) в изучении математич. понятия *алгоритма.* Один из наиболее последовательных и законченных подходов к построению К. м. на этой основе доставляется основанной А. А. Марковым советской школой К. м., формирование основных понятий к-рой относится к 50-м гг. 20 в. Сам термин «К. м.» (конструктивное направление в математике) часто употребляется в узком смысле слова для именования математики, строящейся советским конструктивным направлением; ниже этот термин будет использоваться именно в указанном только что смысле.

К. м. может быть коротко охарактеризована следующими основными чертами: (1) предметом изучения являются конструктивные процессы и возникающие в результате их выполнения *конструктивные объекты*;

(2) рассмотрение конструктивных процессов и объектов производится в рамках *абстракции потенциальной осуществимости* с полным исключением идеи актуальной бесконечности; (3) интуитивное понятие эффективности связывается с точным понятием алгоритма; (4) используется специальная, учитывающая специфику конструктивных процессов и объектов *конструктивная логика*.

Понятия конструктивного процесса и конструктивного объекта являются первоначальными; представления о них имеют своим источником практическую материальную деятельность человека. Примерами конструктивных процессов могут служить сборка часов на конвейере, полная или частичная разборка их в ремонтной мастерской, набор текстов (с корректурами) в типографии, формирование и расформирование железнодорожных составов и пр. Характерной чертой конструктивных процессов является протекающее по отдельным шагам оперирование в рамках нек-рых четко указанных правил с элементарными, заведомо отличимыми друг от друга объектами, считающимися неразложимыми в ходе этих процессов. Возникающие в результате фигуры, составленные из исходных элементарных объектов, и считаются конструктивными объектами. К. м. не имеет необходимости углубляться в общее понятие конструктивного процесса и объекта, поскольку для ее нужд оказывается вполне достаточным один специальный вид конструктивных объектов — слова в том или ином алфавите.

Рассмотрение слов (это понятие также представляется первоначальным) происходит на следующей основе.

Вначале фиксируется нек-рый алфавит, т. е. список неразложимых, уверенно отличимых друг от друга элементарных знаков (букв). Каждая буква алфавита может копироваться; возникающие в результате последовательных актов такого копирования прямолинейные цепочки знаков считаются словами в исходном алфавите. К словам в данном алфавите удобно отнести также и пустое слово, т. е. цепочку, не содержащую ни одного знака. Напр., цепочки (5) «аввасд» и (6) «книга» являются словами в русском алфавите. При обращении со словами К. м. — и в этом проявляется ее абстрактный характер — использует *абстракции отождествления* и потенциальной осуществимости. Первая из них позволяет, отвлекаясь от различий копий и оригинала, говорить о разных копиях данной буквы и о ней самой, как об одной букве. Напр., говорят, что в слово (5) три раза входит буква «в» русского алфавита, тогда как в действительности при написании данного слова воспроизводились три различных конкретных копии исходной буквы. Это соглашение естественным образом распространяется на одинаковые по написанию (графически равные) слова. Напр., о двух конкретных словах: слове «книга» и слове (6) говорят как об одном слове. В допущении абстракции отождествления проявляется предполагаемая К. м. первоначальная способность человека к «чтению» слов, т. е. к многократному и устойчивому опознанию знаковых цепочек как одинаковых или различных. На это обстоятельство как минимальную предпосылку любой научной деятельности указывал Д. Гильберт. Абстракция потенциальной осуществимости позволяет пренебрегать в рассуждениях о написании слов реальными ограничениями в пространстве, времени и материале. Таким образом, о воображаемых очень длинных словах начинают рассуждать как о реально существующих, в частности считается возможным к любому данному слову приписать справа (или слева) любое другое слово. Отсюда вытекает и возможность рассмотрения сколь угодно больших натуральных чисел, а также сложения любых двух натуральных чисел, поскольку натуральными числами можно, напр., считать слова вида 0, 0|, 0|| и т. д. в алфавите 0|. Вместе с тем абстракция потенциальной осуществимости не позволяет рассматривать как своего рода завершенные объекты «бесконечные» слова и совокупность «всех» слов в данном алфавите (в частности, не рассматривается как завершенный объект и натуральный ряд). Такого рода рассмотрения требуют привлечения более сильной абстракции — абстракции актуальной бесконечности, к-рая отвергается К. м.

Принятие абстракции потенциальной осуществимости приводит к тому, что наряду с элементарными, целиком обозримыми конструктивными процессами (напр., написанием коротких слов) рассматриваются воображаемые, не подлежащие реальному воспроизведению конструктивные процессы. Такие процессы задаются своими предписаниями; сами эти предписания по существу и становятся предметом исследования. Задающее конструктивный процесс предписание (для простоты речь идет о процессах, оперирующих со словами) должно быть общепонятным и совершенно однозначно определять шаг за шагом последовательное построение слов, причем шаги должны быть элементарными, т. е. не предполагать ничего, кроме умения читать, писать (и стирать) слова. Шаги эти, таким образом, сводятся к написанию и графическому сравнению нек-рых слов, а также к замене *вхождений* одних слов в другие третьими словами. Окончание процесса определяется самим предписанием и может зависеть от результатов, полученных на шагах, предшествующих заключительному, причем принятие решения о заключительном характере данного шага также должно носить описанный только что элементарный характер. Возможна ситуация, когда никакой шаг не оказывается заключительным, т. е. после каждого совершенного шага данное предписание требует совершить следующий шаг. Такому предписанию не соответствует никакой потенциально выполнимый конструктивный процесс, однако здесь оказывается удобной условная терминология, согласно к-рой соответствующее предписание определяет неограниченно продолжаемый (потенциально бесконечный) процесс. Для оправдания этой терминологии можно было бы также расширить исходные представления о конструктивных процессах, рассматривая наряду с потенциально реализуемыми процессами более абстрактные образования — процессы, отождествляемые с их предписаниями. В связи с появлением неограниченно продолжаемых конструктивных процессов возникает вопрос о средствах, при помощи к-рых можно убедиться в обрываемости задаваемого данным предписанием конструктивного процесса. К. м. принимает здесь важный принцип, называемый *конструктивного подбора принципом* и позволяющий устанавливать такие факты методом от противного, т. е. приводя к нелепости предположение о неограниченной продолжаемости соответствующего конструктивного процесса. Примеры предписаний: (7) написать |; (8) к произвольному слову в алфавите 0| приписать справа |; (9) п. 1: написать | и перейти к п. 2; п. 2: стереть | (т. е. заменить эту букву пустым словом) и перейти к п. 1; (10) п. 1: к произвольному слову в алфавите 0| приписать справа | и перейти к п. 2; п. 2: если обрабатываемое в данный момент слово совпадает с 0||, то закончить процесс, в противном случае вернуться к п. 1; (11) п. 1: написать 0 и перейти к п. 2; п. 2: к обрабатываемому в данный момент слову приписать справа | и перейти к п. 3; п. 3: если получилось совершенное натуральное число, то закончить процесс, в противном случае приписать к обрабатываемому в данный момент слову справа | и перейти к п. 2. Предписание (7) задает конструктивный процесс, оканчивающийся за один шаг написанием однобуквенного слова |. Процесс выполнения (9) неограниченно продолжаем. В настоящее время (к 1978) неизвестно, заканчивается ли конструктивный процесс, задаваемый (11) (в (11) для краткости использовались понятия теории чисел; ясно, что возможно более длинное предписание этого рода, опирающееся исключительно на возможности чтения, написания и сравнения слов в алфавите 0|). Несколько особый характер имеют предписания (8) и (10): их выполнение может начинаться с любого слова в указанном алфавите, при этом конструктивный процесс, определяемый (8), всегда заканчивается, в то время как в случае предписания (10) он неограниченно продолжаем при нек-рых исходных словах. Предписания указанных типов принято называть **алгоритмами** (в данном контексте речь идет об алгоритмах, оперирующих со словами).

К необходимости рассмотрения алгоритмов приводит конструктивная трактовка экзистенциальных утверждений. Утверждение о существовании конструктивного объекта с данным свойством, т. е. утверждение вида (12) $\exists x A(x)$, в соответствии с представлениями о конструктивных объектах как результатах конструктивных процессов считается в К. м. установленным только в том случае, когда указан потенциально выполнимый конструктивный процесс, заканчивающийся построением искомого объекта. Соответственно установление параметрического утверждения существования (13) $\forall x \exists y A(x, y)$ («для всякого x существует y такой, что $A(x, y)$») предполагает указание «общего» конструктивного процесса, начинающегося с произвольного конструктивного объекта x данного исходного типа и заканчивающегося построением искомого y. Другими словами, (13) выражает существование алгоритма, находящего y, исходя из x. Из такой трактовки существования вытекает и конструктивное понимание *дизъюнкции*: суждение $A \vee B$ («A или B») считается установленным, только если предъявлен конструктивный процесс, заканчивающийся указанием его верного члена. Дальнейшее разъяснение смысла суждений более сложной структуры и выработка правил обращения с ними, соответствующих исходным конструктивным установкам, составляет задачу *конструктивной семантики* и *конструктивной логики*. Приведенная конструктивная трактовка утверждений существования и дизъюнкции существенно отличается от традиционной: в теоретико-множественной математике, напр., суждение (12) может быть доказано приведением к нелепости его отрицания. Такое доказательство обыкновенно не содержит никакого способа построения искомого конструктивного объекта. К. м. считает, что подобное рассуждение доказывает не (12), а его «двойное отрицание», т. е. $\neg\neg\exists x A(x)$. Последнее суждение рассматривается в К. м. как, вообще говоря, более слабое, чем (12). Таким образом, К. м. не принимает закона снятия двойного отрицания, а, следовательно, и закона исключенного третьего (на отсутствие оснований для принятия последнего указывает и конструктивная трактовка дизъюнкции).

Первоначальные математич. структуры — натуральные, целые и рациональные числа — непосредственно могут трактоваться как слова нек-рых простых типов в фиксированном алфавите, при этом соответствующие отношения равенства и порядка легко сводятся к графич. совпадению и различию слов. Введение более сложных структур — действительных чисел, функций над ними и т. д.— осуществляется в К. м. на основе понятия алгоритма, играющего в ней примерно такую же роль, какую играет в традиционной математике понятие функции. Считая интуитивные представления об алгоритмах слишком расплывчатыми для таких построений, К. м. делает здесь принципиальный шаг, стандартизируя используемые алгоритмы посредством принятия одного из современных точных определений этого понятия вместе с соответствующей гипотезой типа *Чёрча тезиса*, принципа нормализации и т. д., утверждающей совпадение оперативных возможностей, доставляемых алгоритмами в интуитивном и точном смысле слова.

Фактически наибольшее применение в К. м. получили *нормальные алгорифмы* Маркова. К необходимости уточнения понятия алгоритма приводит также и конструктивная трактовка существования. Напр., отрицание суждения (13) есть утверждение о невозможности нек-рого алгоритма, между тем интуитивные представления, достаточные для опознания в качестве алгоритма того или иного конкретного предписания, в принципе не позволяют получать сколько-нибудь нетривиальные теоремы невозможности. На основе изложенных принципов и опираясь на современную теорию алгоритмов, К. м. строит ряд математич. дисциплин, в том числе и конструктивный математич. анализ, включая сюда элементы функционального анализа, дифференциальные уравнения, теорию функций комплексного переменного и т. д. (см. *Конструктивный анализ*). Получаемые таким образом теоретич. модели, основанные на более скромной чем обычно системе абстракций, хотя и уступают традиционным в прозрачности и элегантности, тем не менее, по-видимому, способны обслужить тот же круг приложений.

Имея общий критический источник с интуиционистской математикой Л. Брауэра и заимствовав из нее ряд конструкций и идей, К. м. обнаруживает определенное сходство с последней. Вместе с тем, здесь имеются и принципиальные отличия как общефилософского, так и конкретно математич. характера. Прежде всего К. м. не разделяет свойственное интуиционизму убеждение в первоначальном характере математич. интуиции, считая, что сама эта интуиция формируется под влиянием практической деятельности человека. Соответственно абстрагирование в К. м. идет не от умственных построений как в интуиционизме, а от простейших реально наблюдаемых конструктивных процессов. В математич. плане К. м. не принимает выводящую за рамки конструктивных процессов и объектов концепцию свободно становящейся последовательности и основанную на ней интуиционистскую теорию континуума как среды свободного становления. С другой стороны, интуиционистская математика не принимает правила конструктивного подбора и не считает необходимым элиминировать интуитивные алгоритмы при помощи соответствующих точных определений. Следует заметить, что в последние годы наметилась определенная тенденция к сближению конструктивного и интуиционистского подходов: в нек-рых конструктивных исследованиях, в особенности относящихся к семантике, используются индуктивные определения и соответствующие им индуктивные доказательства, напоминающие построения Л. Брауэра при доказательстве его так наз. бар-теоремы (см. *Бар-индукция*), занимающей одно из центральных мест в интуиционистской математике.

Лит.: [1] Френкель А.-А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [2] Гейтинг А., Интуиционизм. Введение, пер. с англ., М., 1965; [3] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М., 1948; [4] Constructivity in mathematics, Amst., 1959; [5] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 42); [6] его же, О логике конструктивной математики, М., 1972; [7] Проблемы конструктивного направления в математике, в. 1—6, М.— Л., 1958—73 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 52, 67, 72, 93, 113, 129).

См. также лит. при ст. *Конструктивный анализ*.

Б. А. Кушнер.

КОНСТРУКТИВНАЯ СЕМАНТИКА — совокупность способов понимания суждений в *конструктивной математике*. Необходимость в особой семантике вызвана различием общих принципов, лежащих в основе традиционной (классической) и конструктивной математики (далее последний термин будет в основном относиться к подходу, развитому в советской школе конструктивной математики). Основное внимание К. с. уделяет суждениям о *конструктивных объектах* в языках первого порядка, то есть, по существу, арифметич. суждениям (см. *Арифметика формальная*). Принципиальные различия с традиционной семантикой в понимании дизъюнкций $A_0 \vee A_1$ (и суждений о существовании $\exists x A(x)$) сформулированы Л. Брауэром (L. Brouwer). Конструктивное обоснование таких суждений требует решения задачи: найти число $i \leqslant 1$ такое, что верно A_i (соответственно найти число n такое, что $A(n)$). Общие принципы описания задач, соответствующих более сложным формулам, были намечены А. Гейтингом (A. Heyting) и А. Н. Колмогоровым. Точная формулировка (к-рая стала возможной после появления математич. определения *алгоритма*) была дана С. Клини (S. Kleene) в виде понятия реализации замкнутой арифметич. формулы (см. *Рекурсивная реализуемость*). Реализация верного равенства $t=r$ есть фиксированная константа, напр. число 0, а ложное равенство не имеет реализаций. Реализация конъюнкции $A \& B$ — это пара $\langle a, b \rangle$, где a — реализация A, b — реализация B. Реализация дизъюнкции $A_0 \vee A_1$ — это пара $\langle i, a \rangle$, где $i=0,1$ и a — реализация суждения A_i. Реализация суждения $\exists x A(x)$ — это пара $\langle n, a \rangle$, где n — число, a — реализация суждения $A(n)$. Реализация суждения $\forall x A(x)$ — это общий метод f, к-рый по всякому натуральному n выдает реализацию $f(n)$ суждения $A(n)$. Реализация суждения $A \supset B$ — это общий метод f, к-рый по всякой реализации a суждения A выдает реализацию $f(a)$ суждения B (и может быть не определен для аргументов a, не являющихся реализациями A). При этом общий метод понимается как алгоритм (частично рекурсивная функция). Используя кодирование алгоритмов числами, можно записать условие «число e есть реализация формулы A» в виде арифметич. формулы (erA), не содержащей дизъюнкции $\vee$ и содержащей существование $\exists$ только тривиальным образом — перед равенствами. Такие формулы наз. почти нормальными. Суждение $\exists e(erA)$ (читаемое «A реализуема») может служить конструктивным разъяснением суждения A. При таком понимании закон исключенного третьего $\forall x(A(x) \vee \vee \neg A(x))$ опровергается, напр., для $A(x) = \exists y T(x, x, y)$, где $T(e, x, y)$ означает, что алгоритм (с кодом) e заканчивает работу над аргументом x за y шагов. Опровергается и закон двойного отрицания $\forall x(\neg\neg B(x) \supset \supset B(x))$, напр. для $B(x) = A(x) \vee \neg A(x)$. Приведенное определение связывает конструктивную задачу (поиск реализации) со всяким суждением A, даже если A не содержит $\vee$, $\exists$. Предложенный Н. А. Шаниным алгоритм выявления конструктивной задачи не меняет формул без $\vee, \exists$ (нормальных формул) и эквивалентен реализуемости в формальной интуиционистской арифметике с бескванторной индукцией. Произвольные формулы сводятся к почти нормальным, так как обоснование $\exists x A(x)$ состоит в предъявлении числа n и обосновании $A(n)$. К. с. для почти нормальных формул определяется разными авторами по-разному, однако ни в одном случае не получается столь существенного расхождения с классическим пониманием, как для формул, содержащих $\vee$ и нетривиальное $\exists$.

А. А. Марков определяет истинность для почти нормальных формул с помощью выводимости по обычным правилам для рассматриваемых логических связок плюс эффективное ω-правило: если имеется общий метод, позволяющий для любого n устанавливать выводимость $A(n)$ из суждения K, то $\forall x A(x)$ выводимо из K. Истинность определяется постепенно. Язык $Я_\omega$, состоящий из всех почти нормальных формул, делится на слои $Я_1$, $Я_2, \ldots$; язык $Я_1$ состоит из формул без $\supset$, $\forall$; язык $Я_{n+1}$, $n \geqslant 1$, включает $Я_n$ и формулы, к-рые можно построить из формул языка $Я_n$ одним применением импликации и любым числом применений $\forall$, $\&$. Истинность для $Я_1$-формул — это выводимость по обычным правилам для $\&$, $\exists$, $\vee$. Истинность для $Я_2$-формул определяется через допустимость соответствующего правила. Напр., истинность $\exists x R(x) \supset \exists y T(y)$ означает наличие алгоритма φ такого, что $R(n) \supset T(\varphi(n))$ для любого числа n. Для $Я_{n+1}$-формул при $n>1$ истинность конъюнкций и $\forall$-формул определяется обычным образом через истинность компонент, а истинность импликации $A \supset B$ означает выводимость B из A по нек-рым правилам S_n, о к-рых уже доказано, что они сохраняют истинность $Я_n$-формул. Системы S_n содержат ω-правило, а в качестве аксиом — все истинные $Я_n$-формулы. Понятие выводимости в S_n вводится обобщенным индуктивным определением, а для доказательства метатеорем применяется соответствующий принцип индукции. Индукцией по S_2-выводу доказывается допустимость правила $A \supset \neg\neg\exists x R \vdash A \supset \exists x R$. Оно включается в S_3 и дает принцип Маркова $\neg\neg\exists x R \supset \exists x R$. Системы S_{n+3}, $n \geqslant 1$, состоят из обычных правил для рассматриваемых связок, включая ω-правило. Оказывается, что почти нормальная формула A истинна по Маркову тогда и только тогда, когда примитивно рекурсивное дерево T_A поиска вывода формулы A без сечения (но с ω-правилом и принципом Маркова) является выводом в смысле индуктивного определения. Это эквивалентно (в рамках классической математики) классической истинности A.

В мажорантной семантике Н. А. Шанина для каждой почти нормальной формулы A определяется трансфинитная иерархия $\{A^\alpha\}$ формул простой структуры, причем $A^\alpha \supset A$ доказуемо в подходящей формальной системе. Формула A^α наз. м а ж о р а н т о й для A, и A считается истинной формулой ранга α, если A^α верна. Точность аппроксимации растет с ростом α: $\alpha < \beta \supset (A^\alpha \supset \supset A^\beta)$. Если отвлечься от технических деталей, то формула A строится с помощью α-кратного вынесения кванторов, согласно эквивалентности

$$\neg\neg(B \vee \neg\neg\exists u \forall v C(u, v)) \leftrightarrow$$

$$\exists \bar{u} \forall \bar{v} \neg\neg(B \vee \neg\neg\exists u \forall v C(u, v) \vee C(\bar{u}, \bar{v})),$$

и сворачивания цепочек кванторов с помощью алгоритма выявления конструктивной задачи. Это дает доказуемую в арифметике с трансфинитной индукцией до α эквивалентность

$$A \leftrightarrow \exists u \forall v \neg\neg(\neg\neg\exists w C_\alpha \vee D_\alpha)$$

с бескванторной формулой C_α, так что

$$A^\alpha = \exists u \forall v \exists w C_\alpha(u, v, w)$$

оказывается мажорантой для A. Суждение A^α оказывается, с точностью до технических деталей, эквивалентным утверждению о существовании вывода высоты $<\alpha$ для исходной формулы с использованием ω-правила. В этом смысле мажорантная семантика эквивалентна ступенчатой семантике А. А. Маркова. После фиксации нек-рого класса Θ общерекурсивных функций (напр., класса всех функций, определимых рекурсией до α) определяются мажоранты еще более простой структуры:

$$\exists u \forall v C_\alpha(u, v, \varphi(v)) \text{ для } \varphi \in \Theta.$$

Если K — бескванторное исчисление для класса Θ, то K-истинность формулы $\exists u \forall v C(u, v)$ определяется как выводимость формулы $C(t, v)$ с переменной v для нек-рого постоянного терма t. Если в качестве K взято стандартное исчисление равенств для функций, определимых рекурсией до ординалов, меньших α, то K-истинными оказываются формулы, выводимые в формальной интуиционистской арифметике, пополненной принципом Маркова, соотношениями, определяющими алгоритм выявления конструктивной задачи, и правилом индукции до ординалов β таких, что $\varepsilon(\beta) \leqslant \alpha$, где $\varepsilon(\beta)$ — первое ε-число, большее β. В частности, $\alpha = \varepsilon_0$ для $\beta = \omega$, т. е. для обычной индукции.

Доведение обоснования до бескванторного уровня (K-истинность) связано со стремлением остаться по возможности в рамках финитизма, т. е. бескванторного языка и соответствующих логических средств. С этим же связано стремление ограничиться небольшими α. Для большей части «работающего» конструктивного анализа (включая теорему о непрерывности эффективных операторов) достаточно конечных α.

Лит.: [1] Марков А. А., в сб.: Исследования по теории алгорифмов и математической логике, М., 1976, т. 2, с.3—31; [2] Шанин Н. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 129, с. 203—66; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *Г. Е. Минц.*

КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ — понятие, введенное С. Н. Бернштейном, назвавшим К. т. ф. «направление теории функций, которое ставит себе целью дать возможно более простую и удобную основу для качественного изучения и вычисления как эмпирических функций, так и всяких функций, являющихся решениями естественно поставленных задач математического анализа» [1]. Имелось в виду, что К. т. ф. должна содержать теорию приближения (аппроксимации) функций в качестве одного из своих разделов. Однако фактически название К. т. ф. получило употребление в более узком смысле, как другое название теории приближения функций. В последнее время термин «К. т. ф.» используется реже.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1945, т. 9, № 3, с. 145—58 (Собр. соч., т. 2, М., 1954, с. 349—60). *С. А. Теляковский.*

КОНСТРУКТИВНАЯ ФУНКЦИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО, конструктивная функция,— понятие функции одного и многих действительных переменных, используемое в *конструктивной математике.* Предложено А. А. Марковым. Может трактоваться как частный случай понятия алгоритмического оператора в конструктивных метрич. пространствах. См. также *Конструктивный анализ, Конструктивное метрическое пространство.* *Б. А. Кушнер.*

КОНСТРУКТИВНОГО ПОДБОРА ПРИНЦИП, принцип Маркова,— логико-философский принцип *конструктивной математики,* выдвинутый А. А. Марковым [1], [2] и в общей форме утверждающий, что если конструктивный процесс, заданный нек-рым предписанием, не является неограниченно продолжаемым, то он заканчивается. В конструктивной математике получили применение несколько конкретных, содержательно эквивалентных разновидностей этого принципа. 1) Пусть Ψ — *нормальный алгорифм,* P — слово в его алфавите. Тогда, если опровергнуто предположение о неприменимости Ψ к P, то Ψ применим к P; символически

$$\neg\neg\,!\Psi(P)\supset\,!\Psi(P).$$

2) *В арифметике формальной* К. п. п. может быть выражен следующей арифметич. формулой

$$\forall z\forall x\,[\neg\forall y\neg T_1(z,\ x,\ y)\supset\exists yT_1(z,\ x,\ y)],$$

где T_1 — примитивно рекурсивный предикат такой, что частично рекурсивная функция с гёделевым номером z определена на x тогда и только тогда, когда $\exists yT_1(z, x, y)$ (ср. [3]). 3) Если рекурсивно перечислимое множество непусто, то оно содержит нек-рый элемент. 4) Пусть A — алгоритмически проверяемое свойство натуральных чисел. Тогда, если опровергнуто предположение о том, что не существует числа со свойством A, то найдется натуральное число со свойством A. Соответствующая логическая схема записывается в виде

$$\forall x\,(A\,(x)\vee\neg A\,(x))\supset(\neg\neg\exists xA\,(x)\supset\exists yA\,(y)).$$

Иногда термин «К. п. п.» специально связывается именно с этой последней формой рассуждений, поскольку искомое число «подбирается» в ходе следующего конструктивного процесса: проверяют $A\,(0)$, если это верно, то берут 0 в качестве искомого числа, в противном случае переходят к проверке $A(1)$ и т. д.

Интуитивное оправдание К. п. п. в рамках применяемой в конструктивной математике системы абстракций состоит в том, что если невозможность неограниченного продолжения данного конструктивного процесса убедительно доказана, то потенциально достижимо окончание этого процесса в результате его последовательного выполнения шаг за шагом. Таким образом, при утверждении существования *конструктивного объекта* (напр., результата применения нормального алгорифма к слову) на основании К. п. п. не происходит выхода за рамки абстракции потенциальной осуществимости.

К. п. п. безусловно допустим с точки зрения классич. логики, поскольку он является частным случаем общего закона снятия двойного отрицания и закона исключенного третьего. Применение этих логических законов сводится к К. п. п. во многих конструкциях теории *рекурсивных функций*, что делает эти конструкции достоянием конструктивной математики. Использование К. п. п. позволяет также получить ряд значительных результатов в *конструктивном анализе*, в частности теорему о непрерывности алгоритмич. операторов и о продолжимости эффективных функционалов до частично рекурсивных функционалов (см. также *Конструктивное метрическое пространство*). Другой сферой приложений К. п. п. является конструктивная семантика [4]. Еще задолго до формулировки К. п. п. в качестве общего принципа конструктивной математики проводились исследования по обоснованию различных форм этого принципа в рамках того или иного круга допускаемых конструктивных средств. Здесь следует указать следующий основополагающий результат П. С. Новикова, полученный в 1943 (см. [5]): пусть для формулы $A(x)$ с одной переменной в конструктивной формальной арифметике выводимо $A(n) \vee \neg A(n)$ для каждого n и в классической арифметике выводимо $\exists x A(x)$; тогда формула $\exists x A(x)$ выводима и в конструктивной арифметике. В работе [6] было получено обоснование К. п. п. в рамках новой системы конструктивной семантики, развиваемой в последние годы А. А. Марковым.

Являясь, по-видимому, наименее непосредственной из первоначальных установок конструктивной математики, К. п. п. принимается нек-рыми сторонниками последней с известными оговорками. К. п. п. отвергается также интуиционистской математикой как недостаточно убедительный интуитивно. С другой стороны, в связи с формализацией ряда разделов интуиционистской математики детально изучались вопросы о соотношениях соответствующих систем с формальными схемами, выражающими К. п. п. В частности, установлена независимость схем (2) и (4) от аксиом интуиционистского исчисления предикатов, арифметики и анализа (см. [2], [7], [8]).

Лит.: [1] Марков А. А., «Успехи матем. наук», 1954, т. 9, в. 3, с. 226—30; [2] его же, в кн.: Тр. 3 Всесоюзного математического съезда, т. 2, М., 1956, с. 146—47; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [4] Шанин Н. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 52, с. 226—311; [5] Новиков П. С., «Матем. сб.», 1943, т. 12, в. 2, с. 231—61; [6] Марков А. А., «Докл. АН СССР», 1974, т. 214, № 4, с. 765—68, т. 215, № 1, с. 57—60; [7] Клини С., Весли Р., Основания интуиционистской математики с точки зрения теории рекурсивных функций, пер. с англ., М., 1978; [8] Troelstra A. S., в кн.: ISILC. Proof theory symposion, B., 1975, p. 370—83.

Б. А. Кушнер.

КОНСТРУКТИВНОЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО — понятие действительного числа, употребляемое в *конструктивной математике.* В более широком смысле — действительное число, конструируемое в соответствии с тем или иным кругом конструктивных средств. Близкое значение имеет термин «вычислимое действительное число», обычно употребляемый в тех ситуациях, когда не ставится цель изначального, нетрадиционного построения континуума, а речь идет просто о классических действительных числах, вычислимых в том или ином смысле посредством нек-рых алгоритмов. (См. также *Конструктивный анализ.*) *Б. А. Кушнер.*

КОНСТРУКТИВНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ — *логическое исчисление*, описывающее способы вывода высказываний, истинных с точки зрения *конструктивной математики*. Обычно этот термин рассматривается как синоним термина *интуиционистское исчисление высказываний.* Однако, при нек-рых специальных интерпретациях конструктивизма интуиционистское исчисление высказываний оказывается неполным. Напр., известная формула Роуза:

$$((\neg\neg A \supset A) \supset (\neg\neg A \vee \neg A)) \supset (\neg\neg A \vee \neg A),$$

где A — формула $\neg p \vee \neg q$, а p, q — пропозициональные переменные, не выводится в интуиционистском исчислении высказываний и в то же время тождественно истинна в интерпретации рекурсивной реализуемости Клини, по крайней мере, если признавать *конструктивного подбора принцип.* Актуальной задачей является исследование полноты К. и. в. для различных вариантов семантики конструктивной математики.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Rose G. F., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 75, p. 1—19. *А. Г. Драгалин.*

КОНСТРУКТИВНОЕ МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — концепция метрич. пространства, используемая в конструктивной математике. Близкий смысл имеет также понятие рекурсивного метрического пространства.

Список $\{\mathfrak{M}, \rho\}$, где $\mathfrak{M}$ — некоторое множество конструктивных объектов (обычно слов в том или ином алфавите), ρ — алгоритм, переводящий любую пару элементов $\mathfrak{M}$ в конструктивное действительное число (к. д. ч., см. *Конструктивный анализ*), наз. К. м. п., если при любых X, Y, $Z \in \mathfrak{M}$ выполняется: 1) $\rho(X, X)=0$, 2) $\rho(X, Y) \leqslant \rho(X, Z)+\rho(Y, Z)$ (здесь и ниже термин «алгоритм» употребляется в смысле одного из точных понятий алгоритма). Множество $\mathfrak{M}$ и алгоритм ρ наз. носителем и метрическим алгоритмом соответствующего К. м. п., а элементы $\mathfrak{M}$ — точками этого К. м. п. Из аксиом 1), 2) следует, что всегда $\rho(X, Y) \geqslant 0$ и $\rho(X, Y)=\rho(Y, X)$. Две точки $X, Y \in \mathfrak{M}$ называются эквивалентными (различными) в К. м. п. $\{\mathfrak{M}, \rho\}$, если $\rho(X, Y)=0$ (соответственно $\rho(X, Y) \neq 0$).

Примеры К. м. п.: а) пространство натуральных чисел H. Носителем H является множество натуральных чисел (натуральные числа трактуются как слова вида 0, 01, 011, ...), а метрич. алгоритм ρ таков, что $\rho(m, n)=|m-n|$. Аналогично определяются пространства R и E_1 — рациональных и конструктивных действительных чисел, соответственно; б) n-мерное евклидово пространство E_n. Носителем E_n является множество слов вида $x_1 * \ldots * x_n$, где x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, есть к. д. ч., а метрич. алгоритм ρ строится так, что

$$\rho(x_1 * \ldots * x_n,\ y_1 * \ldots * y_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2};$$

в) пространство C равномерно непрерывных на единичном сегменте конструктивных функций. Носителем C является множество слов вида $\varepsilon f з * \varepsilon \gamma з$, где f — всюду определенная на единичном сегменте конструктивная функция, а γ — алгоритм, переводящий всякое натуральное число в натуральное число, причем

$$\forall n x_1 x_2 \left((0 \leqslant x_1,\ x_2 \leqslant 1 \& |x_1 - x_2| < 2^{-\gamma(n)}) \supset \right.$$
$$\left. \supset |f(x_1) - f(x_2)| < 2^{-n}\right)$$

($\varepsilon \mathfrak{A} з$ означает запись (код) алгоритма $\mathfrak{A}$). Метрич. алгоритм ρ строится так, что

$$\rho(\varepsilon f_1 з * \varepsilon \gamma_1 з,\ \varepsilon f_2 з * \varepsilon \gamma_2 з) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (|f_1(x) - f_2(x)|).$$

Сложный вид носителя пространства C обусловлен требованием эффективной вычислимости метрики; г) бэровское пространство B общерекурсивных функций. Носителем B является множество гёделевых номеров общерекурсивных функций, а метрич. алгоритм ρ строится так, что если φ_n и φ_m — общерекурсивные функции с номерами n и m, то $\rho(n, m)=0$, если $\varphi_n(i)=\varphi_m(i)$ при любом i, и $\rho(n, m)=2^{-k}$, если $\varphi_n(i)=\varphi_m(i)$ при $i<k$ и $\varphi_n(k)\neq\varphi_m(k)$.

Пусть $M=\{\mathfrak{M}, \rho\}$ — К. м. п. Алгоритм β наз. последовательностью точек M, если при всяком n имеем $\beta(n)\in\mathfrak{M}$. Последовательность β наз. регулярной, если при $m\geqslant n$ имеем $\rho(\beta(m), \beta(n))<<2^{-n}$. Регулярная последовательность β сходится к точке X К. м. п. M, если при любом n имеем $\rho(X, \beta(n))\leqslant2^{-n}$. К. м. п. M наз. полным, если существует алгоритм, находящий для каждой регулярной последовательности β (точек M) точку M, к к-рой сходится β. К. м. п. M наз. сепарабельным, если существуют алгоритмы α, δ такие, что α — последовательность точек M, и при любом $X\in M$ и любом n имеем: $\delta(X*n)$ есть натуральное число, причем $\rho(\alpha(\delta(X*n)), X)<2^{-n}$. Все пространства H, R, E_1, E_n, C, B примеров а) — г) сепарабельны, пространства H, E_1, E_n, C, кроме того, полны. Пример несепарабельного К. м. п. дает рассмотрение подпространства H, индуцированного не рекурсивно перечислимым множеством. В терминах К. м. п. могут быть изложены многие результаты классич. теории метрич. пространств; в частности, большое значение имеет конструктивный вариант теоремы Хаусдорфа, утверждающий, что для каждого К. м. п. может быть построено его пополнение.

Процесс пополнения К. м. п. является сильным средством введения тех или иных структур конструктивной математики. На этом пути вводятся к. д. ч., могут быть определены естественные аналоги классич. понятий измеримых множеств и функций, интегрируемых по Лебегу функций, и т. д. Одной из основных целей теории К. м. п. является исследование алгоритмич. отображений, корректных относительно тех или иных вычислимых метрик.

Пусть $M_1=\{\mathfrak{M}_1, \rho_1\}$, $M_2=\{\mathfrak{M}_2, \rho_2\}$ — К. м. п. Алгоритмическим оператором типа $M_1\dot{\to}M_2$ наз. алгоритм ψ, удовлетворяющий условиям: а) если $X\in\mathfrak{M}_1$ и определено $\Psi(X)$, то $\Psi(X)\in\mathfrak{M}_2$; б) если X, Y — эквивалентные точки M_1 (т. е. $\rho_1(X, Y)=0$) и определено $\Psi(X)$, то определено $\Psi(Y)$, причем $\Psi(X)$, $\Psi(Y)$ — эквивалентные точки M_2. Алгоритмич. операторы типа $E_1\dot{\to}E_1$, $E_n\dot{\to}E_1$ суть конструктивные функции одной и n переменных; алгоритмич. операторы типа $B\dot{\to}H$ принято наз. эффективными функционалами.

Основным результатом теории алгоритмических операторов является теорема Цейтина, утверждающая, что в случае полного сепарабельного К. м. п. M_1 для любого алгоритмич. оператора Ψ типа $M_1\dot{\to}M_2$, при каждом n можно построить алгоритмически (рекурсивно) перечислимое множество шаров, покрывающее область определения Ψ, такое, что колебание Ψ на любом шаре этого множества не превосходит 2^{-n}. Из этой теоремы вытекает известный результат о продолжимости эффективных функционалов до частично-рекурсивных функционалов. Другим важным следствием приведенного результата является теорема о непрерывности алгоритмич. операторов: если M_1 — полное и сепарабельное К. м. п., M_2 — произвольное К. м. п., то по любому алгоритмич. оператору Ψ типа $M_1\dot{\to}M_2$ можно построить алгоритм α такой, что для любых X, Y из области определения Ψ и любого n число $\alpha(X, n)$ есть натуральное, причем из $\rho_1(X, Y)<2^{-\alpha(X, n)}$ следует $\rho_2(\Psi(X), \Psi(Y))<2^{-n}$.

В таком же порядке идей, что и в случае К. м. п., может быть развита теория конструктивных нормированных и гильбертовых пространств.

Лит.: [1] Цейтин Г. С., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1962, т. 67, с. 295—361; [2] Moschovakis G. N., «Fundam. math.», 1964, v. 55, № 3, p. 215—38; [3] Шанин Н. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1962, т. 67, с. 15—294; [4] Кушнер Б. А., Лекции по конструктивному математическому анализу, М., 1973. *Б. А. Кушнер.*

КОНСТРУКТИВНОЕ ПО ГЁДЕЛЮ МНОЖЕСТВО — множество, возникающее в описанном ниже процессе построения множеств. Пусть X — множество и $R \subseteq X \times X$. Рассмотрим язык 1-й ступени $L(R, X)$, содержащий один 2-местный предикатный символ, обозначающий отношение R, и индивидные константы, обозначающие элементы множества X (для каждого $x \in X$ своя константа $\underline{x}$). Суждение «формула φ языка $L(R, X)$ истинна в модели $M=(X, R)$» записывается следующим образом:

$$M \models \varphi.$$

Множество $Y \subseteq X$ наз. определимым в модели $M=(X, R)$ (иначе M-определимым), если существует формула $\varphi(v)$ языка $L(R, X)$ с одной свободной переменной v такая, что

$$\forall x \in X\ (x \in Y \leftrightarrow M \models \varphi(\underline{x})).$$

Пусть Def M обозначает множество всех M-определимых множеств. Каждому ординальному числу α сопоставим множество L_α, определяемое рекурсивным соотношением:

$$L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Def}\,(L_\beta, \in | L_\beta),$$

где $\in | L_\beta$ есть отношение принадлежности, ограниченное множеством L_β. Отсюда следует:

$$L_0 = \varnothing,\ L_1 = \{\varnothing\},\ L_2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},\ \ldots,\ L_{\omega_0} = \bigcup_{n<\omega_0} L_n,\ \ldots$$

Множество z наз. конструктивным, если существует ординал α такой, что $z \in L_\alpha$. Класс всех конструктивных множеств обозначается через L. К. Гёдель (K. Gödel) ввел следующую аксиому конструктивности: всякое множество конструктивно. Он доказал, что в классе L выполняются все аксиомы системы ZF, а также аксиома конструктивности, и что аксиома выбора и обобщенная континуум-гипотеза («для всякого ординала α имеет место $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$») следуют в ZF из аксиомы конструктивности.

Класс L можно охарактеризовать также как наименьший класс, являющийся моделью ZF и содержащий все ординальные числа; имеются и другие определения класса L (см. [2]—[4]). Отношение $x \in L_\alpha$ можно выразить формулой языка ZF и притом простой синтаксической структуры (так наз. Δ_1^{ZF}-формулой, см. [4]).

Среди результатов, относящихся к К. м., упомянем следующие. Множество *конструктивных действительных чисел*, т. е. множество $R \cap L$, где R — множество всех действительных чисел, т. е. последовательностей нулей и единиц, является A_2-множеством (см. [5]). Было показано, что из аксиомы конструктивности вытекает существование неизмеримого по Лебегу множества действительных чисел типа A_2 (см. [6]), отрицание *Суслина гипотезы* и несуществование измеримого кардинала (см. [2]).

Лит.: [1] Гёдель К., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, вып. 1, с. 96—149; [2] Йех Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973; [3] Мостовский А., Конструктивные множества и их применения, пер. с англ., М., 1973; [4] Karp C., A proof of the relative consistency of the continuum Hypothesis, в кн.: Sets models and recursion theory, Amsterdam, 1967; [5] Addison J. W., «Fund. Math.», 1959, v. 46, № 3, p. 337—57; [6] Новиков П. С., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 279—316; [7] Felgner U., Models of ZF-Set theory, B.—Hdlb.—N.Y., 1971 (Lect. notes in mathematics, v. 223). *В. Н. Гришин.*

КОНСТРУКТИВНОЕ ПОДМНОЖЕСТВО алгебраического многообразия — конечное объединение локально замкнутых (в *Зариского топологии*) подмножеств. Локально замкнутым подмножеством наз. пересечение открытого и замкнутого подмножеств. К. п. образуют булеву алгебру и могут быть определены как элементы булевой алгебры, порожденной алгебраич. подмногообразиями. Роль К. п. в алгебраич. геометрии объясняет следующая теорема Шевалле: если $f: X \rightarrow Y$ — морфизм алгебраич. многообразий, то $f(X)$ (и более того, образ любого К. п. из X) является К. п. в Y. С этим фактом связано то, что «алгебраические» условия выделяют конструктивные подмножества алгебраич. многообразий.

Отображение $h: X \rightarrow T$ наз. конструктивным, если $h(X)$ конечно и для любой точки $t \in T$ прообраз $h^{-1}(t)$ есть К. п. в X.

Лит.: [1] Grothendieck A., Éléments de géometrie algébrique, t. 4, P., 1964; [2] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972. *В. И. Данилов.*

КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ, рекурсивный анализ, вычислимый анализ,— название, объединяющее различные течения в основаниях математики и математич. анализе. При развитии К. а., как правило, преследуются обе или вторая из следующих двух принципиальных целей: (1) нетрадиционное построение тех или иных фрагментов анализа на основе более ясных и в большей степени учитывающих реальные вычислительные возможности исходных концепций, нежели теоретико-множественные посылки обычного анализа; (2) изучение эффективности в анализе; введение и изучение вычислимых объектов анализа, в частности исследование вопроса о том, по каким исходным данным можно эффективно находить те или иные вычислимые объекты. В соответствии с этими целями, исследования по К. а. можно грубо разделить на два типа: претендующие и не претендующие на достижение цели (1). Для исследований первого типа характерно либо использование нестандартных логик, либо существенные ограничения в употреблении традиционных логических и математических средств, в то время как в работах второго типа свободно используются традиционная математика и логика. Ко второму типу относятся основополагающие работы (см. [1]—[4]), в к-рых были выработаны современные концепции *вычислимого действительного числа* (см. также [5]—[12]). К первому типу относятся исследования по интуиционистскому анализу (см. *Интуиционизм*), возникшие в связи с выдвинутой Л. Э. Я. Брауэром (L. E. J. Brower) интуиционистской программой построения математики и оказавшие существенное влияние на формирование задач и методов К. а., рекурсивный анализ Р. Л. Гудстейна (R. L. Goodstein, см. [12]), а также оригинальная и чрезвычайно далеко продвинутая система К. а., развитая Э. Бишопом (см. [13]). (Конструктивный анализ Бишопа занимает промежуточное положение между интуиционистским анализом и системами, использующими точные концепции алгоритма.) Своеобразная трактовка К. а. (в частности, теории меры) была предложена в 1970 П. Мартином-Лёфом [14]. В СССР начиная с 50-х гг. в трудах А. А. Маркова, Н. А. Шанина и их учеников (см. [15], [16], [19]) интенсивно разрабатывалась система К. а., относящаяся к первому типу и укладывающаяся в рамки конструктивного направления в математике. Являясь частью *конструктивной математики*, эта система (за к-рой ниже для краткости закрепляется термин «К. а.») сохраняет характерные черты последней. В частности, рассмотрения ограничиваются *конструктивными объектами* (чаще всего словами в нек-рых алфавитах или объектами, допускающими очевидное кодирование словами) и проводятся в рамках *абст-*

ракции потенциальной осуществимости с применением специальной конструктивной логики, вырабатываемой с учетом специфики конструктивных объектов как результатов потенциально выполнимых конечных построений. При этом полностью исключается использование *абстракции актуальной бесконечности*, и интуитивное понятие «эффективности» связывается с одним из точных понятий алгоритма (в большинстве работ, относящихся к рассматриваемой системе К. а., используется понятие нормального алгорифма). В рамках К. а. получено большое число результатов, интересных как с точки зрения круга вопросов (1), так и с точки зрения круга вопросов (2). По существу показана возможность построения средствами конструктивной математики ряда теорий, таких, как теория элементарных функций, теория рядов, интегрирования по Риману и Лебегу, теория функций комплексного переменного, теория обобщенных функций и т. п. Получающиеся конструктивные теории наряду со сходством с одноименными традиционными теориями обладают заметными отличиями от них; впрочем эти отличия проявляются не столько в конкретных вопросах, связанных с приложениями анализа, сколько в теоретич. концепциях (таких, напр., как концепция компактности и т. д.).

Фундаментальными понятиями К. а. являются понятия конструктивного действительного числа и конструктивной функции действительного переменного. Конструктивные действительные числа можно ввести различными (не всегда эквивалентными) способами. Опишем один из таких способов, следующий канторовскому построению классического континуума и приводящий к наиболее употребительной и естественной концепции конструктивного (вычислимого) действительного числа. Сначала вводятся натуральные числа как слова вида 0, 01, 011, ... в двухбуквенном алфавите $\{01\}$. Аналогично определяются рациональные числа как слова нек-рого типа в алфавите $\{01-/\}$. Определяются отношения порядка и равенства над рациональными числами, а также арифметич. операции над ними. Конструктивной последовательностью натуральных чисел (к. п. н. ч.) наз. (нормальный) алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в натуральное число. Аналогичным образом трактуется понятие конструктивной последовательности рациональных чисел (к. п. р. ч.). Схемы нормальных алгорифмов однозначным образом кодируются словами в алфавите $\{01\}$; код данного алгорифма наз. его записью. К. п. н. ч. α наз. регулятором фундаментальности к. п. р. ч. β, если для любых натуральных l, m, n таких, что l, $m \geqslant \alpha(n)$, выполняется неравенство $|\beta(l) - \beta(m)| < 2^{-n}$. К. п. р. ч. наз. фундаментальной, если можно построить ее регулятор фундаментальности. Конструктивными действительными числами (к. д. ч.) наз. рациональные числа, а также слова в алфавите $\{01\diamondsuit\}$ вида $U\diamondsuit V$ ($\diamondsuit$ играет роль разделительного знака), где U — запись некоторой к. п. р. ч., V — запись к. п. н. ч., являющейся регулятором фундаментальности этой к. п. р. ч. Описанное понятие к. д. ч. (предложенное Н. А. Шаниным, см. [20], назвавшим такие к. д. ч. «FR-числами» или «дуплексами») хорошо согласуется с интуитивным представлением о вычислимых действительных числах как объектах, допускающих эффективную сколь угодно точную аппроксимацию рациональными числами. Для к. д. ч. можно определить естественным образом отношения порядка и равенства и арифметич. операции (причем последние задаются алгоритмами). Система к. д. ч. с этими отношениями равенства и порядка и арифметич. операциями оказывается полем. Далее, можно ввести в рассмотрение конструктивные последовательности к. д. ч. (к. п. д. ч.) и определить в том же порядке идей, что и выше, понятие фундаментальной к. п. д. ч. и понятие конструктивной сходимости к. п. д. ч. к данному к. д. ч. Относительно такого понятия сходимости система к. д. ч. оказывается полной: существует алгоритм, находящий, исходя из записи всякой фундаментальной к. п. д. ч. γ и записи ее регулятора фундаментальности, такое к. д. ч., к к-рому (конструктивно) сходится γ (теорема о полноте системы к. д. ч.). Методом, аналогичным канторовскому, можно доказать также теорему о конструктивной несчетности множества всех к. д. ч.: осуществим алгоритм, перерабатывающий запись всякой к. п. д. ч. в к. д. ч., отличное (в смысле равенства к. д. ч.) от всех членов этой к. п. д. ч. Теорема о полноте придает значительное сходство конструктивной и классич. теориям пределов, особенно сильно проявляющееся в вопросах сходимости тех или иных конкретных используемых в анализе последовательностей и рядов. Вместе с тем здесь имеются и существенные отличия, проявляющиеся, напр., в следующем результате Э. Шпеккера (см. [4]): можно построить возрастающую к. п. р. ч. β такую, что всегда $0<\beta(n)<1$ и, несмотря на это, β не является фундаментальной (и, следовательно, не сходится (конструктивно) ни к какому к. д. ч.). Кроме того, из β нельзя выбрать сходящейся (конструктивной) подпоследовательности, и множество значений β не имеет в конструктивном континууме точной верхней границы. Другим напрашивающимся способом введения к. д. ч. является конструктивизация понятия систематической дроби в той или иной системе счисления. Именно, конструктивной m-ичной дробью ($m>1$) наз. (нормальный) алгорифм α такой, что $\alpha(0)$ есть целое число и $\alpha(i)$ при $i>0$ есть натуральное число, причем $0 \leqslant \alpha(i) \leqslant m-1$ (с m-ичной дробью α связывается к. п. р. ч. $\alpha(0)+\sum_{k=1}^{n} m^{-k}\alpha(k)$). Несмотря на простоту такого понятия к. д. ч., оно не получило распространения, поскольку обладает рядом существенных неудобств: напр., не сохраняется теорема о полноте и невозможен алгорифм, осуществляющий сложение любых двух m-ичных дробей.

Понятие конструктивной функции (к. ф.) является естественным уточнением интуитивного понятия точечной вычислимой функции над вычислимыми действительными числами. Конструктивной функцией (одной действительной переменной) наз. (нормальный) алгорифм F такой, что для любых равных к. д. ч. x и y, если F применим к x, то F применим к y и $F(x)$, $F(y)$ суть равные к. д. ч. В терминах к. ф. могут быть введены элементарные функции (показательная функция, тригонометрич. функции и др.), обладающие обычными свойствами; для конструктивных функций могут быть развиты теории дифференцирования, интегрирования по Риману и т. д., близкие к традиционным. Вместе с тем возможны и необычные с традиционной точки зрения функции: напр., построена к. ф., всюду определенная, непрерывная на единичном сегменте и не ограниченная на нем (см. [17]). Не имеет аналогов в традиционном анализе и теорема, согласно к-рой всякая к. ф. конструктивно непрерывна в любой точке, в к-рой она определена (см. [18]).

Система понятий и методы К. а., позволяя существенно продвинуться с точки зрения цели (1), оказались также удобными для выявления вычислительных связей в анализе, поскольку многие теоремы К. а. являются либо утверждениями об осуществимости алгоритмов, строящих нек-рые конструктивные объекты по тем или иным исходным данным, либо утверждениями, что такие алгоритмы невозможны. В настоящее время (к 1978) установлена неразрешимость большого числа естественных массовых проблем анализа. Результаты этого типа (совершенно отсутствующие в курсах традиционного анализа) имеют очевидную теоретич. и практич. ценность, так как они выявляют потенциальные вычислительные тупики и способствуют четкому уяснению принципиальных границ вычислительных возможностей. Так, доказана невозможность следующих алгоритмов (в смысле одного из уточнений понятия алгоритма): 1) распознающего для произвольного конструктивного действительного числа равно оно нулю или нет; 2) находящего для каждой сходящейся к. п. р. ч. то к. д. ч., к к-рому она сходится; 3) находящего для каждой совместной системы линейных уравнений (над полем к. д. ч.) какое-либо ее решение; 4) находящего для каждой непрерывной кусочно линейной знакопеременной функции корень этой функции; 5) находящего для всякой непрерывной кусочно линейной на единичном сегменте функции ее интеграл Римана по этому сегменту. К этому же кругу результатов принадлежит и следующая теорема, полностью решающая вопрос о возможности эффективного перехода от одной системы счисления к другой: алгоритм, находящий для всякой m-ичной конструктивной дроби равную ей n-ичную конструктивную дробь, возможен тогда и только тогда, когда множество простых делителей n содержится в множестве простых делителей m (см. [6]). (В частности, возможен алгоритм перехода от десятичной системы счисления к двоичной, но невозможен алгоритм перехода от двоичной системы к десятичной.) Теоремы о невозможности алгоритмов часто сопровождаются в К. а. теоремами о существовании алгоритмов, решающих рассматриваемые задачи по более полным исходным данным (ср. теорему о полноте к. д. ч. и пример 2)) или с произвольной наперед заданной точностью (напр., можно построить алгоритм, находящий для каждой всюду определенной знакопеременной к. ф. f и каждого n к. д. ч. $x_{f,n}$ такое, что $|f(x_{f,n})| < 2^{-n}$). Сопоставление таких результатов позволяет во многих случаях получить отчетливое представление о том, как можно корректно ставить ту или иную алгоритмич. проблему.

Лит.: [1] Turing A. M., «Proc. London Math. Soc. Ser. II», 1937, v. 42, p. 230—65; v. 43, part 6, p. 544—46; [2] Banach S., Mazur S., «Ann. polon. math.», 1937, v. 16, p. 223; [3] Mazur S., Computable analysis, Warszawa, 1963; [4] Specker E., «J. Symbol. Log.», 1949, v. 14, № 3, p. 145—158; [5] Grzegorczyk A., «Fundam. math.», 1955, v. 42, p. 168—202, 232—39; 1957, v. 44, № 1, p. 61—71; [6] Mostowski A., там же, p. 37—51; [7] Klaua D., Konstruktive Analysis, B., 1961; [8] Kreiscl G., Lacombe D., Schoenfield J. R., «C. r. Acad. sci.», 1957, t. 245, № 4, p. 399—402; [9] Kreisel G., Lacombe D., там же, № 14, p. 1106—1109; [10] Lacombe D., там же, 1955, t. 240, № 26, p. 2478—80; t. 241, № 1, p. 13—14, № 2, p. 151—53, № 19, p. 1250—52; 1957, t. 244, № 7, p. 838—40, № 8, p. 996—97; t. 245, № 13, p. 1040—43; 1958, t. 246, № 1, p. 28—31; [11] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [12] Гудстейн Р. Л., Рекурсивный математический анализ, пер. с англ., М., 1970; [13] Bishop E., Foundations of constructive analysis, N. Y., 1967; [14] Мартин-Лёф П., Очерки по конструктивной математике, пер. с англ., М., 1975; [15] Марков А. А., Теория алгорифмов, М.— Л., 1954; [16] Шанин Н. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1962, т. 67, с. 15—294; [17] Заславский И. Д., там же, с. 385—457; [18] Цейтин Г. С., там же, с. 295—361; [19] Кушнер Б. А., Лекции по конструктивному математическому анализу, М., 1973. *Б. А. Кушнер.*

КОНСТРУКТИВНЫЙ ОБЪЕКТ — название, установившееся за математич. объектами, возникающими в результате развертывания так называемых конструктивных процессов. При описании того или иного конкретного конструктивного процесса обычно «...предполагается, что отчетливо охарактеризованы объекты, которые в данном рассмотрении фигурируют в качестве нерасчленяемых на части исходных объектов; предполагается, что задан список тех правил образования новых объектов из ранее построенных, которые в данном рассмотрении фигурируют в качестве описаний допустимых шагов конструктивных процессов; предполагается, что процессы построения осуществляются отдельными шагами, причем выбор каждого очередного шага произволен в тех границах, которые определяются списком ранее построенных объектов и совокупностью тех правил образования, которые фактически можно применить к ранее построенным объектам» (см. [3], с. 16). Такое описание конструктивного процесса, а тем самым и К. о., разумеется, не может претендовать на то, чтобы быть точным математич. определением. Однако конкретные математич. теории всегда имеют дело лишь с такими конкретными **типами** К. о., к-рые допускают точную характеризацию. Приведенное выше описание К. о. служит в таких ситуациях ориентиром для выбора соответствующих точных определений.

Примером точно определенного типа К. о. могут служить *слова* в к.-л. фиксированном *алфавите* (буквы этого алфавита играют роль исходных объектов; новые слова получаются из уже имеющихся путем приписывания к последним справа букв рассматриваемого алфавита). Другими примерами типов К. о. могут служить конечные *графы*, конечные абстрактные топологические *комплексы*, релейно-контактные схемы (выбор соответствующих исходных объектов и правил образования не представляет труда). Как К. о. могут быть также определены рациональные числа, алгебраические многочлены, *алгоритмы* и *исчисления* различных точно определенных типов, *автоматы конечные*, конечно определенные группы и другие им подобные математич. объекты.

К. о. играют важную роль в тех математич. теориях, в к-рых возникает потребность в рассмотрении объектов, допускающих отчетливое индивидуальное задание средствами той или иной математич. символики. В рамках теоретико-множественной математики, неограниченно использующей *абстракцию актуальной бесконечности*, К. о. и произвольные множества К. о. рассматриваются одновременно и наравне с прочими математич. объектами, среди к-рых К. о. выделяются лишь своей большей «осязаемостью». В рамках *конструктивной математики* К. о. (или объекты, задаваемые ими) представляют собой единственно допускаемый к рассмотрению тип математич. объектов, и рассмотрение их здесь ведется на базе отказа от применения абстракции актуальной бесконечности и на основе специальной *конструктивной логики*, учитывающей, в частности, специфику определения К. о. См. также *Конструктивная математика*.

Лит.: [1] Марков А. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1962, т. 67, с. 8—14; [2] его же, О логике конструктивной математики, М., 1972; [3] Шанин Н. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1962, т. 67, с. 15—294. *Н. М. Нагорный.*

КОНСТРУКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИЯ — один из разделов математики, возникший на границе *моделей теории*, алгебры и теории *рекурсивных функций* и связанный с изучением вопросов эффективности в моделях и алгебрах.

Статья А. И. Мальцева «Конструктивные алгебры» [1] явилась первой обзорной работой по конструктивным моделям, в к-рой были выработаны и систематизированы основные понятия и намечены дальнейшие пути развития этой теории. Большую роль в становлении и развитии этого раздела математики сыграли работы Ю. Л. Ершова и его учеников, в к-рых был решен ряд основных проблем, выработаны новые понятия и определены новые направления в исследовании конструктивных моделей (см. [2]).

Ниже сформулированы основные понятия и результаты К. м. т. Все рассмотрения обычно ведутся в нек-рой фиксированной сигнатуре

$$\sigma_0 \rightleftharpoons \langle P_0^{n_0}, \ \ldots, \ P_k^{n_k}, \ \ldots \rangle_{k < \omega}$$

такой, что функция $f: f(k) \rightleftharpoons n_k$ общерекурсивна. Если рассматриваются алгебраич. системы, то в сигнатуре могут быть и функциональные символы. Используется также сигнатура

$$\sigma_1 \rightleftharpoons \sigma_0 \cup \langle a_0, \ a_1, \ \ldots, \ a_k, \ldots \rangle_{k < \omega},$$

к-рая получается присоединением к σ_0 счетного числа символов для констант. Всегда предполагается, что $n_0 = 2$ и предикат P_0^2 на любой модели определен как равенство. Пусть L_i, $i=0,1$,— совокупность всех формул узкого исчисления предикатов с равенством (P_0^2) сигнатуры σ_i, $i=0,1$, и g — некоторая фиксированная гёделевская нумерация (см. [3]) множества $L_1 (g : N \to L_1)$. Подмножество $S \subseteq L_1$ наз. **разрешимым**, если множество $g^{-1}(S)$ рекурсивно. **Нумерованной моделью** (сигнатуры σ_0) наз. пара $(\mathfrak{M}, \nu)$, где $\mathfrak{M} = \langle M, P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots \rangle_{k<\omega}$ — модель сигнатуры σ_0, а ν — нумерация основного множества M модели $\mathfrak{M}$. Нумерованная модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ наз. **конструктивной моделью**, если множество

$$\bar{D}(\mathfrak{M}, \nu) \leftrightarrows \{\langle k, x_1, \ldots, x_{n_k} \rangle \mid \mathfrak{M} \models P_k^{n_k}(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_{n_k}))\}$$

рекурсивно.

По каждой нумерованной модели $(\mathfrak{M}, \nu)$ можно канонич. образом построить нек-рое **σ_1-обогащение $\mathfrak{M}_\nu$ модели** $\mathfrak{M}$, т. е. модель сигнатуры σ_1, основное множество к-рой есть основное множество модели $\mathfrak{M}$, предикаты из σ_0 в $\mathfrak{M}_\nu$ совпадают с соответствующими предикатами $\mathfrak{M}$, а константы определены следующим образом: в качестве значения a_k, $k < \omega$, полагают элемент $\nu(k) \in M$. Пусть $Th(\mathfrak{M})$ — **элементарная теория модели** $\mathfrak{M}$, т. е. множество всех замкнутых формул сигнатуры σ_0, истинных на модели $\mathfrak{M}$, а $Th(\mathfrak{M}, \nu)$ — элементарная теория нумерованной модели $\mathfrak{M}_\nu$. Нумерованная модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ наз. **сильно конструктивной**, если теория $Th(\mathfrak{M}, \nu)$ разрешима. Непосредственно из определения видно, что сильно конструктивная модель конструктивна.

Одной из основных проблем К. м. т. является проблема существования конструктивных моделей с различными элементарными свойствами, т. е. свойствами, записываемыми на языке узкого исчисления предикатов. В этом направлении получен (к 1978) ряд интересных и важных теорем. Существование широкого класса сильно конструктивных моделей дает следующая теорема: если $T \subseteq L_0$ — разрешимая теория, то существует такая последовательность сильно конструктивных моделей

$$(\mathfrak{M}_0, \nu_0), (\mathfrak{M}_1, \nu_1), \ldots, (\mathfrak{M}_k, \nu_k), \ldots, k < \omega,$$

что: $T = \bigcap_{k<\omega} Th(\mathfrak{M}_k)$; множество $\{\langle x, y \rangle | g(y) \in Th(\mathfrak{M}_x, \nu_x)\}$ является рекурсивным. Было замечено, что существуют формулы, не имеющие конструктивных моделей. Следующие две теоремы дают нек-рые достаточные условия существования конструктивных моделей у теорий с рекурсивно перечислимым множеством аксиом.

Если T — рекурсивно перечислимая $\forall\exists$-теория, имеющая модель $\mathfrak{M}$ с рекурсивно перечислимой $\exists$-теорией, то теория T имеет конструктивную модель.

Теория T конечной сигнатуры $\sigma = \langle P_0^{n_0}, \ldots, P_h^{n_k}, c_0, \ldots, c_l \rangle$ наз. **$\forall$-конечной**, если универсальная теория любого расширения $T' \supseteq T$ (той же сигнатуры) конечно аксиоматизируема (универсальными предложениями). Теория T наз. **сильно $\forall$-конечной**, если для любого конечного множества $\langle c_{l+1}, \ldots, c_N \rangle$ константных символов теория T^*, определенная теорией T в языке сигнатуры $\sigma^* = \sigma \cup \langle c_{l+1}, \ldots, c_N \rangle$, является $\forall$-конечной.

Если теория T сильно $\forall$-конечна, а T' — рекурсивно перечислимое расширение T, то T' имеет конструктивную модель.

Другой круг исследуемых вопросов связан с проблемой существования для заданной модели $\mathfrak{M}$ нумерации ν такой, чтобы пара $(\mathfrak{M}, \nu)$ стала (сильно) конструктивной моделью. Модель, для к-рой существует такая нумерация, наз. (сильно) конструктивизируемой, а соответствующая нумерация (сильной) конструктивизацией. Для решения ряда вопросов, связанных с конструктивизируемостью моделей, оказывается полезной теорема Ершова о ядре, применение к-рой к конкретным алгебраич. системам позволяет решить ряд естественных вопросов. В частности, установлено: 1) для любой конструктивной локально нильпотентной группы без кручения существует конструктивное пополнение; 2) если (F, ν) — конструктивное поле, F_0 — алгебраич. расширение поля F, то ν продолжается до конструктивизации поля F_0 тогда и только тогда, когда семейство конечных множеств многочленов над F от счетного числа переменных, имеющих корень в F, рекурсивно перечислимо.

Большой класс конструктивизируемых моделей дает следующая теорема: любая счетная модель $\aleph_1$-категоричной разрешимой теории сильно конструктивизируема. Интересным является вопрос о (сильной) конструктивизируемости специальных моделей полных теорий, в частности простых и универсальных. Найдены необходимые и достаточные условия (сильной) конструктивизируемости простой (и счетной насыщенной) модели полной теории; построены примеры полных теорий с неконструктивизируемыми простой и универсальной моделями. Доказано, что простая модель полной разрешимой теории, имеющей сильно конструктивизируемую универсальную модель или конечное число попарно неизоморфных счетных моделей, всегда сильно конструктивизируема.

Изучался вопрос о числе неэквивалентных конструктивизаций для данной модели. Две конструктивизации ν и μ модели $\mathfrak{M}$ наз. (рекурсивно) эквивалентными, если существуют изоморфизм $\varphi (\varphi = id_{\mathfrak{M}})$ и рекурсивная функция f такие, что $\varphi\nu = \mu f$. Модель наз. (рекурсивно устойчивой) автоустойчивой, если любые две ее конструктивизации (рекурсивно) эквивалентны.

Для широкого класса алгебраич. систем показано, что существует либо только одна (с точностью до эквивалентности), либо счетное число неэквивалентных конструктивизаций [4], [5]. Полностью решен вопрос о числе неэквивалентных конструктивизаций и описаны автоустойчивые модели для полей, булевых алгебр и абелевых групп без кручения. А также показано, что вопросы автоустойчивости связаны с изучением вычислимости классов конструктивных моделей.

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, № 3, с. 3—60; [2] Ершов Ю. Л., Теория нумераций, ч. 3 — Конструктивные модели, Новосиб., 1974; [3] Ершов Ю. Л. и др., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, № 4, с. 37—108; [4] Гончаров С. С., «Алгебра и логика», 1975, т. 14, № 6, с. 647—80; [5] Нуртазин А. Т., там же, 1974, т. 13, № 3, с. 311—23; [6] Cobham A., в кн.: Summaries of talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic Cornell University. 1957, Wash., 1960, p. 391—95; [7] Fröhlich A., Shepherdson J. C., «Phil. Trans. Royal Soc. London», 1956, ser. A, v. 248, p. 407—32; [8] Mostowski A., «Fundam. math.», 1955, v. 42, № 1, p. 125—40; [9] Rabin M. O., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1960, v. 95, № 2, p. 341—60; [10] Vaught R. L., «J. Symb. Logic», 1960, v. 25, № 1, p. 39—53.

С. С. Гончаров.

КОНТАКТНАЯ СТРУКТУРА — *инфинитезимальная структура* 1-го порядка на гладком многообразии M^{2n+1} нечетной размерности, к-рая определяется заданием на M^{2n+1} такой 1-формы α, что $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$. Здесь α наз. контактной формой на M^{2n+1}. К. с. существует только на ориентируемом M^{2n+1} и определяет единственное векторное поле Y на M^{2n+1} такое, что $\alpha(Y) = 1$ и $d\alpha(Y, X) = 0$ для любого векторного поля X; поле Y наз. динамич. системой на M^{2n+1}, соответствующей контактной форме α. К. с. находит применения в аналитич. механике благодаря тому, что на любом подмногообразии уровня гамильтониана, заданного на фазовом пространстве, возникает естественная К. с.

Лит.: [1] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973.

Ю. Г. Лумисте.

КОНТАКТНАЯ СХЕМА — специальная управляющая система, одна из математических моделей реальных устройств, построенных из контактов реле. К. с. — модельный класс управляющих систем, и для него рассматриваются все те же задачи, что и для прочих классов управляющих систем; он особенно удобен при изучении «геометрических» свойств управляющих систем.

К. с. получается в результате приписывания каждому ребру нек-рого графа с выделенными вершинами одной из букв конечного алфавита $\{x_1, \bar{x}_1, \ldots, x_n, \bar{x}_n\}$. Выделенные вершины наз. полюсами схемы. Ребро с приписанной ему буквой x_i $(\bar{x}_i)$ наз. замыкающим (размыкающим) контактом. Последовательность контактов между полюсами a и b схемы S, соответствующая простой цепи (см. *Граф*) в графе схемы S, наз. цепью между полюсами a и b схемы S; конъюнкция соответствующих букв наз. проводимостью данной цепи. Проводимость между полюсами a и b схемы есть функция алгебры логики $f_{ab}(x_1, \ldots, x_n)$, равная дизъюнкции проводимостей всех цепей между этими полюсами (в случае, если множество цепей между a и b пусто, $f_{ab}\equiv 0$; при a, совпадающем с b, $f_{aa}\equiv 1$). Всякой К. с. сопоставляется матрица проводимостей $\|f_{ab}\|$, элементами к-рой являются проводимости между парами полюсов. При этом $f_{ab}\cdot f_{bc}\leqslant f_{ac}$. Обратно, если задана матрица из функций алгебры логики $\|f_{ab}\|$ такая, что $f_{aa}=1$, $f_{ab}=f_{ba}$ и $f_{ab}\cdot f_{bc}\leqslant f_{ac}$ для любых a, b, c, то существует К. с. с данными полюсами, для которых проводимости совпадают с заданными f_{ab}. В частности, для любой f существует двухполюсная схема, проводимость между полюсами к-рой равна f. В этом случае говорят, что схема реализует функцию f. Напр., схема рис. 1 реализует линейную функцию $f=x_1+\ldots+x_n+1 \pmod 2$. Всякая функция алгебры логики реализуема некоторой К. с.

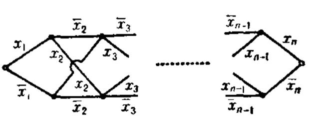


Рис. 1.

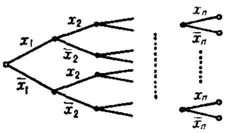


Рис. 2.

Иногда в К. с. множество всех полюсов разбито на два подмножества — входов и выходов. К. с. с r входами и s выходами называется контактным (r, s)-полюсником. К. с., проводимости между любыми парами выходов (входов) которой равны нулю, называется разделительной относительно выходов (входов). Примером разделительного (относительно выходов) $(1, 2^n)$-полюсника может служить контактное *дерево* (рис. 2). К. с. наз. плоской, если соответствующий ей граф, дополненный источниковым ребром (т. е. ребром, соединяющим полюсы, к-рому не приписана никакая буква рассматриваемого алфавита), является плоским (см. *Граф плоский*). Плоская К. с. S^* наз. двойственной к плоской К. с. S, если граф Γ^* схемы S^* (с источниковым ребром) является двойственным к аналогичному графу Γ схемы S, причем источниковому ребру графа Γ соответствует таковое в графе Γ^*, а остальные соответствующие друг другу ребра несут одинаковые буквы (рис. 3). Схемы S и S^* имеют одинаковое число контактов и реализуют двойственные функции (принцип двойственности). При замене

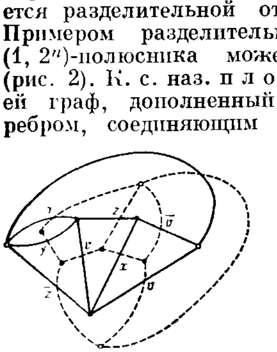


Рис. 3.

контактов в схеме S^* на противоположные получается схема для отрицания функции, реализуемой схемой S. Для неплоских К. с., вообще говоря, не существует возможности перехода к схемам с тем же числом контактов, реализующим двойственные функции. П-схема (параллельно-последовательная схема) может быть определена индуктивно: К. с., состоящая из единственного контакта, соединяющего полюсы, есть П-схема; К. с., построенная из двух П-схем, соединенных параллельно или последовательно, есть П-схема. Существуют К. с., не являющиеся П-схемами, напр. схема рис. 4. К. с., двойственная к П-схеме, есть П-схема. Существует соответствие между П-схемами и формулами в базисе $\{\&, \vee, {}^{-}\}$. При этом всякая П-схема реализует ту же самую функцию, что и соответствующая ей формула, и содержит столько же контактов, сколько букв содержит формула. Напр., схеме рис. 5 соответствует ф-ла

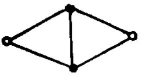


Рис. 4.

$$(x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2)(x_3x_4 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4) \vee (x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2)(x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3x_4).$$

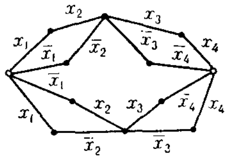


Рис. 5.

Под сложностью К. с. понимается число всех ее контактов. Минимальное число контактов, достаточное для реализации контактной схемой произвольной функции алгебры логики, зависящей от n переменных, асимптотически равно $2^n/n$; минимальное число контактов, достаточное для реализации П-схемой, асимптотически равно $2^n/\log n$ (см. *Синтеза задачи*).

Две К. с. наз. эквивалентными (при заданном взаимно однозначном соответствии между их полюсами), если проводимости между любой парой соответствующих полюсов этих схем совпадают. При замене в любой К. с. S любой ее подсхемы S' на эквивалентную получается схема, эквивалентная S. (При замене необходимо рассматривать как полюсы S' все попавшие в S' полюсы S и все вершины S', инцидентные не попавшим в S' контактам S.) Если S_1, S_2 — эквивалентные К. с., то правило $S_1 \leftrightarrow S_2$ эквивалентного преобразования К. с. разрешает в любой схеме заменить подсхему, полученную из S_1 (или S_2) переименованием букв, на К. с., полученную из $S_2(S_1)$ тем же переименованием. Для каждого n существует конечная полная система правил (рис. 6), позволяющая переводить друг в друга любые эквивалентные К. с. с числом переменных, не превосходящим n. Для класса же всех К. с. (без ограничения числа переменных) конечной полной системы правил не существует (если при применении правил допускать только переименования букв).

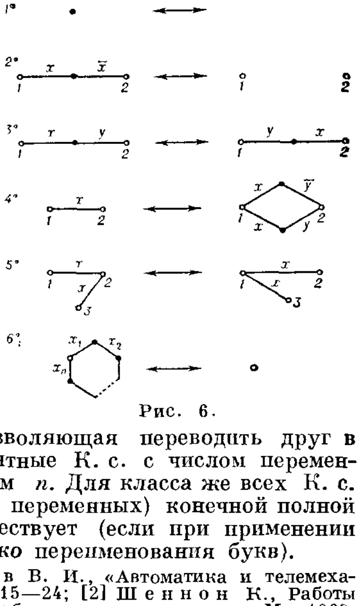


Рис. 6.

Лит.: [1] Шестаков В. И., «Автоматика и телемеханика», 1941, т. 6, № 2, с. 15—24; [2] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 9—45; [3] Nakasima A., «Nippon Electr. Comm. Eng.», 1938, №№ 9, 10, 13, 14; [4] Яблонский С. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 51, с. 5—142; [5] Кузнецов А. В., там же, с. 174—85; [6] Чегис И. А., Яблонский С. В., там же, с. 270—360; [7] Лупанов О. Б., «Проблемы кибернетики», 1963, в. 10, с. 63—97; [8] Мурский В. Л., там же, 1961, в. 5, с. 61—76.

Н. А. Карпова.

КОНТАКТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование кривых на плоскости, при к-ром касающиеся кривые переходят в касающиеся же кривые. Аналогично определяется К. п. поверхностей в пространстве. Простейший пример К. п. — *Лежандра преобразование*.

Более общо, контактное преобразование — такой диффеоморфизм f контактного многообразия (т. е. многообразия M^{2n+1}, снабженного *контактной структурой* с формой η), что $f^*\eta=\sigma\eta$, где σ — ненулевая функция на M^{2n+1}. При $\sigma=1$ f наз. строго контактным преобразованием. Векторное поле X на контактном многообразии наз. контактным (строго контактным) инфинитезимальным преобразованием, если $L_X\eta=\tilde{\sigma}\eta$, ($L_X\eta=0$), где L_X — *Ли производная* вдоль X. К. п. иногда наз. преобразованиями прикосновения.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.— Л., 1947; [2] Эйзенхарт Л. П., Непрерывные группы преобразований, пер. с англ., М., 1947; [3] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959; [4] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1967, М., 1969, с. 127—188. *М. И. Войцеховский.*

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ — задачи распространения тепла (стационарные и нестационарные для эллиптич. и параболич. уравнений соответственно) в случае, когда вещество является термически неоднородным — состоит из нескольких частей с различными коэффициентами теплопроводности k, теплоемкости c и плотности ρ. Входящие в дифференциальное уравнение коэффициенты k, c, ρ, имеют разрывы 1-го рода, что приводит к задачам со слабыми разрывами решений — непрерывной температурой T и разрывными ее производными. Однако поток тепла w задается непрерывным.

Пусть, напр., имеется одномерное по x, $0<x<l$, уравнение теплопроводности

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) \qquad (1)$$

и пусть в точке $0<x=x^0<l$ функции $k(x)$, $c(x)$, $\rho(x)$ имеют разрыв 1-го рода

$$[k]\equiv k(x^0+0)-k(x^0-0)\neq 0,\ [c\rho]\neq 0.$$

Тогда в точке $x=x^0$ должны выполняться условия (см. [1], [2]) непрерывности температуры T и потока $w=-k(x)\partial T/\partial x$ (условия сопряжения)

$$[T]=0,\quad [w]=0,\quad t\geqslant 0. \qquad (2)$$

В других точках отрезка температура $T(x, t)$ должна удовлетворять уравнению (1) при $t>0$, начальным условиям при $t=0$, а также граничным условиям при $x=0$, $x=l$, $t>0$.

В многомерном случае для параболич. уравнения

$$\cos(x,\ t)\rho(x,\ t)\frac{\partial T}{\partial t}=\sum\nolimits_{\alpha,\ \beta=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x,\ t)\frac{\partial T}{\partial x_\beta}\right)+$$
$$+\sum\nolimits_{\alpha=1}^{p}b_\alpha(x,\ t)\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}-q(x,\ t)\,T+f(x,\ t),$$
$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p)$$

на поверхности Γ^0 разрыва коэффициентов также ставятся условия (2) непрерывности функции T и потока

$$w=\sum\nolimits_{\alpha,\ \beta=1}^{p}k_{\alpha\beta}(x,\ t)\frac{\partial T}{\partial x_\beta}\cos(\widehat{n^0,\ x_\alpha}),$$

где n^0 — нормаль к поверхности Γ^0 (см. [3], [4]).

В стационарном случае ($\partial T/\partial t\equiv 0$) условия (1) на разрыве сохраняются. Иногда ставятся более общие условия сопряжения (см. [2], [4]). Так, в одномерном случае рассматриваются условия

$$[T]=r(t),\ [a\partial T/\partial x]=h(t),\ x=x^0,\ t\geqslant 0.$$

К К. з. т. т. относится также задача о распределении тепла в средах, агрегатное состояние к-рых может меняться при определенном значении температуры T^* (температуры фазового перехода) с выделением или поглощением теплоты фазового перехода λ (з а д а ч а С т е ф а н а [5]). На искомой границе $x=x^0(t)$ раздела фаз в одномерном случае ставятся условия

$$T(x^0(t)+0,\ t)=T(x^0(t)-0,\ t)=T^*,$$

$$\left[k\frac{\partial T}{\partial x}\right]=\lambda\frac{dx^0}{dt}.$$

Имеется большое число контактных задач для системы уравнений теплопроводности и газовой динамики, магнитной гидродинамики.

Лит.: [1] С а м а р с к и й А. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 2, с. 225—28; [2] К а м ы н и н Л. И., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 5, с. 1071—1105; [3] О л е й н и к О. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 1, с. 3—20; [4] К а м ы н и н Л. И., «Дифференциальные уравнения», 1967, т. 3, № 6, с. 948—964; [5] Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972; [6] Л а д ы ж е н с к а я О. А., С о л о н н и к о в В. А., У р а л ь ц е в а Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967. *И. В. Фрязинов.*

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ — задачи распределения деформации и напряжения в системе твердых тел, имеющих общие участки границ (поверхности соприкосновения). В общей постановке результаты по контактной задаче (к. з.) ограничиваются теоремами существования и нек-рыми приближенными способами решения. Более полные результаты относятся к тому случаю, когда одно из контактирующих тел является упругой полуплоскостью (или полупространством), а другое — абсолютно жестким телом, вдавливаемым в полуплоскость (полупространство) заданными силами (задачи о штампах). Вне основания штампа, приходящего в соприкосновение с упругим телом, на границе последнего граничные условия могут задаваться, из числа допустимых, произвольно, а на участке под штампом граничные условия формулируются в зависимости от характера контакта. Так, если упругое тело жестко сцеплено с прижимаемым к нему твердым телом, под штампом могут считаться заданными перемещения; если же допускается скольжение упругого тела по контактной поверхности жесткого штампа, то под штампом известны нормальная составляющая перемещения и нек-рое линейное соотношение между нормальным и касательным напряжением, зависящее от коэффициента трения (закон Кулона). Могут реализоваться и другие граничные условия. Все случаи упругого полупространства (полуплоскости) приводят к смешанной задаче с различными граничными условиями на различных участках границы. Развитие методов решения этих задач, включая тот случай, когда оба контактирующих тела являются упругими, составляет содержание работ, посвященных задачам о штампах. Эти методы близки друг другу и в плоской задаче, в конечном счете, сводятся к методу сопряжения кусочно голоморфных функций (метод задачи Римана — Гильберта), с помощью к-рого к. з. решаются в квадратурах. Задача о соприкосновении двух упругих тел в трехмерном случае была впервые поставлена и решена Г. Герцем (H. Hertz), к-рый считал площадку соприкосновения весьма малой, а уравнения недеформированных поверхностей вблизи места соприкосновения — уравнениями поверхностей 2-го порядка. При этом оказалось возможным воспользоваться одной электростатич. аналогией, и функция, выражающая давление на участке контакта, была найдена в виде электростатич. потенциала нек-рого эллипсоида. В плоском случае задача Герца приводится к уравнению Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b p(t)\ln|t-t_0|\,dt=f(t_0)+C,$$

где $p(t)$ — искомое давление одного тела на другое в точке t участка соприкосновения ab, а $f(t)$ — заданная функция; эта же задача приводится к разрешимому в замкнутом виде сингулярному интегральному уравнению.

В общей постановке к. з. формулируются следующим образом.

Задача I. Пусть в бесконечном изотропном упругом теле с постоянными Ламе λ_0, μ_0 имеются m упругих изотропных изолированных включений с постоянными λ_k, μ_k, $k=1, \ldots, m$, ограниченных гладкими поверхностями S_k произвольной конфигурации. Считая включения жестко сцепленными с основной средой вдоль контактных поверхностей S_k, требуется определить напряженное состояние тела под влиянием заданных объемных сил.

Задача II. В конечном изотропном упругом теле с произвольной гладкой границей S_0 и постоянными λ_0, μ_0 имеется m упругих изотропных изолированных включений, ограниченных поверхностями S_k, $k=1, \ldots, m$, жестко сцепленных с несущей средой вдоль S_k. Требуется найти упругое состояние тела, возникающее под действием заданных объемных сил и заданных граничных условий на S_0.

Эти же задачи ставятся для анизотропных тел, а также при других допущениях относительно характера контактов вдоль S_k, $k=1, \ldots, m$. Для указанных задач доказаны теоремы существования, в изотропном случае — методом сингулярных потенциалов и сингулярных интегральных уравнений, для анизотропных тел — методами функционального анализа.

В изотропном случае найдены также способы приближенного решения в квадратурах. Пусть x, y — точки трехмерного пространства E_3, D_k — область, ограниченная поверхностью S_k, $D^+=\bigcup_{k=1}^m D_k$, $D^-=E_3 \diagdown \bar{D}^+$, $\Gamma^k(x-y)$ — матрица размера 3×3 фундаментальных решений для области D_k, $k=1, \ldots, m$, $\Gamma^0(x-y)$ — та же матрица для области D^-, $u(x)$ — вектор смещения в точке x, T — оператор напряжения, $Tu(x)$ — вектор напряжения, соответствующий смещению u в точке x, $T\Gamma_p^k(x-y)$, $p=1, 2, 3,$— вектор напряжения, соответствующий смещению $\Gamma_p^k(x-y)$ в области D_k для $x\neq y$, $T\Gamma^k(x-y)$ — матрица размера 3×3, составленная из $T\Gamma_p^k(x-y)$, $p=1, 2, 3$, как из столбцов, $(T\Gamma^k(x-y))'$ — союзная матрица; $M^k(x, y)$ и $M^0(x, y)$ — прямоугольные матрицы размера 3×6, определенные следующим образом

$$M^k(x, y)=$$

$$=\begin{cases} \| (T\Gamma^k(x-y))', \ -\Gamma^k(x-y) \|_{3\times 6}, & \\ & y\in S_k, \ k=1, \ \ldots, m, \ x\in E_3, \\ 0 & y\in S_j, \ j=1, \ \ldots, m, \ j\neq k, x\in E_3, \end{cases}$$

$$M^0(x, y)=\| (T\Gamma^0(x-y))', \ -\Gamma^0(x-y) \|_{3\times 6},$$

$$y\in \bigcup_{k=1}^m S_k, \quad x\in E_3.$$

Задача I, без ограничения общности, есть задача об определении смещения из условий

$$\forall x\in D_k: \mu_k \Delta u + (\lambda_k+\mu_k) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0,$$

$$\forall x\in D^-: \mu_0 \Delta u + (\lambda_0+\mu_0) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = \Phi^0(x),$$

$$\forall y\in S_k: \lim_{D^+\ni x\to y} u(x) = \lim_{D^-\ni x\to y} u(x),$$

$$\lim_{D^+\ni x\to y} Tu(x) = \lim_{D^-\ni x\to y} Tu(x), \quad k=1, \ \ldots, m.$$

Пусть значения пределов с обеих сторон контактных границ для $u(x)$ и $Tu(x)$ обозначены через $u(y)$, $Tu(y)$,

$y \in \bigcup_{k=1}^{m} S_k$, тогда для регулярного решения:

$$\left.\begin{aligned} \delta_k(x)\,u(x) = \int_{S_k} \Gamma^k(x-y)\,Tu(y)\,d_yS - \\ - \int_{S_k} (T\Gamma^k(x-y))'\,u(y)\,d_yS,\ k=1,\ \dots,\ m; \\ \delta(x)\,u(x) = \int_{\bigcup_{i=1}^m S_i} \Gamma^0(x-y)\,Tu(y)\,d_yS - \\ - \int_{\bigcup_{i=1}^m S_i} (T\Gamma^0(x-y))'\,u(y)\,d_yS - F(x), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где

$$F(x) = \int_D \Gamma^0(x-y)\,\Phi^0(y)\,dy,\ \delta_k(x) = 2$$

для $x \in D_k$ и $\delta_k(x) = 0$ для $x \in E_3 \setminus \bar{D}_k$, а $\delta(x) = 0$ для $x \in \bigcup_{i=1}^m D_i$ и $\delta(x) = 2$ для $x \in D^-$.

Формулы (1) могут быть записаны в виде:

$$\forall x \in E_3 \setminus \overline{D_k}: \int_{\bigcup_{i=1}^m S_i} M^k(x,y)\,\lambda(y)\,d_yS = 0,\ k=1, \dots, m;$$

$$\forall x \in \bigcup_{i=1}^m D_i: \int_{\bigcup_{i=1}^m S_i} M^0(x,\ y)\,\lambda(y)\,d_yS = F(x),$$

где $\lambda(y) = (u(y),\ Tu(y))$ — шестимерный вектор. Первое из этих равенств верно для всех x, принадлежащих $E_3 \setminus \bar{D}_k$, а второе — для всех x, принадлежащих $\bigcup_{i=1}^m D_i$. Соответствующие произвольно заданные значения переменной x приводят к бесконечному множеству равенств

$$\left.\begin{aligned} \int_{\bigcup_{i=1}^m S_i} M^k(\xi_j,\ y)\,\lambda(y)\,d_yS = 0, \\ k=1,\ \dots,\ m;\ \xi_j \in E_3 \setminus \overline{D_k},\ j=1,\ 2,\ \dots, \\ \int_{\bigcup_{i=1}^m S_i} M^0(\xi_j^1,\ y)\,\lambda(y)\,d_yS = F(\xi_j^1),\ \dots \\ \dots, \int_{\bigcup_{i=1}^m S_i} M^0(\xi_j^m,\ y)\,\lambda(y)\,d_yS = F(\xi_j^m), \\ \xi_j^h \in D_h,\ h=1,\ \dots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \dots . \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Пусть $\{\varphi^n(y)\}_0^\infty$ — множество шестимерных векторов

$$(T\Gamma_p^1(\xi_j-y),\ -\Gamma_p^1(\xi_j-y)),\ \dots,\ (T\Gamma_p^m(\xi_j-y),\ -\Gamma_p^m(\xi_j-y)),$$
$$(T\Gamma_p^0(\xi_j^1-y),\ -\Gamma_p^0(\xi_j^1-y)),\ \dots$$
$$\dots,\ (T\Gamma_p^0(\xi_j^m-y),\ -\Gamma_p^0(\xi_j^m-y)),$$
$$y \in \bigcup_{i=1}^m S_i,\quad p=1,\ 2,\ 3,$$

соответственно пронумерованное, напр., по диагональному правилу. Это множество линейно независимо и полно в $\mathscr{L}_2(\bigcup_{i=1}^m S_i)$. В левых частях равенств (2) стоят скалярные произведения $(\lambda,\ \varphi^n)$ для любого значения индекса n в качестве составляющих заданных векторов и, следовательно, эти произведения также заданы. Вследствие полноты $\{\varphi^n(y)\}_0^\infty$ в $\mathscr{L}_2(\bigcup_{i=1}^m S_i)$ неизвестный вектор $\lambda = (u,\ Tu)$ может быть аппроксимирован линейной комбинацией $\sum_{n=1}^N a_n^N \varphi^n(y)$, если постоянные a_n^N найдены из условия минимума нормы

$$\left\| \lambda(y) - \sum_{n=1}^N a_n^N \varphi^n \right\|_{L_2\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)}.$$

Это приводит к системе линейных алгебраич. уравнений

$$\sum_{s=1}^N a_s^N (\varphi^s,\ \varphi^n) = (\lambda,\ \varphi^n),\ n=1,\ \dots,\ N,$$

к-рая разрешима. N-е — приближение $\lambda^N(y)$ для вектора $\lambda(y)$ выражается формулой $\lambda^N(y) = \sum_{n=1}^N a_n^N \varphi^n(y)$.

Подстановка первых трех составляющих $\lambda^N(y)$, как вектора, вместо $u(y)$, а вторых трех составляющих вместо $Tu(y)$ под интегралами в (1), приводит к приближенному решению в квадратурах задачи I. Точное решение есть равномерный при $N \to \infty$ предел приближенного в произвольной внутренней точке области.

Формулы для решения задачи II остаются теми же, с одним изменением: вместо матрицы $\Gamma^0(x-y)$ используется тензор Грина для полной области, ограниченной поверхностью S_0, соответствующей заданным на S_0 граничным условиям.

Лит.: [1] Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966; [2] Галин Л. А., Контактные задачи теории упругости, М., 1953; [3] Штаерман И. Я., Контактная задача теории упругости, М.—Л, 1949; [4] Купрадзе В. Д. и др., Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, 2 изд., М., 1976; [5] Фикера Г., Теоремы существования в теории упругости, пер. с англ., М., 1974.

В. Д. Купрадзе.

КОНТИНГЕНЦИЯ подмножества E евклидова пространства в точке $A \in E$ — объединение лучей $\overrightarrow{AB}$ с началом A таких, что существует последовательность точек $B_n \in E$, сходящаяся к A, и последовательность лучей $\overrightarrow{AB_n}$ сходится к $\overrightarrow{AB}$; обозначается contg (E, A). Для m-мерного дифференцируемого многообразия E contg(E, A) совпадает с m-мерной плоскостью, касательной к E в точке A. Понятие оказалось полезным при изучении дифференциальных свойств функций. Если для любой точки A плоского множества E contg(E, A) не совпадает со всей плоскостью, то E распадается на счетное число частей, расположенных на спрямляемых кривых. Эта теорема неоднократно обобщалась и уточнялась, напр. множество конечной p-меры Хаусдорфа $p=1, \ldots, n-1$, расположенное в n-мерном евклидовом пространстве, распадается на счетное число частей, одна из к-рых имеет нулевую меру Фавара порядка p, а каждая из остальных расположена на нек-рой липшицевой поверхности размерности p; для почти всех $x \in E$ в смысле p-меры Хаусдорфа contg (E, A) является плоскостью размерности p, если все вариации множества E конечны и, начиная с $(p+1)$-й, равны нулю.

Лит.: [1] Bouligand G., Introduction à la gèométrie infinitésimale directe, P., 1932; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Federer H., Geometric measure theory, B., 1969; [4] Иванов Л. Д., Вариации множеств и функций, М., 1975.

Л. Д. Иванов.

КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ — см. *Интеграл по траекториям.*

КОНТИНУУМ — непустое связное хаусдорфово *бикомпактное пространство.* К. наз. **вырожденным**, если он состоит из одной точки. Особо важным является класс метризуемых К. Примеры К.: замкнутый отрезок, окружность, выпуклый многогранник и т. д. Компакт (X, ρ) (т. е. метризуемый бикомпакт с метрикой ρ) есть К. в том и только в том случае, если для каждой пары точек $a, b \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечная ε-цепь, соединяющая эти точки, т. е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^k$ точек в X такая, что $x_1 = a$, $x_k = b$ и $\rho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$. Объединение двух К., имеющих общую точку, есть К. Топологич. произведение К. есть К., непрерывный образ К. есть К., компоненты бикомпакта суть К., пересечение убывающей последовательности К. есть К. Никакой К. нельзя разложить в объединение счетного семейства непересекающихся замкнутых множеств (**теорема Серпиньского**).

Каждый локально связный метрич. К. является непрерывным образом замкнутого отрезка (**теорема Хана — Мазуркевича**). Невырожденный К. **неприводим** между двумя своими точками, если никакой его собственный подконтинуум не содержит этих двух точек К., неприводимый между некоторыми двумя своими точками, наз. **неприводимым континуумом.** Всякий локально связный неприводимый К. есть простая дуга, т. е. гомеоморфен отрезку.

Невырожденный К. наз. **неразложимым,** если его нельзя представить в виде суммы двух собственных подконтинуумов, и — **наследственно неразложимым,** если неразложим он сам, и неразложимы все его подконтинуумы. К. неразложим тогда и только тогда, когда в нем существуют три такие точки, что он неприводим между любыми двумя из них; все наследственно неразложимые К. гомеоморфны между собой.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 2, М., 1969. *П. С. Александров, Л. Г. Замбахидзе.*

КОНТИНУУМА МОЩНОСТЬ — *кардинальное число* $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$, являющееся мощностью множества всех подмножеств натуральных чисел. Следующие множества имеют К. м.: 1) множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, 2) множество всех точек интервала (0, 1); 3) множество всех иррациональных чисел из этого интервала, 4) множество всех точек пространства $\mathbb{R}^n$, где n — натуральное; 5) множество всех трансцендентных чисел; 6) множество всех непрерывных функций действительного переменного К. м. нельзя представить в виде счетной суммы меньших кардинальных чисел. Для любого кардинального числа α такого, что $2\leqslant\alpha\leqslant\mathfrak{c}$, выполняется

$$\alpha^{\aleph_0}=\mathfrak{c}.$$

В частности,

$$2^{\aleph_0}=3^{\aleph_0}=\ldots=\aleph_0^{\aleph_0}=\aleph_1^{\aleph_0}=\mathfrak{c}^{\aleph_0}=\mathfrak{c}.$$

Континуум-гипотеза утверждает, что К. м. является первым несчетным кардинальным числом, т. е.

$$\mathfrak{c}=\aleph_1.$$

Лит.: [1] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970. *Б. А. Ефимов.*

КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗА — гипотеза Г. Кантора (G. Cantor, 1878), состоящая в том, что всякое бесконечное подмножество континуума $\mathbb{R}$ равномощно либо множеству натуральных чисел, либо $\mathbb{R}$. Эквивалентная формулировка (при наличии *выбора аксиомы*):

$$2^{\aleph_0}=\aleph_1$$

(см. *Алефы*). Обобщение этого равенства на произвольные кардинальные числа наз. **обобщенной континуум-гипотезой:** для всякого ордиального числа α

$$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}. \tag{1}$$

В отсутствии аксиомы выбора обобщенная К.-г. формулируется в виде

$$\forall k \urcorner \exists m\,(k<m<2^k), \tag{2}$$

где k, m — переменные для бесконечных кардинальных чисел. Из (2) вытекают аксиома выбора и (1), а из (1) и аксиомы выбора вытекает (2).

Д. Гильберт (D. Hilbert) в своем знаменитом списке проблем поставил под номером 1 проблему доказать гипотезу континуума Кантора (**проблема континуума**). В рамках традиционного теоретико-множественного решения проблема не поддавалась решению. Среди математиков росло убеждение в принципиальной неразрешимости проблемы континуума. Лишь после того, как был найден способ сведения математич. понятий к теоретико-множественным, выявлены аксиомы, сформулированные на теоретико-множественном языке, к-рые можно положить в основу реально встречающихся математич. доказательств, и формализованы логич. средства вывода, стало возможным точно поставить, а затем и решить вопрос о формальной неразрешимости К.-г. Формальная неразрешимость понимается в смысле не существования формального вывода в системе Цермело — Френкеля ZF как для К.-г., так и для ее отрицания.

В 1939 К. Гёдель (K. Gödel) установил недоказуемость отрицания обобщенной К.-г. (а следовательно, и недоказуемость отрицания К.-г.) в системе ZF с аксиомой выбора (системе ZFC), в предположении, что ZF непротиворечива (см. *Конструктивное по Гёделю множество*). В 1963 П. Коэн (P. Cohen) показал невыводимость К.-г. (а следовательно, и невыводимость обобщенной К.-г.) из аксиом ZFC при условии непротиворечивости ZF (см. *Вынуждения метод*).

Являются ли эти результаты окончательными в проблеме континуума? Ответ на этот вопрос зависит от отношения к посылке о непротиворечивости ZF и, что более существенно, к тому экспериментальному факту, что всякое содержательное математич. доказательство (традиционной классич. математики), после того как оно найдено, может быть адекватным образом формализовано в системе ZFC. Факт этот нельзя не только доказать, но даже точно сформулировать, поскольку всякое уточнение поднимает аналогичный вопрос об адекватности уточнения уточняемому.

На теоретико-модельном языке К. Гёдель и П. Коэн построили модели для ZFC, в к-рых

$$2^k = \begin{cases} m, & \text{если } k < m, \\ k^+, & \text{если } k \geqslant m, \end{cases}$$

где m — произвольный, наперед заданный несчетный регулярный кардинал, а k^+ — первое кардинальное число, большее k. Каково возможное поведение функции 2^k в различных моделях ZFC?

Известно, что на регулярных кардиналах k функция эта может вести себя как угодно, подчиняясь лишь условиям

$$k \leqslant k' \longrightarrow 2^k \leqslant 2^{k'}, \quad k < cf(2^k),$$

где $cf(m)$ — наименьший кардинал конфинальный m (см. *Кардинальное число*). Для сингулярных (т. е. не регулярных) k значение функции 2^k может зависеть от ее поведения на меньших кардинальных числах. Так, напр., если равенство (1) имеет место для всех $\alpha < \omega_1$, то оно имеет место и для $\alpha = \omega_1$.

Лит.: [1] Коэн П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; [2] Baumgartner J. E., Prikry K., «Amer. Math. Monthly», 1977, v. 84, № 2, p. 108—113.

В. Н. Гришин.

КОНТОРОВИЧА — ЛЕБЕДЕВА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(\tau) = \int_0^\infty K_{i\tau}(x) f(x)\, dx,$$

где $K_\nu(x)$ — *Макдональда функция*.

Если функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение в окрестности точки $x = x_0 > 0$ и

$$f(x) \ln x \in L\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad f(x) \sqrt{x} \in L\left(\frac{1}{2}, \infty\right),$$

то справедлива формула обращения

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \frac{2}{\pi^2 x_0} \int_0^\infty K_{i\tau}(x_0)\, \tau \operatorname{sh} \pi\tau\, F(\tau)\, d\tau.$$

Пусть $f_i(x)$, $i = 1, 2$,— действительные функции, причем

$$f_i(x)\, x^{-3/4} \in L(0, \infty), \quad f_i(x) \in L_2(0, \infty);$$

$$F_i(\tau) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{2\tau \operatorname{sh} \pi\tau}}{\pi} \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} f_i(x)\, dx.$$

Тогда

$$\int_0^\infty F_1(\tau) F_2(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty f_1(x) f_2(x)\, dx$$

(равенство Парсеваля).

Конечное К.— Л. п. имеет вид

$$F(\tau)=\frac{2\tau \operatorname{sh}\pi\tau}{\pi^2 |I i\alpha(\alpha)|^2}\times$$

$$\times\int_0^\alpha \left[K_{i\tau}(\alpha) I_{i\tau}(x) - I_{i\tau}(\alpha) K_{i\tau}(x)\right] f(x)\frac{dx}{x},$$

$\tau>0$, $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя (см. [3]).

Исследование таких преобразований было начато М. И. Конторовичем и Н. Н. Лебедевым (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Конторович М. И., Лебедев Н. Н., «Ж. экспер. и теор. физ.», 1938, т. 8, № 10—11, с. 1192—206; [2] Лебедев Н. Н., «Докл. АН СССР», 1946, т. 52, № 5, с. 395—98; [3] Уфлянд Я. С., Юшкова Е. А., там же, 1965, т. 164, № 1, с. 70—72; [4] Диткин В. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, 2 изд., М., 1974. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

КОНТРАВАРИАНТНЫЙ ВЕКТОР — наименование элемента векторного пространства E в ситуации, когда наряду с E рассматривается сопряженное ему пространство E^*. Элементы пространства E^* наз. тогда *ковариантными векторами.* *М. И. Войцеховский.*

КОНТРАВАРИАНТНЫЙ ТЕНЗОР валентности $r\geqslant 1$ — тензор типа $(r, 0)$, элемент тензорного произведения

$$T^r(E)=E\otimes\ldots\otimes E$$

r экземпляров векторного пространства E над полем K. Относительно операции сложения К. т. одной и той же валентности и умножения их на скаляр $T^r(E)$ является векторным пространством над K. Пусть E — конечномерно и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в E. Тогда размерность $T^r(E)$ равна n^r; базис в $T^r(E)$ состоит из всевозможных К. т. вида

$$e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_r},\quad 1\leqslant i_1, \ \ldots, \ i_r\leqslant n.$$

Любой К. т. $t\in T^r(E)$ представляется в виде

$$t=t^{i_1\ldots i_r} e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_r}.$$

Числа $t^{i_1\ldots i_r}$ наз. координатами, или компонентами, К. т. t относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$ в E. При переходе в E к новому базису по формулам

$$e_{i'}=a^i_{i'}e_i$$

координаты К. т. t изменяются по так наз. контравариантному закону

$$t^{i'_1\ldots i'_r}=b^{i'_1}_{i_1}\ldots b^{i'_r}_{i_r} t^{i_1\ldots i_r},\quad a^i_{i'}b^{j'}_i=\delta^{j'}_{i'}.$$

При валентности $r=1$ К. т. совпадает с вектором — элементом пространства E; при $r\geqslant 2$ К. т. можно инвариантным образом связать с r-линейным отображением в K прямого произведения

$$E^{r^*}=E^*\times\ldots\times E^*$$

r экземпляров сопряженного к E пространства E^*. Для этого достаточно принять за координаты К. т. t значения r-линейного отображения $\tilde{t}$ на векторах $(e^{i_1}, \ldots, e^{i_r})\in E^{r*}$ (где $e^1, \ldots, e^n$ — элементы базиса в E^*, сопряженного к $e_1, \ldots, e_n$, т. е. $e^i(e_j)=\delta^i_j$), и обратно; поэтому иногда К. т. сразу определяют как полилинейный функционал на E^{r*}. *И. Х. Сабитов.*

КОНТРАГРЕДИЕНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ к представлению φ группы G в линейном пространстве V — представление φ^* этой же группы G в двойственном к V пространстве V^*, определяемое правилом:

$$\varphi^*(g)=\varphi(g^{-1})^*$$

для любого $g \in G$, где * означает переход к сопряженному оператору.

Более общо, если W — линейное пространство над тем же полем k, что и пространство V, а $(\ ,\ )$ — невырожденная *билинейная форма* (спаривание) на $V \times W$ со значениями в k, то представление ψ группы G в W наз. К. п. к представлению φ относительно формы $(\ ,\ )$, если

$$(\varphi(g)x,\ y) = (x,\ \psi(g^{-1})y)$$

для любых $g \in G$, $x \in V$, $y \in W$.

Напр., если G — полная линейная группа конечномерного пространства V, то естественное представление G в пространстве ковариантных тензоров фиксированного ранга на V является К. п. относительно канонического спаривания к естественному представлению G в пространстве контравариантных тензоров того же ранга на V.

Пусть V конечномерно над k и (e) — его базис, а (f) — дуальный к (e) базис в V^*. Тогда для любого g из G матрица оператора $\varphi^*(g)$ в базисе (f) получается из матрицы оператора $\varphi(g)$ в базисе (e) транспонированием и переходом к обратной. Если φ неприводимо, то и φ^* неприводимо. Если G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, а $d\varphi$ и $d\psi$ — представления алгебры $\mathfrak{g}$, индуцированные соответственно представлениями φ и ψ группы G в пространствах V и W, контрагредиентными относительно спаривания $(\ ,\ )$, то

$$(d\varphi(X)(x),\ y) = -(x,\ d\psi(X)y) \qquad (*)$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$, $x \in V$, $y \in W$. Представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющие условию (*), также наз. К. п. относительно $(\ ,\ )$.

Пусть далее G — комплексная связная односвязная полупростая группа Ли и φ — ее неприводимое конечномерное представление в линейном пространстве V. Веса представления φ^* противоположны весам представления φ (см. *Вес* представления), младший вес представления φ^* противоположен старшему весу представления φ (см. *Картана теорема* о старшем векторе). Представления φ и φ^* эквивалентны тогда и только тогда, когда на V существует ненулевая инвариантная относительно $\varphi(G)$ билинейная форма. Если такая форма существует, то она невырождена и либо симметрична, либо кососимметрична. Набор числовых отметок старшего веса представления φ^* получается из набора числовых отметок представления φ применением подстановки, индуцированной следующим автоморфизмом ν схемы простых корней Δ группы G:

а) ν переводит каждую связную компоненту Δ_i, $i=1, \ldots, l$, схемы Δ в себя;

б) если Δ_i — схема типа A_r, D_{2r+1} или E_6, то сужение ν на Δ_i однозначно определяется как единственный элемент второго порядка в группе автоморфизмов схемы Δ_i, в остальных случаях сужение ν на Δ_i тождественно.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [3] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [4] Винберг Э. Б., Онищик А. Л., Семинар по алгебраическим группам и группам Ли. 1967/68, М., 1969. *В. Л. Попов.*

КОНТРАГРЕДИЕНТНЫЙ АВТОМОРФИЗМ к автоморфизму φ правого модуля M над кольцом A — автоморфизм $\check{\varphi}$ левого A-модуля M^* (*обозначает переход к сопряженному модулю), сопряженный к автоморфизму, обратному φ. Более общо, если ψ — изоморфизм правого A-модуля M_1 и правого A-модуля M_2, то контрагредиентным к ψ изоморфизмом наз. изоморфизм левого A-модуля M_1^* на левый A-модуль M_2^*, сопряженный к изоморфизму, обратному ψ. Пусть $\langle\ ,\ \rangle_1$

и $\langle\ ,\ \rangle_2$ — канонические билинейные формы на $M_1 \times M_1^*$ и $M_2 \times M_2^*$. Тогда $\check{\psi}$ определяется следующим тождеством относительно $x \in M_1$, $y \in M_1^*$:

$$\langle \psi(x),\ \check{\psi}(y)\rangle_2 = \langle x,\ y\rangle_1.$$

Если M_1 и M_2 обладают конечными базисами, то ψ — изоморфизм, контрагредиентный к $\check{\psi}$.

Пусть A — кольцо с единицей и M — правый A-модуль, обладающий конечным базисом, φ — некоторый автоморфизм модуля M и X — матрица φ в фиксированном базисе (эта матрица обратима). Тогда в сопряженном базисе матрица К. а. $\check{\varphi}$ имеет вид

$$\check{X} = ({}^T X)^{-1} = {}^T (X^{-1})$$

(индекс ^{T} означает транспонирование). Матрица $\check{X}$ наз. **контрагредиентной матрицей** к обратимой матрице X.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962. *В. Л. Попов.*

КОНТРАПОЗИЦИИ ЗАКОН — логический принцип, согласно к-рому если из одного утверждения следует другое, то отрицание последнего влечет отрицание первого:

$$(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A).$$

К. з. принимается как классической, так и конструктивной логикой. *С. К. Соболев.*

КОНТРАСТ, **сравнение**, — скалярное произведение $\theta^T \cdot c$ вектора $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^T$, координаты к-рого суть неизвестные параметры, на заданный вектор $c = (c_1, \ldots, c_k)^T$ такой, что $c_1 + \ldots + c_k = 0$. Напр., разность $\theta_1 - \theta_2 = (\theta_1, \theta_2)(1, -1)^T$ неизвестных математич. ожиданий θ_1 и θ_2 двух одномерных нормальных распределений является К. Среди всех функций, зависящих от неизвестного вектора $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^T$, только для К. существует линейная несмещенная оценка, и наоборот. В дисперсионном анализе часто рассматривается задача *множественного сравнения*, которая заключается в проверке гипотез о численных значениях К.

Лит.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1963. *М. С. Никулин.*

КОНТУРНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ МЕТОД — один из основных методов геометрич. теории функций комплексного переменного, позволяющий получать различные неравенства, выражающие экстремальные свойства однолистных и многолистных функций, а также тождества, связывающие основные функции областей теории конформного отображения. Метод существенно связан с использованием свойств функций, конформно отображающих данную область на различные канонические области. С помощью таких функций можно строить функции области, обладающие следующим **контурным свойством**: на каждой граничной компоненте области значения функции разнятся на аддитивную постоянную от комплексно сопряженных значений соответствующей другой функции. К. и. м. состоит в основном в следующем.

Рассматривается нек-рый интеграл, взятый по всему контуру данной области (обычно контур можно считать состоящим из конечного числа простых замкнутых аналитич. кривых). Этот интеграл выбирается так, чтобы подинтегральное выражение содержало множители с указанным выше контурным свойством и чтобы после использования этого свойства получался интеграл, вычисляемый с помощью теоремы о вычетах. Если из других соображений известны либо значение исходного интеграла, либо его знак, то в результате получается или нек-рое соотношение между использованными функциями, или нек-рое неравенство, связывающее их. Часто контурный интеграл, к к-рому удается применить указанный метод, появляется в результате преобразования по формуле Грина неотрицательного двойного интеграла — интеграла от квадрата модуля производной нек-рой функции, регулярной в данной области. Отсюда — связь К. и. м. с *площадей методом.* С помощью К. и. м. были получены результаты, касающиеся *искажения теорем* для однолистных конформных отображений многосвязных областей (см. [1], [2]); необходимые и достаточные условия для коэффициентов однолистных функций (см. [3]); тождества, связывающие основные функции областей теории конформного отображения (см. [4]).

К. и. м. применялся для исследования однолистных функций также в следующей форме. Пусть, напр., B — область плоскости w с контуром C, состоящим из конечного числа простых замкнутых аналитич. кривых; $S(w)$ — функция, гармоническая в полной плоскости w за исключением конечного числа точек области B; $p(w)$ — функция, обладающая свойством: разность $S(w)-p(w)$ является гармонической в области B и непрерывной в этой замкнутой области, $p(w)|_C=0$. Тогда

$$\int_C S\frac{\partial p}{\partial n}ds\leqslant 0,$$

где $\partial/\partial n$ обозначает дифференцирование по направлению внешней нормали к области B. Если $\sigma(w)$ и $q(w)$ — аналитич. функции, для к-рых $S=\operatorname{Re}\{\sigma\}$, $p=\operatorname{Re}\{q\}$, то последнее неравенство может быть переписано в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{i}\int_C(\sigma-q)\,\sigma'\,dw\right\}\leqslant 0.$$

В этом неравенстве интеграл вычисляется по теореме о вычетах. Выбирая различные функции $S(w)$ и $p(w)$, надлежаще связанные с исследуемыми функциями, можно таким образом получать различные новые неравенства для однолистных функций (см. [5] — [7]).

К. и. м. успешно использовался и при исследовании неоднолистных конформных отображений. Так, этим методом был установлен ряд новых экстремальных свойств функций, мероморфных в многосвязной области и удовлетворяющих нек-рым дополнительным условиям (см. [8]); получено обобщение на многосвязные области, на случай нескольких полюсов и на функции, p-листные в соответствующем обобщенном смысле теоремы площадей Голузина для функций, p-листных в круге (см. [9]). Упомянутые выше функции области тесно связаны с *Бергмана кернфункциями*, и результаты, получаемые К. и. м., часто выражаются через них. Отсюда же следует связь К. и. м. с теорией ортонормальных систем аналитич. функций.

Лит.: [1] Grunsky H., «Schriften math. Semin. und Inst. angew. Math. Univ. Berlin», 1932, S. 95—140; [2] Голузин Г. М., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 1, с. 37—63; [3] Grunsky H., «Math. Z.», 1939, Bd 45, S. 29—61; [4] Garabedian P. R., Schiffer M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1949, v. 65, № 2, p. 187—238; [5] Nehari Z., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 75, № 2, p. 256—86; [6] Аленицын Ю. Е., «Матем. сб.», 1956, т. 39, № 3, с. 315—36; [7] его же, «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1967, т. 94, с. 4—18; [8] Meschkowski H., «Math. Ann.», 1954, Bd 127, S. 107—29; [9] Аленицын Ю. Е., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, в. 5, с. 1132—54; [10] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966, с. 221—26.
Ю. Е. Аленицын.

КОНУС — 1) К. в евклидовом пространстве — множество K, составленное из полупрямых, исходящих из нек-рой точки O — вершины К. Границу ∂K множества K (составленную из полупрямых, наз. образующими К.) — часть *конической поверхности* — также иногда наз. К. Наконец, часто К. наз. пересечение K с полупространством, содержащим O и ограниченным плоскостью, не проходящей через O. В этой ситуации часть плоскости, лежащая внутри конич. поверхности, наз. **основанием** К., а часть конич. поверхности, заключенная между вершиной и основанием,— **боковой поверхностью** К.

Если основание К. есть круг, то К. наз. **круговым**. Круговой К. наз. **прямым**, если ортогональная проекция его вершины на плоскость основания совпадает с центром основания. Прямая, проходящая через вершину К. перпендикулярно основанию, наз. **осью** К., а ее отрезок между вершиной и основанием — **высотой** К. Объем прямого кругового К. равен $\pi R^2 h/3$, где h — высота, R — радиус основания; площадь боковой поверхности равна πRl, где l — длина отрезка образующей между вершиной и основанием. Подмножество К., заключенное между двумя параллельными плоскостями, наз. **усеченным** К., или **коническим слоем**. Слой прямого кругового К. между плоскостями, параллельными основанию, имеет объем $\pi(R^2+r^2+Rr)\,h/3$, где R, r — радиусы оснований, h — высота (расстояние между основаниями); площадь боковой поверхности $\pi(R+r)\,l$, где l — длина отрезка образующей. *А. Б. Иванов.*

2) К. **над топологич. пространством** X (**основанием** К.) — пространство CX, получающееся из произведения $X\times[0, 1]$ стягиванием подпространства $X\times\{0\}$ в одну точку W (**вершину** K):

$$CX=(X\times[0, 1])/(X\times\{0\}).$$

Другими словами, CX — цилиндр постоянного отображения $X\to W$ (см. *Цилиндрическая конструкция*) или конус тождественного отображения $\mathrm{id}: X\to X$ (см. *Коническая конструкция*). Пространство X стягиваемо тогда и только тогда, когда оно является *ретрактом* всякого К. над X.

Понятие К. над топологич. пространством обобщается в рамках теории категорий: множество морфизмов $\alpha_i: A\to A_i$, $i\in I$, произвольной категории $\mathfrak{A}$ с общим началом в объекте A наз. **конусом морфизмов** с вершиной A; двойственно, **коконус морфизмов** есть множество морфизмов $\beta_i: A_i\to A$, $i\in I$ с общим концом в объекте A. См. [4], [5], [6]. *М. И. Войцеховский.*

3) К. **отображения** — топологич. пространство, сопоставляемое непрерывному отображению $f: X\to Y$ топологич. пространств *конической конструкцией*. Пусть C_1 — конус вложения $Y\subset C_f$, C_2— конус вложения $C_f\subset C_1$ и т. д. Получающаяся последовательность

$$X\xrightarrow{f}Y\subset C_f\subset C_1\subset C_2\subset\ldots$$

наз. **последовательностью Пуппе**; здесь $C_1\sim SX$, $C_2\sim SY$ и т. д., где $SX\,(SY)$ — *надстройка* над X (над Y).

Аналогично определяется приведенный конус $\tilde{C}_f$ отображения пунктированных пространств. При этом, как и в ситуации с корасслоением, для любого пунктированного пространства A последовательность гомотопич. классов, индуцированная последовательностью Пуппе,

$$[X,\ A]\longleftarrow[Y,\ A]\longleftarrow[C_1,\ A]\longleftarrow[C_2,\ A]\longleftarrow\ldots,$$

точна; в ней все члены, начиная с четвертого,— группы, а начиная с седьмого — абелевы группы. См. [4], [5]. *А. Ф. Харшиладзе.*

4) К. **в действительном векторном пространстве** E — множество $K\subset E$ такое, что $\lambda K\subset K$ для любого $\lambda>0$. К. наз. **заостренным**, если $0\in K$, а заостренный К.— **выступающим**, если K не содержит никакого одномерного подпространства. Невыступающий К. иногда наз. **клином**.

К., являющийся выпуклым множеством в E, наз. **выпуклым**. Таким образом, подмножество K в E

является выпуклым К. тогда и только тогда, когда $\lambda K \subset K$ для всякого $\lambda > 0$ и $K+K \subset K$. В этом случае векторное подпространство в E, порожденное выпуклым К. K, совпадает с множеством $K-K$. Если К. заострен, то $K \cap (-K)$ — наибольшее векторное подпространство, содержащееся в K. Заостренный выпуклый К. будет выступающим тогда и только тогда, когда $K \cap (-K)=0$.

Если E — полуупорядоченное пространство, то положительный конус $P=\{x : x \in E, \quad x \geqslant 0\}$ является выступающим, заостренным, выпуклым К. Обратно, любой такой К. K в векторном пространстве E порождает отношение порядка: $x_1 \geqslant x_2$, если $x_1 - x_2 \in K$.

К. K наз. воспроизводящим, если любой элемент $x \in E$ представим в виде разности элементов из K. Напр., воспроизводящими являются К. неотрицательных непрерывных (или суммируемых) функций на отрезке $[0, 1]$, множество положительных операторов в пространстве ограниченных самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Однако К. неотрицательных неубывающих непрерывных функций таковым не является.

Наличие топологии в E наделяет понятие К. более богатым содержанием, позволяющим получать нетривиальные результаты. Напр., пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и K — выступающий заостренный выпуклый К. в E, имеющий непустую внутренность (такие К. наз. телесными). Тогда каждая линейная форма на E, положительная на K, непрерывна; если M — векторное подпространство в E, пересекающееся с внутренностью K, и f — линейная форма на M, положительная на $K \cap M$, то на E существует линейная форма $\tilde{f}$, продолжающая f и положительная на K. См. [1], [2], [3]. *М. И. Войцеховский.*

Более других развита теория К. в банаховых пространствах. Пусть K — К. в банаховом пространстве E, порождающий в E нек-рое отношение порядка $\geqslant$. Если К. замкнут, то для E имеет место принцип Архимеда: если $x \in E$, а числа $\lambda_n > 0$ и $\lambda_n \to \infty$, и при этом существует такое y, что $\lambda_n x \leqslant y$ при всех n, то $x \leqslant 0$. Для телесного К. верно и обратное: из архимедовости E вытекает замкнутость K.

Пусть K' — сопряженный клин, т. е. совокупность всех положительных линейных непрерывных функционалов на E (f положителен, если $f(x) \geqslant 0$ для любого $x \in K$). K' — К. тогда и только тогда, когда K — пространственный, т. е. замыкание $\overline{K-K}=X$. Если K замкнут, то для любого $x_0 > 0$ (соответственно $x_0 \notin K$) существует такой $f \in K'$, что $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$).

К. K наз. несплющенным, если для любого $x \in E$ существуют такие $u, v \in K$, что

$$x=u-v, \text{ а } \|u\|, \ \|v\| \leqslant M\|x\|,$$

где $M=\text{const}$.

Если K. замкнутый и воспроизводящий, то он несплющен (теорема Крейна — Шмульяна).

К. K наз. нормальным, если

$$\inf\{\|x+y\| : x, \ y \in K, \ \|x\|=\|y\|=1\} > 0.$$

Нормальность К. равносильна полумонотонности нормы: $0 \leqslant y \leqslant x$ влечет $\|y\| \leqslant M\|x\|$, где $M = \text{const}$. Для того чтобы клин K' был воспроизводящим в сопряженном пространстве, необходимо и достаточно, чтобы K. был нормальным (теорема Крейна). Двойственно: если K' — нормальный К., соответствующий замкнутому К. K, то К. K воспроизводящий. Существует взаимно однозначное линейное и непрерывное отображение пространства E с нормальным К. K в подпространство пространства $C(Q)$ непрерывных функций на некотором бикомпакте Q, при котором элементы из K и только они переходят в неотрицательные функции.

К. K наз. **правильным** (**вполне правильным**), если всякая последовательность элементов из K, возрастающая и ограниченная по порядку (по норме), сходится. Если K замкнут и правилен, то он нормален, а всякий вполне правильный конус нормален и правилен. Если же K правилен и телесен, то он вполне правилен. Правильность К. связана со свойством **монотонной непрерывности нормы**: если $x_\alpha \downarrow 0$, т. е. семейство $\{x_\alpha\}$ — убывающее направление, и $\inf x_\alpha = 0$, то $\|x_\alpha\| \to 0$. Правильность замкнутого К. K равносильна тому, что пространство E дедекиндово полно, а норма в E монотонно непрерывна. Правильность телесного К. K влечет монотонную непрерывность нормы в E.

К. K наз. **оштукатуриваемым**, если существуют К. $K_1 \subset X$ и число $\delta > 0$ такие, что для любого $x \in K$ шар $S(x;\ \delta\|x\|) \subset K_1$. Оштукатуриваемость K равносильна существованию в E эквивалентной нормы, аддитивной на K. Оштукатуриваемый К. вполне правилен.

Теория К. развита и для произвольных нормированных пространств. Однако в этом общем случае нек-рые из вышеприведенных результатов не сохраняются, напр., перестает быть верной теорема Крейна — Шмульяна, а правильность замкнутого К. не влечет его нормальность. См. [1], [7], [8], [9], [10]. *Б. З. Вулих.*

Лит.: [1] Функциональный анализ, 2 изд., М., 1972, гл. 8 (Справочная матем. библиотека); [2] Эдвардс Р. Э., Функциональный анализ. Теория и приложения, пер. с англ., М., 1969; [3] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [4] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976; [5] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [6] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974; [7] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962; [8] Вулих Б. З., Введение в теорию конусов в нормированных пространствах, Калинин, 1977; [9] его же, Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах, Калинин, 1977; [10] Крейн М. Г., Рутман М. А., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1, с. 3—95.

КОНУСА УСЛОВИЕ — условие на область евклидова пространства, отражающее нек-рым образом ее несплющенность. Открытое множество $G \in E^n$ удовлетворяет **слабому условию конуса**, если $x + V(e(x),\ H) \subset G$ для всех $x \in G$, где $V(e(x),\ H)$ — прямой круговой конус с вершиной в начале координат, фиксированного раствора ε и высоты H, $0 < H \leq \infty$, и с зависящим от x вектором $e(x)$ направления оси. Открытое множество G удовлетворяет **сильному условию конуса**, если существует покрытие замыкания $\bar{G}$ открытыми множествами G_k, что для любого $x \in \bar{G} \cap G_k$ конус $x + V(e(x),\ H)$ содержится в G (растворы этих конусов могут зависеть от k). В связи с интегральными представлениями функций и вложения теоремами рассматриваются анизотропные обобщения К. у.— напр., условия слабого, сильного l-рога (см. [1], с. 117 и далее), условия куба и т. п.

Лит.: [1] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1975. *М. И. Войцеховский.*

КОНФИГУРАЦИЯ — конечное множество точек, прямых, плоскостей, связанных между собой взаимными *инцидентностями*. К. могут быть как плоскими, так и пространственными.

Плоская конфигурация — конечная система p точек и g прямых на плоскости, расположенных таким образом, что всякая точка системы инцидентна с одним и тем же числом γ прямых этой системы, а всякая прямая инцидентна с одним и тем же числом π точек этой системы. Минимальная система точек данной К., из к-рой вся К. может быть получена путем инциденций пар точек с прямыми и пересечений пар прямых, наз. **системой образующих** данной К. Числа p, g, γ, π связаны соотношением $p\gamma = g\pi$, а К. обозначается символом $(p_\gamma,\ g_\pi)$. К., содержащая одинаковое число точек и прямых, обозначается символом (p_γ).

П р и м е р ы плоских К.: 1) Одна точка и одна прямая, инцидентные между собой, образуют К. (1_1). 2) Три точки, не лежащие на одной прямой, и три прямые, инцидентные с каждой парой, образуют К. (3_2), эта фигура — трехвершинник (или трехсторонник) на плоскости. 3) Полный четырехсторонник — четыре прямые и шесть точек их попарного пересечения образуют К. $(6_2, 4_3)$. Однако здесь не все прямые, соединяющие попарно точки К., являются прямыми этой К.; точки R, P, Q и прямые RP, RQ, PQ не принадлежат ей (рис. 1).

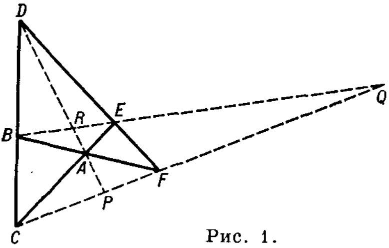


Рис. 1.

А в т о м о р ф и з м о м К. наз. отображение К. на себя, при к-ром точки К. переходят в точки, прямые — в прямые этой же К., и при этом ни одна инцидентность не пропадает, и не добавляется новых. К. наз. п р а в и л ь н о й, если группа автоморфизмов этой К. транзитивна.

Для данной К. (p_γ, g_π) д в о й с т в е н н о й наз. К. (g_π, p_γ). К. типа (p_γ) и только такие, двойственно соответствуют К. такого же типа, они наз. д в о й с т в е н н о - и н в а р и а н т н ы м и.

К. наз. п р о е к т и в н о й, если инцидентность ее элементов сохраняется при проективных преобразованиях. Напр., инцидентность элементов нек-рой К., расположенной на проективной плоскости, обеспечивается выполнением аксиом связи ее, и потому инцидентность точек и прямых К. сохраняется при проективных преобразованиях этой плоскости, а К. будет проективной. Все инцидентности и элементы такой плоской К. могут быть изображены на чертеже с помощью только одной линейки. Плоская К. всегда имеет двойственную вследствие принципа двойственности.

К. может быть определена также как конечная частичная плоскость. Возможность существования нек-рой К. определяется из геометрич. и комбинаторных соотношений между количеством точек и прямых и количеством взаимных инциденций. К. задается и с помощью абстрактных схем, напр. на таблице (рис. 2) указаны инцидентности (обозначенные крестиком) четырех точек, вершин A_i, и четырех плоскостей, граней D_i тетраэдра. После того как нек-рая К. определена абстрактно, возникает вопрос о ее реализации, т. е. о возможности построения всех инциденций по данной системе образующих. Реализуемость К. как конечной частичной плоскости означает возможность изоморфного отображения ее на нек-рую подплоскость какой-либо плоскости.

	A_1	A_2	A_3	A_4
D_1	•	×	×	×
D_2	×	•	×	×
D_3	×	×	•	×
D_4	×	×	×	•

Рис. 2.

К. (p_2), $p \geqslant 3$, реализуется в виде p-сторонника так, что вершины и стороны его попарно инцидентны. Абстрактную схему К. (3_2) можно построить, напр., таблицей, как на рис. 2. Плоские К. (p_3) возможны лишь при $p \geqslant 7$, так как через каждую точку К. должны проходить три прямые и на каждой из них должны лежать еще две другие точки К. (число p должно удовлетворять неравенству $p(p-1)/2 \geqslant 3p$). К. типа (p_3) допускают модификации, количество к-рых зависит от p. К. (7_3) представляется схемой (рис. 3), где цифра за фигурной скобкой означает точку пересечения прямых, проходящих через пары точек, записанные слева от скобки, цифры за вертикальной чертой обозначают те точки, к-рые должны быть коллинеарными при выполнении всех указанных слева инциденций. На действительной проективной плоскости все инцидентности реализуются в полном четырехвершиннике (рис. 4), однако последняя

$$\left.\begin{matrix}13\\24\end{matrix}\right\}5\quad \left.\begin{matrix}12\\34\end{matrix}\right\}6\quad \left.\begin{matrix}14\\23\end{matrix}\right\}7\quad \Big|\,567$$

Рис. 3.

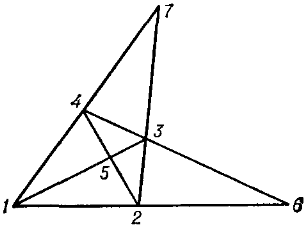


Рис. 4.

инциденция (коллинеарность трех точек) здесь не имеет места. К. (9_3) допускает три различные модификации, одна из к-рых $(9_3)_1$ наз. конфигурацией Брианшона — Паскаля (рис. 5): каждая прямая l_i

Прямые l_i / Точки a_i	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
	1	1	1	2	2	3	3	4	5
	2	4	6	4	7	6	5	6	7
	3	5	7	8	9	8	9	9	8

Рис. 5.

инцидентна с тремя различными точками a_i, а каждая точка — с тремя различными прямыми. Эта К. может быть реализована на проективной плоскости (рис. 6), она является проективной, правильной, двойственно инвариантной (см. *Брианшона теорема*, *Паскаля теорема*). Две другие модификации К. $(9_3)_2$, $(9_3)_3$ (рис. 7) существенно отличаются от конфигурации Брианшона—Паскаля. Напр., К. $(9_3)_3$ не является правильной, а для построения К. $(9_3)_2$ необходима вспомогательная кривая 2-го порядка. К. (10_3) имеет уже десять различных модификаций, из к-рых важнейшей является

Рис. 6.

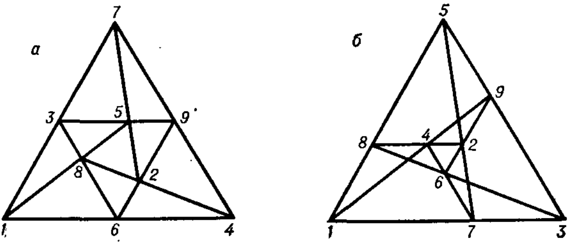


Рис. 7.

конфигурация Дезарга (рис. 8). Она реализуется на действительной проективной плоскости, является проективной, правильной, двойственно инвариантной. Другие девять модификаций К. (10_3) не выражают никакой общей геометрич. теоремы, причем лишь восемь из них могут быть реализованы на действительной проективной плоскости, но для их построения требуется специальное расположение системы образующих точек (в частности, К. такого типа реализуются

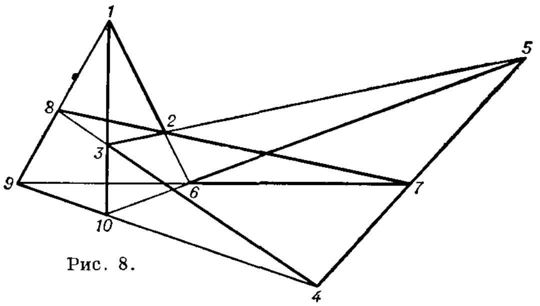


Рис. 8.

в виде правильных многосторонников (рис. 9). В приведенной на чертеже последовательности вершин также получается вписанный и одновременно описанный десятисторонник. К. (9_3) и (10_3) также допускают геометрич. построение с помощью многосторонников, вписанных и описанных вокруг самих себя, так, К. $(9_3)_1$ представляется в виде девятисторонника (2, 3, 6, 1, 5, 9, 4, 8, 7, 2) (рис. 6), конфигурация Дезарга — в виде десятисторонника (рис. 8) (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1). Такие представления этих К. единственны с точностью до автоморфизмов. Вообще, построение p-сторонников, одновременно вписанных и описанных вокруг самих себя, приводит к К. типа (p_3). Существуют также представления К. типа (p_3) в виде нескольких многосторонников, вписанных и описанных вокруг друг друга. Напр., конфигурация Дезарга допускает единственный способ (с точностью до автоморфизма) представления парой взаимно вписанных и описанных пятисторонников (1, 9, 7, 5, 3) и (8, 4, 10, 6, 2) (рис. 8). При увеличении числа p количество модификаций К. типа (p_3) быстро растет.

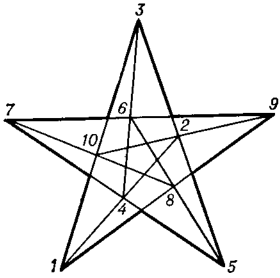


Рис. 9.

Пространственная конфигурация — конечная система точек и плоскостей такая, что каждая точка инцидентна с одним и тем же числом плоскостей, а каждая плоскость — с одним и тем же числом точек. Наряду с К., состоящей из точек и плоскостей, в пространстве рассматриваются и К., состоящие из точек и прямых. Так, рассмотренная выше конфигурация Дезарга, состоящая из точек и прямых, представляет собой также и пространственную К. (10_3) (рис. 8), если соответствующие трехсторонники лежат в различных плоскостях; одновременно ее можно рассматривать как К. $(10_3, 5_6)$, составленную из точек и плоскостей: шесть вершин соответствующих трехсторонников, центр перспективы и три точки на оси перспективы, в к-рых сходятся соответствующие стороны трехсторонников, дают всего десять точек, а три плоскости, образованные соответствующими сторонами трехсторонников, и две плоскости самих трехсторонников дают всего пять плоскостей. В каждой плоскости шесть точек К., и каждая точка инцидентна трем различным плоскостям.

Тривиальной пространственной К. типа (p_γ) является К. (4_3), ее схема — на рис. 2; она изображается тетраэдром. К. типа (p_4) для $p \leqslant 7$ невозможна, при $p=8$ имеется пять различных схем К., одна из к-рых, так наз. конфигурация Мёбиуса, состоит из двух тетраэдров, вписанных и описанных друг около друга. Каждой из восьми точек — вершин тетраэдров — инцидентны четыре плоскости граней тетраэдров, а каждой из восьми плоскостей инцидентны четыре точки — вершины. При переходе к К. более высокого порядка число возможных модификаций быстро возрастает, напр., К. (9_4) имеет уже 26 геометрич. осуществимых модификаций.

Из пространственных К. более высокого порядка примечательны конфигурация Рейе и конфигурация Шлефли. К о н ф и г у р а ц и е й Р е й е наз. состоящая из точек и плоскостей К. (12_6). В действительном проективном пространстве ее можно построить, напр., из вершин нек-рого куба, его центра, трех (бесконечно удаленных) точек, в к-рых сходятся параллельные ребра куба, а плоскостями этой К. являются шесть граней

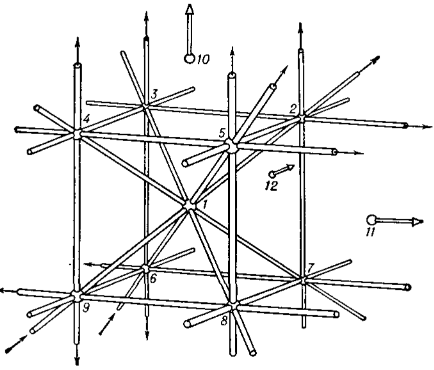


Рис. 10.

куба и шесть его диагональных плоскостей, проходящих через пары противоположных ребер (рис. 10). Конфигурация Рейе является проективной, правильной и двойственно инвариантной, причем изображение этой К. можно построить (согласно большому принципу двойственности), используя вместо куба октаэдр (рис. 11). Конфигурацию Рейе можно рассматривать также как пространственную К. точек и прямых $(12_4, 16_3)$. К. $(30_2, 12_5)$, состоящая из точек и прямых, наз. д в о й н ы м ш е с т и с т о р о н н и к о м Ш л е ф л и. Он изображается в пространстве, напр., в виде симметрично расположенных прямых и точек на каждой грани куба (по одной из двух шестерок) (рис. 12).

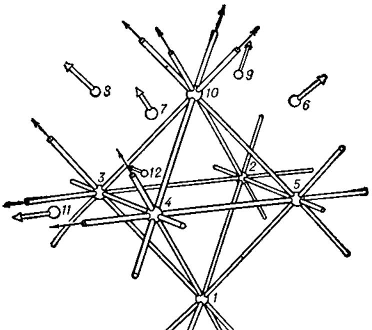


Рис. 11.

Не всякая плоская К. может быть реализована на действительной проективной плоскости. Напр., К. (7_3) и (8_3) не реализуются на ней, в связи с чем возникает задача реализации К. на каких-либо других проективных плоскостях. Каждое предложение, утверждающее, что из реализуемости в данной плоскости нек-рой К. со всеми инцидентностями, кроме, быть может, одной, вытекает реализуемость К. со всеми ее инцидентностями, называется к о н ф и г у р а ц и о н н ы м п р е д л о ж е н и е м данной плоскости. Таким образом, если все инцидентности некоторой К. реализуются на данной плоскости вследствие геометрических свойств этой плоскости, то К. реализуется на этой п л о с к о с т и. Например, К. $(9_3)_1$ всегда реализуется на действительной проективной плоскости, так как из реализуемости всех инциденций, кроме одной, последняя инцидентность выполняется всегда вследствие теорем Брианшона и Паскаля, т. е. эти теоремы являются конфигурационными предложениями. Выполнение по-

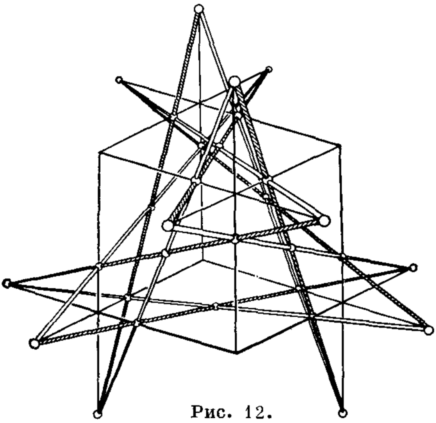


Рис. 12.

следней инцидентности в К. (7_3) (рис. 4) на такой плоскости не имеет места (так как диагональные точки полного четырехвершинника не принадлежат одной прямой), поэтому такое утверждение не является конфигурационным предложением. Однако оно будет таковым в комплексной проективной плоскости. Подобным образом рассматривается и реализуемость других К.; в частности, К. (8_3) может быть реализована в конечных папповых плоскостях, построенных над полями Галуа с тремя и четырьмя элементами.

Конфигурационные предложения, справедливые в данной плоскости, определенным образом организуют элементы этой плоскости и потому играют роль при аксиоматическом построении геометрии этой плоскости. Напр., если в данной плоскости выполняются все аксиомы связи проективной плоскости, но не реализуется конфигурация Дезарга, то данная плоскость несет на себе так наз. недезаргову геометрию. Конфигурационное предложение может быть также записано в алгебраич. форме в виде нек-рого алгебраич. тождества. В произвольной проективной плоскости конфигурационные предложения могут вводиться лишь в качестве новых аксиом, причем постулирование одного какого-нибудь конфигурационного предложения может повлечь за собой справедливость других конфигурационных предложений в этой плоскости. Вообще говоря, всякому алгебраич. тождеству соответствует конфигурационное предложение, к-рое наз. геометрич. представлением этого тождества в определенной плоскости, где реализуется К. (однако не установлено, всякое ли конфигурационное предложение является геометрич. представлением определенного вида тождества в алгебре тернаров и натуральных тел проективной плоскости). Исследование подобных алгебраич. эквивалентов позволяет изучать как свойства К., так и возможность их реализуемости как конечной частичной плоскости в определенной проективной плоскости, а также логическую связь между различными конфигурационными предложениями.

Теория К. находит применение в решении ряда геометрич. вопросов. Так, плоская К. (8_3) играет важную роль в теории плоских кривых третьего порядка, не имеющих двойных точек, в частности, при исследовании их точек перегиба. Конфигурация Рейе применяется при изучении правильных многогранников в четырехмерном евклидовом пространстве E^4. Правильный многогранник в E^4 ограничен областями, являющимися правильными трехмерными многогранниками. Правильный многогранник в E^4 наз. n-я ч е й к о й, если он ограничен n правильными многогранниками. Напр., 5-ячейка ограничена пятью трехмерными тетраэдрами, 8-ячейка — восемью кубами и т. д., причем 5-ячейка и 24-ячейка являются двойственными сами себе (точки соответствуют пространствам, а прямые — плоскостям). Изучение правильных ячеек проводится исследованием их проекций в E^3. Если в качестве пространства проекции выбирается для 24-ячейки нек-рая трехмерная

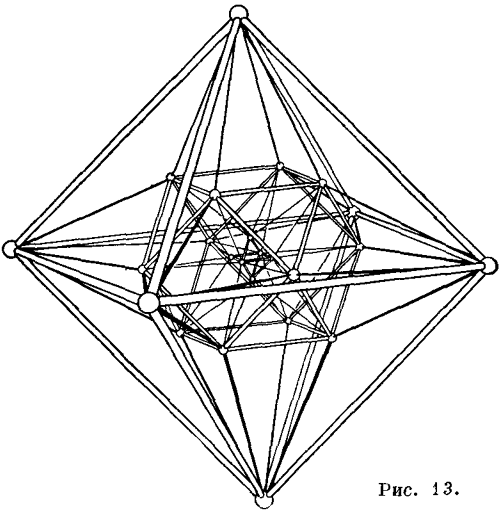


Рис. 13.

грань, то получается разделение пространства на 12-октаэдров, из к-рых все, не считая среднего, простираются в бесконечность, что приводит к такому виду проекции, к-рая составляет конфигурацию Рейе (рис. 10). Если в качестве пространства проекции берется трехмерное пространство, проходящее через вершину 24-ячейки, то получается также конфигурация Рейе (рис. 11). (Проекция 24-ячейки в трехмерное пространство — на рис. 13.) Конфигурация Рейе возникает и в системе точек и осей подобия четырех шаров, центры к-рых не лежат все в одной плоскости. В этой системе каждая ось инцидентна с тремя точками, и каждая точка — с четырьмя осями, получается пространственная К. $(12_4,\ 16_3)$ точек и прямых. Каждые три точки — центры подобия — определяют по одной плоскости, каждые две оси, инцидентные с точкой подобия, образуют еще восемь различных плоскостей, всего 12, каждая из к-рых инцидентна с шестью точками подобия, а каждая из двенадцати точек подобия — с шестью плоскостями, т. е. получается К. (12_6). К., представляемая двойным шестисторонником Шлефли, применяется для изучения свойств алгебраич. поверхностей третьего порядка, к-рая определяется 19 точками и всегда проходит через нек-рый двойной шестисторонник Шлефли. При этом существенным является то, что любые четыре прямые его имеют гиперболоидальное расположение.

Конфигурационные предложения о реализации инцидентностей на плоскости применяются для изучения свойств многосторонников (многовершинников) и для решения задач на построение при различных ограничениях (построение с недоступными элементами, построение одной линейкой и т. д.). В кинематике и графической статике находит практическое применение теория К. полиэдров.

Возможны К., составленные из других геометрич. элементов, напр. из кругов произвольной размерности и единичного радиуса в E^n.

Лит.: [1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 2 изд., М.—Л., 1951; [2] Скорняков Л. А., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 6, с. 112—154; [3] Аргунов Б. И., «Матем. сб.», 1950, т. 26, № 3, с. 425—56; [4] Levi F., Geometrische Konfigurationenen, Lpz., 1929. *Л. А. Сидоров.*

КОНФЛЮЭНТНАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — то же, что *вырожденная гипергеометрическая функция.*

КОНФЛЮЭНТНЫЙ АНАЛИЗ — совокупность методов математической статистики, относящихся к анализу априори постулируемых функциональных связей между количественными (случайными или неслучайными) переменными $X^{(1)}, \ldots, X^{(p)}$ в условиях, когда наблюдаются не сами переменные $X^{(s)}$, а случайные величины

$$\tilde{X}_i^{(s)} = X_i^{(s)} + \varepsilon_i^{(s)}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\varepsilon_i^{(s)}$ — случайная ошибка измерения $X_i^{(s)}$ переменной $X^{(s)}$ в i-м наблюдении, n — общее число наблюдений. При этом общий вид исследуемых функциональных («структурных») соотношений между ненаблюдаемыми переменными $X^{(1)}, \ldots, X^{(p)}$ считается заданным. В задачу К. а. входит построение статистич. оценок для неизвестных значений параметров, участвующих в уравнениях исследуемых «структурных» соотношений, а также — статистич. критериев, предназначенных для проверки различных гипотез о природе анализируемых связей.

Разработка теоретических и прикладных аспектов К. а. ведется главным образом применительно к линейному (или линеаризуемому с помощью подходящих преобразований исходных переменных) виду исследуемых структурных соотношений. В рамках линейной модели К. а. априорное постулирование m линейных связей между p, $m<p$, переменными может быть сформулировано как допущение о существовании $p-m$ «общих» факторов $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(p-m)}$ таких, что

$$X^{(s)} = \lambda_{s,\,1} Y^{(1)} + \ldots + \lambda_{s,\,p-m} Y^{(p-m)}, \quad s = 1, 2, \ldots, p, \tag{2}$$

причем матрица $\Lambda = \|\lambda_{sk}\|$, $s = 1, \ldots, p$, $k = 1, \ldots, p-m$, имеет ранг $p-m$. Параметризация модели К. а. в виде (1) — (2) позволяет сформулировать основные задачи в терминах статистич. оценивания неизвестных значений параметров λ_{sk} и статистич. проверки гипотез, с ними связанных. Формально модель (1) — (2) выглядит так же, как модель *факторного анализа*, однако задачи К. а. и факторного анализа почти не пересекаются: если цель К. а. в описании структурных соотношений, существующих между переменными $X^{(1)}, \ldots, X^{(p)}$, то в факторном анализе основной задачей является построение и интерпретация общих факторов $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(p-m)}$. В то же время можно говорить о родственном характере задач К. а. и *регрессионного анализа:* некоторые частные схемы К. а. укладываются в рамки схемы регрессионного анализа (напр., если по наблюдениям (1) надо выявить единственную зависимость переменной $X^{(1)}$, измеряемой с ошибкой, от остальных переменных, измеряемых без ошибок).

Лит.: [1] Frisch R., Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems, Oslo, 1934; [2] Koopmans T. C., Linear Regression Analysis of Economic Time Series, Haarlem, 1937; [3] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973, гл. 29; [4] Маленво Э., Статистические методы эконометрии, в. 1, пер. с франц., М., 1975, гл. 10; [5] Айвазян С. А., Богдановский И. М., «Заводск. лаборатория», 1974, т. 40, № 3, с. 285—95. *С. А. Айвазян.*

КОНФОКАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ — то же, что *софокусные кривые.*

КОНФОРМНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, в к-ром изучаются свойства фигур, неизменные при *конформных преобразованиях.* Основным инвариантом К. г. является угол между направлениями.

К. г.— это геометрия, определенная в евклидовом пространстве, дополненном одной бесконечно удаленной (несобственной) точкой, с фундаментальной группой точечных преобразований, переводящих сферы в сферы. Указанное пространство наз. конформным пространством M_n, а фундаментальная группа — группой конформных преобразований. В конформном пространстве плоскость является сферой, проходящей через бесконечно удаленную точку.

Приведенное определение К. г. справедливо для пространства любого числа измерений; в двумерном случае вместо сфер говорят о кругах (точнее окружностях). При числе измерений $n \geqslant 3$ преобразования, переводящие сферы в сферы, исчерпывают все преобразования, сохраняющие углы (теорема Лиувилля). При $n=2$ группа преобразований, сохраняющих углы, шире, однако и здесь название К. г. сохраняется за геометрией с фундаментальной группой точечных преобразований, переводящих круги в круги.

Всякое преобразование из фундаментальной группы К. г. состоит из конечного числа движений, подобных преобразований и инверсий.

Фундаментальная группа К. г. плоскости M_2 изоморфна нек-рой подгруппе проективной группы, именно подгруппе проективных преобразований трехмерного проективного пространства P_3, переводящих в себя овальную поверхность 2-го порядка, т. е. группе гиперболич. движений трехмерного пространства. Это позволяет применять для К. г. удобный аналитич. аппарат, к-рый используется в неевклидовых геометриях.

Всякая точка P_3 определяется четырьмя однородными координатами x_i, $i=\overline{1,4}$, или псевдовектором x с этими координатами. Пусть

$$(xy)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4$$

— форма от векторов x, y; K — овальная поверхность 2-го порядка P_3, задаваемая уравнением $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$, или $(xx)=0$. Для точек вне K $(xx)>0$, внутри — $(xx)<0$. С помощью абсолюта K осуществляется *стереографическая проекция* точек абсолюта и точек вне абсолюта на конформную плоскость. Координаты x_i, $i=\overline{1,4}$, точек P_3 наз. *тетрациклическими координатами* точек и кругов на плоскости M_2. Так как при стереографич. проекции точки на абсолюте переходят в точки на плоскости, а точки вне абсолюта — в круги на плоскости, то группе гиперболич. движений в P_3 с абсолютом K будет соответствовать группа преобразований на плоскости, при к-рых точки переходят в точки, а круги — в круги, т. е. фундаментальная группа К. г. плоскости. Аналитически эта группа задается формулами

$$x_k^*=\sum_{l=1}^{4} p_k^l x_l;\ k=1,\ \ldots,\ 4;\ \mathrm{Det}\,\|p_k^l\| \neq 0,$$

где $M(x_i)$ и $M^*(x_i^*)$ — точки до и после преобразований, причем форма

$$(xx)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2$$

отличается от формы

$$(x^*x^*)=x_1^{*2}+x_2^{*2}+x_3^{*2}-x_4^{*2}$$

только множителем. Если ввести

$$e^{ij}=p_1^i p_1^j+p_2^i p_2^j+p_3^i p_3^j-p_4^i p_4^j,$$

то условия сохранения квадратичной формы запишутся в виде

$$-e^{44}=e^{11}=e^{22}=e^{33}=1,\ e^{ij}=0$$

при $i \neq j$.

При конформных преобразованиях несобственная точка может переходить в любую другую точку, поэтому круг может перейти в прямую, и обратно. Если потребовать, чтобы несобственная точка переходила в себя, т. е. чтобы прямые переходили в прямые, то подгруппа таких преобразований представляет группу подобных преобразований (*гомотетия* и евклидово *движение*). В P_3 подгруппе подобия соответствует подгруппа гиперболич. движений, оставляющих неподвижной нек-рую фиксированную точку абсолюта.

Другим важным классом конформных преобразований является *инверсия*. В P_3 инверсии соответствует полярная гомология, т. е. такое гиперболич. движение, при к-ром каждая пара соответствующих точек M и M^* лежит на прямой, проходящей через некрую фиксированную точку C вне абсолюта, и удовлетворяется условие: двойное отношение $D(M, M^*, C, N)=-1$, где N — точка пересечения указанной прямой с плоскостью, полярной точке C относительно абсолюта. Также как всякое гиперболич. движение можно получить с помощью конечного числа полярных гомологий, так и любое конформное преобразование можно получить с помощью конечного числа инверсий.

Основным инвариантом К. г. на плоскости является угол φ между двумя кругами. Он выражается по формуле

$$\cos^2\varphi=\frac{(\boldsymbol{xy})^2}{(\boldsymbol{xx})(\boldsymbol{yy})},$$

где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — векторы, соответствующие двум кругам с тетрациклич. координатами x_i и y_i, $i=\overline{1,4}$. В гиперболич. геометрии P_3 угол между кругами на плоскости равен неевклидову расстоянию между точками в пространстве, соответствующими кругам. Инвариантность угла следует из инвариантности расстояния. Условие ортогональности двух кругов $(\boldsymbol{xy})=0$, условие касания $(\boldsymbol{xx})(\boldsymbol{yy})-(\boldsymbol{xy})^2=0$. Если один из кругов обращается в точку: $(\boldsymbol{xx})=0$, то получается условие инцидентности точки и круга $(\boldsymbol{xy})=0$.

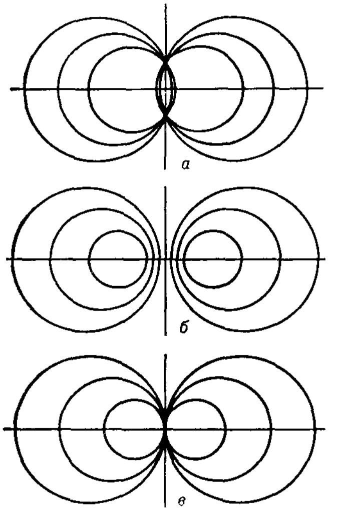


Рис. 1.

Простейшим образом в M_2 является пучок кругов. Он задается уравнением $\boldsymbol{t}=\alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{q}$, где $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ — фиксированные круги пучка. В зависимости от знака $\Delta=(\boldsymbol{pp})(\boldsymbol{qq})-(\boldsymbol{pq})^2$ пучки бывают: а) эллиптические ($\Delta>0$), б) гиперболические ($\Delta<0$), в) параболические ($\Delta=0$) (см. рис. 1). В P_3 пучкам кругов соответствуют прямые. Эллиптическому пучку — прямая, не пересекающая абсолют, гиперболическому — прямая, пересекающая абсолют, параболическому — прямая, касающаяся абсолюта. Так как у всякой прямой P_3 есть сопряженная ей, то и у всякого пучка в M_2 имеется сопряженный пучок.

Преобразования фундаментальной группы К. г. плоскости это — преобразования, задаваемые дробно-линейной функцией комплексного переменного.

В К. г. трехмерного пространства M_3 основными образами являются точки и сферы. Задаются они *пентасферическими координатами* x_i, $i=\overline{1,5}$, или псевдовектором $\boldsymbol{x}$ пятимерного пространства. Угол между сферами определяется по той же формуле, что и угол между кругами на плоскости.

Простейшие образы в M_3: пучки сфер $\boldsymbol{w}=\alpha\boldsymbol{y}+\beta\boldsymbol{z}$, двупараметрич. связки $\boldsymbol{w}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}+\gamma\boldsymbol{z}$ и трехпараметрич. связки $\boldsymbol{w}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}+\gamma\boldsymbol{z}+\delta\boldsymbol{t}$ сфер.

Круг в M_3 задается с помощью эллиптич. пучка сфер, т. е. формулой

$$x = \sum_{i=1}^{2} \alpha^i x_i$$

при дополнительном условии

$$(x_1 x_1)(x_2 x_2) - (x_1 x_2)^2 > 0.$$

Угол θ между кругом, заданным с помощью сфер x_1, x_2 и сферой y, определяется по формуле

$$\cos^2 \theta = \frac{A^{\alpha\beta}(x_\alpha y)(x_\beta y)}{(yy)},$$

где $A^{\alpha\beta}$ — алгебраич. дополнения элементов определителя, составленного из $A_{\alpha\beta} = x_\alpha x_\beta$; $\alpha, \beta = 1, 2$. Пара кругов

$$x = \sum_{i=1}^{2} \alpha^i x_i \quad \text{и} \quad \tilde{x} = \sum_{i=1}^{2} \beta^i \tilde{x}_i$$

имеет два абсолютных инварианта

$$k = \frac{s^2}{A\tilde{A}} \quad \text{и} \quad h = \frac{1}{2} A^{ij} \tilde{A}^{kl} S_{ik} S_{jl},$$

где

$$A_{ij} = (x_i x_j), \ \tilde{A}_{ij} = (\tilde{x}_i \tilde{x}_j), \ A = \operatorname{Det} \| A_{ij} \|,$$

$$\tilde{A} = \operatorname{Det} \| \tilde{A}_{ij} \|, \ S_{ij} = (x_i \tilde{x}_j), \ S = \operatorname{Det} \| S_{ij} \|.$$

Для каждой пары кругов из составляющих их пучков можно выделить главные сферы. Это сферы, к-рые удовлетворяют условиям $A_{11} = A_{22} = \tilde{A}_{11} = \tilde{A}_{22} = 1$, $A_{12} = \tilde{A}_{12} = 0$, $S_{12} = S_{21} = 0$. Через эти сферы сами пучки задаются в виде

$$x = \cos\varphi x_1 + \sin\varphi x_2, \ \tilde{x} = \cos\varphi_1 \tilde{x}_1 + \sin\varphi_1 \tilde{x}_2,$$

где $\varphi(\varphi_1)$ — угол между сферой $x(\tilde{x})$ и сферой $x_1(\tilde{x}_1)$. Углы θ_1 и θ_2, под к-рыми пересекаются главные сферы первого круга со вторым кругом, наз. главными углами пары кругов (они совпадают с углами, под к-рыми главные сферы второго круга пересекаются с первым кругом). Через главные углы инварианты пары кругов выражаются следующим образом:

$$k = \cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2, \quad h = \frac{1}{2}(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2).$$

Главные углы θ_1 и θ_2 определяют экстремальные значения углов, к-рые сферы одного круга образуют с другим. Если $\theta_1 = \theta_2$, то для всех сфер пары $\theta = \theta_1 = \theta_2$, и такая пара кругов наз. изогональной. С помощью инвариантов пары кругов можно охарактеризовать

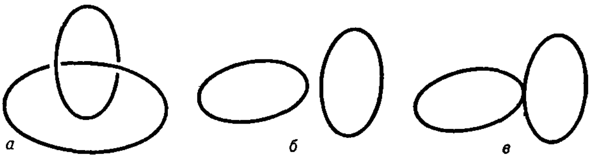


Рис. 2.

взаимное расположение двух кругов: а) зацепленные ($1-2h+k>0$), б) изолированные ($1-2h+k<0$), в) пересекающиеся ($1-2h+k=0$), и условие линейной независимости сфер x_i и $\tilde{x}_i$ (см. рис. 2). Необходимое и достаточное условие изогональности пары кругов $h^2 - k = 0$.

Использование в К. г. методов математич. анализа привело к созданию *конформно-дифференциальной геометрии*. На основе К. г. построена геометрия пространства *конформной связности*, относящаяся к К. г. как риманова геометрия к евклидовой. Для К. г. на плоскости употребительны также названия г е о м е т р и я о б р а т н ы х р а д и у с о в, к р у г о в а я г е ометрия, инверсионная геометрия, а также геометрия Мёбиуса (по имени А. Мёбиуса, A. Möbius), впервые изучавшего геометрию круговых преобразований.

Лит.: [1] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1939; [2] Blaschke W., Vorlesungen über Differential-Geometrie, Bd 3, B., 1929; [3] Бушманова Г. В., Норден А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972. *Г. В. Бушманова.*

КОНФОРМНАЯ СВЯЗНОСТЬ — *дифференциально-геометрическая структура* на гладком многообразии M, специальный вид связности на многообразии, когда приклеенное к M гладкое расслоенное пространство E имеет своим типовым слоем конформное пространство C_n размерности $n=\dim M$. Структурой такого пространства E к каждой точке $x\in M$ присоединяется экземпляр конформного пространства $(C_n)_x$, к-рый отождествляется (с точностью до конформных преобразований, сохраняющих x и все направления в ней) с касательным пространством $T_x(M)$, дополненным одной бесконечно удаленной точкой. К. с., как связность в таком E, предусматривает сопоставление каждой гладкой кривой $\mathscr{L}\subset M$ с началом x_0 и каждой ее точке x_t конформное отображение $\gamma_t:(C_n)_{x_t}\to(C_n)_{x_0}$ так, что удовлетворяется нек-рое условие (см. ниже условие на γ_t). Пусть пространство C_n отнесено к реперу, к-рый состоит из двух точек (вершин) и из n проходящих через них попарно ортогональных гиперсфер. Такой репер интерпретируется в псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_{n+2}$ как класс эквивалентных базисов, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{array}{c}(e_0,\ e_{n+1})=(e_1,\ e_1)=\ldots=(e_n,\ e_n),\\ (e_0,\ e_0)=(e_{n+1},\ e_{n+1})=(e_i,\ e_j)=0,\\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n,\ i\neq j,\end{array}\right\}\qquad(1)$$

относительно эквивалентности

$$\{e_\alpha\}\sim\{\lambda e_\alpha\},\quad \alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ n+1.$$

Пусть M покрыто координатными областями и в каждой области фиксировано гладкое поле репера в $(C_n)_x$, у к-рого вершина, определяемая вектором e_0, совпадает с x. Условие на γ_t следующее: при $t\to 0$, когда x_t перемещается по $\mathscr{L}$ до x_0, γ_t должно стремиться к тождественному отображению, причем главная часть его отклонения от последнего должна определяться относительно поля репера в нек-рой окрестности точки x_0 матрицей вида

$$\omega=\|\omega_\alpha^\beta\|=\left\|\begin{array}{c|c|c}\omega_0^0 & \omega_0^j & 0\\ \hline \omega_i^0 & \omega_i^j & -\omega_0^i\\ \hline 0 & -\omega_j^0 & -\omega_0^0\end{array}\right\|,\qquad(2)$$

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0,\quad \alpha,\ \beta=0,\ \ldots,\ n+1;\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

из $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ линейных дифференциальных форм ω_0^0, ω_0^i, ω_i^j $(i<j)$, ω_i^0 типа

$$\omega_\alpha^\beta=\Gamma_{\alpha i}^\beta dx^i,\ \det\left\|\Gamma_{0i}^j\right\|\neq 0.\qquad(3)$$

Другими словами, образ репера в точке x_t при γ_t должен быть определен векторами

$$e_\beta\ \left[\delta_\alpha^\beta+\omega_\alpha^\beta(X)\,t+\varepsilon_\alpha^\beta(t)\right],$$

где X — касательный вектор к $\mathscr{L}$ в точке x_0 и

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon_\alpha^\beta(t)}{t}=0.$$

При преобразовании репера поля в произвольной точке x согласно формулам $e_{\alpha'}=A_{\alpha'}^\beta e_\beta$, $e_\beta=A_\beta^{\alpha'}e_{\alpha'}$, сохраняющим условия (1), т. е. при переходе к произвольному элементу главного расслоенного пространства П реперов в пространствах $(C_n)_x$, формы (3) заменяются следующими 1-формами на П:

$$\omega_{\alpha'}^{\beta'} = A_{\gamma}^{\beta'} dA_{\alpha'}^{\gamma} + A_{\alpha'}^{\gamma} A_{\delta}^{\beta'} \omega_{\gamma}^{\delta},$$

образующими также матрицу ω' вида (2). 2-формы

$$\Omega_{\alpha'}^{\beta'} = d\omega_{\alpha'}^{\beta'} + \omega_{\gamma'}^{\beta'} \wedge \omega_{\alpha'}^{\gamma'}$$

образуют матрицу $\Omega' = \|\Omega_{\alpha'}^{\beta'}\|$ такой же структуры, как (2), и выражаются по формулам $\Omega_{\alpha'}^{\beta'} = A_{\alpha'}^{\gamma} A_{\delta}^{\beta'} \Omega_{\gamma}^{\delta}$ через формы $\Omega_{\alpha}^{\beta} = d\omega_{\alpha}^{\beta} + \omega_{\gamma}^{\beta} \wedge \omega_{\alpha}^{\gamma}$, являющиеся в силу (3) линейными комбинациями от $dx^k \wedge dx^l$, а следовательно и от $\omega_0^k \wedge \omega_0^l$. Для элементов матрицы ω' имеют место структурные уравнения К. с. (где для простоты опущены штрихи):

$$\left.\begin{aligned} &d\omega_0^0 + \omega_i^0 \wedge \omega_0^i = \Omega_0^0, \\ &d\omega_0^i + \left(\omega_j^i - \delta_j^i \omega_0^0\right) \wedge \omega_0^j = \Omega_0^i, \\ &d\omega_i^j + \omega_k^j \wedge \omega_i^k + \omega_0^j \wedge \omega_i^0 + \omega_j^0 \wedge \omega_0^i = \Omega_i^j, \ i < j, \\ &d\omega_i^0 + \omega_j^0 \wedge \left(\omega_i^j - \delta_i^j \omega_0^0\right) = \Omega_i^0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Здесь правые части полубазовы, т. е. являются линейными комбинациями только от $\omega_0^k \wedge \omega_0^l$; они составляют систему форм кручения-кривизны К. с. и преобразуются по законам

$$\Omega_{0'}^{0'} = A_{0'}^{0} \left(A_0^{0'} \Omega_0^0 + A_i^{0'} \Omega_0^i\right),$$

$$\Omega_{0'}^{i'} = A_{0'}^{0} A_j^{i'} \Omega_0^j,$$

$$\Omega_{i'}^{j'} = A_{i'}^{k} A_l^{j'} \Omega_k^l + \Omega_0^k \left(A_{i'}^{0} A_k^{j'} - A_{i'}^{k} A_{n+1}^{j'}\right).$$

Равенства $\Omega_0^i = 0$ имеют инвариантный смысл и выделяют К. с. нулевого кручения. Пусть

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} C_{ikl}^j \omega_0^k \wedge \omega_0^l;$$

тогда при $\Omega_0^i \equiv 0$:

$$C_{i'k'l'}^{j'} = \left(A_0^{0'}\right)^2 A_{i'}^{p} A_q^{j'} A_{k'}^{r} A_{l'}^{s} C_{prs}^{q}$$

и для $C_{ik} = C_{ikj}^j$:

$$C_{i'k'} = \left(A_0^{0'}\right)^2 A_{i'}^{p} A_{k'}^{r} C_{pr}.$$

Инвариантные тождества $\Omega_0^i \equiv \Omega_0^0 \equiv 0$, $C_{ik} = 0$ выделяет специальный класс так называемых (по Картану) нормальных К. с.

Формы (3), образующие матрицу вида (2), определяют К. с. на M однозначно: образ репера в точке x_t при γ_t: $(C_n)_{x_t} \to (C_n)_{x_0}$ определяется решением $\{e_\alpha(t)\}$ системы

$$du_\alpha = \left(\omega_\alpha^\beta\right)_{x(t)} \left(\dot{x}(t)\right) u_\beta$$

при начальных условиях $u_\alpha(0) = e_\alpha$, где $x^i = x^i(t)$ — уравнения кривой $\mathscr{L}$ в нек-рой координатной окрестности ее точки x_0 с координатами $x^i(0)$. Любые 1-формы ω_0^0, ω_0^i, $\omega_i^j (i<j)$, ω_i^0 на П, удовлетворяющие уравнениям (4) с правыми частями, выражающимися через $\omega_0^k \wedge \omega_0^e$, где ω_0^i $(i=1, \ldots, n)$ — линейно независимы, определяют в указанном смысле нек-рую К. с. на М.

К. с. дают удобный аппарат для исследования конформных отображений римановых пространств. К. с. сводится к *Леви-Чивита связности* нек-рого риманова пространства, если на M существуют локальные поля реперов, относительно к-рых

$$\omega_i^0 = P_{ij} \omega_0^j, \quad \omega_0^0 = Q_i \omega_0^i, \quad \Omega_0^i = Q_j \omega_0^i \wedge \omega_0^j.$$

Для тензора кривизны R^j_{ikl} этой связности, определяемого равенством

$$d\omega^j_i + \omega^j_k \wedge \omega^k_i = \frac{1}{2} R^j_{ikl} \omega^k_0 \wedge \omega^l_0,$$

имеет место

$$R^j_{ikl} = \delta^j_l P_{ik} - \delta^j_k P_{il} - \delta^i_l P_{jk} + \delta^i_k P_{jl} + C^j_{ikl}.$$

Обратно, для каждой связности Леви-Чивита риманова пространства существует единственная нормальная К. с., из к-рой она получается указанным способом. При этом $Q_j = 0$ и P_{ij} выражается через тензор Риччи $R_{ik} = R^j_{ikj}$ и скалярную кривизну $R = \sum R_{ii}$ формулой

$$P_{ij} = \frac{1}{n-2} R_{ij} - \delta^i_j \frac{R}{2(n-1)(n-2)}.$$

Соответствующий тензор C^j_{ikl} наз. тензором конформной кривизны связности Леви-Чивита. Два римановых пространства конформно эквивалентны, если их связности Леви-Чивита имеют совпадающие нормальные К. с. В частности, риманово пространство при $n > 3$ конформно евклидово тогда и только тогда, когда для него $C^j_{ikl} = 0$.

Лит.: [1] Cartan E., «Ann. polon. math.», 1923, t. 2, s. 171—221; [2] Картан Э., Пространства аффинной, проективной и конформной связности, пер. с франц., Казань, 1962; [3] Ogiue K., «Kodai Math. Semin. Repts», 1967, v. 19, p. 193—224. *Ю. Г. Лумисте.*

КОНФОРМНАЯ СТРУКТУРА — 1) К. с. на векторном пространстве V — класс K попарно гомотетичных евклидовых метрик пространства V. Любая евклидова метрика g пространства V определяет К. с.

$$K = \mathbb{R}^+ g = \{\lambda g,\ \lambda > 0\},$$

которая наз. К. с., порожденной евклидовой метрикой g. Автоморфизм A пространства V наз. автоморфизмом К. с. K, если индуцированное им преобразование пространства билинейных форм сохраняет множество K. Группа автоморфизмов К. с. изоморфна линейной конформной группе

$$CO(n) = \mathbb{R}^+ \times O(n), \quad n = \dim V,$$

являющейся прямым произведением мультипликативной группы положительных чисел и ортогональной группы.

2) К. с. на многообразии — поле конформных структур касательных пространств, т. е. подрасслоение $\pi: K \to M$ расслоения симметрических билинейных форм на многообразии M, слои $K_p = \pi^{-1}(p)$ к-рого суть К. с. соответствующих касательных пространств T_pM. Расслоение π является топологически тривиальным, и любое его сечение g (представляющее из себя риманову метрику на M) однозначно определяет К. с. по формуле

$$K_p = \{\lambda g_p,\quad \lambda > 0\}.$$

Сечение g наз. римановой метрикой, подчиненной К. с. K. Любое другое сечение g_1 расслоения имеет вид $g_1 = fg$, где f — положительная функция на M, т. е. римановы метрики g_1 и g конформно эквивалентны. Поэтому К. с. можно определить также как класс конформно эквивалентных римановых метрик. К. с. K на многообразии M можно отождествить с $CO(n)$-структурой B на M, состоящей из всех реперов на M, ортонормированных относительно хотя бы одной римановой метрики, подчиненной структуре K. Основные свойства К. с. определяются тем, что $CO(n)$-структура B является G-структурой второго порядка: ее первое продолжение есть $\mathbb{R}^n$-структура $B^{(1)} \to B$ на B, а второе продолжение — e-структура (поле реперов) на $B^{(1)}$. Отсюда в частности следует, что группа автоморфизмов К. с. K (к-рая совпадает с группой конформных преобразований любой подчиненной K римановой метрики) есть группа Ли размерности $\leqslant {}^1/_2(n+1)(n+2)$, а представление изотропии ее стационарной подгруппы в касательном пространстве второго порядка точно.

Как правило, группа автоморфизмов К. с. K совпадает с группой движений нек-рой подчиненной ей римановой метрики. Исключениями являются только стандартные конформные структуры K_0 на сфере S^n и евклидовом пространстве E^n, порожденные стандартными римановыми метриками. К. с. на многообразии M наз. локально плоской, если она локально эквивалентна стандартной К. с. K_0 евклидова пространства E^n, т. е. если в окрестности любой точки $p \in M$ существует подчиненная K плоская риманова метрика. Для того чтобы К. с. была локально плоской, необходимо и достаточно, чтобы тензор конформной кривизны Вейля нек-рой (а тем самым и любой) подчиненной ей римановой метрики был равен нулю. Примерами локально плоских К. с. являются стандартные К. с. в евклидовом пространстве E^n, на сфере S^n, в пространстве Лобачевского Λ^n, а также в пространствах $\Lambda^{n_1} \times S^{n_2}$ и $\Lambda^n \times E^1$, порожденные стандартными метриками. Ими исчерпываются все локально плоские К. с. на односвязных многообразиях, обладающие транзитивной группой автоморфизмов. Стандартная К. с. K_0 на сфере S^n выделяется среди всех К. с. как единственная К. с., имеющая максимальную (в смысле размерности) группу автоморфизмов. Сфера S^n, снабженная К. с. K_0, наз. конформным пространством.

Понятие К. с. тесно связано с понятием *конформной связности* на M: заданием такой связности всегда определена нек-рая К. с. на M; с другой стороны, конформная связность — это связность в приведенном главном расслоении, к-рое определяет данная К. с.

Лит.: [1] Kobayashi S., Transformation groups in differential geometry, B.— Hdlb.— N. Y., 1972; [2] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [3] Кимельфельд Б. Н., «Матем. заметки», 1970, т. 8, № 3, с. 321—28; [4] Алексеевский Д. В., «Матем. сб.», 1972, т. 89, № 2, с. 280—96.

Д. В. Алексеевский, Ю. Г. Лумисте.

КОНФОРМНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ — сеть на двумерной поверхности евклидова пространства, допускающая *конформное отображение* на *геодезическую сеть*. При повороте на прямой угол К.-г. с. переходит в *ромбическую сеть*, и обратно. *В. Т. Базылев.*

КОНФОРМНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел *конформной геометрии*, в котором геометрические образы, инвариантные при конформных преобразованиях, изучаются методами анализа бесконечно малых, в первую очередь дифференциального исчисления.

В конформной плоскости M_2 каждая точка и круг определяются вектором $x(x_1, x_2, x_3, x_4)$, где x_i, $i=1,2, 3,4$ — *тетрациклические координаты*. Для точки

$$(xx) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

для круга $(xx) > 0$. К.-д. г. плоскости изучает последовательности и конгруэнции кругов. Последовательности кругов соответствует в трехмерном гиперболич. пространстве кривая, конгруэнции кругов — поверхность. Последовательность задается параметрич. уравнением $x = x(t)$. Параметр t можно специализировать, взяв в качестве него

$$\sigma = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt;$$

$d\sigma$ — угол между двумя бесконечно близкими кругами последовательности. Особое значение в теории последовательностей имеют две ветви огибающей этой последовательности $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ и $\tilde{\boldsymbol{v}} = \tilde{\boldsymbol{v}}(t)$, их соприкасающиеся круги. Как и в обычной дифференциальной геометрии кривых можно записать деривационные формулы для последовательности кругов, разложив производные векторов x, $z=dx/d\sigma$. v, $\tilde{v}$ по ним самим:

$$\frac{dx}{d\sigma}=z, \quad \frac{dz}{d\sigma}=-x+\tilde{c}v+c\tilde{v},$$

$$\frac{dv}{d\sigma}=-cz, \quad \frac{d\tilde{v}}{\sigma}=-\tilde{c}z.$$

Можно получить два инварианта $b=-2c\tilde{c}$ и $g=c'/c$. Инвариант b выражается через угол φ между соприкасающимися кругами огибающей: $b=1/\sin^2\varphi/2$. Теория кривых конформной плоскости строится на основе теории последовательности кругов: каждая кривая рассматривается как огибающая: последовательности, у к-рой инвариант $g=\pm 1$. Если при этом инвариант b постоянный, то кривая оказывается изогональной траекторией пучка кругов, т. е. локсодромой.

В трехмерном конформном пространстве M_3 уравнение $x=x(t)$ задает последовательность сфер. При ее изучении важную роль играет ее огибающая поверхность, так наз. *каналовая поверхность*. Каждая последовательность сфер характеризуется тремя инвариантами, выражающимися через нек-рые углы, связанные со сферами последовательности.

Конгруэнция кругов в M_2 задается уравнением $x=x(u_1, u_2)$. На поверхности, соответствующей ей в гиперболич. пространстве, удобно ввести полярную нормализацию, приняв за нормаль 1-го рода прямую, ортогональную касательной плоскости поверхности в точке x, а за нормаль 2-го рода — поляру нормали 1 рода относительно абсолюта K (см. [3]). В M_3 нормализации поверхности соответствует нормализация конгруэнции: каждому кругу x конгруэнции ставится в соответствие круг $\tilde{x}$, ортогональный кругу x и всякому бесконечно близкому кругу, и два круга y_i, определяющие пучок кругов, сопряженный пучку $\{x, \tilde{x}\}$: $y_i=\partial_i x$. В соответствии с инвариантами поверхности в гиперболич. пространстве на M_2 определяются инварианты конгруэнции кругов, выделяются специальные виды конгруэнций.

В теории поверхностей M_3 вводится оснащение поверхности с помощью нормализующих кругов, ортогональных в каждой точке всем касательным сферам поверхности; связывается с каждой точкой конформный репер, состоящий из точки поверхности x, двух координатных сфер y_i, $i=1, 2$, определяющих нормализующий круг, касательной в точке x сферы z и точки X пересечения этой сферы и нормализующего круга. В общей теории нормализации поверхностей используется изоморфизм теории нормализованных поверхностей конформного пространства и теории внутренних полярных нормализаций абсолюта гиперболич. пространства. Внутренняя геометрия нормализованной поверхности M_n есть геометрия Вейля, основной тензор к-рой совпадает с тензором угловой метрики поверхности, а дополнительный тензор есть нормализатор, определяющий опорные координатные сферы.

Результаты, полученные для нормализованной поверхности, справедливы и для нормализованного конформного пространства.

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaus, pt. 1—4, P., 1887—96; 2 éd., pt. 1—2, P., 1914—26; [2] Blaschke W., Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd 3, B., 1929; [3] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [4] Бушманова Г. В., Норден А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972.

Г. В. Бушманова.

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение, сохраняющее форму бесконечно малых фигур.

Основные понятия. Непрерывное отображение $w=f(z)$ области G n-мерного евклидова пространства $(n\geqslant 2)$ в n-мерное евклидово пространство наз. конформным в точке $z_0 \in G$, если оно в этой точке обладает свойствами постоянства растяжений и сохранения углов. Свойство постоянства растяжений в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ состоит в том, что отношение $|f(z)-f(z_0)|/|z-z_0|$ расстояния между образами $f(z)$ и $f(z_0)$ точек z и z_0 к расстоянию между z и z_0 стремится к определенному пределу $k=k(z_0, f)$, когда z стремится к z_0 произвольным образом; число k наз. коэффициентом растяжения в точке z_0 при рассматриваемом отображении. Свойство сохранения (консерватизма) углов в точке $z_0 \in G$ при отображении $w=f(z)$ состоит в том, что любая пара непрерывных кривых l_1, l_2, расположенных в G и пересекающихся в точке z_0 под углом α (т. е. имеющих касательные в точке z_0, образующие между собой угол α), при рассматриваемом отображении переходит в пару непрерывных кривых L_1, L_2, пересекающихся в точке $w_0=f(z_0)$ под тем же углом α. Непрерывное отображение области G наз. конформным, если оно конформно в каждой точке этой области. По определению, К. о. области G обязано быть непрерывным и конформным лишь во внутренних точках G, и если говорят о К. о. замкнутой области, то, как правило, имеют в виду непрерывное отображение замкнутой области, конформное в ее внутренних точках.

В наиболее важном случае $n=2$ область G и ее образ $f(G)$ при отображении f лежат в плоскости, к-рую удобно рассматривать как плоскость $\mathbb{C}$ комплексного переменного z; соответственно отображение $w=f(z)$ является комплекснозначной функцией комплексного переменного $z \in G$. При этом если в точке z_0 отображение $w=f(z)$ сохраняет углы, то криволинейные углы с вершиной z_0 при этом отображении либо все сохраняют свою абсолютную величину и знак, либо все сохраняют свою абсолютную величину, изменяя знак на противоположный. В первом случае говорят, что отображение в точке z_0 является К. о. первого рода, во втором — К. о. второго рода. Если функция $w=f(z)$ задает К. о. второго рода в точке z_0, то комплексно сопряженная функция $w=\overline{f(z)}$ задает К. о. первого рода в точке z_0, и наоборот. Поэтому изучаются лишь К. о. первого рода, и именно их обычно имеют в виду, когда говорят о К. о., не уточняя их род.

Если отображение $w=f(z)$ конформно в точке z_0, то при $z \to z_0$ существует конечный предел отношения $(f(z)-f(z_0))/(z-z_0)$, т. е. существует производная $f'(z_0)$. При дополнительном предположении, что $f'(z_0) \neq 0$, верно и обратное.

Таким образом, если существует $f'(z_0) \neq 0$, то каждый бесконечно малый вектор с началом в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ растягивается в $k(z_0, f)=|f'(z_0)|$ раз, поворачивается на угол $\arg f'(z_0)$ и параллельно сдвигается на вектор $f(z_0)-z_0$; бесконечно малые круги с центром z_0 переходят в бесконечно малые круги.

Отображение $w=f(z)$ является конформным в области G конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда функция $f(z)$, $z \in G$, является аналитической и $f'(z) \neq 0$ в G. Для конформности отображения $w=f(z)$ (и аналитичности $f(z)$) в области G достаточно потребовать, чтобы непрерывная функция $f(z)$ обладала в каждой точке $z \in G$ лишь свойством сохранения углов (с сохранением не только величин углов при этом отображении, но и их знаков). Если же от непрерывного отображения $w=f(z)$, $z \in G$, потребовать однолистности его (т. е. взаимной однозначности) и постоянства растяжений в каждой точке, то это отображение будет конформным первого или второго рода, так что либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$ является аналитич. функцией, производная к-рой всюду в G отлична от нуля. В случае аналитичности $f(z)$ в нек-рой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ следующие три свойства эквивалентны: а) отображение $w=f(z)$ конформно (первого рода) в точке z_0, б) функция $f(z)$ (локально) однолистна в точке z_0, в) $f'(z_0)\neq 0$. Всякая однолистная аналитическая в области G функция совершает К. о. области G на область $f(G)$ той же связности; при этом обратная функция $f^{-1}(z)$ является в области $f(G)$ однолистной аналитич. функцией с ненулевой производной. Существуют и неоднолистные К. о. (например, отображение $w=z^4$ конформно и не однолистно в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$, а $w=e^z$ — во всей плоскости $\mathbb{C}$).

В теории плоских К. о. и ее приложениях принципиальным является вопрос о возможности однолистно и конформно отобразить одну заданную область на другую, а в практических приложениях — вопрос о возможности это сделать посредством сравнительно простых функций. Первую задачу для случая односвязных областей, границы к-рых не пусты и не вырождаются в точки, решает в положительном смысле *Римана теорема* о конформном отображении. Вторая задача для нек-рых областей специального вида решается применением элементарных функций комплексного переменного (см. ниже), *Кристоффеля — Шварца формулы* для отображения полуплоскости или круга на многоугольник, применением *симметрии принципа* и приближенных методов К. о. По теореме Римана, все односвязные области расширенной комплексной плоскости с непустыми границами, не вырождающимися в точки, конформно эквивалентны. Иначе обстоит дело с К. о. многосвязных областей. Поскольку однолистное К. о. нек-рой области G_1 на другую область G_2 является взаимно однозначным и взаимно непрерывным, то для существования такого отображения необходимо, чтобы G_1 и G_2 имели один и тот же порядок связности, т. е. они одновременно должны быть либо односвязными, либо двусвязными и т. д., либо бесконечносвязными. Однако это необходимое условие не является достаточным, что проявляется уже в случае односвязных областей. Так, круг $|z|<1$ нельзя однолистно и конформно отобразить на конечную плоскость $\mathbb{C}$, а расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ нельзя конформно и однолистно отобразить на круг $|z|<1$ или плоскость $\mathbb{C}$ (на самом деле, последние два отображения невозможно выполнить даже топологически). Еще более жесткая ситуация имеет место в случае многосвязных областей. Напр., круговое кольцо $G_1=\{z : r_1<|z|<R_1\}$ можно однолистно и конформно отобразить на другое круговое кольцо $G_2=\{z : r_2<|z|<R_2\}$, $r_1>0$, $r_2>0$, тогда и только тогда, когда эти кольца подобны, т. е. $R_1 : r_1=R_2 : r_2$; в этом случае всякое К. о. G_1 на G_2 является целой линейной функцией вида $e^{i\beta}r_2z/r_1$, где β — некоторое действительное число. Однако всякую конечносвязную область G расширенной комплексной плоскости с непустой границей можно однолистно и конформно отобразить на любую из так наз. канонических областей той же связности, содержащую точку ∞, а именно: на расширенную плоскость с конечными горизонтальными разрезами, на расширенную плоскость с исключенными конечными не пересекающимися замкнутыми кругами, на расширенную плоскость с исключенными замкнутыми дугами логарифмич. спиралей заданного наклона θ; при этом отдельные отрезки, круги и дуги спиралей могут вырождаться в точки. Если потребовать, чтобы заданная точка $a\in G$ при таком отображении перешла в ∞ и при $z\to a$ выполнялось соотношение $f(z)=(z-a)^{-1}+O(z-a)$ при $a\neq\infty$ или соотношение $f(z)=z+O(1/z)$ при $a=\infty$, то в случае канонич. областей первых двух перечисленных типов отображающая функция $w=f(z)$ существует, определяется единственным образом и наз. каноническим К. о. Эти теоремы справедливы и для бесконечносвязных областей.

Всякое однолистное К. о. области G_1, ограниченной конечным числом непересекающихся окружностей (при этом прямая считается окружностью бесконечно большого радиуса), на область G_2 этого же типа является *дробно-линейным отображением*. В теории аналитич. функций рассматриваются также неоднолистные отображения областей разной связности друг на друга посредством аналитич. функций, в том числе К. о. круга на многосвязные области, отображение n-связных областей на n-листный круг, вообще, отображения одной римановой поверхности на другую.

В теории К. о. и ее приложениях важную роль играют так наз. условия нормировки, или условия единственности, К. о., обеспечивающие выделение одной единственной функции из рассматриваемого бесконечного класса К. о. одной заданной области на другую (в случае односвязных областей) или заданной области на каноническую область определенного типа (в случае областей любой связности). Наиболее употребительные условия нормировки К. о. в случае односвязных областей G_1, G_2 с непустыми границами Γ_1, Γ_2 соответственно, не вырождающимися в точки, таковы: 1) заданная конечная точка $a \in G_1$ переходит в заданную конечную точку $b \in G_2$, причем $\arg f'(a) = \alpha$, где α — наперед заданное действительное число, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ (см. *Римана теорема* о К. о.); 2) заданная точка $a \in G_1$ переходит в заданную точку $b \in G_2$, а заданная *достижимая граничная точка* (или *граничный элемент*) ζ_1 области G_1 переходит в заданную достижимую граничную точку (граничный элемент) ω_1 области G_2 (см. *Конформных отображений граничные свойства*); 3) заданные три различные достижимые граничные точки (граничные элементы) ζ_1, ζ_2, ζ_3 области G_1 переходят соответственно в заданные достижимые граничные точки (граничные элементы) ω_1, ω_2, ω_3 области G_2, при этом, если при движении по Γ_1 от ζ_1 к ζ_3 через ζ_2 область G_1 остается слева (справа), то при движении по Γ_2 от ω_1 к ω_3 через ω_2 область G_2 также должна оставаться слева (соответственно справа). Последними двумя типами нормировок проще всего пользоваться в случае областей, ограниченных замкнутыми жордановыми кривыми, так как в этом случае понятия достижимой граничной точки и граничного элемента области эквивалентны понятию граничной точки области. Об условиях нормировки в случае отображения области произвольной связности на каноническую область сказано выше.

К. о. областей n-мерного евклидова пространства при $n \geqslant 3$ образуют весьма узкий класс так наз. мёбиусовых отображений, каждое из к-рых является либо линейным преобразованием подобия, либо композицией такого линейного преобразования подобия и одной *инверсии* (т. е. симметрии относительно нек-рой сферы в пространстве, или преобразования обратных радиусов) (теорема Лиувилля).

Существенно более обширный класс отображений при $n \geqslant 2$ образуют так наз. *квазиконформные отображения*. При этих отображениях формы бесконечно малых фигур искажаются, но в ограниченных пределах, в частности в ограниченных пределах меняются величины углов, а бесконечно малые шары переходят в бесконечно малые эллипсоиды с ограниченным отношением наибольшей полуоси к наименьшей. Большую роль играют К. о. двумерных областей не только плоских, но и лежащих на гладких поверхностях. Примеры таких К. о. дают *стереографическая проекция* и проекция Меркатора сферы на плоскость. Они были открыты и нашли применение в картографии (см. *Картографии математические задачи*, *Картографическая проекция*). Заметим, что постановка в общем виде задачи о К. о. поверхностей в свое время привела к возникновению и развитию общей теории поверхностей. К. о. имеют обширные применения в теории функций, теории потенциала, при решении краевых задач для уравнений математической физики, прежде всего при решении первой краевой задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.

Конформное отображение некоторых односвязных областей. Растяжения, повороты и параллельные переносы областей комплексной плоскости осуществляют целые линейные функции вида $w=az+b$. Однолистные К. о. полуплоскостей, кругов и внешностей кругов друг на друга осуществляются посредством дробно-линейных функций. При этом каковы бы ни были три различные точки ζ_1, ζ_2, ζ_3 границы одной и той же области G_1 (занумерованные так, что при движении по границе G_1 от ζ_1 к ζ_3 через ζ_2 область G_1 остается слева) и различные точки ω_1, ω_2, ω_3 границы другой такой области G_2 (занумерованные аналогичным образом), существует, и притом единственная, дробно-линейная функция $w=L(z)$, однолистно и конформно отображающая G_1 на G_2 с условиями нормировки третьего типа: $L(\zeta_k)=$ $=\omega_k$, $k=1, 2, 3$. Эта функция находится из уравнения

$$\frac{w-\omega_1}{w-\omega_2}:\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_3-\omega_2}=\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}:\frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_2},$$

в к-ром каждый числитель или знаменатель заменяется числом 1, если в его запись должна войти точка $\omega_k=\infty$ или точка $\zeta_k=\infty$. В частности, общий вид отображений единичного круга $D=\{z : |z|<1\}$ на себя:

$$w=L_1(z)=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

а общий вид отображения верхней полуплоскости $P=\{z : \operatorname{Im} z>0\}$ на этот круг:

$$w=L_2(z)=e^{i\alpha}\frac{z-c}{z-\bar{c}}.$$

Здесь a и c — соответственно прообразы точки 0 при этих отображениях, $\alpha=\arg L_1'(a)=\arg L_2'(c)$, $0\leqslant\alpha<$ $<2\pi$. Числа a, $|a|<1$, c, $\operatorname{Im} c>0$, и α, $0\leqslant\alpha<2\pi$, могут задаваться произвольно. Таким образом, указанный общий вид однолистных К. о. единичного круга и верхней полуплоскости на единичный круг позволяет легко учитывать условия нормировки первого типа при этих отображениях. Условия нормировки второго типа с $b=0$ при этих же отображениях также легко выполнить, если воспользоваться указанным общим видом с заданным a (или c), после чего остается только подобрать множитель $e^{i\alpha}$ из условия соответствия заданных граничных точек ζ и ω.

Простота выполнения условий нормировки при отображении единичного круга на себя или верхней полуплоскости на себя лежит в основе следующего употребительного приема, с помощью к-рого учитывают условия нормировки при однолистных К. о. произвольных областей G_1, G_2 с непустыми невырожденными границами друг на друга. Именно, обе области G_1 и G_2 каким-либо образом конформно и однолистно отображают на D (или на P) с помощью нек-рых функций $w=f_1(z)$ и $w=f_2(z)$ соответственно, после чего задача об отображении G_1 на G_2 с нек-рыми условиями нормировки сводится к задаче о дробно-линейном отображении $w=$ $=L(z)$ круга D (соответственно полуплоскости P) на себя с выполнением соответствующих условий нормировки. Если функция L найдена, то $f(z)=f_2^{-1}(L(f_1(z)))$ решает исходную задачу. Ввиду этого обстоятельства ниже приводятся лишь однолистные К. о. различных областей на единичный круг D или на верхнюю полуплоскость P без каких-либо условий нормировки.

1) Горизонтальную полосу $\{z=x+iy : 0<y<\pi\}$ на верхнюю полуплоскость отображает функция $w=$ $=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$. Эта функция каждую горизонталь $y=c$ переводит в луч $\operatorname{Arg} w=c$; каждый вертикальный отрезок $\{x+iy : x=d, \ \alpha\leqslant y\leqslant\beta\}$ — в дугу $\{w : |w|=e^d, \ \alpha\leqslant\operatorname{Arg} w\leqslant\beta\}$.

2) Вертикальную полосу $\{x+iy: -\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\}$ на круг D отображает функция $w=\operatorname{tg} z$. При этом вертикаль $x=c$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant c\leqslant\frac{\pi}{4}$, переходит в «меридиан» — дугу окружности с концами i и $-i$, проходящую через точку $w=\operatorname{tg} c$, а горизонтальный отрезок $\{x+iy: -\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}, y=d\}$, $-\infty<d<\infty$, переходит в «параллель» — дугу окружности, ортогональную «меридианам», соединяющую левую часть единичной окружности с ее правой частью и проходящую через точку $z=i\operatorname{th} d$.

3) Полуполоса $\{x+iy: -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ y>0\}$ отображается на P функцией $w=\sin z$. При этом горизонтальные отрезки переходят в дуги эллипсов с фокусами -1, $+1$, а вертикальные — в дуги гипербол с теми же фокусами.

4) Угол $V_\alpha=\{z: 0<\arg z<\alpha\}$, $0<\alpha\leqslant 2\pi$, на угол $V_\beta=\{z: 0<\arg z<\beta\}$, $0<\beta\leqslant 2\pi$ ($V_\pi=P$), отображает функция

$$w=\exp\left\{\frac{\beta}{\alpha}\ln z\right\}=|z|^{\beta/\alpha}\left(\cos\left(\frac{\beta}{\alpha}\arg z\right)+\right.$$
$$\left.+i\sin\left(\frac{\beta}{\alpha}\arg z\right)\right)$$

— однозначная аналитическая ветвь функции $w=z^{\beta/\alpha}$. При этом луч $\arg z=c$ переходит в луч $\arg w=\beta c/\alpha$, дуга окружности $|z|=d$ — в дугу окружности $|w|=d^{\beta/\alpha}$.

5) Внутренность или внешность двуугольника с вершинами a и b ($a\neq b$), образованного двумя дугами окружностей или дугой окружности и отрезком прямой, имеющими общие концы в этих точках, может быть отображена на P следующим образом. Сначала дробно-линейным преобразованием $w_1=(z-a)/(z-b)$ отображают данную область на угол V с вершиной в O, затем поворотом $w_2=e^{i\gamma}w_1$ на нек-рый угол γ переводят V в нек-рый угол V_α (см. п. 4), после чего пользуются преобразованием п. 4 с $\beta=\pi$.

6) Внешность эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ с фокусным расстоянием $c=\sqrt{a^2-b^2}>0$ отображается однозначной аналитической ветвью функции (см. *Жуковского функция*)

$$w=\frac{1}{c}\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right),$$

выделяемой условием $|w|<1$, на круг $|w|<c/(a+b)$, а второй ее ветвью, выделяемой условием $|w|>1$, — на область $|w|>(a+b)/c$. Эти же ветви отображают расширенную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с удаленным отрезком $[-c, c]$ соответственно на внутренность и внешность единичной окружности $|z|=1$. Внутренность эллипса нельзя отобразить на D или P посредством композиции элементарных функций; это отображение осуществляется посредством композиции элементарных функций и эллиптич. синуса $\operatorname{sn} z$.

7) Часть G плоскости $\mathbb{C}$, заключенная между ветвями гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ с фокусным расстоянием $c=\sqrt{a^2+b^2}$, отображается на P функцией

$$w=\left(e^{-i\gamma}\frac{1}{c}\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)\right)^{\pi/(\pi-2\gamma)},$$

где однозначная аналитич. ветвь функции $t=z+\sqrt{z^2-c^2}$ в области G выделяется условием $\operatorname{Im} t>0$, $\gamma=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$,

$$\zeta^{\pi/(\pi-2\gamma)}=|\zeta|^{\pi/(\pi-2\gamma)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{\pi-2\gamma}\arg\zeta\right)+\right.$$
$$\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{\pi-2\gamma}\arg\zeta\right)\right).$$

Внутренность правой ветви этой гиперболы отображается на верхнюю полуплоскость однозначной ветвью аналитич. функции

$$i\,\mathrm{ch}\left\{\frac{\pi}{2\gamma}\,\mathrm{arch}\,\frac{z}{c}\right\},$$

где $\mathrm{arch}\,\zeta$ означает (единственное) решение уравнения $\mathrm{ch}\,\omega=\zeta$, принадлежащее полосе $\{z:0<\mathrm{Im}\,z<\pi\}$ с присоединенной действительной положительной полуосью.

8) Внешность параболы $y^2=2px$ отображается на P однозначной аналитич. ветвью функции

$$w=\sqrt{z-\frac{p}{2}}-i\sqrt{\frac{p}{2}},$$

выделяемой условием $\mathrm{Im}\,w>0$, т. е. функцией

$$w=\sqrt{\left|z-\frac{p}{2}\right|}\left\{\cos\frac{1}{2}\arg\left(z-\frac{p}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\frac{1}{2}\arg\left(z-\frac{p}{2}\right)\right\}-i\sqrt{\frac{p}{2}},$$

где значения квадратного корня берутся положительные. Внутренность этой параболы отображает на P однозначная аналитич. функция

$$w=i\,\mathrm{ch}\,\pi\sqrt{\frac{z}{2p}-\frac{1}{4}},$$

где

$$\sqrt{\zeta}=\sqrt{|\zeta|}\left(\cos\frac{1}{2}\arg\zeta+i\sin\frac{1}{2}\arg\zeta\right),$$

$$0\leqslant\arg\zeta<2\pi.$$

9) Прямоугольник $Q=\{x+iy:-a<x<a,\ 0<y<b\}$ отображается на P с помощью эллиптич. синуса, а P отображается на Q одной из однозначных аналитич. ветвей функции

$$w=c\int_0^z\{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)\}^{-1/2}d\zeta,$$

где k зависит от отношения a/b, а c — от величины a/K,

$$K=\int_0^1\{(1-t^2)(1-k^2t^2)\}^{-1/2}dt.$$

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1939, т. 6, с. 90—119; [4] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [5] Лаврентьев М. А., Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики, М.— Л., 1946; [6] Коппенфельс В., Штальман Ф., Практика конформных отображений, пер. с нем., М., 1963; [7] Лаврик В. И., Савенков В. Н., Справочник по конформным отображениям, К., 1970; [8] Фильчакова В. П., Конформные отображения областей специального типа, К., 1972; [9] Каратеодори К., Конформное отображение, пер. с англ., М.— Л., 1934; [10] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972; [11] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, 2 изд., М., 1977.

Е. П. Долженко.

КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — взаимно однозначное *конформное отображение*. К. п. в n-мерном, $n>2$, евклидовом пространстве, образует $(n+1)(n+2)/2$-параметрическую конформную группу.

М. И. Войцеховский.

КОНФОРМНОЕ ПРОСТРАНСТВО M_n — евклидово пространство E_n, дополненное одной несобственной (бесконечно удаленной) точкой. Рассматривается в *конформной геометрии*, в к-рой в этом пространстве задается фундаментальная группа, состоящая из точечных преобразований, переводящих сферы (в M_2 окружности) в сферы. С помощью *стереографической проекции* К. п. M_n отображается на абсолют K_n пространства P_{n+1} с гиперболич. метрикой, а фундаментальная группа конформной геометрии изоморфна группе гиперболич. движений этого P_{n+1}.

Наличие одной несобственной точки обеспечивает взаимную однозначность стереографич. проекции. При преобразованиях конформной группы несобственная точка может переходить в обычную точку. Поэтому в К. п. сфера неразличима с плоскостью. Плоскость — это сфера, проходящая через несобственную точку.

Г. В. Бушманова.

КОНФОРМНО-ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — риманово пространство, допускающее конформное отображение на евклидово пространство. Тензор кривизны К.-е. п. имеет вид

$$R_{ijk.}^{\ \ \ \ l} = 2T^{lm}_{\ \ ..k[i}p_{j]m}, \qquad (*)$$

где

$$T^{km}_{\ \ ..ij} = \delta_i^k\delta_j^m + \delta_j^k\delta_i^m - g^{km}g_{ij},$$

$$p_{ij} = \nabla_i p_j - \frac{1}{2}T^{km}_{\ \ ..ij}p_k p_m.$$

При $n=2$ всякое V_n есть К.-е. п. Для того чтобы пространство при $n>3$ было К.-е. п., необходимо и достаточно, чтобы существовал тензор p_{ij}, удовлетворяющий условиям (*) и $\nabla_{[k}p_{i]j}=0$. Иногда К.-е. п. наз. пространство Вейля, допускающее конформное отображение на евклидово пространство (см. [2]).

Лит.: [1] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 2, М.—Л., 1948; [2] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.

Г. В. Бушманова.

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНАЯ МЕТРИКА на римановой поверхности R — правило, к-рое каждому локальному параметру z, отображающему параметрич. окрестность $U\subset R$ в замкнутую комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ $(z: U\to\overline{\mathbb{C}})$, ставит в соответствие действительную функцию

$$\rho_z : z(U) \longrightarrow [0, +\infty]$$

такую, что для всяких локальных параметров $z_1 : U_1 \to \overline{\mathbb{C}}$ и $z_2 : U_2 \to \overline{\mathbb{C}}$ с непустым пересечением $U_1 \cap U_2$ в последнем выполнено соотношение

$$\frac{\rho_{z_2}(z_2(p))}{\rho_{z_1}(z_1(p))} = \left|\frac{dz_1(p)}{dz_2(p)}\right| \qquad (\forall p \in U_1 \cap U_2),$$

где $z(U)$ — образ U в $\overline{\mathbb{C}}$ при отображении z. К.-и. м. часто обозначается символом $\rho(z)|dz|$, к-рому приписывается указанная инвариантность относительно выбора локального параметра z.

Всякий линейный дифференциал $\lambda(z)\,dz$ или *квадратичный дифференциал* $Q(z)\,dz^2$ порождает К.-и. м. соответственно $|\lambda(z)|\cdot|dz|$ или $|Q(z)|^{1/2}|dz|$. Понятие К.-и. м. позволяет ввести понятие длины для кривых на R, а также понятия экстремальной длины и модуля семейств кривых, являющиеся весьма общей формой определения конформных инвариантов (см. *Экстремальной метрики метод*, а также [1]). Определение К.-и. м. может быть перенесено на римановы многообразия любой размерности.

Лит.: [1] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [2] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957; [3] Альфорс Л., Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, пер. с англ., М., 1961. *П. М. Тамразов.*

КОНФОРМНЫЙ РАДИУС области — характеристика конформного отображения односвязной области, определяемая следующим образом. Пусть D — односвязная область плоскости z, имеющая более одной граничной точки. Пусть z_0 — точка D. Если $z_0 \neq \infty$, то существует единственная функция $w=f(z)$, регулярная в D, нормированная условиями $f(z_0)=0$, $f'(z_0)=1$ и однолистно отображающая область D на круг $|w|<r$. Радиус $r=r(z_0, D)$ указанного круга

наз. К. р. области D в т о ч к е z_0. Если $\infty \in D$, то существует единственная функция $w=f(z)$, регулярная в области D за исключением точки ∞, в окрестности к-рой она имеет разложение в ряд Лорана вида

$$f(z)=z+c_0+c_1 z^{-1}+\ldots,$$

и однолистно отображающая D на область $|w|>r$. В этом случае величина $r=r(\infty, D)$ наз. К. р. области D в т о ч к е ∞. К. р. области D, $\infty \in D$, в точке ∞ равен *трансфинитному диаметру* границы C области D, или *емкости* множества C.

Расширением понятия К. р. области на случай произвольной области D комплексной плоскости z является понятие внутреннего радиуса области D в точке $z_0 \in D$ (в зарубежной литературе термин «внутренний радиус» употребляется и в случае односвязной области). Пусть D — область комплексной плоскости z, z_0 — точка D и пусть существует функция Грина $g(z, z_0)$ области D с полюсом в точке z_0. Пусть γ — п о с т о я н н а я Р о б э н а области D относительно точки z_0:

$$\gamma=\begin{cases}\lim\limits_{z \to z_0}[g(z, z_0)+\ln|z-z_0|] & \text{при } z_0 \neq \infty, \\ \lim\limits_{z \to \infty}[g(z, \infty)-\ln|z|] & \text{при } z_0=\infty.\end{cases}$$

Величина $r=e^{\gamma}$ наз. в н у т р е н н и м р а д и у с о м области D в т о ч к е z_0. Если D — односвязная область, граница к-рой содержит не менее двух точек, то внутренний радиус области D в точке $z_0 \in D$ равен К. р. области D в точке z_0. Внутренний радиус области не убывает с расширением области: если области D, D_1 имеют функции Грина $g(z, z_0)$, $g_1(z, z_0)$ соответственно, $z_0 \in D \cap D_1$, и если $D \subset D_1$, то для внутренних радиусов r, r_1 областей D, D_1 в точке z_0 справедливо неравенство

$$r \leqslant r_1.$$

Внутренний радиус произвольной области D в точке $z_0 \in D$ определяется как точная верхняя граница множества внутренних радиусов в точке z_0 всех областей, содержащих z_0, содержащихся в D и имеющих функцию Грина. В соответствии с этим определением, если область D не обладает функцией Грина, то внутренний радиус r области D в точке $z_0 \in D$ равен ∞.

Лит.: [1] Г о л у з и н Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] С м и р н о в В. И., Л е б е д е в Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.— Л., 1964; [3] Х е й м а н В. К., Многолистные функции, пер. с англ., М., 1960.

Г. В. Кузьмина.

КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА — свойства функций, конформно отображающих одну область комплексной плоскости на другую, проявляющиеся вблизи границы отображаемой области и на самой границе. К числу таких свойств относятся: возможность непрерывного продолжения функции $w=f(z)$, конформно отображающей рассматриваемую область G_1 на область G_2, в нек-рую точку ζ границы Γ_1 области G_1 или на всю границу Γ_1 этой области; характер разрыва в случае невозможности такого продолжения; наличие конформности продолженного отображения в граничных точках $\zeta \in \Gamma_1$; дифференциально-гладкостные свойства продолженной функции на Γ_1 и на замкнутой области $\bar{G}_1=G_1 \cup \Gamma_1$; принадлежность производной $f'(z)$, $z \in G_1$, отображающей функции к различным классам функций, аналитических в G_1, и т. п. Эти свойства изучаются в зависимости от свойств границ областей G_1 и G_2. Из самых общих К. о. г. с. можно выделить следующее: каковы бы ни были односвязные области G_1 и G_2 и однолистное конформное отображение $w=f(z)$ области G_1 на G_2, это отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между *граничными элементами* этих областей в том смысле, что класс всех эквивалентных путей, лежащих в области G_1 и определяющих нек-рый граничный элемент ζ области G_1, переходит при этом отображении в класс всех эквивалентных путей, лежащих в области G_2 и определяющих нек-рый граничный элемент ω области G_2 (обратное отображение $z=f^{-1}(w)$, $w\in G_2$, переводит класс эквивалентных путей, определяющих ω, в класс эквивалентных путей, определяющих ζ). При этом в специальной топологии f задает гомеоморфизм области G_2 с присоединенными ее граничными элементами (рассматриваемыми наряду с точками $z\in G_1$ как точки топологич. пространства) на область G_2 с присоединенными граничными элементами. Обычно рассматривается случай, когда одна из областей G_1, G_2 является единичным кругом $D=\{z : |z|<1\}$ (реже полуплоскостью или углом), общий же случай сводится к этому частному случаю.

Пусть $w=f(z)$ — однолистное конформное отображение круга D с границей $C=\{z : |z|=1\}$ на ограниченную односвязную область G с границей Γ, $z=\varphi(w)$ — обратное конформное отображение: $\varphi(f(z))=z$ при $z\in D$. Имеют место следующие результаты.

1) Для того чтобы отображение $w=f(z)$ непрерывно продолжалось в точку $\zeta\in C$, необходимо и достаточно, чтобы граничный элемент области G, соответствующий точке ζ при этом отображении, был граничным элементом 1 рода (т. е. состоял из единственной точки). Для непрерывной продолжимости функции $z=\varphi(w)$ в точку $\omega\in\Gamma$ необходимо и достаточно, чтобы ω входила в состав лишь одного граничного элемента (точнее, в состав лишь одного носителя граничного элемента области G). Если Γ — замкнутая жорданова кривая, то f непрерывно продолжается на C, а φ — на Γ, так что продолженные функции осуществляют взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение (гомеоморфизм) замкнутых областей $\bar{D}$ и $\bar{G}$ друг на друга.

Всюду ниже Γ обозначает жорданову кривую и предполагается, что функции f и φ уже продолжены по непрерывности на C и Γ соответственно.

2) Если Γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, то граничные функции $f(\zeta)$, $\zeta\in C$, и $\varphi(\omega)$, $\omega\in\Gamma$, являются абсолютно непрерывными. Таким образом, отображения $\omega=f(\zeta)$, $\zeta\in C$, и $\zeta=\varphi(\omega)$, $\omega\in\Gamma$, переводят граничные множества меры нуль в граничные множества меры нуль. Функция $f(z)$ имеет конечную ненулевую производную относительно замкнутого круга $\bar{D}$ почти в каждой точке $\zeta\in\Gamma$, а функция $\varphi(w)$ имеет конечную ненулевую производную почти в каждой точке $\omega\in\Gamma$. Следовательно, эти отображения обладают свойством конформности (т. е. свойством постоянства растяжений и сохранения углов) почти в каждой граничной точке соответствующей области. Функция $f'(z)$ принадлежит классу Харди H^1.

3) Пусть Γ — спрямляемая жорданова замкнутая кривая со свойством: для любой пары различных точек $\omega_1\in\Gamma$, $\omega_2\in\Gamma$ отношение длины меньшей из дуг, на к-рые эти точки разбивают кривую Γ, к расстоянию $|\omega_1-\omega_2|$ между этими точками ограничено сверху нек-рой величиной d, не зависящей от ω_1 и ω_2. Тогда функция $f(z)$ удовлетворяет на $\bar{D}$ условию Гёльдера порядка $2(1+d)^{-2}$.

4) Пусть Γ — гладкая замкнутая жорданова кривая. Зафиксируем нек-рую точку $\omega_0\in\Gamma$ и при $-\infty<s<<\infty$ отложим вдоль Γ дугу длины $|s|$ в положительном (при $s>0$) или отрицательном (при $s<0$) направлении обхода области G. Пусть $\omega(s)$ — конец отложенной дуги, а $\tau(s)$ — угол между положительным направлением действительной оси и положительным направлением касательной в точке $\omega(s)$ (значение угла $\tau(s)$ выбирается так, чтобы функция $\tau(s)$ была непрерывной). Если при нек-ром $p=0, 1, \ldots$ существует производ-

ная $\tau^{(p)}(s)$, удовлетворяющая условию Гёльдера нек-рого положительного порядка $\alpha<1$, то функция $f^{(p+1)}(z)$ непрерывна и удовлетворяет условию Гёльдера того же порядка α на замкнутом круге $\bar{D}$ и $f'(z) \neq 0$ на $\bar{D}$, а $\varphi^{(p+1)}(w)$ непрерывна и удовлетворяет условию Гёльдера порядка α на $\bar{G}$ и $\varphi'(w) \neq 0$ на $\bar{G}$.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [2] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [4] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [5] Warschawski S. E., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1961, v. 12, № 4, p. 614—20; [6] Kellogg O. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1912, v. 13, № 1, p. 109—32; [7] Долженко Е. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, с. 1069—84.

Е. П. Долженко.

КОН-ФОССЕНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — соответствие между парой изометричных поверхностей F_1 и F_2 и бесконечно малым изгибанием Z так наз. срединной поверхности $F_{\text{ср.}}$: если x_1 и x_2— радиус-векторы поверхностей F_1 и F_2, то радиус-вектор $x_{\text{ср.}}$ поверхности $F_{\text{ср.}}$ равен $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, а поле скоростей z бесконечно малого изгибания Z равно $\frac{1}{2}(x_1-x_2)$; введено С. Э. Кон-Фоссеном [1]. Если F_1 и F_2— гладкие поверхности и если углы между полукасательными τ_1 и τ_2 к соответствующим по изометрии кривым поверхностей F_1 и F_2 меньше π, то $F_{\text{ср.}}$ оказывается гладкой. Этот факт позволяет в ряде случаев сводить исследование изометрии F_1 и F_2 к изучению *бесконечно малых изгибаний* $F_{\text{ср.}}$ Для фиксированной точки M_1 на F_1 (и соответственно M_2 на F_2) К.-Ф. п. определяет преобразование Кэли ортогональной матрицы O, преобразующей касательный пучок на F_1 в изометричный ему пучок на F_2, в кососимметрическую матрицу K, описывающую бесконечно малое изгибание $F_{\text{ср.}}$ Так как O полностью определяется вектором $V=\overset{\circ}{V}\sin\frac{\chi}{2}$ и скаляром $\rho=$ $=\cos\frac{\chi}{2}$, где $\hat{V}$ — орт оси поворота соответствующих пучков, χ — угол поворота (см. *Поворотов диаграмма*), а K — вектором вращения y, то К.-Ф. п. можно выразить формулой: $y=V/\rho$.

К.-Ф. п. обобщается на случай пространств постоянной кривизны [2].

Лит.: [1] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959; [2] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

М. И. Войцеховский.

КОНХОИДА кривой — плоская кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении радиус-вектора каждой точки данной плоской кривой на постоянный отрезок l. Если уравнение данной кривой в полярных координатах: $\rho=f(\varphi)$, то уравнение ее К. имеет вид: $\rho=f(\varphi)\pm l$. Примеры: К. прямой — *Никомеда конхоида*, К. окружности — *Паскаля улитка*.

Д. Д. Соколов.

КОНЦЕНТРАЦИИ ФУНКЦИЯ случайной величины X — функция $Q(l, X)$, определенная для всех неотрицательных l и случайной величины X соотношением

$$Q(l, X)=\sup_{-\infty<x<\infty} \mathsf{P}\{x\leqslant X\leqslant x+l\}.$$

К. ф. $Q(l, X)$ является неотрицательной, полуаддитивной, монотонно неубывающей функцией при $l\geqslant 0$, непрерывной справа и такой, что

$$\lim_{l\to\infty} Q(l, X)=1.$$

Обратно, любая функция, обладающая этими свойствами, может рассматриваться, как К. ф. нек-рой случайной величины.

К. ф. является удобной характеристикой разброса значений случайной величины, особенно для количественного выражения факта увеличения разброса при суммировании независимых случайных величин. Первая абсолютная, т. е. содержащая лишь абсолютные константы, оценка для концентрации суммы при заданных концентрациях слагаемых была получена А. Н. Колмогоровым [4] методом, развивающим метод П. Леви [2]. В дальнейшем этот результат был усилен (см. [5]); была получена формулировка, включающая в качестве частных случаев все ранее найденные результаты:

$$Q(l, S) \leqslant Cl \left\{ \sum_{i=1}^{n} l_i^2 [1 - Q(l_i, X_i)] \right\}^{-1/2},$$

где

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$X_1, \ldots, X_n$ — совокупность независимых случайных величин, $l \geqslant l_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и C — абсолютная постоянная. Выделены два типа оценок: оценки $Q(l, S)$ локального типа (см. [6]); оценки $Q(l, S)$ интегрального типа (см. [7]).

Двойственной характеристикой разброса, тесно связанной с К. ф., является функция рассеивания случайной величины X:

$$D(q, X) = \inf \{ l : Q(l, X) \geqslant q \}$$

при $0 \leqslant q < 1$. Имеет место (см. [8]) следующее неравенство, связывающее К. ф. и характеристич. функцию $f(t)$ случайной величины X:

$$Q(l, X) \leqslant \left(\frac{96}{95}\right)^2 \max\left(l, \frac{1}{a}\right) \int_{|t|<a} |f(t)|\, dt,$$

а также неравенства

$$Q(l, X_1 + X_2) \leqslant Q(l, X_i), \qquad i = 1, 2,$$

где X_1 и X_2 — независимые случайные величины. Имеются попытки перенести нек-рые результаты, касающиеся К. ф. на случай суммирования независимых случайных векторов (см. [9]).

Лит.: [1] Doeblin W., Lévy P., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 202, p. 2027—29; [2] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoire, 2 ed., P., 1954; [3] Doeblin W., «Bull. sci. math.», 1939, t. 63, p. 23—64; [4] Kolmogorov A., «Ann. de l'Inst. H. Poincaré», 1958, t. 16, p. 27—34; [5] Рогозин Б. А., «Теория вероят. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 1, с. 103—108; [6] Kesten H., «Math. Scand.», 1969, v. 25, p. 133—44; [7] Рогозин Б. А., «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, с. 1067—70; [8] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [9] Esseen C. G., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1968, Bd 9, S. 290—308.

Б. А. Рогозин.

КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — пропозициональная формула, имеющая вид

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} C_{ij}, \qquad (*)$$

где каждое C_{ij}, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m_i$, есть либо переменная, либо отрицание переменной. К. н. ф. (*) является тавтологией тогда и только тогда, когда для любого i среди $C_{i1}, \ldots, C_{im_i}$ встречаются обе формулы p и $\urcorner p$ для нек-рой переменной p. Для всякой пропозициональной формулы A можно построить эквивалентную ей К. н. ф. B, содержащую те же переменные, что и A. Такая формула B наз. К. н. ф. формулы A.

С. К. Соболев.

КОНЪЮНКЦИЯ — логическая операция, служащая для образования высказывания «A и B» из высказываний A и B. В формализованных языках К. высказываний A и B обозначается посредством $A \& B$, $A \wedge B$, $A \cdot B$, AB. Высказывания A и B наз. **конъюнктивными членами** высказывания $A \& B$. Употреблению К. в математической логике соответствует следующая *истинностная таблица* (см. выше).

A	B	$A\&B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

В. Е. Плиско.

КООПЕРАТИВНАЯ ИГРА — нестратегическая игра (см. *Игр теория*), задаваемая тройкой $\langle I, v, H\rangle$, где I — множество (обычно конечное), элементы к-рого наз. игроками, а подмножества $K \subset I$ — коалициями, v — вещественная функция, определенная на множестве коалиций и называемая характеристической функцией игры, H — некоторое подмножество векторов x_I (компоненты x_i к-рых соответствуют игрокам i из I), называемых дележами. К. и. впервые были введены Дж. Нейманом (J. Neumann, 1929) как аппарат кооперативной теории (бескоалиционных) игр.

В классической теории К. и. принимается:

$$H = \{x_I : \sum\nolimits_{i \in I} x_i = v(I),$$
$$x_i \geqslant v(\{i\}) \ (i \in I)\}.$$

На множестве H вводится бинарное отношение $\underset{K}{>}$ доминирования (предпочтения) дележей по коалиции $K \subset I$.:

$$x_I \underset{K}{>} y_I \leftrightarrow \sum\nolimits_{i \in K} x_i \leqslant v(K),$$
$$x_i > y_i \quad (i \in K).$$

Если $x_I \underset{K}{>} y_I$ для нек-рого $K \subset I$, то полагают $x_I > y_I$. Относительно этого отношения доминирования формулируются понятия оптимальности дележей.

Значительная часть содержания теории К. и. состоит в разработке понятий оптимальности, в доказательствах их реализуемости для различных частных классов К. и. и фактическом нахождении таких реализаций. К числу принципов оптимальности, разрабатываемых применительно к К. и., относятся: двойная (т. е. внешняя и внутренняя) устойчивость, реализуемая в форме *решений* по Нейману — Моргенштерну (Н—М-решения); недоминируемость дележей (см. *Ядро* в теории игр); устойчивость относительно угроз; устойчивость в смысле минимизации наибольшей неудовлетворенности (см. *Устойчивость* в теории игр), справедливость (см. *Шепли вектор*) и др.

Введение на классе К. и. алгебраич. операций приводит к исчислениям К. и. и к исследованию взаимосвязей между этими операциями и различными принципами оптимальности. Специальному изучению подвергались различные частные классы К. и., описанные ниже.

Простая игра — К. и., в к-рой характеристич. функция v принимает ровно два значения (обычно 0 и 1); при этом коалиции K, на к-рых достигается максимальное значение $v(K)$, наз. выигрывающими. Частным случаем простых игр является взвешенная мажоритарная игра, в к-рой коалиция K является выигрывающей, если $\sum\nolimits_{i \in K} w_i > c\sum\nolimits_{i \in I} w_i$, где $w_i (i \in I)$ и $c \in (1/2, 1)$ — некоторые заданные числа.

Сбалансированная игра — К. и., для характеристической функции которой

$$\sum\nolimits_{K \in \mathfrak{K}} \lambda_K v(K) \leqslant v(I),$$

если семейство коалиций $\mathfrak{K}$ и числа $\lambda_K (K \in \mathfrak{K})$ таковы, что

$$\sum\nolimits_{K \in \mathfrak{K}} \lambda_K \chi_K(i) = \chi_I(i) \quad \text{для всех} \quad i \in I,$$

где $\chi_K(i) = 1$, если $i \in K$, и 0 в противном случае. Сбалансированные игры и только они имеют непустое c-ядро.

Выпуклая игра — К. и., для характеристич. функции к-рой при K, $L \subset I$

$$v(K)+v(L) \leqslant v(K \cup L)+v(K \cap L). \qquad (*)$$

В выпуклой игре c-ядро непусто и совпадает с единственным Н — М-решением. Если К. и. строго выпуклая (т.е. неравенство (*) строгое), то вектор Шепли является центром тяжести c-ядра.

Игра с квотой — К. и. с характеристич. функцией v, для к-рой существует такой вектор $\omega \in (\omega_i)_{i \in I}$, что $\sum_{i \in I} \omega_i = v(I)$, и для любых игроков $i, j \in I$ $(i \neq j)$ имеет место $v(\{i, j\}) = \omega_i + \omega_j$.

Игра рынка — К. и., порожденная **рынком**, к-рый понимается как система

$$\langle I, \ \mathbb{R}_+^m, \ \{u^i(x^i)\}_{i \in I}, \quad \{a^i\}_{i \in I} \rangle,$$

где I — множество участников рынка (с m товарами), $a^i \in \mathbb{R}_+^m$ — начальный набор товаров i-го участника, $u^i(x^i)$ — функция полезности i-го участника, определенная на $\mathbb{R}_+^m$. На основе этого рынка строится К. и., в к-рой

$$H = \{y_I : y_i = u^i(x^i) \quad (i \in I),$$
$$x^i \in \mathbb{R}_+^m \quad (i \in I), \quad \sum_{i \in I} x^i = \sum_{i \in I} a^i\},$$

а характеристич. функция определяется равенством

$$v(K) = \max\{\sum_{i \in K} u^i(x^i):$$
$$x^i \in \mathbb{R}_+^m \ (i \in K), \ \sum_{i \in K} x^i = \sum_{i \in K} a^i\}.$$

Теория классич. К. и. подвергалась обобщениям в различных направлениях (см. также *Неатомическая игра*).

Игры без побочных платежей — нестратегич. игры, задаваемые тройкой $\langle I, v, H\rangle$, где v (в отличие от классических К. и.) — функция, к-рая каждой коалиции K ставит в соответствие множество $v(K)$ векторов x_I, удовлетворяющее условиям: 1) $v(K)$ замкнуто и выпукло; 2) если $x_I \in v(K)$ и $y_i \leqslant x_i$ $(i \in K)$, то $y_I \in v(K)$; 3) если $S \cap K = \varnothing$, то $v(S) \cap v(K) \subset v(S \cup K)$; 4) $v(K) \neq \varnothing$ для всех $K \subset I$; 5) $x_I \in v(I)$ тогда и только тогда, когда $x_I \leqslant y_I$ для нек-рого $y_I \in H$.

Доминирование в игре без побочных платежей определяется следующим образом: $x_I > y_I$, если существует такая непустая коалиция $K \subset I$, что

$$x_i > y_i \quad (i \in K) \text{ и } x_I \in v(K).$$

Игра в форме функции разбиения — нестратегическая игра, задаваемая множеством игроков I и функцией v, к-рая каждому разбиению $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ множества I ставит в соответствие вектор $v^{\mathcal{P}} = (v^{\mathcal{P}}(P_1), \ldots, v^{\mathcal{P}}(P_n))$. Максимальный выигрыш, к-рый может гарантировать себе коалиция K, определяется формулой $u(K) = \min_{\mathcal{P} \in K} v^{\mathcal{P}}(K)$. Дележ в игре в форме функции разбиения определяется как вектор x_I, удовлетворяющий условиям: $x_i \geqslant u(\{i\})$ $(i \in I)$; $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{S \in \mathcal{P}} v^{\mathcal{P}}(S) = \|\mathcal{P}\|$ для нек-рого $\mathcal{P}$. Дележ x_I **доминирует** дележ y_I по коалиции K, если: $x_i > y_i (i \in K)$; $\sum_{i \in K} x_i \leqslant u(K)$; существует такое $\mathcal{P}$, что $K \in \mathcal{P}$ и $\sum_{i \in I} x_i = \|\mathcal{P}\|$.

Лит.: [1] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [2] Воробьев Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 2, с. 81—140; [3] Розенмюллер И., Кооперативные игры и рынки, пер. с англ., М., 1974.

Н. Н. Воробьев, А. И. Соболев.