

М. Б. ВИНОГРАДОВА
О. В. РУДЕНКО
А. П. СУХОРУКОВ

ТЕОРИЯ ВОЛН

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
физических специальностей университетов*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

**Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухорук
ков А. П. Теория волн.— М.: Наука. Главная
редакция физико-математической литературы, 1979.**

Изложены общие вопросы теории волн различной физической природы (электромагнитных, звуковых и т. д.). Рассмотрены закономерности распространения волн в линейных и нелинейных средах. Большое внимание уделено изложению различных математических методов анализа волновых уравнений. В книгу включен ряд вопросов современной теории волн, представленных до сих пор только в специальной научной литературе.

Рис. 114. Библ. назв. 30.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	9
§ 1. О волновых процессах	9
§ 2. Волновое уравнение	12
Глава I. Плоские волны в однородной изотропной среде	15
§ 1. Плоские волны	15
§ 2. Плоские звуковые волны в жидкостях и газах	18
§ 3. Продольные и поперечные волны в изотропном твердом теле	26
§ 4. Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде	30
§ 5. Поток энергии	36
§ 6. Поляризация электромагнитных волн	40
§ 7. Отражение и преломление плоских волн на плоской границе раздела	44
Глава II. Распространение волн в диспергирующих средах	55
§ 1. Уравнения электромагнитного поля в среде с дисперсией	57
§ 2. Частотная дисперсия диэлектрической проницаемости	60
§ 3. Связь между дисперсией и поглощением. Дисперсионные соотношения Крамерса — Кронига	62
§ 4. Дисперсия при распространении электромагнитных волн в диэлектриках	65
§ 5. Диэлектрическая проницаемость и распространение волн в средах со свободными зарядами	71
§ 6. Распространение электромагнитных волн в средах при учете пространственной дисперсии	74
§ 7. Распространение волн в релаксирующих средах	84
§ 8. Распространение сигнала (волнового пакета) в диспергирующей среде	87
§ 9. Энергия электромагнитного поля в диспергирующей среде	99

<i>Глава III. Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах</i>	103
§ 1. Общие закономерности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах	104
§ 2. Распространение плоских волн в кристаллических средах	106
§ 3. Оптические свойства кристаллов	111
§ 4. Магнитоактивные среды. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в постоянном магнитном поле.	117
§ 5. Распространение плоских высокочастотных волн в магнитоактивной плазме	121
§ 6. Распространение свистящих атмосфериков и спиральных волн в металлах	129
§ 7. Распространение низкочастотных и магнитогидродинамических волн в плазме	130
§ 8. Распространение электромагнитных волн в гиремагнитных средах (ферритах)	135
 <i>Глава IV. Волны в периодических структурах</i>	 141
§ 1. Сплошная среда со слабыми периодическими неоднородностями	141
§ 2. Уравнение Матве и уравнение Хилла	146
§ 3. Волны в дискретных структурах	150
 <i>Глава V. Нелинейные эффекты при распространении волн в диспергирующих средах</i>	 157
§ 1. Уравнения для нелинейных волн и методы их анализа	159
§ 2. Генерация второй гармоники	166
§ 3. Распадная неустойчивость волн. Параметрическое усиление и генерация	171
§ 4. Взрывная неустойчивость волн в неравновесных средах	176
§ 5. Самовоздействие волн. Нелинейная дисперсия и нелинейное поглощение	178
 <i>Глава VI. Нелинейные волновые процессы в средах со слабой дисперсией</i>	 183
§ 1. Простые волны	183
§ 2. Нелинейные взаимодействия в простых волнах	189
§ 3. Распространение волн, содержащих разрывы	191
§ 4. Нелинейные волны в диссипативной среде	196
§ 5. Генерация низкочастотного спектра в поле амплитудно-модулированной волны	205
§ 6. Нелинейные волны в диспергирующей среде	209

<i>Глава VII.</i> Распространение воли в неоднородных средах	217
§ 1. Приближение геометрической оптики	217
§ 2. Геометрическая оптика слоисто-неоднородной среды	225
§ 3. Геометрическая оптика плоскостой среды	233
§ 4. Точное решение уравнений для комплексных амплитуд в плоскостой среде	237
§ 5. Уравнения для электромагнитных и звуковых воли в плоскостой среде	239
<i>Глава VIII.</i> Распространение ограниченных волновых пучков. Дифракция	245
§ 1. Метод Кирхгофа	245
§ 2. Угловой спектр плоских воли	250
§ 3. Приближенные методы расчета дифрагированного поля с помощью интеграла Кирхгофа	254
§ 4. Параболическое уравнение в теории дифракции. Квазиоптическое приближение	261
§ 5. Отражение ограниченных волновых пучков	269
§ 6. Обобщение метода Кирхгофа для векторных полей. Метод Кирхгофа — Котлера	272
<i>Глава IX.</i> Распространение волновых пучков и волновых пакетов в нелинейных диспергирующих средах	279
§ 1. Нелинейная квазиоптика	280
§ 2. Нелинейная геометрическая оптика	282
§ 3. Дифракция волн в нелинейных средах	289
§ 4. Волноводное распространение пучков	294
§ 5. Самовоздействие волновых пакетов в диспергирующей среде	300
<i>Глава X.</i> Распространение электромагнитных волн в присутствии направляющих поверхностей	303
§ 1. Электрический и магнитный векторы Герца	303
§ 2. Цилиндрические волны	305
§ 3. Волноводы	308
§ 4. Поток энергии в волноводе. Затухание волн в волноводах	319
§ 5. Объемные резонаторы	324
§ 6. Волны в длинных линиях	331
§ 7. Диэлектрические волноводы	335
§ 8. Однопроводная металлическая линия	342

Глава XI. Открытые линзовые линии и открытые резонаторы. . .	345
§ 1. Линзовые линии	345
§ 2. Открытые резонаторы	349
Глава XII. Определение волновых полей по заданным источникам	356
§ 1. Источники электромагнитного поля	356
§ 2. Интегральное уравнение для вектора Герца	359
§ 3. Поле электрического диполя в однородной среде	362
§ 4. Излучение электромагнитных волн поверхностными токами и зарядами	365
§ 5. Разложение сферической волны по плоским волнам	368
§ 6. Распространение электромагнитных волн над поверхностью Земли	370
§ 7. Определение функции ослабления по методу параболического уравнения Леситовича	374
Рекомендуемая литература	382

ПРЕДИСЛОВИЕ

Название книги «Теория волн» происходит от названия курса лекций, который в течение ряда лет читался студентам радиофизического отделения на физическом факультете МГУ. Цель этого годового цикла лекций состоит в ознакомлении студентов-старшекурсников с основными закономерностями распространения волн различной физической природы в средах с различными свойствами. Содержание предлагаемого пособия в значительной мере базируется на материале лекций и семинарских занятий, посвященных решению задач. Поэтому книга не охватывает всех аспектов теории волн и фактически лишь является введением в современную теорию волновых процессов. Более глубокое изучение вопросов, относящихся к волнам конкретной природы, можно провести только в рамках специальных курсов. На физическом факультете МГУ, в частности, читается более 20 курсов по различным вопросам электродинамики плазмы, взаимодействия излучения с веществом, физики упругих и ударных волн, электроники, гидро- и кристаллоакустики, физики мощного лазерного излучения, нелинейной оптики и т. д.

Курс теории волн был создан преподавателями и сотрудниками кафедры волновых процессов. В течение многих лет кафедрой руководил академик Р. В. Хохлов. Он отдавал много времени и сил учебным вопросам, что в значительной мере сказалось на принципах отбора материала, формировании структуры курса и его научном уровне. Основная задача виделась в том, чтобы сообщить студенту необходимый минимум знаний по фундаментальным вопросам и подготовить его для активной работы над современными проблемами. Поэтому наряду с традиционными вопросами в программе курса отражены результаты, полученные сравнительно недавно в таких новых разделах физики, как нелинейная оптика и акустика, теория нелинейных волн. При выборе материала, разумеется, учитывалась специфика научных направлений, развиваемых на кафедрах радиофизического отделения. В учебном пособии большое внимание уделено универсальным приближенным методам решения различных линейных и нелинейных задач: методам возмущений, геометрической оптики, медленно изменяющихся амплитуд и профиля волны, квазиоптического методу параболического уравнения.

В процессе работы над книгой неоценимую помощь оказали нам советы Р. В. Хохлова. Рем Викторович успел ознакомиться лишь с несколькими главами рукописи. Ряд его замечаний учтен в окончательном варианте; в частности, добавлена глава по распространению волн в периодических структурах.

Мы благодарны доктору физ.-матем. наук В. Д. Гусеву за полезные обсуждения, способствовавшие формированию ряда разделов курса; кандидатам физ.-матем. наук Т. А. Гайлит и Л. И. Приходько, прочитавшим отдельные части рукописи и способствовавшим ее улучшению; П. В. Елютину, А. А. Карабутову, И. М. Сизовой, В. Э. Гусеву и многим другим аспирантам и студентам разных лет, оказавшим большую техническую и научную помощь при обработке записей лекций и подготовке рукописи.

§ 1. О волновых процессах

С колебаниями и волнами мы сталкиваемся на каждом шагу как в повседневной жизни, так и при более глубоком изучении физики явлений. Однако нет возможности исчерпывающим образом определить, что следует называть колебательным или волновым процессом вообще. Любая попытка ограничить класс рассматриваемых явлений типом уравнения или перечислением каких-либо общих физических свойств обычно приводит к неудаче, так как всегда удастся построить пример, не укладывающийся в принятую схему. Поэтому, приступая к изучению широкого круга столь разнообразных задач, разумно опереться на интуитивные представления и ограничиться вначале весьма общими утверждениями.

Мы будем рассматривать наиболее характерные свойства волновых процессов на примере нескольких типов волн различной природы (это вовсе не означает, что рассматриваемые свойства присущи всем волновым процессам без исключения). Отбирая материал, мы стремились излагать только такие вопросы, которые не являются слишком сложными или частными и, по возможности, связаны с актуальными прикладными разделами физики.

В окружающем нас мире происходит множество явлений, проявляющих черты колебательных и волновых процессов. Представление о них имеется у каждого человека, наблюдавшего движение маятника или волны, бегущие на поверхности воды. Курс общей физики дополняет наше представление другими конкретными примерами. Несмотря на многообразие ситуаций и различие в способах описания, можно выделить много общего в протекании процессов различной физической природы. Изучение именно этих общих закономерностей составляет предмет специальных курсов теории колебаний и теории волн.

Колебаниями называют ограниченные (и чаще всего повторяющиеся) движения в окрестности некоторого среднего положения (например, устойчивого положения равновесия). О колебательном процессе можно говорить в случаях, когда состояние реальной системы допустимо описывать идеализированным способом: конечным набором параметров, изменяющихся во времени. Для математического маятника, например, таким параметром будет угол отклонения нити от вертикали; для связанных колебательных

контуров параметров уже два (напряжения или токи в первом и втором контуре) и т. д. Колебательные процессы описываются одним или несколькими обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Волна — это распространение колебаний в пространстве, происходящее с конечной скоростью. Волновой процесс — более сложная модель движения реальных систем, состояние которых зависит уже не только от времени, но и от пространственных переменных. Поэтому такие процессы описываются уравнениями, содержащими частные производные.

Критерием перехода от колебательного движения к волновому может служить «условие квазистационарности»: если характерные размеры системы $L < cT$ (c — скорость распространения возмущения, T — время его заметного изменения), о процессе можно говорить как о колебательном в системе с сосредоточенными параметрами: В случае $L > cT$ процесс нужно считать волновым, а систему — распределенной.

Волны обычно служат наиболее быстрым механизмом переноса энергии, позволяющим осуществить в системе переход от неравновесного состояния к равновесному. При этом не происходит существенного перемещения вещества, хотя такое перемещение иногда возможно как побочное явление, сопровождающее распространение волны.

Волновой процесс — это одна из важнейших форм движения материи; в той или иной мере волновые движения присущи всем без исключения объектам материального мира. Как показали эксперименты по дифракции и рассеянию микрочастиц, корпускулярно-волновой дуализм есть фундаментальное свойство материи вообще, и для описания состояния квантовых систем необходимо пользоваться волновыми функциями.

Волновые процессы — нелинейные и линейные — в настоящее время интенсивно изучаются в различных областях физики: электродинамике, физике плазмы, оптике, радиофизике, акустике, гидродинамике и т. д. Механизмы распространения возмущений, естественно, сильно отличаются друг от друга. Например, упругие волны в жидкостях и газах существуют вследствие того, что коллективное движение частиц среды создает чередующиеся сжатия и разрежения, которые вызывают движение в следующем слое жидкости (газа). Возмущение передается от слоя к слою преимущественно в направлении, вдоль которого происходят колебания частиц, т. е. волны в жидкостях и газах являются продольными. Твердые тела обладают сдвиговой упругостью, и в них могут распространяться поперечные волны. Распространение электромагнитных волн происходит вследствие того, что появляющееся в какой-либо точке пространства переменное электрическое поле возбуждает в соседних точках магнитное поле и наоборот.

Различие физических механизмов, реализующих волновой процесс, приводит к различным способам описания, основанным на сильно отличающихся друг от друга системах уравнений. Однако для понимания наиболее фундаментальных явлений, свойственных волнам различной природы — интерференции, дифракции, дисперсии, отражения и преломления, рассеяния и т. д., — часто нет необходимости анализировать исходные, вообще говоря, сложные системы уравнений. Простые эффекты, как правило, описываются простыми и поэтому универсальными математическими моделями. В дальнейшем изложении мы будем приводить иллюстративный вывод этих упрощенных уравнений в основном для двух важнейших (с точки зрения приложений) типов волн — акустических и электромагнитных; главное же внимание будет уделено анализу вытекающих из них эффектов.

Излагая современную теорию волн, необходимо особо остановиться на нелинейных волновых процессах — сравнительно новом круге вопросов, в последнее время нашедших ряд важных практических применений.

Известно, что в теории колебаний нелинейные процессы играют очень большую роль. Развитие нелинейной теории колебаний тесно связано с развитием радиотехники, поскольку процессы генерации, модуляции и приема радиоволн связаны с нелинейными колебательными процессами. В то время, когда для целей радиосвязи использовались радиоволны с длиной порядка десятков и сотен метров, можно было всегда считать, что длина волны намного превышает размеры приемных и передающих устройств и нелинейные явления, лежащие в основе их работы, имеют характер колебательных процессов. Процессы же передачи электромагнитной энергии от передатчика к приемнику — волновые процессы — почти всегда можно было считать линейными (исключение составляла кросс-модуляция в ионосфере).

С переходом к сантиметровым и миллиметровым волнам длина волны стала сравнимой или даже меньшей размеров приемной и передающей аппаратуры. Были созданы генераторы и усилители, принцип работы которых основан на закономерностях волновых процессов — электронные лампы с бегущей и обратной волной и т. д., появились материалы с нелинейными характеристиками в диапазоне СВЧ.

После создания источников мощного ультразвука началось интенсивное изучение нелинейных эффектов при распространении звуковых волн в среде. Эти эффекты существенны, когда возмущения характерных параметров — давления, плотности и др. — не слишком малы по сравнению с их равновесными значениями. Мощная синусоидальная звуковая волна, например, в слабо диссипативной среде превращается на некотором расстоянии в пилообразную волну.

Создание оптических квантовых генераторов позволило реализовать электромагнитные поля, напряженность которых сравнима с внутриатомными полями, и осуществить таким образом взаимодействия световых волн.

Увеличение интенсивности звуковых и световых полей привело к тому, что нелинейные эффекты при распространении волн стали сейчас иметь столь же большое значение, как и нелинейные процессы в теории колебаний. Родились две новые области — нелинейная оптика и нелинейная акустика, значительно расширившие область использования волновых явлений. В настоящее время взаимодействия волн активно исследуются и во многих других разделах физики.

§ 2. Волновое уравнение

В теории волн фундаментальное значение имеет линейное уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) называется *волновым уравнением*. Посредством Δ обозначен оператор Лапласа, который в зависимости от физической постановки задачи записывается либо в декартовых, либо в криволинейных (цилиндрических, сферических и др.) координатах; c — константа, характеризующая свойства среды. Как будет показано в гл. I, уравнение (2.1) допускает решение в виде распространяющихся возмущений — бегущих волн.

Роль уравнения (2.1) аналогична роли уравнения гармонического осциллятора в теории колебаний:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (2.2)$$

Подобно тому, как модель гармонического осциллятора можно усложнить введением в (2.2) дополнительных членов, ответственных за нелинейность, затухание, влияние внешних сил (вынужденные колебания) и т. д., соответствующие обобщения для волн можно сделать на основе уравнения (2.1).

Так, в присутствии источников или внешних сил процесс возбуждения и распространения волн описывается неоднородным уравнением

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

где $f(\mathbf{r}, t)$ — некоторая функция, характеризующая распределенные внешние воздействия.

В реальной среде могут происходить необратимые процессы передачи энергии волны частицам среды (диссипация); скорость распространения волны может стать функцией частоты (дисперсия). Эти явления должны учитываться введением в волновое уравнение (2.1) дополнительных линейных членов $L(u)$:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u) = 0, \quad (2.4)$$

структура которых может быть различной в зависимости от конкретных физических механизмов взаимодействия волн со средой.

Уравнение (2.1) и его обобщения (2.3), (2.4) могут быть записаны как для скалярной переменной u (имеющей смысл, например, приращения плотности или давления в звуковой волне), так и для векторной переменной u (например, напряженностей E и H поля электромагнитной волны).

Решение волнового уравнения должно находиться с учетом начальных и граничных условий, отвечающих физической постановке задачи.

Уравнениями (2.3), (2.4) описываются волны в однородных изотропных средах. Задачи, связанные с распространением волн в линейных диспергирующих и недиспергирующих средах, с определением поля по заданным источникам, с отражением и преломлением волн на границах раздела однородных сред, с распространением волн в волноводах, длинных линиях, других направляющих системах и т. д., сводятся к решению уравнений типа (2.1), (2.3), (2.4) с соответствующими граничными условиями.

Если среда анизотропна, то процесс распространения волн может описываться гиперболическими уравнениями не второго, а более высокого (например, четвертого) порядка, которые приводятся к уравнениям второго порядка только при специальных предположениях о характере протекания волнового процесса в анизотропной среде. Такого типа задачи встречаются при исследовании распространения световых волн в кристаллах, электромагнитных волн в плазме или феррите, находящихся в магнитном поле, упругих волн в анизотропных твердых телах и т. д.

Если среда неоднородна, т. е. свойства среды регулярным или случайным образом зависят от координат, то уравнение, описывающее волновой процесс, может быть приведено к виду, аналогичному (2.1) или (2.3). Однако c^2 при этом не константа, а функция координат: $c^2(x, y, z)$. Распространение электромагнитных волн в атмосфере и ионосфере, распространение низкочастотного звука в океане описывается волновым уравнением такого типа.

Большое значение в теории волн имеют гармонические волны. Функция $u(x, y, z, t)$, описывающая гармоническую волну, может быть представлена в виде

$$u = \frac{1}{2} [A(x, y, z) e^{i\omega t} + A^*(x, y, z) e^{-i\omega t}], \quad (2.5)$$

где A — комплексная величина. Подставляя (2.5) в (2.1), для функции $A(x, y, z)$ получим уравнение

$$\Delta A + k^2 A = 0, \quad (2.6)$$

где $k^2 = \omega^2 / c^2$. Если подставить (2.5) в (2.4), то мы опять получим для A уравнение (2.6), но k^2 в этом случае более сложным образом зависит от частоты и, вообще говоря, является комплексной величиной $k^2(\omega) = [k'(\omega) + ik''(\omega)]^2$. Уравнение (2.6) называется *уравнением Гельмгольца* или *приведенным волновым уравнением*. Его решения искать проще, чем решать уравнения (2.1) и (2.4), особенно в том случае, когда скорость распространения гармонической волны $v = \omega/k$ зависит от частоты (т. е. существенна дисперсия). Поэтому в диспергирующих линейных средах (в которых справедлив принцип суперпозиции волн) возмущения, зависящие от времени сложным образом, представляют в виде совокупности гармонических волн.

При возбуждении в среде сильных полей уравнения, описывающие процесс распространения возмущений, уже нельзя свести к линейным волновым уравнениям. С учетом нелинейных членов они приобретают вид

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_1(u) + L_2(u^2) + L_3(u^3) + \dots, \quad (2.7)$$

где L_1, L_2, L_3 — некоторые линейные операторы. Сохранение этих членов в уравнении (2.7) позволяет описать различные нелинейные эффекты при распространении волн в среде. В нелинейных задачах нарушается принцип суперпозиции: возникает взаимодействие волн различных частот. При этом характер протекания волновых взаимодействий существенно зависит от соотношения дисперсионных и нелинейных свойств процесса. Задачи данного типа широко исследуются, например, в нелинейной акустике и нелинейной оптике.

Итак, любая задача теории волн сводится к определению поведения в пространстве и времени величин, характеризующих волновой процесс. Она как бы делится на два этапа. Вначале необходимо воспользоваться исходной системой уравнений, описывающих волновое поле в среде (например, уравнениями Максвелла для электромагнитного поля или уравнениями механики для сплошной среды), а затем с помощью ряда упрощений, диктуемых конкретной постановкой задачи, получить (если это в принципе возможно) волновое уравнение одного из перечисленных выше типов, а также сформулировать начальные и граничные условия. Второй этап состоит в решении этого уравнения при заданных начальных и граничных условиях и в физическом анализе полученных результатов.

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

§ 1. Плоские волны

Простейшими решениями волновых уравнений, имеющими весьма большое значение, являются решения в виде плоских волн. В плоской волне возмущение u зависит лишь от расстояния, отсчитываемого вдоль некоторого фиксированного направления m , $|m| = 1$, и времени, т. е.

$$u = u(\zeta, t),$$

где

$$\zeta = (r, m) = m_x x + m_y y + m_z z. \quad (1.1)$$

Рассмотрим плоские волны в изотропной однородной среде, не учитывая поглощение, дисперсию и нелинейные эффекты. В такой среде волновой процесс описывается уравнением (2.1) введения. Для плоских волн оператор Лапласа преобразуется к виду $\Delta = \partial^2 / \partial \zeta^2$, а волновое уравнение становится одномерным

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1.2)$$

Запись (1.2) является одной из двух канонических форм волнового уравнения. Если от переменных ζ и t перейти к характеристическим переменным

$$\tau = t - \zeta/c, \quad \eta = t + \zeta/c, \quad (1.3)$$

то уравнение (1.2) преобразуется ко второй канонической форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} = 0. \quad (1.4)$$

Интегрируя (1.4) последовательно по τ и η , нетрудно найти общее решение (1.4) и, следовательно, исходного уравнения (1.2):

$$u = u_1(\tau) + u_2(\eta) = u_1(t - \zeta/c) + u_2(t + \zeta/c). \quad (1.5)$$

Здесь $u_1(\tau)$ и $u_2(\eta)$ — произвольные функции.

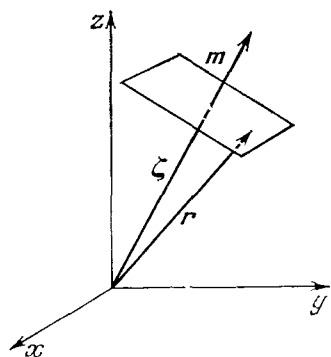
Рассмотрим функцию $u_1(\tau)$. В любой фиксированный момент времени функция u_1 имеет постоянное значение в плоскости, определяемой соотношением (рис. 1.1)

$$\zeta = (r, m) = \text{const}. \quad (1.6)$$

Если при увеличении времени на величину Δt вектор \mathbf{r} изменится на величину $\Delta \mathbf{r}$ так, что аргумент τ функции u_1 останется постоянным, то связь между Δt и $\Delta \mathbf{r}$ будет задана выражением

$$\tau = t - \frac{1}{c} (\mathbf{m}\mathbf{r}) = t + \Delta t - \frac{1}{c} (\mathbf{m}, \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \text{const}$$

или $c\Delta t = (\mathbf{m}\Delta \mathbf{r})$. Конец вектора $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ снова лежит на плоскости, и вектор \mathbf{m} является нормалью к ней. Следовательно, плоскость, определяемая соотношением (1.6), перемещается в направлении \mathbf{m} на расстояние $c\Delta t$ за время Δt , т. е. эта плоскость движется в пространстве со скоростью c . Таким образом, функция $u_1[t - (\mathbf{r}\mathbf{m})/c]$ описывает плоскую волну, бегущую в направлении \mathbf{m} . Аргумент функции $\tau = t - (\mathbf{r}\mathbf{m})/c$ определяет фазу волны. Плоскость, на которой фаза волны постоянна, передвигается в пространстве со скоростью c . Очевидно, что функция $u_2[t + (\mathbf{r}\mathbf{m})/c]$ описывает волну, бегущую в противоположном направлении $-\mathbf{m}$.



1.1. Однородная плоская волна, распространяющаяся в направлении вектора \mathbf{m} .

Возмущения, бегущие только в одну сторону (например, в положительном направлении оси ζ), могут быть описаны также уравнением первого порядка (ср. с (1.2))

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (1.7)$$

Если вместо t ввести характеристическое или «местное» время $\tau = t - \zeta/c$, т. е. наблюдать за волной, двигаясь вместе с ней со скоростью ее распространения, то в новых переменных τ, ζ уравнение (1.7) примет вид

$$\frac{\partial u(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} = 0.$$

Решением этого уравнения является волна, не изменяющая формы своего профиля при изменении ζ , т. е. стационарная волна: $u = u_1(\tau)$.

Плоские волны, описываемые произвольными функциями $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$, часто удобно рассматривать как суперпозицию гармонических волн. Для этого необходимо, чтобы функции u_1 и u_2 можно было представить в виде интегралов Фурье

$$u_{1,2}(\zeta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{1,2}(\zeta, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.8)$$

где

$$F_{1,2}(\zeta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{1,2}(\zeta, t) e^{i\omega t} dt.$$

Подставляя (1.8) в (1.2), найдем, что функции $u_{1,2}$ будут решениями волнового уравнения, если их образы $F_{1,2}$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\frac{d^2 F_{1,2}}{d\zeta^2} + \frac{\omega^2}{c^2} F_{1,2} = 0. \quad (1.9)$$

Решение (1.9) может быть записано в виде

$$F_{1,2}(\zeta, \omega) = A_{1,2}(\omega) e^{\pm ik\zeta}, \quad (1.10)$$

где $k = \omega/c$. Таким образом, функции $A_{1,2} \exp(\pm ik\zeta - i\omega t)$ под знаком интеграла (1.8) описывают гармонические плоские волны.

Переходя к декартовым координатам, фазу гармонической плоской волны можно записать в виде

$$k(m_x x + m_y y + m_z z) - \omega t = kr - \omega t,$$

где $k = km$. Уравнение $kr = \text{const}$ определяет плоскость равной фазы. Если k — действительный вектор, амплитуды волн $A_{1,2}$ постоянны всюду, в том числе и в плоскости равной фазы.

Функции $F_{1,2}$ будут удовлетворять уравнению (1.9) и в том случае, если k — комплексный вектор: $k = k' + ik''$, при условии, что его модуль равен по-прежнему k , т. е.

$$k'^2 - k''^2 + 2i(k'k'') = k^2 = \omega^2/c^2.$$

Так как для сред без поглощения k^2 — действительное число, то между действительной k' и мнимой k'' частями волнового вектора существует связь

$$k'^2 - k''^2 = k^2, \quad (1.11)$$

$$(k'k'') = 0. \quad (1.12)$$

Соответствующее решение

$$u(r, t) = A_1 \exp[-(k''r) - i(\omega t - k'r)] \quad (1.13)$$

описывает плоскую неоднородную волну. Поверхности равных фаз и равных амплитуд — плоские, но они не совпадают друг с другом. В силу условия (1.12) плоскости равных фаз и равных амплитуд взаимно ортогональны. Из условия (1.11) следует, что волновое число k' для неоднородной волны больше волнового числа однородной волны в той же среде (пространственный период поля меньше длины волны λ).

При учете поглощения величина $k^2(\omega)$ становится комплексной, и угол между плоскостями равных фаз и амплитуд может быть любым. При $k' \parallel k''$ эти плоскости совпадают, и волна становится плоской однородной волной.

Позднее мы покажем, что сферические и цилиндрические волны можно представить в виде суперпозиции однородных и неоднородных плоских волн. При удалении от источника неоднородные волны затухают.

Плоские неоднородные волны могут возникать при падении плоских однородных волн на границу раздела двух сред. Наоборот, при падении на границу раздела неоднородной волны может возникнуть однородная плоская волна.

§ 2. Плоские звуковые волны в жидкостях и газах

Для описания произвольных движений газа или жидкости обычно используют уравнения механики сплошных сред, записанные в координатах Эйлера. При таком описании все величины, характеризующие состояние среды, зависят от координат x , y , z неподвижной системы и времени t . Если можно не учитывать диссипативных процессов, то достаточно знать распределения скорости гидродинамических частиц $u(r, t)$, плотности $\rho(r, t)$ и давления $p(r, t)$. Эти поля связаны уравнениями непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho u = 0, \quad (2.1)$$

движения (Эйлера)

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u \right] = F = -\nabla p \quad (2.2)$$

и состояния

$$p = p(\rho). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.1) выражает закон сохранения массы вещества записанный в дифференциальной форме. Уравнение (2.2) — это второй закон Ньютона для элемента сплошной среды; выражение в квадратных скобках представляет собой ускорение — полную производную скорости по времени:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u.$$

Распространение звуковой волны вызывает в среде сжатия и разрежения, сопровождаемые локальными изменениями температуры. В большинстве случаев эти процессы совершаются настолько быстро, что выравнивание температур не успевает произойти. Процессы сжатия и разрежения можно считать обратимыми

и описывать адиабатическим уравнением состояния (2.3):

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (2.4)$$

Для идеального газа p_0 и ρ_0 — равновесные давление и плотность, $\gamma = c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме. В случае жидкостей (2.4) можно рассматривать как приближенное эмпирическое уравнение; здесь константы γ и p_0 определяются по данным экспериментов.

Для получения из системы (2.1) — (2.3) волновых уравнений предположим, что возмущения p' , ρ' , u основного состояния p_0 , ρ_0 , $u = 0$, вносимые волной, малы, т. е. представим давление и плотность в виде

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho'. \quad (2.5)$$

При этом будем считать

$$p' / p_0 \sim \rho' / \rho_0 \sim \mu, \quad (2.6)$$

где μ — некий малый параметр. Такого же порядка, как и μ (это будет ясно из дальнейшего), должно быть и число Маха — отношение колебательной скорости $|u|$ к скорости звука c_0 .

Подставляя выражения (2.5) в систему (2.1), (2.2), (2.4) и сохраняя члены только первого порядка по малому параметру μ , получим линеаризованные уравнения

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} u = 0, \quad (2.7)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p', \quad (2.8)$$

$$p' = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho'. \quad (2.9)$$

Уравнения (2.7) — (2.9) линейны относительно величин p' , ρ' , u . Отбросив члены порядка μ^2 , μ^3 и более высоких порядков малости, мы тем самым пренебрегли нелинейными членами, содержащими произведения и степени величин p' , ρ' , u .

Для сведения системы (2.7) — (2.9) к одному уравнению удобно вначале исключить переменную p' и получить вместо (2.8), (2.9) соотношение

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \nabla \rho' = 0. \quad (2.10)$$

Если применить к (2.10) операцию ротора, то мы получим $\partial \operatorname{rot} u / \partial t = 0$, $\operatorname{rot} u = 0$; отсюда находим, что $u = \operatorname{grad} \varphi$, где φ — потенциал колебательной скорости. То обстоятельство, что звуковое поле в жидкостях и газах потенциально, связано с продольным характером плоских звуковых волн. Считая, что φ зави-

сит только от координаты $\zeta = (mr)$, отсчитываемой вдоль направления m , получим

$$u = \nabla\varphi = m\partial\varphi / \partial\zeta,$$

т. е. вектор скорости u имеет то же направление, что и вектор m , вдоль которого распространяется волна.

Введем потенциал скорости $u = \nabla\varphi$. Из уравнения (2.10) при этом следует

$$\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho' = -\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Подставляя полученную связь в (2.7), придем к волновому уравнению

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.11)$$

Через c_0^2 здесь обозначено выражение

$$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}, \quad (2.12)$$

которое, как это следует из структуры уравнения (2.11), представляет собой квадрат адиабатической скорости звука. Точно такие же уравнения можно получить и для скалярных величин p' , ρ' , а также для каждой из трех компонент колебательной скорости u .

Найдем связь между давлением, плотностью и колебательной скоростью в плоской звуковой волне. Предполагая, что все величины изменяются по закону $f_1(t - \zeta/c_0)$ или $f_2(t + \zeta/c_0)$, с помощью (2.7) — (2.9) получим

$$\frac{u}{c_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{c_0^2 \rho_0}. \quad (2.13)$$

Отсюда следует, что число Маха u/c_0 есть малая величина порядка μ , так как $\rho'/\rho_0 \sim \mu$.

В неидеальных средах нужно учитывать потери энергии, связанные с вязкостью и теплопроводностью. При этом движение будет описываться уравнениями, более сложными по сравнению с системой (2.1) — (2.3). Из-за наличия необратимого переноса импульса, обусловленного внутренним трением слоев жидкости, в правой части уравнения Эйлера (2.2) появится дополнительная сила $\partial\sigma'_{ik}/\partial x_k$, где σ'_{ik} — вязкий тензор напряжений:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}. \quad (2.14)$$

Коэффициенты η , ξ называются *коэффициентами сдвиговой и объемной вязкости* соответственно. Вид тензора (2.14) можно

установить из довольно общих соображений, предполагая, что σ'_{ik} зависит только от первых производных скорости по координатам (трение имеется только в случае неоднородного по пространству поля скоростей) и, кроме того, обращается в нуль при равномерном вращении жидкости как целого.

С учетом (2.14) уравнение движения примет вид

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{u}. \quad (2.15)$$

В форме (2.15) оно называется *уравнением Навье — Стокса*. Поскольку в среде есть потери, вместо (2.3) нужно располагать уравнением состояния

$$p = p(\rho, s), \quad (2.16)$$

не предполагающим постоянства энтропии s . Наконец, систему (2.1), (2.15), (2.16) необходимо дополнить уравнением переноса тепла и термодинамическим соотношением, связывающим изменение температуры и энтропии.

Однако часто можно ограничиваться приближенным рассмотрением, считая, что поглощенная звуковая энергия слабо изменяет состояние среды и, несмотря на диссипативные процессы, среда остается в равновесии. Тогда, подставляя выражения (2.5), (2.9) в уравнение движения (2.15) и сохраняя только линейные члены, получим

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + c_0^2 \nabla \rho' = \eta \Delta \mathbf{u} + \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{u}. \quad (2.17)$$

Уравнения (2.17) и (2.7) образуют систему для анализа (в принятом приближении) волновых процессов в средах с малой вязкостью.

Как известно, всякое векторное поле можно представить в виде суммы потенциальной и вихревой компонент: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t = \nabla \varphi + \text{rot } \mathbf{A}$, где φ — использованный выше скалярный потенциал, \mathbf{A} — векторный потенциал. Компонента $\mathbf{u}_l = \nabla \varphi$ описывает продольные (звуковые), а $\mathbf{u}_t = \text{rot } \mathbf{A}$ — поперечные (сдвиговые) волны.

Для сдвиговых колебаний из уравнения непрерывности (2.7) следует $\partial \rho' / \partial t = 0$ или $\rho' = 0$. Это означает, что при сдвиговых колебаниях жидкость можно рассматривать как несжимаемую. Из (2.17) получаем

$$\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho_0} \Delta \mathbf{u}_t, \quad \text{div } \mathbf{u}_t = 0. \quad (2.18)$$

Решим с помощью (2.18) задачу о распространении в жидкости поперечных волн, возбуждаемых колеблющейся стенкой. Пусть

твердая поверхность, совпадающая с плоскостью y, z декартовой системы координат, совершает движение вдоль оси y , т. е. в своей плоскости, по закону

$$u_t(x=0, t) = \{u_x = 0, u_y = u_0 \exp(-i\omega t), u_z = 0\}.$$

Поскольку жидкость расположена справа от стенки (при $x > 0$) и для величины u_t в силу симметрии отлична от нуля только компонента u_y , ищем решение (2.18) в виде

$$u_y = u_0 \exp[-i(\omega t - kx)]. \quad (2.19)$$

Найдем связь между k и ω (закон дисперсии):

$$k^2 = i\omega\rho_0 / \eta, \quad k = \pm (i+1) \sqrt{\omega\rho_0 / 2\eta}.$$

Подставив это выражение в (2.19), получим

$$u_y = u_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\eta}} x\right) \exp\left[i\left(\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\eta}} x - \omega t\right)\right]. \quad (2.20)$$

Таким образом, в вязкой жидкости могут существовать поперечные волны, направление колебательной скорости которых перпендикулярно направлению распространения. Однако эти волны очень быстро затухают при удалении от колеблющегося тела. На расстоянии, равном длине волны, это колебание затухает в $\exp(2\pi) \approx 535$ раз, т. е. поперечная волна в жидкости практически не распространяется.

Для продольных колебаний система (2.7), (2.17) приводит к волновому уравнению

$$\Delta u_t - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} + \frac{b}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_t = 0, \quad \text{rot } u_t = 0. \quad (2.21)$$

В дальнейшем речь будет идти только о звуковых (продольных) волнах, поэтому вместо u_t мы будем всюду писать просто u . Уравнение (2.21) учитывает затухание звука. Здесь b — диссипативный коэффициент, равный $b = \xi + \frac{4}{3}\eta$. Более точное выражение, получаемое с учетом изменения энтропии и переноса тепла, имеет вид

$$b = \xi + \frac{4}{3}\eta + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right). \quad (2.22)$$

Здесь κ — коэффициент теплопроводности

Ищем решение уравнения (2.21) в виде плоской гармонической волны

$$u(\zeta, t) = mA(\zeta)e^{-i\omega t}. \quad (2.23)$$

Для амплитуды $A(\xi)$ получаем уравнение Гельмгольца

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \left(1 - i \frac{b\omega}{c_0^2 \rho_0}\right)^{-1} A = 0. \quad (2.24)$$

Его решение можно искать в виде

$$A = A_1 e^{ik\xi} + A_2 e^{-ik\xi}. \quad (2.25)$$

Подставляя (2.25) в (2.24), находим

$$k = \frac{\omega}{c_0} \left(1 - i \frac{b\omega}{c_0^2 \rho_0}\right)^{-1/2} \approx \frac{\omega}{c_0} \left(1 + i \frac{b\omega}{2c_0^2 \rho_0}\right) = k' + ik''. \quad (2.26)$$

Приближенный переход в соотношении (2.26) возможен при условии

$$b\omega / c_0^2 \rho_0 \ll 1. \quad (2.27)$$

Правомерность использования этого неравенства будет показана ниже.

Подставляя выражение (2.26) в (2.25) и далее в (2.23), получим решение уравнения (2.21) в следующем виде:

$$u = mA_1 e^{-k''\xi} \exp[-i\omega(t - \xi/c_0)] + mA_2 e^{k''\xi} \exp[-i\omega(t + \xi/c_0)]. \quad (2.28)$$

Это решение представляет собой совокупность двух встречных плоских гармонических волн, амплитуды которых убывают по мере распространения. Коэффициент затухания равен

$$k'' = \frac{b\omega^2}{2c_0^3 \rho_0}. \quad (2.29)$$

Из физических соображений ясно, что затухание волны не должно быть слишком сильным, иначе вместо процесса распространения колебаний может возникнуть аperiодический в пространстве процесс. Для того чтобы реализовался истинный волновой процесс, амплитуда волны на расстояниях порядка длины волны λ должна изменяться слабо, т. е. $\exp(-k''\lambda) \approx 1$ или $k''\lambda \ll 1$. Это условие, как легко проверить, приводит в точности к неравенству (2.27), и использование приближенного соотношения (2.26) физически вполне оправдано.

Но это означает, что в уравнении (2.21) диссипативный член мал по сравнению с двумя другими членами уравнения, и его можно рассматривать как некоторое возмущение. Характерно, что влияние этого малого члена слабо только на расстояниях порядка длины волны. На больших же расстояниях его вклад накапливается и становится заметным.

Для учета возмущающих членов в волновых уравнениях очень удобен метод медленно изменяющегося профиля, который значи-

тельно упрощает решение задачи. Этот метод широко применяется для упрощения уравнений в нелинейных системах, средах с дисперсией и многих других случаях. Имея в виду дальнейшее использование метода, удобно продемонстрировать его основные идеи на простом примере диссипативной системы (2.21).

Запишем для плоской волны уравнение (2.21) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial \xi^2}. \quad (2.30)$$

Без учета диссипативного члена решение (2.30) имело бы вид $u = f_1(t - \xi/c_0) + f_2(t + \xi/c_0)$. Ограничимся волной, бегущей вправо: $u = f_1(t - \xi/c_0)$, и будем следить только за ней. Если учесть поглощение, u будет уже зависеть не только от $t - \xi/c_0$, но еще и медленно от ξ , т. е.

$$u = f_1(t_1^1 - [\xi/c_0, \mu \xi]). \quad (2.31)$$

Перейдем в сопровождающую систему координат. Введем новые переменные

$$\tau = t - \frac{\xi}{c_0}, \quad \zeta' = \mu \xi. \quad (2.32)$$

Преобразование различных членов, входящих в (2.30), приводит к результату

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad -c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -c_0^2 \left[\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{2}{c_0} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial \xi' \partial \tau} + \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi'^2} \right], \quad (2.33)$$

$$\frac{b}{\rho_0} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial \xi^2} = \frac{b}{\rho_0} \left[\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} - \frac{2}{c_0} \mu \frac{\partial^3 u}{\partial \xi' \partial \tau^2} + \mu^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \xi'^2 \partial \tau} \right]. \quad (2.34)$$

Сохраним во всех выражениях члены не выше первой степени μ , т. е. порядка μ^0 и μ^1 . Остальные члены отбросим. Во втором выражении (2.33) нужно пренебречь производной $\partial^2 u / \partial \xi'^2$, имеющей порядок μ^2 . В выражении (2.34) необходимо отбросить второй и третий члены в квадратных скобках, учитывая, что диссипативный коэффициент b также предполагается малой величиной порядка μ в силу самой постановки задачи.

Подставим вычисленные значения производных (2.33), (2.34) в уравнение (2.30). Заметим, что члены нулевого порядка μ^0 взаимно сокращаются. Упрощенное уравнение

$$2c_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi' \partial \tau} = \frac{b}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \quad (2.35)$$

можно проинтегрировать по τ и положить произвольную функцию от ξ , получаемую при интегрировании, равной нулю (поскольку возмущение должно исчезать при $\tau \rightarrow \pm \infty$). В результате

придем к уравнению типа теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{b}{2c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \quad (2.36)$$

Для отыскания периодического решения (2.36) положим $u = A(\zeta)e^{-i\omega\tau}$. Принимая $A(\zeta = 0) = A_1$, найдем

$$u = A_1 e^{-k''\zeta} e^{-i\omega\tau}, \quad (2.37)$$

что совпадает с первым из членов в формуле (2.28). Таким образом, метод медленно изменяющегося профиля для диссипативной системы (2.30) дает правильный результат при условии (2.27), т. е. при условии слабого затухания на расстояниях, сравнимых с длиной волны.

Напомним ряд свойств уравнения (2.36). Его решение с условием на границе $u(\zeta = 0, \tau) = u_0(\tau)$ имеет вид

$$u(\zeta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta\zeta}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\tau') \exp\left[-\frac{(\tau - \tau')^2}{4\delta\zeta}\right] d\tau', \quad \delta = \frac{b}{2c_0^2 \rho_0}. \quad (2.38)$$

Интегрируя (2.36) по τ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, с учетом убывания производной $\partial u/\partial \tau$ при $\tau \rightarrow \pm \infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau, \zeta) d\tau = \text{const}, \quad (2.39)$$

что соответствует сохранению количества движения (энергия волны в диссипативной среде, разумеется, уменьшается).

Если исходное возмущение представляет собой уединенный импульс с характерной длительностью τ_0 , то на расстояниях $4\delta\zeta \gg \tau_0^2$ ширина экспоненциального множителя под интегралом (2.38) много больше, чем длительность импульса при $\zeta = 0$. Поэтому за то время, пока функция $u_0(\tau)$ отлична от нуля, экспонента изменится незначительно и ее можно вынести из-под интеграла. Таким образом, на больших расстояниях поведение одиночного возмущения описывается универсальным асимптотическим выражением

$$u(\zeta, \tau) = \frac{\exp(-\tau^2/4\delta\zeta)}{\sqrt{4\pi\delta\zeta}} \int u_0(\tau') d\tau'. \quad (2.40)$$

Решение (2.40) соответствует импульсу гауссовой формы. Преимущественное поглощение высокочастотных составляющих спектра, так как $k'' \sim \omega^2$, приводит к росту ширины этой кривой по закону $\sqrt{\zeta}$ и к уменьшению амплитуды пропорционально $1/\sqrt{\zeta}$. Количество движения сохраняется, а энергия, связанная с ин-

тегралом по τ от квадрата функции $u(\xi, \tau)$, уменьшается также по закону $1/\sqrt{\xi}$.

В заключение укажем еще один способ получения уравнения (2.36), непосредственно основанный на использовании приближенного дисперсионного соотношения (2.26):

$$ik - i\frac{\omega}{c_0} = (-i\omega)^2 \frac{b}{2c_0^3 \rho_0}. \quad (2.41)$$

Для плоской гармонической волны $u = A \exp[-i(\omega t - k\xi)]$ член ik соответствует взятой производной $\partial/\partial\xi$, а член $(-i\omega)$ — дифференцированию $\partial/\partial t$. Это позволяет сопоставить (2.41) дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.42)$$

записанное в неподвижной системе координат. Переходя теперь к сопровождающей координате $\tau = t - \xi/c_0$, получим в точности уравнение (2.36).

Конструирование дифференциального уравнения с помощью закона дисперсии также является (наряду с методом медленно изменяющегося профиля) довольно общим приемом для задач теории волн. Этот прием будет часто использоваться в дальнейшем при рассмотрении линейных волновых процессов.

§ 3. Продольные и поперечные волны в изотропном твердом теле

При описании движения жидкости и газа в § 2 использовались эйлеровы координаты. Все величины — скорость u , плотность ρ и давление p , при таком подходе считаются функциями времени t и координат x, y, z неподвижного пространства, т. е. $u, \rho, p = \Phi(t; x, y, z)$. Когда вычисляется полная производная по времени d/dt , нужно учитывать, что x, y, z также зависят от времени, так как положение гидродинамической частицы в пространстве изменяется. Поэтому

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + (u\nabla)\Phi.$$

Иначе говоря, при эйлеровом описании необходимо различать частную и полную производные по t .

В теории упругости, при изучении механики твердых тел, традиционно используются другие — лагранжевы — координаты. При лагранжевом описании сплошной среды считается, что все величины являются функциями времени t и положения частицы r_0 в начальный момент времени $t = 0$. Если в начальный момент

частица характеризовалась набором переменных $M_0(t=0; x_0, y_0, z_0)$, то после деформирования в момент t она займет положение, характеризуемое переменными (рис. 1.2)

$$M(t; x(r_0), y(r_0), z(r_0)), \quad r_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad r = (x, y, z).$$

На рис. 1.2 вектор U — смещение частицы. Как следует из определения, в координатах Лагранжа полная и частная производные по времени не различаются. От лагранжевых координат $t; r_0$ к эйлеровым $t; r(t)$ можно перейти по формуле $r = r_0 + U(t; r_0)$. Зная смещение, легко найти гидродинамическую скорость $u = \partial U / \partial t$.

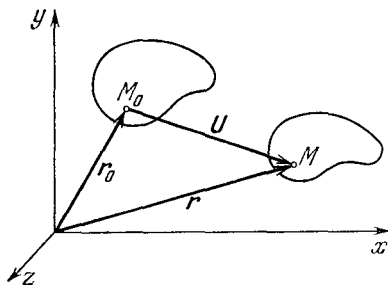
В силу сказанного выше уравнение движения для твердого тела запишется в виде

$$\rho_0 \frac{d^2 U}{dt^2} = F \quad \text{или} \quad \rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial a_k}. \quad (3.1)$$

Здесь использованы тензорные обозначения. Для повторяющихся индексов имеет место суммирование; $i, k = 1, 2, 3$; $a_1 = x_0, a_2 = y_0, a_3 = z_0$. Сила F в уравнении (3.1) записана как дивергенция от тензора напряжений σ_{ik} . Для гидродинамики невязкой жидкости (см. (2.2)) $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$, т. е. тензор напряжений связан только с давлением (всесторонним сжатием) элемента сплошной среды. В отличие от текучих сред, твердые тела упруго реагируют на деформацию сдвига, и здесь выражение для σ_{ik} будет более сложным. Чтобы получить его, введем так называемый тензор деформаций U_{ik} , определяющий изменение элемента длины при деформации.

Рассмотрим две бесконечно близкие точки среды до и после деформирования. В исходном состоянии, при $t = 0$, радиус-векторы этих точек равнялись r_0 и $r_0 + dr_0$, а расстояние между ними определялось выражением $dr_0^2 = da_1^2 + da_2^2 + da_3^2 = da_i da_i$. В деформированном состоянии точки займут положение $r = r_0 + U$ и $r + dr = r_0 + U + dr_0 + dU$. Квадрат расстояния между ними станет равным

$$\begin{aligned} dr^2 &= (dr_0 + dU)^2 = \left(da_i + \frac{\partial U_i}{\partial a_k} da_k \right)^2 = \\ &= da_i da_i + 2 \frac{\partial U_i}{\partial a_k} da_i da_k + \frac{\partial U_i}{\partial a_k} \frac{\partial U_i}{\partial a_l} da_k da_l. \end{aligned}$$



1.2. Исходное M_0 и текущее M положение точки в твердом теле при деформации.

Переобозначая «немые» индексы $l \leftrightarrow i$ в третьем члене и разбивая второй член на два, получим

$$dr^2 - dr_0^2 = \frac{\partial U_i}{\partial a_k} da_i da_k + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} da_k da_i + \\ + \frac{\partial U_l}{\partial a_k} \frac{\partial U_l}{\partial a_i} da_k da_i = 2U_{ik} da_i da_k. \quad (3.2)$$

Выражение

$$U_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial a_k} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} + \frac{\partial U_l}{\partial a_k} \frac{\partial U_l}{\partial a_i} \right) \quad (3.3)$$

называется *тензором деформаций*. Тензор симметричен: $U_{ik} = U_{ki}$, т. е. в каждой точке пространства его можно привести к диагональному виду с помощью поворота осей координат. При этом не равными нулю будут компоненты U_{11} , U_{22} , U_{33} .

В главных осях (3.2) принимает вид

$$dr^2 = (1 + 2U_{11})da_1^2 + (1 + 2U_{22})da_2^2 + (1 + 2U_{33})da_3^2.$$

Таким образом, полное изменение элемента длины можно рассматривать как сумму трех независимых деформаций по каждой из трех главных осей тензора U_{ik} . Элемент деформированного объема равен

$$dV = [(1 + 2U_{11})(1 + 2U_{22})(1 + 2U_{33})]^{1/2} dV_0, \\ dV = dx dy dz, \quad dV_0 = da_1 da_2 da_3. \quad (3.4)$$

Ниже мы рассмотрим распространение волн в линейном приближении, считая деформации малыми. Пренебрегая в (3.4) нелинейными членами — произведениями и степенями величин U_{ik} , найдем

$$dV = (1 + U_{11} + U_{22} + U_{33})dV_0, \quad (dV - dV_0)/dV_0 = U_{ll}. \quad (3.5)$$

Согласно (3.5) относительное изменение объема определяется следом тензора $\text{Sp} U_{ik} = U_{ll}$. Поскольку U_{ll} есть инвариант, не изменяющийся при переходе от одной системы координат к другой, изменение объема может быть выражено через след тензора U_{ik} и без приведения последнего к диагональному виду.

Записав тождество

$$U_{ik} = \left(U_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} U_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} U_{ll}, \quad (3.6)$$

нетрудно видеть, что любая деформация может быть представлена в виде суммы деформаций чистого сдвига и всестороннего сжатия. Действительно, первый член в (3.6) не связан с изменением объема, поскольку $\text{Sp}(U_{ik} - \delta_{ik} U_{ll}/3) = 0$, и описывает сдвиго-

вую деформацию. Второй же член согласно (3.5) описывает только объемную деформацию. Поэтому наиболее общий вид связи тензора напряжений σ_{ik} с тензором деформаций U_{ik} в линейном приближении дается формулой

$$\sigma_{ik} = KU_{ll}\delta_{ik} + 2\mu \left(U_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} U_{ll} \right). \quad (3.7)$$

Связь (3.7) носит название закона Гука. Константы K , μ называются *модулями всестороннего сжатия и сдвига* соответственно. Когда деформации не малы и необходимо учитывать нелинейные эффекты, связь $\sigma_{ik}(U_{ik})$ следует дополнить членами более высокого порядка (например, квадратичными по U_{ik}). Для анизотропных тел (кристаллов) закон Гука записывается в виде $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} U_{lm}$, где λ_{iklm} — тензор четвертого порядка.

Совокупность формул (3.1), (3.3), (3.7) позволяет вывести линейное волновое уравнение, описывающее распространение упругих волн в изотропном твердом теле. Подставляя (3.7) в (3.1), получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \left(K - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial U_{ll}}{\partial a_i} + 2\mu \frac{\partial U_{ik}}{\partial a_k}. \quad (3.8)$$

Пренебрегая третьим (нелинейным) членом в выражении (3.3) тензора деформаций через компоненты вектора смещения и подставляя в правую часть (3.8) $U_{ll} = \partial U_i / \partial a_i$, $2U_{ik} = \partial U_i / \partial a_k + \partial U_k / \partial a_i$, придем к искомому уравнению

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \left(K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_i \partial a_l} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_k \partial a_k}. \quad (3.9)$$

В векторных обозначениях (3.9) имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \left(K + \frac{\mu}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U}. \quad (3.10)$$

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся по направлению единичного вектора \mathbf{m} . Это означает, что мы ищем решение (3.10) в виде $\mathbf{U} = U(\zeta, t)$, где $\zeta = m_x a_1 + m_y a_2 + m_z a_3$. Для плоской волны (3.10) сведется к одномерному уравнению

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \left(K + \frac{\mu}{3} \right) \mathbf{m} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (\mathbf{m} U) + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \quad (3.11)$$

Чтобы получить уравнение для продольных волн, в которых смещение параллельно направлению распространения волны \mathbf{m} , умножим обе части (3.11) скалярно на вектор \mathbf{m} . Для проекции смещения $U_l = (\mathbf{m} U)$ имеем

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_l}{\partial t^2} = \left(K + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial^2 U_l}{\partial \zeta^2}. \quad (3.12)$$

Поперечная компонента смещения U_t удовлетворяет другому уравнению

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 U_t}{\partial \tau^2}. \quad (3.13)$$

В отличие от U_s , переменная U_t имеет векторный характер; в плоскости, нормальной к \mathbf{m} , она может быть разложена на составляющие.

Нетрудно видеть, что скорости распространения продольной и поперечной волн различны:

$$c_l = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \left(K + \frac{4}{3} \mu \right)}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad c_l > c_t. \quad (3.14)$$

Если модуль сдвига $\mu = 0$, то среда ведет себя как жидкость или газ, и поперечные волны в ней не распространяются (см. § 2).

§ 4. Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде

Исходной системой уравнений для определения электромагнитного поля в среде являются уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.4)$$

Здесь \mathbf{j} и ρ — плотности токов и электрических зарядов в среде, появление которых вызвано электромагнитным полем. Эти величины связаны уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (4.5)$$

физический смысл которого аналогичен смыслу уравнения (2.1) для механики сплошных сред. Уравнение выражает закон сохранения полного электрического заряда внутри достаточно большого объема среды, \mathbf{E} и \mathbf{H} — это напряженности электрического и магнитного полей, \mathbf{D} и \mathbf{B} — векторы электрической и магнитной индукции.

Нужно заметить, что система (4.1) — (4.4) не является полной. В нее входят пять векторных величин: \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{j} , для определения которых необходимо иметь пять векторных уравнений. Однако система (4.1) — (4.4) содержит лишь два векторных и два

скалярных уравнения, причем уравнение (4.3) есть следствие уравнений (4.1) и (4.5), а (4.4) является следствием (4.2).

Действительно, взяв дивергенцию от обеих частей (4.2), с учетом тождества $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, получим соотношение

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.6)$$

Перестановка операторов $\partial/\partial t$ и div правомерна в силу условия непрерывности векторов поля. Если проинтегрировать (4.6) и допустить, что когда-либо в прошлом электромагнитное поле отсутствовало (что позволяет положить постоянную интегрирования равной нулю), получим уравнение (4.4), являющееся математическим выражением экспериментального факта отсутствия свободных магнитных зарядов.

Уравнение (4.3) можно получить, взяв дивергенцию от обеих частей (4.1):

$$0 = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{j}.$$

С учетом уравнения непрерывности (4.5) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D} - 4\pi\rho) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

Таким образом, получается уравнение (4.3), являющееся математическим выражением закона Кулона.

Для расчета электромагнитных полей в различных средах систему уравнений (4.1) — (4.4) необходимо дополнить системой материальных уравнений:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}).$$

Эти три уравнения отражают свойства конкретной рассматриваемой среды и должны быть добавлены к уравнениям Максвелла, чтобы они приобрели определенность. В вакууме, например,

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = 0.$$

Связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} , \mathbf{j} и \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{H} зависит от характера взаимодействия электромагнитного поля с веществом и может иметь очень сложный вид. Она может быть нелинейной, нелокальной, учитывать анизотропию и наследственные свойства («память») среды. Последнее означает, в частности, что значения векторов \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{j} в какой-либо точке \mathbf{r} и в момент времени t могут зависеть от значений векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в других точках пространства и в предшествующие моменты времени. Такая связь между векторами приводит к появлению частотной и пространственной дисперсии, существенно влияющей на процессы распространения волн. Эти вопросы будут рассмотрены в последующих главах. Здесь же мы будем

считать, что характерные внутренние пространственные и временные масштабы среды не сказываются на распространении волны, и связь между векторами локальна и линейна. Материальные уравнения в этом случае имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (4.7)$$

Для изотропной однородной среды ε , μ — константы, называемые электрической и магнитной проницаемостью соответственно, σ — проводимость.

Если $\sigma \neq 0$ и среда проводящая, то, подставляя (4.7) в уравнения (4.3) и (4.5), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \rho = 0 \quad \text{или} \quad \rho = \rho_0 e^{-t/t_0},$$

где $t_0 = \varepsilon/4\pi\sigma$. В среде, обладающей проводимостью, плотность свободных зарядов убывает со временем.

Таким образом, система уравнений (4.1) — (4.4), с учетом материальных уравнений (4.7), запишется в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Исключим из системы (4.8) вектор \mathbf{H} , для чего применим операцию rot к обеим частям второго из уравнений (4.8). Учитывая, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E},$$

получим

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\varepsilon}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (4.9)$$

Если $\sigma = 0$, т. е. среда не обладает проводимостью, то вектор \mathbf{E} удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Таким же уравнениям удовлетворяет и вектор \mathbf{H} .

Перейдем к рассмотрению электромагнитного поля, в котором векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} зависят лишь от одной пространственной координаты $\xi = (m\mathbf{r})$ и времени t . В этом случае волновое уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \xi^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.10)$$

Аналогичное уравнение получается и для вектора \mathbf{H} . Каждая из декартовых компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} будет при этом удовлетворять одномерному скалярному уравнению (1.2), решение которого в виде бегущих плоских волн уже было рассмотрено в § 1 и 2. Уравнение (4.10) описывает процесс распространения в направлениях $\pm \mathbf{m}$ со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ двух плоских векторных волн

$$\mathbf{E}_{1,2} = \mathbf{E}[t \mp \zeta/v].$$

Аналогично

$$\mathbf{H}_{1,2} = \mathbf{H}[t \mp \zeta/v].$$

Для определения структуры этих волн необходимо обратиться к уравнениям Максвелла. Рассмотрим волну, распространяющуюся в направлении $+\mathbf{m}$. В этом случае

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathbf{m} E), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial \zeta} [\mathbf{m} \mathbf{E}]$$

и система уравнений (4.1) — (4.4) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} [\mathbf{m} \mathbf{E}] &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \frac{\partial}{\partial \zeta} [\mathbf{m} \mathbf{H}] &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathbf{m} E) &= 0, & \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathbf{m} H) &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из последних двух уравнений (4.11) следует, что $\partial E_{\zeta}/\partial \zeta = 0$ и $\partial H_{\zeta}/\partial \zeta = 0$, т. е. проекции векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} на направление распространения волны если и не равны нулю, то могут зависеть только от времени. Умножая теперь скалярно первые два уравнения (4.11) на вектор \mathbf{m} , получим $\partial E_{\zeta}/\partial t = \partial H_{\zeta}/\partial t = 0$. Иными словами, проекции E_{ζ} и H_{ζ} не зависят также и от времени, т. е. тождественно равны нулю. Это означает, что электромагнитные волны в диэлектрической среде являются поперечными волнами; векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} лежат в плоскости фронта волны.

В проводящей среде $\partial E_{\zeta}/\partial \zeta = 0$, однако из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} [\mathbf{m} \mathbf{H}] = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}$$

в случае $\sigma \neq 0$ следует, что

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_{\zeta}}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma}{c} E_{\zeta} \quad \text{или} \quad E_{\zeta} = E_{\zeta}(0) \exp\left(-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} t\right).$$

Продольная компонента вектора \mathbf{E} убывает во времени, а поэтому и в проводящей среде поле также поперечно.

Найдем теперь связь между векторами \mathbf{H} и \mathbf{E} в бегущей плоской волне. Вводя координату $\tau = t - \zeta/v$, связанную с волной, получим $\partial/\partial t = \partial/\partial \tau$, $\partial/\partial \zeta = -\partial/(v\partial \tau)$. Первое из уравнений (4.11)

примет вид

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{v} [mH] + \frac{\varepsilon}{c} E \right\} = 0, \quad E = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [mH]. \quad (4.12)$$

Константу, получаемую при интегрировании по τ , следует положить равной нулю, поскольку рассматриваются только переменные электромагнитные поля.

Как следует из (4.12), векторы E , H , m образуют правую ортогональную тройку векторов. Величина

$$Z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}, \quad (4.13)$$

определяющая количественную связь между напряженностями электрического и магнитного полей, называется *импедансом среды*.

Если среда обладает проводимостью, то распространение волны описывается уравнением (4.9). В этом случае без изменения формы может распространяться только гармоническая волна.

Рассмотрим распространение плоской гармонической волны. Принимая $E = E_0(\zeta)e^{-i\omega t}$, для комплексной амплитуды получим уравнение Гельмгольца

$$\frac{d^2 E_0}{d\zeta^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \left(\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) E_0 = 0, \quad (4.14)$$

которое отличается от аналогичного уравнения для идеальной среды только тем, что вместо действительного коэффициента $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu / c^2$ в него входит комплексная величина

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \left(\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \varepsilon \kappa.$$

Решение уравнения (4.14) можно записать в виде

$$E_0 = A_1 e^{ik\zeta} + A_2 e^{-ik\zeta}, \quad \text{где} \quad k = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa).$$

Отсюда следует, что

$$E(\zeta, t) = A_1 e^{-\frac{\omega}{c} \kappa \zeta} e^{-i\omega \left(t - \frac{n}{c} \zeta \right)} + A_2 e^{\frac{\omega}{c} \kappa \zeta} e^{-i\omega \left(t + \frac{n}{c} \zeta \right)}. \quad (4.15)$$

Решение (4.15) получено в виде двух бегущих плоских однородных волн, амплитуды которых убывают по мере распространения.

Величина κ характеризует скорость убывания амплитуды волны в направлении распространения и называется *показателем поглощения* (следует отличать от коэффициента поглощения, равного $k'' = \frac{\omega}{c} \kappa$). Величина $n = c/v$ определяет фазовую скорость волны в среде и называется *показателем преломления*.

Выясним теперь, как зависят показатели n и κ от частоты волны и параметров среды. Введем величину

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}, \quad (4.16)$$

называемую *тангенсом угла потерь*. Приравнявая действительные и мнимые части равенства

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon\mu (1 + i \operatorname{tg} \delta) = \frac{\omega^2}{c^2} (n + i\kappa)^2,$$

получим систему уравнений для нахождения n и κ :

$$n^2 - \kappa^2 = \mu\epsilon, \quad 2n\kappa = \mu\epsilon \operatorname{tg} \delta.$$

Решение этой системы дает искомые зависимости

$$n = \left[\frac{\mu\epsilon}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1) \right]^{1/2}, \quad \kappa = \left[\frac{\mu\epsilon}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1) \right]^{1/2}. \quad (4.17)$$

Важно отметить, что в проводящей среде n и κ зависят от частоты (поскольку $\operatorname{tg} \delta \sim \omega^{-1}$), т. е. проводящая среда является диспергирующей. При распространении плоской волны произвольной формы происходит искажение ее профиля, поскольку фазовая скорость и коэффициент затухания различных частотных составляющих не одинаковы.

Рассмотрим предельные случаи малых и больших потерь. Для слабо затухающей волны ($\operatorname{tg} \delta \ll 1$)

$$n = \sqrt{\mu\epsilon} = \text{const}, \quad \kappa = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\operatorname{tg} \delta}{2} = \kappa(\omega).$$

Этот случай в некотором смысле аналогичен акустическому: дисперсии нет, а диссипация частотно-зависима.

Для волны, испытывающей сильное затухание ($\operatorname{tg} \delta \gg 1$),

$$n \approx \kappa = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \operatorname{tg} \delta} = \sqrt{2\pi \frac{\mu\sigma}{\omega}}. \quad (4.18)$$

Величина потерь и фазовая скорость в проводящей среде определяются не только значениями ϵ , σ и μ , но существенным образом зависят от частоты.

Однако в случае $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ волновой процесс практически не реализуется, поскольку волна затухает на очень малых расстояниях. Убывание амплитуды в e раз происходит на длине

$$d = \frac{c}{\omega\kappa} = \frac{\lambda}{2\pi\kappa}.$$

В хороших проводниках $\kappa \approx n \gg 1$ (см. (4.18)), и, следовательно, глубина проникновения электромагнитной волны в проводящую среду (толщина скин-слоя) $d \ll \lambda$.

Найдем связь между векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} в проводящей среде. Учитывая (4.12), получим

$$\frac{|\mathbf{H}|}{|\mathbf{E}|} = \frac{\sqrt{n^2 + \kappa^2}}{\mu} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)^{1/4}. \quad (4.19)$$

В проводящей среде существует сдвиг фаз φ между векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\kappa}{n} = \left[\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta + 1} - 1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta + 1} + 1} \right]^{1/2} = \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}, \quad \varphi = \delta/2; \quad (4.20)$$

при $\sigma \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow \pi/4$; такая ситуация реализуется в очень хороших проводниках.

Для приближенного, более простого анализа уравнения (4.9) в случае плоских волн

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon v^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (4.21)$$

можно использовать метод медленно изменяющегося профиля, описанный в предыдущем параграфе, либо сконструировать линейное уравнение, воспользовавшись приближенным законом дисперсии

$$k \approx \frac{\omega}{v} \left(1 + i \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta \right) = \frac{\omega}{v} + i \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon v},$$

справедливым для слабо проводящей среды $\operatorname{tg} \delta \ll 1$. Оба приема позволяют понизить порядок исходного уравнения (4.21) и получить

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon v} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E}(\xi, \tau) = \mathbf{E}_0(0, \tau) \exp \left[-\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon v} \xi \right]. \quad (4.22)$$

Сравнивая этот случай с акустическим (2.36), нетрудно видеть, что уравнение (4.22) имеет более простой вид. Это связано с тем обстоятельством, что в исходном уравнении (4.21) поглощение описывается производной первого порядка, в то время как для звуковых волн диссипативный член связан с производной третьего порядка, высшей по сравнению с другими членами уравнения.

§ 5. Поток энергии

В среде, не обладающей проводимостью, энергия электромагнитного поля сохраняется. Закон сохранения энергии можно записать в интегральной форме

$$\int W(\mathbf{r}, t) d^3r = \text{const} \quad (5.1)$$

или эквивалентной дифференциальной форме

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (5.2)$$

Здесь W — объемная плотность энергии, \mathbf{S} — поток энергии. Для нахождения явного вида величин W и \mathbf{S} воспользуемся системой уравнений Максвелла для среды без дисперсии (4.8), в которой положим $\sigma = 0$. Умножая первое уравнение (4.8) на \mathbf{E} , второе на \mathbf{H} и вычитая одно из другого, получим

$$\frac{\varepsilon}{c} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mu}{c} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}] \quad (5.3)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} + \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}] = 0. \quad (5.4)$$

Сравнивая (5.4) с (5.2), находим выражение для плотности и потока энергии

$$W = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}]. \quad (5.5)$$

Второе выражение (5.5) называется *вектором Умова — Пойнтинга*.

Сохранение полной энергии (5.4) имеет место в достаточно большой области, на границах которой поток энергии \mathbf{S} равен нулю. Внутри же этого объема происходит перенос энергии из одной его части в другую, обусловленный распространением в системе электромагнитных волн.

Если рассматривается гармонический во времени волновой процесс, то физический смысл имеют средние за период значения S и W . Поскольку \mathbf{S} и W — квадратичные функции от векторов поля, то при их вычислении необходимо пользоваться полями \mathbf{E} и \mathbf{H} , записанными в действительном виде. При использовании для удобства расчета комплексных величин в (5.5) нужно подставить для \mathbf{E} и \mathbf{H} соответственно выражения: $1/2(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$ и $1/2(\mathbf{H} + \mathbf{H}^*)$. Для среднего за период вектора \mathbf{S} имеем

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{16\pi} [\overline{\mathbf{E} \mathbf{H}} + \overline{\mathbf{E}^* \mathbf{H}} + \overline{\mathbf{E} \mathbf{H}^*} + \overline{\mathbf{E}^* \mathbf{H}^*}].$$

Черта сверху означает усреднение. Учитывая, что зависимость полей от времени имеет вид $e^{\pm i\omega t}$, получим

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{16\pi} [\mathbf{E}^* \mathbf{H} + \mathbf{E} \mathbf{H}^*] = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E} \mathbf{H}^*]. \quad (5.6)$$

Покажем, что плотность потока энергии в плоской волне равна произведению плотности энергии на скорость распространения

волны. Используя соотношение (4.12), придем к выражению

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [E [m E^*]] = \frac{1}{8\pi} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \varepsilon |E|^2 m = vW, \quad (5.7)$$

где $|v| = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, а направление скорости переноса энергии совпадает с направлением распространения волны m . Учитывая (5.7), соотношение (5.2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}(Wv) = 0. \quad (5.8)$$

Это уравнение выражает закон сохранения энергии рассмотренного волнового процесса.

Точно таким же образом, пользуясь уравнениями гидродинамики (2.1) — (2.3), можно показать, что для сплошной среды также удастся записать дифференциальный закон сохранения энергии (5.2), в котором

$$W = \rho \mathcal{E} + \frac{1}{2} \rho u^2, \quad \mathbf{S} = \rho u \left(\frac{1}{2} u^2 + w \right). \quad (5.9)$$

Здесь \mathcal{E} — внутренняя энергия единицы массы, w — удельная энтальпия. Поскольку мы рассматриваем только адиабатическое распространение звука, в пренебрежении изменением энтропии имеем следующие термодинамические соотношения:

$$dw = \frac{dp}{\rho}, \quad d\mathcal{E} = \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (5.10)$$

Выражение (5.9) для W состоит из двух слагаемых, соответствующих потенциальной и кинетической энергиям движущейся жидкости. Переходя к рассмотрению энергии звукового поля, положим в общей формуле (5.9) $\rho = \rho_0 + \rho'$ и разложим $\rho \mathcal{E}$ в ряд по ρ' , ограничиваясь членами второго порядка малости:

$$W = \rho_0 \mathcal{E}_0 + \rho' \frac{\partial(\rho \mathcal{E})}{\partial \rho_0} + \frac{\rho'^2}{2} \frac{\partial^2(\rho \mathcal{E})}{\partial \rho_0^2} + \frac{\rho_0 u^2}{2}.$$

Используя соотношения (5.10), получим

$$\frac{\partial(\rho \mathcal{E})}{\partial \rho} = \mathcal{E} + \frac{p}{\rho}, \quad \frac{\partial^2(\rho \mathcal{E})}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{c^2(\rho)}{\rho}.$$

Таким образом, энергия звукового поля в единице объема жидкости равна

$$W = \rho_0 \mathcal{E}_0 + \left(\mathcal{E}_0 + \frac{p_0}{\rho_0} \right) \rho' + \frac{v_0^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \frac{\rho_0}{2} u^2. \quad (5.11)$$

Первый член суммы (5.11) представляет энергию единицы объема неподвижной жидкости, которая не связана со звуковой волной. Второй член обусловлен изменением количества вещества.

В полной энергии, получающейся интегрированием удельной энергии по достаточно большому объему жидкости, этот член должен дать нуль, так как общее количество жидкости остается неизменным.

Таким образом, полное изменение энергии, связанное с распространением звуковой волны, равно

$$\int \left(\frac{\rho_0 u^2}{2} + \frac{c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2 \right) dV.$$

Подынтегральное выражение представляет собой плотность звуковой энергии

$$W_{\text{зв}} = \frac{\rho_0 u^2}{2} + \frac{c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2. \quad (5.12)$$

В бегущей звуковой волне выполняются соотношения (2.13): $\rho'/\rho_0 = u/c_0$, и поэтому

$$W_{\text{зв}} = \rho_0 u^2.$$

Это выражение определяет среднее по времени значение полной звуковой энергии, так как среднее значение потенциальной энергии равно среднему значению кинетической для всякой системы, совершающей малые колебания.

Определим средний поток энергии через замкнутую поверхность, охватывающую некоторый объем жидкости, в котором распространяется звук. Плотность потока энергии жидкости дается второй формулой (5.9). В случае звуковых волн малой амплитуды членом u^2 можно пренебречь как членом третьего порядка малости. Тогда средняя плотность потока

$$\bar{S} = \overline{\rho u(w_0 + w')} = w_0 \overline{\rho u} + \overline{p' u}.$$

Полный поток энергии через замкнутую поверхность равен

$$\oint (w_0 \overline{\rho u} + \overline{p' u}) ds.$$

Так как общее количество жидкости в данном объеме постоянно, интеграл от первого слагаемого обращается в нуль, и поток энергии через замкнутую поверхность равен

$$\oint \overline{p' u} ds.$$

Отсюда средняя плотность потока определяется как

$$\bar{S} = \overline{p' u}. \quad (5.13)$$

Закон сохранения звуковой энергии запишется в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } p' u = 0.$$

В бегущей плоской звуковой волне $p' = c_0 \rho_0 u$ и

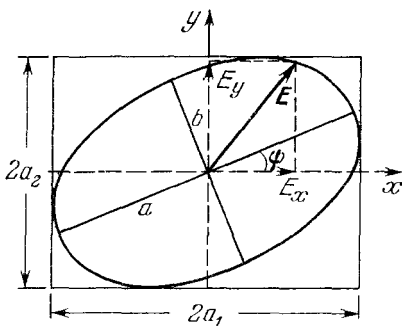
$$S = c_0 W m, \quad (5.14)$$

где m — единичный вектор в направлении распространения волны.

§ 6. Поляризация электромагнитных волн

Электромагнитная волна имеет векторный характер. Для ее полного описания необходимо кроме амплитуды, фазы и частоты указать поляризацию волны, т. е. направление векторов E и H в пространстве: для плоской волны нужно знать направление E и H в плоскости волнового фронта.

Необходимо указать, что поляризованными могут быть поперечные волны иной физической природы — например, волны в струне или упругом твердом теле (см. § 3). Однако в этом параграфе для определенности речь будет идти только о поляризации электромагнитных волн.



1.3. Эллиптически-поляризованная волна.

взаимно перпендикулярным

направлениями (рис. 1.3)

$$\begin{aligned} E_x &= a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = \operatorname{Re} a_1 \exp(-i\omega t - i\varphi_1), \\ E_y &= a_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \operatorname{Re} a_2 \exp(-i\omega t - i\varphi_2). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь $\tau = t - z/v$; a_1, a_2 ; φ_1, φ_2 — постоянные действительные амплитуды и фазы ортогональных проекций вектора E .

Определим, как изменяется положение вектора E в плоскости x, y . Исключая из соотношений (6.1) временной множитель, получим уравнение эллипса

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - \frac{2E_x E_y}{a_1 a_2} \cos \Delta = \sin^2 \Delta, \quad \Delta = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (6.2)$$

Если $\Delta = \pm \pi/2$, уравнение (6.2) переходит в следующее:

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 = 1,$$

т. е. при $\Delta = \pm \frac{\pi}{2} + n\pi$ оси эллипса совпадают с осями координат. При $a_1 = a_2$ эллипс вырождается в окружность.

В случае $\Delta = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, из уравнения (6.2) следует

$$\left(\frac{E_x}{a_1} \pm \frac{E_y}{a_2} \right)^2 = 0.$$

Это уравнение двух прямых, углы наклона которых $\chi_{1,2}$ к оси x определяются отношением a_2/a_1 ; $\operatorname{tg} \chi_{1,2} = \pm a_2/a_1$.

Состояние поляризации гармонической волны удобно характеризовать множителем поляризации

$$\mathcal{P} = \frac{E_x}{E_y} = \frac{a_1}{a_2} e^{i\Delta}. \quad (6.3)$$

Как следует из предыдущих рассуждений, при комплексном \mathcal{P} волна имеет эллиптическую поляризацию; при чисто мнимом \mathcal{P} оси эллипса совпадают с осями координат. Когда $\mathcal{P} = \pm i$, поляризация круговая. В случае действительного \mathcal{P} волна поляризована линейно. Знак мнимой части \mathcal{P} определяет направление вращения вектора \mathbf{E} в плоскости поляризации. Знак плюс соответствует правой, минус — левой поляризации. Напомним, что право-поляризованной называется волна, у которой вращение вектора \mathbf{E} для наблюдателя, смотрящего в направлении прихода волны, происходит по часовой стрелке. Если $\operatorname{Im} \mathcal{P} = 0$ и $\mathcal{P} = \pm a_1/a_2$, то $\mathcal{P} = \operatorname{ctg} \chi_{1,2}$.

Таким образом, если отношение амплитуд ортогональных проекций вектора \mathbf{E} и сдвиг фаз между ними не изменяются, т. е. E_x и E_y когерентны, то электромагнитная волна поляризована.

В отличие от гармонических волн, которые всегда поляризованы, часто имеют дело со сложной случайной зависимостью от времени амплитуд $a_1(t)$, $a_2(t)$ и разности фаз $\Delta(t)$, когда все положения вектора \mathbf{E} в плоскости фронта волны оказываются равновероятными. Такая волна называется неполяризованной («естественный свет»).

Поляризацию волны можно определить из экспериментов, если фиксировать изменение во времени мгновенных значений компонент E_x и E_y . Однако провести такие измерения для быстро изменяющихся полей затруднительно в силу инерционных свойств измерительных приборов.

Состояние поляризации можно также определить, измеряя зависимость интенсивности излучения от направления в плоскости x, y . Если волна поляризована линейно, то средняя интенсивность отлична от нуля только в одном направлении. Для волны, поляризованной по кругу, распределение средней интенсивности будет равномерным по всей плоскости, так же как и для неполяризованной волны. Поэтому наличие круговой поляризации путем измерения интенсивности в разных направлениях плоскости x, y не может быть установлено непосредственно. Однако если ввести фазовую задержку на $\pi/2$ в одну из прямоугольных компонент век-

тора E , то волна с круговой поляризацией превратится в линейно-поляризованную, волна же неполяризованная не изменится.

Полностью поляризованные и полностью неполяризованные волны представляют два противоположных предельных случая регулярного или случайного состояния поляризации волны. Часто приходится иметь дело с частично-поляризованными волнами, представляющими собой суперпозицию полностью неполяризованной и полностью поляризованной волны. Дело в том, что волны, которые мы считаем монохроматическими, в действительности всегда являются квазимонохроматическими. Их можно рассматривать как суперпозицию монохроматических волн с частотами в некотором промежутке $\Delta\omega$. В данной точке пространства поле такой волны будет описываться функцией

$$E(t) = a(t)\exp(-i\omega t - i\varphi(t)), \quad (6.4)$$

где $a(t)$ — амплитуда, $\varphi(t)$ — фаза, которые на интервале $T = 2\pi/\omega$ меняются мало.

Состояние поляризации как монохроматических (и полностью поляризованных), так и немонохроматических (частично-поляризованных) волн можно характеризовать единым образом с помощью матрицы когерентности

$$I_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{cc} \overline{E_x E_x^*} & \overline{E_x E_y^*} \\ \overline{E_y E_x^*} & \overline{E_y E_y^*} \end{array} \right). \quad (6.5)$$

Здесь черта означает усреднение по времени наблюдения, которое должно быть значительно больше, чем $T = 2\pi/\omega$. След матрицы (6.5) равен интенсивности волны

$$\text{Sp} I_{\alpha\beta} = \overline{|E_x|^2} + \overline{|E_y|^2} = I. \quad (6.6)$$

В случае полностью поляризованной волны $\overline{E_\alpha E_\beta^*} = E_\alpha E_\beta^*$, поскольку произведения $E_\alpha E_\beta^*$ от времени не зависят.

Для неполяризованной волны определитель матрицы когерентности $|I_{\alpha\beta}| = I^2/4$, поскольку в этом случае $\overline{E_x E_y^*} = \overline{E_y E_x^*} = 0$, а $\overline{|E_x|^2} = \overline{|E_y|^2} = I/2$. Для полностью поляризованной волны $|I_{\alpha\beta}| = 0$; в случае волны с частичной поляризацией для определителя выполнено неравенство

$$0 \leq |I_{\alpha\beta}| \leq I^2/4. \quad (6.7)$$

Подставляя в (6.5) выражения (6.1) для E_x , E_y , удается придать матрице когерентности следующий вид:

$$I_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{cc} \overline{a_1^2} & \overline{a_1 a_2 \exp(i\Delta)} \\ \overline{a_1 a_2 \exp(-i\Delta)} & \overline{a_2^2} \end{array} \right). \quad (6.8)$$

Таким образом, состояние поляризации полностью характеризуется заданием величин

$$\overline{a_1^2}, \overline{a_1 a_2 \exp(i\Delta)}, \overline{a_1 a_2 \exp(-i\Delta)} \text{ и } \overline{a_2^2}, \text{ где } \overline{a_1^2} + \overline{a_2^2} = I.$$

Вместо этих четырех величин часто удобно вводить другие:

$$\xi_1 = \frac{1}{I} (\overline{a_1^2} - \overline{a_2^2}), \quad \xi_2 = \frac{1}{I} \overline{2a_1 a_2 \cos \Delta}, \quad \xi_3 = \frac{1}{I} \overline{2a_1 a_2 \sin \Delta}. \quad (6.9)$$

Величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 называются *параметрами Стокса*. Матрица когерентности через параметры Стокса выражается следующим образом:

$$I_{\alpha\beta} = \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_1 & \xi_2 + i\xi_3 \\ \xi_2 - i\xi_3 & 1 - \xi_1 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Для неполяризованной волны $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, для полностью поляризованной $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$. Сумма квадратов параметров Стокса характеризует степень поляризации волны

$$p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2. \quad (6.11)$$

Если интенсивность волны равна I , то интенсивность ее поляризованной части

$$I_p = pI, \quad (6.12)$$

а неполяризованной

$$I_{np} = (1 - p)I. \quad (6.13)$$

Физический смысл параметров Стокса ясен из их определения: $I\xi_1$ — разность интенсивностей линейно-поляризованных волн при $\chi = 0^\circ$ и $\chi = 90^\circ$; $I\xi_2$ — то же самое для $\chi = 45^\circ$ и $\chi = 135^\circ$; $I\xi_3$ — разность интенсивностей волн с правой и левой круговой поляризацией. Параметры Стокса могут быть легко измерены в эксперименте.

С помощью параметров Стокса или матрицы когерентности можно находить поляризацию суммарного поля при суперпозиции нескольких волн. Матрица когерентности результирующей волны равна сумме матриц отдельных волн.

Можно также решить задачу о разложении частично-поляризованной волны на полностью поляризованную и неполяризованную части и определить характер поляризации поляризованной компоненты поля. Для этого матрицу когерентности нужно записать в виде

$$I_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} I (1 - p) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} I p \begin{pmatrix} 1 + \xi_1/p & (\xi_2 + i\xi_3)/p \\ (\xi_2 - i\xi_3)/p & 1 - \xi_1/p \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

где $p = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, $\delta_{\alpha\beta}$ — единичный тензор.

С помощью параметров Стокса можно определить форму и ориентацию эллипса поляризации поляризованной части волны. Обозначая главные оси эллипса через a и b , а через ψ — угол, который составляет большая ось эллипса с осью x , легко найти следующие соотношения, вывода которых мы здесь приводить не будем:

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2 = I, \quad \operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} 2\chi \cos \Delta, \quad \sin 2\alpha = \sin 2\chi \sin \Delta. \quad (6.15)$$

Здесь $\operatorname{tg} \alpha = \pm b/a$, а $\operatorname{tg} \chi = a_2/a_1$. С помощью формул (6.15) выражаем

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2a_1a_2 \cos \Delta}{a_1^2 - a_2^2} = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad \sin 2\alpha = \xi_3, \quad (6.16)$$

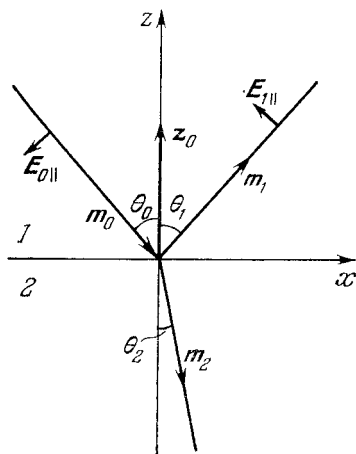
определяя тем самым ориентацию и отношение осей эллипса. В этих формулах ξ_1, ξ_2, ξ_3 — параметры Стокса для поляризованной части волны.

§ 7. Отражение и преломление плоских волн на плоской границе раздела

В теории волн очень часто приходится иметь дело с задачами о распространении сигналов в неоднородных средах. Здесь возникают значительные трудности, и преодолеваются они в основном с помощью приближенных методов расчета. Для того чтобы строить приближенную теорию, очень полезно знать решения некоторых простых задач, которые затем можно пытаться обобщить. Самая простая задача о распространении волн в неоднородной среде — это задача о падении плоской монохроматической волны на плоскую границу раздела двух сред с различными свойствами. Как известно, при этом возникают преломленная (прошедшая) и отраженная волны.

1.4. Отражение и преломление плоской волны на плоской границе раздела двух сред.

Пусть граница раздела между двумя полубесконечными однородными средами совпадает с плоскостью $z = 0$ декартовой системы координат. Среда, расположенные сверху ($z > 0$) и снизу ($z < 0$) от границы, характеризуются соответственно параметрами $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1; \epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$. Пусть на эту границу из первой среды падает плоская волна под углом θ_0 к оси z (рис. 1.4) с частотой ω



и волновым вектором $\mathbf{k}_0 = k_1 \mathbf{m}_0$ ($k_1 = \sqrt{\varepsilon_1^k} \mu_1 \omega / c$, \mathbf{m}_0 — единичный вектор нормали к фронту падающей волны). Плоскость падения, содержащую вектор \mathbf{k}_0 и ось z , совместим с плоскостью xz .

Задача об отражении и преломлении падающей волны в этом параграфе будет решена в линейном приближении. В этом случае гармоники не возникают и частоты всех трех волн — падающей, отраженной и преломленной — одинаковы. Если, например, вторая среда нелинейна, при отражении может возникнуть волна с частотой 2ω ; этот эффект здесь не рассматривается.

Обозначим волновой вектор отраженной волны через $\mathbf{k}_1 = k_1 \mathbf{m}_1$, а преломленной $\mathbf{k}_2 = k_2 \mathbf{m}_2$; \mathbf{z}_0 — единичный вектор нормали к границе раздела, направленный из среды 2 в среду 1.

Согласно (4.15) и (4.12) электрические и магнитные поля можно записать следующим образом. Для падающей волны:

$$\mathbf{E}_I = E_0 \exp [ik_1(\mathbf{m}_0 \mathbf{r}) - i\omega t], \quad \mathbf{H}_I = \frac{[\mathbf{m}_0 E_0]}{Z_1} \exp [ik_1(\mathbf{m}_0 \mathbf{r}) - i\omega t]; \quad (7.1)$$

для отраженной:

$$\mathbf{E}_R = E_1 \exp [ik_1(\mathbf{m}_1 \mathbf{r}) - i\omega t], \quad \mathbf{H}_R = \frac{[\mathbf{m}_1 E_1]}{Z_1} \exp [ik_1(\mathbf{m}_1 \mathbf{r}) - i\omega t] \quad (7.2)$$

и преломленной:

$$\mathbf{E}_T = E_2 \exp [ik_2(\mathbf{m}_2 \mathbf{r}) - i\omega t], \quad \mathbf{H}_T = \frac{[\mathbf{m}_2 E_2]}{Z_2} \exp [ik_2(\mathbf{m}_2 \mathbf{r}) - i\omega t]. \quad (7.3)$$

Здесь $Z_1 = \sqrt{\mu_1 / \varepsilon_1^k}$ и $Z_2 = \sqrt{\mu_2 / \varepsilon_2^k}$ — импедансы первой и второй сред.

При $z = 0$ должны выполняться граничные условия, сводящиеся к требованию непрерывности тангенциальных компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} суммарного волнового поля. Следовательно, при $z = 0$ поля должны удовлетворять уравнениям

$$[\mathbf{z}_0 E_0] e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r})} + [\mathbf{z}_0 E_1] e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r})} = [\mathbf{z}_0 E_2] e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r})}, \quad (7.4)$$

$$[\mathbf{z}_0 [\mathbf{m}_0 E_0]] e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r})} + [\mathbf{z}_0 [\mathbf{m}_1 E_1]] e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r})} = \frac{Z_1}{Z_2} [\mathbf{z}_0 [\mathbf{m}_2 E_2]] e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r})}.$$

Поскольку соотношения (7.4) должны быть выполнены во всех точках плоскости $z = 0$, из них вытекает требование одинаковой зависимости полей всех трех волн от координат x и y при $z = 0$. Поэтому фазовые множители должны быть одинаковыми:

$$k_1(\mathbf{m}_0 \mathbf{r})|_{z=0} = k_1(\mathbf{m}_1 \mathbf{r})|_{z=0} = k_2(\mathbf{m}_2 \mathbf{r})|_{z=0} \quad (7.5)$$

или

$$k_1 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2.$$

Здесь θ_1 — угол отражения, θ_2 — угол преломления (см. рис. 1.4).

Из (7.5) следует, что угол отражения равен углу падения (закон отражения):

$$\theta_1 = \theta_0, \quad (7.6)$$

а синусы углов преломления и падения связаны соотношением:

$$\sin \theta_2 / \sin \theta_0 = k_1 / k_2. \quad (7.7)$$

Это — закон преломления или закон Снеллиуса.

Если проводимости первой и второй сред равны нулю (прозрачные среды), то θ_2 в формуле (7.7) — действительный угол между нормалью к фронту преломленной волны и осью z . Но закон Снеллиуса справедлив и в случае комплексных k_1 и k_2 .

Для определения амплитуд отраженной и преломленной волн обратимся к системе уравнений (7.4). При этом рассмотрим волны двух различных линейных поляризаций: горизонтально поляризованную волну с вектором E , перпендикулярным плоскости падения ($E_x = E_z = 0$, $E_y \neq 0$), и вертикально поляризованную волну с вектором E , лежащим в плоскости падения ($E_y = 0$, $E_x \neq 0$, $E_z \neq 0$). Волну с произвольной эллиптической поляризацией можно получить как линейную комбинацию этих двух решений (см. § 6).

В первом случае, для волны с горизонтальной поляризацией, получим из (7.4) уравнения для неизвестных амплитуд E_1 и E_2 :

$$E_0 + E_1 = E_2,$$

$$\frac{1}{Z_1}(E_0 \cos \theta_0 - E_1 \cos \theta_0) = \frac{1}{Z_2} E_2 \cos \theta_2. \quad (7.8)$$

Решая (7.8), найдем коэффициенты Френеля, связывающие амплитуды отраженной и прошедшей волн с амплитудой падающей волны:

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \frac{E_1}{E_0} = \frac{Z_2 \cos \theta_0 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_0 + Z_1 \cos \theta_2} = |R_{\perp}| e^{i\varphi_{\perp}}, \\ T_{\perp} &= \frac{E_2}{E_0} = \frac{2Z_2 \cos \theta_0}{Z_2 \cos \theta_0 + Z_1 \cos \theta_2} = |T_{\perp}| e^{i\varphi'_{\perp}}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Для вертикально поляризованной волны расчет удобнее проводить для вектора H , который в этом случае перпендикулярен плоскости падения. Вычисления, полностью аналогичные проделанным выше, приводят к выражениям

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{H_1}{H_0} = \frac{Z_1 \cos \theta_0 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_0 + Z_2 \cos \theta_2} = |R_{\parallel}| e^{i\varphi_{\parallel}}, \\ T_{\parallel} &= \frac{H_2}{H_0} = \frac{2Z_2 \cos \theta_0}{Z_1 \cos \theta_0 + Z_2 \cos \theta_2} = |T_{\parallel}| e^{i\varphi'_{\parallel}}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Как и следовало ожидать, в случае $\theta_0 = 0$ (при нормальном падении волны на границу раздела сред) выполняется равенство

$$R_{\perp} = -R_{\parallel} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (7.11)$$

Коэффициентом отражения R называется отношение среднего по времени отраженного от поверхности потока энергии к падающему потоку. Отраженный и падающий потоки определяются средним значением z -компоненты вектора Умова — Пойнтинга в отраженной и падающей волнах. Таким образом,

$$R = \frac{(\overline{S_R})_z}{(\overline{S_I})_z} = \frac{|E_1|^2}{|E_0|^2}.$$

При нормальном падении как в случае прозрачной, так и для поглощающей среды ($\mu_1 = \mu_2 = 1$)

$$R = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \right|^2. \quad (7.12)$$

Выше были получены общие выражения. Теперь нужно их конкретизировать, рассмотрев несколько более частных задач.

Пусть отражение происходит от границы диэлектрик — диэлектрик. В этом случае $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}$, $Z_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}$ и из формул (7.7)–(7.9) получаем

$$R_{\perp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0 - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_2}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_2} = -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)}, \quad (7.13)$$

$$R_{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_0 - \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_2}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_2} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)}. \quad (7.14)$$

Отсюда следует, что коэффициенты Френеля действительны, т. е. сдвиг фаз между падающей и отраженной волнами равен 0 либо π . При падении на более плотную среду с $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ имеем $\theta_2 < \theta_0$, и для волны с горизонтальной поляризацией сдвиг фаз равен π . На рис. 1.5 приведены графики изменения модулей и фаз коэффициентов Френеля для горизонтально и вертикально поляризованных волн при изменении угла падения θ_0 от 0 до $\pi/2$, когда $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

Поведение коэффициента Френеля (7.13) для волны с горизонтальной поляризацией не имеет каких-либо особенностей. Поэтому обращение R_{\perp} в нуль возможно лишь при одинаковых ε_1 и ε_2 , когда свойства первой и второй сред идентичны и

отражение исчезает по существу вместе с исчезновением границы раздела.

Поведение коэффициента Френеля (7.14) для вертикально поляризованной волны сложнее. При условии $\theta_0 + \theta_2 = \pi/2$ величина R_{\parallel} обращается в нуль. Угол θ_0 , как легко видеть, в этом случае равен

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (7.15)$$

Угол $\theta_0 = \theta_B$, определяемый из условия (7.15), называется *углом Брюстера* или *углом полной поляризации*. Второе название связано с тем фактом, что при падении произвольно поляризованной волны на границу под углом θ_B отраженная волна оказывается горизонтально поляризованной, поскольку коэффициент отражения вертикально поляризованной компоненты поля обращается в нуль.

При изменении угла падения в области $0 \leq \theta_0 \leq \theta_B$ модуль R_{\parallel} убывает от величины, определяемой формулой (7.14) при $\theta_0 = 0$, до нуля; при $\theta_B \leq \theta_0 \leq \pi/2$ возрастает от 0 до 1. Фаза при $0 \leq \theta_0 \leq \theta_B$ равна нулю; при $\theta_B \leq \theta_0 \leq \pi/2$ она равна π , т. е. изменяется скачком при переходе θ_0 через значение θ_B .

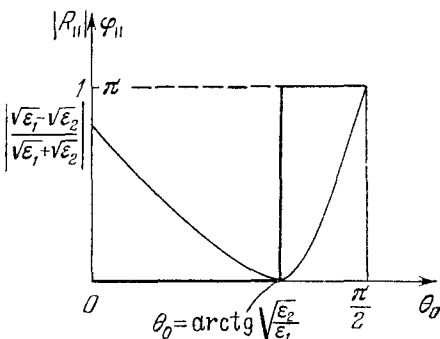
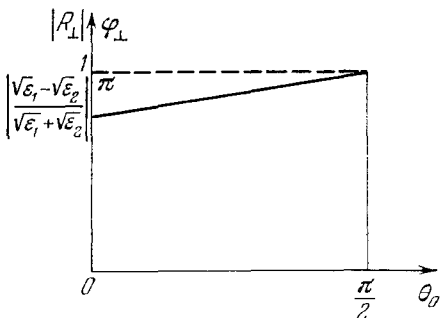
1.5. Зависимость модулей и фаз коэффициентов Френеля от угла падения θ при отражении от границы раздела двух диэлектриков ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$).

Если отражение происходит от диэлектрика, оптически менее плотного, т. е. $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, угол θ_2 всегда больше, чем θ_0 . Когда угол падения θ_0 удовлетворяет условию $\sin \theta_0 \geq \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$, то из (7.7) следует, что $\sin \theta_2 > 1$, а $\cos \theta_2$ — мнимая величина. Этот случай соответствует полному отражению от границы раздела диэлектрических сред. Угол θ_0 , удовлетворяющий условию

$$\sin \theta_0 = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1},$$

называется *предельным углом полного отражения*. При этом $\sin \theta_2 = 1$, т. е. преломленная волна распространяется параллельно границе раздела.

Выясним теперь, какова структура поля преломленной волны для углов падения, больших или равных предельному. В этом



случае

$$\cos \theta_2 = \pm i \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta_0 - 1},$$

$$E_T = E_2 \exp \left\{ -k_2 |z| \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta_0 - 1} + i(k_0 x \sin \theta_0 - \omega t) \right\}. \quad (7.16)$$

Как нетрудно видеть, преломленная волна представляет собой плоскую неоднородную волну. Амплитуда ее убывает в направлении оси z (нормально к границе раздела), фаза же меняется вдоль оси x . Таким образом, во второй среде существует убывающее по экспоненте поле. Можно показать, что средняя плотность потока энергии из первой среды во вторую равна нулю. Действительно,

$$\bar{S}_z = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (z_0 [E_2 H_2^*]) = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{Z_2} |E_2|^2 \operatorname{Re} \cos \theta_2 = 0. \quad (7.17)$$

Из (7.17) следует, что при $\operatorname{Im} (\varepsilon_1/\varepsilon_2) \neq 0$ полного отражения не происходит.

Более детальный анализ показывает, что при полном отражении вектор плотности потока энергии осциллирует в направлении оси z и имеет регулярную составляющую вдоль поверхности раздела. Рассмотрение нестационарной задачи приводит к выводу о существовании в первые моменты времени потока энергии во вторую среду.

Разумеется, при полном отражении модули коэффициентов Френеля $|R_\perp|$ и $|R_\parallel|$ равны единице. Фазы же этих коэффициентов φ_\perp и φ_\parallel различны и являются функциями угла падения

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_\perp}{2} = - \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \sin^2 \theta_0 - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0}, \quad (7.18)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_\parallel}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 \sin^2 \theta_0 - \varepsilon_2)}}{\varepsilon_2 \cos \theta_0}. \quad (7.19)$$

Полное отражение сопровождается изменением фазы волны, различным для горизонтально и вертикально поляризованных компонент поля. Поэтому, если полное отражение испытывает волна, плоскость поляризации которой наклонена к плоскости падения под некоторым углом, отраженная волна оказывается эллиптически-поляризованной.

Пусть теперь отражение и преломление падающей волны происходит на границе диэлектрик — проводник. Будем считать, что $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$. Свойства второй среды характеризуются некоторой диэлектрической проницаемостью ε_2 и проводимостью σ_2 . Из закона Снеллиуса (7.7) при этом следует,

что

$$(\mathbf{k}_1)_x = (\mathbf{k}_2)_x = k_1 \sin \theta_0,$$

$$(\mathbf{k}_2)_z = k_2 \cos \theta_2 = k_2 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sin^2 \theta_0} = k_1 \sqrt{\varepsilon_2 + i \frac{4\pi\sigma_2}{\omega} - \sin^2 \theta_0}.$$

Здесь $k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 + i \frac{4\pi\sigma_2}{\omega}}$, а $k_1 = \frac{\omega}{c}$; $(\mathbf{k}_2)_z$ — это комплексная величина.

Вводя обозначения

$$q = \left[(\varepsilon_2 - \sin^2 \theta_0)^2 + \left(\frac{4\pi\sigma_2}{\omega} \right)^2 \right]^{1/4} \cos \frac{\varphi}{2},$$

$$p = \left[(\varepsilon_2 - \sin^2 \theta_0)^2 + \left(\frac{4\pi\sigma_2}{\omega} \right)^2 \right]^{1/4} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (7.20)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4\pi\sigma}{\omega} (\varepsilon_2 - \sin^2 \theta_0)^{-1},$$

получим

$$(\mathbf{k}_2)_z = \frac{\omega}{c} (q + ip). \quad (7.21)$$

С помощью обозначений (7.20) поле преломленной волны во второй среде запишется в следующем виде:

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_2 \exp(-k_1 p |z|) \exp[i(k_1 x \sin \theta_0 + q k_1 z)]. \quad (7.22)$$

И в этом случае преломленная волна (7.22) является плоской неоднородной волной. Плоскости равной амплитуды определяются из уравнения

$$pz = \text{const}. \quad (7.23)$$

Как следует из (7.22), эти плоскости параллельны границе раздела. Для плоскостей равной фазы имеем другое уравнение

$$\sin \theta_0 \cdot x + qz = \text{const}. \quad (7.24)$$

Анализ (7.24) показывает, что нормаль к плоскостям равной фазы направлена под углом ψ к оси z (рис. 1.6), где

$$\sin \psi = \sin \theta_0 / \sqrt{\sin^2 \theta_0 + q^2}, \quad \cos \psi = q / \sqrt{\sin^2 \theta_0 + q^2}. \quad (7.25)$$

Относительный показатель преломления

$$n_{1,2} = \frac{\sin \theta_0}{\sin \psi} = \sqrt{q^2 + \sin^2 \theta_0}$$

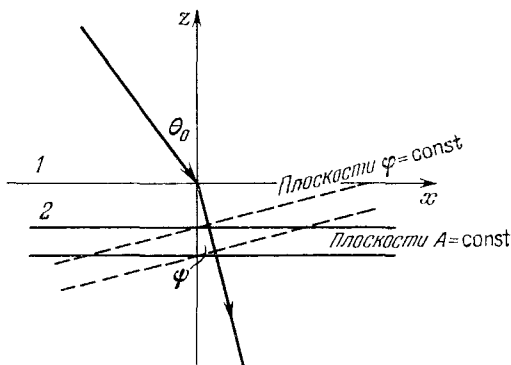
зависит не только от свойств среды, но и от угла падения.

В предельном случае $|\varepsilon_2^k| \gg 1$ в формулах (7.20) можно пренебречь зависимостью величин q , p и $\operatorname{tg} \varphi$ от угла падения θ_0 . При этом $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \delta = 4\pi\sigma/\omega\varepsilon_2$,

$$q = \sqrt{|\varepsilon_2^k|} \cos \frac{\varphi}{2} = n, \quad p = \sqrt{|\varepsilon_2^k|} \sin \frac{\varphi}{2} = \kappa.$$

Если, кроме того, $\operatorname{tg} \delta \gg 1$, то $q \approx p \approx |\varepsilon_2^k|$. Для таких сред из (7.25) следует, что $\cos \psi \rightarrow 1$, $\sin \psi \rightarrow 0$. Преломленная волна становится почти однородной плоской волной, амплитуда которой убывает в e раз на расстоянии $d = \lambda/2\pi n \ll \lambda$.

Если модуль комплексной проницаемости проводящей среды $|\varepsilon_2^k| \gg 1$, то независимо от угла падения волны из диэлектрика



1.6. Образование плоской неоднородной волны при преломлении на границе раздела между диэлектриком и проводящей средой.

на границу раздела проводящей среды преломленная волна распространяется почти нормально к границе. Это обстоятельство позволяет сформулировать приближенные граничные условия (М. А. Леонтович, 1948 г.), которые существенно облегчают решение ряда задач.

Для выяснения физического смысла граничных условий Леонтовича рассмотрим вначале случай нормального падения. Во второй среде векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} связаны соотношением

$$\mathbf{E}_2 = Z_2 [\mathbf{z}_0 \mathbf{H}_2], \quad \text{где } Z_2 = \left(\varepsilon_2 + i \frac{4\pi\sigma_2}{\omega} \right)^{-1/2}, \quad (7.26)$$

\mathbf{z}_0 — нормаль к поверхности раздела, совпадающая с положительным направлением оси z . Точные граничные условия сводятся к равенству тангенциальных компонент полей на границе. Но при нормальном падении тангенциальные компоненты в первой и во второй средах равны полным полям: $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$. С учетом этого обстоятельства (7.26) можно переписать (при $z = 0$) в виде

$$\mathbf{E}_1 = Z_2 [\mathbf{z}_0 \mathbf{H}_1], \quad (7.27)$$

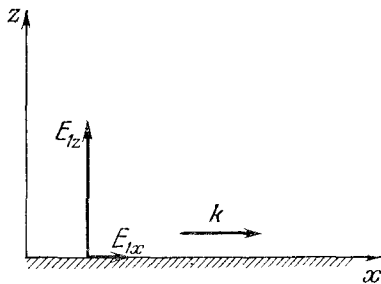
где $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_R$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_T + \mathbf{H}_R$. Для нормального падения связь между полями \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 на границе через импеданс второй среды является точной.

Идея состоит в том, чтобы использовать условие (7.27) для волны, падающей на границу под произвольным углом. Если во второй среде волна при этом остается плоской и распространяется перпендикулярно границе раздела, то

$$[z_0 E_1] = Z_2 [z_0 [z_0 H_1]]. \quad (7.28)$$

Таковыми свойствами обладает преломленная волна в хорошо проводящей среде, у которой $|\epsilon^k| \gg 1$, $n \gg 1$, $\kappa \gg 1$. Волна во второй среде очень быстро затухает; характерная глубина проникновения (толщина скин-слоя) $d \ll \lambda$. Приближенные условия Леонтовича можно использовать при падении неплоской волны на неплоскую поверхность раздела, если радиусы кривизны фронта волны R и поверхности раздела r удовлетворяют условиям $R \gg d$, $r \gg d$. Запишем (7.28) в проекциях

1.7. К распространению волны над хорошо проводящей поверхностью.



$$E_x = -Z_2 H_y, \quad E_y = Z_2 H_x. \quad (7.29)$$

Индекс 1 здесь и ниже опущен; по смыслу приближенных граничных условий ясно, что рассматриваются поля только в первой среде. Дифференцируя первое соотношение (7.29) по x , второе — по y и складывая, получим

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = -Z_2 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right).$$

С помощью уравнений Максвелла можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial E_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= (\operatorname{rot} \mathbf{H})_z = \frac{\epsilon_1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned}$$

В итоге приходим к искомой связи

$$-\frac{\partial E_z}{\partial z} = ik_1 \frac{Z_2}{Z_1} E_z. \quad (7.30)$$

Приближенные граничные условия Леонтовича в форме (7.28) — (7.30) позволяют получать приближенные решения задач, точное решение которых связано со значительными математическими трудностями.

Рассмотрим конкретный пример: распространение волны над хорошо проводящей плоскостью (модель границы воздух — земная поверхность, рис. 1.7). При отсутствии земли в воздухе

распространялась бы плоская волна. Выясним, как влияет поверхность на процесс распространения этой волны. Связь между полями в первой среде $H_{1y} = -E_{1z}/Z_1$. Пользуясь граничным условием при $z = 0$ в форме (7.29) $H_{1y} = -E_{1x}/Z_2$, легко установить, что вблизи поверхности волна имеет продольную составляющую

$$E_{1x} = \frac{Z_2}{Z_1} E_{1z} = \frac{E_{1z}}{\sqrt{\epsilon_2^k}} = \frac{\exp\left(-i\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt{|\epsilon_2^k|}} E_{1z}. \quad (7.31)$$

Поскольку мы предполагали $|\epsilon_2^k| \gg 1$, из (7.31) следует $|E_{1x}| \ll \ll |E_{1z}|$, т. е. фронт волны немного изогнут.

Для определения поля во второй среде используем точные граничные условия: $E_{1x} = E_{2x}$, $\epsilon_1 E_{1z} = \epsilon_2^k E_{2z}$ при $z = 0$. Отсюда с помощью (7.31) найдем

$$E_{2z} = \frac{\exp\left(-i\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt{|\epsilon_2^k|}} E_{2x}, \quad |E_{2z}| \ll E_{2x},$$

т. е. во второй среде волна имеет почти горизонтальную поляризацию.

Найдем компоненты вектора Пойнтинга \bar{S}_x и \bar{S}_z , определяющие средний по времени перенос энергии вдоль земной поверхности и потери ее за счет оттока в проводящую среду:

$$\bar{S}_x = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (E_{1z} H_{1y}^*) = \frac{c}{8\pi} \frac{|E_{1z}|^2}{|Z_1|} = \frac{c}{8\pi} |E_{1z}|^2,$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_z &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (E_{1x} H_{1y}^*) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{\exp\left(-i\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt{|\epsilon_2^k|}} |E_{1z}|^2 \frac{1}{Z_1} \right) = \\ &= \frac{c}{8\pi} |E_{1z}|^2 \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{\sqrt{|\epsilon_2^k|}}. \end{aligned}$$

Отношение этих компонент $\bar{S}_z/\bar{S}_x = \cos(\delta/2)/\sqrt{|\epsilon_2^k|} \ll 1$; таким образом, потери энергии незначительны.

Другой пример использования граничных условий Леонтовича, который мы рассмотрим, посвящен расчету коэффициента Френеля для горизонтально поляризованной волны. Нам уже известно точное решение задачи; это первая из формул (7.9).

Для получения приближенного решения подставим во второе условие (7.29), записанное в виде

$$E_0 + E_1 = Z_2 (H_{0x} + H_{1x}), \quad (7.32)$$

связи между E и H в плоских падающей и отраженной волнах

$$H_{0x} = E_0 \cos \theta_0 / Z_1, \quad H_{1x} = -E_1 \cos \theta_0 / Z_1. \quad (7.33)$$

Комбинируя выражения (7.32) и (7.33), получим

$$R_{\perp} = \frac{E_1}{E_0} = \frac{Z_2 \cos \theta_0 - Z_1}{Z_2 \cos \theta_0 + Z_1}. \quad (7.34)$$

Отсюда видно, что приближенное решение (7.34) близко к точному (7.9) при $\theta_2 \rightarrow 0$, когда преломленная волна почти перпендикулярна границе раздела.

В этом параграфе речь шла об электромагнитных волнах. Аналогичные явления — отражение и преломление — возникают и при падении на границу раздела сред волны иной физической природы. Например, для звуковых волн роль импеданса Z играет произведение ρc плотности среды на скорость звука, и отражение будет происходить от границы между средами с различными ρc . Если волна падает на границу раздела жидких или газообразных сред, в которых могут распространяться только продольные волны, расчет коэффициентов Френеля весьма прост, поскольку не требуется рассматривать волны различных поляризований. Приравнявая звуковые давления и нормальные компоненты колебательной скорости по обе стороны границы раздела, можно получить формулы, аналогичные (7.9):

$$R = \frac{Z_2 \cos \theta_0 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_0 + Z_1 \cos \theta_2}, \quad T = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{2Z_2 \cos \theta_0}{Z_2 \cos \theta_0 + Z_1 \cos \theta_2}. \quad (7.35)$$

В некоторых случаях здесь тоже может иметь место явление, аналогичное эффекту падения электромагнитной волны под углом Брюстера, когда отраженная волна отсутствует и граница полностью прозрачна, а также явление полного внутреннего отражения.

Если же жидкость или газ граничат с твердым телом, в последнем могут возбуждаться, кроме продольных, еще и поперечные волны.

Отметим также, что в акустике гораздо чаще, чем в оптике, приходится изучать распространение сигналов, по своему спектральному составу сильно отличающихся от гармонических (например, импульсных сигналов). В этом случае выражения типа (7.35) для коэффициентов Френеля справедливы для каждой из компонент Фурье падающей волны. Форма же негармонического сигнала при отражении или преломлении в общем случае искажается; этот факт можно рассматривать как проявление граничной (сосредоточенной на границе) дисперсии среды.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

В простейшем из рассмотренных в гл. I случаев распространение плоских волн описывалось уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

При этом для гармонического возмущения $u = \exp(i\omega t \pm ikz)$ волновое число связано с частотой линейной зависимостью

$$k = \omega/c \text{ или } \omega = ck,$$

где скорость распространения волны c есть постоянная величина. Однако уже при учете диссипативных процессов поведение волны описывается более сложными уравнениями (см. (2.21), (4.21) гл. I). Связь $\omega(k)$ или $k(\omega)$, определяющая закон дисперсии, также усложняется. Как было показано в § 2 и 4 гл. I, для звуковых волн в вязкой теплопроводящей среде и электромагнитных волн в среде с проводимостью справедливы следующие соотношения между волновым числом и частотой:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left(1 - i \frac{b\omega}{c_0^2 \rho_0}\right)^{-1}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \left(\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}\right).$$

В более общих случаях от частоты могут сложным образом зависеть и действительная, и мнимая части волнового числа

$$k(\omega) = k'(\omega) + ik''(\omega).$$

Действительная часть комплексного волнового числа характеризует зависимость от частоты фазовой скорости распространения волны $v_\phi = \omega/k'(\omega)$, а мнимая часть — зависимость затухания амплитуды волны от частоты.

Проявление дисперсии приводит к изменению закономерностей распространения немонахроматических волн. Действительно, различные спектральные компоненты распространяются в диспергирующей среде с отличающимися фазовыми скоростями и коэффициентами затухания:

$$F(\omega, \zeta) = A \exp\{-i[\omega t - k'(\omega)\zeta] - k''(\omega)\zeta\}.$$

В силу дисперсии фазовой скорости в процессе распространения изменяются фазовые соотношения между спектральными компонентами. Следовательно, изменяется результат их интерференции — форма импульса искажается. Дисперсия коэффициента поглощения $k''(\omega)$ приводит к трансформации частотного спектра волны $|F(\omega, \xi)|^2$ и дополнительному искажению импульса.

На практике очень часто имеют дело с волнами, обладающими сравнительно узкими частотными спектрами. Иногда оказывается, что в рассматриваемой ограниченной области частот можно пренебречь или затуханием волны, или дисперсией фазовой скорости. Так, для звуковых волн во многих случаях можно не учитывать дисперсию, а для электромагнитных, напротив, поглощение.

Обсудим некоторые физические причины, ответственные за появление дисперсии. Рассмотрим несколько примеров.

Как известно из оптики, зависимость показателя преломления (или диэлектрической проницаемости) от длины световой волны (или ее частоты) наиболее сильно сказывается в окрестности резонансных частот ω_{mn} , соответствующих переходам между квантовыми уровнями. Вблизи резонанса $\omega \approx \omega_{mn}$ резко возрастает и затухание волны (это приводит к появлению темных полос в спектрах поглощения атомов). Таким образом, частотная дисперсия наиболее существенна при $\omega \approx \omega_{mn}$, т. е. в том случае, когда в среде имеются характерные внутренние процессы, время протекания которых сравнимо с периодом изменения внешнего волнового поля. В области этих частот отклик среды на изменение величины внешнего поля запаздывает во времени. Поле в диспергирующей среде в данный момент зависит от значений приложенного поля во все предшествующие моменты времени. Иногда говорят, что такая среда обладает «памятью».

Сказанное в равной мере относится к распространению волн в средах, имеющих характерный пространственный параметр. Примерами таких сред могут служить плазма (характерный размер — дебаевский радиус), неоднородная среда (масштаб неоднородности), а также обычные газообразные, жидкие и твердые тела при высоких частотах, когда длина звуковой волны становится сравнимой с длиной свободного пробега или периодом решетки, и приближение сплошной среды неприменимо. В этих случаях поле в данной точке среды зависит от значений поля в соседних точках, т. е. связь внутреннего и приложенного внешнего поля является нелокальной. Дисперсия, появляющаяся в этих случаях, называется *пространственной*. Итак, дисперсия становится особенно существенной в области частот и волновых чисел, близких к резонансным. Однако дисперсионные эффекты могут накапливаться с расстоянием, проходимым волной, и слабая дисперсия может стать заметной и вдали от резонансных частот. Примером может служить разложение света в спектр

оптически прозрачной призмой, отклоняющей спектральные компоненты на разные углы.

Вообще говоря, характерные параметры с размерностью времени или длины вовсе не обязательно должны отражать внутренние свойства среды. Известно, что дисперсия существенно сказывается при распространении волн в волноводах (гл. X); здесь роль характерного масштаба выполняет размер поперечного сечения волновода. Другим примером может служить распространение в среде без дисперсии квазиплоской волны, ограниченной в пространстве в виде пучка. Здесь зависимость скорости волны от частоты связана с проявлением дифракции (гл. VIII).

В настоящей главе рассматриваются дисперсионные эффекты, влияющие на процесс распространения волн и связанные только с физическими свойствами материальной среды. Мы рассмотрим характерные особенности распространения гармонических плоских волн в различных материальных диспергирующих средах, а также распространение модулированных волн или волновых пакетов.

§ 1. Уравнения электромагнитного поля в среде с дисперсией

Дисперсионные эффекты очень часто проявляются при распространении электромагнитных волн. В гл. I рассматривались электромагнитные волны без учета дисперсионных свойств среды. Покажем, как видоизменяются исходные уравнения при учете этих свойств. Система уравнений Максвелла (4.1)—(4.4) сохраняет свой вид, поскольку она описывает электромагнитное поле в отсутствие внешних источников в любой материальной среде. Свойства среды должны быть учтены в материальных уравнениях:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}).$$

Для статических и медленно изменяющихся полей можно записать

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где ε , σ , μ — константы, т. е. значения \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{j} в некоторой точке среды и в некоторый момент времени определяются значениями \mathbf{E} и \mathbf{H} в той же точке и в тот же момент времени.

При быстром изменении поля, вследствие инерции внутренних движений и характерной пространственной структуры среды, наблюдается зависимость поляризации от поля, действующего в других точках и в другие моменты времени. При этом нужно иметь в виду, что в силу условия причинности поляризация (а следовательно, и индукция) зависит от полей, действовавших только в предыдущие моменты времени.

Сказанное можно записать математически, представляя материальные уравнения в общей интегральной форме

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int \varepsilon_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1.1)$$

$$B_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int \mu_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') H_j(t', \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1.2)$$

$$j_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int \sigma_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (1.3)$$

По дважды встречающимся индексам здесь и везде в дальнейшем предполагается суммирование.

Выражения (1.1)—(1.3) представляют собой наиболее общую функциональную форму записи материальных уравнений для линейной среды. В этой записи учтена возможность проявления нелокальности, запаздывания и анизотропных свойств среды.

В частном случае, если среда однородна в пространстве и не изменяет со временем своих свойств, материальные характеристики ε , μ , σ должны зависеть лишь от разностей координат $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и времени $\tau = t - t'$. Тогда

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \varepsilon_{ij}(\tau, \mathbf{R}) E_j(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad (1.4)$$

$$B_i(t, \mathbf{r}) = \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \mu_{ij}(\tau, \mathbf{R}) H_j(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad (1.5)$$

$$j_i(t, \mathbf{r}) = \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \sigma_{ij}(\tau, \mathbf{R}) E_j(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{R}). \quad (1.6)$$

Связь между индукциями, полями и поляризациями среды определяется соотношениями

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} - 4\pi\mathbf{M}. \quad (1.7)$$

Поэтому материальные уравнения можно записать также в виде

$$P_i(t, \mathbf{r}) = \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \kappa_{ij}(\tau, \mathbf{R}) E_j(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad (1.8)$$

где κ_{ij} — тензор восприимчивости среды. Аналогичное выражение можно записать для M_i .

Для проведения дальнейшего анализа удобно разложить $E(t, \mathbf{r})$ по плоским волнам:

$$E(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega E(\omega, \mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)].$$

После обычного перехода в фурье-представление в выражениях для D и B получаем простую зависимость

$$\begin{aligned} D_i(\omega, \mathbf{k}) &= \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})E_j(\omega, \mathbf{k}), \\ B_i(\omega, \mathbf{k}) &= \mu_{ij}(\omega, \mathbf{k})H_j(\omega, \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + 4\pi \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \kappa_{ij}(\tau, \mathbf{R}) \exp[i(\omega\tau - \mathbf{k}\mathbf{R})]. \quad (1.10)$$

Видно, что компоненты тензора диэлектрической проницаемости зависят в общем случае от частоты и от волнового вектора волны.

Аналогичный вывод можно сделать для магнитной проницаемости $\mu_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и проводимости $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$.

Таким образом, дисперсия при распространении электромагнитных волн может проявляться двойным образом — как частотная (за счет зависимости ε , μ , σ от частоты) и как пространственная (за счет зависимости этих же параметров от волнового вектора \mathbf{k}). Как уже говорилось, частотная дисперсия существенна, если частота электромагнитных волн близка к собственным частотам колебаний в среде. Пространственная же дисперсия становится заметной, когда длина волны сравнима с некоторыми характерными размерами.

Для электромагнитных волн в большинстве случаев, даже в оптическом диапазоне, характерный размер $a \ll \lambda$ (где λ — длина волны в среде: $\lambda = \lambda_0/n$) и пространственной дисперсией можно пренебречь. Однако в магнитоактивной плазме существуют области резонанса, в которых $n \rightarrow \infty$ и параметр a/λ становится значительным уже в радиодиапазоне. Кроме того, при полном пренебрежении величинами, содержащими малое отношение a/λ , не учитываются некоторые явления, возникающие при распространении электромагнитных волн в различных средах. Так, учет пространственной дисперсии в плазме позволяет объяснить появление бегущих плазменных волн. Пространственная дисперсия является главной причиной (а не поправкой), вызывающей появление естественной оптической активности, оптической анизотропии кубических кристаллов. Если не интересоваться этими специальными случаями, то при рассмотрении частотной дисперсии пространственной дисперсией можно пренебречь.

§ 2. Частотная дисперсия диэлектрической проницаемости

При учете только частотной дисперсии материальное уравнение (1.9) имеет вид

$$D_i(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega, \mathbf{r}). \quad (2.1)$$

В отличие от (1.9), здесь взяты не компоненты плоских волн поля \mathbf{E} , а лишь временные гармоники. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{ij}(\omega)$ для волны с частотой ω — это тензор, который в случае изотропной среды обращается в скаляр:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^{\infty} \kappa(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (2.2)$$

(напомним, что $\kappa(\tau)$ — действительная величина). Из (2.2) следует, что функция $\varepsilon(\omega)$ является комплексной:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega), \quad (2.3)$$

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon'(-\omega), \quad \varepsilon''(\omega) = -\varepsilon''(-\omega), \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon^*(-\omega), \quad (2.4)$$

т. е. $\varepsilon'(\omega)$ является четной, а $\varepsilon''(\omega)$ — нечетной функцией. Все сказанное справедливо также для $\sigma(\omega)$:

$$\sigma(\omega) = \sigma'(\omega) + i\sigma''(\omega). \quad (2.5)$$

Если в недиспергирующей среде диэлектрическая проницаемость — чисто реактивный параметр, а проводимость — чисто активный, то в среде с дисперсией это различие утрачивается. С увеличением частоты до значений, близких к собственным частотам среды, отличие в свойствах диэлектриков и проводников постепенно исчезает. Так, наличие у среды мнимой части диэлектрической проницаемости с макроскопической точки зрения неотличимо от существования проводимости — и то, и другое приводит к выделению тепла. Поэтому электрические свойства вещества можно характеризовать одной величиной — комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon^{\kappa} = \varepsilon + i4\pi\sigma/\omega, \quad (2.6)$$

где $\varepsilon = \varepsilon' - 4\pi\sigma''/\omega$, $\sigma = \sigma' + \omega\varepsilon''/4\pi$.

Можно установить предельный вид диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{\kappa}(\omega)$ при больших частотах, справедливый для любой материальной среды. В пределе при $\omega \rightarrow \infty$ имеем

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \kappa(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\kappa(0)}{i\omega} = 0,$$

и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon^{\kappa}(\omega)$, определяемая выражениями (2.6), (2.2), стремится к единице при $\omega \rightarrow \infty$.

Это же свойство диэлектрической проницаемости следует и из простого физического рассмотрения. При $\omega \rightarrow \infty$, когда частота волны велика по сравнению с собственными частотами колебаний электронов в атомах вещества, электроны можно считать свободными. Уравнение движения свободного электрона под действием гармонического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$ и решение этого уравнения имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}}{m\omega^2}.$$

Здесь m, e — масса и заряд электрона. Мы не учитываем силу, действующую на заряд со стороны магнитного поля, так как рассматривается нерелятивистский случай ($|\dot{\mathbf{r}}| \ll c$). Поляризация среды (дипольный момент единицы объема, содержащей N электронов) равна

$$\mathbf{P} = \sum e\mathbf{r} = -\frac{e^2 N}{m\omega^2} \mathbf{E}.$$

Отсюда $\mathbf{D} = (1 - 4\pi Ne^2/m\omega^2)\mathbf{E}$ и

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}. \quad (2.7)$$

При $\omega \rightarrow \infty$ мы получаем из (2.7) прежний результат: $\varepsilon \rightarrow 1$ и $\mathbf{D} = \mathbf{E}$. Область применимости формулы (2.7) для сред, в которых нет свободных электронов, лежит в диапазоне далекого ультрафиолета для самых легких элементов.

С учетом (2.6) уравнения Максвелла для комплексных амплитуд примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i \frac{\omega}{c} \varepsilon^{\kappa} \mathbf{E}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}, \\ \operatorname{div} (\varepsilon^{\kappa} \mathbf{E}) &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Поясним вывод уравнения $\operatorname{div} (\varepsilon^{\kappa} \mathbf{E}) = 0$. Из уравнения непрерывности при гармонической зависимости от времени следует

$$4\pi\rho = -i \frac{4\pi}{\omega} \operatorname{div} (\sigma \mathbf{E}).$$

Подставляя это соотношение в уравнение Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$, запишем его в форме

$$\operatorname{div} \left[\left(\varepsilon + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma \right) \mathbf{E} \right] = 0.$$

Учитывая определение ε^{κ} , получим уравнение $\operatorname{div} (\varepsilon^{\kappa} \mathbf{E}) = 0$.

Таким образом, для высокочастотных монохроматических полей вместо диэлектрической проницаемости и проводимости удобно ввести комплексную диэлектрическую проницаемость, объединяющую оба эти понятия. Физически это означает, что ток в

среде для высокочастотных полей нецелесообразно рассматривать как сумму тока проводимости и тока смещения. Вместо этого вводится полный ток

$$\mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t, \quad (2.9)$$

где \mathbf{P} — комплексный вектор поляризации среды.

§ 3. Связь между дисперсией и поглощением.

Дисперсионные соотношения Крамерса — Кронига

Комплексная диэлектрическая проницаемость при учете только частотной дисперсии согласно (2.6) и (2.2) может быть записана в виде

$$\epsilon^k(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^{\infty} \kappa(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau + i \frac{4\pi}{\omega} \int_0^{\infty} \sigma(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (3.1)$$

где $\kappa(\tau)$ и $\sigma(\tau)$ — действительные функции от τ . Они конечны при всех значениях τ и стремятся при $\tau \rightarrow \infty$ к нулю. Детальный вид этих функций зависит от конкретных физических механизмов, ответственных за процессы установления поляризации в среде. Интервал значений τ , в котором $\kappa(\tau)$ и $\sigma(\tau)$ отличны от нуля, есть величина порядка времени релаксации, характеризующего скорость протекания этих процессов.

Покажем, что, пользуясь общим интегральным представлением (3.1), можно установить аналитическую универсальную связь между действительной и мнимой частями комплексной диэлектрической проницаемости.

Необходимо подчеркнуть, что интегрирование в выражении (3.1) осуществляется в пределах от 0 до ∞ (а не от $-\infty$ до $+\infty$), что является следствием принципа причинности. В соответствии с этим принципом интегрирование в (1.1)—(1.3) производится лишь по времени, предшествовавшему данному моменту t . Исконая связь между действительной и мнимой частями $\epsilon^k(\omega)$ является следствием именно принципа причинности.

Интегрирование в (3.1) можно формально распространить на область от $-\infty$ до ∞ , если подынтегральные функции $\kappa(\tau)$, $\sigma(\tau)$ заменить на $\kappa(\tau)\theta(\tau)$, $\sigma(\tau)\theta(\tau)$, где $\theta(\tau)$ — ступенчатая функция Хевисайда:

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ 1, & \tau \geq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Тогда первый интеграл в (3.1) будет представлять собой фурье-образ или частотный спектр функции $\kappa(\tau)\theta(\tau)$. Действительно,

$$\kappa(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\tau)\theta(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (3.3)$$

Аналогично

$$\sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau) \theta(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (3.4)$$

С учетом (3.3) и (3.4) выражение (3.1) можно записать в виде

$$\varepsilon^k(\omega) = 1 + 4\pi k(\omega) + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma(\omega). \quad (3.5)$$

Поскольку подынтегральная функция в (3.3) является произведением двух функций, частотный спектр $\kappa(\omega)$ определится как свертка частотного спектра $\kappa(\tau)$ и спектра ступенчатой функции $\theta(\tau)$:

$$\kappa(\omega) = \theta(\omega) * \kappa(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\omega - \omega') \kappa(\omega') d\omega'. \quad (3.6)$$

Вычислим фурье-образ функции Хевисайда:

$$\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Последний интеграл можно записать как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T}} e^{i\omega\tau} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T^{-1}}{T^{-2} + \omega^2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i\omega}{T^{-2} + \omega^2} = \pi\delta(\omega) + \frac{i}{\omega},$$

где $\delta(\omega)$ — дельта-функция Дирака. Таким образом, мы приходим к известному результату теории обобщенных функций

$$\theta(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{i}{\omega}. \quad (3.7)$$

Подставляя фурье-образ (3.7) в (3.6), получим

$$\kappa(\omega) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa(\omega') d\omega'}{\omega - \omega'}. \quad (3.8)$$

Перечеркнутый знак интеграла означает, что в интервале от $-\infty$ до ∞ следует брать главное значение интеграла.

Аналогичные вычисления для $\sigma(\omega)$ приводят к выражению

$$\sigma(\omega) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\omega') d\omega'}{\omega - \omega'}. \quad (3.9)$$

Из (3.5) следует, что

$$4\pi k(\omega) = \varepsilon^k(\omega) - 1 - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma(\omega). \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.8), получим

$$\varepsilon^k(\omega) - 1 - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma(\omega) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^k(\omega') - 1}{\omega - \omega'} d\omega' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi\sigma(\omega')}{\omega'(\omega - \omega')} d\omega'. \quad (3.11)$$

Последний в (3.11) интеграл представим в виде суммы двух интегралов

$$\frac{1}{\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi\sigma(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' + \frac{1}{\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi\sigma(\omega')}{\omega'} d\omega'.$$

Сравнивая каждый из них с преобразованием (3.9), придем к следующим выражениям:

$$\frac{1}{\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi\sigma(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' = -i \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}, \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi\sigma(\omega')}{\omega'} d\omega' = i \frac{4\pi\sigma(0)}{\omega}. \quad (3.13)$$

Подставим (3.12) и (3.13) в (3.11); отделяя действительные и мнимые части, получим искомые связи:

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (3.14)$$

$$\varepsilon''(\omega) - \frac{4\pi\sigma(0)}{\omega} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (3.15)$$

Интегральные соотношения (3.14), (3.15) называются *формулами Крамерса — Кронига*. Для диэлектриков, не обладающих проводимостью при $\omega = 0$, в выражении (3.15) нужно положить $\sigma(0) = 0$.

Формулы Крамерса — Кронига устанавливают универсальную связь между действительной и мнимой частями комплексной диэлектрической проницаемости. Из этих выражений следует, что диспергирующая среда принципиально является средой поглощающей. Формулы (3.14), (3.15) имеют важное практическое значение. Рассмотрим конкретный пример использования этих формул.

Предположим, что в эксперименте по поглощению электромагнитных волн удалось с достаточной точностью и в широком диапазоне частот измерить зависимость $\varepsilon''(\omega)$ мнимой части диэлектрической проницаемости. В результате таких измерений со-

ставлена таблица значений, хорошо удовлетворяющая эмпирической зависимости

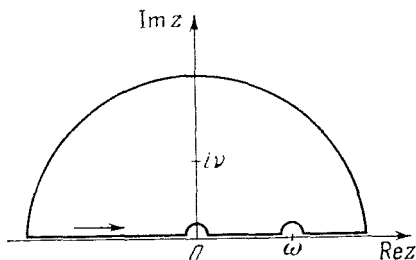
$$\varepsilon''(\omega) = \frac{\omega_p^2 \nu}{\omega(\omega^2 + \nu^2)}, \quad (3.16)$$

где ω_p , ν — некоторые константы. Пусть требуется определить $\varepsilon'(\omega)$, поскольку провести прямой эксперимент по измерению $\varepsilon'(\omega)$ нет возможности.

Используя формулу (3.15), получим

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{\omega_p^2 \nu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2 + \nu^2)(x - \omega)}. \quad (3.17)$$

Интеграл в правой части (3.17) можно вычислить различными способами. Например, переходя в (3.17) к интегрированию по комплексной переменной z , можно воспользоваться контуром интегрирования C , показанным на рис. 2.1. При этом интеграл (3.17) равен сумме вычета в точке $z = i\nu$ и двух полувычетов в особых точках $z = 0$ и $z = \omega$:



2.1. Контур интегрирования C .

$$\begin{aligned} \int_C &= \frac{i\pi}{z(z^2 + \nu^2)} \Big|_{z=\omega} + \frac{i\pi}{(z^2 + \nu^2)(z - \omega)} \Big|_{z=0} + \frac{i2\pi}{z(z + i\nu)(z - \omega)} \Big|_{z=i\nu} = \\ &= -\frac{\pi}{\nu(\omega^2 + \nu^2)}. \end{aligned}$$

Получаемый результат

$$\varepsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} \quad (3.18)$$

является правильным, в чем можно убедиться с помощью формулы (5.3), выведенной в § 5 этой главы для комплексной диэлектрической проницаемости среды со свободными зарядами. Если бы в эксперименте не удалось получить простой эмпирической формулы (3.16), соотношения Крамерса — Кронига было бы полезно использовать для численного построения кривых $\varepsilon'(\omega)$ по данным экспериментов для $\varepsilon''(\omega)$.

§ 4. Дисперсия при распространении электромагнитных волн в диэлектриках

Для нахождения зависимости ε от частоты (закона дисперсии) необходимо решить задачу о взаимодействии электромагнитной волны с имеющимися в среде зарядами.

Все современные теории дисперсии учитывают молекулярное строение вещества и рассматривают молекулы как динамические системы, обладающие собственными частотами. Молекулярные системы подчиняются законам квантовой механики. Однако результаты классической теории дисперсии во многих случаях приводят к качественно правильному выражению для показателей преломления и поглощения как функций частоты.

В однородных диэлектриках электрическое поле волны вызывает поляризацию молекул среды. Простейшая модель диэлектрика — совокупность нейтральных молекул. В нейтральных молекулах заряды электронов точно компенсируют заряды ядер, причем для большинства диэлектриков центры отрицательных и положительных зарядов совпадают. В этом случае в отсутствие электромагнитного поля молекулы не обладают дипольным моментом. Под действием поля волны происходит смещение электронов (ионы при этом можно считать неподвижными, поскольку их масса велика по сравнению с массой электронов) и каждая молекула поляризуется — приобретает дипольный момент $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$. Если диэлектрик однороден и в единице объема содержится N одинаковых молекул, то вектор объемной плотности поляризации равен $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$.

Для определения вектора \mathbf{P} необходимо решить уравнения движения электронов в молекуле под действием поля волны и найти смещение электронов как функцию поля. В классической теории дисперсии описание движения электронов в молекуле основывается на модели Друде — Лоренца, согласно которой молекула представляется в виде одного или нескольких линейных гармонических осцилляторов, соответствующих нормальным колебаниям электронов в молекуле.

Рассмотрим уравнение движения одного такого осциллятора:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} = e\mathbf{E}_d(t). \quad (4.1)$$

Здесь m — эффективная масса; $m\nu$ — коэффициент, учитывающий затухание колебаний, например, вследствие процессов излучения; ω_0 — резонансная угловая частота нормального колебания; $\mathbf{E}_d(t)$ — поле, действующее на диполь. Поскольку в оптическом диапазоне частот размеры молекул много меньше длины волны, поле, действующее на диполь, можно считать пространственно-однородным. Действующее поле \mathbf{E}_d в однородном диэлектрике отличается от среднего макроскопического поля в среде на величину $4\pi P/3$ и равно

$$\mathbf{E}_d = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}.$$

Отметим, что последнее равенство справедливо, вообще говоря, не всегда. Оно оказывается несправедливым для анизотропных

кристаллов, в которых имеет место явление двойного лучепреломления. При гармонической зависимости от времени поля \mathbf{E} из уравнения (4.1) получим следующее соотношение:

$$(-\omega^2 - i\nu\omega + \omega_0^2) \mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \frac{Ne^2}{m} \mathbf{P}.$$

Отсюда удобно выразить \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m} \left[\omega_0^2 - \omega^2 - i\nu\omega - \frac{4\pi}{3} \frac{Ne^2}{m} \right]^{-1} \mathbf{E}. \quad (4.2)$$

Учитывая, что $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$, из (4.2) найдем

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \left[\omega_0^2 - \omega^2 - i\nu\omega - \frac{4\pi}{3} \frac{Ne^2}{m} \right]^{-1}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\nu\omega}.$$

Отделяя в (4.3) действительную и мнимую части, получим

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_p^2 (\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2)}{(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} + i \frac{\omega_p^2 \nu \omega}{(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2}.$$

Здесь введены обозначения $\omega_p^2 = 4\pi Ne^2/m$, $\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \omega_p^2/3$. В случае низких частот, удовлетворяющих условию $\omega^2 \ll \tilde{\omega}_0^2$, приходим к выражению для статической диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(0) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\tilde{\omega}_0^2}.$$

Для твердых диэлектриков $\varepsilon(0)$ может значительно превышать единицу.

В газах плотность поляризованных молекул обычно невелика. При этом $\omega_p^2 \ll \omega_0^2$, $\tilde{\omega}_0 \approx \omega_0$ и можно считать, что ε мало отличается от единицы. Поэтому

$$\sqrt{\varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} + \frac{i}{2} \frac{\omega_p^2 \nu \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2}.$$

Отсюда для показателей преломления и поглощения, в соответствии с формулой (4.17) гл. I, получим

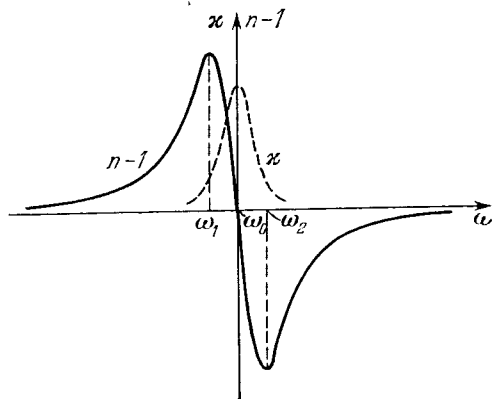
$$n - 1 \approx \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2}, \quad \kappa \approx \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\nu \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2}. \quad (4.4)$$

Выясним, как зависят показатели преломления и поглощения от частоты. Если выполняется условие $|\omega_0^2 - \omega^2| \gg \nu\omega$, т. е. если частота волны далека от резонансной ($\omega \ll \omega_0$ или $\omega \gg \omega_0$),

то

$$n - 1 \approx \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4.5)$$

— показатель преломления мало отличается от единицы. При $\omega^2 < \omega_0^2$ величина $n - 1 > 0$; она увеличивается с ростом частоты. При $\omega^2 > \omega_0^2$ значение $n - 1$ отрицательно; n также увеличивается с ростом ω , приближаясь к единице (рис. 2.2). Показатель поглощения κ в этом диапазоне частот мал.



2.2. Зависимость показателей преломления и поглощения от частоты.

Область частот, в которой показатель преломления убывает с увеличением частоты, называется областью аномальной дисперсии; здесь имеет место возрастание фазовой скорости.

В случае, когда молекула моделируется совокупностью осцилляторов различных типов, обладающих разными резонансными частотами, для диэлектрической проницаемости можно получить выражение, обобщающее (4.3):

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \frac{4\pi e^2}{m} \sum_j \frac{N_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\nu_j \omega} \quad (4.6)$$

Здесь N_j — объемная плотность числа осцилляторов с частотой ω_j .

Если вычислить дипольный момент единицы объема, пользуясь методами квантовой механики, то для ε получается формула, аналогичная (4.6), с той лишь разницей, что N_j заменяется в ней на Nf_j , где f_j — сила осциллятора для перехода с частотой ω_j . Суммирование ведется по всем разрешенным дипольным переходам.

Формулы (4.3) и (4.6) получены для модели независимых атомов, однако они дают вполне правильное феноменологическое описание любой системы, спектр поглощения которой представляет набор дискретных линий.

Мы получили дисперсионную формулу для диэлектрика, молекулы которого приобретают дипольный момент только во внешнем поле. Но молекулы многих диэлектриков (например, воды) обладают дипольным моментом и в отсутствие поля. Механизм поляризации такого диэлектрика сводится к ориентирующему действию поля волны.

Пусть дипольный момент одной молекулы равен p_0 . При отсутствии электромагнитной волны векторы p_0 из-за теплового движения ориентированы хаотически. Если же в среде распространяется волна, каждый элементарный диполь приобретает составляющую, параллельную вектору E . Следовательно, становится отличным от нуля дипольный момент P единицы объема:

$$P = |P| = N \langle p_0 \cdot \cos \theta \rangle. \quad (4.7)$$

В этом выражении θ — угол между векторами p_0 и E — случайный параметр; угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю молекул. Для вычисления P воспользуемся статистическим законом распределения Больцмана

$$W(U) = C \exp(-U/k_B T).$$

Здесь $U = -(p_0 E) = -p_0 E \cos \theta$ — потенциальная энергия молекулы в электрическом поле; $k_B = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К — постоянная Больцмана; C — константа, определяемая условием нормировки

$$\int_{-p_0 E}^{p_0 E} C \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) dU = 2C k_B T \operatorname{sh} \frac{p_0 E}{k_B T} = 1. \quad (4.8)$$

Мы не будем интересоваться здесь нелинейными эффектами, поэтому считаем энергию ориентации малой по сравнению с энергией теплового движения: $U \ll k_B T$. В этом приближении из (4.8) имеем $C \approx 1/(2 p_0 E)$. Проводя усреднение в формуле (4.7), получим

$$P = N \int_{-p_0 E}^{p_0 E} \left(-\frac{U}{E}\right) W(U) dU \approx -\frac{N}{2p_0 E^2} \int_{-p_0 E}^{p_0 E} U \left(1 - \frac{U}{k_B T}\right) dU = \frac{N p_0^2}{3k_B T} E. \quad (4.9)$$

Если $U \sim k_B T$, то в разложении P в ряд по степеням E появятся нелинейные члены.

В процессе расчета мы предполагали, что переориентация диполей мгновенно следует за изменениями поля электромагнитной волны. На самом же деле имеется запаздывание, учет которого позволил бы описать эффекты частотной дисперсии при

распространении сигнала в среде с хаотически ориентированными дипольными молекулами.

Остановимся более подробно на анализе практически важной зависимости $\varepsilon(\omega)$ для воздуха, представляющего собой смесь молекул газов (азота, кислорода и т. д.) и паров воды. Дипольный момент единицы объема равен

$$P = \left(\frac{N_1 e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + \frac{N_2 p_0^2}{3k_B T} \right) E.$$

Отсюда следует

$$\varepsilon - 1 = 4\pi \left(\frac{N_1 c^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + \frac{N_2 p_0^2}{3k_B T} \right). \quad (4.10)$$

Здесь мы считаем, что поле в среде равно полю волны, и пренебрегаем соударениями. Если $\omega_0^2 \gg \omega^2$, то зависимость P от ω можно пренебречь. Собственные частоты молекул газов, входящих в состав воздуха, лежат в области $\omega_0 > 15$ ГГц ($\lambda < 2$ см), и для волн длиннее 3 см дисперсия не существенна. Однако в оптическом и миллиметровом диапазоне волн имеются области резонансного поглощения. Поэтому, например, для целей радиосвязи в тропосфере в этом диапазоне волн необходимо выбирать области «прозрачности» тропосферы, т. е. частоты, не совпадающие с собственными частотами среды.

Коэффициент поляризуемости

$$\kappa = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

при $\omega_0 \gg \omega$ и дипольный момент молекул воды p_0 определяются экспериментально. Для кислорода $\kappa = 0,64 \cdot 10^{-24}$, для азота $\kappa = 0,96 \cdot 10^{-24}$, $p_0 = 1,87 \cdot 10^{-18}$ СГСЭ. Число молекул N в единице объема можно связать с давлением и температурой воздуха:

$$N = N_0 p / MT,$$

где N_0 — число Авогадро, M — молекулярный вес, p — давление, T — температура.

Учитывая, что $\varepsilon = n^2$ мало отличается от единицы, из (4.10) получим

$$n - 1 = \frac{79}{T} \left(p + \frac{4800 p_1}{T} \right) \cdot 10^{-6}, \quad (4.11)$$

где p — давление сухого воздуха, p_1 — парциальное давление водяного пара. Величины p , T и p_1 меняются с высотой, следовательно, показатель преломления воздуха n является функцией высоты.

§ 5. Диэлектрическая проницаемость и распространение волн в средах со свободными зарядами

Примерами сред, содержащих свободные заряды, могут служить металлы и плазма. Типичная плазма — это сильно или полностью ионизованный газ. Плазмой также называют слабо ионизованный газ и электронный газ (или электронную жидкость) в полупроводниках и металлах. Однако в дальнейшем главным образом будет идти речь о газовой плазме. Именно с такой плазмой приходится сталкиваться при рассмотрении волновых процессов в земной ионосфере и в космическом пространстве. Для выяснения особенностей распространения волн в плазме необходимо найти зависимость ее диэлектрической проницаемости от частоты.

Мы рассмотрим наиболее простую модель, дающую достаточно хорошее согласие с экспериментом. Будем считать среду квазинейтральной и пренебрежем тепловым движением частиц. При этом в поле волны будет происходить лишь упорядоченное движение.

Пусть в единице объема среды содержится N свободных электронов и такое же количество однократно заряженных положительных ионов. Поскольку масса иона M во много раз больше массы электрона m , то в первом приближении движением ионов можно пренебречь. Неподвижные ионы образуют положительный заряд, а электроны свободно движутся под действием поля волны, испытывая при этом соударения.

Уравнение движения для электрона имеет вид

$$m\ddot{r} + m\nu\dot{r} = eE. \quad (5.1)$$

Здесь E — среднее макроскопическое поле; в отличие от диэлектриков, при изучении плазмы можно считать, что действующее поле примерно равно макроскопическому: $E_d \approx E$; ν — это эффективная частота соударений электронов с ионами и нейтральными молекулами.

При гармонической зависимости поля от времени $E \sim \exp(-i\omega t)$ имеем

$$\dot{r} = \frac{eE}{m(\nu - i\omega)}.$$

Поскольку плотность тока равна $\mathbf{j} = eN\dot{r} = \partial P/\partial t = -i\omega P$, трудно получить

$$P = i \frac{e^2 N E}{m\omega(\nu - i\omega)}. \quad (5.2)$$

Если учесть также смещение ионов в поле волны, то в выражение для поляризации войдет еще один член:

$$P = i \frac{e^2}{\omega} \left[\frac{1}{m(\nu - i\omega)} + \frac{1}{M(\nu - i\omega)} \right] N E.$$

Однако вклад от ионов в поляризацию среды является лишь малой поправкой порядка $m/M \sim 10^{-3}$, и его можно не учитывать. Поэтому

$$\varepsilon = 1 + i \frac{\omega_p^2}{\omega(\nu - i\omega)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} + i \frac{\omega_p^2(\nu/\omega)}{\omega^2 + \nu^2}, \quad (5.3)$$

где $\omega_p^2 = 4\pi N e^2/m$ — плазменная или ленгмюровская частота колебаний электронного газа.

Как мы уже знаем, мнимая часть диэлектрической проницаемости эквивалентна проводимости среды. Поэтому

$$\sigma = \frac{\omega}{4\pi} \varepsilon'' = \frac{\nu N e^2}{m(\omega^2 + \nu^2)}. \quad (5.4)$$

Для металлов при частотах волны $\omega \ll 10^{10} \text{ с}^{-1}$ реализуются соотношения $\omega_p \gg \nu$, $\nu \gg \omega$; проводимость является действительной величиной: $\sigma = N e^2/m\nu$, не зависящей от частоты, а диэлектрическая проницаемость — мнимой.

Например, для меди $N \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $\nu \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ и $\omega \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$ (или $\sigma \approx 5 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$) для всей области частот вплоть до инфракрасной области спектра. В этом диапазоне частот показатель преломления и показатель поглощения примерно равны $n = \kappa = [\omega_p^2/2\omega\nu]^{1/2}$. Поле существует только в скин-слое, толщина которого $d = (kn)^{-1} \ll \lambda$. Коэффициент отражения от поверхности металла близок к единице.

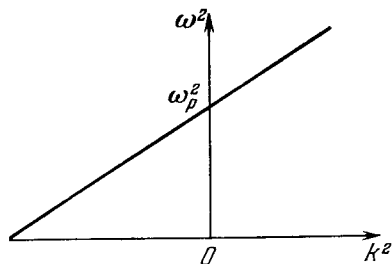
При более высоких частотах диэлектрическая проницаемость комплексна и существенным образом зависит от частоты. При $\omega^2 > \omega_p^2$ металл становится прозрачным.

В разреженной плазме (например, в ионосфере) эффективная частота соударений $\nu \sim 10^3 - 10^4 \text{ с}^{-1}$ и для волн с частотой $f > 10^6 \text{ с}^{-1}$ выполняется условие $\omega \gg \nu$. В этом случае мнимой частью диэлектрической проницаемости можно пренебречь и

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = n^2.$$

Закон дисперсии определяется соотношением (рис. 2.3)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$



2.3. Дисперсионная кривая для плазмы.

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2. \quad (5.5)$$

Если $\omega > \omega_p$, то показатель преломления есть действительное число и волны свободно распространяются в среде. Если $\omega = \omega_p$,

то $n = 0$. При $\omega < \omega_p$ показатель преломления становится мнимым, следовательно, волны при $\omega \leq \omega_p$ должны отражаться от границы плазмы. Поскольку в ионосфере электронная концентрация является функцией высоты, возрастая от нуля в начале ионосферы до некоторого максимального значения, а затем снова убывая, имеется целая область частот для волн, отражающихся от ионосферы. Частота $f_{кр}$, равная максимальной плазменной частоте, называется критической:

$$f_{кр}^2 = \frac{e^2 N_{max}}{\pi m}. \quad (5.6)$$

Заметим, что показатель преломления может обратиться в нуль или стать чисто мнимой величиной только в среде, в которой поглощение энергии пренебрежимо мало. В ионосферной плазме эти условия реализуются в широком диапазоне частот.

Для частоты, при которой $\varepsilon = 0$, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = 0$, как следует из уравнений Максвелла,

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0,$$

т. е. $\mathbf{H} = 0$, и поле описывается лишь одним уравнением:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \text{grad } \varphi.$$

Следовательно, в этом случае возможно существование продольных электрических или плазменных волн. Однако, если не учитывать пространственную дисперсию, то дисперсионное уравнение $\varepsilon(\omega) = 0$ определяет лишь одну частоту $\omega_p = \sqrt{4\pi N e^2 / m}$, и мы получаем не волновой, а колебательный процесс. При учете пространственной дисперсии частота становится функцией волнового вектора, и групповая скорость продольных волн отлична от нуля. Пространственная дисперсия не существенна в том случае, когда поле мало изменяется на расстоянии, на котором в среде формируется отклик среды на поле \mathbf{E} , т. е. поляризация среды. Если учитывать тепловое движение в плазме, то за время $\tau = 2\pi/\omega$ электрон, движущийся со средней тепловой скоростью $\tilde{v} = \sqrt{k_B T / m}$, проходит расстояние $l = \tau \sqrt{k_B T / m}$. Пространственной дисперсией можно пренебречь, если $l \ll \lambda$ или

$$\omega \gg k \tilde{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}.$$

Поскольку $v_\phi = \omega/k$, то это условие эквивалентно требованию

$$v_\phi \gg \tilde{v} \sim \sqrt{\frac{k_B T}{m}}. \quad (5.7)$$

Таким образом, пренебрежение пространственной дисперсией в плазме эквивалентно неучету теплового движения частиц (приближение «холодной» плазмы).

Рассмотрим поглощение волн в плазме, обусловленное столкновениями электронов с молекулами и ионами. При этом необходимо различать два случая: поглощение при прохождении волны через слой плазмы (когда можно считать, что $\omega > \omega_p$) и поглощение при отражении волны от слоя (когда $\omega \approx \omega_p$).

В первом случае, полагая в формуле (5.3) $v^2 \ll \omega^2$, $\omega > \omega_p$, получим

$$\varepsilon' \approx 1, \quad \varepsilon'' = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v}{\omega}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \ll 1.$$

Показатель поглощения, в соответствии с выражением (4.17) гл. I, определяется формулой

$$\kappa = \frac{\sqrt{\varepsilon'}}{2} \operatorname{tg} \delta = \frac{\omega_p^2 v}{2\omega^3}.$$

Коэффициент поглощения при этом равен

$$k'' = \frac{\omega}{c} \kappa = \frac{\omega_p^2 v}{2c\omega^2}. \quad (5.8)$$

Как видно из формулы (5.8), более длинные волны сильнее поглощаются в ионосфере. Отсюда ясно, почему частотный диапазон волн, используемых в радиосвязи на большие расстояния в земных условиях, ограничен как сверху (частота должна быть ниже критической, иначе волна не отразится от ионосферы), так и снизу (вследствие увеличения поглощения с ростом длины волны).

Во втором случае, полагая в (5.3) $v^2 \ll \omega^2$, $\omega = \omega_p$, получим

$$\varepsilon' \approx 0, \quad \operatorname{tg} \delta \gg 1, \quad \varepsilon'' \approx v/\omega, \\ k'' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}} \operatorname{tg} \delta \approx \frac{\sqrt{\omega v}}{c \sqrt{2}}. \quad (5.9)$$

В области частот, которые могут отражаться от ионосферы, поглощение увеличивается с ростом частоты, но зависимость от ω здесь более слабая. Кроме того, путь, проходимый волной на участке ее отражения, гораздо меньше длины остальных участков трассы. Поэтому определяющую роль играет поглощение при прохождении волн через ионизованный слой на таких высотах от земной поверхности, где отражения не происходит.

§ 6. Распространение электромагнитных волн в средах при учете пространственной дисперсии

Как указывалось в § 1, пространственная дисперсия обусловлена нелокальностью связи между \mathbf{D} и \mathbf{E} . Материальное уравнение в этом случае имеет вид (1.4). Для плоских гармонических волн учет пространственной дисперсии приводит к зависимости тен-

зора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ от волнового вектора \mathbf{k} . При этом

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (6.1)$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + 4\pi \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{R} \kappa_{ij}(\mathbf{R}, \tau) \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)]. \quad (6.2)$$

Запишем уравнения Максвелла для плоских гармонических волн. Предполагая, что все величины изменяются по закону $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, из уравнений (2.8) для немагнитной среды ($\mu = 1$) получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}\mathbf{H}] &= -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}, & [\mathbf{k}\mathbf{E}] &= \frac{\omega}{c} \mathbf{H}, \\ (\mathbf{k}\mathbf{D}) &= 0, & (\mathbf{k}\mathbf{H}) &= 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Для вывода дисперсионного уравнения умножим второе из соотношений (6.3) слева векторно на \mathbf{k} . Раскрывая двойное векторное произведение и учитывая первое соотношение (6.3), придем к выражению

$$\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) - k^2\mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D}.$$

В тензорных обозначениях с учетом (6.1) это выражение примет вид

$$\left[k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right] E_j = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6.4)$$

Условие совместности системы уравнений (6.4) для декартовых компонент вектора \mathbf{E} является требование

$$\det \left[k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right] = 0. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.5) определяет связь между ω и \mathbf{k} , т. е. устанавливает закон дисперсии.

Для получения зависимости $\omega(\mathbf{k})$ в явном виде необходимо рассчитать тензор диэлектрической проницаемости, компоненты которого должны зависеть как от ω , так и от \mathbf{k} . Чтобы решить эту задачу, необходимо рассматривать взаимодействие электромагнитного поля с зарядами среды с учетом пространственной неоднородности поля. Здесь уже нельзя пользоваться такими простыми моделями, которые рассматривались в § 4, 5 при нахождении зависимости диэлектрической проницаемости от частоты. В плазме, например, учет пространственной дисперсии — это учет теплового движения электронов и ионов. Для нахождения связи поляризации среды с полем и диэлектрической проницаемости в этом случае необходимо совместно анализировать кинетическое уравнение для электронов и уравнения Максвелла.

Однако во многих важных случаях пространственную дисперсию можно считать слабой, поскольку изменение электромагнитного поля на расстояниях, характеризующих структуру среды, мало (выполняется условие $ka \ll 1$, где a — характерный размер для данной среды). Это дает возможность найти приближенную зависимость тензора диэлектрической проницаемости от \mathbf{k} .

Поскольку в уравнении (6.2) ядро $\kappa_{ij}(\mathbf{R}, \tau)$ отлично от нуля лишь в объеме размером порядка a^3 , а экспоненциальный множитель заметно изменяется на расстоянии $R \sim \lambda \gg a$, можно разложить экспоненту в ряд по R , сохранив лишь несколько членов разложения:

$$\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{R}) = 1 - ik_l x_l - \frac{1}{2} k_l k_m x_l x_m + \dots, \quad l, m = 1, 2, 3. \quad (6.6)$$

По индексам l и m предполагается суммирование. Подставляя (6.6) в (6.2), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = & \delta_{ij} + 4\pi \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \int d\mathbf{R} \kappa_{ij}(\mathbf{R}, \tau) - \\ & - i4\pi k_l \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \int d\mathbf{R} x_l \kappa_{ij}(\mathbf{R}, \tau) - 2\pi k_l k_m \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \int d\mathbf{R} x_l x_m \kappa_{ij}(\mathbf{R}, \tau). \end{aligned}$$

Это разложение можно записать в более компактном виде

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) - i\tilde{\gamma}_{ijl}(\omega) k_l - \tilde{\alpha}_{ijlm}(\omega) k_l k_m + \dots \quad (6.7)$$

Смысл введенных обозначений ясен из сравнения (6.7) с предыдущей формулой.

При получении (6.7) интегрирование по \mathbf{R} выполняется фактически по области с характерным размером порядка a , и различные члены по порядку величины равны

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{R} \kappa_{ij} & \sim \kappa_{ij} a^3, \quad k_l \int d\mathbf{R} x_l \kappa_{ij} \sim \kappa_{ij} a^3 \left(\frac{a}{\lambda} \right), \\ k_l k_m \int d\mathbf{R} x_l x_m \kappa_{ij} & \sim \kappa_{ij} a^3 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (6.7) является разложением $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ в ряд по малому параметру a/λ .

Вводя вместо \mathbf{k} вектор $\mathbf{n} = c\mathbf{k}/\omega$, перепишем (6.7) в виде, удобном для дальнейшего использования

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) - i\gamma_{ijl}(\omega) n_l - \alpha_{ijlm}(\omega) n_l n_m. \quad (6.8)$$

Здесь

$$\gamma_{ijl} = \frac{\omega}{c} \tilde{\gamma}_{ijl}, \quad \alpha_{ijlm} = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \tilde{\alpha}_{ijlm}. \quad (6.9)$$

Свойства тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ зависят от физических свойств среды. В общем случае, как следует из (6.2), величина $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ является комплексной функцией действительных переменных ω, \mathbf{k} :

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}) + i\varepsilon''_{ij}(\omega, \mathbf{k}).$$

Поскольку κ_{ij} — действительная величина, из (6.2) можно получить следующие соотношения для реальной и мнимой частей тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon'_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}), \quad \varepsilon''_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -\varepsilon''_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}).$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^*(-\omega, -\mathbf{k}). \quad (6.10)$$

В большинстве случаев разложение тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ в ряд по \mathbf{k} не содержит нечетных степеней \mathbf{k} . Для сред, отдельные молекулы или кристаллические ячейки которых обладают центром симметрии, тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ также симметричен, т. е.

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})$$

и

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, -\mathbf{k}). \quad (6.11)$$

При этом разложение ε_{ij} по \mathbf{k} должно содержать лишь четные степени \mathbf{k} . Такие среды называются *оптически неактивными* или *негиротропными*. Гиротропная среда описывается несимметричным тензором диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{k}). \quad (6.12)$$

Поэтому оптически активной может быть только среда без центра симметрии. Если можно пренебречь поглощением, тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ для гиротропной среды будет эрмитовым:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}^*(\omega, \mathbf{k}). \quad (6.13)$$

В этом случае все тензоры в (6.8): $\varepsilon_{ij}(\omega)$, $\gamma_{ijl}(\omega)$ и $\alpha_{ijklm}(\omega)$ — действительны.

Разложение (6.8) учитывает слабую пространственную дисперсию как в гиротропных, так и в негиротропных средах. Однако разложение (6.8) теряет смысл в той области частот, в которой какая-либо из компонент тензора $\varepsilon_{ij}(\omega)$, а также коэффициенты $\gamma_{ijl}(\omega)$ и $\alpha_{ijklm}(\omega)$ обращаются в бесконечность или просто становятся очень большими. Например, если тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega, k^2) \delta_{ij} = \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - \mu k^2} \right] \delta_{ij}, \quad (6.14)$$

то, разложив $\varepsilon(\omega, k^2)$ в ряд по k , получим

$$\varepsilon(\omega, k^2) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{\mu}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} k^2 + \dots \quad (6.15)$$

Формула (6.15) приближенно описывает зависимость диэлектрической проницаемости от ω и k вблизи полос поглощения в диэлектрике. При $\omega \rightarrow \omega_0$, когда $\varepsilon(\omega) \rightarrow \infty$, обращаются в бесконечность и другие коэффициенты разложения. В этой области более удобно пользоваться материальным уравнением в виде

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) D_j(\omega, \mathbf{k}).$$

Обратный тензор также можно представить в форме, аналогичной разложению (6.8):

$$\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega) + ig_{ijl}(\omega)n_l + \beta_{ijlm}(\omega)n_l n_m. \quad (6.16)$$

Свойства симметрии тензора $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ такие же, как и у прямого тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$.

Из разложений (6.8) и (6.16) следует, что пространственная дисперсия должна быть существенна в тех областях частот, в которых $\varepsilon_{ij}(\omega) \ll 1$ или $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega) \ll 1$.

Рассмотрим распространение волн в изотропной гиротропной среде. Для гиротропной среды, не обладающей анизотропией свойств, $\varepsilon_{ij}(\omega)$ является скаляром: $\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon(\omega)\delta_{ij}$, а антисимметрические тензоры второго ранга $\gamma_{ijl}n_l$ и $g_{ijl}n_l$ — псевдоскалярами, т. е.

$$\gamma_{ijl}(\omega) = \gamma(\omega)e_{ijl}, \quad g_{ijl}(\omega) = g(\omega)e_{ijl}.$$

Здесь e_{ijl} — единичный полностью антисимметрический тензор третьего ранга. При этом разложения (6.8) и (6.16) будут иметь вид

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega)\delta_{ij} - i\gamma(\omega)e_{ijl}n_l, \quad (6.17)$$

$$\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^{-1}(\omega)\delta_{ij} + ig(\omega)e_{ijl}n_l. \quad (6.18)$$

Формулой (6.17) целесообразно пользоваться в той области частот, в которой $\varepsilon(\omega)$ мало, а разложением (6.18) — напротив, когда $\varepsilon(\omega)$ велико.

Подставляя (6.17) в (6.4), получим систему уравнений для компонент вектора \mathbf{E} :

$$\left\{ \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right] \delta_{ij} - k_i k_j - i \frac{\omega^2}{c^2} \gamma(\omega) e_{ijl} n_l \right\} E_j = 0. \quad (6.19)$$

Пусть вектор \mathbf{k} направлен вдоль оси z . Придавая индексу i в (6.19) поочередно значения x, y, z , придем к следующей системе:

$$\begin{aligned} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right] E_x - i \frac{\omega^2}{c^2} \gamma(\omega) n E_y &= 0, \\ \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right] E_y + i \frac{\omega^2}{c^2} \gamma(\omega) n E_x &= 0, \\ \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right] E_z - k^2 E_z &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $n = n_z, k = k_z = \omega n/c$.

Из уравнения для продольной составляющей вектора электрического поля E_z имеем закон дисперсии: $\varepsilon(\omega) = 0$. Равенство нулю диэлектрической проницаемости означает, что в слабо гиротропной среде в первом приближении бегущих продольных волн нет.

Рассмотрим поперечные волны. Приравнивая нулю определитель системы, образованной двумя связанными уравнениями для поперечных компонент E_x, E_y поля волны, получим дисперсионное соотношение более сложного типа:

$$[n^2 - \varepsilon(\omega)]^2 - \gamma^2(\omega) n^2 = 0.$$

Учитывая, что $\gamma^2/4 \ll \varepsilon$, получим

$$n_{1,2}^2 = \varepsilon(\omega) \pm \gamma(\omega) \sqrt{\varepsilon(\omega)}. \quad (6.20)$$

Двум значениям n^2 соответствуют две волны с правой и левой круговой поляризацией

$$\mathcal{P}_{1,2} = \frac{E_x}{E_y} = \pm i.$$

Таким образом, в гиротропной среде в каждом направлении распространяются две поперечные нормальные волны, имеющие правую и левую круговую поляризацию. Фазовые скорости их различны. Это приводит к повороту плоскости поляризации линейно-поляризованной волны (эффект Фарадея).

Если частота поперечной волны близка к собственным частотам среды, для нахождения дисперсионного уравнения нужно исключить из уравнений Максвелла векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} и получить систему (по аналогии с (6.4)) для компонент вектора электрической индукции \mathbf{D} :

$$\left[(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) \varepsilon_{jk}^{-1} - \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{ik} \right] D_k = 0.$$

Используя затем разложение (6.18) для изотропной среды, перепишем эту систему в следующем виде:

$$\left\{ \left[\frac{n^2}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right] \delta_{ij} - \frac{n_i n_j}{\varepsilon(\omega)} + i n^2 g(\omega) e_{ijl} n_l \right\} D_j = 0.$$

Будем по-прежнему считать, что вектор \mathbf{k} волны направлен вдоль оси z . Придавая индексу i поочередно значения x, y, z , получим

$$\begin{aligned} \left[\frac{n^2}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right] D_x + in^3 g(\omega) D_y &= 0, \\ \left[\frac{n^2}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right] D_y - in^3 g(\omega) D_x &= 0, \\ \left[\frac{n^2}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right] D_z - \frac{n^2}{\varepsilon(\omega)} D_z &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что и в этом случае продольная компонента поля отсутствует: $D_z = 0$. Дисперсионное уравнение для поперечных волн получается из условия равенства нулю определителя системы, состоящей из двух уравнений для D_x, D_y :

$$\left[\frac{n^2}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right]^2 - g^2(\omega)n^6 = 0.$$

Это уравнение устанавливает зависимость показателя преломления n от частоты в области резонансного поглощения. Нетрудно найти приближенные значения корней, если вспомнить, что в разложении (6.18) второй член много меньше первого; строго говоря, нужно считать $g^2(\omega) \ll \varepsilon^{-3}(\omega)$. С учетом этого неравенства находим

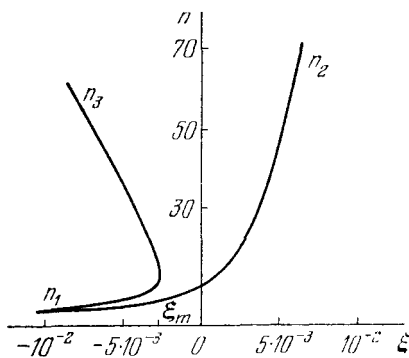
$$\begin{aligned} n_{1,2}^2 &= \varepsilon(\omega) [1 \pm g(\omega)\varepsilon^{3/2}(\omega)], \\ n_3^2 &= \varepsilon^{-2}(\omega)g^{-2}(\omega). \end{aligned}$$

2.4. Зависимость показателей преломления от ξ вблизи резонансной частоты $\tilde{\omega}_0$ для изотропной гиротропной среды.

Для анализа зависимостей $n_{1,2,3}^2(\omega)$ будем считать, что $\varepsilon(\omega)$ вблизи резонанса (при $\omega \rightarrow \tilde{\omega}_0$), в соответствии с формулой (4.3), имеет следующий вид:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{2\tilde{\omega}_0^2} \frac{1}{\xi},$$

где $\xi = (\omega - \tilde{\omega}_0)/\tilde{\omega}_0$. Поскольку $\varepsilon(\omega)$ имеет особенность в точке $\omega = \tilde{\omega}_0$, пренебрежем в окрестности этой точки зависимостью $g(\omega)$ от частоты, т. е. положим $g(\omega) = g(\tilde{\omega}_0)$. Кривые для дисперсии, построенные в этих предположениях, показаны на рис. 2.4. Правее точки поворота ξ_m ($\xi > \xi_m$), как показано на рисунке, существует одно действительное решение, т. е. распространяться может только одна поперечная волна; левее точки поворота таких решений три, что соответствует трем распространяющимся попе-



речным волнам с одной и той же частотой, но разными показателями преломления.

Перейдем теперь к изучению более простого случая — изотропной среды, не обладающей оптической активностью; при этом в разложениях (6.8), (6.16) нужно положить $\gamma_{ijl}(\omega) = g_{ijl}(\omega) = 0$.

В изотропной негиротропной среде можно образовать только два тензора второго ранга: δ_{ij} и $n_i n_j$, поэтому

$$\alpha_{ijlm} n_i n_m = \alpha_1(\omega) n^2 \delta_{ij} + \alpha_2(\omega) n_i n_j.$$

Разложения (6.8), (6.16) примут вид

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = [\epsilon(\omega) - n^2 \alpha_1(\omega)] \delta_{ij} - \alpha_2(\omega) n_i n_j, \quad (6.21)$$

$$\epsilon_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = [\epsilon^{-1}(\omega) + n^2 \beta_1(\omega)] \delta_{ij} + \beta_2(\omega) n_i n_j. \quad (6.22)$$

Коэффициенты $\alpha_1(\omega)$, $\alpha_2(\omega)$, $\beta_1(\omega)$, $\beta_2(\omega)$ имеют порядок малости $(a/\lambda)^2$. Подставляя (6.21) в (6.4), получим следующую систему уравнений для компонент вектора E :

$$\{[\epsilon(\omega) - n^2(1 + \alpha_1(\omega))] \delta_{ij} + [1 - \alpha_2(\omega)] n_i n_j\} E_j = 0. \quad (6.23)$$

В случае поперечных волн $(\mathbf{k} E_{\perp}) = 0$ или $n_i n_j E_j = 0$. Показатель преломления для поперечных волн, как следует из (6.23), равен

$$n_{\perp}^2 = \frac{\epsilon(\omega)}{1 + \alpha_1(\omega)}. \quad (6.24)$$

Поскольку $\alpha_1(\omega) \ll 1$, $n_{\perp}^2 \approx \epsilon(\omega)$, т. е. для поперечных волн учет пространственной дисперсии приводит лишь к малой поправке к значению показателя преломления.

В области полос поглощения, где $\epsilon(\omega)$ резко возрастает, используя разложение (6.22) для негиротропной среды, запишем материальное уравнение в виде

$$E = (\epsilon^{-1}(\omega) + \beta_1(\omega) n^2) D + \beta_2(\omega) \mathbf{n} (\mathbf{n} D). \quad (6.25)$$

С другой стороны, исключая из уравнений Максвелла вектор H , получим

$$D = n^2 E - \mathbf{n} (\mathbf{n} E). \quad (6.26)$$

Для поперечных волн $(\mathbf{n} E) = 0$ и $(\mathbf{n} D) = 0$, и из (6.25) и (6.26) получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\beta_1(\omega) n_{\perp}^4 + \frac{1}{\epsilon} n_{\perp}^2 - 1 = 0. \quad (6.27)$$

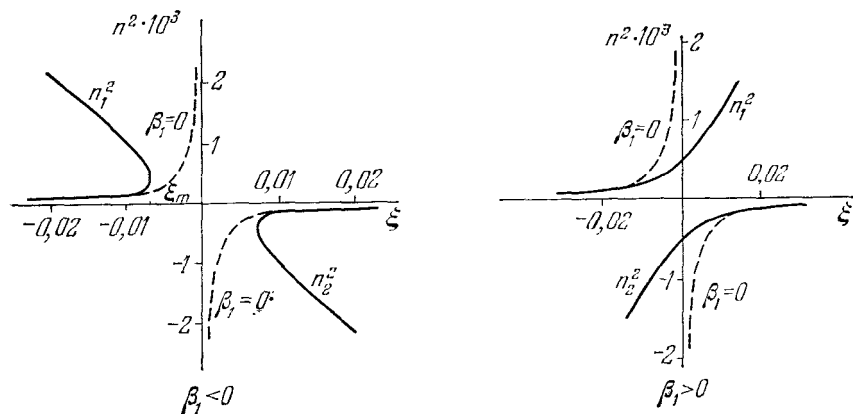
Решая (6.27), найдем два значения показателя преломления, соответствующих одной поляризации волны:

$$n_{\perp 1,2}^2 = -\frac{1}{2\epsilon\beta_1} \pm \sqrt{\frac{1}{(2\epsilon\beta_1)^2} + \frac{1}{\beta_1}}. \quad (6.28)$$

Из решения (6.28) следует, что на частоте $\omega = \omega_m$, определяемой из уравнения

$$\varepsilon(\omega_m) = \frac{1}{2} (-\beta_1)^{-1/2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\tilde{\omega}_0^2} \frac{1}{\xi_m},$$

при $\beta_1 < 0$, $\xi = \xi_m$ имеет место равенство корней: $n_1 = n_2$, т. е. существует точка поворота ξ_m (рис. 2.5). В этом случае при



2.5. Зависимость n^2 от $\xi_1^* = (\omega - \tilde{\omega}_0)/\tilde{\omega}_0$ вблизи частоты $\tilde{\omega}_0$ для изотропной негиротропной среды.

$\xi < \xi_m$ могут распространяться две волны. При $\beta_1 > 0$ точки поворота нет; $n_{\perp,2}^2 < 0$, поэтому соответствующая волна в среде распространяться не может.

Таким образом, учет пространственной дисперсии приводит к возникновению дополнительных поперечных волн в окрестности области поглощения. Экспериментальное наблюдение этих волн затруднительно вследствие сильного поглощения.

Для продольных волн, учитывая, что $n_i n_j E_j = n^2 E$, из (6.23) получим

$$n_{\parallel}^2 = \frac{\varepsilon(\omega)}{\alpha_1(\omega) + \alpha_2(\omega)}. \quad (6.29)$$

Дисперсионное уравнение (6.29) определяет продольные бегущие волны (а не колебания), поскольку групповая скорость $v_{гр}$ в этом случае отлична от нуля, а фазовая скорость $v_{ф} \neq \infty$. При малых $\alpha_1(\omega)$ и $\alpha_2(\omega)$ n_{\parallel}^2 может иметь конечное значение в области частот, для которых $\varepsilon(\omega) \rightarrow 0$.

Перейдем к рассмотрению продольных волн в плазме. В § 5, при изучении частотной дисперсии в средах со свободными зарядами, была получена следующая зависимость диэлектрической

проницаемости от частоты:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}.$$

Когда $\omega \rightarrow \omega_p$, величина $\varepsilon(\omega)$ стремится к нулю, и в плазме могут существовать продольные колебания. Воспользуемся формулой (6.29) для вычисления фазовой и групповой скорости продольных волн. Для грубых оценок примем

$$\alpha_1(\omega) = \alpha_2(\omega) \approx |(a/\lambda)^2 = \frac{a^2 \omega^2}{(2\pi)^2 c^2}.$$

Характерный масштаб a в плазме — это расстояние, которое проходит за период колебаний поля электрон, движущийся со средней тепловой скоростью (предполагается максвелловское распределение электронов по скоростям):

$$a = \frac{2\pi}{\omega} \tilde{v}_T, \quad \tilde{v}_T = \sqrt{\frac{k_B T}{m_i}}.$$

Подставляя эти выражения в (6.29), получим

$$n_{\parallel}^2(\omega) = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{b \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\tilde{v}_T}{\omega} \right)^2} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{b \frac{\tilde{v}_T^2}{c^2}}. \quad (6.30)$$

Здесь b — постоянный множитель порядка нескольких единиц. Более строгое определение тензора диэлектрической проницаемости с использованием кинетического уравнения приводит к значению $b = 3$. Дисперсионное уравнение $\omega(k)$ для плазменных волн получается подстановкой $n_{\parallel}^2(\omega)$ в формулу $k^2 = \omega^2 n_{\parallel}^2 / c^2$ и имеет вид

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3\tilde{v}_T^2 k^2.$$

Фазовая скорость плазменных волн равна

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{3} \tilde{v}_T}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}. \quad (6.31)$$

Групповая скорость:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3\tilde{v}_T^2 k}{\omega} = \sqrt{3} \tilde{v}_T \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}. \quad (6.32)$$

Если условие $ka \ll 1$ не выполнено, то плазменные волны сильно затухают. Этот процесс, называемый затуханием Ландау, вызван необычным механизмом поглощения энергии волны при столк-

новениях электронов с нейтральными молекулами и ионами. Он связан с взаимодействием между волной и электронами, движущимися со скоростью, близкой к фазовой скорости волны. Чтобы пояснить этот механизм, напомним суть эффекта Вавилова — Черенкова. Он заключается в том, что электроны, движущиеся со скоростями, большими фазовой скорости света в среде $v_{эл} > c/n$, излучают электромагнитную энергию. При определенных условиях сверхсветовые электроны начинают не излучать, а поглощать энергию волны (обратный эффект Вавилова — Черенкова).

Для частот $\omega \approx \omega_p$ фазовая скорость велика по сравнению с тепловыми скоростями большинства электронов: $v_\phi \gg \bar{v}_T$. При максвелловском распределении электронов по скоростям условие $v_\phi \approx \bar{v}_T$ выполнено лишь на «хвосте» распределения, где число частиц экспоненциально мало.

§ 7. Распространение волн в релаксирующих средах

Важным примером диспергирующих сред являются среды, в которых распространение волны нарушает равновесие, существующее между внутренними термодинамическими параметрами системы. Наряду с колебательным процессом частоты ω в каждой точке такой среды будет происходить процесс приближения к равновесному состоянию, характеризующийся неким временем релаксации τ .

Например, распространение звуковой волны вызывает переменные сжатия и разрежения и, если в среде может происходить обратимая химическая реакция, существующее при фиксированной плотности и температуре равновесное состояние будет все время нарушаться. Концентрации реагирующих веществ стремятся принять равновесные значения при новых, измененных волной значениях параметров. Другими примерами внутренних процессов, происходящих с характерным временем τ , могут служить диссоциация, обмен энергией между поступательными и внутренними степенями свободы молекул, фазовые переходы и т. д.

Не конкретизируя физической природы релаксационного процесса, будем описывать его дополнительной переменной g (в случае химической реакции, например, g — это концентрация одной из компонент смеси). Считаем, что процесс релаксации g к своему равновесному значению g_0 происходит по закону

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{g - g_0}{\tau} \quad \text{или} \quad g = g_0 + [g(0) - g_0] e^{-t/\tau}. \quad (7.1)$$

Если период звуковой волны $T \gg \tau$, то среда успеет полностью приспособиться к изменениям, вносимым волной, и волна будет распространяться со скоростью $c_0^2 = (\partial p / \partial \rho)_{g_0}$ (здесь g_0 — значение g , соответствующее данному значению плотности в волне).

Если, напротив, $T \ll \tau$, то параметр g будет «заморожен» и равен своему значению g_{00} в отсутствие волны. Сама же волна будет распространяться со скоростью $c_{\infty}^2 = (\partial p / \partial \rho)_{g_{00}}$.

Для расчета закона дисперсии в такой среде удобно воспользоваться подходом, предложенным Л. И. Мандельштамом и М. А. Леонтовичем. Вместо адиабатического уравнения состояния $p = p(\rho)$ (см. § 2 гл. I) необходимо принять

$$p = p(\rho, g). \quad (7.2)$$

Разложим (7.2) для малых возмущений в ряд

$$p = p(\rho, g) = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{g_0} (\rho - \rho_0) + \left(\frac{\partial p}{\partial g}\right)_{\rho_0} (g - g_0). \quad (7.3)$$

Здесь нужно учесть, что само равновесное состояние есть функция плотности, т. е. $g_0 = g_0(\rho)$, а поэтому

$$p(\rho, g_0) = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{g_{00}} (\rho - \rho_0) + \left(\frac{\partial p}{\partial g}\right)_{\rho_0} (g_0 - g_{00}). \quad (7.4)$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{g_0} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{g_{00}} + \left(\frac{\partial p}{\partial g}\right)_{\rho_0} \frac{dg_0}{d\rho}. \quad (7.5)$$

Подставим (7.5) в разложение (7.3) и продифференцируем полученное соотношение по t . Используя затем уравнение реакции (7.1), запишем

$$\frac{dp'}{dt} = c_{\infty}^2 \frac{d\rho'}{dt} - \left(\frac{\partial p}{\partial g}\right)_{\rho_0} \frac{g - g_0}{\tau}. \quad (7.6)$$

Выражение (7.6) представляет собой связь между приращениями давления p' и плотности ρ' в звуковой волне и отклонением внутреннего параметра $(g - g_0)$ от своего равновесного значения. Чтобы получить связь только между p' и ρ' , разделим (7.3) на τ :

$$\frac{p'}{\tau} = \frac{c_0^2}{\tau} \rho' + \left(\frac{\partial p}{\partial g}\right)_{\rho_0} \frac{g - g_0}{\tau}.$$

Складывая это соотношение и (7.6), придем к искомой связи

$$\frac{dp'}{dt} + \frac{p'}{\tau} = c_{\infty}^2 \frac{d\rho'}{dt} + c_0^2 \frac{\rho'}{\tau},$$

которая с помощью обозначения

$$m = (c_{\infty}^2 - c_0^2)/c_0^2 \quad (7.7)$$

может быть переписана в виде

$$\frac{dp'}{dt} + \frac{p'}{\tau} = c_0^2 \left(\frac{d\rho'}{dt} + \frac{\rho'}{\tau} \right) + mc_0^2 \frac{d\rho'}{dt}. \quad (7.8)$$

Как нетрудно убедиться, соотношение (7.8) эквивалентно интегральной связи

$$p' = c_0^2 \rho' + m c_0^2 \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \frac{d\rho'}{dt'} dt'. \quad (7.9)$$

Полученное уравнение состояния отличается немгновенной зависимостью $p'(t)$ от $\rho'(t)$; p' в момент t определяется ρ' во все предшествующие времена, т. е. среда обладает «памятью».

Принятие уравнения реакции в форме (7.1) привело к появлению экспоненциального ядра в интеграле (7.9). В общем случае под интегралом может стоять функция от $t - t'$ сложного вида; конкретизация этих функций — довольно сложная задача, имеющая важное значение, например, в механике полимеров.

В § 2 гл. I были получены линейные уравнения (2.7), (2.8). Запишем их для одномерного случая

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x}. \quad (7.10)$$

Дополняя систему (7.10) уравнением состояния (7.9), можно свести ее к одному уравнению для ρ' :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = m c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \frac{\partial \rho'}{\partial t'} dt'. \quad (7.11)$$

Для получения закона дисперсии ищем решение этого уравнения в виде $\rho' = A \exp[i(\omega t - kx)]$. Дифференцируя и вычисляя интеграл, получим

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left(1 - m \frac{i\omega\tau^3}{1 + i\omega\tau}\right). \quad (7.12)$$

Число m обычно мало, и

$$k = \pm \frac{\omega}{c_0} \left(1 - \frac{m}{2} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} - i \frac{m}{2} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}\right). \quad (7.13)$$

Отсюда следуют выражения для скорости звука $c(\omega)$ и коэффициента $\alpha(\omega)$:

$$c = c_0 \left(1 + \frac{m}{2} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}\right), \quad \alpha = \frac{m}{2c_0 \tau} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (7.14)$$

Эти зависимости изображены на рис. 2.6.

Пусть частота волны мала по сравнению с обратным временем релаксации, т. е. $\omega\tau \ll 1$. В этом случае из закона дисперсии (7.13) для волны, бегущей в положительном направлении оси x (знак «плюс»), приближенно следует

$$k \approx \frac{\omega}{c_0} \left(1 - i \frac{m}{2} \omega \tau - \frac{m}{2} \omega^2 \tau^2\right). \quad (7.15)$$

Нетрудно видеть, что в предельном случае низких частот затухание звука увеличивается пропорционально квадрату частоты, а дисперсия имеет кубичную зависимость. Приближенное уравнение, соответствующее закону дисперсии (7.15), имеет вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} - \frac{m\tau}{2c_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \frac{m\tau^2}{2c_0} \frac{\partial^3 \rho'}{\partial t^3} = 0. \quad (7.16)$$

Если речь идет о некогерентном сигнале, нужно потребовать, чтобы условие $\omega\tau \ll 1$ выполнялось для верхней граничной частоты спектра волны. Аналогичное упрощение можно ввести непосредственно в уравнение (7.11). Будем считать, что функция $\partial \rho' / \partial t'$ изменяется гораздо медленнее экспоненциального ядра в интегральном члене (7.11) и ее можно разложить в ряд по малому запаздыванию

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} \approx \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} (t' - t) + \dots$$

Подставляя это разложение в (7.11) и проводя интегрирование по t' , получим

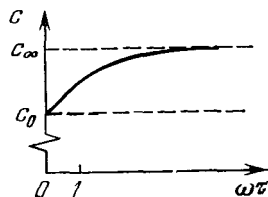
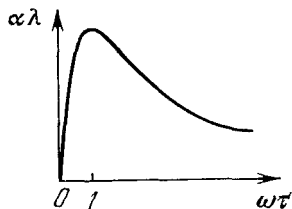
$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \frac{1}{2} c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = m c_0^2 \tau \frac{\partial^3 \rho'}{\partial x^2 \partial t} - m c_0^2 \tau^2 \frac{\partial^4 \rho'}{\partial x^2 \partial t^2}. \quad (7.17)$$

Структура первого члена в правой части (7.17) такая же, как у диссипативного члена в (2.30) (см. гл. I), описывающего затухание звука из-за вязкости и теплопроводности. Второй член справа в (7.17) описывает слабые дисперсионные эффекты. Уравнение (7.16) может быть получено из (7.17) методом медленно изменяющегося профиля.

Заметим, что уравнение типа (7.16), дополненное нелинейным членом, будет рассмотрено в гл. VI.

§ 8. Распространение сигнала (волнового пакета) в диспергирующей среде

В предыдущих параграфах рассматривалось главным образом распространение монохроматических волн. Однако строго монохроматических волн в природе не существует. Для того чтобы передать посредством волн какую-либо информацию, т. е. передать энергию, необходимо промодулировать волну. В линейном приближении модулированную волну (или сигнал с конечной шириной спектра) можно представить в виде суперпозиции гармонических



2.6. Зависимость скорости звука c и коэффициента затухания α от $\omega\tau$.

плоских волн. В среде без дисперсии (а следовательно, и без диссипации) скорости различных частотных составляющих сигнала одинаковы, поэтому сигнал распространяется без изменения своей формы. Распространение сигнала в этом случае описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (8.1)$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде двух плоских волн произвольной формы (см. § 1 гл. I).

В диспергирующей среде скорость распространения различных частотных компонент различна. Это приводит к изменению разности фаз между составляющими спектра сигнала и к изменению его формы. Скорость распространения сигнала может существенным образом отличаться от фазовой скорости отдельных гармонических компонент, и поэтому само понятие «скорость сигнала» в диспергирующей среде должно быть уточнено.

Математически проблема распространения сигнала в диспергирующей среде сводится к нахождению решения уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L_{\xi}(u) = 0, \quad (8.2)$$

где L — некоторый линейный оператор, действующий на функцию u . Например, для электромагнитных волн в линейной среде

$$L(u) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{\infty} \kappa(\tau) u(t - \tau) d\tau,$$

при распространении звуковых волн в реальной среде (с учетом диссипативных процессов)

$$L(u) = (b/c_0^2 \rho_0) \partial \Delta u / \partial t$$

и т. д.

Перейдем к изучению закономерностей распространения в диспергирующей среде плоских немонахроматических волн, бегущих в направлении оси z . Такие волны могут возбуждаться или на границе среды (например, источником, расположенным при $z = 0$), или путем создания в начальный момент времени (например, при $t = 0$) некоторого пространственно-распределенного возмущения. Приведем ход решения уравнения (8.2) в этих двух случаях.

Рассмотрим вначале граничную задачу. Пусть диспергирующая среда занимает полупространство $z \geq 0$ и на ее границе задан входной сигнал

$$u(t, z = 0) = u_0(t), \quad (8.3)$$

который имеет частотный спектр

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) e^{i\omega t} dt. \quad (8.4)$$

Так как спектральные компоненты распространяются в линейной среде независимо друг от друга, то решение волнового уравнения (8.2) можно представить в виде суперпозиции гармонических волн

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp\{-i[\omega t] - k(\omega)z\} d\omega. \quad (8.5)$$

Подставляя (8.5) в (8.2), мы можем найти закон дисперсии в среде $k = k(\omega)$, который будет определяться видом оператора $L(u)$. Если подставить выражение для спектра $F(\omega)$ из (8.4) в (8.5), то можно представить искомое решение через поле на границе

$$u(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t') \exp\{-i[\omega(t-t') - k(\omega)z]\} d\omega dt'. \quad (8.6)$$

В теории передачи сигналов важное место занимают вопросы распространения волновых пакетов. Волновой пакет — это квазимонохроматический сигнал с узким частотным спектром. Выделяя некоторую среднюю частоту сигнала ω_0 , можно записать высокочастотный импульс в виде

$$u_0(t) = A_0(t) e^{-i\omega_0 t}, \quad (8.7)$$

где $A_0(t)$ — комплексная медленно изменяющаяся функция; $\left| \frac{dA_0}{dt} \right| \ll \omega_0 |A_0|$. Так как ширина частотного спектра волнового пакета $\Delta\omega \ll \omega_0$, то в пределах спектральной линии излучения можно описать зависимость волнового числа от частоты, разложив в ряд дисперсионное соотношение:

$$k(\omega) = k_0(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (8.8)$$

Принимая во внимание (8.8), можно написать выражение для поля волнового пакета в виде

$$u(z, t) = A(z, t) \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)], \quad (8.9)$$

где

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\left[(t-t') - \frac{dk}{d\omega} z\right](\omega - \omega_0) + \frac{i}{2} z \frac{d^2k}{d\omega^2} (\omega - \omega_0)^2\right\} d\omega. \quad (8.10)$$

Учет различных членов в разложении (8.8) соответствует различным приближениям теории дисперсии. На рис. 2.7 точный закон дисперсии $k = k(\omega)$ изображен кривой 1; кривая 2 — это квадратичная аппроксимация $k(\omega)$, описываемая формулой (8.8). Учет

только линейного члена в разложении $k(\omega)$ приводит к приближению, показанному прямой 3 на рис. 2.7; прямая 3 наклонена к оси k под углом β , определяемым из соотношения $\text{tg } \beta = (\partial \omega / \partial k)_{\omega_0} = v_{\text{гр}}$, и является касательной к кривым 1 и 2. Наклон прямой, проведенный в точку касания из начала координат, определяет величину фазовой скорости:

$$\text{tg } \alpha = \omega_0 / k_0 = v_{\text{ф}}.$$

В первом приближении теории дисперсии, когда $k(\omega) = k_0 + (dk/d\omega)_{\omega_0}(\omega - \omega_0)$, внутренний интеграл в (8.10) превращается в дельта-функцию, и мы получаем

$$u(z, t) = A_0 \left(t - \frac{dk}{d\omega} z \right) \exp[-i(\omega_0 t - k_0 z)]. \quad (8.11)$$

2.7. Различные приближенные представления точного закона дисперсии $k(\omega)$.

Видно, что в данном случае волновой пакет распространяется без искажения с групповой скоростью

$$v_{\text{гр}} = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}^{-1}. \quad (8.12)$$

Очевидно, что групповая скорость имеет физический смысл, когда она является действительной величиной, т. е. когда среда обладает малым поглощением. Слабое поглощение (в случае необходимости) может быть учтено только в экспоненциальном множителе в (8.11).

В первом приближении теории дисперсии амплитуда волнового пакета удовлетворяет уравнению первого порядка

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{гр}}} \frac{\partial A}{\partial t} = 0. \quad (8.13)$$

Умножая (8.13) на комплексно-сопряженную амплитуду A^* и складывая с сопряженным уравнением, можно найти

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{гр}}} \frac{\partial |A|^2}{\partial t} = 0.$$

Так как $|A|^2$ характеризует плотность энергии волны, то видно, что энергия волнового пакета распространяется с групповой скоростью.

Найдем связь между групповой и фазовой скоростями

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_{\Phi})}{dk} = v_{\Phi} + k \frac{dv_{\Phi}}{dk} = v_{\Phi} - \lambda \frac{dv_{\Phi}}{d\lambda}.$$

Учитывая, что $k = \omega/v_{\Phi} = \omega n/c$, можно также записать

$$v_{\text{гр}} = c \left[\frac{d(n\omega)}{d\omega} \right]_{\omega_0}^{-1} = c \left[n(\omega_0) + \omega_0 \left(\frac{dn}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right]^{-1}. \quad (8.14)$$

Для плазмы, например, $n^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ и $v_{\text{гр}} = cn$. Поскольку $v_{\Phi} = c/n$, то $v_{\text{гр}}v_{\Phi} = c^2$.

В области аномальной дисперсии (где имеется сильное поглощение) $dn/d\omega < 0$, и при $n(\omega_0) + \omega_0 (dn/d\omega)_{\omega_0} < 1$ формально реализуется случай $v_{\text{гр}} > c$. Групповая скорость может быть также отрицательной, т. е. направления волнового вектора и групповой скорости могут быть противоположны.

Однако область частот, в которой дисперсия аномальна, всегда совпадает с областью сильного поглощения, понятие же групповой скорости (8.12) введено для среды, в которой диссипативные процессы можно не учитывать (по крайней мере в той области длин волны, которые играют существенную роль в спектре сигнала).

Высокочастотный сигнал распространяется без искажения только в первом приближении. Если же в разложении (8.8) и соответственно в (8.10) учесть следующий квадратичный член, то

$$A(z, t) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi i k''_{\omega} z}} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\eta) \exp \left[-i \frac{(\tau - \eta)^2}{2k''_{\omega} z} \right] d\eta, \quad (8.15)$$

где $\tau = t - z/v_{\text{гр}}$, $k''_{\omega} = (d^2k/d\omega^2)_{\omega_0}$. Во втором приближении теории дисперсии амплитуда волнового пакета (8.15), как можно показать прямой подстановкой, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2} k''_{\omega} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = 0, \quad (8.16)$$

т. е. уравнению параболического типа с мнимым коэффициентом диффузии $D = -i \frac{d^2k}{d\omega^2} = -i \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_{\text{гр}}} \right)$, который характеризует дисперсию групповой скорости. Из-за мнимости коэффициента диффузии при дисперсионном расплывании волнового пакета меняется не только амплитудный профиль $|A(z, t)|$, но и фазовая модуляция импульса. Дисперсионное расплывание волнового пакета накапливается с расстоянием. Даже если дисперсия настолько слаба, а спектр волнового пакета настолько узкий, что третий член в разложении (8.8) много меньше второго, т. е. выполняется условие

$$\left(\frac{d^2k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} \Delta\omega \ll \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0},$$

то тем не менее на некотором расстоянии от входа в среду искажение сигнала станет существенным. Расстояние, на котором еще можно не учитывать деформацию амплитуды сигнала, зависит от величины дисперсии групповой скорости и длительности импульса.

Из уравнения (8.16), которое мы запишем, как $\mathcal{L}(A) = 0$, можно получить несколько законов сохранения для волнового пакета. Если проинтегрировать по времени выражение

$$A^* \mathcal{L}(A) + A \mathcal{L}^*(A^*) = 0,$$

то мы получим закон сохранения энергии

$$\frac{dJ_1}{dz} = 0, \quad \text{где } J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 d\tau. \quad (8.17)$$

Если проинтегрировать по времени выражение $\frac{\partial A^*}{\partial \tau} \mathcal{L}(A) - \frac{\partial A}{\partial \tau} \mathcal{L}^*(A^*) = 0$, то мы придем к закону сохранения

$$\frac{dJ_2}{dz} = 0, \quad \text{где } J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} A \frac{\partial A^*}{\partial \tau} d\tau. \quad (8.18)$$

Если ввести фазу $A = |A| e^{i\varphi}$, то $J_2 = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} |A|^2 d\tau$.

Вычисляя интеграл $\int \left[\frac{\partial A^*}{\partial z} \mathcal{L}(A) - \frac{\partial A}{\partial z} \mathcal{L}^*(A^*) \right] d\tau = 0$, можно получить следующий закон сохранения:

$$\frac{dJ_3}{dz} = 0, \quad J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial A}{\partial \tau} \right|^2 d\tau. \quad (8.19)$$

Наконец, если просто проинтегрировать уравнение (8.16) по времени, то мы имеем

$$\frac{dJ_4}{dz} = 0, \quad J_4 = \int_{-\infty}^{\infty} A d\tau. \quad (8.20)$$

Законы сохранения (8.17)–(8.20), особенно их обобщения на нелинейную среду, позволяют эффективно строить методы численного решения уравнений типа (8.16) на ЭВМ.

Проиллюстрируем общие рассуждения, приведенные в этом параграфе, двумя примерами.

Пример 1. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \beta \frac{\partial^3 u}{\partial \tau_0^3}, \quad \tau_0 = t - \frac{z}{c_0}, \quad (8.21)$$

которое в дальнейшем будем называть линейризованным уравнением Кортевега — де Вриза. Это уравнение имеет важное значение для описания волновых процессов самой различной физической природы. Его вывод для звуковых волн в средах с периодически неоднородной структурой дан в § 2 гл. IV (см. (3.10)). Закон дисперсии, следующий из (8.21), имеет вид

$$k = \frac{\omega}{c_0} + \beta\omega^3. \quad (8.22)$$

В соответствии с общим выражением (8.12) групповая скорость на частоте ω_0 в данном случае равна

$$v_{\text{гр}} = \frac{c_0}{1 + 3\beta c_0 \omega_0^2}, \quad (8.23)$$

а коэффициент диффузии в (8.16) —

$$D = 6i\beta\omega_0. \quad (8.24)$$

Таким образом, параболическое уравнение для комплексной амплитуды волнового пакета, следующее из линейризованного уравнения Кортевега — де Вриза (8.21), можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -3i\beta\omega_0 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2}, \quad (8.25)$$

где

$$\tau = t - \frac{z}{c_0} (1 + 3\beta c_0 \omega_0^2) = \tau_0 - 3\beta \omega_0^2 z. \quad (8.26)$$

Параболическое уравнение (8.25), отвечающее второму приближению в теории дисперсии, можно получить также непосредственно из уравнения Кортевега — де Вриза (8.21) с помощью метода медленно изменяющейся амплитуды. Действительно, волновой пакет, как мы уже говорили, можно представить как

$$u = A(z, \tau_0) \exp \{-i[\omega_0 t - k(\omega_0)z]\} = \\ = A(z, \tau_0) \exp \{-i(\omega_0 \tau_0 - \beta \omega_0^3 z)\}. \quad (8.27)$$

Здесь A — огибающая, характерное время изменения которой T много больше периода высокочастотных осцилляций, т. е. $T \gg \gg 2\pi/\omega_0$. При этом условии можно написать, что максимумы амплитуды и ее производных подчиняются соотношению

$$|A| \gg \omega_0 \left| \frac{dA}{d\tau} \right| \gg \omega_0^2 \left| \frac{d^2 A}{d\tau^2} \right| \gg \omega_0^3 \left| \frac{d^3 A}{d\tau^3} \right| \gg \dots \quad (8.28)$$

Подставим теперь искомое решение (8.27) в уравнение Кортевега — де Вриза (8.21):

$$\frac{\partial A}{\partial z} + 3\beta \omega_0^2 \frac{\partial A}{\partial \tau_0} = -3i\beta \omega_0 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau_0^2} + \beta \frac{\partial^3 A}{\partial \tau_0^3}. \quad (8.29)$$

Переходя к новым переменным (ср. с (8.26))

$$\tau = \tau_0 - 3\beta\omega_0^2 z, \quad z = z,$$

находим

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -3i\beta\omega_0 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \beta \frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3}. \quad (8.30)$$

В силу условий (8.28) можно пренебречь в правой части уравнения (8.30) третьей производной по сравнению со второй производной и окончательно получить уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -3i\beta\omega_0 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2},$$

которое в точности совпадает с ранее выведенным параболическим уравнением (8.25).

Параболическое уравнение можно вывести методом медленно изменяющейся амплитуды и в самом общем случае волнового уравнения (8.2) с $L(u) = 4\pi c^{-2} \partial^2 / \partial t^2 \int_0^\infty \kappa(\tau) u(t - \tau) d\tau$. Ввиду громоздкости мы не будем приводить этого вывода, ограничиваясь ссылкой на рассмотренный выше частный пример.

Пример 2. Рассмотрим с помощью параболического уравнения (8.16) распространение гауссова импульса с линейной девиацией мгновенной частоты (с квадратичной модуляцией фазы):

$$A(t, z=0) = A_0 \exp \left[-\frac{t^2}{T_0^2} \left(1 - \frac{i}{2} \Omega_0 T_0 \right) \right]. \quad (8.31)$$

Частотный спектр такого импульса равен

$$F(\omega) = \frac{A_0 T_0}{2\sqrt{\pi} \sqrt{1 - i\Omega_0 T_0/2}} \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2 T_0^2}{4(1 - i\Omega_0 T_0/2)} \right] \quad (8.32)$$

и имеет полуширину по уровню e^{-1} :

$$\Delta\omega = |\omega - \omega_0| = \frac{1}{T_0} \sqrt{4 + \Omega_0^2 T_0^2}.$$

Видно, что при сильной фазовой модуляции ($|\Omega_0| T_0 \gg 1$) полуширина спектра $\Delta\omega = |\Omega_0|$, а при малой модуляции ($|\Omega_0| T_0 \ll 1$) полуширина равна $\Delta\omega = 2/T_0$.

Подставляя $A(t, 0)$ из (8.31) в общее решение параболического уравнения (8.15), находим

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{\Psi(z)}} \times \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{T_0^2 |\Psi(z)|^2} \left[1 + i \frac{2k''_{\omega} z}{T_0^2} \left(1 - \frac{\Omega_0 T_0^3}{4k''_{\omega} z} + \frac{\Omega_0^2 T_0^2}{4} \right) \right] \right\}, \quad (8.33)$$

где

$$\psi(z) = 1 - i \frac{2k''_{\omega} z}{T_0^2} \left(1 - i \frac{\Omega_0 T_0}{2} \right). \quad (8.34)$$

Длительность импульса в сечении z

$$T(z) = T_0 |\psi(z)| = T_0 \left[\left(1 - \frac{\Omega_0 k''_{\omega} z}{T_0} \right)^2 + \frac{4k''_{\omega}{}^2 z^2}{T_0^4} \right]^{1/2}. \quad (8.35)$$

В отсутствие начальной фазовой модуляции, $\Omega_0 = 0$,

$$T(z) = T_0 \sqrt{1 + \frac{4k''_{\omega}{}^2 z^2}{T_0^4}}.$$

Длительность импульса увеличивается по мере распространения и становится в $\sqrt{2}$ раз больше начальной на расстоянии

$$z = T_0^2/2 |k''_{\omega}|, \quad (8.36)$$

называемом *длиной дисперсионного расплывания*. Если зафиксировать расстояние $z = l$, а на входе среды ($z = 0$) изменять длительность исходного импульса T_0 , то зависимость $T(z = l, T_0)$ будет иметь минимум. Минимальная длительность импульса

$$T_{\min} = 2\sqrt{|k''_{\omega}| l} \quad (8.37)$$

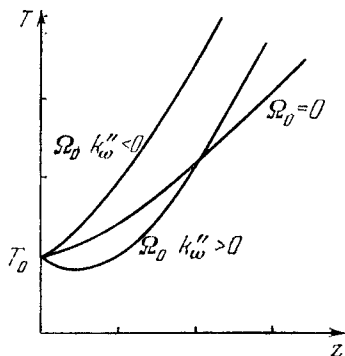
будет соответствовать длительности входного импульса

$$T_0 = \sqrt{2 |k''_{\omega}| l}. \quad (8.38)$$

Чем протяженнее среда и чем больше дисперсия групповой скорости k''_{ω} , тем в большей степени проявляется дисперсионное расплывание. Величина T_{\min} определяет по существу предельную скорость передачи информации: так как, если два входных импульса будут отстоять друг от друга на время, меньшее T_{\min} , то они на выходе диспергирующей линии передачи перекроются.

Импульсы с фазовой модуляцией могут испытывать или компрессию (при $\Omega_0 k''_{\omega} > 0$) или декомпрессию (при $\Omega_0 k''_{\omega} < 0$) (рис. 2.8).

Рассмотрим теперь задачу о распространении начального возмущения. Пусть диспергирующая среда занимает большое пространство и где-то внутри нее при $t = 0$ создается возмущение



2.8. Изменение длительности импульса в диспергирующей среде.

волнового поля

$$u(t=0, z) = A_0(z)e^{ik_0z}, \quad (8.39)$$

которое имеет спектр в пространстве волновых чисел

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(z) e^{-i(k-k_0)z} dz. \quad (8.40)$$

Решение волнового уравнения (8.2) можно записать в прежнем виде (8.9), только теперь

$$A(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(z') dz' \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left[(z - z') - \frac{d\omega}{dk} t \right] (k - k_0) - \right. \\ \left. - \frac{i}{2} t \left[\frac{d^2\omega}{dk^2} (k - k_0)^2 + \dots \right] \right\} d(k - k_0). \quad (8.41)$$

В первом приближении теории дисперсии, когда в разложении ω по k :

$$\omega = \omega_0 + d\omega/dk \cdot (k - k_0) + \dots,$$

можно ограничиться двумя членами, мы имеем прежнее решение (8.11) и укороченное уравнение (8.13).

Во втором приближении теории дисперсии, когда

$$\omega = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk} (k - k_0) + \frac{d^2\omega}{dk^2} \frac{(k - k_0)^2}{2},$$

амплитуда волнового пакета удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{i}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} \frac{\partial^2 A}{\partial z'^2}, \quad z' = z - v_{гp}t, \quad (8.42)$$

которое имеет общее решение

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi i t d^2\omega/dk^2}} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\xi) \exp \left[i \frac{(z' - \xi)^2}{2t d^2\omega/dk^2} \right] d\xi. \quad (8.43)$$

Проведем сравнение двух подходов, использованных для решения граничной и начальной задач. При анализе процесса распространения волнового пакета или импульса, задаваемого на границе, удобно пользоваться уравнением (8.16), а при изучении распространения волнового пакета, создаваемого путем пространственного возмущения в какой-то начальный момент времени, более удобен подход, основанный на уравнении (8.42).

Следует отметить, что уравнения (8.16) и (8.42) в определенном смысле идентичны друг другу, так как они относятся к одному и тому же второму приближению теории дисперсии. Действительно, эти уравнения записаны в различных независимых переменных:

первое — в z и $\tau = t - z/v_{гp}$; второе — в t и $z' = z - v_{гp}t$. Перейдем, например, в уравнении (8.42) к переменным, используемым при записи уравнения (8.16); отбросив в правой части малые члены, получим

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} \frac{1}{v_{гp}^3} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2}. \quad (8.44)$$

Если рассматривать зависимость $\omega = \omega(k)$ как неявную функцию для $k(\omega)$, то можно написать

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right) \frac{1}{v_{гp}^3}. \quad (8.45)$$

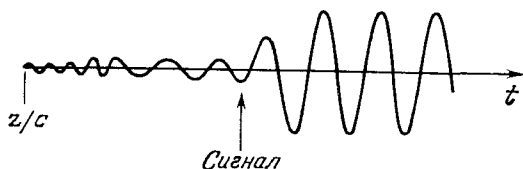
С учетом последнего соотношения уравнение (8.44) в точности совпадает с параболическим уравнением типа (8.16). Таким образом, параболические уравнения первого и второго типов соответствуют друг другу, только одно из них нужно использовать в граничных задачах, а другое — в задачах с начальными условиями. Отметим, что уравнения типа (8.42) с мнимым коэффициентом диффузии встречаются в квантовой механике, где они называются уравнениями Шредингера типа.

Мы рассмотрели распространение волновых пакетов или сигналов в различных диспергирующих средах. Если дисперсия в среде нормальная и не слишком велика и диссипация энергии также мала, то сигнал может пройти в среде достаточно большое расстояние, существенно не расплываясь. В этом случае скорость распространения энергии, которую несет сигнал, равна групповой скорости. Если же условия, сформулированные выше, не выполняются, то групповая скорость не соответствует скорости распространения энергии.

Строгое решение задачи о скорости распространения сигнала для электромагнитного импульса в любой диспергирующей среде было получено Зоммерфельдом и Бриллюэном в 1914 г. и затем развито Бриллюэном в последующих работах. Исследование было проведено для сигнала с крутым передним фронтом, который представлял собой цуг колебаний, начинающихся в некоторый момент t_0 . Мы приведем здесь лишь выводы, которые можно сделать из этих исследований.

Оказывается, что передний фронт сигнала всегда распространяется со скоростью электромагнитных волн в вакууме c . Этот результат физически понятен. Дисперсионные свойства различных сред объясняются вынужденными движениями зарядов среды. В начале возмущения (когда сигнал появляется на «входе» среды) электроны среды в силу инерции не имеют упорядоченного движения, и среда «оптически пуста», как вакуум, показатель преломления $n = 1$, а скорость распространения равна c . На спектральном

языке этот результат можно пояснить следующим образом: в спектральном разложении сигнала конечной длительности присутствуют сколь угодно высокие частоты, для которых (см. § 3) $n \rightarrow 1$, $v_{гр} \approx v_{ф} \approx c$. Однако удельный вес этих частот в спектре квази-монокроматического сигнала ничтожно мал. Поэтому передняя часть сигнала, как называемый «первый предвестник», имеет ничтожно малую амплитуду и высокую частоту. После прибытия первого предвестника происходят процессы установления сигнала.



2.9. К установлению переднего фронта сигнала в диспергирующей среде.

Основной интерес имеет та часть сигнала, где его интенсивность значительна («основная часть» или «тело» сигнала). Скорость, с которой прибывает эта основная часть сигнала, всегда меньше c .

Таким образом, физический процесс распространения сигнала в среде может быть описан следующим образом (рис. 2.9).

До момента $t < z/c$ все находится в покое. Даже если фазовая скорость волны больше c , никакая волна не достигает точки z раньше, чем по истечении времени $t = z/c$. При $t = z/c$ приходит первый «предвестник», однако амплитуда его при $t = z/c$ равна нулю. Амплитуда первого предвестника с ростом t растет, частота колебаний велика по сравнению с частотой волны. При дальнейшем увеличении t амплитуда первого предвестника уменьшается и падает до нуля. За первым предвестником следует второй и т. д. Свойства второго предвестника подобны свойствам первого предвестника. Период второго предвестника сначала велик, потом убывает, амплитуда меняется примерно как у первого предвестника. Характер процессов установления и формы предвестников зависят от закона дисперсии в среде. Прибытие основной или главной части сигнала характеризуется ростом амплитуды. Эта главная часть распространяется со скоростью сигнала v_c . Простое выражение для нее не может быть дано, ее определение произвольно и связано с методом вычисления, хотя физический смысл очевиден. Это та часть сигнала, прибытие которой сможет зарегистрировать прибор. Следует отметить, что по мере увеличения чувствительности прибора скорость, полученная из измерений, все ближе будет приближаться к скорости c . Однако предел наступит раньше, он связан с наличием флуктуационных шумов на входе измерительного прибора. В области слабой дисперсии скорость сигнала совпадает с групповой скоростью. Таким образом, скорость фрон-

та сигнала всегда равна c . Фазовая скорость — скорость перемещения фазы в установившейся части сигнала. Она может быть и больше c . Групповая скорость отлична от фазовой только в диспергирующих средах. В области нормальной дисперсии групповая скорость меньше фазовой скорости. Относительно наблюдателя, движущегося вместе с огибающей сигнала при $v_{\phi} > v_{гр}$, синусоида высокочастотного заполнения будет двигаться вперед, при этом передние гребни синусоиды будут исчезать, доходя до передней границы сигнала, а задние гребни возникать в хвосте сигнала.

§ 9. Энергия электромагнитного поля в диспергирующей среде

Плотность потока энергии произвольных переменных электромагнитных полей, в том числе и электромагнитных полей в диспергирующих средах, определяется вектором Умова — Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (9.1)$$

Изменение энергии в единице объема за единицу времени равно

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}'_1 - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}].$$

Используя уравнения Максвелла, получим

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \left[\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \quad (9.2)$$

В отсутствие дисперсии, когда ϵ и μ действительны и не зависят от частоты,

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E^2 + \mu H^2).$$

Величина

$$W = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \quad (9.3)$$

равна в этом случае плотности электромагнитной энергии в единице объема среды. Закон сохранения энергии имеет вид

$$\partial W / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0.$$

В диспергирующей среде всегда имеет место диссипация энергии поэтому закон сохранения энергии должен быть записан в виде

$$\partial W / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{S} + Q = 0.$$

Здесь Q — плотность энергии тепловых потерь. Задача состоит в том, чтобы определить величины W и Q в диспергирующих средах. Поскольку наличие диссипации (дисперсии) должно приво-

дять к уменьшению со временем амплитуды волны, рассмотрим электромагнитное поле:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} [E_0(t) e^{-i\omega_0 t} + E_0^*(t) e^{i\omega_0 t}], \\ D(t) &= \frac{1}{2} [D_0(t) e^{-i\omega_0 t} + D_0^*(t) e^{i\omega_0 t}], \\ H(t) &= \frac{1}{2} [H_0(t) e^{-i\omega_0 t} + H_0^*(t) e^{i\omega_0 t}], \\ B(t) &= \frac{1}{2} [B_0(t) e^{-i\omega_0 t} + B_0^*(t) e^{i\omega_0 t}], \end{aligned} \quad (9.4)$$

амплитуды которого $E_0(t)$, $H_0(t)$, $D_0(t)$ и $B_0(t)$ медленно изменяются во времени по сравнению с $\exp(-i\omega_0 t)$, т. е. выполняются условия вида $|\partial E_0/\partial t| \ll \omega_0 |E_0|$ для всех четырех векторных величин. Другими словами, будем рассматривать поле с узким частотным спектром (ширина спектра $\Delta\omega \ll \omega_0$).

Если подставить (9.4) в (9.2), то в правой части (9.2) можно выделить как быстро изменяющиеся члены, пропорциональные $\exp(-2i\omega_0 t)$ и $\exp(2i\omega_0 t)$, так и медленно изменяющиеся. При усреднении (9.2) за период колебаний электромагнитного поля $T = 2\pi/\omega_0$ получим

$$\begin{aligned} -\overline{\operatorname{div} S} &= \frac{1}{16\pi} \left\{ E_0 \frac{\partial D_0^*}{\partial t} + E_0^* \frac{\partial D_0}{\partial t} + H_0 \frac{\partial B_0^*}{\partial t} + H_0^* \frac{\partial B_0}{\partial t} \right\} + \\ &+ \frac{i\omega_0}{16\pi} (E_0 D_0^* - E_0^* D_0 + H_0 B_0^* - H_0^* B_0). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Будем рассматривать немагнитную среду, т. е. примем, что $\mu = 1$, и, следовательно, $B_0 = H_0$. (Обобщение полученных далее результатов на случай среды, в которой $\mu = \mu(\omega)$, легко может быть сделано.)

Воспользуемся выражением, связывающим индукцию и напряженность

$$D_0(t) = E_0(t) + 4\pi \int_0^\infty \kappa(\tau) E_0(t - \tau) e^{i\omega_0 \tau} d\tau. \quad (9.6)$$

Напомним, что в среде без дисперсии наблюдается мгновенный отклик, т. е. функция $\kappa(\tau)$ имеет вид дельта-функции

$$\kappa(\tau) = \kappa_0 \delta(\tau) \quad \text{и} \quad D_0(t) = (1 + 4\pi\kappa_0) E_0(t).$$

В слабо диспергирующей среде $\kappa(\tau)$ — «почти» дельта-функция, т. е. за характерное время запаздывания амплитуда поля меняется мало. В соответствии с этим амплитуду поля можно разложить в

ряд по τ и учесть лишь первые два члена разложения. При этом

$$D_0(t) = E_0(t) \left[1 + 4\pi \int_0^{\infty} \kappa(\tau) e^{i\omega_0\tau} d\tau \right] - \frac{\partial E_0}{\partial t} 4\pi \int_0^{\infty} \tau \kappa(\tau) e^{i\omega_0\tau} d\tau.$$

Коэффициент при $E_0(t)$ равен согласно (2.2) $\varepsilon(\omega)$, а коэффициент при $\partial E_0/\partial t$ равен, как легко видеть, $-i \partial \varepsilon/\partial \omega$, поэтому

$$D_0(t) = \varepsilon(\omega) E_0 + i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \frac{\partial E_0}{\partial t} + \dots \quad (9.7)$$

В приближении узкополосного сигнала с принятой точностью выражение для производной $\partial D_0/\partial t$, входящей в формулу (9.5), берем в виде

$$\frac{\partial D_0}{\partial t} = \varepsilon(\omega) \frac{\partial E_0}{\partial t} + \dots \quad (9.8)$$

Подставляя (9.7), (9.8) в (9.5), получим

$$-\overline{\operatorname{div} \mathbf{S}} = \frac{1}{16\pi} \left\{ i\omega_0 (\varepsilon^* - \varepsilon) |E_0|^2 + \left(\frac{\partial(\omega\varepsilon^*)}{\partial\omega} \right)_{\omega_0} E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} \right)_{\omega_0} E_0^* \frac{\partial E_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} |H_0|^2 \right\}. \quad (9.9)$$

Учитывая, что $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, окончательно найдем

$$-\overline{\operatorname{div} \mathbf{S}} = \frac{\omega_0}{8\pi} \varepsilon'' |E_0|^2 + \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial(\omega\varepsilon')}{\partial\omega} |E_0|^2 + |H_0|^2 \right\} - \frac{i}{16\pi} \left\{ \frac{\partial(\omega\varepsilon'')}{\partial\omega} \left(E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial t} - E_0^* \frac{\partial E_0}{\partial t} \right) \right\}. \quad (9.10)$$

Выражение (9.10) описывает как изменение электромагнитной энергии единицы объема среды, так и тепловые потери. Однако разделить сумму членов в (9.10) на части, соответствующие тепловым потерям и изменению электромагнитной энергии, возможно только в некоторых частных случаях. Например, для строго гармонического поля $E_0 = \text{const}$ и усредненная за период энергия электромагнитного поля $\overline{W}(t)$ — постоянная во времени!

Поэтому закон сохранения энергии с учетом (9.10) должен быть записан в виде

$$-\overline{\operatorname{div} \mathbf{S}} = \overline{Q} = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon'' |E_0|^2. \quad (9.11)$$

Если рассматривать диспергирующую среду, но диссипацией пренебречь, иными словами, рассматривать такой волновой процесс, частотный спектр которого лежит в области «прозрачности» среды, то $\varepsilon''(\omega) = 0$, $Q = 0$. Тогда

$$-\overline{\operatorname{div} \mathbf{S}} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial t} = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} |E_0(t)|^2 + |H_0(t)|^2 \right\}.$$

В этом случае средняя плотность электромагнитной энергии

$$\overline{W}(t) = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} |E_0|^2 + |H_0|^2 \right] = \overline{W}_E + \overline{W}_H. \quad (9.12)$$

Если среда недиспергирующая, то ϵ не зависит от ω и (9.12) (с учетом формул (9.4)) переходит в выражение (9.3). Если диссипативные процессы играют существенную роль, то формула (9.12) для плотности энергии становится несправедливой.

Энергия электромагнитного поля в единице объема среды равна сумме энергии поля в вакууме и энергии движения зарядов среды в поле волны. Выделяющееся в единицу времени тепло Q равно работе сил трения. Пользуясь простыми моделями движения зарядов среды в поле волны, рассмотренными в § 4 и 5, можно найти потенциальную U и кинетическую K энергии движения зарядов среды в поле волны и работу сил трения Q . Для диэлектриков уравнение движения зарядов в поле волны имеет вид

$$\ddot{r} + \nu\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E.$$

Если $E = E_0 \exp(-i\omega t)$, то

$$r = \frac{e}{m} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\nu}. \quad (9.13)$$

В соответствии с уравнением движения зарядов имеем

$$K = Nm\dot{r}^2/2, \quad U = Nm\omega_0^2 r^2/2, \quad Q = Nm\nu\dot{r}^2. \quad (9.14)$$

Подставляя (9.13) в (9.14) и производя усреднение по периоду $T = 2\pi/\omega$, получим

$$\overline{W}_E = \frac{|E_0|^2}{16\pi} + \overline{K} + \overline{U} = \frac{|E_0|^2}{16\pi} \left[1 + \frac{4\pi N e^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{m (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \nu^2} \right],$$

$$\overline{Q} = \frac{4\pi N e^2 \nu \omega^2}{[m [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \nu^2]} \frac{|E_0|^2}{8\pi}.$$

Поскольку диэлектрическая проницаемость диэлектрика определяется в этом случае формулой (4.3) и

$$\epsilon' = 1 + \frac{4\pi N e^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2]}, \quad \epsilon'' = \frac{4\pi N e^2 \nu \omega}{m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2]},$$

то $\overline{Q} = (\omega\epsilon''/8\pi) |E_0|^2$. Однако \overline{W}_E через $\epsilon'(\omega)$ не выражается. Если же $\nu = 0$ и $\epsilon'' = 0$, то $Q = 0$, а

$$\overline{W}_E = \frac{|E_0|^2}{16\pi} \left[1 + \frac{4\pi N e^2}{m (\omega^2 - \omega_0^2)} \right] = \frac{|E_0|^2}{16\pi} \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega}.$$

Аналогичный результат легко получить для плазмы.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Анизотропная среда — это среда, физические свойства которой зависят от направления. Анизотропная среда называется однородной, если зависимость ее свойств от направления в различных точках одинакова. Среда может быть изотропной в отношении каких-либо одних физических свойств и анизотропной в отношении других.

Например, при изучении распространения света в кристаллах (т. е. в задачах кристаллооптики) можно в большинстве случаев считать среду магнитно-изотропной, но электрически анизотропной. При этом вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} и вектор электрической индукции \mathbf{D} , вообще говоря, не будут параллельны. Связь между ними осуществляется посредством тензорной величины — диэлектрической проницаемости ε_{ij} . Если поместить точечный источник в оптически однородную изотропную среду, то фронт волны, создаваемой таким источником, будет иметь сферическую форму. Форма же волнового фронта в анизотропной среде отлична от сферической и бывает весьма сложной.

Анизотропия может быть связана со структурой среды (как, например, в кристаллах) или может создаваться наложением внешних полей — магнитного, электрического, поля упругих деформаций и т. д.

Особенности распространения электромагнитных волн в анизотропной среде (как и в любой другой материальной среде) определяются специфической формой материальных уравнений. В случае анизотропных сред эти уравнения для гармонических во времени полей имеют вид

$$D_i(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega, \mathbf{r}), \quad B_i(\omega, \mathbf{r}) = \mu_{ij}(\omega) H_j(\omega, \mathbf{r}).$$

Обычно свойства сред таковы, что тензором является либо $\hat{\varepsilon}(\omega)$, либо $\hat{\mu}(\omega)$; одну из величин при этом можно считать скалярной. Поэтому материальные уравнения для анизотропной среды записываются в виде

$$D_i(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega, \mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \mu(\omega) \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}),$$

где $\varepsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij} + 4\pi \int_0^{\infty} \chi_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$, а $\mu(\omega)$ — скаляр, или в виде

$$B_i(\omega, \mathbf{r}) = \mu_{ij}(\omega) H_j(\omega, \mathbf{r}), \quad \mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}),$$

где $\mu_{ij}(\omega) = \delta_{ij} + 4\pi \int_0^{\infty} K_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$, а $\varepsilon(\omega)$ — скаляр. Особенности распространения волн в различных анизотропных средах определяются структурой тензоров μ_{ij} , ε_{ij} , а также зависимостью компонент этих тензоров от частоты.

§ 1. Общие закономерности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах

Не касаясь пока конкретных особенностей распространения волн в различных анизотропных средах, остановимся на некоторых общих закономерностях.

Рассмотрим анизотропную среду, свойства которой характеризуются материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}. \quad (1.1)$$

Уравнения Максвелла, описывающие распространение монохроматических волн, имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i \frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Исключая из системы (1.2) вектор \mathbf{H} и используя материальное уравнение (1.1), получим волновое уравнение для анизотропной среды

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon}\mathbf{E} = 0. \quad (1.3)$$

Ограничимся рассмотрением распространения плоских волн в прозрачной анизотропной среде, т. е. будем считать, что все величины пропорциональны $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ с действительным волновым вектором \mathbf{k} . В этом случае система уравнений (1.2) будет иметь вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}\mathbf{H}] &= -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \quad (\mathbf{k}\mathbf{D}) = 0, \\ [\mathbf{k}\mathbf{E}] &= \frac{\omega}{c} \mathbf{H}, \quad (\mathbf{k}\mathbf{H}) = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

а волновое уравнение (1.3) запишется в следующей форме:

$$[\mathbf{k}[\mathbf{k}\mathbf{E}]] + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon}\mathbf{E} = 0. \quad (1.5)$$

Из системы уравнений (1.4) следует, что \mathbf{k} , \mathbf{D} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны, и вектор \mathbf{H} перпендикулярен вектору \mathbf{E} . Следовательно, векторы \mathbf{k} , \mathbf{D} и \mathbf{E} лежат в одной плоскости, но вектор \mathbf{E} не коллинеарен вектору \mathbf{D} , поскольку $D_i = \varepsilon_{ij}E_j$.

Взаимное расположение векторов E , D , H и k показано на рис. 3.1. В плоскости фронта волны, определяемой уравнением $(kr) = \text{const}$, лежат векторы D , H , а вектор E не лежит в этой плоскости. Поскольку плотность потока энергии характеризуется вектором Умова — Пойнтинга $S = \frac{c}{4\pi} [EH]$, то в анизотропной среде направление плотности потока энергии не совпадает с направлением волнового вектора. Следовательно, не совпадают направления групповой и фазовой скорости. Векторы D , E , k и S компланарны и ортогональны вектору H .

Если тензором является магнитная проницаемость, а ε — скалярная величина, то

$$D = \varepsilon E, \quad B = \hat{\mu}H,$$

и уравнения Максвелла для плоских волн примут вид

$$\begin{aligned} [kH] &= -\frac{\omega}{c} \varepsilon E, & (kE) &= 0, \\ [kE] &= \frac{\omega}{c} B, & (kB) &= 0. \end{aligned}$$

В этом случае, как легко видеть, $k \perp E$, $k \perp B$ и $E \perp B$, т. е. E и B лежат в плоскости фронта волны, а вектор H не лежит в этой плоскости (рис. 3.2). Векторы k , S , B и H компланарны и ортогональны вектору E . Направления векторов S и k не совпадают.

Для характеристики распространения волн в анизотропных средах помимо волнового вектора k вводится лучевой вектор s , направление которого совпадает с направлением вектора Умова — Пойнтинга S , а величина определяется из соотношения

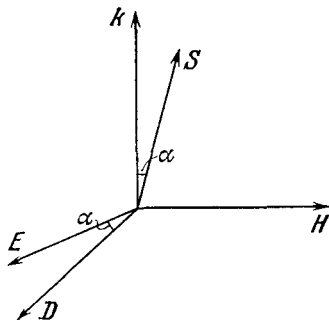
$$(sn) = 1. \quad (1.6)$$

3.2. Взаимное расположение векторов E , H , B и k в анизотропной среде.

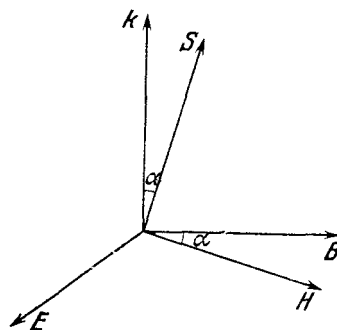
Здесь $n = kc/\omega$, $n = |n|$ — показатель преломления. По отношению к лучевому вектору поперечными являются векторы E и H , следовательно,

$$(sE) = 0, \quad (sH) = 0. \quad (1.7)$$

Умножив уравнения (1.4) векторно на s и учитывая (1.6),



3.1. Взаимное расположение векторов E , D , H и k в анизотропной среде.



3.2. Взаимное расположение векторов E , H , B и k в анизотропной среде.

получим

$$[sD] \leftarrow H, \quad (1.8)$$

$$[sH] = -E. \quad (1.9)$$

Система уравнений (1.4) формально переходит в систему (1.7) — (1.9), если при замене n на s одновременно заменить D на E . Материальное уравнение, соответствующее системе (1.7) — (1.9), должно быть записано в виде

$$E_i = \varepsilon_{ij}^{-1} D_j. \quad (1.10)$$

Вернемся к векторному уравнению (1.5); представим его как систему уравнений для декартовых компонент вектора E :

$$(n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij}) E_j = 0. \quad (1.11)$$

Приравнявая нулю определитель системы

$$\det [n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij}] = 0, \quad (1.12)$$

получим дисперсионное уравнение, устанавливающее частотную зависимость $n(\omega)$ (это так, поскольку в диспергирующей среде компоненты тензора ε_{ij} являются функциями частоты). Если из системы уравнений (1.7) — (1.9) исключить вектор H и использовать материальное уравнение (1.10), то придем к дисперсионному уравнению в другой форме:

$$\det [s^2 \delta_{ij} - s_i s_j - \varepsilon_{ij}^{-1}] = 0. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) определяет зависимость компонент вектора s от частоты. Для получения дальнейших результатов необходимо знать свойства тензоров $\varepsilon_{ij}(\omega)$ и $\varepsilon_{ij}^{-1}(\omega)$, т. е. нужно конкретизировать физические свойства среды.

§ 2. Распространение плоских волн в кристаллических средах

В анизотропных и негиротропных кристаллах тензор диэлектрической проницаемости симметричен:

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ji}(\omega).$$

Если среда прозрачна (можно пренебречь поглощением), то все компоненты тензора будут вещественны. Как известно, симметричный вещественный тензор всегда может быть приведен к главным осям, в которых отличны от нуля только его диагональные компоненты ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} . Если выбрать систему координат, совпадающую с главными осями тензора диэлектрической проницаемости, материальное уравнение запишется в виде

$$D_x = \varepsilon_{xx} E_x, \quad D_y = \varepsilon_{yy} E_y, \quad D_z = \varepsilon_{zz} E_z. \quad (2.1)$$

Это означает, что когда вектор \mathbf{D} направлен вдоль одной из главных осей, то $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$. Если все главные компоненты тензора ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} различны по величине, то больше нет направлений, в которых векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} были бы коллинеарны.

Поскольку ϵ_{ij}^{-1} обладает той же симметрией, что и ϵ_{ij} , то в системе координат, совпадающей с главными осями тензора ϵ_{ij} , тензор ϵ_{ij}^{-1} будет также иметь диагональный вид.

Выбрав систему координат, совпадающую с главными осями тензора ϵ_{ij} и раскрывая определитель (1.12), получим следующее дисперсионное уравнение:

$$n^2 (\epsilon_{xx} n_x^2 + \epsilon_{yy} n_y^2 + \epsilon_{zz} n_z^2) - [n_x^2 \epsilon_{xx} (\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + n_y^2 \epsilon_{yy} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) + n_z^2 \epsilon_{zz} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})] + \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} = 0, \quad (2.2)$$

называемое *уравнением Френеля*. Напомним, что в уравнении (2.2) компоненты тензора ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} являются функциями частоты. В некоторых кристаллах функциями частоты являются также направления главных осей тензора ϵ_{ij} («дисперсия осей»).

Если рассматривать распространение монохроматической волны с фиксированной частотой ω , то уравнение Френеля является квадратным уравнением относительно квадрата показателя преломления n^2 . Поэтому каждому заданному направлению $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ соответствуют два различных абсолютных значения волнового числа $k = \omega n/c$, т. е. имеются две нормальные волны, распространяющиеся с разными фазовыми скоростями. Когда, например, волна распространяется вдоль главной оси z , в уравнении Френеля нужно положить $n_x = n_y = 0$, $n_z = n$. Оно упростится и примет вид

$$n^4 - n^2 (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) + \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} = 0.$$

Отсюда для нормальных волн находим два значения показателей преломления $n_1^2 = \epsilon_{xx}$, $n_2^2 = \epsilon_{yy}$.

Нормальные волны в кристаллах отличаются не только фазовыми скоростями, но и поляризацией. Чтобы показать это, удобно ввести систему координат, в которой ось z' направлена вдоль вектора \mathbf{n} ; в этой системе $D_{z'} = 0$. Из уравнений (1.4) получаем $\mathbf{D} = n^2 \mathbf{E} - \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})$ или

$$D_{x'} = n^2 E_{x'}, \quad D_{y'} = n^2 E_{y'}. \quad (2.3)$$

С учетом материального уравнения (1.10), не приводя тензор ϵ_{ij}^{-1} к диагональному виду, запишем (2.3) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n^2} - \epsilon_{x'x'}^{-1} \right) D_{x'} - \epsilon_{x'y'}^{-1} D_{y'} &= 0, \\ \left(\frac{1}{n^2} - \epsilon_{y'y'}^{-1} \right) D_{y'} - \epsilon_{y'x'}^{-1} D_{x'} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Поскольку компоненты тензора ε_{ij}^{-1} действительны, то и множитель поляризации

$$\rho_{1,2} = \frac{D_{x'}}{D_{y'}} = \frac{\varepsilon_{x'y'}^{-1}}{n_{1,2}^{-2} - \varepsilon_{x'x'}^{-1}} = \frac{n_{1,2}^{-2} - \varepsilon_{y'y'}^{-1}}{\varepsilon_{y'x'}^{-1}} \quad (2.5)$$

есть действительная величина.

Таким образом, в анизотропной неактивной среде нормальные волны поляризованы линейно. Всякая волна другой поляризации в анизотропной среде расщепляется на две линейно-поляризованные волны, фазовые скорости которых в общем случае различны.

Напомним, что в изотропной среде возможно распространение волн произвольной поляризации, поскольку фазовые скорости волн с любым направлением вектора \mathbf{D} одинаковы; сложение двух линейно-поляризованных волн в этих условиях может привести к возникновению волны с линейной, круговой или эллиптической поляризацией (см. § 6 гл. I). В кристаллах же в общем случае, в отличие от изотропной среды, волн с круговой или эллиптической поляризацией не существует.

Покажем, что векторы \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 двух нормальных волн взаимно ортогональны, т. е.

$$(\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2) = D_{x',1} D_{x',2} + D_{y',1} D_{y',2} = 0.$$

Используя выражение (2.5) и симметрию тензора $\varepsilon_{x'y'}^{-1} = \varepsilon_{y'x'}^{-1}$, сведем условие ортогональности к виду

$$\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} = \varepsilon_{x'x'}^{-1} + \varepsilon_{y'y'}^{-1}.$$

В том, что последнее соотношение выполняется, нетрудно убедиться, приравняв нулю определитель системы (2.4):

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 - \frac{1}{n^2} (\varepsilon_{x'x'}^{-1} + \varepsilon_{y'y'}^{-1}) - \varepsilon_{x'y'}^{-1} \varepsilon_{y'x'}^{-1} + \varepsilon_{x'x'}^{-1} \varepsilon_{y'y'}^{-1} = 0.$$

Это — квадратное уравнение относительно $1/n^2$, и условие ортогональности векторов \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 является очевидным следствием соотношений, связывающих корни данного уравнения.

Существует наглядный графический метод определения направлений векторов \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 при распространении волны вдоль произвольного вектора \mathbf{n} . Воспользуемся выражением для плотности энергии электрического поля $W_E = (\mathbf{E}\mathbf{D})/8\pi$, которое в главных осях тензора ε_{ij} можно записать в следующем виде:

$$\frac{x^2}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y^2}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z^2}{\varepsilon_{zz}} = 1, \quad (2.6)$$

где $(x, y, z) = \mathbf{D}\sqrt{8\pi W_E}$. Уравнение (2.6) описывает так называемый эллипсоид волновых нормалей.

Пересечем эллипсоид плоскостью, проходящей через его центр и перпендикулярной вектору \mathbf{n} (рис. 3.3). В сечении получится эллипс, направления главных осей которого соответствуют направлениям векторов \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 двух линейно-поляризованных волн, распространяющихся в кристалле вдоль вектора \mathbf{n} . Длины полуосей эллипса определяют величины показателей преломления этих нормальных волн.

При фиксированном \mathbf{n} нормальным волнам могут соответствовать различные значения лучевого вектора \mathbf{s} . В силу тождественности форм дисперсионных соотношений (1.12) и (1.13) получаем для \mathbf{s} уравнение, аналогичное (2.2), которое определяет поверхность лучевых векторов:

$$s^2 (\varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} s_x^2 + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} s_y^2 + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} s_z^2) - [s_x^2 (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + s_y^2 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + s_z^2 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] + 1 = 0. \quad (2.7)$$

Форма уравнения (2.7) отлична от (2.2), потому что роль ε_{ij} здесь играет тензор ε_{ij}^{-1} ; в главных осях

$$\varepsilon_{xx}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_{xx}}, \quad \varepsilon_{yy}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_{yy}}, \quad \varepsilon_{zz}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_{zz}}.$$

Как нетрудно видеть, переход от (2.2) к (2.7) совершается заменой n_i^2 на s_i^2 , ε_{ij} на ε_{ij}^{-1} и умножением полученного таким образом уравнения на $\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz}$.

Из дисперсионного уравнения (2.7) следует, что в анизотропном кристалле энергия нормальных волн распространяется вдоль лучей с разными лучевыми векторами и различными групповыми скоростями.

Покажем, что направление лучевого вектора каждой волны совпадает с направлением групповой скорости. Рассмотрим распространение одной из нормальных волн. Пусть направление вектора \mathbf{E} характеризуется единичным вектором \mathbf{e} , так что

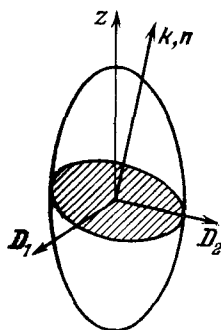
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = eE(\mathbf{r}). \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в волновое уравнение (1.5), получим

$$[k [k\mathbf{e}]] + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon} \mathbf{e} = k(k\mathbf{e}) - (k\mathbf{k})\mathbf{e} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon} \mathbf{e} = 0. \quad (2.9)$$

Умножим (2.9) скалярно на \mathbf{e} :

$$(k\mathbf{k}) - (k\mathbf{e})^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{e} \hat{\varepsilon} \mathbf{e} = 0. \quad (2.10)$$



3.3. Тензорный эллипсоид $\varepsilon_{ik}^{-1} x_i x_k$.

Дифференцируя (2.10) по k , получим

$$2k - 2(ke)e - \left(\frac{2\omega}{c^2} e\hat{\varepsilon}e + \frac{\omega^2}{c^2} e \frac{d\hat{\varepsilon}}{d\omega} e \right) \frac{d\omega}{dk} = 0,$$

затем находим выражение для вектора групповой скорости

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{[e[ke]]}{\left(\frac{\omega}{c^2} e\hat{\varepsilon}e + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} e \frac{d\hat{\varepsilon}}{d\omega} e \right)}. \quad (2.11)$$

Вектор e параллелен E , а вектор $[ke]$ параллелен вектору H ; следовательно, направления векторов $[e[ke]]$ и s совпадают. Таким образом, групповая скорость в кристалле направлена вдоль лучевого вектора s .

Практически мы всегда имеем дело не с плоскими волнами, а с возмущениями, ограниченными в пространстве, с волновыми пучками. Покажем, что ограниченный пучок будет распространяться по направлению лучевого вектора. Мы будем рассматривать волновые пучки, поперечные размеры которых много больше длины волны или, что то же самое, угловая расходимость которых мала (см. гл. VIII). Такой пучок можно представить как «почти плоскую волну»:

$$E = A(r) \exp(ikr), \quad (2.12)$$

где $A(r)$ — медленно изменяющаяся в пространстве векторная амплитуда, для которой

$$|dA/dr| \ll k|A|. \quad (2.13)$$

Задача состоит в том, чтобы с помощью условия (2.13) получить более простое («укороченное») уравнение, описывающее распространение пучка. Предположим, что поляризация пучка соответствует поляризации одной из нормальных волн

$$A(r) \approx eA(r). \quad (2.14)$$

Используем уравнение (1.3), в котором $\text{rot rot } E$ запишем в виде

$$\begin{aligned} [\nabla[\nabla E]] &= [\nabla[\nabla e]] A e^{ikr} = [\nabla e^{ikr}[\nabla e]] A + i[\nabla[ke]] A e^{ikr} = \\ &= i e^{ikr} [k[\nabla e]] A + e^{ikr} [\nabla[\nabla e]] A + i e^{ikr} [\nabla[ke]] A - [k[ke]] A e^{ikr}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Подставляя (2.14) в (2.15), пренебрегая вторыми производными от медленно изменяющейся амплитуды (членом $\exp(ikr) [\nabla[\nabla e]] A$), получим уравнение

$$i[k[\nabla e]] A + i[\nabla[ke]] A - \left\{ [k[ke]] + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon}e \right\} A = 0. \quad (2.16)$$

Выражение в фигурных скобках в (2.16) обращается в нуль согласно уравнению (2.9). Умножая уравнение (2.16) скалярно на e

и упрощая полученное соотношение:

$$e [k [\nabla e]] + e [\nabla [ke]] = -2 [e [ke]] \nabla, \quad (2.17)$$

придем к следующему уравнению:

$$[e [ke]] \nabla A = 0. \quad (2.18)$$

Укороченное уравнение (2.18) описывает распространение волнового пучка в анизотропной среде без учета дифракции и диссипации энергии. Из него следует, что амплитуда волны остается постоянной в направлении, определяемом вектором $[e[ke]] \parallel s$. Таким образом, волновой пучок в анизотропной среде в первом приближении распространяется без изменения формы в направлении лучевого вектора. Учет вторых производных амплитуды в уравнении (2.18) соответствует учету дифракционных явлений, которые будут рассмотрены в гл. VIII.

§ 3. Оптические свойства кристаллов

В зависимости от структуры кристаллических сред и симметрии тензора диэлектрической проницаемости кристаллы можно разделить на 3 группы: кубические, одноосные, двуосные.

В кубических кристаллах $\epsilon_{ij}(\omega) = \epsilon(\omega)\delta_{ij}$, т. е. $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$, при этом направления главных осей произвольны и кристаллы оптически изотропны. Нужно заметить, однако, что учет пространственной дисперсии приводит к оптической анизотропии кубических кристаллов.

В одноосных кристаллах одна из главных осей тензора ϵ_{ij} совпадает с осью симметрии кристалла — оптической осью; направления других главных осей произвольны. Две из трех компонент тензора при этом одинаковы. Пусть, например,

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_{\parallel}, \quad \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp}. \quad (3.1)$$

Тогда уравнение Френеля (2.2) упрощается и приводится к виду

$$(n^2 - \epsilon_{\perp}) [\epsilon_{\parallel} n_z^2 + \epsilon_{\perp} (n_x^2 + n_y^2) - \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}] = 0.$$

Уравнение четвертого порядка распадается на два уравнения второго порядка

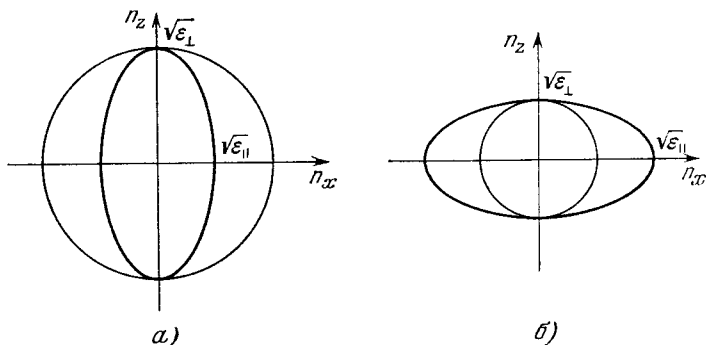
$$n^2 = \epsilon_{\perp}, \quad (3.2)$$

$$\frac{n_x^2}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{n_y^2}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{n_z^2}{\epsilon_{\perp}} = 1. \quad (3.3)$$

Соответственно поверхность волновых векторов распадается на две отдельные поверхности: сферу (3.2) и эллипсоид вращения (3.3). По оси n_z сфера касается эллипсоида. Если $\epsilon_{\perp} > \epsilon_{\parallel}$, то эллипсоид лежит внутри сферы — кристалл «оптически отрицателен».

Если $\varepsilon_{\parallel} > \varepsilon_{\perp}$, то сфера находится внутри эллипсоида, и кристалл «оптически положитель» (рис. 3.4).

Точечный источник, помещенный в однородную анизотропную среду, будет излучать две расходящиеся волны. Волна со сферическими фронтами называется обыкновенной. У второй (необыкновенной) волны фронты представляют собой совокупность вложенных эллипсоидов вращения с общей осью и центром.



3.4. Волновые поверхности в одноосном кристалле. а) Отрицательный кристалл, б) положительный кристалл.

Когда рассматриваются плоские волны, бегущие вдоль фиксированного направления, значения показателей преломления для обыкновенной и необыкновенной волн определяются из уравнений (3.2), (3.3). Пусть направление распространения обеих волн составляет угол θ с оптической осью, т. е. $n_z = n \cos \theta$; положим $n_y = n \sin \theta$, $n_x = 0$. В этом случае находим

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}, \quad (3.4)$$

$$n_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}}. \quad (3.5)$$

Фазовая скорость обыкновенной волны не зависит от направления распространения; фазовая скорость необыкновенной волны, напротив, есть функция угла θ .

В оптически отрицательных кристаллах фазовая скорость обыкновенной волны меньше, чем фазовая скорость необыкновенной (поскольку $n_{\perp} > n_{\parallel}$); в положительном кристалле — наоборот. Когда направление распространения совпадает с оптической осью ($\theta = 0$), из (3.5) получаем $n_1 = n_2 = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$, т. е. фазовые скорости одинаковы.

Свойства лучевых поверхностей одноосных кристаллов можно исследовать, упростив с помощью (3.1) общее уравнение (2.7):

$$(s^2 \varepsilon_{\perp} - 1) [\varepsilon_{\parallel} (s_x^2 + s_y^2) + \varepsilon_{\perp} s_z^2 - 1] = 0.$$

Поскольку форма волновой и лучевой поверхностей для обыкновенной волны одна и та же (сферическая) и показатель преломления не зависит от направления распространения, то направления групповой и фазовой скоростей обыкновенной волны совпадают. Соответственно совпадают направления лучевого и волнового векторов.

Найдем направление групповой скорости и лучевого вектора необыкновенной волны. Согласно определению $v_{\text{гр}} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$; неявная связь между ω и \mathbf{k} дается уравнением (3.3), которое удобно переписать в виде

$$\frac{k_x^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{k_y^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{k_z^2}{\varepsilon_{\perp}} = \frac{\omega^2(\mathbf{k})}{c^2} \quad (3.6)$$

Для простоты (без уменьшения общности в случае одноосных кристаллов) будем считать, что вектор \mathbf{k} лежит в плоскости y, z , и положим в (3.6) $k_x = 0$. Угол θ' между лучом и оптической осью определится выражением:

$$\text{tg } \theta' = \frac{v_{\text{гр}, y}}{v_{\text{гр}, z}} = \frac{\partial\omega/\partial k_y}{\partial\omega/\partial k_z}.$$

Дифференцируя неявную функцию (3.6) по k_y и k_z , найдем

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_y} = \frac{c^2}{\omega} \frac{k_y}{\varepsilon_{\parallel}}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial k_z} = \frac{c^2}{\omega} \frac{k_z}{\varepsilon_{\perp}},$$

отсюда

$$\text{tg } \theta' = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{k_y}{k_z} = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \text{tg } \theta. \quad (3.7)$$

Как следует из приведенных рассуждений, вектор \mathbf{s} лежит в той же плоскости, что оптическая ось и вектор \mathbf{n} .

Векторы \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{n} , \mathbf{s} в любой волне компланарны. В необыкновенной волне \mathbf{n} и \mathbf{s} не совпадают, но лежат в главном сечении, т. е. в плоскости, проходящей через оптическую ось и вектор \mathbf{n} . Поэтому векторы \mathbf{E}_2 и \mathbf{D}_2 в необыкновенной волне (в соответствии с построением на рис. 3.3) также лежат в главном сечении. Векторы \mathbf{D}_1 в обыкновенной и \mathbf{D}_2 в необыкновенной волнах ортогональны. Поэтому векторы \mathbf{E}_1 и \mathbf{D}_1 обыкновенной волны совершают колебания в плоскости, перпендикулярной главному сечению.

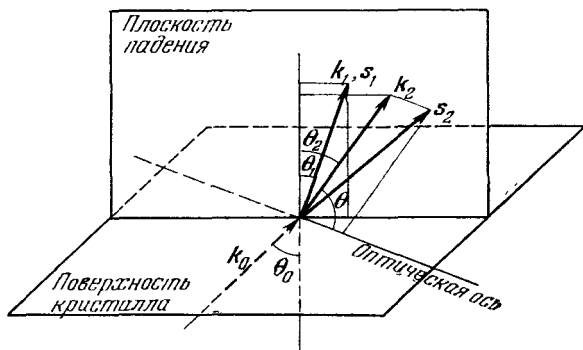
При падении плоской волны на поверхность кристалла волновые векторы преломленных и отраженных волн должны лежать в плоскости падения. Вследствие анизотропии в кристалле возникнут две преломленные волны (явление «двойного лучепреломления»). Направления распространения лучей не совпадают с вектором \mathbf{n} и, в общем случае, лежат вне плоскости падения.

В одноосном кристалле возникают обыкновенная и необыкновенная преломленные волны. Лучевой вектор обыкновенной волны

совпадает с волновым вектором и лежит в плоскости падения. Лучевой вектор необыкновенной волны не лежит в плоскости падения.

Направления распространения преломленных волн в кристалле находятся из условий непрерывности поля на границе раздела (см. § 7 гл. I). Условия непрерывности выполняются только в том случае, если компоненты волновых векторов, параллельные границе раздела, у падающей, отраженной и преломленной волн равны.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть плоская волна падает из вакуума на плоскую поверхность одноосного кристалла (рис. 3.5). Угол падения равен θ_0 . Оптическая



3.5. Преломление плоской волны на границе раздела одноосного кристалла.

ось кристалла параллельна его поверхности и составляет угол α с плоскостью падения. Найдем направления обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле.

Из граничных условий следует

$$k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1, \quad k_0 \sin \theta_0 = k_2 \sin \theta_2.$$

Здесь k_1 , θ_1 — волновой вектор и угол преломления обыкновенной волны, k_2 и θ_2 — те же параметры для необыкновенной волны.

Из первого соотношения получаем

$$\sin \theta_1 = \frac{k_1}{k_0} \sin \theta_0 = \sqrt{\epsilon_{\perp}} \sin \theta_0.$$

Поскольку направления волнового и лучевого векторов в обыкновенной волне совпадают, то обыкновенный луч лежит в плоскости падения и составляет угол θ_1 с нормалью к границе.

Для необыкновенной волны $n_2 \sin \theta_2 = \sin \theta_0$. В этом случае нужно воспользоваться формулой (3.5) и учесть, что косинус угла θ

между волновым вектором и оптической осью кристалла равен

$$\cos \theta = \cos \alpha \sin \theta_2.$$

Исключая из этих трех соотношений величины n_2 и θ , получим

$$\sin^2 \theta_2 = \frac{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta_0}{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} + (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \sin^2 \theta_0 \cos^2 \alpha}. \quad (3.8)$$

Волновой вектор необыкновенной волны также расположен в плоскости падения и составляет угол θ_2 с нормалью к границе. Однако необыкновенный луч уже не лежит в плоскости падения, а лежит в плоскости, проходящей через k_2 и оптическую ось. Согласно (3.7)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta' &= \\ &= \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \operatorname{tg} \theta = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_2 \cos^2 \alpha}}{\sin \theta_2 \cos \alpha}. \end{aligned}$$

С учетом (3.8) получим

$$\operatorname{tg} \theta' = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp} - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \alpha}}{\sin \theta_0 \cos \alpha}}. \quad (3.9)$$

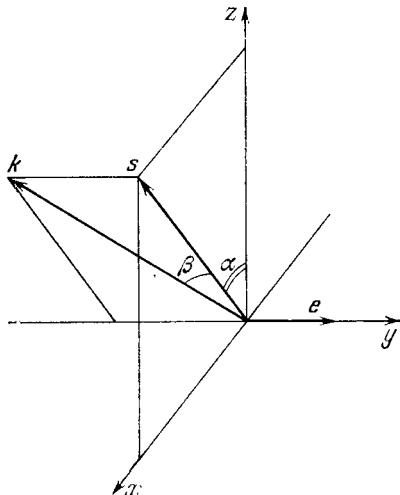
Если на плоскую границу анизотропной среды, занимающей полупространство $z > 0$, падает не плоская волна, а волновой пучок с вектором поляризации, близким к одной из нормальных волн (обыкновенной или необыкновенной), то распространение пучка лучей будет приближенно описываться уравнением (2.18). Выберем систему координат, указанную на рис. 3.6 так, чтобы лучевой вектор s лежал в плоскости x, z . Тогда дифференциальный оператор, стоящий в (2.18), можно записать в виде

$$[e | ke] \nabla A = k \cos \beta \left[\frac{\partial A}{\partial z} \cos \alpha + \frac{\partial A}{\partial x} \sin \alpha \right]. \quad (3.10)$$

Мы обозначили через β угол между лучевым и волновым векторами (вектор k может не лежать в плоскости x, z), через α — угол между лучевым вектором и осью z и воспользовались тем, что

$$(k \nabla) = k \cos \beta \cos \alpha \frac{\partial}{\partial z} + k \cos \beta \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} - k \sin \beta \frac{\partial}{\partial y},$$

$$(ke)(e \nabla) = -k \sin \beta \frac{\partial}{\partial y}.$$



3.6. К определению направления распространения преломленного волнового пучка.

В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial A}{\partial x} = 0. \tag{3.11}$$

Решение уравнения (3.11) имеет вид

$$A(x, y, z) = A_0(x - z \operatorname{tg} \alpha, y), \tag{3.12}$$

где $A_0(x, y)$ задается на границе среды при $z = 0$. Из решения видно, что поперечный профиль пучка в рассматриваемом приближении не изменяется; пучок, как целое, распространяется вдоль лучевого вектора под углом α к нормали (оси z).

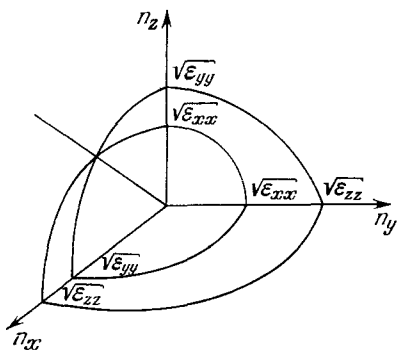
Перейдем теперь к рассмотрению двусосных кристаллов, у которых все три компоненты тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ различны. Для изучения закономерностей распространения волн в таких кристаллах необходимо исследовать уравнение Френеля (2.2) в общем виде. Представление о свойствах волновой поверхности можно получить, рассматривая ее сечения плоскостями координат.

Положив в уравнении Френеля $n_z = 0$, получим

$$(n^2 - \epsilon_{zz})(\epsilon_{xx}n_x^2 + \epsilon_{yy}n_y^2 - \epsilon_{xx}\epsilon_{yy}) = 0,$$

$$n^2 = \epsilon_{zz}, \quad \frac{n_x^2}{\epsilon_{yy}} + \frac{n_y^2}{\epsilon_{xx}} = 1.$$

Контур сечения в плоскости n_x, n_y состоит из круга и эллипса. Если для определенности принять, что $\epsilon_{xx} < \epsilon_{yy} < \epsilon_{zz}$, то эллипс



3.7. Волновые поверхности в двусосном кристалле.

будет лежать внутри круга (рис. 3.7). В плоскостях n_x, n_z и n_y, n_z сечения также состоят из эллипса и круга, но в плоскости n_y, n_z эллипс лежит вне круга, а в плоскости n_x, n_z эллипс и круг пересекаются. Таким образом, поверхность волновых векторов является самопересекающейся поверхностью четвертого порядка. Поверхность имеет 4 особые точки, расположенные по одной в каждом квадранте плоскости n_x, n_z . Две оси, попарно соединяющие противоположные особые точки, называются *оптическими осями* или *бинормальями кристалла*.

В направлении оптических осей n имеет одно значение, и фазовые скорости волн совпадают.

Лучевая поверхность (2.7) имеет аналогичные свойства. Это — также самопересекающаяся поверхность четвертого порядка.

Две оси, проходящие через противоположные особые точки лучевой поверхности, являются «оптическими осями лучей»; они называются *бирадиалами*.

Направления бинормалей и бирадиалей не совпадают. Если луч направлен вдоль бирадиали, групповые скорости обеих волн равны. Направления n и s совпадают только для волн, распространяющихся вдоль главных диэлектрических осей. Если n лежит в какой-либо из координатных плоскостей, то s лежит в той же плоскости, но составляет некоторый угол с n . Исключение представляет случай, когда направление n совпадает с бинормалью. В этом случае данному n соответствует бесконечное множество лучевых векторов, образующих коническую поверхность (конус внутренней конической рефракции). Точно так же в окрестности особой точки лучевой поверхности имеется бесконечное множество направлений волновых векторов, образующих конус внешней конической рефракции.

При падении плоской волны на поверхность двуосного кристалла обе преломленные волны будут необыкновенными, поскольку соответствующие им лучи не лежат, вообще говоря, в плоскости падения.

§ 4. Магнитоактивные среды. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в постоянном магнитном поле

Магнитоактивными называются анизотропные гиротропные среды, приобретающие эти свойства под действием постоянного магнитного поля. Тензоры диэлектрической или магнитной проницаемости таких сред несимметричны. В магнитоактивной непоглощающей среде тензор ϵ_{ij} эрмитов:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^* \quad (4.1)$$

Действительная и мнимая части ϵ_{ij} должны быть соответственно симметричной и антисимметричной:

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon'_{ji}, \quad \epsilon''_{ij} = -\epsilon''_{ji} \quad (4.2)$$

Таковыми же свойствами обладает и μ_{ij} .

Если тензором является диэлектрическая проницаемость, а μ — скаляр, то среда называется *гиروهлектрической*. Примером может служить плазма, находящаяся в постоянном магнитном поле (земная ионосфера, солнечная корона и т. п.). Если тензором является магнитная проницаемость, то среда называется *гиромагнитной*. Важный пример такой среды — феррит, помещенный в постоянное магнитное поле (см. § 8).

Перейдем к рассмотрению свойств магнитоактивной плазмы. Для того чтобы в явном виде получить выражение для тензора диэлектрической проницаемости, нужно рассчитать движение

электронов, ионов и нейтральных молекул плазмы в присутствии постоянного магнитного поля и переменных волновых полей. При анализе произвольных движений в плазме исходными являются уравнения электромагнитного поля и кинетические уравнения для электронов, ионов и нейтральных молекул. Подобная система уравнений очень сложна, и поэтому большое значение приобретают различные приближенные решения динамической задачи.

Если частота волны удовлетворяет условию

$$\omega \gg \Omega = eH_0/Mc \quad (4.3)$$

(где Ω — собственная частота вращения ионов в магнитном поле H_0 , M — масса иона), то при определении поляризации среды можно считать ионы неподвижными и учитывать только движение электронов. Волны, для которых условие (4.3) выполнено, будем называть высокочастотными. Если, кроме того,

$$\omega \gg \nu \quad (4.4)$$

(где ν — эффективная частота соударений электронов с молекулами и ионами), то токи смещения в среде должны преобладать над токами проводимости. При выполнении условия (4.4) в поле электромагнитной волны происходит пространственное разделение зарядов; это приводит к возникновению сильных электрических полей, стремящихся сблизить заряды. В результате возникают колебания плотности заряда с частотой

$$\omega_p = \sqrt{4\pi Ne^2/m}.$$

В низкочастотной области, когда $\omega \ll \Omega$, плазму можно рассматривать как электрически нейтральный проводящий газ, находящийся в электромагнитном поле. Механическое движение плазмы описывается в этом случае как движение сплошной проводящей среды (жидкости или газа) с помощью обычных гидродинамических переменных: плотности, скорости, давления (§ 7).

Иногда роль ионов оказывается существенной и при более высоких частотах. Например, при поперечном по отношению к внешнему магнитному полю распространении волн влиянием ионов можно пренебречь только при условии

$$\omega \gg \sqrt{\omega_H \Omega} = \sqrt{M/m} \Omega,$$

где $\omega_H = eH_0/mc$ — собственная частота вращения электронов в магнитном поле H_0 .

Будем считать, что условия (4.3), (4.4) выполнены и плазма представляет собой однородный ионизованный газ, в единице объема которого содержится N электронов. Условие (4.4) позволяет пренебречь токами проводимости и считать, что полный ток в среде

равен току смещения, т. е.

$$\mathbf{j} = -Nev = -i\omega\mathbf{P}. \quad (4.5)$$

Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что все величины изменяются по времени по гармоническому закону $\exp(-i\omega t)$. Поскольку $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, с учетом (4.5) получим

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} - i\frac{4\pi Ne}{\omega}\mathbf{v} = \mathbf{E} - u\mathbf{V}. \quad (4.6)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$u = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \mathbf{V} = i\frac{m\omega}{e}\mathbf{v}. \quad (4.7)$$

Для определения величины \mathbf{V} (а следовательно, и компонент тензора диэлектрической проницаемости) воспользуемся уравнением движения электрона

$$m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}_0] \quad (4.8)$$

(\mathbf{H}_0 — это внешнее постоянное магнитное поле, создающее анизотропию плазмы). С учетом (4.7) уравнение (4.8) перепишем в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{E} - i[\mathbf{V}\mathbf{W}], \quad (4.9)$$

где $\mathbf{W} = \omega_H\mathbf{H}_0/\omega|\mathbf{H}_0|$, $|\mathbf{W}| = \omega_H/\omega$. Выберем систему координат, ось z которой совпадает с направлением \mathbf{H}_0 . Тогда величина $\mathbf{W} = (0, 0, \omega_H/\omega)$, и мы получим следующую систему уравнений для определения компонент вектора \mathbf{V} :

$$V_x = E_x - iWV_y, \quad V_y = E_y + iWV_x, \quad V_z = E_z. \quad (4.10)$$

Записав с помощью (4.10) компоненты вектора $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ и подставляя их в уравнение (4.6), получим выражение для компонент вектора \mathbf{D} :

$$\begin{aligned} D_x &= E_x - uV_x = \left(1 - \frac{u}{1-W^2}\right)E_x + i\frac{uW}{1-W^2}E_y, \\ D_y &= E_y - uV_y = -i\frac{uW}{1-W^2}E_x + \left(1 - \frac{u}{1-W^2}\right)E_y, \\ D_z &= (1-u)E_z. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Отсюда следует, что тензор диэлектрической проницаемости в выбранной системе координат имеет вид

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{u}{1-W^2} & i\frac{uW}{1-W^2} & 0 \\ -i\frac{uW}{1-W^2} & 1 - \frac{u}{1-W^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-u \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Тензор ϵ_{ij} не является действительным (несмотря на то, что поглощение при выводе (4.12) не учитывалось). Его компоненты связаны соотношением $\epsilon_{ij}(\omega) = \epsilon_{ji}^*(\omega)$, т. е. тензор эрмитов.

В направлении оси z векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} параллельны, но в плоскости x, y векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} параллельны только для волн, имеющих круговую поляризацию. Действительно, из (4.11) получаем

$$D_x \pm iD_y = (\epsilon_{xx} \mp i\epsilon_{xy}) (E_x \pm iE_y). \quad (4.13)$$

Комбинация $\epsilon_{xx} \mp i\epsilon_{xy}$, как следует из (4.12), является действительной величиной. Отсюда можно сделать заключение, что в магнитоактивной среде нормальные волны имеют круговую (или эллиптическую) поляризацию.

Согласно (4.12) с учетом введенных обозначений (4.7)

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \\ \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = i\kappa &= i \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}, \\ \epsilon_{zz} = \epsilon_{\parallel} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из формул (4.14) видно, что второй характерной особенностью магнитоактивной среды является существование резонансных явлений при $\omega \rightarrow \omega_H$. Действительно, при $\omega \rightarrow \omega_H$ некоторые компоненты тензора ϵ_{ij} обращаются в бесконечность. Необходимо, однако, иметь в виду, что при расчете тензора ϵ_{ij} мы не учитывали диссипативных процессов.

Если учесть потери энергии из-за соударений увлекаемых волной электронов с ионами и нейтральными молекулами, то компоненты тензора диэлектрической проницаемости будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} &= 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega + iv)}{\omega [(\omega + iv)^2 - \omega_H^2]}, \\ \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} &= i \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega (\omega + \omega_H + iv) (\omega - \omega_H + iv)}, \\ \epsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega + iv)}. \end{aligned}$$

Тензор диэлектрической проницаемости в этом случае может быть представлен в виде

$$\epsilon_{ij}^{\kappa} = \epsilon_{ij} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{ij},$$

где $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^*$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}^*$. С учетом соударений резонансные явления обычно проявляются в резком возрастании поглощения «необыкновенной» волны, направление вращения вектора \mathbf{E} в которой совпадает с направлением вращения электронов в магнитном поле \mathbf{H}_0 . Когда частота приближается к резонансной, радиус орбиты электрона увеличивается; следовательно, электрон проходит в среде больший путь и число его соударений с ионами и молекулами за единицу времени возрастает.

Если учесть движение ионов в поле волны, пренебрегая соударениями, то компоненты тензора примут вид

$$\begin{aligned}\epsilon_{\perp} &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_H^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \Omega^2}, \\ \kappa &= \frac{\omega_{pe}^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)} + \frac{\omega_{pi}^2 \Omega}{\omega(\omega^2 - \Omega^2)}.\end{aligned}\quad (4.15)$$

В высокочастотном приближении, когда $\omega^2 \gg \Omega^2$, из (4.15) следует прежний результат (4.14). В пределе низких частот имеем ($\omega^2 \ll \Omega^2$)

$$\epsilon_{\perp} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_H^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega^2} = 1 + \frac{4\pi N e^2}{H_0^2} (m + M).$$

Если считать, что плазма полностью ионизована, то $N(m + M) = \rho$, где ρ — плотность среды. Следовательно,

$$\epsilon_{\perp} = 1 + \frac{4\pi c^2}{H_0^2} \rho.\quad (4.16)$$

§ 5. Распространение плоских высокочастотных волн в магнитоактивной плазме

Рассмотрим особенности распространения плоских волн в магнитоактивной плазме. Будем считать, что постоянное магнитное поле, создающее анизотропию среды, направлено по оси z ; вектор \mathbf{k} лежит в плоскости y, z и составляет угол θ с осью z . При этом

$$k_x = 0, \quad k_y = k \sin \theta, \quad k_z = k \cos \theta.$$

Чтобы определить показатель преломления магнитоактивной плазмы, воспользуемся системой уравнений (1.11) для компонент вектора \mathbf{E} , следующей из уравнений Максвелла

$$(n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{ij}) E_j = 0.$$

Принимая во внимание конкретный вид тензора ϵ_{ij} , определяемого формулами (4.12), (4.14), перепишем эту систему в явной

форме:

$$\begin{aligned} (n^2 - \varepsilon_{\perp}) E_x - i\kappa E_y &= 0, \\ i\kappa E_x + (n^2 \cos^2 \theta - \varepsilon_{\perp}) E_y - n^2 \sin \theta \cos \theta E_z &= 0, \\ -n^2 \sin \theta \cos \theta E_y + (n^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_{\parallel}) E_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из условия равенства нулю определителя системы (5.1) получается квадратное уравнение $an^4 - bn^2 + c = 0$ для квадрата показателя преломления. Мы для краткости используем обозначения

$$a = \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta, \quad b = (\varepsilon_{\perp}^2 - \kappa^2) \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} (1 + \cos^2 \theta), \quad c = \varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\perp}^2 - \kappa^2).$$

Решение этого уравнения удобно записать в форме

$$n^2 = 1 - \frac{2(a - b + c)}{2a - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Подставляя сюда выражения для ε_{\parallel} , ε_{\perp} , κ через безразмерные величины $u = \omega_p^2/\omega^2$, $W = \omega_H/\omega$ (которые следуют из формулы (4.14)), получим

$$n_{o,e}^2 = 1 - \frac{2u(1-u)}{2(1-u) - W^2 \sin^2 \theta \pm \sqrt{W^4 \sin^4 \theta + 4W^2(1-u)^2 \cos^2 \theta}}. \quad (5.2)$$

Поскольку u и W есть функции частоты, уравнение (5.2) определяет дисперсию в магнитоактивной плазме. Каждому значению частоты соответствуют два значения показателя преломления. Таким образом, при фиксированной частоте в плазме могут распространяться две волны — «обыкновенная» и «необыкновенная», фазовые скорости которых определяются величинами n_o и n_e . Показатели преломления обеих волн являются функциями угла θ .

Перейдем теперь к выяснению характера поляризации нормальных волн в магнитоактивной плазме. Для этого необходимо найти множитель поляризации, т. е. отношение компонент вектора \mathbf{E} в плоскости фронта волны.

Выберем систему координат, ось z которой совпадает с вектором \mathbf{k} , а вектор постоянного магнитного поля \mathbf{H}_0 лежит в плоскости y, z и составляет угол θ с осью z (рис. 3.8).

3.8. К выводу выражения для множителей поляризации $\mathcal{P}_{1,2}$ нормальных волн в ионосфере.

Из системы уравнений (1.11) для компонент вектора \mathbf{E} с учетом того, что $\mathbf{n} = (0, 0, n)$, имеем

$$\begin{aligned} (n^2 - \varepsilon_{xx})E_x - \varepsilon_{xy}E_y - \varepsilon_{xz}E_z &= 0, \\ -\varepsilon_{yx}E_x + (n^2 - \varepsilon_{yy})E_y - \varepsilon_{yz}E_z &= 0, \\ \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z &= 0. \end{aligned}$$

Здесь n^2 — уже известная величина, полученная из условия равенства нулю определителя этой системы. Поэтому независимыми являются лишь два уравнения. Исключая, например, E_z из первого и третьего уравнений, получим связь между компонентами E_x, E_y :

$$\left(n^2 - \epsilon_{xx} + \frac{|\epsilon_{xz}|^2}{\epsilon_{zz}} \right) E_x = \left(\epsilon_{xy} - \frac{\epsilon_{xz}\epsilon_{zy}}{\epsilon_{zz}} \right) E_y. \quad (5.3)$$

Явный вид (4.14) тензора диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{kl} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & i\kappa & 0 \\ -i\kappa & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$$

определен нами в другой системе координат (обозначим ее оси как x', y', z'); ось z' этой системы направлена вдоль магнитного поля \mathbf{H}_0 . Нам нужно найти компоненты тензора в системе x, y, z , получающейся поворотом на угол θ вокруг оси x (в плоскости y, z). Старые и новые координаты связаны соотношениями

$$x = x', \quad y = y' \cos \theta + z' \sin \theta, \quad z = -y' \sin \theta + z' \cos \theta.$$

Компоненты тензора преобразуются по формулам

$$\epsilon_{ij} = a_{ik} a_{jl} \epsilon_{kl}, \quad a_{ik} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, найдем

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{\perp}, & \epsilon_{yy} &= \epsilon_{\perp} \cos^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \sin^2 \theta, \\ \epsilon_{xy} &= -\epsilon_{yx} = i\kappa \cos \theta, & \epsilon_{yz} &= \epsilon_{zy} = (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) \sin \theta \cos \theta, \\ \epsilon_{zx} &= -\epsilon_{xz} = i\kappa \sin \theta, & \epsilon_{zz} &= \epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Подставляя в формулу (5.3) найденные значения компонент тензора и решение (5.2), получим для множителя поляризации следующее выражение:

$$\mathcal{P}_{1,2} = \frac{E_x}{E_y} = -i \frac{2W(1-u) \cos \theta}{W^2 \sin^2 \theta \mp \sqrt{W^4 \sin^4 \theta + 4W^2(1-u)^2 \cos^2 \theta}}. \quad (5.4)$$

Из выражения (5.4) следует, что поляризация обыкновенной и необыкновенной волн — эллиптическая. Направления вращения векторов \mathbf{E} в плоскости фронта в обыкновенной и необыкновенной волнах противоположны.

Произведение множителей поляризации равно единице: $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = 1$. Это означает, что оси эллипсов взаимно перпендикулярны.

Отметим, что в выражениях для показателя преломления (5.2) и множителя поляризации (5.4) частота входит в неявном виде, через величины u и W , т. е. показатель преломления и множитель

поляризации зависят от отношения плазменной частоты к частоте волны ($u = \omega_p^2/\omega^2$) и гиромангнитной частоты к частоте волны ($W = \omega_H/\omega$).

Если $\omega \gg \omega_H$ и $W \ll 1$, то влияние магнитного поля должно быть слабым. Действительно, в этом случае

$$n_{o,e}^2 \approx 1 - \frac{u}{1 \mp W \cos \theta} \approx 1 - u \mp uW \cos \theta,$$

$$\mathcal{P}_{1,2} = \pm i.$$

Однако учет малых членов $\pm uW \cos \theta$ в выражении для показателя преломления обыкновенной и необыкновенной волн оказывается существенным, когда электромагнитная волна в замагниченной плазме проходит достаточно большой путь. Именно учет этих малых членов позволяет описать, например, поворот плоскости поляризации волны (эффект Фарадея), наблюдаемый в магнитоактивной плазме.

Пусть передатчик излучает линейно-поляризованную волну с вектором \mathbf{E} , параллельным оси x . Предположим, что частота волны много больше плазменной частоты ($\omega \gg \omega_p$); при этом $n_{o,e}^2 > 0$ — обыкновенная и необыкновенная волны свободно распространяются. На расстоянии l от излучателя поле можно представить как сумму полей двух волн с круговой поляризацией:

$$E_{1x} = \frac{1}{2} E_0 \exp(ik_0 n_o l), \quad E_{1y} = \frac{i}{2} E_0 \exp(ik_0 n_o l),$$

$$E_{2x} = \frac{1}{2} E_0 \exp(ik_0 n_e l), \quad E_{2y} = -\frac{i}{2} E_0 \exp(ik_0 n_e l).$$

Используя тождественную запись

$$n_o = \frac{n_o + n_e}{2} + \frac{n_o - n_e}{2}, \quad n_e = \frac{n_o + n_e}{2} - \frac{n_o - n_e}{2},$$

получим

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = E_0 \cos\left(k_0 \frac{n_o - n_e}{2} l\right) \exp\left(ik_0 \frac{n_o + n_e}{2} l\right),$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = -E_0 \sin\left(k_0 \frac{n_o - n_e}{2} l\right) \exp\left(ik_0 \frac{n_o + n_e}{2} l\right). \quad (5.5)$$

Отсюда следует, что множитель поляризации

$$\mathcal{P} = \frac{E_x}{E_y} = -\operatorname{ctg}\left(k_0 \frac{n_o - n_e}{2} l\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} k_0 l u W \cos \theta\right) = \operatorname{ctg} \alpha$$

действителен, т. е. поляризация по-прежнему линейная, но ее плоскость повернута относительно оси x на угол

$$\alpha = \frac{1}{2} k_0 l u W \cos \theta. \quad (5.6)$$

Величина этого угла зависит от длины пройденного волной пути, частоты волны и параметров плазмы.

В земной ионосфере (как уже говорилось в гл. II) электронная концентрация является функцией высоты, $N = N(z)$. При удалении от поверхности она увеличивается до некоторого максимального значения, а затем убывает. Используя эффект Фарадея, можно по измерениям углов поворота плоскости поляризации судить об интегральной электронной концентрации. Пусть, например, передатчик, создающий линейно-поляризованную волну, находится на высоте h . Излучаемый сигнал регистрируется приемником, расположенным на поверхности Земли. В этом случае плоскость поляризации будет повернута на угол

$$\alpha = \frac{1}{2} W \cos \theta k_0 \int_0^h u dz = \frac{2\pi^2 e^3 H_0 \cos \theta}{m^2 c^2 \omega^2} \int_0^h N(z) dz. \quad (5.7)$$

В соответствии с формулой (5.7) по измерению α можно определить полное число электронов в столбе воздуха высотой h и площадью поперечного сечения 1 см^2 . Однако угол α может быть большим 2π . Чтобы устранить неоднозначность, нужно излучать одновременно две волны одинаковой поляризации, имеющие достаточно близкие частоты ω_1 и ω_2 . Тогда

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi^2 e^3 H_0 \cos \theta}{m^2 c^2} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \int_0^h N(z) dz.$$

Частоты ω_1 , ω_2 следует выбирать таким образом, чтобы выполнялось условие $\Delta\alpha < \pi$.

Перейдем к рассмотрению общей задачи, когда условие $\omega \gg \omega_H$ не выполнено и влияние магнитного поля нельзя считать слабым. При $\omega \gtrsim \omega_H$ показатель преломления и множитель поляризации сильно изменяются в зависимости от направления распространения и анизотропия весьма существенна. Рассмотрим различные частные случаи.

1. Пусть волна распространяется вдоль магнитного поля ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$, продольное распространение). Из общих формул (5.2) и (5.4) при $\theta = 0$ получаем

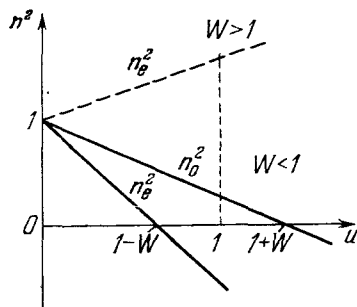
$$n_o^2 = 1 - \frac{u}{1+W} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_H)},$$

$$n_e^2 = 1 - \frac{u}{1-W} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_H)}, \quad \mathcal{P} = \pm i.$$

Поляризация обыкновенной и необыкновенной волн — круговая. Обе волны — поперечные, т. е. $E_z = 0$. Направление вращения вектора \mathbf{E} в плоскости фронта волны для необыкновенной волны

такое же, как направление вращения электрона в магнитном поле. Это, как уже отмечалось, приводит к резонансному поглощению необыкновенной волны на частотах $\omega \rightarrow \omega_H$.

На рис. 3.9 изображена зависимость $n_{o,e}^2$ от u при $\theta = 0$. Показатель преломления необыкновенной волны n_e обращается в нуль при условии $u = 1 - W$, обыкновенной волны n_o — при условии $u = 1 + W$. Как уже указывалось



3.9. Зависимость квадратов показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн в ионосфере от $u = \omega_p^2/\omega^2$ при продольном распространении.

в гл. II, обращение в нуль показателя преломления соответствует условию отражения волны от неоднородной среды (более подробно см. гл. VII). Если частота волны $\omega > \omega_H$ ($W < 1$), то обе волны могут отразиться от плазмы. Когда $\omega < \omega_H$, необыкновенная волна отразиться не может, поскольку для значения $W > 1$ условие $u \geq 1 - W$ соответствует отрицательным значениям u или отрицательным значениям электронной концентрации, что физически бессмысленно.

2. Рассмотрим случай поперечного распространения. Пусть вектор \mathbf{k} направлен по оси y и перпендикулярен магнитному полю \mathbf{H}_0 , ориентированному вдоль оси z . Полагая в формуле (5.2) $\sin \theta = 1$, $\cos \theta \neq 0$, получим

$$n_o^2 = 1 - u = \epsilon_{\parallel}, \quad n_e^2 = 1 - \frac{u(1-u)}{1-u-W^2}.$$

Система уравнений (5.1) для компонент вектора \mathbf{E} при $\theta = 0$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} (n^2 - \epsilon_{\perp}) E_x - ixE_y &= 0, \\ ixE_x - \epsilon_{\perp} E_y &= 0, \\ (n^2 - \epsilon_{\parallel}) E_z &= 0. \end{aligned}$$

Для обыкновенной волны нетрудно показать, что определитель системы, образованной двумя первыми уравнениями, отличен от нуля, т. е. $E_x = E_y = 0$. Вектор \mathbf{E} будет направлен вдоль \mathbf{H}_0 (оси z); этим объясняется совпадение n_o^2 со значением показателя преломления для изотропной плазмы. Для волны необыкновенной эти уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{u(1-u)}{1-u-W^2} - \frac{1-u-W^2}{1-W^2} \right] E_x - i \frac{uW}{1-W^2} E_y &= 0, \\ iuWE_x - (1-u-W^2) E_y &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку определитель этой системы равен нулю, компоненты E_x , E_y отличны от нуля; они связаны соотношением

$$E_x/E_y = -i\epsilon_{\perp}/\kappa.$$

Это означает, что необыкновенная волна эллиптически-поляризована в плоскости x , y .

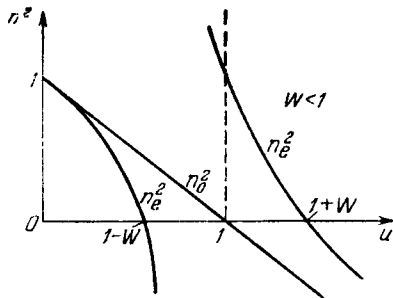
На рис. 3.10 изображена зависимость $n_{o,e}^2$ от u при $\theta = \pi/2$. В этом случае показатель преломления необыкновенной волны при $W < 1$ обращается в нуль при $u = 1 \mp W$, обыкновенной — при $u = 1$.

3. При $0 < \theta < \pi/2$ обыкновенная и необыкновенная волны имеют эллиптическую поляризацию. Показатели преломления обращаются в нуль при тех же значениях u , что и в случае поперечного распространения (т. е. $n_o = 0$ при $u = 1$; $n_e = 0$ при $u = 1 \mp W$).

Графики, представляющие $n_{o,e}^2$ как функцию от u , удобны для выяснения зависимости условий распространения волн от электронной концентрации, поскольку $u = \omega_p^2/\omega^2 = (4\pi e^2/m\omega^2) N(z)$. В неоднородной ионосфере, в которой $N = N(z)$, фазовые скорости и параметры эллипсов поляризации непрерывно изменяются по мере распространения. Если частота $\omega > \omega_H$, то необыкновенная волна отражается от уровня электронной концентрации, соответствующего значению $(4\pi e^2/m\omega^2) N_1 = 1 - \omega_H/\omega$. Обыкновенная волна распространяется выше и отражается при условии $(4\pi e^2/m\omega^2) N_2 = 1$. При малых углах θ от уровня $u = 1$ происходит не полное, а частичное отражение обыкновенной волны. Часть энергии при этом распространяется выше и отражается от уровня $(4\pi e^2/m\omega^2) N_3 = 1 + \omega_H/\omega$. При $\theta = 0$ обыкновенная волна полностью отражается при условии $(4\pi e^2/m\omega^2) N_3 = 1 + \omega_H/\omega$.

В неоднородной ионосфере условия отражения выполняются для целого ряда частот. Это обстоятельство используется для исследования ионосферы радиометодами.

Метод импульсного зондирования ионосферы состоит в следующем. С помощью импульсного передатчика, работающего обычно в диапазоне частот 1—20 МГц, изучаются импульсы длительностью 100—200 мкс. Импульсы, отраженные от ионосферы, регистрируются приемником, настроенным синхронно с передатчиком.



3.10. Зависимость квадратов показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн в ионосфере от $u = \omega_p^2/\omega^2$ при поперечном распространении.

С выхода приемника импульсы подаются на вертикальные пластины осциллографа. На его горизонтальные пластины подаются ждущая развертка (запускаемая модулятором передатчика) и метки времени. На экране осциллографа наблюдаются импульс передатчика и импульсы, отраженные от ионосферы.

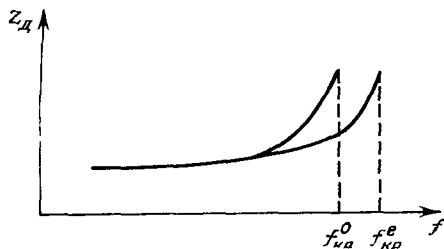
При увеличении частоты увеличиваются высота отражения и время запаздывания принятого сигнала относительно зондирующего импульса. Это происходит до тех пор, пока отражение не будет происходить от уровня максимальной электронной концентрации. При дальнейшем увеличении частоты сигнал уже не может отразиться от ионосферы. Максимальная частота волны, которая еще может быть отражена ионосферой, называется *критической частотой*. Время группового запаздывания равно

$$t_{\text{гр}} = 2t_0 + 2 \int_0^{z^{(n=0)}} \frac{dz}{v_{\text{гр}}(z)}.$$

Здесь t_0 — время распространения сигнала до начала ионизованного слоя, $v_{\text{гр}}$ — групповая скорость волны в ионосфере. Расстояние

$$z_{\text{д}} = c \frac{t_{\text{гр}}}{2} = ct_0 + c \int_0^{z^{(n=0)}} \frac{dz}{v_{\text{гр}}(z)}$$

называют *действующей высотой*. Зависимость действующей высоты от частоты сигнала называется *высотно-частотной характеристикой* или *ионограммой* (рис. 3.11).



3.11. Схематическое изображение высотно-частотной характеристики.

Имея ионограмму, можно получить следующие сведения об ионосфере:

1. Определить максимальную электронную концентрацию

$$N_{\text{max}} = \frac{\pi m}{e^2} (f_{\text{кр}}^o)^2 \approx \approx 1,24 \cdot 10^4 (f_{\text{кр}}^o)^2 \text{ (МГц)}.$$

2. Определить гиромангнитную частоту и, зная величину магнитного поля Земли, найти отношение e/m , т. е. определить тип частиц, движущихся в ионосфере. Из условия отражения необыкновенной волны имеем

$$\left(\frac{f_{\text{кр}}^o}{f_{\text{кр}}^e} \right)^2 = 1 - \frac{f_H}{f_{\text{кр}}^e}, \quad f_H = \frac{(f_{\text{кр}}^e)^2 - (f_{\text{кр}}^o)^2}{f_{\text{кр}}^e}.$$

3. Определить распределение электронной концентрации по высоте от начала слоя до его максимума.

В настоящее время ионосфера исследуется с помощью автоматических панорамных станций. Синхронное изменение частоты, на которой работают передатчик и приемник, производится автоматически. На горизонтальные пластины осциллографа подаются частотные метки, на вертикальные — метки высот; отраженный сигнал подается на управляющий электрод трубки. В результате на экране осциллографа получается ионограмма. Измерения во всем диапазоне частот осуществляются за 20—30 с.

Исследование регулярной ионосферы методом импульсного зондирования позволило установить все ее основные свойства.

§ 6. Распространение свистящих атмосфериков и спиральных волн в металлах

Если частота электромагнитной волны удовлетворяет условиям

$$\omega^2 \ll \omega_H^2 \cos^2 \theta, \quad \omega^2 \ll \omega_p^2, \quad (6.1)$$

но велика по сравнению с частотой Ω (см. выражение (4.3)), то движением ионов по-прежнему можно пренебречь и пользоваться формулой (5.2) для показателя преломления.

Неравенства (6.1) эквивалентны условиям $u \gg 1$, $W^2 \cos^2 \theta \gg 1$. Если, кроме того, принять, что гироманнитная частота много меньше плазменной $\omega_H^2 \ll \omega_p^2$ (или $W^2 \ll u$), то, пренебрегая в (5.2) малыми членами, получим

$$n_o^2 = \frac{u}{W \cos \theta} = \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_H \cos \theta}, \quad n_e^2 = - \frac{u}{W \cos \theta}. \quad (6.2)$$

Волна необыкновенная в этом случае не распространяется, поскольку $n_e^2 < 0$. Показатель преломления обыкновенной волны $n_o^2 \gg 1$.

Дисперсионное уравнение $k^2 = n^2 \omega^2 / c^2$ для обыкновенной волны имеет вид

$$\omega = \frac{c^2 \omega_H \cdot \cos \theta}{\omega_p^2} k^2. \quad (6.3)$$

Чтобы предположения, сделанные при выводе формул (6.2), не нарушались, угол θ должен быть достаточно малым. Поэтому обыкновенная волна, для которой закон дисперсии определяется выражением (6.3), распространяется вдоль силовых линий магнитного поля. Если в среде имеется импульсный сигнал, то его высокочастотные составляющие распространяются с большей скоростью, чем низкочастотные. Подобное явление наблюдается в

земной ионосфере при распространении импульсов, генерируемых при разряде молний. Эти импульсы движутся вдоль силовых линий магнитного поля Земли, проникают через ионосферу и достигают снова поверхности Земли в магнитосопряженной точке. Широкополосный приемник фиксирует сначала более высокие частоты, а потом — более низкие. Эти сигналы называются *свистящими атмосфериками*.

Подобный механизм распространения наблюдается также для спиральных волн или геликонов в твердотельной плазме (металлах), находящейся в магнитном поле.

Временную задержку сигналов различной частоты можно определить, вычислив групповую скорость свистящих атмосфериков

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = (2c^2 \omega_H \cos \theta / \omega_p^2) k.$$

Воспользовавшись формулой (6.3), получим

$$v_{\text{гр}} = \frac{2c}{\omega_p} \sqrt{\omega \omega_H \cos \theta}.$$

Время группового запаздывания равно

$$t_{\text{гр}} = \int \frac{ds}{v_{\text{гр}}} = \frac{1}{2c} \int \frac{\omega_p ds}{\sqrt{\omega \omega_H \cos \theta}}.$$

Здесь интеграл берется по пути, проходимому сигналом. Измеряя запаздывание сигнала, можно найти распределение электронной концентрации в ионосфере.

§ 7. Распространение низкочастотных и магнитогидродинамических волн в плазме

Для описания распространения волн в магнитоактивной плазме в предельном случае низких частот ($\omega \ll \Omega$) можно использовать магнитогидродинамическое приближение, т. е. рассматривать плазму как электрически нейтральный проводящий газ, находящийся в электромагнитном поле. При этом токами смещения допустимо пренебречь. Механическое движение плазмы в этом случае описывается как движение сплошной проводящей среды с помощью обычных гидродинамических переменных: плотности ρ , скорости \mathbf{u} и давления p . Переменные ρ , \mathbf{u} , p связаны (см. § 2 гл. I) уравнениями непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{u} = 0,$$

движения

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = - \text{grad } p + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}]$$

и адиабатическим уравнением состояния

$$p = p_0 (\rho/\rho_0)^\gamma.$$

Система гидродинамических уравнений не замкнута, так как содержит переменные \mathbf{j} и \mathbf{H} , характеризующие электромагнитное поле.

Пренебрегая токами смещения, запишем уравнения для электромагнитного поля в плазме в следующем виде:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uH}] \right\}.$$

Последнее уравнение устанавливает связь между током проводимости в среде и полями \mathbf{E} и \mathbf{H} и представляет собой закон Ома для движущейся среды.

Если пренебречь потерями в среде и считать, что $\sigma \rightarrow \infty$, то нужно положить

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{uH}].$$

Тогда система уравнений, описывающих волновой процесс в плазме, будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{uH}], \quad (7.1)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (7.2)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}], \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{u} = 0, \quad (7.4)$$

$$p = p_0 (\rho/\rho_0)^\gamma. \quad (7.5)$$

Рассмотрим распространение волн малой амплитуды. Как и при изучении звуковых волн (§ 2 гл. I), положим

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p'. \quad (7.6)$$

Здесь \mathbf{H}_0 — внешнее постоянное магнитное поле; ρ_0, p_0 — равновесные значения плотности и давления. Малые добавки вызваны распространением электромагнитных (\mathbf{H}', \mathbf{E}) и механических (ρ', p', \mathbf{u}) возмущений. Когда волна отсутствует, $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{u} = 0$. Считаем, что

$$\frac{\mathbf{H}'}{\mathbf{H}_0}, \quad \frac{\rho'}{\rho_0}, \quad \frac{p'}{p_0} \sim \mu, \quad \mu \ll 1.$$

Подставляя (7.6) в систему уравнений (7.4) — (7.5) и удерживая только члены первого порядка малости по μ , получим

$$\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{u} \mathbf{H}_0], \quad \text{div} \mathbf{H}' = 0, \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{c_0^2}{\rho_0} \text{grad} \rho' - \frac{1}{4\pi\rho_0} [\mathbf{H}_0 \text{rot} \mathbf{H}'], \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \mathbf{u} = 0.$$

Здесь $c_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0$ — скорость звука. В последующих формулах штрих у переменных величин будем опускать.

Исследуем решения системы (7.7), пропорциональные $\exp\{-i(\omega t - kz)\}$, т. е. решения в виде плоских волн, бегущих в направлении оси z . В этом случае система уравнений (7.7) примет вид

$$\begin{aligned} -\omega \mathbf{H} &= [k [\mathbf{u} \mathbf{H}_0]], \quad (k \mathbf{H}) = 0, \\ -i\omega \mathbf{u} &= -\frac{c_0^2}{\omega} \text{grad} (k \mathbf{u}) - \frac{i}{4\pi\rho_0} [\mathbf{H}_0 [k \mathbf{H}]]. \end{aligned} \quad (7.8)$$

В последнем уравнении учтено, что $\rho' = \rho_0 (k \mathbf{u}) / \omega$.

Пусть вектор \mathbf{H}_0 лежит в плоскости y, z и составляет угол θ с осью z (рис. 3.12).

1. Рассмотрим вначале распространение волны, в которой вектор \mathbf{H} направлен по оси x . Тогда из первого и третьего уравнений (7.8) получим

$$-\frac{\omega}{k} H_x = H_0 u_x \cos \theta, \quad (7.9)$$

$$-\frac{\omega}{k} u_x = \frac{H_0 \cos \theta}{4\pi\rho_0} H_x, \quad (7.10)$$

$$u_y = u_z = 0.$$

Отсюда видно, что направление колебательной скорости частиц среды совпадает с направлением колебаний вектора \mathbf{H} .

Из формул (7.9) и (7.10) получим выражение для фазовой скорости

$$v_{\text{ф1}} = \frac{\omega}{k} = \frac{H_0 \cos \theta}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \quad (7.11)$$

3.12. К выводу дисперсионного уравнения для магнитогидродинамических волн с вектором \mathbf{H} , перпендикулярным плоскости k, \mathbf{H}_0 .

При отсутствии внешнего магнитного поля волны рассмотренного типа существовать не могут. Эти волны называют *собственно магнитогидродинамическими* или *альевновскими* волнами. Связь между ω и k в альевновской волне (дисперсионное уравнение) может быть записана в виде

$$\omega = \frac{(k \mathbf{H}_0)}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \quad (7.12)$$

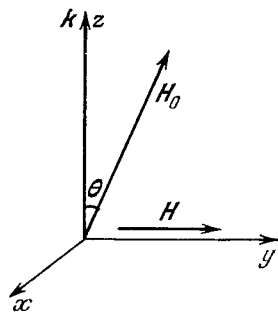
Отсюда следует, что

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}},$$

т. е. групповая скорость всегда направлена вдоль внешнего магнитного поля H_0 . В частных случаях имеем: при $\theta = 0$ $v_{ф} = v_{гр} = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$; при $\theta = \pi/2$ $v_{ф} = 0$. Таким образом, альвеновские волны являются поперечными волнами. Они представляют собой поперечные колебания силовых линий магнитного поля, которые «вморожены» в плазму и движутся вместе с ней.

2. Рассмотрим теперь волну, вектор H которой направлен по оси y , т. е. $H_x = H_z = 0$ (рис. 3.13). Уравнения (7.8), определяющие распространение возмущений, в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} -\frac{\omega}{k} H_y &= H_0 \cos \theta \cdot u_y - H_0 \sin \theta \cdot u_z, \\ -\frac{\omega}{k} u_y &= \frac{H_0 \cos \theta}{4\pi\rho_0} H_y, \\ -\frac{\omega}{k} u_z &= -\frac{c_0^2}{\omega} k u_z - \frac{H_0 \sin \theta}{4\pi\rho_0} H_y. \end{aligned} \quad (7.13)$$



3.13. К выводу дисперсионного уравнения для магнитогидродинамических волн с вектором H , лежащим в плоскости k, H_0 .

Исключая из системы уравнений (7.13) компоненты колебательной скорости u_y и u_z , получим

$$v_{ф} = \frac{H_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi\rho_0} \frac{v_{ф}}{v_{ф}^2 - c_0^2} + \frac{H_0^2 \cos^2 \theta}{4\pi\rho_0} \frac{1}{v_{ф}}$$

или

$$v_{ф}^4 - \left(c_0^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}\right) v_{ф}^2 + c_0^2 \frac{H_0^2 \cos^2 \theta}{4\pi\rho_0} = 0. \quad (7.14)$$

Мы получили уравнение второго порядка относительно $v_{ф}^2$. Это означает, что в направлении оси z могут распространяться две волны с различными фазовыми скоростями.

Рассмотрим два частных случая. Положим вначале $\theta = 0$. Из уравнения (7.14) находим значения

$$v_{ф2} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad v_{ф3} = c_0.$$

Для второй волны, используя (7.13), получим

$$u_{y2} = -\frac{H_y}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad u_{z2} = 0.$$

Как видно, рассмотренное возмущение — это поперечная магнито-гидродинамическая или альвеновская волна.

Для третьей волны из соотношения $\rho = \rho_0 (ku)/\omega$ и формул (7.13) найдем

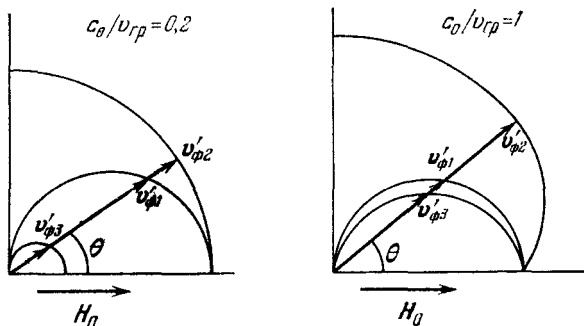
$$u_{z3} = \frac{c_0}{\rho_0} \rho, \quad u_{y3} = -\frac{c_0}{H_0} H_y, \quad u_{y3} = -\frac{H_0}{4\pi\rho_0 c_0} H_y.$$

Последние два равенства возможны только при $H_y = 0$, $u_{y3} = 0$. Следовательно, волна третьего типа — это обычная продольная звуковая волна.

При $\theta = \pi/2$, когда вектор H_0 направлен по оси y , из (7.14) получаем $v_{\phi 3} = 0$,

$$v_{\phi 2} = \sqrt{c_0^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}}, \quad u_y = 0, \quad u_z = \sqrt{c_0^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}} \frac{H_y}{H_0}.$$

Таким образом, рассмотренная волна является продольной магнитозвуковой волной, выражение для скорости которой содержит добавочный положительный член, определяемый величиной



3.14. Зависимость скоростей $v_{\phi 1, 2, 3}$ от угла θ .

магнитного поля. Волна является поперечной в электродинамическом и продольной в гидродинамическом смысле. Процесс колебаний можно рассматривать как периодическое сжатие и разрежение плазмы с вмороженным в нее магнитным полем.

Зависимость скоростей $v_{\phi 1, 2, 3}$ от угла θ между k и H_0 показана на рис. 3.14. Длина радиус-вектора от начала координат до соответствующей кривой, равна $v'_{\phi 1, 2, 3} = v_{\phi 1, 2, 3}/v_{gr1}$. Кривые приведены для двух значений отношения скорости звука к групповой скорости альвеновских волн $c_0/v_{gr1} = 0,2; 1$. Направление внешнего магнитного поля совпадает с осью абсцисс.

Итак, при $\theta = 0$ существуют две волны — продольная звуковая с $v_{\phi 3} = c_0$ и поперечная магнито-гидродинамическая (альве-

новская) волна с $v_{\phi 1} = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$. При $\theta = \pi/2$ также существуют две волны: альвеновская с $v_{\phi 1} = 0$, $v_{\text{гр}1} = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$ и магнито-звуковая $v_{\phi} = \sqrt{c_0^2 + H_0^2/4\pi\rho_0}$. В общем случае, при $0 < \theta < \pi/2$, распространяются три волны с фазовыми скоростями

$$v_{\phi 1} = \frac{H_0 \cos \theta}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$$

и $v_{\phi 2, 3}$, определяемыми из уравнения (7.14).

§ 8. Распространение электромагнитных волн в гиромагнитных средах (ферритах)

Ферриты — это ферромагнитные полупроводники и диэлектрики, обычная химическая формула которых MeOFe_2O_3 (Me — двухвалентный металл). Анизотропия феррита так же, как и в плазме, создается постоянным или медленно изменяющимся (по сравнению с полями распространяющихся в феррите волн) магнитным полем. При $H = 0$ магнитная проницаемость феррита — скалярная величина.

Вообще говоря, такое представление является приближенным. Феррит имеет кристаллическую структуру, и реальным ферритам свойственна кристаллографическая анизотропия, т. е. зависимость магнитных свойств от направления намагничивания относительно осей кристаллической решетки. Однако учет кристаллографической анизотропии не меняет вида тензора магнитной проницаемости, а изменяет лишь его компоненты. Поэтому мы будем считать, что в отсутствие внешнего магнитного поля феррит является средой изотропной.

Феноменологический способ нахождения компонент тензора основан на следующих представлениях. Как известно, молекулы феррита обладают магнитным моментом, имеющим спиновую природу. Структура феррита такова, что моменты отдельных молекул не компенсируются и единица объема среды обладает магнитным моментом M . Анизотропия создается прецессией магнитных диполей вокруг силовых линий магнитного поля.

Уравнение движения для M имеет вид

$$\frac{dM_{\text{эфф}}}{dt} = -\gamma [M_{\text{эфф}} H_{\text{эфф}}]. \quad (8.1)$$

Это — уравнение Ландау — Лифшица (1935 г.). Здесь $M_{\text{эфф}} = M_0 + M$ и $H_{\text{эфф}} = H_0 + H$. Использованы следующие обозначения: H_0 — постоянное поле, $\gamma = e/mc$ — гиромагнитное отношение для электрона, H — поле волны, распространяющейся в феррите, M_0 — постоянная намагниченность, совпадающая по на-

правлению с H_0 . Взаимное расположение векторов показано на рис. 3.15.

Будем считать, что $H \ll H_0$ и $M \ll M_0$. Тогда уравнение (8.1) примет вид

$$\frac{dM}{dt} + \gamma [MH_0] = -\gamma [M_0H]. \quad (8.2)$$

Предполагая гармоническую зависимость величин M , H от времени, $\sim \exp(-i\omega t)$, и переходя к записи по компонентам, получим

$$\begin{aligned} -i\omega M_x + \Omega M_y &= \gamma M_0 H_y, \\ -i\omega M_y - \Omega M_x &= -\gamma M_0 H_x, \\ -i\omega M_z &= 0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

3.15. Прецессия вектора намагниченности M вокруг H_0 .

Здесь $\Omega = \gamma |H_0|$. Отсюда находим величины M_x , M_y , M_z и, пользуясь материальным уравнением $B = H - 4\pi M = \hat{\mu}H$, определяем компоненты тензора $\hat{\mu}$:

$$\begin{aligned} \mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_{\perp} &= 1 + 4\pi \frac{M_0}{H_0} \frac{W^2}{1 - W^2}, \\ \mu_{xy} = \mu_{yx}^* &= i\kappa = i4\pi \frac{M_0}{H_0} \frac{W}{1 - W^2}, \\ \mu_{zz} = \mu_{\parallel} &= 1, \quad \mu_{xz} = \mu_{zx} = \mu_{yz} = \mu_{zy} = 0, \quad W = \Omega/\omega. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Тензор магнитной проницаемости феррита имеет такой же вид, как и тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле. Тензор $\hat{\mu}(\omega)$ — эрмитов, т. е. феррит является магнитоактивной средой. Нормальные волны в феррите должны иметь круговую или эллиптическую поляризацию. Компоненты тензора зависят от ω и H_0 . При частоте ω , близкой к Ω , должны наблюдаться резонансные явления.

Перейдем к изучению особенностей распространения электромагнитных волн в феррите. Уравнения Максвелла в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot } H &= -ik_0 \varepsilon E, \quad \text{rot } E = ik_0 \hat{\mu} H, \\ \text{div } E &= 0, \quad \text{div } B = 0. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Исключим отсюда переменную H . Из второго уравнения (8.5) следует $H = -(i/k_0) \hat{\mu}^{-1} \text{rot } E$, где $\hat{\mu}^{-1}$ — обратный тензор. Компоненты $\hat{\mu}^{-1}$ можно определить из уравнений, связывающих компоненты векторов B и H :

$$B_x = \mu_{\perp} H_x + i\kappa H_y, \quad B_y = -i\kappa H_x + \mu_{\perp} H_y, \quad B_z = \mu_{\parallel} H_z.$$

Решая эту систему относительно H_x, H_y, H_z , получим

$$H_x = M_{\perp} B_x + iKB_y, \quad H_y = -iKB_x + M_{\perp} B_y, \quad H_z = M_{\parallel} B_z.$$

Здесь мы обозначили $\mu_{xx}^{-1} = \mu_{yy}^{-1} = M_{\perp}$, $\mu_{xy}^{-1} = -\mu_{yx}^{-1} = iK$,

$$M_{\perp} = \frac{\mu_{\perp}}{\mu_{\perp}^2 - \kappa^2}, \quad K = -\frac{\kappa}{\mu_{\perp}^2 - \kappa^2}, \quad M_{\parallel} = \frac{1}{\mu_{\parallel}}. \quad (8.6)$$

Остальные компоненты обратного тензора ($\mu_{xz}^{-1}, \mu_{zx}^{-1}, \mu_{yz}^{-1}, \mu_{zy}^{-1}$) равны нулю.

Большинство ферритовых устройств, применяемых в технике сверхвысоких частот, представляют собой волноводы или резонаторы, содержащие намагниченные ферритовые образцы. При распространении в волноводах волны уже нельзя считать плоскими. Поэтому целесообразно найти из уравнений Максвелла уравнение для вектора \mathbf{E} , не делая заранее предположений о структуре распространяющихся волн.

Подставим в первое уравнение Максвелла (8.5) найденное выражение для \mathbf{H} . Это дает

$$k_0^2 \varepsilon \mathbf{E} = \text{rot}(\hat{\mu}^{-1} \text{rot} \mathbf{E}).$$

Проекция этого уравнения на ось x декартовой системы координат имеет вид

$$\varepsilon k_0^2 E_x = M_{\parallel} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + iK \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \\ - M_{\perp} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right).$$

Все члены, содержащие компоненту E_x , перенесем в левую часть и прибавим к обеим частям уравнения член $M_{\parallel} \partial^2 E_x / \partial x^2$. В результате получим

$$\left\{ \varepsilon k_0^2 + M_{\parallel} \Delta + (M_{\perp} - M_{\parallel}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} E_x = -iK \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[iK \frac{\partial}{\partial y} + (M_{\perp} - M_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial x} \right] E_z. \quad (8.7)$$

Здесь учтено, что $\text{div} \mathbf{E} = 0$ и, следовательно,

$$M_{\parallel} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) = -M_{\parallel} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z}.$$

Точно так же можно вывести уравнения для составляющих E_y, E_z :

$$\left\{ \varepsilon k_0^2 + M_{\parallel} \Delta + (M_{\perp} - M_{\parallel}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} E_y = \\ = iK \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[-iK \frac{\partial}{\partial x} + (M_{\perp} - M_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial y} \right] E_z, \quad (8.8)$$

$$\left\{ \varepsilon k_0^2 + M_{\parallel} \Delta \right\} E_z = iK \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right]. \quad (8.9)$$

Таким образом, мы пришли к системе из трех уравнений, из которой в принципе можно определить все компоненты поля E в гиромангнитной среде.

Если ввести новые переменные

$$Q_{1,2} = E_x \pm iE_y,$$

а затем из полученной системы уравнений исключить $Q_{1,2}$ или E_z , то окажется, что вид уравнений для $Q_{1,2}$ и E_z одинаков. Но уравнения получаются четвертого порядка. В некоторых частных случаях (когда, например, поле E зависит от z по гармоническому закону) они могут распасться на два уравнения второго порядка. Решение последних определяет суммарное поле $E = E_1 + E_2$, где E_1 и E_2 — напряженности поля двух волн, распространяющихся с разными фазовыми скоростями.

Рассмотрим случай, когда вдоль оси z распространяется волна с электрическим вектором, лежащим в плоскости x, y (поперечная электрическая волна, $E_z = 0$). Решение уравнений (8.7) — (8.9) ищем в виде

$$E(x, y, z) = E(x, y) e^{ihz}.$$

Первые два уравнения примут следующую форму:

$$\begin{aligned} \varepsilon k_0^2 E_x + M_{\parallel} \Delta_{\perp} E_x - h^2 M_{\perp} E_x &= iKh^2 E_y, \\ \varepsilon k_0^2 E_y + M_{\parallel} \Delta_{\perp} E_y - h^2 M_{\perp} E_y &= -iKh^2 E_x. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что $\Delta_{\perp} E_x = \Delta_{\perp} E_y = 0$. Действительно, поскольку $\operatorname{div} E = 0$,

$$\Delta_{\perp} E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right] = 0.$$

Обращение в нуль выражения, стоящего в квадратных скобках, есть следствие уравнения (8.9) для поперечно электрической ($E_z = 0$) волны. Аналогичным способом можно убедиться, что равенство $\Delta_{\perp} E_y = 0$ также выполняется.

Система уравнений, описывающая распространение поперечно-электрической волны в феррите, будет иметь вид

$$\begin{aligned} (\varepsilon k_0^2 - M_{\perp} h^2) E_x - iKh^2 E_y &= 0, \\ iKh^2 E_x + (\varepsilon k_0^2 - M_{\perp} h^2) E_y &= 0. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Приравняв нулю определитель этой системы, получим биквадратное уравнение для постоянной распространения

$$(M_{\perp}^2 - K^2) h^4 - 2\varepsilon k_0^2 M_{\perp} h^2 + \varepsilon^2 k_0^4 = 0.$$

Решая его, найдем

$$h_1^2 = \frac{\varepsilon k_0^2}{M_{\perp} - K}, \quad h_2^2 = \frac{\varepsilon k_0^2}{M_{\perp} + K}.$$

С помощью соотношений (8.6) между компонентами тензоров $\hat{\mu}$ и $\hat{\mu}^{-1}$ получим

$$h_{1,2} = k_0 \sqrt{\varepsilon(\mu_{\perp} \pm \kappa)}.$$

Таким образом, в направлении оси z распространяются две поперечно-электрические волны с разными фазовыми скоростями

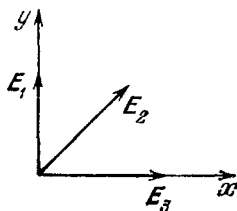
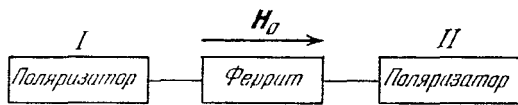
$$v_{\phi 1} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\mu_{\perp} + \kappa)}}, \quad v_{\phi 2} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\mu_{\perp} - \kappa)}}. \quad (8.11)$$

Определим поляризацию этих волн. Для этого подставим в уравнения (8.10) вычисленные значения h^2 и найдем отношение E_x и E_y . Оно оказывается равным

$$\mathcal{P}_{1,2} = \frac{E_x}{E_y} = \pm i, \quad (8.12)$$

т. е. волны имеют правую и левую круговую поляризацию.

Линейно-поляризованная волна в продольно-намагниченном феррите расщепляется на две волны, поляризованные по кругу.



3.16. Схема вентиляльной системы с ферритом.

Скорости распространения этих волн различны, поэтому при прохождении некоторого расстояния l плоскость поляризации оказывается повернутой на угол, пропорциональный l (эффект Фарадея). Направление вращения определяется относительно оси, совпадающей с \mathbf{H}_0 , и не зависит от направления распространения. Фазовая скорость волн зависит от величины постоянного магнитного поля, и h_1 может сильно отличаться от h_2 .

Это свойство феррита используется при конструировании вентиляльных систем. Пусть поляризатор I создает линейно-поляризованную волну с вектором E_1 , направленным по оси y (рис. 3.16). Пройдя ферритовый образец (циркулятор), волна изменяет положение плоскости поляризации на $\pi/4$ (E_2). Поляризатор II свободно

пропускает волны этой поляризации. Если же волна идет из поляризатора II , то циркулятор повернет плоскость поляризации еще раз на $\pi/4$ и вектор E_z будет направлен по оси x .

Если в среде имеется затухание, то h_1 и h_2 комплексны и суперпозиция двух поляризованных по кругу волн даст волну, эллиптически-поляризованную. Эффект Фарадея будет проявляться в этом случае в непрерывном изменении ориентации осей эллипса поляризации по мере распространения вдоль оси z . Угол поворота плоскости поляризации будет равен

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{2} (\operatorname{Re} h_1 - \operatorname{Re} h_2) \right] z.$$

Второе интересное явление, происходящее в продольно-намагниченном феррите, это — почти полное поглощение «правой» волны при резонансной частоте, определяемой значением постоянного магнитного поля.

Найдем связь между компонентами E и H при распространении поперечно-электрической волны в продольно-намагниченном феррите. Воспользуемся уравнением Максвелла

$$H = -\frac{i}{k_0} \hat{\mu}^{-1} \operatorname{rot} E.$$

Отсюда

$$H_x = -\frac{i}{k_0} \left\{ M_{\perp} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + iK \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \right\}.$$

Мы рассматриваем поперечно-электрическую волну ($E_z = 0$); зависимость от z берется в виде $e^{i(hz)}$, поэтому

$$H_x = \frac{i}{k_0} \{ ihM_{\perp} E_y + hKE_x \}.$$

Учитывая, что $E_x/E_y = \pm i$, найдем

$$\frac{H_x}{E_x} = \frac{i}{k_0} h (K \pm M_{\perp}).$$

Точно так же можно определить отношения других компонент магнитного и электрического полей. Они выражаются через величину $i\sqrt{\epsilon/(\mu_{\perp} \pm \kappa)}$, являющуюся импедансом правой и левой волн в продольно-намагниченном феррите.

ВОЛНЫ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

В этой главе рассматриваются задачи распространения волн в структурах, свойства которых изменяются в пространстве по периодическому закону. Примерами таких структур могут служить кристаллические твердые тела. Как известно, существует дальний порядок в расположении узлов решетки; это приводит к пространственно-неоднородному распределению массы и потенциала электрического поля в кристаллах. Важную роль в технических приложениях играют искусственно созданные периодические структуры типа многослойных световых или акустических фильтров. В радиотехнике находят применение длинные цепочки из емкостей, индуктивностей и сопротивлений, расположенных в определенном порядке, а также замедляющие системы. В теории нелинейных волн обсуждаются задачи распространения волн в периодических структурах, неоднородность которых наведена полем другой волны. Эти задачи актуальны, например, в связи с проблемой создания оптических резонаторов для коротковолновых лазеров.

Распространение волн в средах с периодически изменяющимися свойствами сопровождается появлением новых качественных особенностей, наиболее заметных в тех случаях, когда длина волны становится сравнимой с характерным пространственным периодом изменения свойств системы. Несмотря на физические различия, волновые процессы различной природы в периодических системах часто описываются похожими уравнениями. Мы рассмотрим несколько задач, которые, с одной стороны, представляются наиболее простыми, а с другой — позволяют сделать достаточно общие выводы и продемонстрировать используемые здесь математические приемы расчета.

§ 1. Сплошная среда со слабыми периодическими неоднородностями

Рассмотрим среду, в которой скорость распространения волны является периодической функцией какой-либо одной пространственной координаты (например, x):

$$c^2 = c_0^2 [1 - \mu \cos(2Kx)], \quad (1.1)$$

где $K = 2\pi/\Lambda$ (Λ — пространственный период решетки). Считаем, что неоднородность мала, $\mu \ll 1$. В этом случае уравнение для волны, распространяющейся вдоль оси x , можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} [1 + \mu \cos(2Kx)] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1.2)$$

Предположим, что зависимость от времени — гармоническая: $u = A(x) \exp(i\omega t)$. Для амплитуды A имеем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + k^2 [1 + \mu \cos(2Kx)] A = 0, \quad k^2 = \omega^2/c_0^2. \quad (1.3)$$

Используя метод последовательных приближений по малому параметру μ , ищем решение в виде

$$A = A_0 + \mu A_1, \quad \omega = \omega_0 + \mu \omega_1 \text{ или } k^2 = k_0^2 + \mu 2k_0 k_1, \quad (1.4)$$

где $k_0 = \omega_0/c_0$, $k_1 = \omega_1/c_0$. Запись частоты ω в виде суммы невозмущенного значения ω_0 и поправки первого приближения ω_1 принята из-за того, что в периодически-неоднородной среде существует характерный внутренний масштаб $a = \pi/K$; это может привести к появлению дисперсии.

Подставим (1.4) в (1.3); собирая отдельно члены порядка μ^0 и μ^1 , получим уравнения

$$\frac{d^2 A_0}{dx^2} + k_0^2 A_0 = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{d^2 A_1}{dx^2} + k_0^2 A_1 = -k_0 A_0 (2k_1 + k_0 \cos 2Kx). \quad (1.6)$$

С помощью решения уравнения (1.5) нулевого приближения

$$A_0 = B_1 e^{ik_0 x} + B_2 e^{-ik_0 x}$$

правая часть (1.6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} -k_0 B_1 \left[2k_1 e^{ik_0 x} + \frac{1}{2} k_0 \exp[i(2K + k_0)x] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} k_0 \exp[-i(2K - k_0)x] \right] - k_0 B_2 \left[2k_1 e^{-ik_0 x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} k_0 \exp[-i(2K + k_0)x] + \frac{1}{2} k_0 \exp[i(2K - k_0)x] \right]. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Важно заметить, что при анализе уравнения первого приближения (1.6) с правой частью (1.7) мы сталкиваемся с двумя физически различными ситуациями. Если $k_0 \neq K$, решение имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 = c_1 \exp(ik_0 x) + c_2 \exp(-ik_0 x) + \\ + ik_1 x (B_1 \exp(ik_0 x) - B_2 \exp(-ik_0 x)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k_0^2}{8K(K+k_0)} [B_1 \exp [i(2K+k_0)x] + B_2 \exp [-i(2K+k_0)x]] + \\
& + \frac{k_0^2}{8K(K-k_0)} [B_1 \exp [-i(2K-k_0)x] + B_2 \exp [i(2K-k_0)x]]. \quad (1.8)
\end{aligned}$$

В формуле (1.8) наряду с осциллирующими членами имеется слагаемое, модуль которого неограниченно растет с увеличением x . Поскольку мы интересуемся волнами с ограниченной амплитудой, это слагаемое должно быть обращено в нуль, что возможно только при $k_1 = 0$. Таким образом, при $k_0 \neq K$ поправка к частоте в неоднородной среде отсутствует и $\omega = c_0 k_0$.

Если же $k_0 = K$, правая часть (1.7) приводится к форме

$$\begin{aligned}
& -k_0 \left[2k_1 B_1 + \frac{k_0}{2} B_2 \right] e^{ik_0 x} - k_0 \left[2k_1 B_2 + \frac{k_0}{2} B_1 \right] e^{-ik_0 x} - \\
& - \frac{k_0^2}{2} (B_1 e^{i3k_0 x} + B_2 e^{-i3k_0 x}). \quad (1.9)
\end{aligned}$$

Выражение (1.9) также содержит «резонансные» члены, пропорциональные $\exp(\pm ik_0 x)$, которые приводят к появлению в решении слагаемых, растущих линейно с увеличением координаты x . Чтобы решение было ограниченным, нужно потребовать

$$2k_1 B_1 + \frac{k_0}{2} B_2 = 0, \quad \frac{k_0}{2} B_1 + 2k_1 B_2 = 0.$$

Эта система линейных (относительно B_1, B_2) уравнений имеет нетривиальное решение при условии

$$\begin{vmatrix} 2k_1 & \frac{k_0}{2} \\ \frac{k_0}{2} & 2k_1 \end{vmatrix} = 4k_1^2 - \frac{k_0^2}{4} = 0, \quad k_1 = \pm \frac{k_0}{4}. \quad (1.10)$$

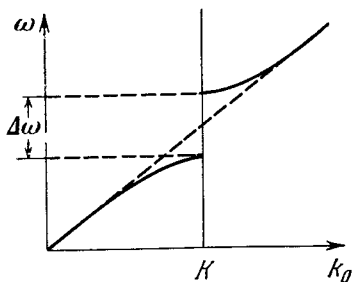
Итак, при $k_0 = K$ первое приближение дает поправку к частоте и

$$\omega = c_0 k_0 \pm \frac{\mu}{4} c_0 k_0. \quad (1.11)$$

Зависимость $\omega(k_0)$ изображена на рис. 4.1. Видно, что дисперсионная кривая испытывает разрыв при $k_0 = K$. Появляется запрещенная полоса частот шириной $\Delta\omega = \mu\omega_0/2$; волны с частотами, лежащими внутри полосы $\Delta\omega$, в системе быстро затухают.

Соотношение $k_0 = K$ можно переписать как $\lambda = 2a$ (λ — длина волны, a — пространственный период неоднородности); его часто называют условием брэгговского отражения волны от периодической структуры. Это означает, что при $k_0 \approx K$ (или в запрещенной полосе частот) бегущая волна эффективно отражается от неоднородностей среды, и ее энергия передается волне, бегущей в обратном направлении (этот отбор энергии можно называть «затуха-

нием»). В свою очередь встречная волна также переотражается, возвращая часть энергии исходной волне. Иными словами, вблизи области пространственного резонанса $k_0 \approx K$ две волны, бегущие в положительном и отрицательном направлениях оси x , сильно связаны друг с другом. Результатом такого взаимодействия является сдвиг частоты (1.11); напомним, что аналогичное явление в теории колебаний имеет место для двух связанных колебательных контуров.



4.1. Разрывная кривая дисперсии для волны, распространяющейся в периодической структуре.

Чтобы подробнее исследовать взаимодействие двух встречных волн в периодической слабо неоднородной среде, воспользуемся методом медленно изменяющихся амплитуд. Детальное описание этого упрощенного подхода будет дано в гл. V при изучении нелинейных волновых взаимодействий. Здесь мы отметим только, что для успешного применения метода требуется, чтобы амплитуды волн изменялись медленно на расстоянии порядка a (a — масштаб неоднородностей).

Будем искать решение уравнения (1.3) в виде

$$A = A_+ e^{-ikx} + A_- e^{ikx}. \quad (1.12)$$

A_+ , A_- — это комплексные амплитуды волн, бегущих в положительном и отрицательном направлениях оси x . Предполагая медленность изменения A_{\pm} , будем пренебрегать их вторыми производными по сравнению с первыми: $d^2 A_{\pm} / dx^2 \ll 2kdA_{\pm} / dx$. Как уже было выяснено, встречные волны эффективно взаимодействуют при $k \approx K$, поэтому положим в (1.3)

$$K = k - \Delta, \quad (1.13)$$

где Δ — малое отклонение от точного резонансного условия. Подставляя (1.12) с учетом (1.13) в уравнение (1.3), нетрудно видеть, что члены нулевого порядка малости взаимно сокращаются, а членами второго порядка мы пренебрегаем. Все оставшиеся члены имеют один и тот же первый порядок малости. Собирая члены, стоящие при различных экспонентах: e^{ikx} и e^{-ikx} , получим два укороченных уравнения, связывающих A_+ и A_- :

$$\frac{dA_+}{dx} = -i \frac{k\mu}{4} A_- e^{i2\Delta x}, \quad \frac{dA_-}{dx} = i \frac{k\mu}{4} A_+ e^{-i2\Delta x}. \quad (1.14)$$

Прежде, чем решать систему (1.14), покажем, что она имеет интеграл, соответствующий сохранению суммарной энергии вза-

имеющих волн. Умножим первое из уравнений (1.14) на A_+^* , а второе — на A_-^* . Воспользуемся двумя полученными соотношениями и комплексно-сопряженными от них для составления комбинации

$$A_+^* \frac{dA_+}{dx} + A_+ \frac{dA_+^*}{dx} - A_- \frac{dA_-^*}{dx} - A_-^* \frac{dA_-}{dx} = \frac{d}{dx} (|A_+|^2 - |A_-|^2),$$

которая, как нетрудно вычислить, при любых x равна нулю. Таким образом, комбинация

$$|A_+(x)|^2 - |A_-(x)|^2 = \text{const} \quad (1.15)$$

в любом сечении x .

Для решения системы (1.14) ее удобно свести к одному уравнению. Для этого нужно продифференцировать, например, первое уравнение (1.14) и воспользоваться другим. В результате придем к выражению

$$\frac{d^2 A_+}{dx^2} - i2\Delta \frac{dA_+}{dx} - \left(\frac{k\mu}{4}\right)^2 A_+ = 0. \quad (1.16)$$

Решая это линейное уравнение второго порядка, найдем

$$A_+ = \{C_1 \exp [x \sqrt{(k\mu/4)^2 - \Delta^2}] + C_2 \exp [-x \sqrt{(k\mu/4)^2 - \Delta^2}]\} e^{i\Delta x}. \quad (1.17)$$

Константы интегрирования $C_{1,2}$ определяются из граничных условий.

Предположим, что неоднородная среда занимает полупространство $x > 0$. На это полупространство слева падает волна с амплитудой $A_+(0)$. Принимая $A_+(x=0) = A_+(0)$ и требуя, чтобы $A_+(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, получим $C_1 = 0$, $C_2 = A_+(0)$. Таким образом, амплитуда волны, бегущей в положительном направлении оси x , изменяется по закону

$$|A_+(x)| = A_+(0) \exp [-x \sqrt{(k\mu/4)^2 - \Delta^2}]. \quad (1.18)$$

Чтобы найти выражение для амплитуды обратной волны, воспользуемся интегралом энергии (1.15), который для полубесконечной среды можно записать в виде

$$|A_+(x)|^2 - |A_-(x)|^2 = |A_+(\infty)|^2 - |A_-(\infty)|^2.$$

Поскольку при $x \rightarrow \infty$ амплитуды $|A_+|$, $|A_-|$ должны стремиться к нулю, находим

$$|A_-(x)| = |A_+(x)|. \quad (1.19)$$

Таким образом, поведение амплитуды $|A_-(x)|$ также описывается решением (1.18). Проанализируем это решение. Если частота падающей волны находится в полосе непрозрачности, то $\Delta^2 <$

$< (k\mu/4)^2$. При этом волна A_+ отдает свою энергию обратной волне и затухает, волна же A_- нарастает от нуля (при $x \rightarrow \infty$) до максимального значения $A_+(0)$, достигаемого на выходе из неоднородной среды (при $x = 0$). Это означает, что коэффициент отражения волны от полубесконечной слоистой среды равен единице.

Как только $|\Delta| > k\mu/4$, частота выходит из полосы непрозрачности, и встречные волны становятся слабо связанными. Выражение $\sqrt{(k\mu/4)^2 - \Delta^2}$ при этом будет мнимым, а амплитуды волн A_{\pm} — осциллирующими в пространстве.

Нетрудно найти решение и для ограниченной среды длиной L . Принимая граничные условия в виде $A_+(x=0) = A_+(0)$, $A_-(x=L) = 0$, для амплитуды прямой волны и коэффициента отражения получим

$$|A_+(x)| = A_+(0) \left\{ \frac{\text{ch}^2[\alpha(L-x)] - \kappa^2}{\text{ch}^2(\alpha L) - \kappa^2} \right\}^{1/2}, \quad R = \frac{\text{sh}(\alpha L)}{\sqrt{\text{ch}^2(\alpha L) - \kappa^2}}. \quad (1.20)$$

Здесь для краткости обозначено

$$\alpha^2 = (k\mu/4)^2 - \Delta^2, \quad \kappa = 4\Delta/k\mu, \quad R = |A_-(0)|/A_+(0).$$

Проверка соотношений (1.20) может быть полезным упражнением для читателя.

§ 2. Уравнение Матье и уравнение Хилла

Если неоднородности среды нельзя считать малыми, приближенные решения уравнения (1.3), полученные в предыдущем параграфе, становятся непригодными. При нарушении условия $\mu \ll 1$ следует искать точные решения (1.3). Введем для удобства новые обозначения

$$Kx = \xi, \quad \frac{k^2}{K^2} = \eta, \quad \frac{k^2}{K^2} \mu = \gamma.$$

Уравнение (1.3) примет вид

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} + [\eta + \gamma \cos(2\xi)] A = 0. \quad (2.1)$$

Уравнение типа (2.1) впервые было получено Матье и носит его имя. Как установил Флоке, общее решение уравнения (2.1) записывается в форме

$$A = C_1 F_1(\xi) e^{v\xi} + C_2 F_2(\xi) e^{-v\xi} \quad (2.2)$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные константы, а F_1, F_2 — функции, имеющие тот же период π , что и периодический по ξ коэффициент в уравнении Матье. Если v — мнимое число, (2.2) есть суперпозиция двух незатухающих волн, распространяющихся в проти-

воположных направлениях. Случай действительного или комплексного ν соответствует заглушающим волнам.

Основные результаты, полученные при исследовании уравнения Матъе (2.1), иллюстрированы на рис. 4.2. В незаштрихованных областях плоскости переменных η , γ величина ν комплексна или действительна. В заштрихованных областях ν — мнимая величина. На границах действительная часть ν обращается в нуль.

Всю плоскость η , γ удобно разбить на три части с помощью двух прямых $\gamma = \eta$ и $\gamma = -\eta$, изображенных на рис. 4.2 штриховыми линиями. В области I, при $\gamma < -\eta$, распространяющиеся волны существовать не могут. В области II, при $-\eta < \gamma < \eta$, заштрихованные области сужаются по мере увеличения γ и в пределе становятся прямыми, параллельными направлению $\gamma = -\eta$. В области III, где

$\gamma < \eta$, заштрихованные области прозрачности становятся широкими, а полосы непропускания — узкими. Полуось $\eta > 0$ соответствует распространению волны в однородной среде без периодической структуры, поскольку здесь $\gamma = 0$. Вблизи оси η , где $\gamma \ll \eta$, мы имеем случай слабо неоднородной среды.

Решение уравнения (2.1) выражается через специальные функции, называемые *функциями Матъе*; они хорошо изучены и табулированы.

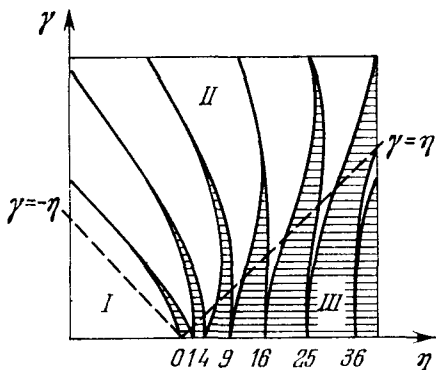
Рассмотрим теперь уравнение более общего вида

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + k^2(1 + \mu f(x)) = 0 \quad (2.3)$$

($f(x)$ — произвольная периодическая функция), называемое *уравнением Хилла*. С помощью (2.3) можно решить, например, практически важную задачу расчета закона дисперсии для слоистой периодической структуры. Приведем решение для системы, состоящей из чередующихся слоев двух сред с различными скоростями распространения волны.

Пусть $f(x)$ имеет вид ступенчатой кривой, показанной на рис. 4.3. Обозначим

$$\begin{aligned} k^2(1 + \mu f_1) &= k_1^2, & -l_1 < x < 0, \\ k^2(1 + \mu f_2) &= k_2^2, & 0 < x < l_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$



4.2. Диаграмма, иллюстрирующая основные свойства решений уравнения Матъе.

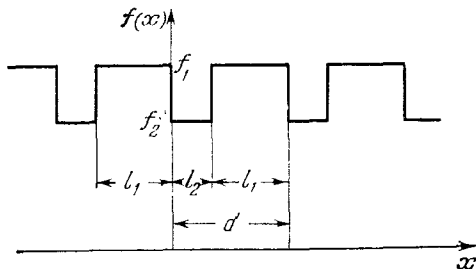
Решение уравнения Хилла имеет вид

$$A(x) = \begin{cases} C_1 e^{ik_1 x} + D_1 e^{-ik_1 x}, & -l_1 < x < 0, \\ C_2 e^{ik_2 x} + D_2 e^{-ik_2 x}, & 0 < x < l_2. \end{cases} \quad (2.5)$$

В силу теоремы Флоке для одной из двух встречных волн (2.2) можно записать

$$A = F(x) e^{i\bar{k}x}, \quad (2.6)$$

где $F(x)$ — функция, периодическая с периодом $d = l_1 + l_2$; \bar{k} — волновое число для волны, распространяющейся в периодической структуре, которое нужно найти как функцию чисел k_1 ,



4.3. Периодическая ступенчатая функция, входящая в уравнение (2.3).

k_2 и толщин слоев l_1, l_2 . Отсюда следует, что на интервале $l_2 < x < d$ решение запишется в виде

$$A(x) = C_1 e^{i\bar{k}d} e^{ik_1(x-d)} + D_1 e^{i\bar{k}d} e^{-ik_1(x-d)}. \quad (2.7)$$

Совокупность формул (2.5), (2.7) определяет решение в трех слоях, $-l_1 < x < d$, разделенных двумя границами $x = 0$ и $x = l_2$. Из требования непрерывности функции $A(x)$ и ее первой производной на этих границах получаем четыре соотношения

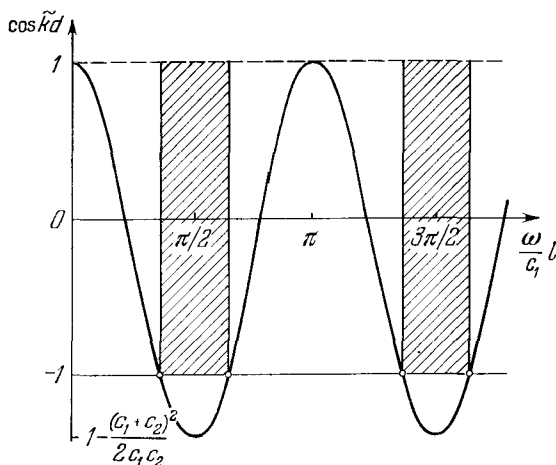
$$\begin{aligned} C_1 + D_1 &= C_2 + D_2, & C_1 k_1 - D_1 k_1 &= C_2 k_2 - D_2 k_2, \\ C_1 e^{i\bar{k}d} e^{-ik_1 l_1} + D_1 e^{i\bar{k}d} e^{ik_1 l_1} &= C_2 e^{ik_2 l_2} + D_2 e^{-ik_2 l_2}, \\ C_1 e^{i\bar{k}d} e^{-ik_1 l_1 / k_1} - D_1 e^{i\bar{k}d} e^{ik_1 l_1 / k_1} &= C_2 e^{ik_2 l_2 / k_2} - D_2 e^{-ik_2 l_2 / k_2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Условием совместности этой линейной системы уравнений для четырех коэффициентов C_1, C_2, D_1, D_2 является равенство нулю определителя

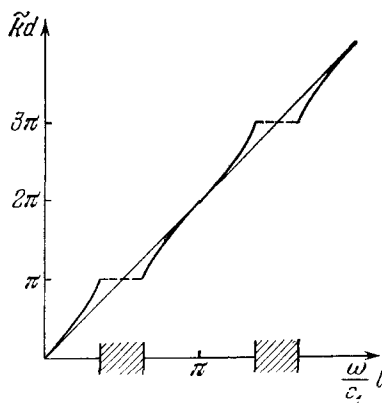
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1 & -k_1 & k_2 & -k_2 \\ y e^{-ik_1 l_1} & y e^{ik_1 l_1} & e^{ik_2 l_2} & e^{-ik_2 l_2} \\ y k_1 e^{-ik_1 l_1} & -y k_1 e^{ik_1 l_1} & k_2 e^{ik_2 l_2} & -k_2 e^{-ik_2 l_2} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.9)$$

(Здесь $y = \exp(i\bar{k}d)$.) Раскрывая определитель, приходим к уравнению

$$y^2 - 2y \left[\cos(k_1 l_1) \cos(k_2 l_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) \sin(k_1 l_1) \sin(k_2 l_2) \right] + 1 = 0. \quad (2.10)$$



4.4. Вид правой части уравнения (2.13).



4.5. Зависимость волнового числа \tilde{k} от частоты для периодической слоистой среды.

Отсюда следует, что $y_1 y_2 = 1$, т. е. $y_1 = \exp(i\bar{k}d)$, $y_2 = \exp(-i\bar{k}d)$, и

$$y_1 + y_2 = 2 \cos(\bar{k}d) = 2\Phi, \quad (2.11)$$

где Φ — выражение, стоящее в квадратных скобках в уравнении (2.10). Таким образом, получаем соотношение, связывающее параметр \tilde{k} с известными величинами k_1, k_2 и толщинами слоев l_1, l_2 :

$$\cos(\tilde{k}d) = \cos(k_1 l_1) \cos(k_2 l_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) \sin(k_1 l_1) \sin(k_2 l_2). \quad (2.12)$$

Случай $|\cos \tilde{k}d| < 1$ соответствует полосе прозрачности рассмотренной структуры. Когда $|\cos \tilde{k}d| > 1$, мы попадаем в полосу непропускания, и в соответствии с (2.6) (для комплексных \tilde{k}) волна становится экспоненциально затухающей.

Поскольку анализ дисперсионного уравнения (2.12) довольно сложен, рассмотрим частный случай, положив $k_1 l_1 = k_2 l_2$. Это означает, что при распространении в каждом из слоев фаза волны изменяется на одну и ту же величину. При этом (2.12) принимает вид

$$\cos \tilde{k}d = 1 - \frac{(c_1 + c_2)^2}{2c_1 c_2} \sin^2 \frac{\omega}{c_1} l. \quad (2.13)$$

Здесь c_1 и c_2 — фазовые скорости волны в первом и во втором слоях. Правая часть (2.13) построена на рис. 4.4. Точки пересечения с прямой -1 соответствуют границам областей непрозрачности, которые на рисунке заштрихованы. Рис. 4.5 иллюстрирует зависимость волнового числа \tilde{k} от частоты ω , т. е. вид закона дисперсии.

§ 3. Волны в дискретных структурах

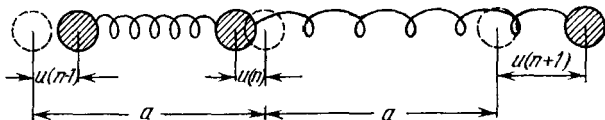
Если длина акустической волны, распространяющейся в реальной среде, очень мала и сравнима с длиной свободного пробега молекул (в жидкостях и газах) или периодом кристаллической решетки, то начинают проявляться эффекты, связанные с дискретностью структуры вещества. Наиболее просто эти явления рассчитываются в случае твердых тел, у которых существует дальний порядок в расположении атомов.

Решим простейшую задачу, моделирующую распространение плоских волн в идеальной (бездефектной) и неограниченной решетке. Рассмотрим линейную цепочку, состоящую из одинаковых атомов массы M , расположенных на одном и том же расстоянии a друг от друга (рис. 4.6). Пусть взаимодействуют только ближайшие соседи, т. е. каждый атом связан двумя пружинками одинаковой жесткости только с соседом справа и соседом слева. Смещение атома с номером n из положения равновесия обозначим через $u(n)$. Если смещения всех атомов малы (выполняется закон Гука),

потенциальную энергию решетки можно разложить в ряд по смещениям и ограничиться квадратичным членом по u :

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \alpha \sum_n [u(n) - u(n+1)]^2. \quad (3.4)$$

Здесь U_0 — равновесное значение потенциальной энергии недеформированной цепочки, α — коэффициент жесткости каждой



4.6. Цепочка из одинаковых масс.

из пружинок. Уравнение движения для атома с номером l имеет вид

$$M\ddot{u}(l) = F(l) = -\frac{\partial U}{\partial u(l)}.$$

Вычисляя силу, действующую на l -й атом,

$$\begin{aligned} F(l) &= -\alpha \sum_n [u(n) - u(n+1)] (\delta_{n,l} - \delta_{n+1,l}) = \\ &= -\alpha [2u(l) - u(l+1) - u(l-1)], \end{aligned}$$

получим линейное, дифференциально-разностное уравнение

$$M\ddot{u}(l) = -\alpha [2u(l) - u(l+1) - u(l-1)]. \quad (3.2)$$

Найдем его закон дисперсии, для чего положим

$$u(l) = A \exp [i(\omega t - ka l)]. \quad (3.3)$$

Несложные преобразования приводят к соотношению

$$\omega^2 M = \alpha [2 - e^{-ika} - e^{ika}] = 4\alpha \sin^2 \frac{ka}{2},$$

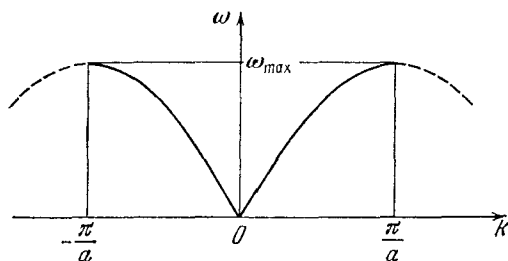
откуда следует закон дисперсии (рис. 4.7)

$$\omega(k) = \pm 2 \sqrt{\frac{\alpha}{M}} \sin \frac{ka}{2} \quad (3.4)$$

Таким образом, кристаллическая решетка — это среда с дисперсией, которая проявляется на высоких частотах (для волн с длиной волны $\lambda \sim a$). Наибольшая частота

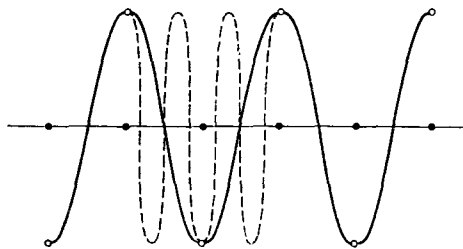
$$\omega_{\max} = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{M}} \quad (3.5)$$

соответствует длине волны $\lambda_{\min} = 2\pi/k_{\min} = 2a$. Предельно короткая волна изображена на рис. 4.8 сплошной линией. Темными точками отмечены равновесные положения атомов, светлыми — их смещенные положения (для наглядности смещения частиц изображены в направлении, перпендикулярном оси цепочки, хотя



4.7. Закон дисперсии для дискретной одноатомной цепочки.

имеется в виду продольная волна). Более короткие длины волн физически бессмысленны, так как можно наблюдать лишь за движениями узлов решетки, которые и реализуют волновой процесс. Так, изображенное пунктиром колебание с $\lambda = 2a/3 < \lambda_{\min}$, физически эквивалентно колебанию с $\lambda = 2a$.



4.8. Предельно короткая длина волны $\lambda = 2a$ в цепочке (сплошная кривая) и эквивалентное ей колебание с $\lambda = 2a/3$ (штриховая кривая).

$$\omega = \pm 2 \sqrt{\frac{\alpha}{M}} \left(\frac{ka}{2} - \frac{(ka)^3}{48} + \dots \right). \quad (3.6)$$

Ограничиваясь первым членом, линейным по k , получим $\omega = \pm ak (\alpha/M)^{1/2} = \pm c_0 k$. Величина

$$c_0 = a \sqrt{\alpha/M} \quad (3.7)$$

имеет смысл *скорости звука* в пределе низких частот, когда дисперсия не проявляется. С помощью (3.7) легко оценить порядок частоты ω_{\max} (3.5):

$$\omega_{\max} = \frac{2c_0}{a} \sim \frac{10^8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}}{10^{-8} \text{ см}} \sim 10^{13} \text{ Гц.}$$

Это очень высокие частоты. В настоящее время удается искусственно возбуждать продольные волны в ультразвуковом диапазоне частот (до 10^9 Гц) и гиперзвук вплоть до 10^{11} — 10^{12} Гц. В экспериментах, следовательно, всегда имеют дело с длинноволновыми колебаниями; дисперсия проявляется лишь как поправка.

Заметим, что выражение в квадратных скобках правой части уравнения (3.2) есть разностная аппроксимация второй производной $a^2 \partial^2 u / \partial x^2$. Переходя к пределу сплошной среды, вместо (3.2) получим обычное волновое уравнение; дисперсия при этом исчезает. Итак, в данном случае дисперсия — это следствие дискретности структуры твердого тела.

Выведем теперь волновое уравнение при учете дисперсии, когда с помощью (3.6), (3.7) можно записать

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 \left(1 - \frac{1}{24} k^2 a^2 \right). \quad (3.8)$$

Сопоставляя величинам ω , k производные $\partial / \partial t$, — $\partial / \partial x$, придем к уравнению четвертого порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(c_0 a)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \quad (3.9)$$

Обратная подстановка $u = A \exp [i(\omega t - kx)]$ дает дисперсионное уравнение (3.8).

Если интересовагся только волной, бегущей в положительном направлении оси x , можно упростить (3.9) с помощью метода медленно изменяющегося профиля (см. § 3 гл. I). Полагая $u = u(\tau = t - x/c_0, \mu x)$ и вычисляя с необходимой точностью производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, & \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{2}{c_0} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \tau}, \\ \frac{(c_0 a)^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} &\approx \frac{1}{12} \left(\frac{a}{c_0} \right)^2 \frac{\partial^4}{\partial \tau^4}, \end{aligned}$$

получим линеаризованное уравнение Кортвега — де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}, \quad \beta = \frac{a^2}{24c_0^3}, \quad (3.10)$$

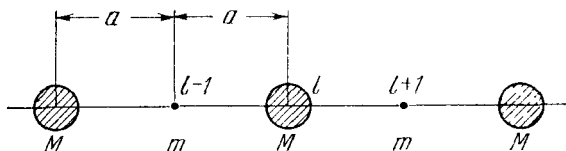
которое уже рассматривалось в гл. II.

Приведем теперь расчет более сложного случая линейной цепочки, состоящей из чередующихся атомов двух сортов с массами m и M (рис. 4.9). Такая система ведет себя принципиально иначе: здесь появляется новый тип колебаний — оптическая мода. Уравнение движения каждого из атомов выводится точно так же, как и в случае цепочки одинаковых атомов. В частности, для l -го и

$l + 1$ -го атомов они имеют вид

$$\begin{aligned} M\ddot{u}(l) &= -\alpha [2u(l) - u(l+1) - u(l-1)], \\ m\ddot{u}(l+1) &= -\alpha [2u(l+1) - u(l+2) - u(l)]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Поскольку $m \neq M$, массы будут совершать колебания с разными



4.9. Цепочка из двух различных чередующихся атомов с массами m и M .

амплитудами, и решение системы (3.11) нужно искать в виде

$$\begin{aligned} u(l) &= B \exp [i(\omega t - kal)], \\ u(l+1) &= b \exp [i(\omega t - ka(l+1))]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Преобразования приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} M\omega^2 B &= 2\alpha [B - b \cos(ka)], \\ m\omega^2 b &= 2\alpha [b - B \cos(ka)], \end{aligned}$$

условием совместности которых будет обращение в нуль определителя

$$\begin{vmatrix} M\omega^2 - 2\alpha & 2\alpha \cos(ka) \\ 2\alpha \cos(ka) & m\omega^2 - 2\alpha \end{vmatrix} = \omega^4 Mm - 2\omega^2 \alpha (m + M) + 4\alpha^2 \sin^2(ka) = 0. \quad (3.13)$$

Корни этого уравнения $\omega_{\pm}(k)$:

$$\omega_{\pm}^2 = \alpha \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \pm \alpha \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4}{mM} \sin^2 ka}, \quad (3.14)$$

изображены на рис. 4.10. Ветвь $\omega_-(k)$ называется *акустической модой*, $\omega_+(k)$ — *оптической модой* колебаний. При $m \neq M$ появляется запрещенная полоса частот, ширина которой равна

$$\Delta\omega = (\omega_+)_{\min} - (\omega_-)_{\max} = \sqrt{2\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{M}} \right). \quad (3.15)$$

Интересно проследить предельный переход к цепочке из одинаковых атомов. При $m \rightarrow M$ ширина запрещенной полосы $\Delta\omega \rightarrow 0$ и дисперсионная характеристика (рис. 4.10) принимает форму, показанную на рис. 4.11, а. Однако в силу периодичности по ka (3.14) то же самое можно изобразить с помощью рис. 4.11, б, который тождествен рис. 4.7 для дисперсионной кривой цепочки одинаковых масс.

Смысл названий «оптическая» и «акустическая» мода будет понятен, если рассмотреть вид закона дисперсии для длинноволновых колебаний, т. е. для $ka \ll 1$:

$$\omega_+^2 \approx 2\alpha \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) + O(k^2 a^2), \quad \omega_-^2 \approx \frac{2\alpha a^2}{m+M} k^2. \quad (3.16)$$

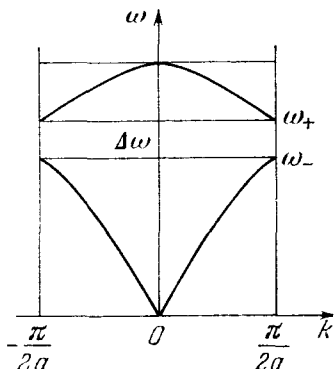
Символом O обозначены малые члены порядка $k^2 a^2$. В низшем приближении для оптической моды групповая скорость

$$v_{гр} = \frac{\partial \omega_+}{\partial k} = 0,$$

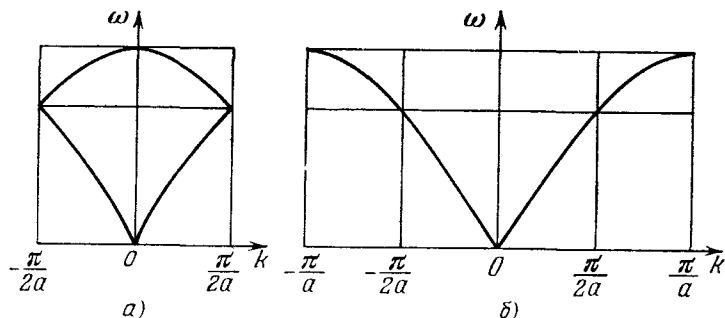
т. е. оптические колебания не распространяются. Смещение тяжелой частицы B через смещение легкой b можно выразить, исходя из уравнений движения:

$$B = -b \frac{2\alpha \cos(ka)}{M\omega_+^2 - 2\alpha} \approx -b \frac{m}{M}. \quad (3.17)$$

При оптическом колебании соседние атомы движутся навстречу друг другу (3.17). Это возмущение типа стоячей волны; его можно возбудить, например, воздействуя на кристалл инфракрасным излучением. Для акустических колебаний из (3.16) следует, что $\omega = \pm c_0 k$; это обычная



4.10. Закон дисперсии для двухатомной цепочки.



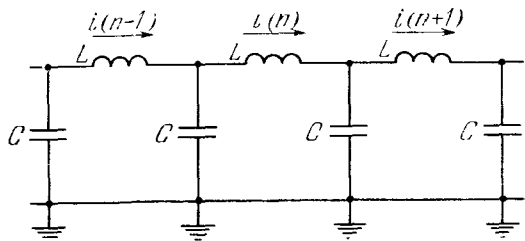
4.11. Изменение дисперсионных кривых при переходе от двухатомной цепочки к одноатомной.

звуковая волна. Смещения соседних атомов $B \approx b$ равны и направлены в одну и ту же сторону.

Одномерная цепочка — это простейшая модель, не описывающая многих принципиальных эффектов. Так, мы рассматривали только продольные колебания. Из уравнений теории упругости

следует существование как продольных, так и поперечных волн. Поэтому, если на примитивную ячейку в кристалле приходится два различных по массе атома, разделение колебаний на акустическую и оптическую ветви происходит для каждой из двух поперечных и продольной мод. Всего, таким образом, в кристалле существует шесть мод. Кроме того, реальные кристаллы обладают анизотропными свойствами. Это означает, что появляется зависимость волнового числа k (при фиксированном ω) от направления.

Наиболее сложно математически учесть неидеальность решетки, связанную с наличием дислокаций, примесей, неоднородностью силовых связей между атомами и других дефектов, а также граничные явления. В таких кристаллах появляются дополнительные частоты колебаний, спектр идеальной решетки искажается. При распространении звуковой волны происходит рассеяние энергии на де-



4.12. Дискретная электрическая структура (фильтр).

фектах, нарушающих однородность кристалла, что приводит к затуханию звука.

Результаты, изложенные в этом параграфе, применимы к дискретным электрическим линиям. Так, имеет место полная математическая аналогия между цепочкой из одинаковых атомов и электрическим фильтром нижних частот (рис. 4.12).

Ток, протекающий через индуктивность в участке цепи с номером n , изменяется в соответствии с уравнением

$$L \frac{di(n)}{dt} = V(n-1) - V(n) = \frac{Q(n-1)}{c} - \frac{Q(n)}{c}. \quad (3.18)$$

С другой стороны,

$$i(n) - i(n+1) = \frac{dQ(n)}{dt}. \quad (3.19)$$

Дифференцируя (3.18) и пользуясь (3.19), исключим переменную Q . Уравнение для тока $i(n)$

$$L \frac{d^2 i(n)}{dt^2} = -\frac{1}{c} [2i(n) - i(n+1) - i(n-1)] \quad (3.20)$$

совпадает с (3.2), если заменить в нем $L \rightarrow M$, $\frac{1}{c} \rightarrow \alpha$, $i(n) \rightarrow u(n)$. Это совпадение не случайно и основано на известной электромеханической аналогии, согласно которой энергии электрического поля можно сопоставить потенциальную, а магнитного поля — кинетическую энергию.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Волновые процессы, описываемые линейными интегродифференциальными уравнениями, обладают свойством суперпозиции. Это свойство заключается в том, что различные пространственно-временные спектральные составляющие волновых полей — плоские монохроматические волны — распространяются без искажений и не взаимодействуют друг с другом. Среды, в которых имеет место принцип суперпозиции, называются *линейными*.

Линейная среда представляет собой некоторую идеализованную модель. Естественно, пользоваться ею для описания прохождения волн через реальные среды можно не во всех случаях. Применимость модели линейной среды зависит в первую очередь от величины отношения амплитуды волны A к характерной величине $A_{\text{хар}}$, определяющей «упругие» свойства среды. В акустике $A_{\text{хар}}$ — давление газа или внутреннее давление жидкости, в электродинамике $A_{\text{хар}}$ — напряженность внутреннего поля, действующего, например, на электроны атомов и молекул и т. д.

В линейной среде отношение $A/A_{\text{хар}}$ полагается бесконечно малым, в результате чего волновое уравнение становится линейным

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L_1(u) = 0,$$

где L_1 — линейный оператор, описывающий дисперсию и диссипацию среды. Если же величину $A/A_{\text{хар}}$ считать конечной, то в волновом уравнении необходимо удерживать нелинейные члены:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L_1(u) = L_2(u^2) + L_3(u^3) + \dots,$$

где L_2, L_3, \dots, L_n — линейные операторы, имеющие по полю порядок $(A/A_{\text{хар}})^{n-1}$ (по отношению к линейным членам). Учет нелинейных членов в волновом уравнении приводит к качественно новым явлениям. В простейшем случае, когда на вход среды падает монохроматическая волна $u = A \sin(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})$, нелинейность приводит к последовательному возбуждению временных гармоник волны $u_n = A_n \sin(n\omega t - \mathbf{k}_n \mathbf{r})$, $n = 2, 3, 4, \dots$. Обогащение частотного спектрального состава излучения означает искажение формы синусоидального профиля волны.

Параметр $A/A_{\text{хар}}$ характеризует локальную нелинейность среды и указывает порядок величины относительного нелинейного изменения амплитуд полей за один период колебаний T . Если в течение времени t совершается N колебаний, $N = t/T$, то нелинейный эффект увеличивается в N раз, т. е. составляет величину $NA/A_{\text{хар}}$. Так как мы имеем дело с волнами, бегущими с конечной скоростью c , то время t определяется длиной области взаимодействия гармоник или протяженностью нелинейной среды l : $t = l/c$; при этом N равно отношению длины l к длине волны λ , т. е. $N = t/T = l/\lambda$. Таким образом, в волновых системах степень нелинейного взаимодействия определяется параметром $l/A_{\text{хар}} \lambda$. Поэтому, если даже коэффициент локальной нелинейности мал, $A/A_{\text{хар}} \ll 1$, суммарный нелинейный эффект за счет большой протяженности области взаимодействия, $l/\lambda \gg 1$, может быть значительным.

Протяженность области эффективного взаимодействия гармоник во многом зависит от дисперсии и диссипации среды. Действительно, энергообмен между гармониками зависит от соотношения фаз. В среде без частотной дисперсии все волны бегут с одинаковыми скоростями и фазовые соотношения сохраняются в процессе распространения между всеми гармониками (выполняется условие фазового синхронизма для всех гармоник). Если затухание волн мало, то нелинейные эффекты могут накапливаться пропорционально пройденному расстоянию. Следовательно, в недиспергирующей недиссипативной среде на достаточно больших длинах $l > \lambda A_{\text{хар}}/A$ всегда возникают сильные нелинейные искажения исходного профиля волны. В частности, гармоническая волна превращается в разрывную ударную волну (см. гл. VI). Этот случай наиболее характерен для акустических волн.

В случае среды с дисперсией фазовые скорости волн на различных частотах различны, вследствие чего соотношения между фазами гармоник изменяются в пространстве весьма быстро. При нарушении фазового синхронизма нелинейные эффекты не накапливаются и перекачка энергии очень незначительна. Иными словами, в диспергирующих средах заметных искажений формы волны не происходит. В диспергирующих средах только в специально подобранных условиях удастся согласовать фазовые скорости нескольких волн (обычно не более трех-четырех). Изучение синхронных взаимодействий волн наибольшее значение имеет в электродинамике, в таких ее разделах, как нелинейная оптика и физика плазмы.

В этой главе будет изложена теория волновых взаимодействий в условиях сильного проявления дисперсии среды.

§ 1. Уравнения для нелинейных волн и методы их анализа

Для конкретности изложения теории нелинейных волн с дисперсией будем говорить о нелинейной электродинамике немагнитных сред, в частности, нелинейной оптике.

Основными уравнениями для электромагнитных полей в нелинейном диэлектрике по-прежнему являются уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}. \quad (1.3)$$

Только теперь связь поляризации среды \mathbf{P} с сильным электрическим полем \mathbf{E} становится нелинейной.

Напомним, что в линейном приближении при учете временной дисперсии материальное уравнение согласно принципу причинности может быть записано в виде (см. гл. II)

$$\mathbf{P}^{\text{л}}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} d\tau \hat{\chi}(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau). \quad (1.4)$$

В сильных полях поляризация среды будет содержать помимо линейной и нелинейную часть

$$\mathbf{P}^{\text{нл}} = \mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{P}^{(3)} + \mathbf{P}^{(4)} + \dots, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{P}^{(j)}$ — нелинейные части поляризации j -го порядка (квадратичная, кубичная и т. д.), для которых предложены феноменологические выражения

$$\mathbf{P}^{(2)} = \iint_0^{\infty} d\tau_1 d\tau_2 \hat{\chi}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) \mathbf{E}(t - \tau_1) \mathbf{E}(t - \tau_1 - \tau_2), \quad (1.6)$$

$$\mathbf{P}^{(3)} = \iiint_0^{\infty} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \hat{\chi}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \mathbf{E}(t - \tau_1) \mathbf{E}(t - \tau_1 - \tau_2) \times \\ \times \mathbf{E}(t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) \quad (1.7)$$

($\hat{\chi}^{(2)}$, $\hat{\chi}^{(3)}$, ... — тензоры нелинейных восприимчивостей: квадратичной, кубичной и т. д.).

Рассмотрим нелинейный отклик среды при распространении в ней нескольких монохроматических волн

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) \exp(i\omega_j t) + \text{к. с.}, \quad (1.8)$$

где буквами «к. с.» обозначены комплексно-сопряженные члены.

Волны (1.8) возбуждают в среде, как видно из (1.3) — (1.7), волны линейной и нелинейной поляризации:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \sum \mathbf{P}_q(\nu) \exp(i\omega_q t) + \text{к. с.} \quad (1.9)$$

на комбинационных частотах

$$\omega_q = \sum_{j=1}^N m_j \omega_j, \quad m_j = 0, \pm 1. \quad (1.10)$$

В результате процессов переизлучения в нелинейной среде возбуждятся электромагнитные волны на тех же комбинационных частотах. Возбуждению гармоник соответствуют $m_j = 1$, $\omega_j = \omega_1$.

Вновь появившиеся волны в свою очередь могут принять участие во взаимодействии с другими волнами. Несмотря на сложность общей картины, можно провести классификацию нелинейных волновых эффектов по типу нелинейности, на которой развивается волновой процесс, и по числу волн, участвующих во взаимодействии. С этой целью рассмотрим структуру линейной и нелинейной поляризации среды.

Линейная часть поляризации (1.4) возбуждается каждым из электромагнитных полей (1.8):

$$\mathbf{P}_q^{(1)} = \hat{\chi}(\omega_q) \mathbf{E}_q, \quad q = 1, \dots, N. \quad (1.11)$$

С волнами нелинейной поляризации дело обстоит несколько сложнее. Приведем примеры расчета поляризации в средах с различной нелинейностью.

Квадратичная нелинейность. Этой нелинейностью обладают среды без центра инверсии. В такой среде возникает квадратичная по полю поляризация $\mathbf{P}^{(2)}$ (1.6). После подстановки (1.8) в (1.6) и приведения последней к виду (1.9) можно прийти к следующим выводам.

Во-первых, каждое из электромагнитных полей возбуждает две квадратичные поляризации среды на удвоенной и нулевой частотах:

$$\mathbf{P}_q^{(2)} = \frac{1}{2} \hat{\chi}^{(2)}(\omega_j + \omega_j) \mathbf{E}_j \mathbf{E}_j, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{P}_q^{(2)} = \frac{1}{2} \hat{\chi}^{(2)}(\omega_j - \omega_j) \mathbf{E}_j \mathbf{E}_j^*. \quad (1.13)$$

Поляризация на удвоенной частоте (1.12) ответственна за генерацию второй гармоники, а постоянная во времени поляризация (1.13) — за детектирование высокочастотного электромагнитного излучения, при котором в диэлектрике появляется постоянное электрическое поле.

Во-вторых, две электромагнитные волны с разными частотами ω_j и ω_k возбуждают еще две поляризации среды на суммарной и разностной частотах:

$$\mathbf{P}_q^{(2)} = \hat{\chi}^{(2)}(\omega_j + \omega_k) \mathbf{E}_j \mathbf{E}_k, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{P}_q^{(2)} = \chi^{(2)}(\omega_j - \omega_k) \mathbf{E}_j \mathbf{E}_k^*. \quad (1.15)$$

Так как в результате одного акта взаимодействия каких-либо двух волн в среде возникает третья волна на комбинационной частоте, то говорят, что на квадратичной нелинейности происходит *трехчастотное взаимодействие*.

Отметим специально один важный предельный случай, когда одно из полей является постоянным, $\omega_k = 0$, $\mathbf{E}_k = \mathbf{E}_0$. Тогда квадратичная поляризация (1.14) и (1.15) будет иметь ту же частоту, что и сама электромагнитная волна:

$$\mathbf{P}_q^{(2)} = \hat{\chi}^{(2)}(\omega_j + 0) \mathbf{E}_j \mathbf{E}_0. \quad (1.16)$$

Это линейный электрооптический эффект *Поккельса*, состоящий в изменении диэлектрической проницаемости пьезооптического кристалла под действием постоянного электрического поля: $\hat{\epsilon} = \epsilon_0 + 4\pi \hat{\chi}^{(2)} \mathbf{E}_0$.

Наконец, в-третьих, общее выражение для тензора квадратичной восприимчивости как функции частоты имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\chi}^{(2)}(\omega_j \pm \omega_k) &= \\ &= \iint_0^\infty d\tau_1 d\tau_2 \hat{\chi}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) \exp\{-i(\omega_j \pm \omega_k)\tau_1 \mp i\omega_k\tau_2\}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Кубичная нелинейность. Если диэлектрическая среда обладает центром инверсии, то кубичная нелинейность является нелинейностью наименьшего порядка для такой среды. Здесь число возможных нелинейных процессов больше, чем в предыдущем случае: в процессе одного взаимодействия одновременно могут принять участие не три, а четыре волны различных частот.

Каждая из распространяющихся волн возбуждает третью гармонику (двухчастотное вырождение):

$$\mathbf{P}_q^{(3)} = \frac{1}{4} \hat{\chi}^{(3)}(\omega_j + \omega_j + \omega_j) \mathbf{E}_j \mathbf{E}_j \mathbf{E}_j, \quad (1.18)$$

и испытывает самовоздействие, связанное с возникновением нелинейной поляризации на своей собственной частоте (одночастотное вырождение):

$$\mathbf{P}_q^{(3)} = \frac{3}{4} \hat{\chi}^{(3)}(\omega_j + \omega_j - \omega_j) \mathbf{E}_j \mathbf{E}_j \mathbf{E}_j^*. \quad (1.19)$$

Это высокочастотный эффект Керра, благодаря которому диэлектрическая проницаемость зависит от интенсивности волны

$$\hat{\varepsilon}(\omega_j) = \hat{\varepsilon}_0(\omega_j) + \hat{\varepsilon}_2(\omega_j) \mathbf{E}_j \mathbf{E}_j^*, \quad (1.20)$$

где коэффициенты тензора $\hat{\varepsilon}_2$ пропорциональны компонентам тензора четвертого ранга $\hat{\chi}^{(3)}$.

Диэлектрическая проницаемость может меняться также под действием волны другой частоты:

$$P_q^{(3)} = \frac{3}{2} \hat{\chi}^{(3)}(\omega_j + \omega_k - \omega_k) \mathbf{E}_j \mathbf{E}_k \mathbf{E}_k^*, \quad (1.21)$$

$$\hat{\varepsilon}(\omega_j) = \hat{\varepsilon}_0(\omega_j) + \hat{\varepsilon}_2(\omega_j, \omega_k) \mathbf{E}_k \mathbf{E}_k^*.$$

Влияние одной волны на другую через диэлектрическую проницаемость называется кросс-модуляцией. Если диэлектрическая проницаемость изменяется под действием постоянного поля (в (1.21) $\omega_k = 0$, $E_k = E_0$), то мы имеем дело с квадратичным электрооптическим эффектом $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_0 + 6\lambda \hat{\chi}^{(3)} E_0 E_0$ (ср. с (1.16) и (1.21)).

В общем случае четырехчастотного взаимодействия три волны с различными частотами ω_j , ω_k и ω_l возбуждают в среде волны кубичной по полю поляризации на комбинационных частотах $\omega_q = \omega_j \pm \omega_k \pm \omega_l$. Соответствующий тензор кубичной восприимчивости вычисляется по формуле

$$\hat{\chi}^{(3)}(\omega_q) = \iiint_0^\infty d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \hat{\chi}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \exp\{-i\omega_q \tau_1 - i(\pm\omega_k \pm \omega_l)\tau_2 \mp i\omega_l \tau_3\}. \quad (1.22)$$

Высшие нелинейности. На высших нелинейностях $\hat{\chi}^{(n)}$ могут развиваться эффекты генерации высших гармоник и смешения частот. Кроме того, на нелинейностях нечетного порядка волны испытывают самовоздействие (нелинейная поляризация имеет ту же частоту, что и волна)

$$P_q^{(n)} \sim \frac{1}{2^{n-1}} \hat{\chi}^{(n)}(\omega_j) (\mathbf{E}_j \mathbf{E}_j^*)^{\frac{n-1}{2}} \mathbf{E}_j. \quad (1.23)$$

Сумма всех членов нелинейной части поляризации среды, ответственных за самовоздействие, описывает нелинейное изменение диэлектрической проницаемости. В изотропном случае (ср. с (1.20))

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{\text{нл}}(|E|^2). \quad (1.24)$$

Для нелинейной добавки к диэлектрической проницаемости часто выводят выражение непосредственно из рассмотрения того или иного физического механизма нелинейного отклика среды (на-

пример, при электрострикции, нагреве при поглощении энергии волны и т. д.).

Таким образом, в нелинейной среде могут наблюдаться явления самовоздействия и взаимодействия волн, в результате которых могут измениться частотные и угловые спектры волн, иными словами, пространственно-временные законы модуляции волновых полей, заданных на входе в среду. Чтобы проанализировать развитие нелинейных электромагнитных процессов, необходимо решать при соответствующих граничных и начальных условиях уравнения Максвелла (1.1) — (1.3) совместно с нелинейными материальными уравнениями типа (1.17) — (1.24). Уравнения Максвелла можно свести к волновому уравнению:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}^{\text{нл}})}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{\text{нл}}}{\partial t^2}. \quad (1.25)$$

Подставляя сюда выражение для электрического поля \mathbf{E} (1.8) и поляризации среды \mathbf{P} (1.9) в виде суммы монохроматических составляющих, приходим к цепочке уравнений Гельмгольца:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_j - \frac{\omega_j^2}{c^2} \hat{\varepsilon}_0(\omega_j) \mathbf{E}_j = \frac{4\pi\omega_j^2}{c^2} \mathbf{P}_j^{\text{нл}}. \quad (1.26)$$

Напомним, что здесь нижний индекс j означает номер частоты поля и нелинейной поляризации. В (1.26) необходимо подставить выражения для нелинейной поляризации, соответствующие исследуемому нелинейному волновому эффекту. Однако в общем случае получить аналитические решения нелинейных волновых уравнений Гельмгольца не удастся. Поэтому в теории нелинейных волн широко используются различные приближенные методы.

Метод возмущений. Предположим, что среда является слабо нелинейной: отношение величины нелинейной поляризации к величине поля на границе является малым параметром

$$\frac{|\mathbf{P}^{\text{нл}}|}{|\mathbf{E}|} = \mu, \quad \mu \ll 1. \quad (1.27)$$

Нелинейная поляризация может быть равна $\mathbf{P}^{(2)}$, $\mathbf{P}^{(3)}$, их сумме и т. д. в зависимости от типа волнового процесса. По малому параметру можно разложить электрические поля волн

$$\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_{j(0)} + \mu \mathbf{E}_{j(1)} + \mu^2 \mathbf{E}_{j(2)} + \dots \quad (1.28)$$

Подставляя (1.28) в выражение для $\mathbf{P}^{\text{нл}}$ и учитывая (1.27), можно найти вид разложения нелинейной части поляризации

$$\mathbf{P}_j^{\text{нл}} = \mu \mathbf{P}_{j(1)}^{\text{нл}} + \mu^2 \mathbf{P}_{j(2)}^{\text{нл}} + \mu^3 \mathbf{P}_{j(3)}^{\text{нл}} + \dots, \quad (1.29)$$

где нижний индекс в скобках означает порядок малости величины. Далее, подставляя (1.28) и (1.29) в (1.26) и собирая члены

одинакового порядка малости, имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{j(0)} - \frac{\omega_j^2}{c^2} \hat{\varepsilon}_0(\omega_j) \mathbf{E}_{j(0)} = 0, \quad (1.30)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{j(1)} - \frac{\omega_j^2}{c^2} \hat{\varepsilon}_0(\omega_j) \mathbf{E}_{j(1)} = \frac{4\pi}{c^2} \omega_j^2 \mathbf{P}_{j(1)}^{\text{нл}}, \quad (1.31)$$

.....

В нулевом приближении (1.30) волны, падающие на границу среды, распространяются как бы в отсутствие нелинейности. В следующем приближении (1.31) в результате возбуждения волн нелинейной поляризации в среде изменяются поля на тех же частотах (эффект самовоздействия), возникают новые поля на комбинационных частотах (эффект взаимодействия). Видно, что при реализации метода возмущений приходится последовательно решать линейные уравнения Гельмгольца, в правых частях которых стоят поля, вычисленные в предыдущем приближении. Это несомненное преимущество метода. Однако этот метод хорошо работает, когда поправки к нулевому приближению малы, т. е. возбуждаемые в среде волны малы по амплитуде по сравнению с амплитудами падающих волн, и можно ограничиться двумя первыми приближениями. Поэтому метод возмущений в форме (1.28) практически не позволяет исследовать эффекты самовоздействия, процесс генерации гармоник при большой перекачке энергии и т. д. В этих и подобных им случаях применяется другой метод, который в определенном смысле также можно назвать методом возмущений, но совершенно другого рода.

Метод медленно изменяющихся амплитуд. Если среда является слабо нелинейной и слабо поглощающей и на нее падают плоские монохроматические волны, то амплитуды волн будут изменяться на малую величину при прохождении волной расстояния порядка длины волны, т. е. амплитуды волн будут медленно изменяющимися функциями координат. В соответствии с этим представим поле и поляризацию среды в виде

$$\mathbf{E}_j = \mathbf{e}_j A_j(\mu \mathbf{k} \mathbf{r}) \exp(i \mathbf{k}_j \mathbf{r}), \quad (1.32)$$

$$\mathbf{P}_q = \mathbf{p}_q \mathcal{P}_q(\mu \mathbf{k} \mathbf{r}) \exp(i \mathbf{k}_{p,q} \mathbf{r}), \quad (1.33)$$

где \mathbf{e}_j и \mathbf{p}_q — единичные векторы поляризации волн, A_j и \mathcal{P}_q — медленно изменяющиеся амплитуды, μ — малый параметр (см. (1.27)), $\mathbf{k}_{p,q}$ — волновой вектор нелинейной поляризации на частоте ω_q , который в соответствии с частотным соотношением (1.10) равен

$$\mathbf{k}_{p,q} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{k}_j, \quad m_j = 0, \pm 1, \quad (1.34)$$

где $k_j = \sqrt{\varepsilon_0} \omega_j / c$.

Пусть нелинейная среда занимает полупространство $z > 0$, а векторы поляризации волн (в случае анизотропной среды) совпадают с векторами нормальных волн, т. е. для них выполняется соотношение (см. гл. III)

$$[\mathbf{k}_j; [\mathbf{k}_j; \mathbf{E}_j]] + \frac{\omega_j^2}{c^2} \tilde{\epsilon}_0 \mathbf{E}_j = 0. \quad (1.35)$$

Подставляя теперь в уравнения Гельмгольца выражения (1.32) и (1.33) с учетом (1.40) и (1.34), получаем в первом приближении по малому параметру μ следующую систему укороченных уравнений для амплитуд, зависящих от пройденного расстояния z :

$$\frac{dA_j}{dz} + \alpha_j A_j = -i \frac{2\pi\omega_j}{c \sqrt{\tilde{\epsilon}_0}} \frac{\mathcal{P}_j^{\text{нл}}}{\cos \beta_j} \exp[i(k_j - k_{p,j})z], \quad (1.36)$$

где $\alpha_j = e_j \tilde{\epsilon}_0 e_j \omega_j / (2c \sqrt{\tilde{\epsilon}_0} \cos \beta_j)$ — коэффициент поглощения на частоте ω_j , β_j — угол между лучевым вектором волны \mathbf{s}_j и осью z , направленной вдоль нормали к плоской границе нелинейной среды.

В правой части укороченных уравнений содержится осциллирующий множитель $\exp\{i(k_j - k_{p,j})z\}$, который в сильной степени влияет на характер взаимодействия волн, так как он определяет знак работы внешней силы — волны нелинейной поляризации по возбуждению поля. Наиболее эффективное взаимодействие будет осуществляться, если этот множитель равен единице, при этом величина работы имеет один знак на протяжении нелинейной среды. При условии

$$k_j = k_{p,j} = \sum_{j=1}^N m_j k_j \quad (1.37)$$

фазовая скорость электромагнитной волны на частоте ω_j равна фазовой скорости волны нелинейной поляризации на той же самой частоте, $v_j = v_{p,j}$. Соотношение (1.37) принято называть *условием фазового согласования* или *условием фазового синхронизма*.

Если условие синхронизма заведомо не выполнено, то множитель $\exp\{i(k_j - k_{p,j})z\}$ сильно осциллирует и нелинейная поляризация слабо влияет на распространение волн: эффект взаимодействия может быть малым. В диспергирующей среде условию синхронизма (1.37) может удовлетворять небольшое число волн, обычно не более трех-четырех, которые и участвуют во взаимодействии. Амплитуды остальных волн на комбинационных частотах настолько малы, что ими можно пренебречь.

Итак, задача о распространении волн в слабо нелинейных средах с дисперсией сводится к решению системы укороченных уравнений (1.36) для комплексных амплитуд волн, волновые векторы

которых удовлетворяют или почти удовлетворяют условию фазового синхронизма (1.37).

Рассмотрим далее с помощью этой методики несколько основных задач из теории нелинейных волн по взаимодействию и самовоздействию.

§ 2. Генерация второй гармоники

Пусть имеется среда, обладающая квадратичной нелинейностью, и на ее границу падает плоская монохроматическая волна частоты ω . Как следует из предыдущего параграфа, в такой среде возможен процесс генерации второй гармоники. Будем считать, что другими нелинейными эффектами (самовоздействием, генерацией высших гармоник, детектированием и т. д.) можно пренебречь. Тогда в среде распространяются только две волны на основной и удвоенной частотах: $j = 1, 2$; $\omega_1 = \omega$; $\omega_2 = 2\omega$. При взаимодействии волн основной (первой) и второй гармоник в среде возбуждаются волны квадратичной поляризации (верхний индекс (2) здесь и далее мы опускаем) на тех же двух частотах с волновыми векторами $\mathbf{k}_{p,j}$ и амплитудами \mathcal{P}_j , равными (см. (1.33), (1.15) и (1.12))

$$\mathcal{P}_1 = p_1 \hat{\chi}(2\omega - \omega) e_2 e_1 A_2 A_1^*, \quad \mathbf{k}_{p,1} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2} p_2 \hat{\chi}(\omega + \omega) e_1 e_1 A_1^2, \quad \mathbf{k}_{p,2} = 2\mathbf{k}_1, \quad (2.2)$$

где единичные векторы поляризации p_1, p_2 далее полагаются равными единичным векторам взаимодействующих волн e_1 и e_2 . Конкретизируем укороченные уравнения типа (1.36) с учетом выражений (2.1) и (2.2). При этом предположим, что волны затухают слабо, $\alpha_{jz} \ll 1$ (именно этот случай и представляет первоочередной интерес); поэтому можно не учитывать члены вида $\alpha_j A_j$. В результате получаем систему двух укороченных уравнений для комплексных амплитуд основной волны A_1 и второй гармоники A_2 :

$$\frac{dA_1}{dz} = -\frac{i\omega\gamma_1}{cn_1} A_2 A_1^* \exp(-i\Delta kz), \quad (2.3)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = -\frac{i\omega\gamma_2}{cn_2} A_1^2 \exp(i\Delta kz), \quad (2.4)$$

где малая расстройка волновых векторов равна

$$\Delta k = k_2 - 2k_1 = \frac{2\omega}{c}(n_2 - n_1), \quad (2.5)$$

$n_j = \sqrt{\varepsilon'_0(\omega_j)}$ — показатель преломления,

$$\gamma_1 = 2\pi e_1 \hat{\chi}(2\omega - \omega) e_2 e_1, \quad \gamma_2 = 2\pi e_2 \hat{\chi}(\omega + \omega) e_1 e_1.$$

Следует отметить, что при выполнении закона сохранения общей энергии волны:

$$n_1 |A_1(z)|^2 + n_2 |A_2(z)|^2 = \text{const}, \quad (2.6)$$

когда отсутствует диссипация и нет притока энергии извне, коэффициенты нелинейности равны друг другу

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma. \quad (2.7)$$

Действительно, дифференцируя (2.6) по координате z и подставляя выражения для производных амплитуд из (2.3) и (2.4), приходим к соотношению (2.7), справедливому в области прозрачности.

Комплексные амплитуды волн удовлетворяют еще одному закону сохранения

$$\Delta k |A_2|^2 + \frac{2\gamma\omega}{cn_2} \text{Re} [A_1^2 A_2^* \exp(i\Delta k z)] = \text{const}, \quad (2.8)$$

в чем можно также убедиться прямым дифференцированием (2.8).

Выявим основные закономерности генерации второй гармоники на основе решения укороченных уравнений (2.3) и (2.4) с привлечением законов сохранения (2.6) и (2.8). На входе в нелинейную среду при $z = 0$ зададим граничные условия

$$A_1(0) = E_{01}, \quad A_2(0) = 0. \quad (2.9)$$

Строго говоря, амплитуда второй гармоники на границе нелинейной среды не равна нулю, но она имеет малую величину. Действительно, $A_2(0) \approx \gamma E_{01}^2$, и так как мы считаем среду слабо нелинейной, $\mu = \gamma E_{01} \ll 1$, то $A_2(0) = \mu E_{01}$ и можно положить $A_2(0) = 0$.

Проанализируем сначала генерацию гармоники в условиях, когда ее амплитуда мала по сравнению с амплитудой основной волны, $|A_2| \ll |A_1|$. В этом случае можно пренебречь слабым обратным влиянием гармоники на основную волну, положив правую часть в (2.3) равной нулю. Тогда, очевидно, в рассматриваемом приближении амплитуда основной волны не меняется, $A_1(z) \approx E_{01}$, и гармоника возбуждается в заданном поле основного излучения

$$\frac{dA_2}{dz} = -\frac{i\omega\gamma}{cn_2} E_{01}^2 \exp(i\Delta k z). \quad (2.10)$$

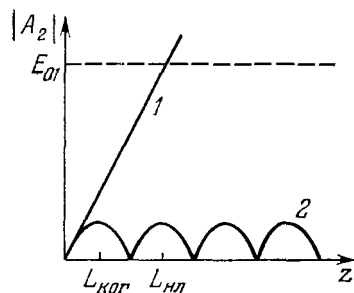
Интегрируя последнее уравнение, находим

$$A_2 = \frac{\gamma\omega E_{01}^2}{cn_2\Delta k} [1 - \exp(i\Delta k z)]. \quad (2.11)$$

Если $\Delta k = 0$, т. е. выполняется условие фазового синхронизма

$$k_2 = 2k_1, \quad n_1 = n_2, \quad (2.12)$$

амплитуда гармоники растет прямо пропорционально пройденному расстоянию (рис. 5.1, кривая 1)



$$|A_2| = \frac{\gamma \omega E_{01}^2 z}{cn_2}. \quad (2.13)$$

В силу наложенного условия $|A_2| \ll \ll E_{01}$ формула (2.13) справедлива до длины $z \ll L_{нл}$, где

$$L_{нл} = \frac{cn_2}{\gamma \omega E_{01}}. \quad (2.14)$$

На длине $L_{нл}$ можно ожидать значительную перекачку энергии основной волны в энергию гармоники при фазовом синхронизме.

При рассогласовании фазовых скоростей, $n_1 \neq n_2$, наблюдаются

5.1. Зависимость амплитуды второй гармоники $|A_2|$ от расстояния в заданном поле основной волны $|A_1| \approx E_{01}$.

пространственные биения амплитуды второй гармоники $|A_2| \sim \sim |\sin(\Delta kz/2)|$ (рис. 5.1, кривая 2). Длина, на которой амплитуда гармоники достигает первого максимума, называется *длиной когерентного взаимодействия* и равна

$$L_{кор} = \frac{\pi}{|\Delta k|} = \frac{\lambda_1}{4|n_2 - n_1|}. \quad (2.15)$$

Максимум амплитуды второй гармоники на этой длине равен

$$A_{2,max}(L_{кор}) = \frac{2\gamma \omega E_{01}^2}{cn_2 |\Delta k|} = \frac{\gamma E_{01}^2}{n_2 |n_2 - n_1|}. \quad (2.16)$$

Пользуясь простыми формулами, полученными выше, можно дать ответ на очень важный вопрос в теории нелинейных волн: при какой дисперсии амплитуда второй гармоники остается много меньше амплитуды основной волны, т. е. при какой дисперсии нелинейный процесс генерации второй гармоники является слабым. Потребовав $A_{2,max} \ll E_{01}$, находим из (2.16) условие, накладываемое на сильную дисперсию нелинейной среды:

$$|n_2 - n_1| \gg \gamma E_{01}/n_2, \quad (2.17)$$

$$L_{кор} \ll L_{нл}.$$

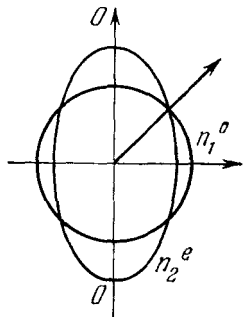
Последнее неравенство имеет фундаментальное значение, так как оно позволяет дать количественную характеристику сильно диспергирующей нелинейной среды (по отношению к взаимодействию волн). Если выполняется обратное неравенство, $L_{кор} \gg L_{нл}$,

или

$$|n_2 - n_1| \ll \gamma E_{01}/n_2, \quad (2.18)$$

то среда является слабо диспергирующей и возможно эффективное возбуждение гармоники с большой амплитудой, порядка начальной амплитуды основного излучения E_{01} . Неравенства (2.17) и (2.18) естественным образом обобщаются и на случай генерации высших гармоник.

В средах с естественной дисперсией не всегда удается выполнить условие (2.18) за счет перехода к сильным полям, так как возможности повышения поля ограничены. Поэтому применяются специальные методы, чтобы осуществить синхронную генерацию гармоники путем подбора дисперсии среды. В оптике согласование фазовых скоростей может быть достигнуто при взаимодействии световых волн с различными поляризациями. Например, в одноосном отрицательном кристалле обыкновенная волна основной частоты, распространяясь под определенным углом к оптической оси OO , может иметь ту же скорость, что и необыкновенная волна гармоники. Вдоль этого направления, называемого *направлением синхронизма*, показатели преломления равны друг другу (рис. 5.2). Если такой кристалл имеет квадратичную нелинейность, то основная волна может синхронно возбудить необыкновенную волну на удвоенной частоте.



5.2. Выполнение условия синхронизма в одноосном отрицательном кристалле при возбуждении второй гармоники ($n_1^o = n_2^e$).

Когда амплитуда второй гармоники становится сравнимой с амплитудой основной волны, приближение заданного поля непригодно и необходимо решать полную систему уравнений (2.3) и (2.4). Эту систему целесообразно исследовать в действительных переменных, для чего введем вместо комплексных амплитуд действительные амплитуды A_{0j} и фазы Φ_j :

$$A_j(z) = A_{0j}(z) \exp[i\Phi_j(z)], \quad j = 1, 2. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в уравнения (2.3) и (2.4) и отделяя мнимую и действительную части, получаем

$$\frac{dA_{01}}{dz} = \frac{\omega\gamma}{cn_1} A_{01}A_{02} \sin \Phi, \quad (2.20)$$

$$\frac{dA_{02}}{dz} = -\frac{\omega\gamma}{cn_2} A_{01}^2 \sin \Phi, \quad (2.21)$$

$$\frac{d\Phi}{dz} = \Delta k + \frac{\omega\gamma}{c} \left(\frac{2A_{02}}{n_1} - \frac{A_{01}^2}{n_2 A_{02}} \right) \cos \Phi, \quad (2.22)$$

где $\Phi(z) = 2\varphi_1(z) - \varphi_2(z) + \Delta kz$. Выпишем также с учетом граничных условий (2.9) законы сохранения (2.6) и (2.8), которые являются интегралами движения для взаимодействующих волн,

$$n_1 A_{01}^2(z) + n_2 A_{02}^2(z) = n_1 E_{01}^2, \quad (2.23)$$

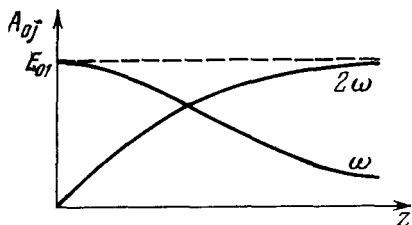
$$\Delta k A_{02}(z) = 2A_{01}^2(z) \cos \Phi. \quad (2.24)$$

При выполнении условия фазового синхронизма, $\Delta k = 0$, система уравнений (2.20) — (2.22) сильно упрощается. Из интеграла движения (2.24) видно, что при $\Delta k = 0$ имеем $\cos \Phi = 0$, т. е. соотношение между фазами волн, как и следовало ожидать, не нарушается в процессе взаимодействия, причем $\sin \Phi = -1$ и $\Phi = -\pi/2$. В итоге при синхронном взаимодействии волн на основной и удвоенной частотах уравнения для их амплитуд (2.20) и (2.21) принимают вид

$$i \frac{dA_{01}}{dz} = -\frac{\omega \gamma}{cn_1} A_{02} A_{01}, \quad (2.25)$$

$$\frac{dA_{02}}{dz} = \frac{\omega \gamma}{cn_2} A_{01}^2. \quad (2.26)$$

Используя закон сохранения полной энергии (2.23) а именно $A_{01}^2 + A_{02}^2 = E_{01}^2$, можно легко проинтегрировать эти уравнения:



$$A_{01} = E_{01} / \operatorname{ch} \frac{z}{L_{\text{нл}}}, \quad (2.27)$$

$$A_{02} = E_{01} \operatorname{th} \frac{z}{L_{\text{нл}}}. \quad (2.28)$$

5.3. Поведение амплитуд при полной перекачке энергии основной волны во вторую гармонику при точном согласовании фазовых скоростей.

где $L_{\text{нл}}$ — длина нелинейного взаимодействия, совпадающая с ранее введенной величиной (2.14). Зависимости амплитуд от расстояния показаны на рис. 5.3.

Полагая в (2.28) $z = L_{\text{нл}}$, находим, что на нелинейной длине амплитуда второй гармоники достигает относительного уровня 0,76, а интенсивность — уровня 0,58.

Из (2.28) и рис. 5.3 видно, что при точном согласовании фазовых скоростей основной волны и второй гармоники можно получить в принципе, при $z \rightarrow \infty$, 100%-ное преобразование энергии волны на частоте ω в энергию волны на частоте 2ω .

При наличии расстройки $\Delta k \neq 0$ систему уравнений (2.20) — (2.22) можно свести с помощью интегралов движения (2.23) и (2.24) к одному уравнению. Например, исключая из (2.20) ампли-

туду A_{02} и угол Φ , можно получить одно уравнение для A_{01} , которое решается в аналитическом виде. Приведем окончательный результат:

$$A_{02}^2 = KE_{01}^2 \operatorname{sn}^2 \left[\frac{z}{L_{\text{нл}} K^{1/2}}, K \right], \quad (2.29)$$

где sn — эллиптический синус,

$$K = \{(\Delta k L_{\text{нл}}/4) + [1 + (\Delta k L_{\text{нл}}/4)]^{1/2}\}^{-2}. \quad (2.30)$$

Если $\Delta k = 0$, то $K = 1$ и $\operatorname{sn} x = \operatorname{th} x$ — мы приходим к прежней формуле (2.28). Если $\Delta k \neq 0$, то возникают периодические пространственные биения амплитуд. При слабой дисперсии $\Delta k \cdot L_{\text{нл}} \ll \ll 1$, или $L_{\text{нл}} \ll L_{\text{ког}}$ (см. условие (2.18)), на расстоянии $z = L_{\text{нл}} \ln(1/\Delta k \cdot L_{\text{нл}})$ достигается максимум амплитуды, почти равный E_{01} . Если же $\Delta k \cdot L_{\text{нл}} \gg 1$, то из (2.29) следует формула, аналогичная полученной ранее в приближении заданного поля (2.11).

§ 3. Распадная неустойчивость волн.

Параметрическое усиление и генерация

Продолжим обсуждение нелинейных волновых эффектов в среде с квадратичной нелинейностью. В общем случае в одном процессе взаимодействия в такой среде могут участвовать одновременно три волны с частотами $\omega_3 > \omega_2 > \omega_1$, причем

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2. \quad (3.1)$$

Волны квадратичной поляризации, возбуждаемые в среде на этих частотах, имеют амплитуды и волновые векторы, равные (см. (1.33), (1.14) и (1.15))

$$\mathcal{P}_1 = p_1 \hat{\chi}(\omega_3 - \omega_2) e_3 e_2 A_3 A_2^*, \quad \mathbf{k}_{p_1} = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{P}_2 = p_2 \hat{\chi}(\omega_3 - \omega_1) e_3 e_1 A_3 A_1^*, \quad \mathbf{k}_{p_2} = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{P}_3 = p_3 \hat{\chi}(\omega_1 + \omega_2) e_1 e_2 A_1 A_2, \quad \mathbf{k}_{p_3} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (3.4)$$

Подставляя эти выражения в правые части укороченных уравнений (1.36), получаем следующую систему (затухание волн пока не учитываем):

$$\frac{dA_1}{dz} = -\frac{i\gamma\omega_1}{cn_1} A_3 A_2^* \exp(-i\Delta kz), \quad (3.5)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = -\frac{i\gamma\omega_2}{cn_2} A_3 A_1^* \exp(-i\Delta kz), \quad (3.6)$$

$$\frac{dA_3}{dz} = -\frac{i\gamma\omega_3}{cn_3} A_1 A_2 \exp(i\Delta kz), \quad (3.7)$$

где $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$, $\gamma = 2\pi e_1 \hat{\chi}(\omega_3 - \omega_1) e_3 e_2 = 2\pi e_2 \hat{\chi}(\omega_3 - \omega_1) e_3 e_1 = 2\pi e_3 \hat{\chi}(\omega_1 + \omega_2) e_1 e_2$. Последние равенства означают, как и в случае генерации гармоники (см. (2.7)), консервативность взаимодействия волн. Только теперь мы имеем три закона сохранения, которые называются *соотношениями Мэнли — Роу*

$$n_1 [A_{01}^2(z) - E_{01}^2]/\omega_1 = n_2 [A_{02}^2(z) - E_{02}^2]/\omega_2 = \\ = n_3 [E_{03}^2 - A_{03}^2(z)]/\omega_3, \quad (3.8)$$

где E_{0j} — амплитуды на границе нелинейной среды.

Следствием этих соотношений является *закон сохранения полной энергии*

$$n_1 A_{01}^2(z) + n_2 A_{02}^2(z) + n_3 A_{03}^2(z) = \text{const.} \quad (3.9)$$

Закон сохранения (2.8), выведенный для процесса генерации второй гармоники, также можно обобщить на трехчастотное взаимодействие, что позволяет в конечном итоге найти точное решение системы уравнений (3.5) — (3.7) через эллиптические функции. Однако мы не пойдем по такому пути, а проведем качественный анализ возможных режимов взаимодействия с помощью соотношений Мэнли — Роу и укороченных уравнений (3.5) — (3.7).

Выясним характер энергообмена между волнами. Пользуясь соотношением (3.8), можно сделать следующий важный вывод. Если энергия волны на наивысшей частоте ω_3 уменьшается, то она переходит одновременно в обе низкочастотные волны, и наоборот. То есть если амплитуда A_{03} уменьшается, то при этом амплитуды A_{01} и A_{02} возрастают; если же A_{03} увеличивается, то A_{01} и A_{02} падают. Такой характер взаимодействия существенным образом сказывается на поведении волн.

Предположим, что одна из трех волн намного интенсивнее двух других. Рассмотрим два различных случая: мощная высокочастотная волна частоты ω_3 и мощная низкочастотная волна частоты ω_1 или ω_2 .

Низкочастотная мощная волна. В соответствии с соотношениями Мэнли — Роу (3.8) квадрат амплитуды (плотность энергии) низкочастотной волны может изменяться при взаимодействии волн в следующих пределах:

$$-\frac{n_2 \omega_1}{n_1 \omega_2} E_{02}^2 + E_{01}^2 \leq A_{01}^2(z) \leq E_{01}^2 + \frac{n_3 \omega_1}{n_1 \omega_3} E_{03}^2. \quad (3.10)$$

Если на входе среды $E_{01} \gg E_{03}, E_{02}$, то, как видно из (3.10), амплитуда мощной волны изменяется в процессе распространения незначительно. Это говорит об устойчивости распространения волны, имеющей самую низкую или среднюю частоту среди трех взаимодействующих волн.

Из соотношений (3.8) можно найти возможный размах периодических колебаний амплитуд слабых волн на частотах ω_2 и ω_3 :

$$0 \leq A_{02}^2(z) \leq \frac{n_3 \omega_2}{n_2 \omega_3} E_{03}^2, \quad (3.11)$$

$$0 \leq A_{03}^2(z) \leq \frac{n_2 \omega_3}{n_3 \omega_2} E_{02}^2. \quad (3.12)$$

Мы еще раз убеждаемся, что величины амплитуд слабых волн остаются того же порядка, что и на входе в среду.

Все сказанное означает, что при данном типе взаимодействия изменение амплитуд на частотах ω_2 и ω_3 происходит в заданном поле основного излучения, $A_{01}(z) = E_{01}$, т. е. при постоянной амплитуде мощной низкочастотной волны. Решая уравнения (3.6) и (3.7) при этом условии, получаем следующие выражения:

$$|A_j| = |E_{0j}(0) \cos(z/L_0) + B_j \sin(z/L_0)|, \quad j = 2, 3, \quad (3.13)$$

где B_j — константы, определяемые из граничных условий, а L_0 — длина биений

$$L_0 = \left[\frac{\omega_3 \omega_2 \gamma^2 E_{01}^2}{n_2 n_3 c^2} + (\Delta k)^2 / 4 \right]^{-1/2}. \quad (3.14)$$

Из (3.13) видно, что в поле мощной низкочастотной волны слабые волны на других частотах не нарастают; их амплитуды испытывают периодические пространственные биения с характерным масштабом (3.14). Интересно подчеркнуть, что наличие расстройки волновых векторов Δk не меняет кардинальным образом протекания процесса взаимодействия: картина биений сохраняется, правда, частота пространственных биений возрастает (период сокращается).

Высокочастотная мощная волна. Пусть мощная волна имеет наибольшую частоту ω_3 . Согласно соотношениям Мэнли — Роу (3.8) она может отдать всю свою энергию слабым низкочастотным волнам:

$$0 \leq A_{03}^2(z) \leq E_{03}^2. \quad (3.15)$$

Иными словами, высокочастотная волна большой интенсивности, распространяясь в среде с квадратичной нелинейностью, может распадаться вследствие синхронного трехволнового взаимодействия на две низкочастотные волны. Это явление *распадной неустойчивости*.

Чтобы выявить условия распадной неустойчивости, рассмотрим начальный этап взаимодействия волн, когда высокочастотное поле можно считать заданным: $A_{03}(z) \approx E_{03}$, $A_{01}(z)$, $A_{02}(z) \ll \ll E_{03}$. При этом можно ограничиться решением двух связанных линейных уравнений (3.5) и (3.6), в которых $A_{03} = E_{03}$. Если

учесть диссипацию, то структура решения такова (ср. с (3.13)):

$$|A_j(z)| = |E_{0j}(0) \operatorname{ch}(\Gamma z) + B_j \operatorname{sh}(\Gamma z)| \exp(-\alpha z),$$

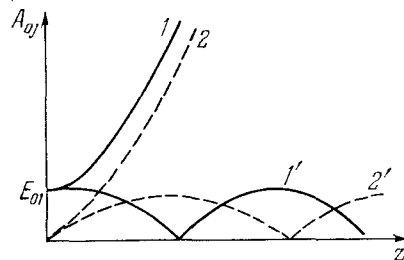
$$j = 1, 2, \quad (3.16)$$

где $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и коэффициент параметрического усиления

$$\Gamma = [\Gamma_0^2 - (\Delta k)^2/4]^{1/2}, \quad \Gamma_0 = \left(\frac{\omega_1 \omega_2}{n_1 n_2}\right)^{1/2} \frac{\gamma E_{03}}{c}. \quad (3.17)$$

Анализ формул (3.16) и (3.17) показывает, что параметрическое усиление низкочастотных волн имеет пороговый характер по амплитуде высокочастотной волны (рис. 5.4). Именно, экспоненциальное нарастание амплитуд (кривые 1, 2) может происходить лишь при условии $\Gamma_0^2 > \alpha^2 + (\Delta k)^2/4$, или

$$E_{03}^2 > \frac{n_1 n_2 c^2}{\omega_1 \omega_2 \gamma^2} [\alpha^2 + (\Delta k)^2/4]. \quad (3.18)$$



5.4. Зависимость амплитуд низкочастотных волн от расстояния в поле мощной высокочастотной волны амплитуды $A_{03} = E_{03}$ при $E_{02} = 0$.

Неравенство (3.18) устанавливает порог параметрического усиления; оно же определяет область распад-ной неустойчивости высокочастотной волны. Чем больше потери в среде (α) и чем сильнее рассогласование волновых чисел (Δk), тем выше порог параметрического усиления. Если условие (3.18) не достигнуто, то имеют место осцилляции амплитуд слабых волн (кривые 1', 2').

Распадная неустойчивость приводит к разрушению высокочастотных волн, участвующих в синхронном взаимодействии с низкочастотными (происходит трансформация спектра вниз). Однако это явление может быть и полезным, если его использовать для параметрического усиления слабых волн.

Параметрические волновые процессы играют большую роль в нелинейной оптике. На их основе созданы перестраиваемые по частоте источники когерентного света. Рассмотрим принцип перестройки частоты. Пусть на нелинейный кристалл падает мощная волна какой-либо фиксированной частоты $\omega_{3,0}$. С этой волной могут вступить в синхронное взаимодействие на квадратичной нелинейности две низкочастотные волны с частотами $\omega_{1,0}$ и $\omega_{2,0}$, для которых будут выполнены два условия

$$\omega_{3,0} = \omega_{1,0} + \omega_{2,0} \text{ и } k_3(\omega_{3,0}) = k_1(\omega_{1,0}) + k_2(\omega_{2,0}). \quad (3.19)$$

Начальные амплитуды этих слабых волн определяются нулевыми квантовыми флуктуациями поля или фоновым излучением. Вследствие параметрического усиления в поле мощной волны

частоты $\omega_{3,0}$ из кристалла будет выходить когерентное излучение на других частотах $\omega_{1,0}$ и $\omega_{2,0}$. Изменим теперь дисперсионные свойства кристалла в направлении распространения волн. Изменения показателей преломления $n(\omega_j)$ можно достичь путем изменения температуры кристалла, $\Delta n = \frac{\partial n}{\partial T}(T - T_0)$, путем изменения ориентации анизотропного кристалла, $\Delta n = \frac{\partial n}{\partial \theta}(\theta - \theta_c)$, (θ_c — угол, характеризующий направление синхронизма (3.19)) с помощью внешнего постоянного электрического поля, $\Delta n = 2\pi\chi^{(2)}E_0/n_0$ (эффект Поккельса — формула (1.16)). В результате этого условие синхронизма (3.19) нарушается, появляется волновая расстройка Δk и коэффициент параметрического усиления согласно формуле (3.17) для волн с частотами $\omega_{1,0}$ и $\omega_{2,0}$ уменьшается, а интенсивность этих волн на выходе из кристалла падает. Условие синхронизма будет выполняться для волн с другими частотами

$$\omega_1 = \omega_{1,0} + \Omega \quad \text{и} \quad \omega_2 = \omega_{2,0} - \Omega \quad (3.20)$$

(сумма частот остается постоянной: $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{3,0}$). Отстройка частоты Ω определяется условием синхронизма:

$$k_3(\omega_{3,0}, T, \theta, E_0) = k_1(\omega_{1,0} + \Omega, T, \theta, E_0) + k_2(\omega_{2,0} - \Omega, T, \theta, E_0). \quad (3.21)$$

Раскладывая k_1 , k_2 и k_3 в ряд по малым величинам, находим с учетом (3.19) и (3.20) частотную отстройку

$$\Omega = \frac{g_T(T - T_0) + g_\theta(\theta - \theta_c) + g_{E_0}E_0}{1/u_1 - 1/u_2}, \quad (3.22)$$

где u_j — групповая скорость, на частоте ω_j ;

$$g_F = \frac{\partial n_3}{\partial F} \frac{\omega_{3,0}}{c} - \frac{\partial n_1}{\partial F} \frac{\partial \omega_{1,0}}{c} - \frac{\partial n_2}{\partial F} \frac{\partial \omega_{2,0}}{c}, \quad F = T, \theta, E_0.$$

Таким образом, на выходе из кристалла будем иметь когерентное излучение на новых частотах, причем перестройку частоты Ω можно осуществлять непрерывно путем плавного изменения температуры и ориентации кристалла или внешнего постоянного электрического поля.

Эффект параметрического усиления будет тем больше, чем больше амплитуда поля основной волны частоты $\omega_{3,0}$ или чем больше длина нелинейного кристалла. Увеличение длины кристалла можно имитировать, помещая кристалл внутрь открытого резонатора (см. гл. XI). Тогда излучение на обеих частотах ω_1 и ω_2 или на одной из них, периодически отражаясь от зеркал, будет проходить через кристалл неоднократно, каждый раз усиливаясь. За время t волны пройдут как бы через нелинейную

среду толщиной $z_{\text{эфф}} = ut/2$ (уменьшение длины в два раза связано с тем, что волны, бегущие навстречу основной волне, не усиливаются). Подставляя величину эффективного пройденного расстояния $z_{\text{эфф}}$ в формулу (3.16), находим закон нарастания параметрических колебаний света в открытых резонаторах

$$|A_j| \sim \exp [(\Gamma - \alpha) ut]. \quad (3.23)$$

При условии $\Gamma > \alpha$ наступает параметрическая генерация света: амплитуды усиливаемых волн растут экспоненциально во времени. Частоту параметрического генератора света можно плавно перестраивать, как и в случае параметрического усиления бегущих световых волн (3.22).

§ 4. Взрывная неустойчивость волн в неравновесных средах

В предыдущих двух параграфах было рассмотрено когерентное взаимодействие волн в слабо диссипативных средах. Отметим, что хотя речь для определенности шла об электромагнитных волнах в диэлектрике, основные закономерности трехволновых взаимодействий не зависят от природы волн и носят общий характер. С этой точки зрения весьма полезно рассмотреть нелинейные взаимодействия в неравновесных средах. Если в слабо диссипативных средах общая энергия волн уменьшается, переходя в тепло, то в неравновесных средах возможен приток энергии извне. Рост энергии волн может происходить при линейном усилении волн в активной среде (знак коэффициента поглощения α меняется на обратный, поэтому этот случай достаточно тривиален).

Совершенно новые эффекты возникают, когда неравновесность процесса обусловлена нелинейным взаимодействием волн со средой. Рассмотрим характерный пример, описываемый системой укороченных уравнений (ср. с (3.5) — (3.6)):

$$\frac{dA_1}{dz} = \gamma_1 A_3 A_2^*, \quad (4.1)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \gamma_2 A_3 A_1^*, \quad (4.2)$$

$$\frac{dA_3}{dz} = \gamma_3 A_1 A_2. \quad (4.3)$$

Нетрудно видеть, что полная энергия $\sum_j |A_j|^2$ сохраняется, если

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3^* = 0. \quad (4.4)$$

При невыполнении условия (4.4) консервативность системы нарушается.

Будем считать, что в физическом процессе реализуется ситуация, когда все коэффициенты нелинейности положительны, $\gamma_j > 0$.

Из системы (4.1) — (4.3) видно, что если фазы волн равны нулю (амплитуды — действительные величины, $A_j = A_{0j}$), то за счет внешней энергии происходит одновременный рост всех амплитуд, $\frac{dA_{0j}}{dz} > 0$. Выясним характер такого нарастания. Положим для простоты $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}_3 = \tilde{\gamma}$ — это можно сделать путем нормировки амплитуд: $A_{0j} = \tilde{A}_{0j}\tilde{\gamma}_j^{1/2}$; тогда $\tilde{\gamma} = \sqrt{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}$. Прежде всего следует указать одно важное решение, когда амплитуды ведут себя одинаково:

$$\tilde{A}_{0j}(z) = \frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\gamma}\tilde{E}z}, \quad (4.5)$$

где \tilde{E} — начальное значение нормированных амплитуд. Из (4.5) следует, что в неравновесной среде амплитуды взаимодействующих волн стремятся обратиться в бесконечность — происходит «взрыв». Длина развития взрывной неустойчивости равна

$$l_{\text{взр}} = 1/\tilde{\gamma}\tilde{E}. \quad (4.6)$$

В вырожденном случае, $A_{01} = A_{02}$, отвечающем, в частности, генерации второй гармоники, интегрирование системы уравнений (4.1) — (4.3) можно провести очень просто при общих граничных условиях, воспользовавшись интегралом движения (по-прежнему считаем $\gamma_j = \gamma$):

$$A_{01}^2(z) - A_{03}^2(z) = A_{02}^2(z) - A_{03}^2(z) = A_{01}^2(0) - A_{03}^2(0) = C. \quad (4.7)$$

Подставляя (4.7) в (4.1) или (4.2), получаем после интегрирования следующие выражения для амплитуд: при генерации волны на суммарной частоте (гармоники) $A_{01}(0) > A_{03}(0)$, $C > 0$,

$$A_{01} = A_{02} = \frac{A_{01}(0)}{\cos \tilde{z} - \frac{A_{03}(0)}{\sqrt{C}} \sin \tilde{z}}, \quad (4.8)$$

$$A_{03} = \frac{A_{03}(0) \cos \tilde{z} + \sqrt{C} \sin \tilde{z}}{\cos \tilde{z} - \frac{A_{03}(0)}{\sqrt{C}} \sin \tilde{z}}; \quad (4.9)$$

при параметрическом усилении, $A_{03}(0) > A_{01}(0)$, $C < 0$,

$$A_{01} = A_{02} = \frac{A_{01}(0)}{\text{ch } \tilde{z} - \frac{A_{03}(0)}{\sqrt{|C|}} \text{sh } \tilde{z}}, \quad (4.10)$$

$$A_{03} = \frac{A_{03}(0) \text{ch } \tilde{z} - \sqrt{|C|} \text{sh } \tilde{z}}{\text{ch } \tilde{z} - \frac{A_{03}(0)}{\sqrt{|C|}} \text{sh } \tilde{z}}, \quad (4.11)$$

где $\tilde{z} = \gamma \sqrt{|C|} z$.

Положение точки взрыва $l_{\text{взр}}$, в которой $A_{0j} \rightarrow \infty$, зависит от соотношения начальных амплитуд

$$l_{\text{взр}} = \begin{cases} \frac{1}{\gamma \sqrt{C}} \arctg \frac{\sqrt{C}}{A_{03}(0)} & \text{при } C > 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma \sqrt{|C|}} \text{arth} \frac{\sqrt{|C|}}{A_{03}(0)} & \text{при } C < 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

В частности, если вначале $A_{03}(0) = 0$, $C = A_{01}^2(0)$, то $l_{\text{взр}} = \pi/(2\gamma A_{01}(0))$; если амплитуды волн равны, $A_{01}(0) = A_{02}(0) = A_{03}(0)$, $C = 0$, то длина развития взрыва сокращается $l_{\text{взр}} = 1/(\gamma A_{01}(0))$. Если же поле на частотах ω_1 и ω_2 отсутствует вначале, $A_{01}(0) = A_{02}(0) = 0$, $C = -A_{03}^2(0)$, то процесс распада волны без начального возмущения не идет.

Взрывная неустойчивость может наблюдаться в пограничном слое гидродинамических течений, а также в неравновесной плазме.

§ 5. Самовоздействие волн. Нелинейная дисперсия и нелинейное поглощение

На нечетных нелинейностях (третьего, пятого и высшего порядков) происходит самовоздействие волн. Если в материальном уравнении просуммировать все нелинейные члены, ответственные за самовоздействие, например, электромагнитных волн, можно ввести нелинейную диэлектрическую проницаемость (см. (1.24))

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_{\text{нл}}(|E|^2), \quad (5.1)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость линейной среды при $|E| \rightarrow 0$, $\epsilon_{\text{нл}}$ — нелинейная добавка, зависящая от интенсивности поля и являющаяся, вообще говоря, комплексной величиной, $\epsilon_{\text{нл}} = \epsilon'_{\text{нл}} - i\epsilon''_{\text{нл}}$.

На нечетных нелинейностях будут возбуждаться нечетные гармоники, однако при отсутствии фазового синхронизма они, как мы видели на примере генерации второй гармоники в § 2, будут слабыми, и ими можно пренебречь.

Если среда слабо нелинейна, $|\epsilon_{\text{нл}}| \ll |\epsilon_0|$, и слабо поглощающая, $|\epsilon''| \ll |\epsilon'|$, то для описания самовоздействия плоских монохроматических волн можно воспользоваться методом медленно изменяющихся амплитуд, который приводит к укороченному уравнению

$$\frac{dA}{dz} = - \frac{ik(\epsilon_{\text{нл}} + \epsilon''_0)}{2\epsilon_0} A, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0}. \quad (5.2)$$

Перейдем от комплексной амплитуды к действительной амплитуде и фазе

$$A = A_0 \exp(-ik\psi). \quad (5.3)$$

Здесь ψ — добавка к эйконалу плоской волны из-за нелинейности среды. Подставляя (5.3) в (5.2) и отделяя мнимую и действительную части, имеем

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\varepsilon'_{\text{нл}}(A_0^2)}{2\varepsilon'_0}, \quad (5.4)$$

$$\frac{dA_0}{dz} = -\alpha A_0, \quad \alpha = \alpha_{\text{л}} + \alpha_{\text{нл}}, \quad (5.5)$$

где α — коэффициент линейного и нелинейного поглощения,

$$\alpha_{\text{л}} = k\varepsilon''_0/2\varepsilon'_0, \quad \alpha_{\text{нл}} = k\varepsilon''_{\text{нл}}(A_0^2)/2\varepsilon'_0. \quad (5.6)$$

Рассмотрим эффекты, связанные с действительной и мнимой частями нелинейной диэлектрической проницаемости.

Нелинейная дисперсия. Пусть затухание волны мало, так что можно положить $\alpha \approx 0$. Тогда из (5.5) следует, что $A_0 = E_0 = \text{const}$, а из (5.4) находим

$$\psi = \varepsilon'_{\text{нл}}(E_0^2)z/2\varepsilon'_0, \quad (5.7)$$

и полное волновое поле можно записать в виде

$$E = \frac{1}{2} E_0 \exp\{i[\omega t - k_{\text{нл}}z]\} + \text{к. с.}, \quad (5.8)$$

где $k_{\text{нл}} = k\left(1 + \frac{\varepsilon'_{\text{нл}}}{2\varepsilon'_0}\right)$.

Из (5.8) видно, что вследствие нелинейности действительной части диэлектрической проницаемости $\varepsilon'_{\text{нл}}(E_0^2)$ изменилось волновое число, а следовательно, и фазовая скорость

$$v_{\text{нл}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'_0(1 + \varepsilon'_{\text{нл}}/2\varepsilon'_0)}} \approx v_{\text{л}} \left(1 - \frac{\varepsilon'_{\text{нл}}}{2\varepsilon'_0}\right), \quad (5.9)$$

причем в среде с $\varepsilon'_{\text{нл}} > 0$ волна замедляется, а в среде с $\varepsilon'_{\text{нл}} < 0$ ускоряется по сравнению со случаем линейной среды. Так как нелинейная часть диэлектрической проницаемости может зависеть от частоты по-другому, чем ее линейная часть, то при изменении амплитуды волны меняются дисперсионные свойства нелинейной среды.

Нелинейное поглощение. Рассмотрим противоположный случай, когда поглощение в среде велико. Тогда в первую очередь необходимо проанализировать характер затухания амплитуды

на основе решения уравнения (5.5) с учетом (5.6). В линейной среде, $\epsilon''_{нл} = 0$, волна затухает экспоненциально

$$A_0 = E_0 \exp(-\alpha_{лl}). \quad (5.10)$$

Предположим теперь, что линейное поглощение мало, $\alpha_{л} \approx 0$, а при описании нелинейного поглощения учтем только первый член разложения $\epsilon''_{нл}$ по полю, т. е. положим $\epsilon''_{нл} = \epsilon''_2 A_0^2$ и

$$\alpha_{нл} = k\epsilon''_2 A_0^2 / 2\epsilon_0. \quad (5.11)$$

Решая уравнение (5.5) при $\alpha_{л} \approx 0$ и $\alpha_{нл}$ из (5.11), находим

$$A_0^2 = \frac{E_0^2}{1 + \epsilon''_2 E_0^2 k z / \epsilon_0}. \quad (5.12)$$

Отсюда видно, что в среде с нелинейным поглощением волна с большей амплитудой затухает быстрее. Интересно отметить, что на расстояниях $z > \epsilon_0' / (\epsilon''_2 E_0^2 k)$, т. е. в зоне поглощения, амплитуда не зависит от величины поля на границе: $A_0^2 \approx \epsilon_0' / (\epsilon''_2 k z)$. Таким образом, достаточно толстая нелинейно-поглощающая пластина может быть использована как ограничитель интенсивности волн, проходящих через пластину.

Нелинейное просветление среды. При определенных условиях поглощение некоторых сред может уменьшаться под действием распространяющейся волны. Например, в туманах и облаках капли воды могут испаряться вследствие их нагревания при поглощении энергии электромагнитной волны, а уменьшение размеров капель ведет к ослаблению поглощения. В результате этого происходит просветление облачной среды. Эффект индуцированного просветления может наблюдаться также при прохождении оптического излучения через газы, полупроводники и т. д. В этих и других подобных случаях в качестве простейшей модели можно взять следующий дифференциальный закон уменьшения поглощения среды под действием поля волны:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \gamma \alpha A_0^2 = 0. \quad (5.13)$$

Здесь γ — параметр нелинейного взаимодействия волны со средой. Согласно (5.13) коэффициент поглощения α уменьшается экспоненциально

$$\alpha = \alpha_0 \exp[-\gamma W(t)], \quad (5.14)$$

где $W(t) = \int_0^t A_0^2(t_1, z) dt_1$ — объемная плотность энергии, прошедшей через данную точку к моменту времени t . Так как волна первоначально входит в сильно поглощающую среду, то плот-

ность энергии различна в разных местах и просветление идет сначала более эффективно вблизи границы поглощающей среды. Затем область просветления будет продвигаться в глубь среды. Чтобы проанализировать процесс просветления среды, необходимо решить совместно уравнение (5.5) и (5.13) при естественных граничных и начальных условиях:

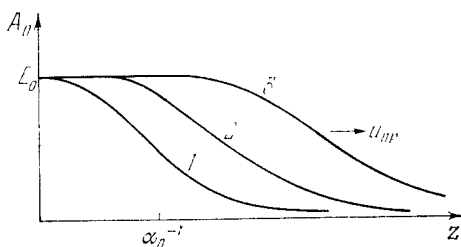
$$A_0(0, t) = E_0(t), \quad \alpha(z, 0) = \alpha_0. \quad (5.15)$$

Оказывается, что данная задача имеет точное решение

$$A_0^2 = \frac{E_0^2(t)}{1 + [\exp(2\alpha_0 z) - 1] \exp(-\gamma W_0)}, \quad (5.16)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + [\exp(\gamma W_0) - 1] \exp(-2\alpha_0 z)}, \quad W_0 = \int_0^t E_0^2(t_1) dt_1.$$

Естественно, наиболее интересной является область $\alpha_0 z \gg 1$, где волна первоначально сильно затухает. Если начальная энергия волны достаточно велика, так что $\gamma W_0 \gg \alpha_0 z \gg 1$, то проис-



5.5. Зависимость амплитуды волны от расстояния при просветлении среды в различные моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$.

ходит просветление среды: $\alpha \ll \alpha_0$ и волна практически не испытывает затухания $A_0 \approx E_0$ в области $z > \alpha_0^{-1}$ (рис. 5.5). Уравнение

$$2\alpha_0 z_{np} = \gamma W_0(t) \quad (5.17)$$

определяет, по существу, протяженность зоны просветления z_{np} в каждый момент времени. Дифференцируя это соотношение по времени, можно найти скорость перемещения фронта просветления $u_{np} = dz_{np}/dt$:

$$u_{np} = \gamma E_0^2(t)/2\alpha_0. \quad (5.18)$$

Чем выше входная интенсивность волны E_0^2 и параметр нелинейности среды γ и чем меньше начальное поглощение α_0 , тем быстрее просветляется среда.

Если на среду падает прямоугольный импульс, $E_0 = \text{const}$, то скорость движения фронта просветления постоянна и в зоне $\alpha_0 z \gg 1$ формируется стационарная волна просветления:

$$A_0^2 = \frac{E_0^2}{1 + \exp [2\alpha_0 (z - u_{\text{пр}}t)]} , \quad (5.19)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \exp [-2\alpha_0 (z - u_{\text{пр}}t)]} . \quad (5.20)$$

Интересно отметить, что эти выражения являются точными решениями уравнений (5.5) и (5.13). При конечной длительности импульса излучения $0 \leq t \leq T_{\text{и}}$ протяженность области просветления также конечна

$$z_{\text{пр}} \approx u_{\text{пр}} T_{\text{и}} \approx \gamma W_0 / 2\alpha_0 .$$

Зная закон затухания амплитуды, можно найти изменение фазы путем решения уравнения для эйконала (5.4).

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СРЕДАХ СО СЛАБОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

При изучении нелинейных волн различают два предельных случая: когда среда обладает сильной дисперсией и когда дисперсии нет вовсе. Эти случаи отличаются друг от друга способами описания. Если в задачах нелинейной оптики (см. гл. V) преимущественно используются укороченные уравнения, записанные для комплексных амплитуд нескольких (обычно двух-трех) взаимодействующих волн, то в задачах нелинейной акустики, где дисперсия скорости звука практически отсутствует, нужно учитывать гораздо большее число взаимодействий. Как будет показано ниже, звуковая волна с гладким (например, синусоидальным) профилем на некотором расстоянии становится разрывной волной. Наряду с гладкими участками профиль будет содержать крутые скачки типа ударных волн. Для описания динамики этих скачков нужно знать изменение с расстоянием большого числа (обычно $10 \div 100$) компонент Фурье, формирующих разрыв. Решить систему из 100 или даже 10 связанных нелинейных уравнений аналитически невозможно. Здесь оказывается удобным, не переходя к спектральному описанию, оперировать переменными, описывающими звуковое поле, — возмущениями плотности ρ' , давления p' и колебательной скорости u . Такое описание — в противоположность спектральному или амплитудному, используемому в нелинейной оптике, — мы будем называть *полевым описанием нелинейных волновых процессов*.

Эта глава будет посвящена преимущественно задачам распространения интенсивных звуковых волн в средах без дисперсии, т. е. задачам нелинейной акустики. Некоторые вопросы теории волновых взаимодействий, происходящих при наличии слабой дисперсии, будут рассмотрены в § 6; этот случай является промежуточным и поэтому поможет лучше понять связь между двумя «полярными» областями теории нелинейных волн — акустикой и оптикой.

§ 1. Простые волны

Уравнения гидродинамики для среды без поглощения были использованы в § 2 гл. I для изучения звуковых волн в линейном приближении. Предположим, что движение среды является плоским, т. е. переменные p , ρ , u зависят лишь от координаты x .

Кроме того, поскольку рассматриваются продольные волны, отлична от нуля только проекция гидродинамической скорости u на направление x (в дальнейшем она будет обозначаться через u). В этом случае уравнения (2.1) — (2.3) запишутся в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = p(\rho). \quad (1.1)$$

Точное решение уравнений (1.1), описывающее бегущие плоские волны, было найдено Риманом в 1860 г. Замечательно, что при отыскании этого решения можно не предполагать нелинейность малой.

Будем называть *простой волной* такой волновой процесс, в котором все описывающие этот процесс параметры могут быть выражены в виде функций одного из них, например,

$$\rho = \rho(u), \quad p = p(u) \quad \text{или} \quad u = u(\rho), \quad p = p(\rho). \quad (1.2)$$

Подчеркнем, что связи (1.2) не могут содержать интегралы или производные. Зависимость от времени и координаты предполагается локальной, что связано с фактом отсутствия дисперсии.

Подставляя (1.2) в уравнения (1.1) и дифференцируя, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial u}\right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho u) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (1.3)$$

Заметим, что систему (1.3) удастся проинтегрировать в том случае, если выражения (1.2) будут явно определены. Перепишем (1.3) следующим образом:

$$-\frac{\partial u/\partial t}{\partial u/\partial x} = u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial u}, \quad -\frac{\partial \rho/\partial t}{\partial \rho/\partial x} = u + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho}. \quad (1.4)$$

По правилу дифференцирования неявной функции левые части выражений (1.4) представляют собой производную $\partial x/\partial t$, в первом случае взятую при постоянной u , во втором — при постоянной ρ . Но в силу (1.2) фиксированное значение u однозначно определяет ρ . Следовательно, равны левые и правые части уравнений (1.4):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_u = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho, \quad u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial u} = u + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho}. \quad (1.5)$$

Обозначая $c^2 = \partial p/\partial \rho$, приведем (1.5) к виду $c^2 \partial \rho/\partial u = \rho^2 \partial u/\partial \rho$, откуда получается соотношение

$$du/d\rho = \pm c/\rho, \quad (1.6)$$

позволяющее явно определить выражения (1.2), связывающие u , ρ , p :

$$u = \pm \int \frac{c}{\rho} d\rho = \pm \int \frac{dp}{\rho c}. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.4), установим вид дифференциальных уравнений для u , ρ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [u \pm c(u)] \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + [u(\rho) \pm c(\rho)] \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (1.8)$$

Найдем решение, например, первого из уравнений (1.8), соответствующее условию $u = \Phi(t)$ на границе $x = 0$. Составляем уравнения для характеристик:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u \pm c(u)} = \frac{du}{0}. \quad (1.9)$$

Уравнения (1.9) имеют два интеграла

$$u = C_1, \quad -x + [u \pm c(u)] t = C_2. \quad (1.10)$$

С помощью граничного условия и (1.10) находим связь между константами

$$C_1 = \Phi(t), \quad C_2 = [\Phi \pm c(\Phi)] t, \quad C_2 = [C_1 \pm c(C_1)] \Phi^{-1}(C_1) \quad (1.11)$$

(Φ^{-1} — функция, обратная Φ).

Отсюда следует

$$u = \Phi \left\{ t \mp \frac{x}{c(u) \pm u} \right\}. \quad (1.12)$$

Выражения (1.6) — (1.12) справедливы для волн, бегущих как в положительном, так и в отрицательном направлении оси x . В последнем решении (1.12), например, верхние знаки соответствуют волне, бегущей вправо.

В случае адиабатического уравнения состояния, $p = p_0 (\rho/\rho_0)^\gamma$, как несложно вычислить,

$$c(u) = c_0 \pm \frac{\gamma-1}{2} u. \quad (1.13)$$

Связи (1.2) между параметрами для адиабатического уравнения состояния имеют вид

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 \pm \frac{\gamma-1}{2} \frac{u}{c_0} \right)^{2/(\gamma-1)}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 \pm \frac{\gamma-1}{2} \frac{u}{c_0} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}. \quad (1.14)$$

Проанализируем теперь подробно решение (1.12) для волны, бегущей вправо

$$u = \Phi \left\{ t - \frac{x}{c_0 + \frac{\gamma+1}{2} u} \right\}. \quad (1.15)$$

Последнее выражение показывает, что относительно неподвижной системы координат возмущение среды, соответствующее фикси-

рованному значению u , движется со скоростью

$$U = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} u, \quad (1.16)$$

т. е. скорость перемещения точек профиля неодинакова. Те точки, у которых $u > 0$, движутся со скоростями $U > c_0$ и соответствуют областям сжатия. Напротив, области разрежения ($u < 0$) движутся со скоростями $U < c_0$.

Исходный профиль волны по мере распространения деформируется. Эту деформацию удобнее всего наблюдать, двигаясь вместе с волной со скоростью c_0 . Однако прежде чем перейти к графическому анализу (1.15) в сопровождающей системе координат, несколько упростим полученное решение (1.15). Считая величину u/c_0 малой, запишем

$$t - \frac{x}{c_0 \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{u}{c_0}\right)} \approx t - \frac{x}{c_0} \left[1 - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{u}{c_0}\right] = \tau + \frac{\varepsilon}{c_0^2} ux. \quad (1.17)$$

Здесь обозначено $\tau = t - x/c_0$, $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$. Безразмерный параметр u/c_0 , по которому проводилось разложение, называется *числом Маха*. Для нелинейных звуковых волн обычно $M \sim 10^{-4} \div 10^{-2}$.

С учетом (1.17) имеем

$$u = \Phi \left(\tau + \frac{\varepsilon}{c_0^2} ux \right). \quad (1.18)$$

Нетрудно убедиться, что (1.18) удовлетворяет уже не уравнению (1.8), а более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \quad (1.19)$$

которое легко получить из (1.8), сохранив в нем член только с квадратичной нелинейностью. Уравнение (1.19) будем называть *уравнением простых волн* в приближении квадратичной нелинейности (или, иначе, «во втором приближении»).

Можно показать (мы этого делать не будем), что решение Римана во втором приближении правильно описывает поведение интенсивной звуковой волны. Учет же членов третьего и более высоких порядков по числу Маха u/c_0 , вообще говоря, некорректен, поскольку изменение энтропии (не учтенное в адиабатическом уравнении состояния) имеет тот же — третий порядок малости по числу Маха.

Выражение (1.18) удобно анализировать графически. Положим $u(x = 0, \tau) = u_0 \sin(\omega \tau)$. Тогда, решив (1.18) относительно τ ,

имеем

$$\omega\tau = \arcsin \frac{u}{u_0} - z \frac{u}{u_0}, \quad (1.20)$$

$$z = \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega u_0 x.$$

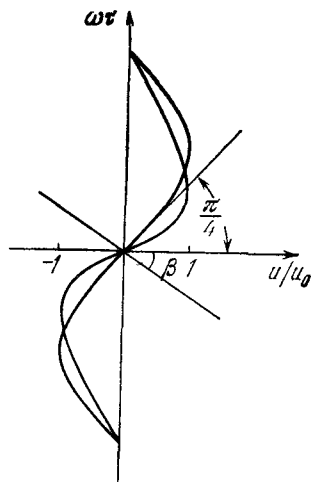
Как показано на рис. 6.1, интересующие нас деформированные профили (при $z \neq 0$) получаются путем графического сложения функции $\omega\tau = \arcsin(u/u_0)$, описывающей исходный профиль волны наклоне которой увеличивается пропорционально z . Когда угол $\beta = \text{arctg } z$ станет равным $\pi/4$, в профиле волны появится неоднозначность, соответствующая образованию разрыва. Поэтому условие $z = 1$ определяет расстояние, пройдя которое, волна из гладкой синусоиды трансформируется в разрывную волну с формой, похожей на пилообразную. Безразмерное расстояние $z = 1$ отвечает длине пути формирования разрыва x_p , которая равна

$$x_p = \frac{c_0^2}{\varepsilon \omega u_0} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon M}, \quad (1.21)$$

$M = u_0/c_0$ — «амплитудное» число Маха. На длине x_p укладывается $(2\pi \varepsilon M)^{-1}$ длин волн.

Решение Римана — это точное решение нелинейных уравнений гидродинамики. К сожалению, получить точное решение нелинейных уравнений удастся только в исключительных случаях. При небольшом усложнении системы (1.1) придется искать приближенные решения. Здесь можно воспользоваться тем обстоятельством, что нелинейные искажения, претерпеваемые волной на расстояниях порядка длины волны, очень малы. Это связано с малостью числа Маха. Действительно, характерное нелинейное расстояние — длина образования разрыва, — как следует из (1.21), содержит много ($\sim M^{-1}$) длин волн.

Как мы отмечали в § 2 гл. I, для учета медленных искажений волны с целью упрощения уравнений удобно воспользоваться методом медленно изменяющегося профиля. Положим в (1.1) $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$ и сохраним в этой системе члены первого и второго порядков малости, считая малым параметром отношения ρ'/ρ_0 , p'/p_0 , u/c_0 , пропорциональные числу Маха. Это



6.1. Графический анализ нелинейной деформации профиля простой волны.

приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\rho_0 + \rho') \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho'}{\partial x} &= 0, \\ (\rho_0 + \rho') \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0 u \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad p' = c_0^2 \rho' + \frac{(\gamma-1)}{2\rho_0} c_0^2 \rho'^2. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Исключим из двух последних уравнений приращение давления p' и перепишем полученные соотношения так, чтобы в левых частях были собраны члены первого, а в правых — второго порядка малости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{\partial}{\partial x} (\rho' u), \\ \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} &= - \rho' \frac{\partial u}{\partial t} - \rho_0 u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{(\gamma-1)}{\rho_0} c_0^2 \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Если интересоваться волной, бегущей в положительном направлении оси x , без уменьшения точности в членах второго порядка можно воспользоваться соотношениями (2.13) гл. I, справедливыми для звуковых волн в линейном приближении. Полагая в правых частях (1.23) $\rho' = \rho_0 u / c_0$, получим

$$\begin{aligned} c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} &= - c_0 \frac{\partial u^2}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} &= - \left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{u^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

В членах первого порядка малости можно исключить переменную ρ' . Для этого нужно продифференцировать первое уравнение (1.24) по x , второе — по t и вычесть одно полученное соотношение из другого. В результате придем к нелинейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \left(\frac{1}{c_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - 2c_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{u^2}{2}, \quad (1.25)$$

которое непосредственно решать трудно. Используя метод медленно изменяющегося профиля, уравнение (1.25) удастся значительно упростить. Преобразования, полностью аналогичные проделанным в § 2 гл. I, позволяют при переходе в (1.25) к сопровождающим координатам $\tau = t - x/c_0$, μx положить

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{2}{c_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau}, \\ \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial x \partial \tau} \approx - \frac{1}{c_0} \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} \approx \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tau^2}. \end{aligned}$$

В этом приближении из (1.25) удастся вывести уравнение (1.19) для простых волн.

Точно таким же способом получают и более сложные нелинейные уравнения. Например, в § 4 этой главы мы рассмотрим уравнение Бюргерса, описывающее распространение нелинейных звуковых волн в диссипативной среде.

§ 2. Нелинейные взаимодействия в простых волнах

Превращение синусоидальной волны в пилообразную на спектральном языке означает обогащение исходного спектра волны кратными гармониками. Рассчитать изменение амплитуд гармоник можно различными способами. Наиболее прямой путь решения нелинейных уравнений — это решение методом последовательных приближений. Ищем решение (1.19) в виде $u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + \dots$, причем считаем, что $u^{(n+1)} \ll u^{(n)}$. Уравнения первого и второго приближений имеют вид

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2c_0^2} \frac{\partial}{\partial \tau} u^{(1)2}. \quad (2.1)$$

Если на входе, при $x = 0$, задан гармонический сигнал $u^{(1)}(0, \tau) = u_0 \sin(\omega\tau)$, то

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x, \tau) &= u_0 \sin(\omega\tau) \\ u^{(2)}(x, \tau) &= \frac{\varepsilon}{2c_0^2} u_0 \omega x \cdot u_0 \sin(2\omega\tau) = \frac{z}{2} u_0 \sin(2\omega\tau). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Как показывает результат, в этом приближении амплитуда первой гармоники постоянна, а амплитуда второй растет с расстоянием по линейному закону. В точке образования разрыва $z = 1$ амплитуда второй гармоники достигает $1/2$ от амплитуды первой. Однако при $z \sim 1$ метод последовательных приближений уже неточен, так как нарушается требование $u^{(2)} \ll u^{(1)}$. Решение следующего приближения позволяет установить закон нарастания амплитуды третьей гармоники и нелинейную поправку к амплитуде первой.

Если сигнал на входе представляет собой сумму двух гармонических колебаний

$$u^{(1)} = u_1 \sin(\omega_1\tau) + u_2 \sin(\omega_2\tau), \quad (2.3)$$

то решение второго приближения будет иметь вид

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= \frac{\varepsilon x}{2c_0^2} \{u_1^2 \omega_1 \sin(2\omega_1\tau) + u_2^2 \omega_2 \sin(2\omega_2\tau) - u_1 u_2 (\omega_1 - \omega_2) \times \\ &\times \sin[(\omega_1 - \omega_2)\tau] + u_1 u_2 (\omega_1 + \omega_2) \sin[(\omega_1 + \omega_2)\tau]\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

т. е. в среде помимо кратных гармоник $2\omega_1$, $2\omega_2$ возникают волны комбинационных — разностной $(\omega_1 - \omega_2)$ и суммарной $(\omega_1 + \omega_2)$ частот. Решение в более высоких приближениях с граничным

условием (2.3) позволяет найти амплитуды сколь угодно высоких гармоник $n\omega_1$, $m\omega_2$ и всевозможные комбинационные волны $n\omega_1 \pm m\omega_2$ (n, m — натуральные числа).

Все рассуждения, основанные на методе последовательных приближений, мы проводили с иллюстративной целью. На самом же деле в случае простых волн обычно поступают иначе. Известен прием, позволяющий установить полный гармонический состав простой волны, исходя непосредственно из решения в неявной форме (1.18). Для гармонического на входе сигнала выражение (1.18) запишется как

$$u/u_0 = \sin(\omega\tau + zu/u_0). \quad (2.5)$$

Задача состоит в том, чтобы представить (2.5) в виде

$$u/u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(z) \sin(n\omega\tau). \quad (2.6)$$

Выражения для амплитуд гармоник в соответствии с правилом разложения нечетной функции в ряд Фурье следует вычислять по формуле

$$B_n(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(\omega\tau + z \frac{u}{u_0}\right) \sin(n\omega\tau) d(\omega\tau). \quad (2.7)$$

Здесь имеется трудность: интеграл берется от функции, заданной неявно. Однако существует прием, позволяющий свести (2.7) к интегралу от явной функции. Совершим замену переменной

$$\omega\tau + zu/u_0 = \xi, \quad \omega\tau = \xi - z \sin \xi. \quad (2.8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} B_n &= -\frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin \xi \cdot d\{\cos[n(\xi - z \sin \xi)]\} = \\ &= \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos[n(\xi - z \sin \xi)] \cos \xi d\xi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

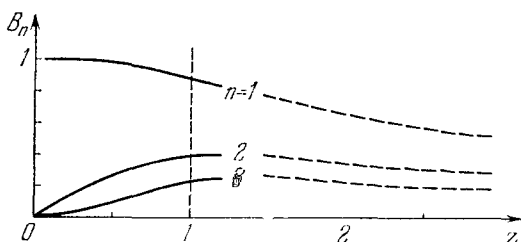
Преобразуя в (2.9) произведение косинусов в сумму и пользуясь табличными соотношениями для функций Бесселя

$$\begin{aligned} J_\nu(nz) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\nu\xi - nz \sin \xi) d\xi, \\ J_{\nu+1}(nz) + J_{\nu-1}(nz) &= \frac{2\nu}{nz} J_\nu(nz), \end{aligned} \quad (2.10)$$

найдем искомые коэффициенты разложения

$$B_n = 2J_n(nz)/nz. \quad (2.11)$$

Зависимости амплитуд 1-й, 2-й и 3-й гармоник от расстояния, построенные на основе решения (2.6), (2.11), изображены сплошными кривыми на рис. 6.2. Это решение обычно называют *разложением*



6.2. Зависимости амплитуд 1-й, 2-й, 3-й гармоник от расстояния.

Бесселя — Фубини. Оно справедливо при $z < 1$, поскольку при $z > 1$, как следует из рис. 6.1, функция (2.5) становится неоднозначной и не может быть разложена в ряд Фурье.

§ 3. Распространение волн, содержащих разрывы

Графический анализ деформации профиля простой волны (см. рис. 6.1) показывает, что нелинейные искажения рано или поздно приведут к образованию «перехлеста» — профиль будет описываться неоднозначной функцией $\tau = t - x/c_0$. Такая форма может реализоваться в ряде случаев, например, для волн на поверхности воды в зоне прибоя или для волн электронной плотности в приборах СВЧ (здесь неоднозначность возникает в связи с тем, что в промодулированном по скорости потоке электронов происходит обгон и формируется многопотоковый режим). Но для продольных звуковых волн неоднозначность формы профиля физически бессмысленна. Вместо перехлеста в профиле возникает тонкий ударный фронт, в котором происходит диссипация энергии, и картина распространения волны сильно изменяется.

Для того чтобы установить законы распространения звукового возмущения после того, как в нем образуются разрывы, необходимо определить положение фронта в неоднозначном профиле волны. Это можно сделать, исходя из закона сохранения количества движения. Несложно показать, что при распространении простой волны суммарный импульс области пространства, в которой бежит волна, остается неизменным. Действительно, предполагая возмущение (1.18) убывающим при $\tau \rightarrow \pm \infty$ и интегрируя,

найдем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\tau + \frac{\varepsilon}{c_0^2} ux\right) d\tau &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) \left(d\xi - \frac{\varepsilon}{c_0^2} x d\Phi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) d\xi = \text{const.} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Геометрический смысл (3.1) — независимость от x площади, ограниченной кривой $u(\tau)$.

Интегрирование можно было бы производить не по бесконечной области переменной τ , а между точками τ_1 и τ_2 , в которых колебательная скорость обращается в нуль: $u(\tau_1) = u(\tau_2) = 0$. Из формул (1.16) или (1.18) видно, что для очень малых возмущений нелинейные эффекты не проявляются. Нулевые возмущения распространяются со скоростью звука c_0 , т. е. в сопровождающей системе координат являются неподвижными.

Независимость интеграла (3.1) от x означает сохранение количества движения, объемная плотность которого равна $\rho_0 u$. Этот результат вполне очевиден и объясняется тем, что рассматриваемый объем среды представляет собой замкнутую систему, на которую не действуют внешние силы. Но система остается замкнутой и после образования разрыва. Следовательно, импульс и в этом случае должен сохраняться.

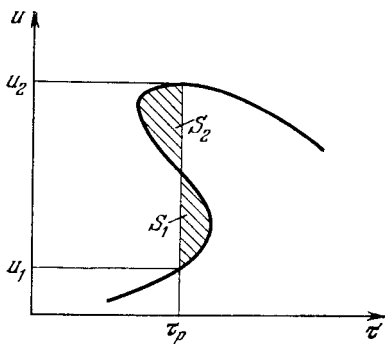
Схема построения фронта в неоднозначном профиле волны представлена на рис. 6.3. Для того чтобы количество движения не изменилось и после образования разрыва, фронт нужно проводить таким образом, чтобы отсекаемые от обеих частей перехлеста площади S_1 и S_2 (заштрихованные на рисунке) были равны.

Определим координату разрыва τ_p аналитически. Исходя из рис. 6.3, правило «равенства площадей» можно записать так:

$$\frac{d}{dx} \int_{u_1}^{u_2} [\tau(u) - \tau_p] du = 0$$

или

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{d\tau(u)}{dx} du = (u_2 - u_1) \frac{d\tau_p}{dx}. \quad (3.2)$$



6.3. Схема построения фронта по равенству площадей ($S_1 = S_2$).

Поскольку неоднозначный профиль искажен в соответствии с решением (1.18) для простой волны, $d\tau(u)/dx = -\varepsilon u/c_0^2$, откуда следует, что

$$-\frac{\varepsilon}{c_0^2} \frac{u^2}{2} \Big|_{u_1}^{u_2} = (u_2 - u_1) \frac{d\tau_p}{dx}, \quad \frac{d\tau_p}{dx} = -\frac{\varepsilon}{2c_0^2} (u_1 + u_2). \quad (3.3)$$

Формула (3.3) представляет собой дифференциальное уравнение, позволяющее определить координату разрыва $\tau_p(x)$ по известным величинам параметров «скачка» $u_1(x)$ и $u_2(x)$.

Полная система уравнений, описывающих движение разрыва, будет составлена, если добавить к (3.3) два уравнения для u_1 и u_2 . Учитывая, что u_1 и u_2 расположены на профиле простой волны, используем решение (1.18):

$$u_{1,2} = \Phi_{1,2} \left(\tau_p + \frac{\varepsilon}{c_0^2} u_{1,2} x \right). \quad (3.4)$$

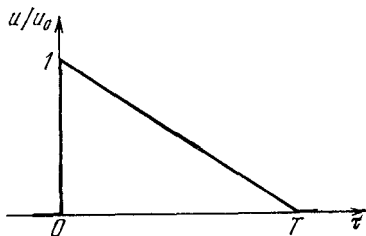
Здесь $\Phi_1(\tau)$ и $\Phi_2(\tau)$ — функции, описывающие форму простой волны на участках до и после разрыва, т. е. при $\tau < \tau_p$ и $\tau > \tau_p$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \tau_p &= f_1(u_1) - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u_1 x, \\ \tau_p &= f_2(u_2) - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u_2 x, \\ \frac{d\tau_p}{dx} &= -\frac{\varepsilon}{2c_0^2} (u_1 + u_2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Это — система из трех уравнений для трех неизвестных величин: координаты разрыва $\tau_p(x)$ и величин $u_1(x)$, $u_2(x)$, определяющих «амплитуду» скачка. В системе (3.5) $f_{1,2}$ — функции, обратные $\Phi_{1,2}$.

Для иллюстрации техники расчетов с помощью уравнений (3.5) решим простейшую задачу об изменении амплитуды и длительности одиночного треугольного возмущения, изображенного на рис. 6.4. Исходная форма возмущения описывается выражением

$$\frac{u}{u_0} = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ 1 - \tau/T, & 0 \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau > T. \end{cases} \quad (3.6)$$



6.4. Исходная форма одиночного треугольного возмущения (3.6).

Из самой постановки задачи ясно, что $u_1(x) \equiv 0$ — для принятой формы импульса колебательная скорость перед фронтом равна нулю при любых значениях x . Поэтому вместо трех уравнений (3.5)

нужно решать только два:

$$\tau_p = T \left(1 - \frac{u_2}{u_0}\right) - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u_2 x, \quad \frac{d\tau_p}{dx} = -\frac{\varepsilon}{2c_0^2} u_2. \quad (3.7)$$

Подставляя первое из соотношений (3.7) во второе, получим

$$\frac{du_2}{dx} \left(\frac{T}{u_0} + \frac{\varepsilon}{c_0^2} x\right) = -\frac{\varepsilon}{2c_0^2} u_2, \quad u_2 = C \left(\frac{T}{u_0} + \frac{\varepsilon x}{c_0^2}\right)^{-1/2}. \quad (3.8)$$

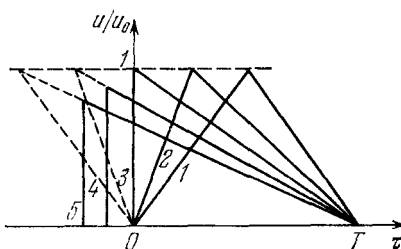
Константу интегрирования $C = \sqrt{T u_0}$ находим из условия $u_2(x=0) = u_0$. Таким образом, получается решение, описывающее изменение пикового значения колебательной скорости:

$$u_2(x) = u_0 \left(1 + \frac{\varepsilon u_0}{c_0^2 T} x\right)^{-1/2} \quad (3.9)$$

— амплитуда импульса уменьшается пропорционально $1/\sqrt{x}$. Длительность импульса увеличивается по закону

$$T(x) = T \left(1 + \frac{\varepsilon u_0}{c_0^2 T} x\right)^{1/2}. \quad (3.10)$$

Аналогично решаются и другие, более сложные задачи.



6.5. Искажение формы симметричного треугольного импульса при его распространении в нелинейной среде.

На рис. 6.5 изображена картина искажения формы симметричного треугольного импульса (кривая 1). На первом этапе, до момента образования разрыва, форма возмущения трансформируется в соответствии с решением для простых волн (кривые 2, 3). Как только передний фронт импульса примет вертикальное положение (кривая 3), искажение профиля (кривые 4, 5) будет описываться решением (3.9), (3.10). Если нас интересует эволюция спектрального

состава волны, то, зная ее временную форму, можно провести разложение в интеграл Фурье при любом фиксированном x и получить, таким образом, необходимую информацию. Непосредственное же описание динамики спектра, как мы уже указывали, в средах без дисперсии сопряжено с гораздо большими трудностями.

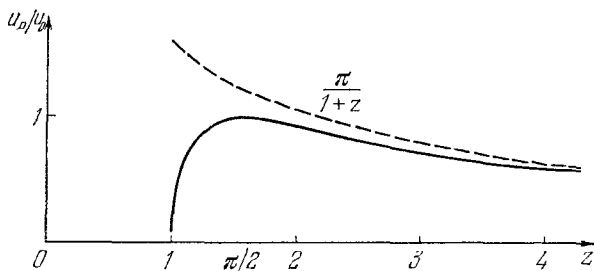
Рассмотрим теперь поведение в разрывной области волны, которая при $z = 0$ была синусоидальной. Как следует из графического анализа искажения формы возмущения (см. рис. 6.1) и правила «равенства площадей» (см. рис. 6.3), фронт в такой волне

проходит в точке $\omega\tau_p = 0$ при любом значении z . Полагая в решении (2.5) $\omega\tau = 0$, получим уравнение для нахождения амплитуды разрыва u_p :

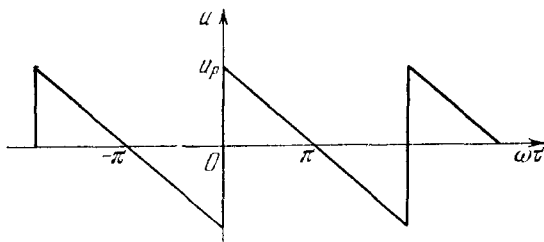
$$\frac{u_p}{u_0} = \sin \frac{zu_p}{u_0}. \quad (3.11)$$

Решение трансцендентного уравнения (3.11) изображено на рис. 6.6. Как видно из рисунка, разрыв начинает формироваться в точке $z = 1$.

Когда волна пройдет расстояние $z = \pi/2$, разрыв сформируется полностью и начнет уменьшаться из-за нелинейного затухания.



6.6. Зависимость от расстояния амплитуды разрывов, возникающих в гармонической (при $z = 0$) волне.



6.7. Периодическая пилообразная волна, описываемая формулами (3.12).

В этой области (3.11) имеет приближенное аналитическое решение $u_p/u_0 = \pi/(1+z)$, которое можно считать достаточно точным при $z \gg 2$. На таких расстояниях волна становится пилообразной (рис. 6.7) и может быть описана формулой

$$u = \begin{cases} \frac{u_p}{\pi} (-\omega\tau - \pi) = \frac{u_0}{1+z} (-\omega\tau - \pi), & -\pi < \omega\tau < 0; \\ \frac{u_p}{\pi} (-\omega\tau + \pi) = \frac{u_0}{1+z} (-\omega\tau + \pi), & 0 < \omega\tau < \pi. \end{cases} \quad (3.12)$$

Разлагая функцию (3.12) в ряд Фурье, получим

$$\frac{u}{u_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(1+z)} \sin(n\omega\tau). \quad (3.13)$$

Зависимости амплитуд 1-й, 2-й и 3-й гармоник от расстояния при $z > 2$ изображены на рис. 6.2 штриховыми линиями.

§ 4. Нелинейные волны в диссипативной среде

Нелинейное уравнение, описывающее распространение звуковых волн в среде с поглощением, можно вывести из уравнений гидродинамики для вязкой теплопроводящей среды (см. § 2 гл. 1) с помощью метода медленно изменяющегося профиля. Однако приводить здесь этот вывод нет необходимости. Как было показано в гл. I, распространение волн в линейной поглощающей среде описывается уравнением (2.36):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \quad (4.1)$$

С другой стороны, распространение нелинейных волн в среде без вязкости и теплопроводности происходит в соответствии с уравнением для простых волн (1.19):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (4.2)$$

Поскольку нелинейные и диссипативные члены входят в исходные уравнения гидродинамики независимо, очевидно, что в упрощенном уравнении эти члены будут также присутствовать в виде отдельных слагаемых. Иначе говоря, применение метода медленно изменяющегося профиля приведет к уравнению, являющемуся обобщением (4.1), (4.2):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) называется *уравнением Бюргерса*. Оно было впервые предложено как модель для описания турбулентных эффектов, но в дальнейшем приобрело особенно важное значение именно в теории нелинейных волн и в нелинейной акустике.

В поглощающей среде условия проявления нелинейных эффектов изменяются, поскольку диссипативные процессы могут конкурировать с нелинейными. Для того чтобы выяснить, при каких значениях параметров нелинейность будет существенна, а при каких — нет, оценим относительную величину различных членов в уравнении (4.3). Пусть при $x = 0$ был задан гармониче-

ский процесс $u = u_0 \sin(\omega\tau)$. Тогда отношение нелинейного члена к $\partial u/\partial x$ по порядку величины равно

$$\frac{\frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \sim \frac{\frac{\varepsilon}{c_0^2} u_0^2 \omega}{u_0/x} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega u_0 x = z. \quad (4.4)$$

Эта оценка показывает, что при отсутствии влияния диссипативного члена в уравнении (4.3) нелинейные эффекты должны проявиться при $z \gtrsim 1$. Таким образом, волне нужно распространиться на достаточно большое расстояние, чтобы нелинейные эффекты накопились и стали заметными по величине.

Если в среде есть поглощение, нужно оценить относительный вклад в искажение формы волны нелинейного и диссипативного членов:

$$\frac{\frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau}}{\frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}} \sim \frac{\frac{\varepsilon}{c_0^2} u_0^2 \omega}{\frac{b}{2c_0^3 \rho_0} u_0 \omega^2} = 2\varepsilon \frac{c_0 \rho_0 u_0}{b \omega} = 2\varepsilon \cdot \text{Re} = \frac{1}{\Gamma}. \quad (4.5)$$

Величина Re называется *акустическим числом Рейнольдса*. Когда $\text{Re} \gg 1$, нелинейные эффекты преобладают над диссипативными. В противоположном случае ($\text{Re} \ll 1$) условия проявления нелинейных эффектов менее благоприятны. Для того чтобы конкретизировать эти общие утверждения и более точно оценить область расстояний z и область значений параметров, при которых нелинейные эффекты четко выражены, нужно решить (4.3) и проследить за поведением волны во всей области распространения $0 < z < \infty$.

Перейдем непосредственно к отысканию решений (4.3). Поскольку многие из приводимых ниже формул имеют громоздкий вид, удобно перейти в уравнении Бюргерса к безразмерным переменным

$$V = u/u_0, \quad \theta = \omega\tau, \quad z = \varepsilon \omega u_0 x / c_0^2. \quad (4.6)$$

Для гармонического на входе (при $x = 0$) процесса константы u_0 , ω имеют смысл амплитуды и частоты колебания; при других формах исходного возмущения u_0 , ω — это некоторые характерные константы с размерностью см/с и с⁻¹ соответственно. Например, для возмущения в виде одиночного импульса в качестве u_0 можно принять максимальное значение скорости, а в качестве ω^{-1} — характерную длительность импульса.

В переменных (4.6) уравнение Бюргерса (4.3) принимает вид

$$\frac{\partial V}{\partial z} = V \frac{\partial V}{\partial \theta} + \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (4.7)$$

Нетрудно убедиться в том, что подстановка

$$V = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U \quad (4.8)$$

позволяет свести (4.7) к линейному уравнению типа уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \Gamma \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}. \quad (4.9)$$

Выражение (4.8) называется *заменой Хопфа — Коула*. Нужно подчеркнуть: возможность линеаризации нелинейного уравнения в частных производных второго порядка встречается исключительно редко.

Наиболее простой способ получения точных решений (4.7) заключается в нахождении какого-либо решения $U(z, \theta)$ уравнения (4.9) и последующем переходе к $V(z, \theta)$ по формуле (4.8). При этом мы, вообще говоря, не можем удовлетворить нужному условию $V(0, \theta) = f(\theta)$ на границе $z = 0$. Однако конструирование решения таким способом позволяет установить некоторые характерные особенности распространения волн при одновременном учете нелинейных и диссипативных эффектов.

Наиболее простыми решениями линейного уравнения (4.9) являются выражения

$$U = A - e^{-\Gamma z} \cos \theta, \quad U = B + \Phi \left(\frac{\theta}{\sqrt{4\Gamma z}} \right). \quad (4.10)$$

Здесь A, B — константы, $\Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-v^2} dv$ — интеграл ошибок.

Соответствующие решения уравнения Бюргерса имеют вид

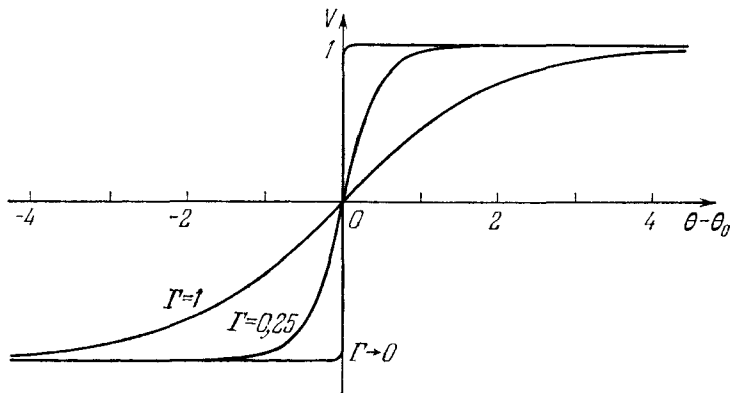
$$V = 2\Gamma \frac{e^{-\Gamma z} \sin \theta}{A - e^{-\Gamma z} \cos \theta}, \quad V = \sqrt{\frac{4\Gamma}{\pi z}} \frac{\exp \left(-\frac{\theta^2}{4\Gamma z} \right)}{B + \Phi \left(\frac{\theta}{\sqrt{4\Gamma z}} \right)}. \quad (4.11)$$

Чтобы решения (4.11) были ограниченными при любых $z > 0$, нужно потребовать $A > 1, B > 1$. Случай $A \gg 1, B \gg 1$ соответствует предельному переходу к линейным решениям; с точностью до обозначений выражения (4.11) при этом совпадут с решениями (2.37) и (2.40) (см. гл. I). При $A \gtrsim 1, B \gtrsim 1$ в решениях (4.11) заметно проявляется нелинейное искажение формы волны.

Первая из формул (4.11) описывает распространение периодической волны, форма которой при малых Γz не является синусоидальной. Спектр такой волны содержит большое количество гармоник. Однако при $\Gamma z \gg 1$ вторым членом в знаменателе можно пренебречь по сравнению с A ; это означает, что диссипация «сгла-

живает» профиль волны, и на больших расстояниях волна становится гармонической.

Второе решение (4.11) описывает одиночный импульс несимметричной колоколообразной формы. При распространении импульс расплывается и сглаживается. Максимальное значение V уменьшается. На больших расстояниях здесь также нелинейные



6.8. Стационарное решение уравнения Бюргера в виде симметричного «скачка» с конечной шириной фронта, зависящей от величины акустического числа Рейнольдса.

Эффекты перестают играть существенную роль, и возмущение стремится принять форму гауссовой кривой.

Важным частным решением уравнения Бюргера является решение в виде стационарной (не изменяющей своей формы при распространении) волны. Чтобы найти это решение, нужно в (4.7) положить $\partial V / \partial z = 0$. Интегрируя один раз полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, имеем

$$\Gamma \frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{2} (V_0^2 - V^2). \quad (4.12)$$

Второе интегрирование дает результат

$$\frac{V}{V_0} = \text{th} \frac{V_0}{2\Gamma} (\theta - \theta_0). \quad (4.13)$$

Решение (4.13) изображено на рис. 6.8 для различных значений параметра Γ . Константа интегрирования V_0 полагалась равной единице (этого можно добиться во всех случаях за счет изменения нормировки и (4.6)). Видно, что решение представляет собой ударную волну с конечной толщиной фронта, равной $\Delta\theta \sim 2\Gamma$. При больших числах Рейнольдса ($\Gamma \rightarrow 0$) толщина фронта стремится к нулю, и решение принимает вид ступенчатого скачка $V = \text{sign } \theta$.

Таким образом, уравнение Бюргера описывает структуру и местоположение фронта ударной волны и поэтому, в отличие от уравнения для простых волн, не требует привлечения дополнительных условий (типа правила «равенства площадей») для определения формы волны после образования разрыва. Кроме того, сам разрыв уже не предполагается бесконечно тонким; это область конечной ширины (определяемой конкуренцией между нелинейным увеличением крутизны и диссипативным расплыванием), в которой диссипативный член $\Gamma \partial^2 V / \partial \theta^2$ уравнения Бюргера имеет наибольшую величину. В области фронта, следовательно, поглощение энергии волны происходит наиболее эффективно.

Для того чтобы усовершенствовать решение (3.12) в виде пилообразной волны

$$V = \frac{1}{1+z} [-\theta + \pi \operatorname{sign} \theta], \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (4.14)$$

вводя в него искусственно конечную ширину фронта, нужно заменить в формуле (4.14) ступенчатую функцию $\operatorname{sign} \theta$ выражением $\operatorname{th} [\pi \theta / 2 \Gamma (1+z)]$, описывающим структуру ударной волны (4.13). Зависимость от координаты в виде $\pi / (1+z)$ введена под знаком функции th потому, что величина разрыва, как следует из формул (3.11), (3.12) и рис. 6.6, убывает с расстоянием как $\pi / (1+z)$.

Замечательно, что сконструированное таким образом выражение для качественного описания поведения пилообразной волны с конечной шириной фронта (Р. В. Хохлов, 1961 г.)

$$V_s = \frac{1}{1+z} \left[-\theta + \pi \operatorname{th} \frac{\pi \theta}{2\Gamma(1+z)} \right], \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (4.15)$$

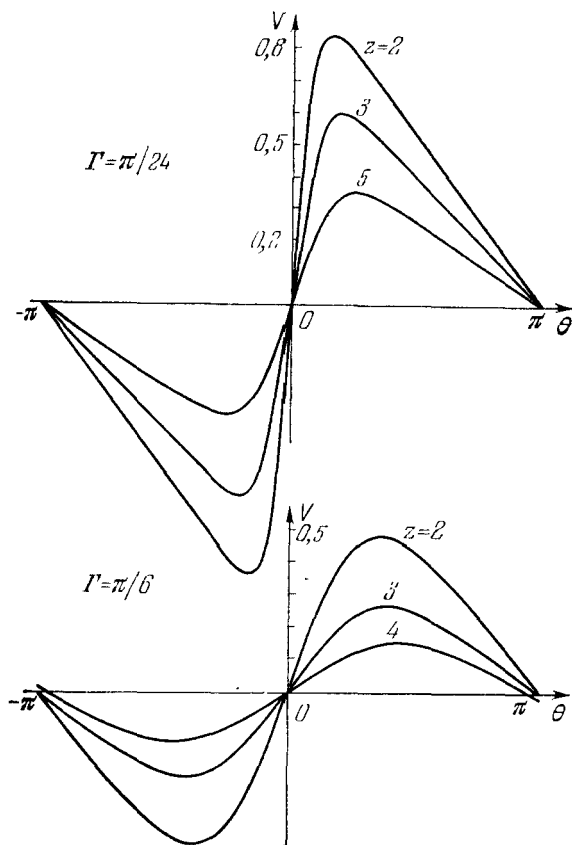
является точным решением уравнения Бюргера (4.7), в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Форма волны при различных Γ и z изображена на рис. 6.9. Решение (4.15) удается разложить в ряд Фурье и проследить в разрывной области при больших числах Рейнольдса за поведением амплитуд гармоник. Коэффициенты разложения в ряд Фурье по функциям $\sin(n\theta)$ равны

$$B_n = \frac{2}{\pi(1+z)} \int_0^\pi [-\theta + \pi \operatorname{th}(\beta\theta)] \sin(n\theta) d\theta, \quad \beta = \frac{\pi}{2\Gamma(1+z)}. \quad (4.16)$$

Интеграл удобно вычислить, продифференцировав (4.16) по параметру β :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_n}{\partial \beta} &= \frac{2}{1+z} \int_0^\pi \frac{\theta \sin(n\theta)}{\operatorname{ch}^2(\beta\theta)} d\theta \approx \\ &\approx \frac{2}{1+z} \int_0^\infty \frac{\theta \sin(n\theta)}{\operatorname{ch}^2(\beta\theta)} d\theta = \frac{\pi}{1+z} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\beta \operatorname{sh} \frac{\pi n}{2\beta}} \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Замена верхнего предела π на бесконечный предел интегрирования приближенно возможна потому, что для больших Γ подынтегральное выражение при $\theta > \pi$ мало.



6.9. Форма пилообразной волны, описываемой решением Хохлова, на различных расстояниях.

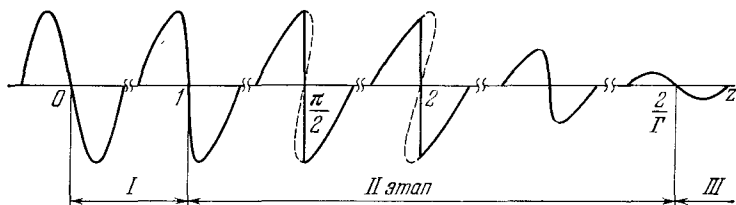
Искомое разложение в ряд

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Gamma}{\text{sh}[n\Gamma(1+z)]} \sin(n\theta) \quad (4.18)$$

называется *решением Фея*. Оно хорошо описывает спектр исходного гармонического (при $z=0$) сигнала в области стабилизации волны ($z > \pi/2$), где нелинейное увеличение крутизны профиля и его диссипативное сглаживание относительно уравнивают друг друга. Решение Фея описывает медленное затухание гармо-

ник, амплитуды которых при $z \gg 1$ уменьшаются приблизительно по закону $\exp(-\Gamma z)$, а не $\exp(-n^2 \Gamma z)$, как это следует из линейной теории, что связано с подкачкой энергии от низших гармоник к высшим. Решение Фей хорошо описывает процесс при больших числах Рейнольдса (малые Γ), когда нелинейные эффекты четко выражены. При $\Gamma \rightarrow 0$ (4.18) переходит в спектральное разложение (3.13) для пилообразной волны с бесконечно тонким фронтом.

Когда амплитуда волны уменьшится настолько, что будут преобладать диссипативные эффекты, волна снова превратится



6.10. Изменение формы одного периода гармонической на входе (при $z = 0$) волны.

в синусоидальную. На расстояниях $z \sim 2/\Gamma$ главным становится первый член ряда (4.18), и решение принимает вид

$$V \approx 4\Gamma \exp(-\Gamma z) \sin \theta. \quad (4.19)$$

Интересно, что амплитуда волны при $z \gg 2/\Gamma$ уже не зависит от исходной амплитуды u_0 . Таким образом, в нелинейной среде имеет место эффект ограничения амплитуды: сильные изменения величины сигнала при $z = 0$ приводят к слабым изменениям при $z > 2/\Gamma$. На расстояниях $z > 2/\Gamma$ не удастся передать сигнал с энергией, большей некоторой максимальной $E_{\max} \sim \bar{V}^2 = 8\Gamma^2 \exp(-2\Gamma z)$.

Суммируя сказанное, можно представить себе распространение гармонического сигнала $V(z = 0, \theta) = \sin \theta$ в нелинейной поглощающей среде следующим образом.

В случае больших чисел Рейнольдса ($\Gamma \rightarrow 0$) существует область расстояний, где нелинейные эффекты ярко выражены. Весь процесс распространения можно условно разбить на три этапа (рис. 6.10). На I этапе ($0 < z < 1$) происходит искажение формы профиля по законам простой волны (2.5), (2.11). В точке $z = 1$ начинается образование разрыва, который достигает максимальной величины при $z = \pi/2$. При $z \gg 2$ профиль волны становится почти пилообразным. На II этапе ($1 < z < 2/\Gamma$) форма фронта стабилизируется из-за конкуренции нелинейных и диссипативных эффектов, но амплитудное значение колебательной скорости

уменьшается. При $z \sim 2/\Gamma$ амплитуда волны в результате нелинейного поглощения уменьшится настолько, что преобладающими станут диссипативные эффекты. На III этапе ($z \gtrsim 2/\Gamma$) амплитуда волны уже не зависит от своего значения на входе. Волна вновь становится гармонической, и ее распространение происходит по законам линейной акустики.

В случае малых чисел Рейнольдса (большие Γ) нелинейность проявляется слабо при любых z , и для гармоник с номерами n и $n + 1$ всегда выполняется условие $u^{(n+1)} \ll u^{(n)}$. Это означает, что изменение с расстоянием амплитуд гармоник можно рассчитывать методом последовательных приближений. По аналогии с (2.1) для поглощающей среды имеем

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial z} - \Gamma \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial \theta^2} = 0, \quad \frac{\partial V^{(2)}}{\partial z} - \Gamma \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} V^{(1)^2}. \quad (4.20)$$

Решая эти уравнения, найдем

$$V^{(1)} = e^{-\Gamma z} \sin \theta, \quad V^{(2)} = \frac{1}{4\Gamma} (e^{-2\Gamma z} - e^{-4\Gamma z}) \sin(2\theta). \quad (4.21)$$

Максимальное значение амплитуды второй гармоники $V_{\max}^{(2)} = 1/16\Gamma$ достигается в точке $\Gamma z = \ln \sqrt{2}$.

Все результаты этого параграфа можно получить несколько более сложным, но строгим способом из анализа решения граничной задачи для уравнения Бюргера (4.7). Условие на границе для линейного уравнения (4.9) записывается в виде

$$U(z=0, \theta) = \exp\left(\frac{1}{2\Gamma} \int V(z=0, \theta) d\theta\right). \quad (4.22)$$

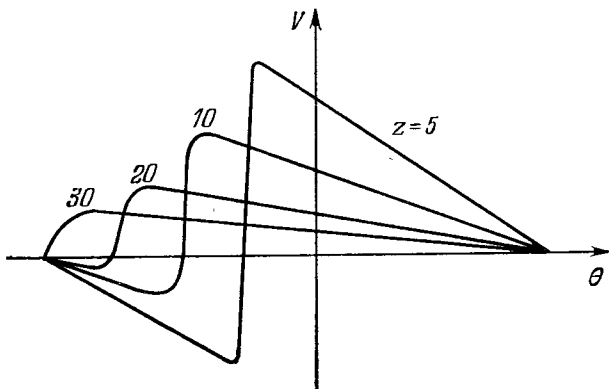
Константа интегрирования под знаком экспоненты несущественна, так как при возвращении от U к V по формуле (4.8) зависимость от ее величины устраняется. Используя (4.22), можно записать решение (4.9), например, для гармонического сигнала $V(0, \theta) = \sin \theta$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\Gamma z}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\Gamma} \cos \theta'\right) \exp\left(-\frac{(\theta - \theta')^2}{4\Gamma z}\right) d\theta' = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (-1)^n I_n\left(\frac{1}{2\Gamma}\right) e^{-n^2\Gamma z} \cos(n\theta), \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_n = 2$ при $n > 0$, I_n — модифицированные функции Бесселя. При переходе от интеграла к представлению в виде ряда использована формула

$$\exp(\kappa \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n I_n(\kappa) \cos(n\theta).$$

Наиболее просто из представления решения (4.23) в виде ряда получить выражение (4.21) для амплитуд гармоник при больших числах Γ . Для этого нужно воспользоваться асимптотиками функций Бесселя при малых значениях аргумента. При малых Γ и $z > 2/\Gamma$ из (4.23) сравнительно просто получить выражение (4.19). Эти преобразования полезно проделать как упражнение. Другие



6.11. Движение фронта в несимметричном дипольном участке волны. решению удастся вывести из (4.23) путем более сложных расчетов.

Укажем в заключение на ряд интересных свойств уравнения Бюргера. Интегрируя (4.7) в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и требуя убывания функции V на бесконечности, найдем

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} V d\theta = \frac{V^2}{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \Gamma \frac{\partial V}{\partial \theta} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} V(z, \theta) d\theta = \text{const.} \quad (4.24)$$

Соотношение (4.24), как и в простой волне, есть закон сохранения количества движения. Однако, в отличие от простых волн (в области до образования разрыва), энергия волны при наличии вязкости и теплопроводности уменьшается:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} V^2 d\theta &= \frac{2}{3} V^3 \Big|_{-\infty}^{\infty} + \Gamma \frac{\partial V^2}{\partial \theta} \Big|_{-\infty}^{\infty} - 2\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 d\theta = \\ &= -2\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 d\theta < 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Нетрудно проверить также, что если $V = \Phi(z, \theta)$ есть некоторое решение уравнения Бюргера, то функция

$$V_1 = \Phi[z, \theta + A(z + B)] + A \quad (4.26)$$

(где A, B — константы) будет также решением этого уравнения. Например, преобразуя по формуле (4.26) решение (4.15) и полагая $B = 1$, получим

$$V = \frac{1}{1+z} \left\{ -\theta + \pi \operatorname{th} \left[\frac{\pi\theta}{2\Gamma(1+z)} + \frac{\pi A}{2\Gamma} \right] \right\}. \quad (4.27)$$

Выражение (4.27) описывает динамику движения фронта в несимметричном дипольном возмущении и постепенное превращение его в однополярный импульс (рис. 6.11).

§ 5. Генерация низкочастотного спектра в поле амплитудно-модулированной волны

Предыдущие параграфы гл. VI были посвящены изложению наиболее важных аспектов теории нелинейных волн в средах без дисперсии. Эти сведения составляют необходимый минимум знаний, который обычно требуется при решении более сложных задач. В этом параграфе мы приведем упрощенное решение одной такой задачи, имеющей наибольшее практическое значение. Разумеется, этот материал носит более специальный характер и читателю, не интересующемуся деталями, его можно опустить.

Пусть на входе в нелинейную среду колебательная скорость задана в виде

$$u = u_0 [1 - m \cos(\Omega\tau)] \sin(\omega\tau). \quad (5.1)$$

Выражение (5.1) описывает амплитудно-модулированное колебание (рис. 6.12, a); глубина модуляции характеризуется параметром m таким, что $0 < m < 1$. Предполагаем, что несущая частота ω много больше частоты модуляции Ω :

$$\omega \gg \Omega \text{ или } \beta = \Omega/\omega \ll 1. \quad (5.2)$$

Спектр колебания (5.1) состоит из трех компонент Фурье, имеющих близкие частоты ω , $\omega - \Omega$, $\omega + \Omega$. В нелинейной среде, при распространении возмущения, эти компоненты взаимодействуют между собой, в результате чего рождаются низкочастотные составляющие спектра с частотами Ω , 2Ω , ... Разумеется, помимо этих волн возникают и высокочастотные гармоники $n\omega$, $n\omega \pm m\Omega$ (n, m — натуральные числа). Однако исследование низкочастотной части спектра представляет наибольший интерес, поскольку коэффициенты затухания этих компонент (пропорциональные квадрату частоты — см. § 2 гл. I, (2.29)) очень малы и низкочастотные составляющие могут распространяться на гораздо большие расстояния, чем исходные волны.

Рассмотрим вначале случай малых чисел Рейнольдса, когда диссипативные эффекты преобладают над нелинейными. Тогда задачу можно решить методом последовательных приближений,

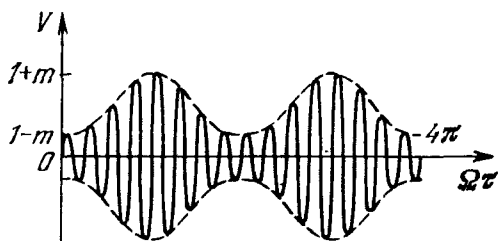
используя уравнения (4.20). Решение уравнения первого приближения с условием (5.1) на границе

$$V^{(1)}(z=0, \theta) = [1 - m \cos(\beta\theta)] \sin \theta = \\ = \sin \theta - \frac{m}{2} \sin [(1 + \beta)\theta] - \frac{m}{2} \sin [(1 - \beta)\theta] \quad (5.3)$$

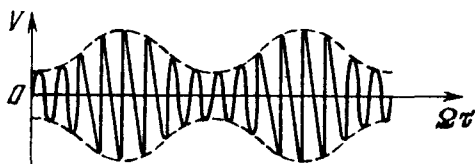
имеет вид

$$V^{(1)}(z, \theta) = e^{-\Gamma z} \sin \theta - \frac{m}{2} \exp [-(1 + \beta)^2 \Gamma z] \sin [(1 + \beta)\theta] - \\ - \frac{m}{2} \exp [-(1 - \beta)^2 \Gamma z] \sin [(1 - \beta)\theta]. \quad (5.4)$$

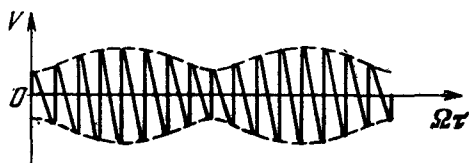
При вычислении правой части уравнения второго приближения



a)



b)



в)

6.12. Нелинейные искажения амплитудно-модулированного сигнала.

(4.20) сохраним в выражении для $V^{(1)2}$ только низкочастотные компоненты

$$V^{(1)2} = -\frac{m}{2} (\exp \{-[1 + (1 + \beta)^2] \Gamma z\} + \\ + \exp \{-[1 + (1 - \beta)^2] \Gamma z\}) \cos(\beta\theta) + \\ + \frac{m^2}{4} \exp \{-[(1 + \beta)^2 + (1 - \beta)^2] \Gamma z\} \cos(2\beta\theta). \quad (5.5)$$

Пренебрегая в экспонентах (5.5) членами порядка β и β^2 , сведем уравнение второго приближения к виду

$$\frac{\partial V^{(2)}}{\partial z} - \Gamma \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial \theta^2} = \frac{m\beta}{2} e^{-2\Gamma z} \sin(\beta\theta) - \frac{m^2\beta}{4} e^{-2\Gamma z} \sin(2\beta\theta). \quad (5.6)$$

Решение (5.6) с нулевыми условиями на границе $z = 0$ для амплитуд 1-й и 2-й гармоник низкой частоты при $\beta \ll 1$ имеет вид

$$V^{(2)} = \frac{m\beta}{4\Gamma} (e^{-\Gamma\beta z} - e^{-2\Gamma z}) \sin(\beta\theta) - \frac{m^2\beta}{8\Gamma} (e^{-4\Gamma\beta z} - e^{-2\Gamma z}) \sin(2\beta\theta). \quad (5.7)$$

Как показывает выражение (5.7), эффект преобразования энергии накачки в низкочастотные волны пропорционален отношению частот $\beta = \Omega/\omega$ и глубине модуляции m .

При $m \ll 1$ вторым членом (5.7) можно пренебречь; при этом генерируется только первая низкочастотная гармоника. Для малых чисел Рейнольдса ($\Gamma \gg 1$) эффект незначителен. Однако на расстояниях $\Gamma z \sim \ln(4\Gamma/m\beta)$ амплитуды волн Ω , 2Ω становятся сравнимыми с амплитудой волны накачки, а затем и превышают ее. Низкочастотные волны, затухая по более медленному закону $\exp(-n^2\beta^2\Gamma z)$ (где $n = 1, 2$ — номер гармоники), чем высокочастотные компоненты спектра — $\exp(-\Gamma z)$, могут пробегать на значительно большие расстояния. Из-за этого, в частности, на эффекте нелинейной генерации волн разностных частот основана работа некоторых гидроакустических приборов (например, параметрических излучателей звука).

Рассмотрим теперь особенности протекания процесса в случае больших чисел Рейнольдса, когда $\Gamma \ll 1$. Пренебрегая диссипативным членом в уравнении (5.6) или устремляя Γ к нулю непосредственно в решении (5.7), получим

$$V^{(2)} = \frac{1}{2} m\beta z \cdot \sin(\beta\theta) - \frac{1}{4} m^2\beta z \cdot \sin(2\beta\theta). \quad (5.8)$$

Формула (5.8) применима до тех пор, пока в волне не начнут образовываться разрывы, т. е. при

$$z < (1 + m)^{-1}. \quad (5.9)$$

В точке образования разрыва амплитуды гармоник равны

$$V_1^{(2)} = m\beta/2(1 + m), \quad V_2^{(2)} = m^2\beta/4(1 + m). \quad (5.10)$$

В области за образованием разрыва для нахождения амплитуд гармоник удобно воспользоваться решением уравнения Бюргера (4.23). Это решение для модулированной волны (5.3) при $\beta \ll 1$

можно записать в виде

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (-1)^n I_n \left(\frac{1 - m \cos(\beta\theta)}{2\Gamma} \right) e^{-n\Gamma z} \cos(n\theta). \quad (5.11)$$

На расстояниях порядка нескольких Γz (там, где волны высоких частот практически затухнут) главным становится первый член ряда, соответствующий номеру $n = 0$. Переходя к переменной V по формуле (4.8), имеем

$$V = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln I_0 \left(\frac{1 - m \cos(\beta\theta)}{2\Gamma} \right) = m\beta \frac{I_1[(1 - m \cos(\beta\theta))/2\Gamma]}{I_0[(1 - m \cos(\beta\theta))/2\Gamma]} \sin(\beta\theta). \quad (5.12)$$

При $\Gamma \ll 1$ можно воспользоваться асимптотикой функции $I_n(x) \approx e^x / \sqrt{2\pi x}$, справедливой при значениях аргумента $x \gg 1$, и получить значения амплитуд гармоник на больших расстояниях

$$V_1^{(2)} = m\beta, \quad V_2^{(2)} = 0. \quad (5.13)$$

Заметим также, что из (5.12) при малых числах Рейнольдса ($\Gamma \ll 1$, $I_1(x) \approx x/2$, $I_0(x) \approx 1$) следует выражение

$$V^{(2)} = \frac{m\beta}{4\Gamma} \sin(\beta\theta) - \frac{m^2\beta}{8\Gamma} \sin(2\beta\theta), \quad (5.14)$$

совпадающее с (5.7) в области расстояний $\Gamma z > 1$, $\beta^2\Gamma z \ll 1$, т. е. там, где волны высоких частот почти полностью поглотятся средой, а затухание низкочастотных компонент будет все еще незначительным.

В области после образования разрыва имеет место еще один интересный эффект. Поскольку модулированная гармоническая на входе волна превращается в модулированную пилообразную (рис. 6.12, б), начинается процесс нелинейного затухания, причем участки «пилы» с большей амплитудой затухают быстрее. В результате происходит искажение функции огибающей. Исходная кривая $f(\beta\theta) = 1 - m \cos(\beta\theta)$ сглаживается (рис. 6.12, в); ее спектр обогащается гармониками. Из-за этого в разрывной области быстро растут амплитуды низкочастотных гармоник с номерами $n > 2$, в частности, амплитуда третьей гармоники огибающей 3Ω . Пространственная динамика амплитуд гармоник Ω , 2Ω , 3Ω , исследованная при помощи численного интегрирования уравнения Бюргерса, показана на рис. 6.13.

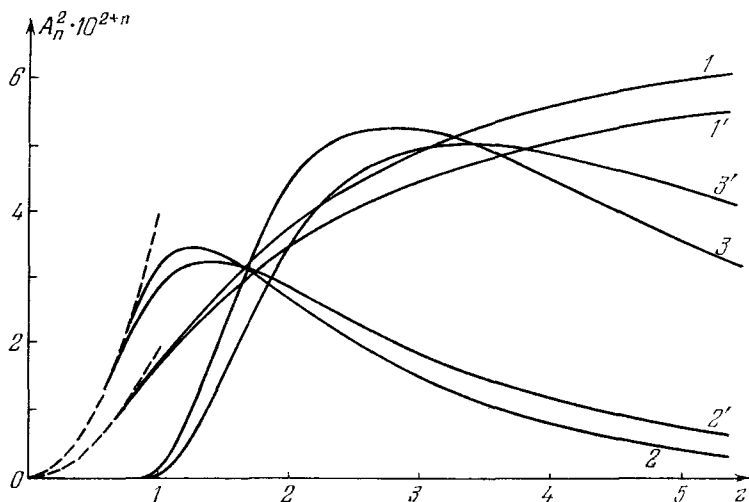
Из анализа формулы (5.12) можно сделать более общие выводы относительно поведения модулированной волны на расстояниях $\Gamma z > 1$ при произвольной форме огибающей $f(\beta\theta)$. Записывая (5.12) в виде

$$V = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln I_0 [f(\beta\theta)/2\Gamma] \quad (5.15)$$

и пользуясь асимптотиками функций I_n при больших и малых значениях аргумента, несложно показать, что

$$V(\Gamma \ll 1) = \frac{\partial f(\beta\theta)}{\partial \theta}, \quad V(\Gamma \gg 1) = \frac{1}{8\Gamma} \frac{\partial f^2(\beta\theta)}{\partial \theta}. \quad (5.16)$$

Таким образом, в случае больших чисел Рейнольдса сигнал принимает форму производной от функции огибающей исходного возмущения $V(z=0, \theta) = f(\beta\theta) \sin \theta$; при малых числах Рейнольдса



6.13. Зависимости от расстояния квадратов амплитуд трех первых гармоник огибающей. Номер кривой соответствует номеру гармоники. Кривые 1, 2, 3 построены для $\Gamma = 0,1$; кривые 1', 2', 3' — для $\Gamma = 0,5$. Штриховыми кривыми показаны теоретические зависимости, следующие из формулы (5.8).

форма сигнала определяется производной от квадрата функции огибающей. В зависимости от величины Γ нелинейная среда производит над модулированным сигналом операцию линейного ($\Gamma \ll 1$) или квадратичного ($\Gamma \gg 1$) детектирования.

§ 6. Нелинейные волны в диспергирующей среде

При изучении нелинейных волн в средах со слабой дисперсией очень часто используется тот же способ описания, который употребляется в задачах нелинейной акустики. Условие малости дисперсии означает, что ее влияние слабо сказывается на искажении формы профиля при распространении возмущения на расстоянии, сравнимые с длиной волны. Поэтому для упрощения исходных уравнений в диспергирующих системах можно воспользоваться тем же

приближенным методом медленно изменяющегося профиля, который применялся в системах со слабой нелинейностью и поглощением.

Напомним, что нелинейные волны в средах с дисперсией обсуждались в гл. V в связи с задачами нелинейной оптики. В отличие от способа описания процесса с помощью переменных, характеризующих волновое поле, в гл. V рассматривались укороченные уравнения для амплитуд нескольких гармоник этого поля. Формальную связь этих двух подходов мы обсудим в конце параграфа.

В теории нелинейных диспергирующих волн важную роль играет уравнение, внешне похожее на уравнение Бюргерса (4.3):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}. \quad (6.1)$$

Различие состоит в том, что вместо диссипативного члена со второй производной уравнение (6.1) содержит член $\beta \partial^3 u / \partial \tau^3$, описывающий дисперсионные свойства среды. Уравнение (6.1) без нелинейного члена мы получали при рассмотрении волн в дискретных структурах (см. формулу (3.10) гл. IV); некоторые его свойства обсуждались в § 8 гл. II. Линеаризованное уравнение (6.1) соответствует степенному закону дисперсии

$$k(\omega) = \omega/c_0 + \beta \omega^3, \quad (6.2)$$

который приближенно реализуется для волн различной физической природы (упругие волны в цепочках; магнитозвуковые волны в плазме, помещенной в магнитное поле и т. д.). Впервые (6.1) было получено Кортевегом и де Вризом в 1895 г. при изучении длинных гравитационных волн на мелкой воде (когда длина поверхностной волны становится сравнимой с глубиной водоема).

Уравнение (6.1) замечательно также тем, что свойства его решений детально изучены. Однако полная математическая теория уравнения Кортевега — де Вриза (как и других аналогичных уравнений для нелинейных диспергирующих систем) довольно сложна и здесь излагаться не будет. Мы остановимся только на простейших решениях (6.1) и коротко опишем их некоторые свойства.

Введем для удобства те же безразмерные переменные

$$\theta = \omega \tau, \quad V = u/u_0, \quad z = \varepsilon c_0^{-2} \omega u_0 x, \quad (6.3)$$

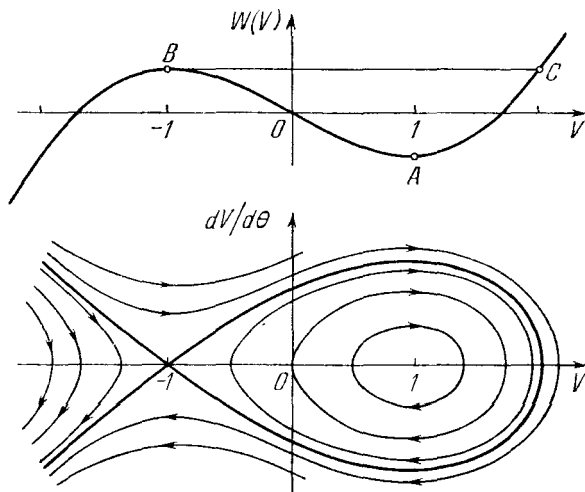
что и при анализе уравнения Бюргерса. Тогда (6.1) примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial z} = V \frac{\partial V}{\partial \theta} + D \frac{\partial^3 V}{\partial \theta^3}. \quad (6.4)$$

Безразмерное число $D = \beta \omega^2 c_0^2 / \varepsilon u_0$ (равное $(ka)^2 / 24 \varepsilon M$ в случае дискретной цепочки — (3.10) гл. IV) аналогично по смыслу пара-

метру Γ в уравнении Бюргера (4.7). Число D равно отношению характерных длин проявления дисперсионных и нелинейных эффектов и позволяет оценить их относительный вклад в искажение формы волны. При $D \ll 1$ преобладает нелинейность, при $D \gg 1$ — дисперсия.

Будем искать решение (6.4) в виде стационарной бегущей волны, полагая производную $\partial V/\partial z$ равной нулю. Получаемое обык-



6.14. Потенциальная функция и фазовый «портрет» для уравнения (6.6)

новенное дифференциальное уравнение один раз интегрируется:

$$D \frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{1}{2} (V_0^2 - V^2). \quad (6.5)$$

Постоянную интегрирования V_0 можно положить равной единице за счет изменения нормировочной константы u_0 в выражениях (6.3).

Обыкновенные уравнения типа (6.5) детально изучены в теории колебаний. Записывая (6.5) в виде

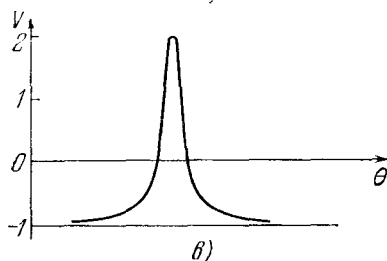
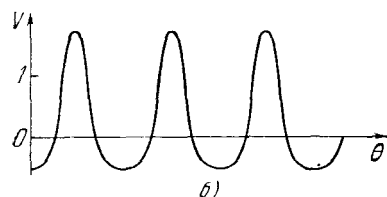
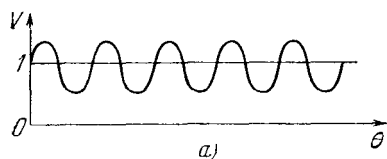
$$D \frac{d^2V}{d\theta^2} = -\frac{\partial W}{\partial V}, \quad W = V^3/6 - V/2, \quad (6.6)$$

нетрудно видеть, что (6.6) есть уравнение движения материальной точки в силовом поле, описываемом потенциальной функцией $W(V)$. В рамках этой аналогии V имеет смысл координаты точки, а θ — времени. Вводя переменную $dV/d\theta = \dot{V}(V)$, можно понизить порядок (6.6) и получить уравнение для фазовых траекторий

$$D \dot{V}^2/2 = h - W(V), \quad (6.7)$$

соответствующих различным значениям постоянной h («полной энергии» колебательной системы).

Потенциальная функция $W(V)$ и фазовый «портрет» для уравнения (6.6) изображены на рис. 6.14. Имеются две особые точки. A — типа «центр» и B — типа «седло». При колебаниях материальной точки вблизи дна потенциальной ямы A изображающая точка



6.15. Форма стационарных волн различной амплитуды для уравнения Кортевега — де Вриза.

имеет вид уединенной волны или «солитона» (рис. 6.15, в).

Траектории, лежащие вне сепаратрисы, соответствуют инфинитным движениям и физического смысла не имеют.

Форма солитона аналитически описывается выражением

$$V = ach^{-2}(b\theta) - 1. \quad (6.8)$$

Подставляя (6.8) в (6.6) и выполняя дифференцирование, найдем

$$4Db^2(2ch^2(b\theta) - 3) = 2ch^2(b\theta) - a. \quad (6.9)$$

Отсюда следует, что $a = 3$, $4Db^2 = 1$, т. е.

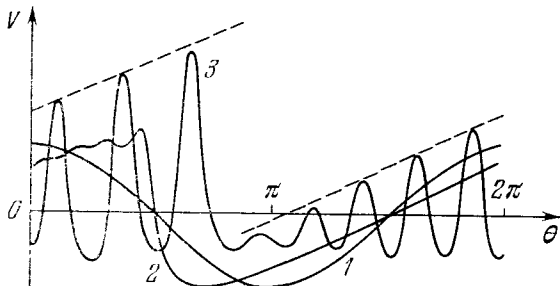
$$V = \frac{3}{ch^2 \frac{\theta}{2\sqrt{D}}} - 1, \quad u = \frac{3u_0}{ch^2 \left(\sqrt{\frac{\varepsilon u_0}{4c_0^2 \beta}} \tau \right)} - u_0. \quad (6.10)$$

движется по замкнутой траектории, близкой по форме к эллипсу. Это означает, что при малых амплитудах стационарная волна для уравнения Кортевега — де Вриза — это гармоническая волна (рис. 6.15, а). С увеличением амплитуды форма замкнутых фазовых траекторий будет все больше отличаться от эллиптической; соответствующая стационарная волна уравнения (6.4) при этом останется периодической, но уже испытывает на себе влияние нелинейных эффектов (рис. 6.15, б).

Интересный вид стационарная волна приобретает в случае, отвечающем движению изображающей точки по сепаратрисе (жирная кривая на рис. 6.14). Материальная точка при этом начинает скатываться из положения неустойчивого равновесия B , достигает точки C , а затем бесконечно долго возвращается обратно в B . Стационарное решение в этом случае имеет

Выражение (6.10) показывает, что произведение «амплитуды» солитона на квадрат его характерной длительности $3u_0 \cdot (4c_0^2\beta/\varepsilon u_0) = 12c_0^2\beta/\varepsilon$ есть величина постоянная, определяемая только свойствами среды. Чем больше амплитуда солитона, тем меньше его длительность.

Мы искали решение уравнения Кортевега — де Вриза в виде стационарной волны $V = V(\theta)$, бегущей со скоростью звука.



6.16. Процесс распада гармонического возмущения на солитоны.

При этом солитон оказался возмущением, распространяющимся на фоне постоянного потока $u = -u_0$. Очень часто солитонное решение (6.4) записывают в виде, удовлетворяющем условию $V(\theta \rightarrow \pm \infty) \rightarrow 0$, т. е. ищут солитон, бегущий по невозмущенной среде. Переход от (6.10) к такому решению можно произвести, воспользовавшись соотношением (4.26), которое пригодно и для уравнения (6.4). Заменяя в (6.10) $V \rightarrow V - 1$, $\theta \rightarrow \theta + z$, найдем

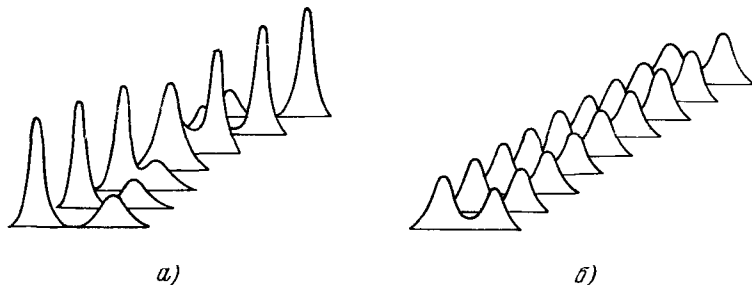
$$V = 3\text{ch}^{-2} [(\theta + z)/2\sqrt{D}]. \quad (6.11)$$

Из формулы (6.11) следует, что по невозмущенной среде солитон распространяется со сверхзвуковой скоростью.

Если на входе в нелинейную среду задано возмущение, не совпадающее по форме со стационарной волной, то такое возмущение при распространении в среде будет искажаться. На рис. 6.16 изображены последовательные этапы эволюции периодической волны, которая при $z = 0$ имела форму $V = \cos \theta$. Рисунок построен по данным численного интегрирования (6.4) для случая сильного проявления нелинейных свойств среды ($D \ll 4$). Кривые 1, 2, 3 соответствуют последовательно увеличивающимся расстояниям, проходимым волной в нелинейной диспергирующей среде. Как видно из рисунка, на первом этапе волна искажается как простая: происходит увеличение крутизны передних фронтов и обогащение спектра волны высшими гармониками. Когда фронты станут настолько крутыми, что дисперсионный член $D \partial^3 V / \partial \theta^3$ в уравнении (6.4) будет сравним по величине с нелинейным членом

$V \partial V / \partial \theta$, начнут действовать дисперсионные эффекты. На гребнях волны появятся осцилляции, развитие которых приведет к образованию солитона. Поскольку солитон движется со скоростью, большей скорости звука, он отходит от фронта несколько вперед. Затем формируется второй солитон и т. д. Этот процесс продолжается до тех пор, пока все возмущение не распадется на совокупность солитонов. Аналогичное явление имеет место и для других видов исходного возмущения.

Интересные результаты получены при численном решении задачи о взаимодействии двух солитонов (рис. 6.17). Предположим, что



6.17. Процесс столкновения двух солитонов с сильно различающимися (а) и близкими по величине (б) амплитудами.

в среде распространяются две стационарные уединенные волны с различными амплитудами. Если первый солитон с большей амплитудой в начальный момент времени расположен позади второго солитона с меньшей амплитудой, то, обладая большей скоростью распространения, первый солитон догонит второй и начнется их взаимодействие (рис. 6.17, а). При перекрытии образуется возмущение, не являющееся линейной суммой столкнувшихся солитонов. Это возмущение затем распадается на два солитона, в точности совпадающих с исходными. Таким образом, несмотря на нелинейность процесса, происходит как бы независимое прохождение одного солитона через другой. Однако такое взаимодействие имеет место только при значительной разнице в амплитудах солитонов.

Если амплитуды сталкивающихся солитонов близки по величине (рис. 6.17, б), их полного перекрытия не происходит. Солитоны сближаются, но так, что связанное состояние имеет два выраженных максимума. Затем в течение некоторого времени относительное расположение максимумов не изменяется, но изменяется их величина: меньший максимум вырастает до большего. При этом больший, напротив, достигает величины меньшего, после чего солитоны расходятся. Такой процесс напоминает упругое столкновение двух частиц одинаковой массы, при котором частицы обмениваются скоростями.

Вообще говоря, солитонные решения присущи не только уравнению Кортевега — де Вриза, но и целому классу нелинейных уравнений для диспергирующих систем. Взаимодействия солитонов, описываемые некоторыми другими уравнениями, обнаруживают новые интересные свойства уединенных волн, напоминающие свойства частиц. Например, так называемое уравнение синус-Гордона в модифицированной форме

$$u_{xx} - u_{tt} - \beta u_t = \sin u - \gamma$$

описывает как притяжение солитонов, так и их отталкивание, в результате чего образуется стационарное связанное состояние двух солитонов, находящихся на некотором удалении друг от друга.

Свойства таких решений в последнее время интенсивно обсуждаются в связи с проблемами теории поля. Возможно, что на этом пути удастся по-новому взглянуть на фундаментальные законы природы, связанные с волновыми свойствами частиц.

Остановимся теперь на свойствах уравнения, являющегося обобщением уравнений Кортевега — де Вриза и Бюргерса:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = V \frac{\partial V}{\partial \theta} + \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + D \frac{\partial^3 V}{\partial \theta^3}. \quad (6.12)$$

В (6.12) учтены одновременно нелинейные, диссипативные и дисперсионные свойства сред. Без нелинейного члена (6.12) было получено в § 7 гл. II при рассмотрении волн в средах с релаксацией. Отыскивая решение (6.12) в виде стационарных волн, придем к уравнению ангармонического осциллятора с затуханием:

$$D \frac{d^2 V}{d\theta^2} + \Gamma \frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{2}(1 - V^2). \quad (6.13)$$

При $\Gamma \rightarrow 0$ из (6.13) получаются осциллирующие стационарные решения (6.4) или решения в виде солитона. При $D \rightarrow 0$ имеем монотонную функцию (4.13), описывающую структуру ударной волны в диссипативной среде. В общем случае решение (6.13) описывает ударную волну, содержащую осцилляции вблизи фронта.

Исходя из уравнения (6.12), записанного для переменной V , можно получить укороченные уравнения для амплитуд нескольких компонент спектра, взаимодействующих между собой. Пусть, например, взаимодействуют три волны с частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, причем $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Тогда, отыскивая решение (6.12) в виде

$$V = A_1(z) \exp(i\omega_1\theta - i\omega_1^3 Dz) + A_2(z) \exp(i\omega_2\theta - i\omega_2^3 Dz) + \\ + A_3(z) \exp(i\omega_3\theta - i\omega_3^3 Dz) + \text{к.с.} \quad (6.14)$$

и собирая члены при одинаковых экспонентах, получим

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} + \Gamma\omega_1^2 A_1 &= i\omega_1 A_2^* A_3 e^{-i\Delta z}, \\ \frac{dA_2}{dz} + \Gamma\omega_2^2 A_2 &= i\omega_2 A_1^* A_3 e^{-i\Delta z}, \\ \frac{dA_3}{dz} + \Gamma\omega_3^2 A_3 &= i\omega_3 A_1 A_2 e^{i\Delta z},\end{aligned}\tag{6.15}$$

где $\Delta = D(\omega_3^3 - \omega_1^3 - \omega_2^3)$ — расстройка. По форме уравнения (6.15) совпадают с укороченными уравнениями, используемыми в нелинейной оптике для описания трехчастотного взаимодействия.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Во многих практически важных случаях приходится иметь дело с распространением волн в неоднородных средах, т. е. в средах, свойства которых меняются в пространстве. В неоднородной среде скорость и направление распространения являются локальными характеристиками волны и рассматриваются как функции координат.

Математически задачу о распространении гармонической волны в неоднородной среде, как правило, можно свести к нахождению решения уравнения Гельмгольца вида

$$\Delta u + k^2(x, y, z) u = 0,$$

где u — скалярная волновая функция. Решение этого уравнения при произвольной зависимости k^2 от координат не может быть записано в известных функциях.

Несколько более простой задачей является построение решения уравнения Гельмгольца в слоисто-неоднородной среде, когда k^2 меняется лишь в одном направлении, например, вдоль координаты z декартовой системы координат: $k^2 = k^2(z)$. Примерами таких сред в некотором приближении могут служить атмосфера и ионосфера Земли, морская вода, земная кора, оптические волокна и т. п. Но даже в этом случае точное решение уравнения Гельмгольца известно лишь для некоторых частных законов изменения $k^2(z)$. К тому же многие точные решения сложны по форме и не всегда удобны для анализа и практического использования. Поэтому весьма большое значение имеют приближенные методы нахождения волновых полей в неоднородных средах. При произвольной, но достаточно медленной зависимости свойств среды от координат можно построить приближенное решение, которое называется *приближением геометрической оптики*.

§ 1. Приближение геометрической оптики

Задача состоит в построении некоторого приближенного решения скалярного уравнения Гельмгольца, описывающего распространение гармонических волн в неоднородных средах

$$\Delta u + k^2(\mathbf{R}) u = 0. \quad (1.1)$$

Запишем решение (1.1) в виде

$$u(\mathbf{R}) = A(\mathbf{R}) \exp(ik_0 \Psi(\mathbf{R})), \quad (1.2)$$

где $A(\mathbf{R})$ и $\Psi(\mathbf{R})$ — действительные функции, \mathbf{R} — радиус-вектор текущей точки. Волна (1.2) однородна, если $A(\mathbf{R})$ постоянна на поверхности фронта, который определяется уравнением

$$\Psi(\mathbf{R}) = \text{const.}$$

Для плоской волны $\Psi(\mathbf{R})$ — линейная функция координат

$$\Psi(\mathbf{R}) = m\mathbf{R} = m_x x + m_y y + m_z z \text{ и } \text{grad } \Psi = \text{const.}$$

Если амплитуда и направление распространения волны меняются достаточно медленно, т. е. заметные изменения амплитуды и направления распространения происходят на расстояниях $L \gg \gg \lambda$, то все пространство (всю волну) можно разделить на участки с размерами $l < L$, в пределах каждого из которых волну можно считать плоской. Направление распространения волны в пределах области l можно характеризовать направлением нормали к ее фронту (к поверхности постоянной фазы или волновой поверхности).

Если волновые поверхности не содержат особых (конических) точек, то направление распространения волны в каждом участке пространства определяется направлением нормали к волновой поверхности.

В этом случае вместо построения волновых поверхностей можно построить семейство линий, нормальных к волновым поверхностям. В изотропной среде вдоль этих линий, которые называются лучами, происходит распространение энергии волны. Определение лучей, как линий, вдоль которых направлен средний по времени поток энергии, является наиболее общим, поскольку оно справедливо как для изотропной, так и для анизотропной среды. В анизотропной среде (см. гл. III) нормаль к волновому фронту в общем случае не совпадает с направлением луча. В настоящей главе мы ограничимся случаем изотропной среды.

Рассмотрим вывод уравнений геометрической оптики из уравнения (1.1). Предполагая, что свойства среды меняются мало на расстояниях порядка длины волны, т. е. $|\text{grad } k| \ll k$, будем считать, что $A(\mathbf{R})$ и $\text{grad } \Psi(\mathbf{R})$ меняются заметным образом на расстоянии L , значительно превышающем длину волны в среде $L \gg \gg \lambda$, или $|\text{grad } A| \ll k_0 A$ и $|\text{grad } \Psi| \ll k_0 \Psi$.

Подставляя (1.2) в уравнение (1.1), получим

$$\frac{\Delta A}{k_0^2 A} + 2i \frac{\nabla \Psi \nabla A}{k_0 A} + i \frac{\Delta \Psi}{k_0} - \left[(\nabla \Psi)^2 - \frac{k^2(\mathbf{R})}{k_0^2} \right] = 0. \quad (1.3)$$

Первый член в уравнении (1.3) имеет порядок $\lambda^2/(4\pi^2 L^2)$, второй и третий $\sim \lambda/(2\pi L)$, последний член от $\lambda/(2\pi L)$ не зависит. Прене-

брежем в уравнении членом $\Delta A / (k_0^2 A)$ и приравняем нулю действительную и мнимую части уравнения (1.3). Получим

$$(\nabla \Psi)^2 = \frac{k^2(\mathbf{R})}{k_0^2} = n^2(x, y, z), \quad (1.4)$$

$$A \Delta \Psi + 2 \nabla \Psi \nabla A = 0, \quad (1.5)$$

где $n(x, y, z)$ — показатель преломления неоднородной среды. Уравнение (1.4) определяет фазу (эйконал) и называется *уравнением эйконала*. Уравнение (1.5) определяет поведение амплитуды и называется *уравнением переноса*. Процесс распространения волны описывается приближенно уравнениями (1.4) и (1.5) в том случае, когда отброшенный член меньше каждого их двух членов следующего порядка малости, удержанных в уравнении, т. е. при соблюдении неравенств:

$$\begin{aligned} |\Delta A| &\ll 2k_0 |\nabla \Psi \nabla A|, \\ |\Delta A| &\ll k_0 |A \Delta \Psi|. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Однако такой способ не всегда корректен. Более корректным является пренебрежение малыми членами не в уравнении, а в решении. Для этого будем искать величину $u(\mathbf{R})$ в виде ряда по степеням $1/k_0$:

$$u(\mathbf{R}_0) = \left[A_0(\mathbf{R}) + \frac{1}{k_0} A_1(\mathbf{R}) + \frac{1}{k_0^2} A_2(\mathbf{R}) + \dots \right] \exp[ik_0 \Psi(\mathbf{R})]. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.4) и приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях $1/k_0$, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left[\frac{k^2(\mathbf{R})}{k_0^2} - (\nabla \Psi)^2 \right] A_0 &= 0, \\ A_0 \Delta \Psi + 2 \nabla A_0 \nabla \Psi &= 0, \\ A_1 \Delta \Psi + 2 \nabla A_1 \nabla \Psi &= i \Delta A_0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Первое и второе уравнения системы (1.8) совпадают соответственно с уравнениями эйконала и переноса. Зная Ψ и A_0 , определяем A_1 и т. д. Заметим, что если Ψ и A_0 — действительные величины, то A_1 — мнимая величина, поэтому $k_0 \Psi(\mathbf{R})$ является фазой волны (1.4) с точностью до членов порядка $1/k_0$. Точно так же $A(\mathbf{R})$ в (1.5) является амплитудой волны с точностью до членов порядка $1/k_0$.

Для электромагнитных волн уравнение эйконала может быть получено непосредственно из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = i \frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}. \quad (1.9)$$

Будем искать решение в виде

$$E = e^{ik_0\Psi} \left[E_0 + \frac{1}{k_0} E_1 + \dots \right], \quad (1.10)$$

$$H = e^{ik_0\Psi} \left[H_0 + \frac{1}{k_0} H_1 + \dots \right]. \quad (1.11)$$

Подставляя (1.10) и (1.11) в (1.9) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях $1/k_0$, получим

$$[\nabla\Psi E_0] = -\mu H_0, \quad [\nabla\Psi H_0] = \varepsilon E_0. \quad (1.12)$$

Из уравнений (1.12) следует, что векторы E_0 , H_0 и $\nabla\Psi$ взаимно перпендикулярны

$$(\nabla\Psi E_0) = 0, \quad (\nabla\Psi H_0) = 0.$$

Исключим из системы (1.12) вектор H_0 , тогда

$$[\nabla\Psi [\nabla\Psi E_0]] + \varepsilon\mu E_0 = 0,$$

или

$$\nabla\Psi (\nabla\Psi E_0) - (\nabla\Psi)^2 E_0 + \varepsilon\mu E_0 = 0.$$

Отсюда

$$(\nabla\Psi)^2 = \varepsilon\mu = k^2/k_0^2 = n^2.$$

Введем единичный вектор

$$l = \frac{\nabla\Psi}{|\nabla\Psi|} = \frac{\nabla\Psi}{n} \quad (1.13)$$

и подставим его в (1.12). Учитывая теперь, что $|\nabla\Psi| = \sqrt{\varepsilon\mu}$, получим

$$[lE_0] = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_0, \quad [lH_0] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0. \quad (1.14)$$

Уравнения (1.14) аналогичны уравнениям для плоских волн ((4.12) гл. I), роль постоянного вектора $k_0/|k_0|$ играет в данном случае вектор l , направление которого зависит от координат точки. В том случае, когда справедливо приближение геометрической оптики, связь между векторами E_0 , H_0 и $\nabla\Psi$ в каждой данной точке среды такая же, как в плоской волне: векторы E_0 и H_0 лежат в плоскости фронта волны $\Psi = \text{const}$, вектор $\nabla\Psi$ определяет направление распространения волны, связь между векторами E и H определяется уравнениями (1.14). Таким образом, в приближении геометрической оптики мы получаем решение в виде локально плоских однородных волн.

Основным уравнением геометрической оптики является уравнение эйконала (1.4). Запишем это нелинейное уравнение в частных производных первого порядка

$$F \left(x, y, z, \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.15)$$

Характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению (1.15), будет иметь вид

$$\frac{dx_i}{P_i} = \frac{d\Psi}{\sum_{i=1}^3 p_i P_i} = -\frac{dP_i}{X_i}, \quad (1.16)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \\ p_i &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}, \quad X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \\ i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.17)$$

В нашем случае $P_i = 2p_i$, $X_i = -\frac{\partial n^2}{\partial x_i}$, а уравнение (1.15) имеет вид

$$F = \sum_{i=1}^3 p_i^2 - n^2(x_i) = 0. \quad (1.18)$$

Следовательно, систему уравнений (1.16) можно записать следующим образом:

$$\frac{dx_i}{2p_i} = \frac{d\Psi}{2 \sum_{i=1}^3 p_i^2} = \frac{dp_i}{\partial n^2 / \partial x_i} = \frac{dS}{2n}. \quad (1.19)$$

Константы интегрирования уравнений (1.19) должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия. Величина S введена как независимая переменная, смысл которой будет ясен из дальнейшего. Приравнивая каждый член системы (1.19) последнему члену, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{dx_i}{dS} = \frac{p_i}{n}, \quad \frac{dp_i}{dS} = \frac{1}{2n} \frac{\partial n^2}{\partial x_i} = \frac{\partial n}{\partial x_i}, \quad \frac{d\Psi}{dS} = n. \quad (1.20)$$

Поскольку $p_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$ и учитывая (1.13), можно записать

$$p_i = n l_i. \quad (1.21)$$

Тогда система уравнений (1.20) запишется следующим образом:

$$\frac{dx_i}{dS} = l_i, \quad \frac{d(n l_i)}{dS} = \frac{\partial n}{\partial x_i}, \quad \frac{d\Psi}{dS} = n \quad (1.22)$$

или в векторном виде

$$\frac{d\mathbf{R}}{dS} = \mathbf{l}, \quad (1.23)$$

$$\frac{d(n\mathbf{l})}{dS} = \text{grad } n \quad \text{или} \quad \frac{d(n \frac{d\mathbf{R}}{dS})}{dS} = \text{grad } n, \quad (1.24)$$

$$\frac{d\psi}{dS} = n. \quad (1.25)$$

Так как $|\mathbf{l}| = 1$, из (1.23) получим

$$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \quad (1.26)$$

откуда видно, что введенный параметр S является длиной кривой $\mathbf{R}(S)$, а \mathbf{l} — единичный вектор, касательный кривой $\mathbf{R}(S)$.

Уравнение (1.24) вместе с граничными условиями, задающими направление луча при $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0$, определяет траекторию луча $\mathbf{R} = \mathbf{R}(S)$. Если траектория луча определена, то фаза (или эйконал) может быть найдена из (1.25) в виде криволинейного интеграла вдоль траектории луча

$$\psi = \int_{M_0}^M n(\mathbf{R}(S)) dS. \quad (1.27)$$

Линии $\mathbf{R}(S)$, являющиеся лучами, ортогональны к поверхностям $\psi = \text{const}$.

Уравнение (1.24) может быть найдено также из вариационного принципа Ферма, согласно которому интеграл (1.27) вдоль траектории луча должен иметь минимальное значение.

Часто удобно бывает пользоваться координатами, связанными с лучами — лучевыми координатами. Пусть волновой фронт определен уравнением $\psi = \psi_0 = \text{const}$ и координаты α и β определяют положение точки M_0 на поверхности $\psi = \psi_0$. Из каждой точки $M_0(\alpha, \beta)$ проведен луч, перпендикулярный волновой поверхности в данной точке. Точки на луче можно характеризовать величиной эйконала

$$\psi = \psi_0 \pm \int_{M_0}^M n dS.$$

Таким образом, параметры α и β определяют направление луча в точке M_0 , а эйконал ψ определяет точку на луче. Каждая точка $M(\mathbf{R})$ есть однозначная функция α, β, ψ , т. е.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha, \beta, \psi). \quad (1.28)$$

Из этого выражения при постоянных α, β получаем уравнение луча, при постоянном ψ — уравнение волнового фронта.

Изменение интенсивности вдоль луча можно определить из уравнения переноса (1.5). Запишем это уравнение в другой форме.

Для этого умножим (1.5) на A и, учитывая, что $2A\nabla A = \nabla(A^2)$, получим

$$\nabla(A^2\nabla\Psi) = 0$$

или, поскольку $\text{grad } \Psi = n\mathbf{l}$,

$$\text{div}(A^2n\mathbf{l}) = 0. \quad (1.29)$$

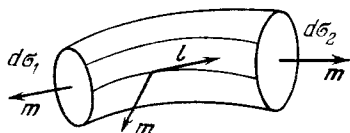
Проанализируем уравнение (1.29). Для этого рассмотрим поверхность $\Psi_1 = \text{const}$ и выделим на ней малую площадь $d\sigma_1$, ограниченную некоторым пучком лучей, в пределах которой $A = A_1$. Проведем лучи до пересечения с другой поверхностью $\Psi_2 = \text{const}$, на которой пучок ограничит другую площадь $d\sigma_2$. Проинтегрируем уравнение (1.29) по объему, заключенному внутри лучевой трубки

$$\oint_V \text{div}(A^2n \, d\mathbf{l}) \, dV = 0.$$

Согласно теореме Гаусса интеграл по объему можно преобразовать в интеграл по поверхности Σ , охватывающей объем V ,

$$\oint_V \text{div}(A^2n \, d\mathbf{l}) \, dV = \oint_{\Sigma} nA^2\mathbf{l}m \, d\Sigma = 0.$$

Здесь \mathbf{m} — единичный вектор нормали к поверхности, внешний по отношению к рассматриваемому объему (рис. 7.1). На боковой поверхности лучевой трубки $\mathbf{l}m = 0$, на поверхности Ψ_1 $\mathbf{l}m = -1$, на поверхности Ψ_2 $\mathbf{l}m = 1$. Следовательно, внутри лучевой трубки



$$n_1A_1^2d\sigma_1 = n_2A_2^2d\sigma_2 = nA^2d\sigma = A_{00}^2,$$

7.1. К определению потока энергии в лучевой трубк.

где A_{00} — константа, $d\sigma$ — текущее сечение лучевой трубки, nA^2 пропорционально плотности потока энергии, $nA^2d\sigma$ — энергии, переносимой волной вдоль лучевой трубки. Изменение $d\sigma$ вдоль луча определяется уравнением луча. Интенсивность определяется из уравнения

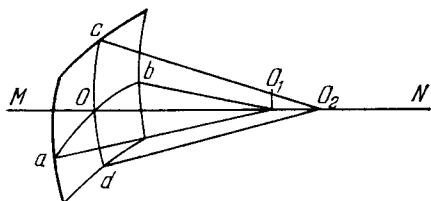
$$A^2 = \frac{A_{00}^2}{n \, d\sigma} = A_1^2 \frac{n_1 \, d\sigma_1}{n \, d\sigma}. \quad (1.30)$$

Решение уравнений (1.24) и (1.30) при произвольной зависимости n от трех координат может быть найдено лишь численными методами. Однако в некоторых простых случаях можно получить аналитическое решение этих уравнений. Например, для однородной среды из уравнения (1.24) получим

$$\mathbf{R} = a\mathbf{S} + \mathbf{b}, \quad (1.31)$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} — постоянные векторы. Соотношение (1.31) определяет прямую линию, направленную по \mathbf{a} и проходящую через конец вектора \mathbf{b} . Мы получили известный результат: в однородной среде лучи являются прямыми линиями.

Для нахождения интенсивности волны в этом случае воспользуемся уравнением (1.30). Выделим на какой-либо волновой поверхности рассматриваемого пучка



7.2. Элемент волновой поверхности.

рассматриваемого пучка лучей элемент $d\sigma$ (рис. 7.2). В точке O пересечения луча MN с данной волновой поверхностью последняя имеет, в общем случае, два различных главных радиуса кривизны, центры которых O_1 и O_2 лежат на луче MN . Пусть ab и cd — элементы двух главных кругов кривизны, проходящих через точку O . Длины отрезков ab и cd пропорциональны соответственно $R_1 = O_1O$ и $R_2 = O_2O$, а площадь элемента волновой поверхности $d\sigma \sim R_1R_2$. Тогда

$$A^2 \approx \frac{C}{R_1R_2}, \quad (1.32)$$

где C — константа. Формула (1.32) определяет изменение интенсивности вдоль луча как функцию расстояния от определенных точек (центров кривизны волновых поверхностей) на луче. Если оба радиуса кривизны совпадают, то

$$A^2 = \frac{C}{R^2}, \quad (1.33)$$

а поле волны

$$u = \frac{C}{R} e^{ikR}. \quad (1.34)$$

В этом случае пучок лучей испускается точечным источником или сходится в точку. Волновые поверхности — концентрические сферы.

Интенсивность обращается в ∞ при $R_1 = 0$ и $R_2 = 0$, т. е. в центрах кривизны волновых поверхностей. Если применить это рассуждение ко всевозможным лучам пучка, то результат можно сформулировать следующим образом: интенсивность волны обращается в ∞ на двух поверхностях, являющихся геометрическим местом всех центров кривизны волновых поверхностей. Эти поверхности называются *каустиками*. Согласно известным из дифференциальной геометрии свойствам геометрического места центров кривизны семейства поверхностей лучи, являющиеся нормальными к волновым поверхностям, касаются каустик. Поэтому каустики можно так же определить, как геометрические огибаю-

щие системы лучей. Если пучок лучей имеет сферический волновой фронт, то обе каустические поверхности сливаются в одну точку — фокус. На каустике соседние лучи касаются друг друга, поэтому сечение лучевой трубки $d\sigma \rightarrow 0$ и согласно (1.30) $A^2 \rightarrow \infty$. На самом деле это конечно не так, и результат этот свидетельствует о том, что геометрическая оптика не дает возможности определить амплитуду и изменение фазы вблизи каустики. Поскольку каустическая поверхность является огибающей семейства лучей, то лучи за каустикой не проникают, и в приближении геометрической оптики поле за каустикой равно нулю. Для определения поля на каустике и в области тени необходимо пользоваться точным решением волнового уравнения для неоднородной среды, которое для плоскостойкой среды будет рассмотрено в § 4.

§ 2. Геометрическая оптика слоисто-неоднородной среды

Рассмотрим несколько примеров применения геометрической оптики для исследования распространения волн в слоисто-неоднородных средах.

Получим уравнения траекторий лучей в сферически-слоистой и плоскостойкой средах. Примером таких сред в некотором приближении является земная атмосфера. Задача о распространении лучей в сферически-неоднородных средах может встретиться также при анализе прохождения оптического излучения через прозрачные капли, газовые пузырьки в твердых телах и жидкостях, тепловые ореолы поглощающих частиц. В сферически-слоистой среде показатель преломления зависит лишь от расстояния R до фиксированной точки O :

$$n = n(R). \quad (2.1)$$

Рассмотрим изменение вектора $[\mathbf{R}n(R)\mathbf{l}]$ вдоль луча

$$\frac{d[\mathbf{R}n(R)\mathbf{l}]}{dS} = \left[\frac{d\mathbf{R}}{dS} n\mathbf{l} \right] + \left[\mathbf{R} \frac{d}{dS} (n\mathbf{l}) \right]. \quad (2.2)$$

Поскольку $\frac{d\mathbf{R}}{dS} = \mathbf{l}$ согласно (1.23), то первый член в правой части (2.2) обращается в нуль. Второй член на основании (1.24) можно переписать в виде $[\mathbf{R} \text{grad } n]$. Поскольку $n = n(R)$, то $\text{grad } n = \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{dn}{dR}$, и второй член в правой части (2.2) также обращается в нуль. Поэтому

$$[\mathbf{R}n\mathbf{l}] = \text{const}. \quad (2.3)$$

Отсюда следует, что лучи в этом случае являются плоскими кривыми, лежащими в плоскости, проходящей через начало координат, и вдоль каждого луча выполняется условие

$$nR \sin \theta = \text{const}, \quad (2.4)$$

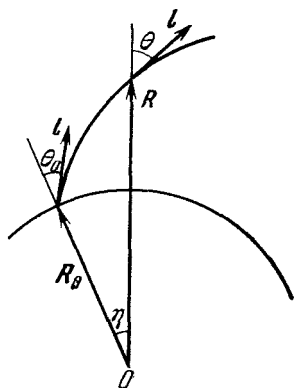
где θ — угол между касательной к лучу l в данной точке и радиус-вектором. Соотношение (2.4) представляет собой закон Снеллиуса для сферически-слоистой среды. Константа может быть определена из граничных условий. Пусть при $R = R_0 \sin \theta = \sin \theta_0$, а $n = n_0 = 1$, тогда

$$nR \sin \theta = R_0 \sin \theta_0. \quad (2.5)$$

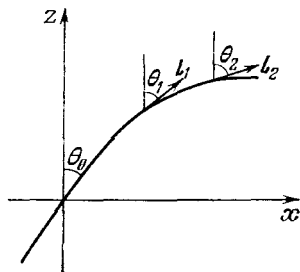
Уравнение траектории можно найти из очевидного соотношения

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{R \, d\eta}{dR} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\frac{n^2 R^2}{R_0^2} - \sin^2 \theta_0}}, \quad (2.6)$$

где η — центральный угол (рис. 7.3). В плоскослоистой среде показатель преломления зависит от одной координаты, например



7.3. К определению уравнения траектории луча в сферически-слоистой среде.



7.4. К определению уравнения траектории луча в плоскослоистой среде.

от вертикальной координаты z декартовой системы,

$$n = n(z). \quad (2.7)$$

В этом случае уравнение траектории луча (1.24) запишется в виде

$$\frac{d(n \sin \theta)}{dS} = \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

или

$$n(z) \sin \theta(z) = \text{const} = \sin \theta_0, \quad (2.8)$$

где θ — угол, который составляет луч с осью z в произвольной точке траектории (при $z = 0$, $\theta = \theta_0$), l — единичный вектор (рис. 7.4). Уравнение траектории луча получим из соотношения

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dx}{dz} = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}}. \quad (2.9)$$

Как видно из (2.6) и (2.9), угол наклона луча к вертикали по мере распространения в слоистой среде изменяется, т. е. лучи искривляются. Искривление лучей в неоднородной среде называется *рефракцией*.

Используем уравнения (2.6) и (2.9) для описания распространения радиоволн в лучевом приближении в неоднородной по высоте земной атмосфере. Пусть R_0 — радиус Земли, z — высота, отсчитываемая от поверхности Земли, так что $R = R_0 + z$, и $\theta = \theta_0$ при $z = 0$. При введенных обозначениях из (2.5) получим

$$n(z) (1 + z/R_0) \sin \theta = \sin \theta_0.$$

Если ввести приведенный показатель преломления

$$n_{\text{пр}} = n(z) (1 + z/R_0), \quad (2.10)$$

то закон Снеллиуса приобретает такой же вид, как для плоско-слоистой среды

$$n_{\text{пр}} \sin \theta = \sin \theta_0.$$

Обозначим расстояние, отсчитываемое вдоль поверхности Земли через x , так что $x = R_0 \eta$. Тогда уравнение траектории луча с точностью до членов порядка z/R_0 совпадает с уравнением траектории (2.9), в котором действительный показатель преломления заменен через $n_{\text{пр}}$:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{n_{\text{пр}}^2 - \sin^2 \theta_0}} \frac{1}{1 + z/R_0}. \quad (2.11)$$

Таким образом, при $z/R_0 \ll 1$ задача о распространении лучей в сферически-слоистой среде может быть сведена к более простой задаче о распространении лучей в плоско-слоистой среде с приведенным показателем преломления (2.10). При этом в ионосфере ($z = 60 \div 300$ км) обычно нет необходимости пользоваться приведенным показателем преломления, поскольку в ионосфере $|\text{grad } n| = |dn/dz|$ имеет порядок $10^{-4} \div 10^{-5} \text{ м}^{-1}$, а $1/R_0 = 1,57 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1}$ и $\text{grad } n_{\text{пр}} \approx \text{grad } n$, т. е. $n_{\text{пр}} = n$. В тропосфере изменение истинного показателя преломления происходит более медленно, чем в ионосфере. В условиях так называемой «нормальной рефракции» $dn/dz = -4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^{-1}$ и учет члена z/R_0 в выражении (2.10) для $n_{\text{пр}}$ меняет не только абсолютную величину, но и знак $\text{grad } n_{\text{пр}}$.

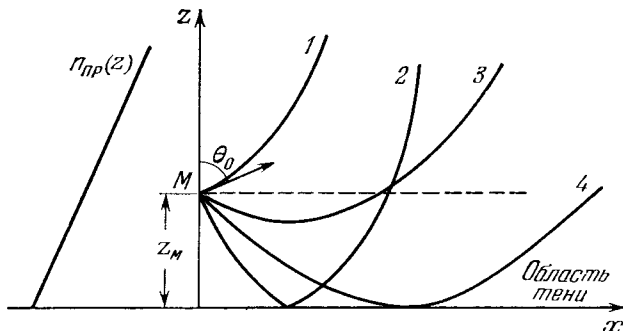
Рассмотрим качественно рефракцию лучей в плоско-слоистой среде при разных законах изменения $n(z)$.

1. Примем, что показатель преломления n монотонно возрастает с высотой, т. е. $\text{grad } n > 0$. Такие условия реализуются обычно в тропосфере, если под n понимать $n_{\text{пр}}$.

Пусть в некоторой точке M неоднородной среды на высоте z_M над идеально отражающей поверхностью, которую считаем плоско-

кой, под углом θ_0 к вертикальной оси выходит луч. Если $\theta_0 < \pi/2$, то луч направлен вверх в сторону увеличивающихся значений показателя преломления. Знаменатель в формуле (2.9) с высотой увеличивается, и $\text{tg } \theta$ уменьшается, т. е. луч, искривляясь, приближается к вертикали (луч 1 на рис. 7.5).

Если $\theta_0 > \pi/2$ и луч направлен к отражающей поверхности, то распространение луча происходит в направлении уменьшающихся



7.5. Траектории лучей в плоскостной среде с $\text{grad } n > 0$.

значений показателя преломления, знаменатель в формуле (2.9) с уменьшением высоты уменьшается и луч отклоняется от вертикали (угол θ уменьшается). При этом возможны случаи, когда луч достигнет поверхности $z = 0$ и отразится (луч 2), а затем будет распространяться в сторону возрастающих значений n , или луч может достигнуть точки поворота, когда $n(z) = |\sin \theta_0|$, $\theta = \pi/2$, и, став параллельным отражающей поверхности, повернуть в сторону возрастающих значений $n(z)$ (луч 3) и, наконец, при некотором значении угла $\theta_0 > \pi/2$ точка поворота луча должна лежать на поверхности $z = 0$ (луч 4). Траектория луча 4 замечательна тем, что является границей между областью, в которую могут попадать лучи, и областью тени, в которую лучи, создаваемые источником, расположенным на высоте z_M , попасть не могут.

2. Если показатель преломления монотонно убывает с высотой, так что $\text{grad } n < 0$, то лучи отклоняются к горизонтали, и угол $\theta > \theta_0$ (рис. 7.6). В этом случае на высоте, определяемой из условия

$$n(z_0) = \sin \theta_0, \quad (2.12)$$

направление луча параллельно горизонтальной плоскости, т. е. на высоте z_0 происходит поворот луча. Такие условия характерны для ионосферы, в которой показатель преломления убывает с высо-

той. Уравнение траектории луча получим из (2.9):

$$x = \int_0^{z_0} \sin \theta_0 (n^2 - \sin^2 \theta_0)^{-1/2} dz + \int_z^{z_0} \sin \theta_0 (n^2 - \sin^2 \theta_0)^{-1/2} dz.$$

Расстояние между точками входа луча в неоднородную среду и выхода из нее (смещение луча при отражении от неоднородной среды)

$$\delta x = x_2 - x_1 = 2 \sin \theta_0 \int_0^{z_0} (n^2 - \sin^2 \theta_0)^{-1/2} dz. \quad (2.13)$$

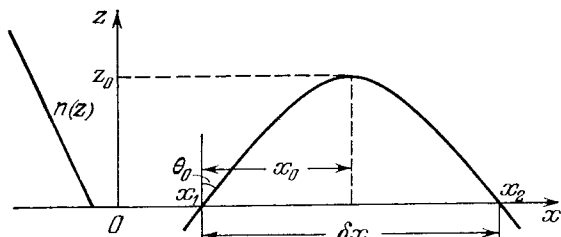
Например, при линейном законе изменения $n^2(z) = 1 - z/z_1$ уравнение траектории луча имеет вид параболы (рис. 7.6)

$$[x - z_1 \sin(2\theta_0)]^2 = z_1^2 \sin^2(2\theta_0) - 4z_1 z \sin^2 \theta_0 \quad (2.14)$$

с вершиной в точке $x_0 = z_1 \sin 2\theta_0$, $z_0 = z_1 \cos^2 \theta_0$ (координаты точки поворота луча). Смещение луча

$$\delta x = 2 \sin \theta_0 \int_0^{z_0} (\cos^2 \theta_0 - z/z_1)^{-1/2} dz = 2z_1 \sin 2\theta_0. \quad (2.15)$$

Если при $z = 0$ имеется поверхность, от которой происходит отражение лучей, то картина распространения повторяется. В этом



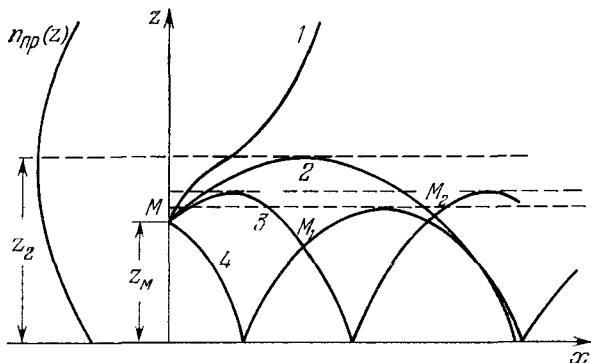
7.6. Траектория луча в плоскослоистой среде с $\text{grad } n < 0$.

случае область тени в направлении оси x отсутствует. Луч испытывает периодические изменения направления распространения.

3. Показатель преломления может меняться с высотой и не монотонно, т. е. на некоторой высоте $\text{grad } n$ может менять знак. Такие условия могут наблюдаться, например в тропосфере, когда вследствие аномальных изменений температуры и влажности с высотой (см. § 4 гл. II) в некотором интервале значений высоты $z_1 \leq z \leq z_2$ $|\text{grad } n_{\text{пр}}| > 1/R_0$, вследствие чего $\text{grad } n_{\text{пр}}$ становится отрицательным. Подобным же образом меняется показатель преломления ионосферы в области между слоями E и F , показатель преломления звука в морской воде и т. д.

Рассмотрим качественно ход лучей в этих случаях. Пусть в интервале высот $0 \leq z \leq z_2$ $\text{grad } n_{\text{пр}} < 0$, при $z > z_2$ $\text{grad } n_{\text{пр}} > 0$, и примем, что при $z = 0$ имеем поверхность, от которой лучи отражаются (рис. 7.7).

Если источник расположен на высоте $z < z_2$, то при $\theta_0 < \pi/2$ лучи направлены в сторону уменьшающихся значений n , и угол θ ,



7.7. Траектории лучей при волноводном распространении в слоисто-неоднородной среде над идеально отражающей поверхностью.

по мере распространения лучей вверх, увеличивается. Если угол $\theta_0 < \arcsin n(z_2)$, то после того, как луч достигнет уровня z_2 , он переходит в область, в которой $\text{grad } n_{\text{пр}} > 0$, и при дальнейшем распространении отклоняется к вертикали, угол θ при этом уменьшается (луч 1 на рис. 7.7). Если же угол $\theta_0 = \arcsin n(z_2)$, то луч на уровне z_2 становится параллельным оси x , $\theta = \pi/2$ (луч 2). При дальнейшем увеличении угла θ_0 точка поворота луча будет находиться ниже уровня z_2 и луч будет распространяться, отражаясь последовательно от поверхности при $z = 0$ и от слоя на высоте z , определяемой из условия $\theta_0 = \arcsin n(z)$ (лучи 3, 4). В неоднородной среде в этом случае возникает волноводный канал, высота которого ограничена высотой z_2 , соответствующей минимальному значению $n_{\text{мин}}(z)$.

4. Волноводная картина возникает и тогда, когда $n(z)$ меняется симметричным образом (рис. 7.8). Такой случай помимо перечисленных выше наблюдается при распространении звуковых волн в океане, а так же оптических волн в диэлектрических волноводах (стекловолокнах). Пусть показатель преломления меняется по закону

$$n = \text{ch}^{-1} \frac{z}{a}. \quad (2.16)$$

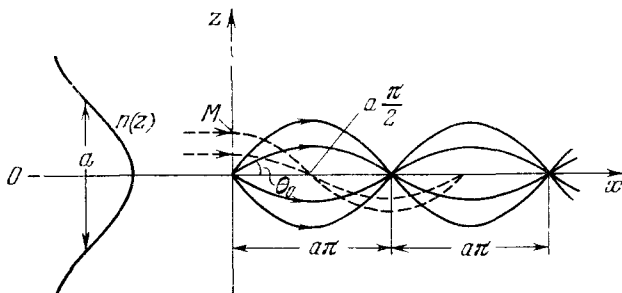
Будем считать, что источник находится на оси $z = 0$. Тогда уравнение траектории луча, вышедшего из точки $x = 0, z = 0$ под углом

θ_0 к оси z , будет иметь вид

$$x = \sin \theta_0 \int_0^z \frac{\operatorname{ch} \frac{z}{a} dz}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a}}} =$$

$$= \int_0^z \frac{\operatorname{ch} \frac{z}{a} dz}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta_0 - \operatorname{sh}^2 \frac{z}{a}}} = a \operatorname{arcsin} \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{z}{a}}{\operatorname{ctg} \theta_0} \right). \quad (2.17)$$

Максимальное отклонение луча от оси волновода определяется из



7.8. Фокусировка лучей при волноводном распространении в слоисто-неоднородной среде.

условия $n(z_{\max}) = \sin \theta_0$, т. е.

$$\operatorname{ch} \frac{z_{\max}}{a} \sin \theta_0 = 1, \quad z_{\max} = a \operatorname{arch} \frac{1}{\sin \theta_0}.$$

Смещение луча вдоль оси волновода при однократном отражении

$$\delta x = 2 \int_0^{z_{\max}} \frac{\operatorname{ch} \frac{z}{a} dz}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta_0 - \operatorname{sh}^2 \frac{z}{a}}} = 2a \operatorname{arcsin} \left[\frac{\operatorname{sh} \operatorname{arch} \frac{1}{\sin \theta_0}}{\operatorname{ctg} \theta_0} \right] = a\pi. \quad (2.18)$$

Таким образом, независимо от угла выхода из излучателя, луч возвращается в плоскость $z = 0$ на расстоянии $a\pi$ от излучателя. В точках, отстоящих друг от друга на расстояние $a\pi$, имеются фокусы.

Рассмотрим траекторию луча, падающего на среду под углом $\theta_0 = \pi/2$ к оси z в точке $x = 0, z = z_M$. Уравнение траектории луча

будет иметь вид

$$x = \int_{z_0}^z [n^2(z) - n^2(z_M)]^{-1/2} dz. \quad (2.19)$$

Подставляя $n(z)$ и $n(z_M)$ из (2.16), получим

$$x = \int_{z_0}^z \frac{\operatorname{ch} \frac{z}{a} \operatorname{ch} \frac{z_M}{a} dz}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{z}{a} - \operatorname{sh}^2 \frac{z}{a}}} = a \left[\arcsin \frac{\operatorname{sh} \frac{z}{a}}{\operatorname{sh} \frac{z_M}{a}} - \frac{\pi}{a} \right]$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} = \arcsin \frac{\operatorname{sh} \frac{z}{a}}{\operatorname{sh} \frac{z_M}{a}}.$$

Окончательно уравнение траектории можно записать в виде

$$\operatorname{sh} \frac{z}{a} = \operatorname{sh} \frac{z_M}{a} \cos \frac{x}{a}. \quad (2.20)$$

Видно, что в точке $x_\Phi = a \frac{\pi}{2}$ координата z обратится в нуль независимо от значений координаты z_M . Это означает, что все параллельные лучи, независимо от начальной координаты z_M , пересекают ось x в одной точке x_Φ — фокусе, расположенном на расстоянии $a\pi/2$ от входа в волновод. Расстояние между последующими фокальными точками согласно (2.18) будет равно $\delta x = a\pi$.

Рассмотрим второй пример. Пусть показатель преломления меняется по параболическому закону

$$n = n_0 (1 - z^2/a^2). \quad (2.21)$$

Подставив (2.21) в (2.19), получим уравнение траектории луча, начальные координаты которого $x = 0$, $z = z_M$ и $\theta_0 = \pi/2$,

$$x = \int_{z_M}^z [n_0^2 (1 - z^2/a^2)^2 - n_0^2 (1 - z_M^2/a^2)^2]^{-1/2} dz. \quad (2.22)$$

Вычисляя интеграл, получим

$$z = z_M \cos \frac{n_0 x}{a} \left(1 - \frac{z_M^2}{a^2} \right).$$

В этом случае лучи пересекают ось x в разных точках

$$x_\Phi = \frac{\pi}{2} \frac{a}{n_0} \left(1 - \frac{z_M^2}{a^2} \right)^{-1}.$$

Но если ширина пучка невелика и $\frac{z_M}{a} \ll 1$, то этой разницей можно пренебречь вплоть до фокуса с номером, не превышающим a^2/z_M^2 .

§ 3. Геометрическая оптика плоскослоистой среды

Мы рассмотрели ход лучей в слоистых средах при различных законах изменения показателя преломления. Для определения поля в приближении геометрической оптики необходимо также знать фазу и амплитуду в той точке пространства, в которую приходит луч, т. е. найти функции $\Psi(\mathbf{R})$ и $A(\mathbf{R})$, где \mathbf{R} радиус-вектор точки, в которой мы определяли поле.

Для плоскослоистой среды уравнение эйконала имеет вид

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 = n^2(z). \quad (3.1)$$

Из системы уравнений (1.19) следует, что при $n = n(z)$ $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_x = \text{const}$. Если направление луча при $z = 0$ составляет угол θ_0 с осью z , а $n_0 = 1$ при $z = 0$, то $p_x = \sin \theta_0$. Из уравнения (3.1) получим

$$p_z^2 = n^2(z) - \sin^2 \theta_0,$$

$$\Psi = x \sin \theta_0 \pm \int_0^{z_0} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz. \quad (3.2)$$

Знак перед корнем определяется направлением распространения луча (в положительном или отрицательном направлениях оси z).

Если луч отражается от неоднородной среды с $\text{grad } n < 0$, то полное изменение фазы вдоль луча равно

$$\delta \Psi = \Psi_2 - \Psi_1 = \delta x \sin \theta_0 + 2 \int_0^{z_0} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz, \quad (3.3)$$

где δx определяется формулой (2.13), z_0 — высота, на которой происходит поворот луча.

При линейном законе изменения квадрата показателя преломления $n^2(z) = 1 - z/z_1$ с учетом (2.15) сдвиг фаз между падающим и отраженным лучами равен

$$k_0 \delta \Psi = k_0 \delta x \cdot \sin \theta_0 + \frac{4k_0}{3} z_1 \cos^3 \theta_0 = 4k_0 z_1 \cos \theta_0 \left(\sin^2 \theta_0 + \frac{1}{3} \cos^2 \theta_0 \right). \quad (3.4)$$

Изменение амплитуды вдоль луча найдем из уравнения переноса (1.5). В данном случае оно имеет вид

$$2 \sin \theta_0 \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + n \cos \theta \cdot \frac{\partial A}{\partial z} = -A \frac{d}{dz} (n \cos \theta). \quad (3.5)$$

Здесь учтено, что $\nabla \Psi = x_0 \sin \theta_0 + z_0 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}$ и $\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} = n \cos \theta$ согласно (2.8). Решая (3.5), найдем

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{n \cos \theta}} = A_0 (n^2 - \sin^2 \theta_0)^{-1/4}. \quad (3.6)$$

Определив амплитуду (3.6) и фазу (3.2), можно записать поле волны в слоисто-неоднородной среде, найденное в приближении геометрической оптики,

$$u(x, z, t) = \frac{A_{01}}{(n^2 - \sin^2 \theta_0)^{1/4}} \exp \left\{ ik_0 \left(x \sin \theta_0 + \int_0^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz \right) - i\omega t \right\} + \frac{A_{02}}{(n^2 - \sin^2 \theta_0)^{1/4}} \exp \left\{ ik_0 \left(x \sin \theta_0 - \int_0^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz \right) - i\omega t \right\}. \quad (3.7)$$

Решение (3.7) соответствует двум бегущим волнам, распространяющимся в сторону возрастающих значений координаты z «вверх» и убывающих значений координаты z «вниз». Обе волны распространяются независимо, отражения от неоднородной среды в приближении геометрической оптики не происходит. Отражение может происходить лишь в тех областях, где условия применимости геометрической оптики нарушаются.

Поле каждой из двух волн в (3.7) может быть записано в виде

$$u(x, z) = \exp(ik_0 x \sin \theta_0) f(z),$$

где $f(z)$ является приближенным решением уравнения

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + k_0^2 (n^2 - \sin^2 \theta_0) f(z) = 0, \quad f(z) = \frac{A_0}{(n^2 - \sin^2 \theta_0)^{1/4}} \exp \left\{ \pm ik_0 \int_0^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz \right\}. \quad (3.8)$$

Решение (3.8) известно также как приближенное решение Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна (ВКБ). Выражения (3.2), (3.6) и (3.7) определяют закон изменения фазы, амплитуды и поля в плоскостной неоднородной среде при перемещении вдоль траектории луча, который на плоскости $z = 0$, в точке $x = 0$ направлен под углом θ_0 к оси z .

Задача становится более сложной, если необходимо определить Ψ и A не вдоль фиксированного луча, а в какой-либо произвольной точке (x, z) . В неоднородной среде при определенных условиях в данную точку может приходиться не один луч, а несколько (см., например, точки M_1 и M_2 на рис. 7.7). Поэтому прежде всего из уравнения траектории луча при данном законе изменения $n(z)$ необходимо определить число лучей, приходящих в данную точку, и начальные координаты каждого луча (угол выхода и координату x в плоскости $z = \text{const}$). Если в данную точку приходит несколько лучей, то поле будет описываться суммой слагаемых вида (3.7). Если такого луча нет, то точка наблюдения находится в тени.

При волноводном распространении в неоднородной среде возможно образование фокусов (как следует из примера 4, рассмотренного в § 2) и каустик. Если уравнение семейства лучей, выходящих из точки $M(0, z)$ под углом θ_0 , задается в виде

$$R = R(\theta_0, z) \quad (3.9)$$

(θ_0 является параметром), то уравнение каустики, являющейся огибающей семейства лучей, находится путем исключения θ_0 из уравнения (3.9) и уравнения

$$\frac{\partial R}{\partial \theta_0}(\theta_0, z) = 0. \quad (3.10)$$

В областях, примыкающих непосредственно к каустикам, лучевая теория неприменима.

Проанализируем условие применимости геометрической оптики, которое определяется неравенством (1.6). Для этого из выражений (3.2) и (3.6) определим $\Delta\Psi$ и ΔA :

$$\Delta\Psi = \frac{d}{dz}(n \cos \theta), \quad \frac{\Delta A}{A} = \frac{3}{4} \frac{\left[\frac{d}{dz}(n \cos \theta) \right]^2}{(n \cos \theta)^2} - \frac{1}{2} \frac{\frac{d^2}{dz^2}(n \cos \theta)}{n \cos \theta}.$$

Условие (1.6) будет выполнено при соблюдении неравенств

$$\left| \frac{\frac{d}{dz}(n \cos \theta)}{(n \cos \theta)^2} \right| \ll k_0, \quad (3.11)$$

$$\left| \frac{\frac{d^2}{dz^2}(n \cos \theta)}{n \cos \theta} \right| \ll k_0 \left| \frac{d}{dz}(n \cos \theta) \right|. \quad (3.12)$$

При монотонном изменении свойств среды наиболее существенным является условие (3.11). Рассмотрим его смысл. При вертикальном

падении, когда $\theta = \theta_0 = 0$, условие (3.11) запишется так:

$$\frac{\lambda}{2\pi} \frac{\left| \frac{dn}{dz} \right|}{n} \ll 1, \quad (3.13)$$

где $\lambda = \lambda_0/n$ — длина волны в среде.

Неравенство (3.11) нарушается, если велика производная dn/dz или если показатель преломления n стремится к нулю. При $n \rightarrow 0$ длина волны в среде $\lambda \rightarrow \infty$, и изменения свойств неоднородной среды, даже при достаточно малом значении dn/dz , на расстоянии порядка длины волны в среде будут велики. При наклонном падении волны на плоскостойкую среду $\lambda_0/n \cos \theta$ характеризует масштаб изменения поля волны в направлении $\text{grad } n$, и неравенство (3.11) не выполняется, когда $n \cos \theta \rightarrow 0$ или $n(z) \rightarrow \rightarrow \sin \theta_0$, т. е. в области поворота луча. Поскольку отражение волн от неоднородной среды может происходить лишь в тех областях, где нарушаются условия применимости геометрической оптики, то область $n(z_0) \approx \sin \theta_0$ (или $n = 0$, если $\theta_0 = 0$) является той областью, от которой в плоскостойкой среде отражаются волны. Отражение является полным, если только при $z > z_0$ $n^2(z)$ продолжает убывать. В области $z > z_0$ поле в направлении z затухает

$$u \sim \exp \left(-k_0 \int_{z_0}^z \sqrt{|n^2 - \sin^2 \theta_0|} dz \right).$$

При вертикальном падении на неоднородную среду волна отражается при $n = 0$.

Как уже указывалось в гл. II, условие $n = 0$ реализуется в газовой плазме, например в ионосфере, в широком диапазоне частот. Для плазмы $n^2(z) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} N(z)$, в области отражения при вертикальном падении $n = 0$ и

$$N(z) = \frac{m\omega^3}{4\pi e^2} = 1,24 \cdot 10^{-8} f^2 \text{ (Гц)}.$$

Максимальная частота, при которой волны могут отражаться от ионосферы при вертикальном падении (критическая частота):

$$f_{\text{кр}}^2 = \frac{e^2}{\pi m} N_{\text{max}}.$$

Можно найти соотношение между предельной частотой f_{max} при наклонном падении волны на ионосферу и критической частотой. При наклонном падении под углом θ_0 , из условия отражения $n^2 = \sin^2 \theta_0$, получим

$$1 - f_{\text{кр}}^2/f_{\text{max}}^2 = \sin^2 \theta_0$$

или

$$f_{\text{max}} = f_{\text{кр}}/\cos \theta_0 > f_{\text{кр}}.$$

В практике радиосвязи f_{\max} называется *максимально применимой частотой* для радиотрассы определенной протяженности.

Отражение волн от слоисто-неоднородной среды должно происходить также, когда велик $\text{grad } n$. Однако коэффициент отражения не слишком мал лишь в том случае, когда переходная область от одного значения n к другому порядка $\lambda_0/2\pi$ и меньше. В пределе при стремлении толщины переходного слоя к нулю мы приходим к обычной задаче об отражении волн от границы раздела двух сред. При волноводном распространении имеются дополнительные ограничения применимости геометрической оптики, связанные с тем, что семейство лучей в волноводе имеет целый ряд каустик, которые сближаются по мере увеличения расстояния от источника вдоль оси волновода, поэтому, начиная с некоторого расстояния x , лучевая теория для определения поля при волноводном распространении в неоднородной среде неприменима.

В области, где условия применимости геометрической оптики нарушаются, для определения волнового поля в среде необходимо построить точное решение уравнения (3.8).

§ 4. Точное решение уравнений для комплексных амплитуд в плоскостойистой среде

Точное решение уравнения (3.8) возможно лишь для некоторых законов изменения $k^2(z)$, например для линейного, параболического, экспоненциального и т. д. Однако если свойства среды меняются достаточно плавно, то точное решение уравнения достаточно исследовать в области $k^2(z) \rightarrow 0$. В этой области $k^2(z)$ можно разложить в ряд по степеням z и ограничиться линейным членом в разложении, т. е. аппроксимировать закон изменения $k^2(z)$ — линейным. Если отражение происходит от области, где $k^2(z)$ имеет минимум, то разложение по z будет содержать квадратичный член. Ограничимся случаем линейного закона изменения $k^2(z)$ и рассмотрим в качестве примера отражение волны от неоднородной среды, диэлектрическая проницаемость которой

$$\varepsilon = 1 - z/z_1. \quad (4.1)$$

Уравнение (3.8) при этом имеет вид

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + k_0^2 \left(\cos^2 \theta_0 - \frac{z}{z_1} \right) f(z) = 0. \quad (4.2)$$

Для нахождения решения уравнения (4.2) заменой переменной

$$\xi = (k_0 z_1)^{2/3} \left(\cos^2 \theta_0 - z/z_1 \right) \quad (4.3)$$

приведем его к виду

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \xi f = 0. \quad (4.4)$$

Решение этого уравнения выражается через цилиндрические функции порядка $1/3$.

В качестве двух линейно независимых решений уравнения (4.4) при $\xi > 0$ могут быть взяты, например, функции $\xi^{1/2} H_{1/3}^{(1)}(2/3 \xi^{3/2})$ и $\xi^{1/2} H_{1/3}^{(2)}(2/3 \xi^{3/2})$, при $\xi < 0$ в качестве решения, удовлетворяющего условию конечности при $z \rightarrow +\infty$ ($\xi \rightarrow -\infty$), должна быть взята функция $H_{1/3}^{(2)}(-i^{2/3} |\xi|^{3/2})$.

При $\xi > 0$

$$f(\xi) = f_0 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \xi^{1/2} \left[H_{1/3}^{(1)}(2/3 \xi^{3/2}) e^{i \frac{2\pi}{3}} + H_{1/3}^{(2)}(2/3 \xi^{3/2}) e^{-i \frac{2\pi}{3}} \right]. \quad (4.5)$$

При $\xi < 0$

$$f(\xi) = f_0 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \xi^{1/2} e^{-i \frac{2\pi}{3}} H_{1/3}^{(2)}(-i^{2/3} |\xi|^{3/2}). \quad (4.6)$$

При таком выборе решений при $\xi = 0$ выполняются условия непрерывности функций $f(\xi)$ и $df/d\xi$. При $|\xi| \gg 1$ воспользуемся асимптотическими представлениями функций Ганкеля

$$H_{1/3}^{(1)}(2/3 \xi^{3/2}) = \sqrt{\frac{3}{\pi \xi^{3/2}}} \exp\{i(2/3 \xi^{3/2} - 5/12 \pi)\}, \quad (4.7)$$

$$H_{1/3}^{(2)}(2/3 \xi^{3/2}) = \sqrt{\frac{3}{\pi \xi^{3/2}}} \exp\{-i(2/3 \xi^{3/2} - 5/12 \pi)\}. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.7) и (4.8) в (4.5) и возвращаясь к переменной z , согласно (4.3) получим при $\cos^2 \theta_0 - z/z_1 > 0$

$$u(x, z) = \frac{(kz_1)^{-1/2} f_0 \exp(ik_0 x \sin \theta_0)}{(\cos^2 \theta_0 - z/z_1)^{1/4}} \left\{ \exp \left[ik_0 \int_0^{z_0} \sqrt{\cos^2 \theta_0 - \frac{z}{z_1}} dz - i \frac{\pi}{4} \right] + \exp \left[-ik_0 \int_0^{z_0} \sqrt{\cos^2 \theta_0 - \frac{z}{z_1}} dz + i \frac{\pi}{4} \right] \right\}. \quad (4.9)$$

При $\cos^2 \theta_0 - z/z_1 < 0$ из (4.8) и (4.6) получим

$$u(x, z) = \frac{(kz_1)^{-1/2} f_0 \exp(ik_0 x \sin \theta_0)}{|\cos^2 \theta_0 - z/z_1|^{1/4}} \exp \left\{ -k_0 \int_{z_0}^z \sqrt{\left| \cos^2 \theta_0 - \frac{z}{z_1} \right|} dz \right\}. \quad (4.10)$$

Выражение (4.9) совпадает с решением в приближении геометрической оптики (3.7) с точностью до постоянных добавок, входящих в фазу падающей и отраженной волн. Амплитуды падающей и отраженной волн равны, а разность фаз на выходе из не-

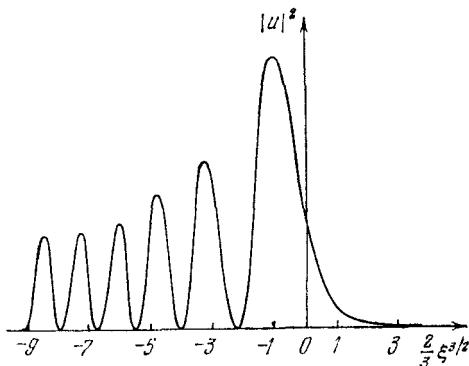
однородной среды при $z = 0$ равна

$$k_0 \Delta \Psi = k_0 (\Psi_{\text{стр}} - \Psi_{\text{пад}}) = k_0 \left[\Delta x \sin \theta_0 - \right. \\ \left. - 2 \int_{z_1 \cos \theta_0}^0 \sqrt{\cos^2 \theta_0 - \frac{z}{z_1}} dz \right] - \frac{\pi}{2} = k_0 [\Delta x \sin \theta_0 + \frac{4}{3} z_1 \cos^3 \theta_0] - \frac{\pi}{2}. \quad (4.11)$$

Сравнивая (4.11) с (3.4), мы видим, что $k_0 \Delta \Psi$ отличается от разности фаз, вычисленной в приближении геометрической оптики, на величину $-\pi/2$, которую можно трактовать как фазу коэффициента отражения. Если $\cos \theta_0$ не очень мал, то $\frac{4}{3} k_0 z \cos^3 \theta_0 \gg \frac{\pi}{2}$, поскольку z_1 — расстояние от начала неоднородного слоя до области отражения — много больше длины волны $k_0 z_1 \gg \gg 1$, и добавка в фазе, равная $\pi/2$, не играет существенной роли.

Поле $u(x, z)$ при $\varepsilon - \sin^2 \theta_0 > 0$ представляет собой стоячую волну, амплитуда которой увеличивается по мере приближения к области отражения, однако она везде имеет конечное значение. При $\varepsilon - \sin^2 \theta_0 < 0$ волнового процесса нет, имеется лишь убывающее по экспоненте поле (рис. 7.9). При $\varepsilon - \sin^2 \theta_0 = 0$ происходит полное отражение волны.

При отражении между падающей и отраженной волнами возникает сдвиг по фазе, равный $\pi/2$.



7.9. Изменение амплитуды поля вблизи области отражения волны в неоднородной среде.

§ 5. Уравнения для электромагнитных и звуковых волн в плоскостойких средах

В этом параграфе мы покажем, что уравнения, описывающие электромагнитное и звуковое поля в непрерывной плоскостойкой среде, могут быть приведены к скалярному уравнению Гельмгольца типа

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + K^2(z) f = 0, \quad (5.1)$$

и выясним связь коэффициента $K(z)$ с волновым числом в неоднородной среде $k(z) = k_0 n(z)$.

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд электромагнитного поля в плоскостной среде, в которой $\varepsilon = \varepsilon(z)$ и $\mu = \mu(z)$, имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -ik_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik_0 \mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = 0, \\ \operatorname{div} (\mu \mathbf{H}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Будем считать, что направление распространения волны (вектор \mathbf{k}_0) лежит в плоскости xz . При этом отдельно рассмотрим два случая поляризации: 1) вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости xz , т. е. $\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 |E|$; 2) вектор \mathbf{H} перпендикулярен плоскости xz , т. е. $\mathbf{H} = \mathbf{y}_0 |H|$. В первом случае уравнения Максвелла для компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} запишутся в виде

$$\begin{aligned} -ik_0 \varepsilon E_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, & ik_0 \mu H_x &= \frac{\partial E_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0, & ik_0 \mu H_z &= -\frac{\partial E_y}{\partial x}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} &= 0, & H_y &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из уравнений (5.3) следует, что E_y , H_x и H_z зависят только от координат x и z . Исключая из (5.3) H_x и H_z , получим уравнение для E_y :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon \mu E_y - \frac{d(\ln \mu)}{dz} \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0. \quad (5.4)$$

Построим решение уравнения (5.4) методом разделения переменных

$$E_y(x, z) = X(x) f(z). \quad (5.5)$$

Подставляя (5.5) в (5.4), получим

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dz^2} - k_0^2 \varepsilon \mu + \frac{d(\ln \mu)}{dz} \frac{1}{f} \frac{df}{dz} = k_0^2 \alpha^2,$$

α — константа, определяемая из граничных условий. Таким образом, зависимость E_y от координат имеет вид

$$E_y = f(z) \exp(ik_0 \alpha x). \quad (5.6)$$

Из уравнений (5.3) следует, что зависимость H_x и H_z от координат имеет такой же характер. Поэтому можно записать

$$\begin{aligned} H_x &= v(z) \exp(ik_0 \alpha x), \\ H_z &= w(z) \exp(ik_0 \alpha x). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Функции $f(z)$, $v(z)$, $w(z)$ в общем случае комплексные и связаны между собой соотношениями, являющимися следствием урав-

нений (5.3):

$$\begin{aligned} f' &= ik_0 \mu v, \\ v' &= ik_0 (\alpha w + \varepsilon f), \\ \alpha f + \mu w &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

(Здесь и далее в этом параграфе штрих означает дифференцирование по z .) Исключая из (5.8) w , получим систему уравнений для f и v :

$$\begin{aligned} f' &= ik_0 \mu v, \\ v' &= ik_0 \left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu} \right) f. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из системы уравнений (5.9) получаем два уравнения второго порядка для f и v :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{d(\ln \mu)}{dz} \frac{df}{dz} + k_0^2 (\varepsilon \mu - \alpha^2) f = 0, \quad (5.10)$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{d[\ln(\varepsilon - \alpha^2/\mu^2)]}{dz} \frac{dv}{dz} + k_0^2 (\varepsilon \mu - \alpha^2) v = 0. \quad (5.11)$$

Поскольку уравнения Максвелла симметричны (с точностью до знака) относительно векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , то для волны с вектором \mathbf{H} , перпендикулярным плоскости xz , компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} имеют аналогичный вид

$$\begin{aligned} H_y &= F(z) \exp(ik_0 \alpha x), \\ E_x &= -V(z) \exp(ik_0 \alpha x), \\ E_z &= -W(z) \exp(ik_0 \alpha x), \end{aligned} \quad (5.12)$$

где $F(z)$, $V(z)$, $W(z)$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} F' &= ik_0 \varepsilon V, \\ V' &= ik_0 (\mu - \alpha^2/\varepsilon) F, \\ \alpha F + \varepsilon W &= 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Функции F и V удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - \frac{d}{dz} (\ln \varepsilon) \frac{dF}{dz} + k_0^2 (\varepsilon \mu - \alpha^2) F = 0, \quad (5.14)$$

$$\frac{d^2 V}{dz^2} - \frac{d(\ln \mu - \alpha^2/\varepsilon)}{dz} \frac{dV}{dz} + k_0^2 (\varepsilon \mu - \alpha^2) V = 0. \quad (5.15)$$

При этом для волны с вектором \mathbf{E} , перпендикулярным плоскости падения, достаточно решить уравнение (5.10). Функции $v(z)$ и $w(z)$, которые определяют компоненты H_x и H_z (5.7), можно найти из уравнений (5.8).

Точно так же, если вектор \mathbf{H} перпендикулярен плоскости падения, то достаточно найти решение уравнения (5.14), а компоненты E_x и E_y можно определить из уравнения (5.15).

Во многих случаях полагается, что магнитная проницаемость является константой $\mu = 1$.

Если неоднородная среда $\varepsilon = \varepsilon(z)$ занимает полупространство $z > 0$, а при $z < 0$ среда однородна и поле волны при $z < 0$ имеет вид

$$E_y = E_0 \exp \{i [k_0 x \sin \theta_0 + k_0 z \cos \theta_0]\},$$

то из граничных условий непрерывности тангенциальных компонент поля \mathbf{E} при $z = 0$ найдем, что $\alpha = \sin \theta_0$. Тогда уравнения для f и F можно записать в виде

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + k_0^2 (\varepsilon - \sin^2 \theta_0) f = 0, \quad (5.16)$$

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + k_0^2 (\varepsilon - \sin^2 \theta_0) F - \frac{d \ln \varepsilon}{dz} \frac{dF}{dz} = 0. \quad (5.17)$$

В общем случае f и F являются комплексными функциями z . Модули функций f и F определяют амплитуды \mathbf{E} и \mathbf{H} , а фазы — зависимость фаз векторов от z . Например, поверхность равных амплитуд вектора \mathbf{E} определяется из условия

$$|f(z)| = A(z) = \text{const},$$

а поверхность равных фаз из условия

$$\varphi'(z) + k_0 x \sin \theta_0 = \text{const},$$

где $\varphi(z)$ — фаза $f(z)$. Поверхности равных фаз и равных амплитуд не совпадают, т. е. волна неоднородная.

Для небольшого смещения вдоль поверхности постоянной фазы можно записать

$$\varphi'(z) dz + k_0 \sin \theta_0 dx = 0.$$

Если через θ обозначить угол между нормалью к поверхности постоянной фазы и осью z , то

$$\text{tg } \theta = - \frac{dx}{dz} = \frac{k_0 \sin \theta_0}{\varphi'(z)}.$$

Если в уравнении (5.17) сделать замену переменных, положив $F = f_1 \sqrt{\varepsilon}$, то уравнения (5.16) и (5.17) запишутся одинаково

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + K^2(z) f = 0. \quad (5.18)$$

В уравнении для f

$$K^2(z) = k_0^2 (\varepsilon - \sin^2 \theta_0) = k_0^2 (n^2 - \sin^2 \theta_0).$$

В уравнении для f_1

$$K_1^2(z) = k_0^2 \left[\varepsilon - \sin^2 \theta_0 - \frac{3}{4} \frac{(\varepsilon')^2}{k_0^2 \varepsilon^2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon''}{k_0^2 \varepsilon} \right].$$

Таким образом, мы показали, что задача об исследовании распространения электромагнитных волн в слоисто-неоднородной среде сводится к нахождению решения уравнения (5.18). При этом для волны с вектором \mathbf{E} , направленным по оси y , коэффициент $K(z) = k_0 n(z) \cos \theta(z)$ и совпадает с коэффициентом в уравнении (3.8). В уравнении для $\mathbf{H} = \mathbf{y}_0 H$ $K_1(z)$ зависит как от $n \cos \theta$, так и от производных n по z :

$$K_1^2(z) = k_0^2 \left[n^2(z) - \sin^2 \theta_0 - \frac{n'^2}{k_0^2 n^2} + \frac{n''}{k_0^2 n} \right]. \quad (5.19)$$

Однако в той области, где применимо приближение геометрической оптики, членами $\frac{n''}{k_0^2 n}$ и $\frac{n'^2}{k_0^2 n^2}$ в (5.19) согласно (3.11) и (3.12)

можно пренебречь. Отличие $K_1(z)$ от $K(z)$ становится существенным лишь в области $n^2(z) - \sin^2 \theta_0 \rightarrow 0$, т. е. в области отражения волны. В этой области может наблюдаться отличие в распространении вертикально и горизонтально поляризованных волн.

Покажем теперь, что уравнение, описывающее распространение звука в слоисто-неоднородной среде, также имеет вид (5.18). Будем считать, что равновесная плотность среды ρ_0 и скорость звука в ней c_0 зависят от координаты z . Уравнения гидродинамики ((2.1) и (2.2) гл. I) в этом случае имеют вид (потери в среде пренебрегаем)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p, \\ p &= p(\rho). \end{aligned}$$

Волновое решение в плоскостлой среде ищем в виде

$$\rho = \rho_0(z) + \rho'(x, z, t), \quad p = p_0(z) + p'(x, z, t), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, z, t).$$

Подставляя эти выражения в уравнения Эйлера и линеаризуя их, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \rho_0 &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla p_0 - \nabla p', \\ p &= p_0 + c^2(z) \rho', \end{aligned} \quad (5.20)$$

здесь $c_0^2(z) = dp_0/d\rho_0$. Перепишем систему уравнений (5.20) в виде

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{u}) = 0, \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \mathbf{u}) = -\nabla p_0 - \nabla(c_0^2 \rho'). \quad (5.22)$$

Взяв производную $\partial/\partial t$ от уравнения (5.21) и $-\operatorname{div}$ от (5.22), сложим их и получим

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{d^2 p_0}{dz^2} + \Delta(c^2 \rho').$$

Если внешнее поле можно считать постоянным (например, поле сил тяжести), то $d^2 p_0/dz^2 = 0$. Положив $\rho'(x, z, t) = \frac{1}{c^2(z)} f(z) \exp(i\alpha x - i\omega t)$, получим уравнение

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2(z)} - \alpha^2 \right) f = 0,$$

которое аналогично (5.18) с $K^2(z) = \frac{\omega^2}{c_0^2(z)} - \alpha^2$.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ. ДИФРАКЦИЯ

Плоская волна — это волна с неограниченным в пространстве плоским волновым фронтом. Если создать волновой процесс, ограниченный в пространстве, например, пропустив плоскую волну через отверстие в непрозрачном экране, то за экраном мы получим ограниченный волновой пучок. Иногда такой пучок можно приближенно рассматривать как луч, поведение которого описывается законами геометрической оптики. Однако часто распространение реальных волновых пучков отличается от поведения лучей. Причина этого отличия заключена в явлении дифракции, которое Зоммерфельд определил как «любое отклонение световых лучей от прямой линии, которое нельзя объяснить отражением или преломлением».

Теория дифракции рассматривает волновые процессы в тех случаях, когда на пути распространения волны имеются какие-либо препятствия. Такими препятствиями могут быть экраны или отверстия в непрозрачных или полупрозрачных экранах, неоднородности среды и т. д. Задачей теории дифракции является определение волнового возмущения, распространяющегося от препятствия (экрана), т. е. определение амплитуды и фазы, а в случае векторных (например, электромагнитных) волн — и поляризации, всюду в области, лежащей за экраном.

Точное и математически строгое решение различных задач дифракции волн удается получить далеко не всегда, так как это связано с большими трудностями. Поэтому очень важное значение здесь имеют различные приближенные методы.

§ 1. Метод Кирхгофа

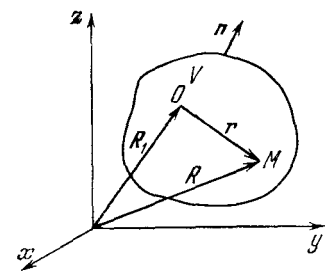
Метод Кирхгофа решения дифракционных задач состоит в использовании интегральной теоремы, согласно которой значение функции u , являющейся решением скалярного уравнения Гельмгольца, в произвольной точке $M(x, y, z)$, находящейся внутри замкнутого объема, выражается через значение функции u и ее первой производной на поверхности, ограничивающей данный объем.

Метод Кирхгофа является математическим обобщением принципа Гюйгенса — Френеля, основная идея которого состоит в

том, что волновое возмущение в некоторой точке пространства M есть результат интерференции волн, испускаемых вторичными источниками. Эти источники расположены на поверхности, проходящей между точкой M и реальным источником волн.

Пусть $u(M)$ и $G(M)$ — комплексные функции координат точки M , имеющие непрерывные первые и вторые частные производные как внутри объема V , так и на поверхности S , ограничивающей объем V . Тогда согласно теореме Грина

$$\int_V (G\Delta u - u\Delta G) dV = \int_S \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (1.1)$$



где $\partial/\partial n$ означает производную по направлению внешней нормали к объему V (рис. 8.1).

8.1. К выводу интегральной теоремы Кирхгофа — Гельмгольца.

Пусть функция u является комплексной амплитудой волнового поля и удовлетворяет внутри объема V однородному уравнению Гельмгольца (считаем, что зависимость от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$):

$$\Delta u + k^2 u = 0. \quad (1.2)$$

В качестве функции G выберем функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta G + k^2 G = -4\pi\delta(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|), \quad (1.3)$$

\mathbf{R} — радиус-вектор точки M , \mathbf{R}_1 — радиус-вектор текущей точки O объема V (рис. 8.1). Важным решением уравнения (1.3) является функция

$$G = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \text{где } r = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|,$$

которая описывает сферическую волну единичной амплитуды; она называется *функцией точечного источника* или *функцией Грина для свободного пространства*.

Определяя Δu и ΔG из (1.2) и (1.3) и подставляя в (1.1), получим

$$4\pi \int_V u(\mathbf{R}) \delta(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|) dV_1 = \int_S \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS$$

ИЛИ

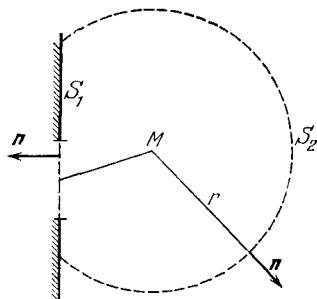
$$u(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) называется *интегральной теоремой Кирхгофа — Гельмгольца*.

Используем формулу (1.4) для определения поля волны, прошедшей через экран с отверстием. Волна падает слева на экран; необходимо определить поле в произвольной точке M , расположенной справа от экрана (рис. 8.2).

Чтобы применить к этой задаче формулу (1.4), необходимо выбрать поверхность интегрирования. Будем считать, что поверхность S состоит из плоской поверхности S_1 экрана с отверстием и сферической поверхности S_2 с центром в точке M , опирающейся на плоскость S_1 .

Рассмотрим интеграл по сферической поверхности S_2 . В этом случае направление внешней нормали совпадает с направлением радиуса



8.2. К выводу условия излучения.

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \approx ik \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Если радиус сферической поверхности взять очень большим (в пределе можно считать $r \rightarrow \infty$), то из физических соображений ясно, что интеграл по поверхности S_2 должен давать малый вклад в поле в точке M . Однако для гармонических полей ($\sim \exp(-i\omega t)$) обращение интеграла по S_2 в нуль происходит только в том случае, если на функцию u наложить условия, определяющие ее поведение при $r \rightarrow \infty$. Потребуем, чтобы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{4\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \frac{e^{ikr}}{r} r^2 d\Omega = 0 \quad (1.5)$$

(Ω — телесный угол с вершиной в точке M). Интеграл (1.5) будет стремиться к нулю при $r \rightarrow \infty$, если функция u будет удовлетворять условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0. \quad (1.6)$$

Условие (1.6) называется *условием излучения Зоммерфельда*. Ему удовлетворяет функция $u = e^{ikr}/r$, которая при зависимости от времени в виде $e^{-i\omega t}$ определяет расходящуюся сферическую волну. Так как возмущение, идущее от отверстия в экране, всегда представляет собой комбинацию сферических волн, то условие (1.6) оказывается выполненным. Интеграл по S_2 обращается в нуль, и поле в точке M определяется только значением поля и его производной в отверстии и на теневой стороне экрана.

Однако пока не решена точно соответствующая граничная задача, значения u и du/dn на S не известны. Поэтому без дополнительных исследований задача может быть решена лишь приближенно при определенных предположениях о значениях u и du/dn на теневой стороне экрана. Приближенные граничные условия Кирхгофа соответствуют следующим предположениям:

1. Значения u и du/dn равны нулю всюду, за исключением отверстий.

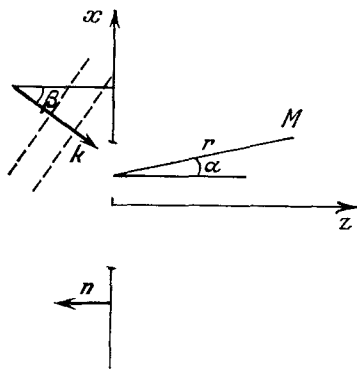
2. Значения u и du/dn внутри отверстия такие же, какими бы они были, если бы экран отсутствовал.

Несмотря на математическую нестрогость указанных допущений, расчет интенсивности и фазы дифрагированной волны в том случае, когда размеры отверстия велики по сравнению с длиной волны, дает результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом. Математическая нестрогость приближенных граничных условий Кирхгофа связана с требованием одновременного обращения в нуль как самой функции u , так и ее производной по нормали к поверхности на теневой стороне экрана. При таких граничных условиях функция u , удовлетворяющая уравнению Гельмгольца, должна обращаться в нуль всюду за экраном.

Поэтому функция u , вычисленная по формуле (1.4) с граничными условиями 1 и 2, строго говоря, не описывает поля вблизи экрана и в плоскости отверстия. Однако поскольку значения функции u и ее производной du/dn на теневой стороне экрана очень малы и могут быть измерены только в непосредственной близости от отверстия (это соображение тем точнее, чем больше отверстие и меньше длина волны) и отличие u и du/dn внутри отверстия от поля падающей волны в отсутствие экрана также очень мало, то расчеты по формуле (1.4) с граничными условиями 1 и 2 часто дают хорошую точность.

Если на плоский экран с отверстием Σ падает квазиплоская волна $u(x, y, z) = u_0(x, y, z) \times \exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z)\}$, то, учитывая геометрию дифракционной задачи, изображенную на рис. 8.3, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= -\frac{\partial}{\partial z}, & \frac{\partial r}{\partial n} &= -\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{z}{r} = -\cos \alpha, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= -\frac{\partial u}{\partial z} \approx -ik_z u = -iku \cos \beta, \end{aligned} \quad (1.7)$$



8.3. Дифракция плоской волны на плоском непрозрачном экране.

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} = - \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \cos \alpha. \quad (1.8)$$

Здесь $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$, где ξ, η — текущие координаты в плоскости отверстия. Подставляя (1.7) и (1.8) в (1.4) и считая, что $kr \gg 1$, получим

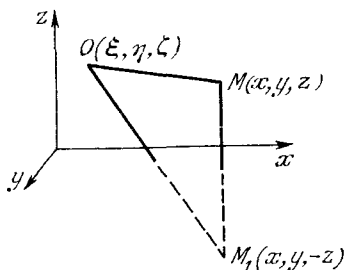
$$u(x, y, z) = \frac{k}{4\pi i} \int_{\Sigma} (\cos \beta - \cos \alpha) u(\xi, \eta) \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta. \quad (1.9)$$

Математическую нестрогость метода Кирхгофа можно устранить, определив иначе вспомогательную функцию G . Метод выбора функции Грина, предложенный Зоммерфельдом, исключает необходимость одновременного задания граничных условий для поля и его производной по нормали. Функция Грина для уравнения Гельмгольца должна быть решением уравнения (1.3), удовлетворяя условию излучения и, кроме того, удовлетворять одному из граничных условий

$$1) G_1|_S = 0, \quad 2) \left. \frac{\partial G_2}{\partial n} \right|_S = 0,$$

т. е. или сама функция должна обращаться в нуль на поверхности S , или должна обращаться в нуль ее производная по нормали. В первом случае функция G_1 называется *функцией Грина*, во втором — *второй функцией Грина* или *характеристической функцией Неймана* (G_2). Выбор функции Грина G_1 обращает в (1.4) в нуль член, содержащий $du/\partial n$.

При этом на поверхности S достаточно знать лишь саму функцию u . Если выбрать вторую функцию Грина, то в нуль обращается член, содержащий u , и достаточно на S знать $du/\partial n$. Однако построение функций Грина, удовлетворяющих граничным условиям 1 или 2, известно лишь для задач с достаточно простой геометрией. Вид функций Грина определяется видом поверхности S и свойствами среды и не зависит от положения источника излучения и от поля, создаваемого им на экране. Поэтому можно говорить о функции Грина для полупространства, сферы и т. д. Для плоского экрана в качестве функции Грина можно взять разность полей двух точечных источников: источника, расположенного в точке $M(x, y, z)$ и в точке $M_1(x, y, -z)$, являющейся зеркальным изображением точки M в плоскости экрана (рис. 8.4):



8.4. К определению функции Грина для полупространства $z > 0$.

$$G_1 = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr_1}}{r_1},$$

где

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}.$$

В плоскости экрана при $\zeta = 0$

$$G_1 = 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial n} = 2 \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} = -2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Если в качестве функции Грина выбрать

$$G_2 = \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr_1}}{r_1},$$

то при $\zeta = 0$ $\frac{\partial G_2}{\partial n} = 0$, $G_2 = 2 \frac{e^{ikr}}{r}$. Подставляя функцию G_1 в интеграл (1.4), получим ($kr \gg 1$)

$$u(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \iint_{\Sigma} u(\xi, \eta) \frac{z}{r} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta. \quad (1.10)$$

Если в (1.4) подставить функцию G_2 , то

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, \eta, \zeta) \Big|_{\zeta=0} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta. \quad (1.11)$$

§ 2. Угловой спектр плоских волн

Вместо того чтобы искать решение дифракционной задачи в форме (1.4), выбрав соответствующим образом функцию Грина, можно использовать метод разложения поля в плоскости экрана по плоским волнам.

Рассмотрим монохроматическую волну, распространяющуюся в направлении оси z и проходящую через отверстие в непрозрачном экране, расположенном в плоскости $z = 0$. Комплексная амплитуда волны в плоскости $z = 0$ описывается функцией $u_0(x, y, 0)$. Необходимо определить поле в произвольной точке $M(x, y, z)$ за экраном.

Произведем двумерное фурье-преобразование функции $u_0(x, y, 0)$:

$$u_0(x, y, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_0(k_x, k_y) \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y, \quad (2.1)$$

где

$$F_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x, y, 0) \exp\{-i(k_x x + k_y y)\} dx dy. \quad (2.2)$$

Функция $F_0(k_x, k_y)$ называется угловым (пространственным) спектром функции $u_0(x, y, 0)$. Действительно, подынтегральное выражение в (2.1) представляет собой комплексную амплитуду плоской гармонической волны в плоскости $z = 0$ с компонентами волнового вектора k_x , k_y и $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ и амплитудой $F_0(k_x, k_y)$, зависящей от направления распространения (временной множитель $e^{-i\omega t}$ мы всюду опускаем). Вместо переменных $k_x = k \cos \alpha$, $k_y = k \cos \beta$, $k_z = k \cos \gamma$, где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы нормали к фронту плоской волны, можно ввести новые переменные $f_x = \frac{k_x}{2\pi} = \lambda^{-1} \cos \alpha$, $f_y = \frac{k_y}{2\pi} = \lambda^{-1} \cos \beta$, называемые *пространственными частотами*. В этих обозначениях

$$u_0(x, y, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_0(f_x, f_y) \exp\{i2\pi(f_x x + f_y y)\} df_x df_y, \quad (2.1')$$

$$F_0(f_x, f_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x, y) \exp\{-i2\pi(f_x x + f_y y)\} dx dy. \quad (2.2')$$

Следовательно, выражение (2.1) представляет разложение комплексной амплитуды волнового поля в плоскости $z = 0$ в угловой спектр плоских волн.

Если бы угловой спектр был известен в любой плоскости, параллельной экрану, т. е. при любом z , то функция $u(x, y, z)$ определилась бы выражением

$$u(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y, z) \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y. \quad (2.3)$$

Поскольку функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (среду считаем однородной)

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (2.4)$$

то, подставляя (2.3) в уравнение (2.4), получим дифференциальное уравнение для функции $F(k_x, k_y, z)$:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) F = 0. \quad (2.5)$$

Решая это уравнение при условии $F(k_x, k_y, 0) = F_0(k_x, k_y)$, найдем частное решение, соответствующее волне, распространяющейся в положительном направлении оси z ,

$$F(k_x, k_y, z) = F_0(k_x, k_y) \exp\{iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\}. \quad (2.6)$$

Угловой спектр, по мере удаления точки наблюдения от плоскости экрана, изменяется. При $k_x^2 + k_y^2 < k^2$ это изменение

связано со сдвигом фаз между различными спектральными компонентами (плоскими волнами, распространяющимися под разными углами к оси z). При $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ выражение (2.6) описывает плоские неоднородные волны, амплитуды которых экспоненциально убывают по мере удаления от плоскости $z = 0$.

В предельном случае, когда $k_x^2 + k_y^2 = k^2$, плоские волны распространяются в направлениях, перпендикулярных оси z и не переносят энергию вдоль оси z .

Искажение начального углового спектра зависит от области значений k_x и k_y , играющей существенную роль в угловом спектре, т. е. от ширины углового спектра $F_0(k_x, k_y)$ в плоскости $z = 0$. Найдем, как связан угловой спектр $F_0(k_x, k_y)$ со спектром падающей на экран волны и с размерами и формой отверстия. Будем характеризовать экран функцией пропускания $g(x, y)$. Например, функция пропускания для непрозрачного экрана с отверстием имеет вид

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{— в пределах отверстия,} \\ 0 & \text{— вне отверстия.} \end{cases}$$

Если обозначить поле падающей волны в плоскости $z = 0$ $u_n(x, y)$, то поле за экраном определится по формуле

$$u_0(x, y, 0) = u_n(x, y)g(x, y), \quad (2.7)$$

а угловой спектр поля за экраном будет равен свертке углового спектра падающего излучения и спектра коэффициента пропускания экрана

$$\begin{aligned} F_0(k_x, k_y) &= F_n(k_x, k_y) * \Phi(k_x, k_y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \Phi(k_x - \xi, k_y - \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Например, если на экран, нормально к нему, падает плоская волна единичной амплитуды, угловой спектр которой $F_n(k_x, k_y) = \delta(k_x)\delta(k_y)$ (где $\delta(k_x)$ — дельта-функция), то

$$F_0(k_x, k_y) = \delta(k_x)\delta(k_y) * \Phi(k_x, k_y) = \Phi(k_x, k_y).$$

Таким образом, при прохождении плоской волны через экран с отверстием ее спектр уширяется.

Пусть плоская волна падает нормально на экран со щелью, ширина которой равна a , края щели параллельны оси y . Фурье-образ функции пропускания экрана есть

$$\Phi(k_x) = F_0(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik_x x} dx = \frac{\sin(k_x a/2)}{\pi k_x}. \quad (2.9)$$

Ширина щели a должна быть больше длины волны падающего излучения, иначе понятие пучка теряет смысл. Ширину углового спектра можно оценить по величине k_x , при которой функция $\Phi(k_x)$ обращается в нуль. Из условия

$$\sin(k_x a/2) = 0$$

находим

$$k_x = 2\pi/a \text{ или } \sin \theta = \lambda/a, \quad (2.10)$$

где θ — угол наклона вектора k к оси z . Существенное значение в спектре прошедшего излучения имеют спектральные компоненты, амплитуда которых $F_0(k_x)$ не слишком мала, т. е. $k_x/k = \sin \theta \leq \lambda/a$. Таким образом, ширина углового спектра определяется отношением длины падающей волны к размерам отверстия; чем меньше отношение λ/a , тем уже угловой спектр.

Если плоская волна падает на экран со щелью под углом θ_0 к оси z (плоскость падения совпадает с плоскостью xz), то

$$F_0(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\{-i(k_x - k_{x0})x\} dx = \frac{\sin[a(k_x - k_{x0})/2]}{\pi(k_x - k_{x0})}, \quad (2.11)$$

где $k_{x0} = k \sin \theta_0$. Ширина углового спектра пучка при $z = 0$ (в плоскости экрана) в этом случае может быть определена из условия

$$\frac{a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) = 1.$$

Если щель достаточно широкая, т. е. $\lambda/a \ll 1$, то, используя формулу для разности синусов двух углов и учитывая, что $\theta - \theta_0$ — малая величина, получим

$$\theta - \theta_0 = \frac{\lambda}{a \cos \theta_0}. \quad (2.12)$$

Ширина углового спектра излучения из отверстия в экране зависит не только от отношения λ/a , но и от направления распространения волны, падающей на экран. В точной теории дифракции на щели вводится ограничение на угол падения волны на щель θ_0 . Только для не слишком больших углов падения допустимо пользоваться приближенными граничными условиями Кирхгофа.

Можно провести аналогию между угловым спектром пространственно-ограниченного волнового возмущения и частотным спектром временного импульса конечной длительности T (§ 8 гл. II). Если временной импульс при $z = 0$ описывается функцией $u(0, t) = A(0, t)e^{-i\omega t}$, где

$$A(0, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| < T/2, \\ 0 & \text{при } |t| > T/2, \end{cases}$$

то его частотный спектр равен

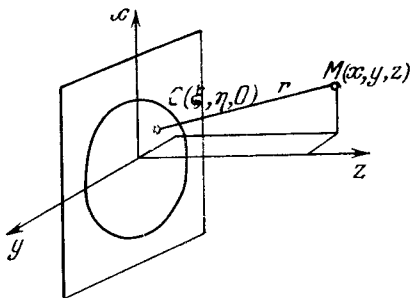
$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(0, t) \exp[i(\omega - \omega_0)t] dt = \frac{\sin[(\omega - \omega_0)T/2]}{\pi(\omega - \omega_0)}.$$

Ширина частотного спектра $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\tau}{T}$, где $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Таким образом, волну, прошедшую через отверстие в непрозрачном экране, можно представить в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся под разными углами к направлению распространения волны, падающей на экран. Ширина пучка, представляющего поле за экраном, по мере распространения увеличивается, поскольку направления распространения плоских волн, образующих пучок, составляют некоторый угол с осью пучка; пучок расплывается. При этом распределение амплитуды в поперечном сечении пучка изменяется. Если пренебречь дифракционным расплыванием пучка (т. е. изменением его углового спектра), то траекторию пучка лучей и изменение амплитуды вдоль траектории можно определить методами геометрической оптики (см. § 2 гл. VII).

§ 3. Приближенные методы расчета дифрагированного поля с помощью интеграла Кирхгофа

Метод стационарной фазы. Воспользуемся интегралом Кирхгофа в виде (1.10) для определения поля волны, прошедшей через плоский непрозрачный экран с отверстием произвольной формы. Примем, что плоскость экрана совпадает с плоскостью $z = 0$ (рис. 8.5). Интеграл (1.10) описывает поле волны, когда точка $M(x, y, z)$ удалена от экрана на расстояние, значительно превышающее длину волны, т. е. выполняется условие $kr \gg 1$, где $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$. Примем, что функция $u(\xi, \eta)$, описывающая поле падающей на экран волны, меняется достаточно медленно в пределах отверстия. Тогда подынтегральное выражение в интеграле (1.10) представляет собой произведение двух функций: функции $zu(\xi, \eta)/r^2$, которая при небольшом перемещении точки $O(\xi, \eta, 0)$ в плоскости отверстия изменяется медленно, и функции $\exp(ikr)$, испытывающей быстрые осцилляции при смещении этой точки.



8.5. К расчету дифрагированного поля с помощью интеграла Кирхгофа.

достаточно медленно в пределах отверстия. Тогда подынтегральное выражение в интеграле (1.10) представляет собой произведение двух функций: функции $zu(\xi, \eta)/r^2$, которая при небольшом перемещении точки $O(\xi, \eta, 0)$ в плоскости отверстия изменяется медленно, и функции $\exp(ikr)$, испытывающей быстрые осцилляции при смещении этой точки.

Для вычисления интегралов такого типа используется приближенный метод, называемый *методом стационарной фазы*. Смысл его состоит в следующем. Быстрые осцилляции экспоненциальной функции приводят к тому, что интеграл есть всюду малая величина, кроме той области, в которой показатель экспоненты имеет стационарное значение, т. е. не изменяется в первом порядке изменения kr . Если имеется такая точка стационарности, в которой фаза $\varphi(\xi, \eta)$ осциллирующей функции имеет максимум или минимум, то область в окрестности этой точки дает наибольший вклад в интеграл. Поэтому находится точка или точки стационарности фазы осциллирующей функции и $\varphi(\xi, \eta)$ разлагается в ряд в окрестности этой точки до членов второго или третьего порядка малости (если член второго порядка малости обращается в нуль). Медленно изменяющиеся функции определяются в точке стационарности и выносятся из-под знака интеграла. Остающиеся

интегралы сводятся к интегралам Френеля вида $\int_0^t \exp\left(-i\frac{\pi}{2}k^2\right) dk$.

Интегралы Френеля уже при значениях $t \sim 10$ отличаются от значений интеграла при $t \rightarrow \infty$ менее чем на 10%. Применим этот метод к интегралу (1.10):

$$\varphi(\xi, \eta) = ik \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

Найдем точку стационарности, приравняв нулю частные производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -ik \frac{x - \xi}{r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -ik \frac{y - \eta}{r} = 0.$$

Разложение фазы φ в ряд в окрестности точки стационарности $\xi = x$, $\eta = y$ имеет вид

$$\varphi(\xi, \eta) \approx ik \left(z + \frac{1}{2} \frac{(x - \xi)^2}{z} + \frac{1}{2} \frac{(y - \eta)^2}{z} + \dots \right). \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (1.10) и вынося из-под интеграла медленно изменяющиеся функции, определенные в точке стационарности, получим

$$u(x, y, z) = \frac{u_0(x, y)}{i\lambda z} e^{ikz} \iint_{\Sigma} \exp \left\{ ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} \right\} d\xi d\eta. \quad (3.2)$$

Найдем на плоскости $z = 0$ границы областей, окружающих точку стационарности $\xi = x$, $y = \eta$, в которых фаза подынтегральной функции изменяется в пределах $\pi/2$:

$$\pi \frac{(x - \xi)^2}{\lambda z} + \pi \frac{(y - \eta)^2}{\lambda z} = m \frac{\pi}{2},$$

или

$$\frac{1}{R_m^2} (x - \xi)^2 + \frac{1}{R_m^2} (y - \eta)^2 = 1, \quad (3.3)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$. Мы получили семейство окружностей с центрами в точке $\xi = x, \eta = y$ и радиусами $R_m = \sqrt{\frac{1}{2} m \lambda z}$. Плоскость $z = 0$ разбивается окружностями на концентрические кольца, называемые *зонами Френеля*. При переходе от одной зоны к другой действительная или мнимая часть подынтегрального выражения в (3.2) меняет знак. Интеграл, взятый по конечному числу зон Френеля, можно представить в виде знакопеременного ряда, m -й член которого определяет вклад m -й зоны Френеля. Ряд быстро сходится. Физически это значит, что можно выделить область поверхности экрана, которая играет наиболее существенную роль в процессе формирования дифрагированного поля. Эта область примерно совпадает с размером первой зоны Френеля. Если точка стационарности лежит в области отверстия (точка наблюдения M расположена вблизи оси z) и несколько первых зон Френеля также лежат в плоскости отверстия, то максимальные значения переменных интегрирования ξ_{\max} и η_{\max} , которые определяются размерами отверстия в экране, есть величины порядка a , т. е.

$$\xi_{\max}^2 \sim a^2 \gg \lambda z, \quad \eta_{\max}^2 \sim a^2 \gg \lambda z.$$

При этом интеграл (3.2) по площади отверстия можно заменить интегралом в бесконечных пределах

$$u(x, y, z) = \frac{u_0(x, y)}{i\lambda z} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} \right\} d\xi d\eta. \quad (3.4)$$

Сделав замену переменных:

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{2z} (x - \xi)^2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{k}{2z} (y - \eta)^2},$$

получим

$$u(x, y, z) = \frac{u_0(x, y)}{i\pi} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \{ i(\alpha^2 + \beta^2) \} d\alpha d\beta = u_0(x, y) e^{ikz}. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) определяет невозмущенное поле в точке $M(x, y)$. Таким образом, если проекция точки наблюдения M на плоскость экрана лежит внутри отверстия и существенная область формирования дифракционного поля, совпадающая с первой зоной Френеля, не пересекает края отверстия, то поле в точке M оказывается невозмущенным. Действие экрана можно характеризовать от-

ношением площади первой зоны Френеля к величине апертуры

$$D = \lambda z / \pi a^2. \quad (3.6)$$

Величина D , называемая *волновым параметром*, играет большую роль в задачах дифракции.

Если $D \ll 1$, то экран не влияет на величину поля. Конечно, это утверждение справедливо в том случае, если точка стационарности лежит внутри отверстия, т. е. точки наблюдения расположены вблизи оси z . При увеличении x или y точка стационарности перемещается к краю отверстия и существенная область начинает пересекать его край. Поле в точке M становится возмущенным. В этом случае замена конечных пределов интегрирования в (3.2) бесконечными не возможна; интегралы в (3.2) сводятся к известным интегралам Френеля, с помощью которых вычисляются распределения интенсивности у края отверстия соответствующей формы (дифракция на щели, на отверстии прямоугольной формы и т. д.).

Вывод (3.5) о том, что при $D \ll 1$ экран не оказывает влияния на дифрагированную волну, справедлив лишь для достаточно плавных распределений поля $u(\xi, \eta)$ на отверстии. В противном случае функцию u нельзя выносить из-под интеграла (3.4) в точке стационарности, и метод не дает правильных результатов. Так, например, когда $u(\xi, \eta)$ постоянна на отверстии и равна нулю вне его, начинают сильно сказываться краевые эффекты. Поле дифрагированной волны, даже на оси ($x = y = 0$), приобретает сложную осциллирующую структуру.

Понятие области, играющей существенную роль в формировании волнового процесса, имеет большое значение не только в задачах дифракции, но и в вопросах распространения волн, излучаемых источниками конечных размеров. Пусть, например, источником электромагнитных волн является элементарный диполь, создающий сферическую гармоническую волну e^{ikr}/r ; d — кратчайшее расстояние между точками передачи и приема. Радиусы зон Френеля будут в этом случае определяться выражением

$$R_m^2 = \frac{m\lambda}{2} \frac{l_1(d - l_1)}{d},$$

где l_1 — расстояние от точки приема до текущей точки. Если вдоль отрезка d отложить размеры зон Френеля и провести огибающую, то огибающая будет иметь вид эллипса. В пространстве мы получим эллипсоид вращения, осью вращения которого является этот отрезок, а фокусы расположены в точках приема и передачи. Эллипсоиды, соответствующие наименьшим номерам зон Френеля, определяют область пространства, играющую наиболее существенную роль в процессе распространения волн. На-

пример, если точки передачи и приема расположены над границей раздела двух сред, различных по своим физическим свойствам, то влияние границы раздела будет существенно лишь тогда, когда область, ограниченная эллипсоидами первых номеров, пересекается поверхностью раздела. Если существенная область не пересекается поверхностью раздела, то распространение волн близко к условиям свободного распространения. При пересечении существенной области поверхностью раздела на поле прямой волны накладывается поле волны отраженной. В формировании отраженной волны существенным образом участвуют те области поверхности, которые ограничены первыми номерами Френеля.

Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера. При удалении точки M от плоскости экрана размер первой зоны Френеля становится соизмеримым с размерами отверстия. В этом случае метод стационарной фазы, использованный при вычислении интеграла (1.10), неприменим, поскольку при условии $D \sim 1$ предположение о медленности изменения функции $u(\xi, \eta)$ в пределах существенной области нарушается — при переходе от отверстия к теневой стороне экрана функция $u(\xi, \eta)$ изменяется, согласно граничным условиям Кирхгофа, от конечного значения до нуля.

Будем рассматривать поле в точках, лежащих вблизи оси z , расстояние которых до экрана значительно больше размера отверстия, т. е.

$$\frac{|x - \xi|}{z} \ll 1, \quad \frac{|y - \eta|}{z} \ll 1, \quad (3.7)$$

$$r \approx z + \frac{1}{2} \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{z} + \dots \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в интеграл (1.10) и заменяя в знаменателе подынтегрального выражения r на z , с учетом (3.7) получим для $u(x, y, z)$ выражение, которое называется приближением Френеля:

$$u(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{\Sigma} u(\xi, \eta) \exp \left\{ ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} \right\} d\xi d\eta. \quad (3.9)$$

Вынося из-под интеграла (3.9) члены, не зависящие от ξ и η , и вводя обозначения: $f_x = x/\lambda z$ и $f_y = y/\lambda z$, получим

$$u(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z} \right) \times \\ \times \iint_{\Sigma} u(\xi, \eta) \exp \left(i\pi \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda z} \right) \exp [-i2\pi (f_x \xi + f_y \eta)] d\xi d\eta. \quad (3.10)$$

Сравнивая (3.10) с (2.2'), найдем, что интеграл в (3.10) представляет угловой спектр (или фурье-образ) функции $u(\xi, \eta) \exp \left(i\pi \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda z} \right)$

для пространственных частот f_x и f_y . На расстояниях от экрана, соответствующих значениям волнового параметра $D \sim 1$, поле определяется интегралом (3.10). Эта область называется *областью дифракции Френеля*.

При $D \gg 1$ показатель первого экспоненциального множителя в интеграле (3.10) может принимать только малые значения

$$\pi \frac{\xi_{\max}^2}{\lambda z} \sim \frac{1}{D}, \quad \pi \frac{\eta_{\max}^2}{\lambda z} \sim \frac{1}{D}, \quad \exp\left(i\pi \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda z}\right) \approx 1.$$

Область значений $D \gg 1$ называется *областью дифракции Фраунгофера*. В этой области

$$u(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}\right) (2\pi)^2 F_0(2\pi f_x, 2\pi f_y), \quad (3.41)$$

где $F_0(2\pi f_x, 2\pi f_y)$ — угловой спектр функции $u_0(\xi, \eta)$. Распределение интенсивности в области дифракции Фраунгофера определяется квадратом модуля углового спектра излучения в плоскости экрана

$$|u(x, y, z)|^2 = \frac{(2\pi)^4}{(\lambda z)^2} \left| F_0\left(2\pi \frac{x}{\lambda z}, 2\pi \frac{y}{\lambda z}\right) \right|^2. \quad (3.12)$$

Например, если отверстие прямоугольной формы с размерами a и b освещается плоской волной единичной амплитуды, то

$$F_0\left(2\pi \frac{x}{\lambda z}, 2\pi \frac{y}{\lambda z}\right) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(-ik \frac{x}{z} \xi\right) \times \\ \times \exp\left(-ik \frac{y}{z} \eta\right) d\xi d\eta = \frac{ab}{(2\pi)^2} \frac{\sin\left(\pi \frac{x}{\lambda z} a\right)}{\pi \frac{x}{\lambda z} a} \frac{\sin\left(\pi \frac{y}{\lambda z} b\right)}{\pi \frac{y}{\lambda z} b}.$$

Интенсивность поля при этом

$$I = \frac{a^2 b^2}{(\lambda z)^2} \left[\frac{\sin\left(\pi \frac{xa}{\lambda z}\right)}{\pi \frac{xa}{\lambda z}} \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\pi \frac{yb}{\lambda z}\right)}{\pi \frac{yb}{\lambda z}} \right]^2. \quad (3.13)$$

Вычислим распределение интенсивности в зоне дифракции Фраунгофера для круглого отверстия радиуса a в непрозрачном экране. Падающее излучение считаем плоской волной единичной амплитуды. Угловой спектр:

$$F_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, \eta) \exp[-i(k_x \xi + k_y \eta)] d\xi d\eta.$$

Здесь $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{z}$, $k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y}{z}$. Перейдем к полярным координатам как в плоскости ξ, η , так и в плоскости k_x, k_y :

$$\xi = r \cos \varphi, \quad \eta = r \sin \varphi, \quad k_x = q \cos \theta, \quad k_y = q \sin \theta,$$

где

$$q = \frac{2\pi}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2\pi}{\lambda z} r. \quad (3.14)$$

В полярных координатах выражение для углового спектра принимает вид

$$F_0(q, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \exp\{-iqr \cos(\varphi - \theta)\} d\varphi.$$

Интеграл по φ в этой формуле может быть записан через функцию Бесселя нулевого порядка

$$J_0(qr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-iqr \cos(\varphi - \theta)] d\varphi.$$

Интегрируя по r , получим

$$F_0(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a r J_0(qr) dr = \frac{a}{2\pi q} J_1(qa).$$

Учитывая (3.14), запишем окончательные выражения для углового спектра и распределения интенсивности поля

$$F_0 = \frac{a^2}{2\pi} \frac{J_1\left(2\pi \frac{ra}{\lambda z}\right)}{2\pi \frac{ra}{\lambda z}}, \quad I = \frac{(2\pi)^2 a^4}{(\lambda z)^2} \left[\frac{J_1\left(2\pi \frac{ra}{\lambda z}\right)}{2\pi \frac{ra}{\lambda z}} \right]^2. \quad (3.15)$$

В теории дифракции большое значение имеет принцип Баббине, устанавливающий связь между распределением амплитуд и фаз волн, дифрагировавших на дополнительных экранах. Дополнительными называются экраны, у которых отверстия одного точно совпадают с непрозрачными частями другого, например, отверстие радиуса a в непрозрачном экране и непрозрачный диск того же радиуса.

Пусть $u_1(M)$ и $u_2(M)$ — комплексные функции, характеризующие волновое поле в точке M в том случае, когда волна проходит только через один из экранов. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$u_1(M) + u_2(M) = u(M),$$

где $u(M)$ — невозмущенное волновое поле в точке M .

§ 4. Параболическое уравнение в теории дифракции. Квазиоптическое приближение

Рассмотрим, как распространяется волновой пучок с узким угловым спектром. Для этого предположим, что функция $F_0(k_x, k_y)$ заметно отличается от нуля лишь при $|k_x| \ll k$, $|k_y| \ll k$. Как было показано в § 2, малость поперечных компонент k_x, k_y волнового вектора по сравнению с его величиной k означает, что характерная ширина пучка значительно больше длины волны $\lambda = 2\pi/k$. В этом случае в экспоненте (2.6) выражение $\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ можно разложить в ряд, сохранив лишь квадратичные по k_x, k_y члены. Тогда (2.6) примет вид

$$F(k_x, k_y, z) = F_0(k_x, k_y) e^{ikz} \exp \left[-\frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) z \right]. \quad (4.1)$$

Согласно (2.3) при $z \neq 0$ пучок будет описываться функцией

$$u(x, y, z) = e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(k_x, k_y) \exp [i(k_x x + k_y y)] \times \\ \times \exp \left[-\frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) z \right] dk_x dk_y = e^{ikz} A(x, y, z), \quad (4.2)$$

где

$$F_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, \eta, 0) \exp [-i(k_x \xi + k_y \eta)] d\xi d\eta.$$

Подставив это выражение в (4.2), вычислим интеграл по dk_x :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ik_x (x - \xi) - \frac{iz}{2k} k_x^2 \right] dk_x = \sqrt{\frac{\pi k}{z}} (1 - i) \exp \left[\frac{ik}{2z} (x - \xi)^2 \right],$$

и аналогичный интеграл по dk_y . В результате для амплитуды волны получим (ср. с (3.2))

$$A(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, y - \eta, z) A(\xi, \eta, z = 0) d\xi d\eta, \quad (4.3)$$

где

$$G = \frac{\exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4\mathcal{D}z} \right]}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}z}} \frac{\exp \left[-\frac{(y - \eta)^2}{4\mathcal{D}z} \right]}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}z}}, \quad \mathcal{D} = -\frac{1}{2ik}.$$

Анализ структуры (4.3) показывает, что это выражение есть точное решение параболического уравнения с мнимым коэффициентом диффузии $\mathcal{D} = i/2k$:

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \Delta_{\perp} A = 0. \quad (4.4)$$

Здесь $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа по поперечным координатам, G — функция Грина для уравнения (4.4).

В соответствии с уравнением (4.4) по мере распространения волны происходит «диффузия» ее амплитуды в поперечном направлении — пучок из-за дифракции расширяется. Этот процесс аналогичен дисперсионному «расплыванию» во времени волнового пакета, которое обсуждалось в § 8 гл. II.

Очень важно иметь в виду и другой способ вывода параболического уравнения (4.4) теории дифракции. Проанализируем выражение (4.2). Поскольку отношения k_x/k , k_y/k есть малые величины, допустим, порядка $\sqrt{\mu}$ (μ — некоторый малый параметр), «быстрота» изменения различных сомножителей в (4.2) неодинакова. Наряду с осцилляциями, описываемыми экспонентой $\exp(ikz)$, выражение (4.2) содержит «медленные» функции

$$\exp[i(k_x x + k_y y)], \quad \exp\left[-\frac{iz}{2k}(k_x^2 + k_y^2)\right]. \quad (4.5)$$

Медленность изменения с координатами x , y первой экспоненты (4.5) (по отношению к $\exp(ikz)$) порядка k_x/k , $k_y/k \sim \sqrt{\mu}$, а медленность изменения второй экспоненты с координатой z — порядка k_x^2/k^2 , $k_y^2/k^2 \sim \mu$. Пользуясь этими соображениями, будем искать решение уравнения Гельмгольца (2.4) в следующем виде:

$$u(x, y, z) = A(x' = \sqrt{\mu}x, y' = \sqrt{\mu}y, z' = \mu z)e^{ikz}. \quad (4.6)$$

Дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned} [\Delta u + k^2 u] e^{-ikz} = & \mu \frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} + \mu \frac{\partial^2 A}{\partial y'^2} + \\ & + \mu^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z'^2} + \mu 2ik \frac{\partial A}{\partial z'} - k^2 A + k^2 A = 0. \end{aligned}$$

Слагаемые нулевого порядка малости по μ взаимно уничтожаются, а членом порядка μ^2 мы пренебрегаем. Оставшиеся члены имеют один и тот же порядок малости μ ; они образуют в точности параболическое уравнение (4.4).

Изложенный метод часто применяется для определения поля волновых пучков в неоднородных средах, когда $k = k(x, y, z)$. В этих случаях вводятся координаты, одна из которых направлена вдоль траектории лучей, получаемых при решении задачи в приближении геометрической оптики, а две другие лежат на поверхности фазового фронта. Волновой пучок описывается функцией

$$u(\mathbf{r}, t) = A\{\mu(\mathbf{r}l), \sqrt{\mu}|\mathbf{r}l|\}e^{ikr}, \quad (4.7)$$

где l — единичный вектор, касательный к лучу, \mathbf{r} — радиус-вектор текущей точки траектории луча. Функция A удовлетворяет

параболическому уравнению

$$2ik(\mathcal{L}\nabla)A + \Delta_{\perp}A = 0. \quad (4.8)$$

Если волновой пучок промодулирован также и по времени, то уравнение для A будет иметь вид

$$\left(\mathcal{L}\nabla + \frac{i}{2} \frac{d^2k}{d\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) A - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp}A = 0. \quad (4.9)$$

Здесь $\tau = t - z/v_{\text{гр}}$ (см. (8.16) гл. II).

Перейдем к отысканию некоторых точных решений уравнения (4.4), имеющих важный физический смысл. Пусть при $z = 0$ расположен точечный источник; при этом в выражении (4.3) следует положить

$$A(\xi, \eta, 0) = A(0) \delta\left(\frac{\xi}{a}\right) \delta\left(\frac{\eta}{a}\right).$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$\begin{aligned} A &= \frac{ka^2}{2\pi iz} A(0) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right), \\ u &= \frac{C}{z} \exp\left[ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

где C — константа. Решение уравнения Гельмгольца (2.4) для точечного источника, описывающее сферически расходящуюся волну, имеет вид

$$u = \frac{C}{R} e^{ikR}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.11)$$

Для точек наблюдения, лежащих вблизи оси, где $x/z \ll 1$, $y/z \ll 1$, из формулы (4.11) следует

$$R \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z}.$$

Решения (4.10) и (4.11) в этом случае совпадают. Таким образом, в приближении квазиоптики сферический волновой фронт приближенно заменяется параболическим; для параксиальной области, как мы видели, разница не существенна.

Пусть теперь при $z = 0$ пучок имеет плоский фазовый фронт и гауссово поперечное распределение амплитуды

$$A|_{z=0} = A(0) \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right). \quad (4.12)$$

Здесь $r^2 = x^2 + y^2$, a — характерная ширина пучка в плоскости $z = 0$. Подставляя (4.12) в (4.3), получаем

$$A(r, z) = \frac{kA(0)}{2\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2 + r_1^2}{a^2}\right) \times \\ \times \exp\left\{\frac{ik}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right\} d\xi d\eta = \\ = \frac{A(0)}{1 + i\frac{2z}{ka^2}} \exp\left[-\frac{r^2}{a^2\left(1 + i\frac{2z}{ka^2}\right)}\right] = A_0 e^{ik\Psi}. \quad (4.13)$$

Действительные амплитуда и фаза в решении (4.13) равны

$$A_0 = \frac{A(0)}{\sqrt{1 + D^2}} \exp\left[-\frac{r^2}{a^2(1 + D^2)}\right], \quad k\Psi = \frac{r^2}{a^2} \frac{D}{1 + D^2} - \text{arctg } D. \quad (4.14)$$

Здесь $D = 2z/ka^2$ — безразмерная дифракционная длина, совпадающая с использованным ранее волновым параметром (3.6). Как видно из формулы (4.14), зависимость амплитуды волны от радиуса при $z \neq 0$ по-прежнему имеет вид гауссоиды, но ширина пучка растет с увеличением расстояния z :

$$a^2(z) = a^2(1 + D^2). \quad (4.15)$$

Амплитуда волны уменьшается как $A(0)/\sqrt{1 + D^2}$. Если в исходном сечении $z = 0$ волна имела плоский фазовый фронт ($\Psi = 0$ при любом r), то при $z \neq 0$ фронт волны уже искривлен. Кривизна фазового фронта R^{-1} изменяется с расстоянием как

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{1 + D^2}}. \quad (4.16)$$

Слагаемое $\text{arctg } D$ в (4.14) описывает фазовый сдвиг или изменение скорости распространения волны, появляющееся из-за ограниченности пучка в пространстве. На расстояниях $D^2 \gg 1$ первоначально плоская волна превращается в сферически расходящуюся; ее амплитуда убывает как $A_0 \approx ka^2 A(0)/2z$, а ширина пучка растет по линейному закону $a(z) \approx 2z/ka$. Последнее означает, что волна распространяется в конусе с углом раскрытия, примерно равным $a(z)/z = 2/ka = \lambda/\pi a$. Зависимости от расстояния D амплитуды волны $A_0/A(0)$ на оси (при $r = 0$), характерной ширины пучка $a(z)/a$, фазового сдвига $-k\Psi(r = 0)$ и кривизны фронта a/R изображены на рис. 8.6.

Разумеется, далеко не все решения параболического уравнения (4.4) ведут себя подобно гауссоиде, и пучок, вообще говоря, может сильно менять свою форму при распространении. Однако существует целый класс решений, описывающих дифрагирующие

пучки с неизменной формой — так называемые моды высших порядков. Об этих модах для пучков с прямоугольным поперечным сечением подробно будет говориться в § 2 гл. XI в связи с теорией открытых резонаторов. Здесь мы найдем более простое решение (похожее по своей структуре на выражение для мод) в случае аксиально-симметричных пучков, когда уравнение (4.4) следует записать в цилиндрических координатах

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} = 0; \quad (4.17)$$

Ищем решение (4.17) в виде некоторой специальной комбинации переменных

$$A = \frac{A(0)}{(1+iD)^{m+1}} \Phi \left[\frac{r^2}{a^2(1+iD)} \right], \quad (4.18)$$

где m — положительное целое число, $D = 2z/ka^2$. Подстановка (4.18) — она называется *автомоделной* — позволяет свести исходное уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\Phi(\zeta)$:

$$\zeta \frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} + (1+\zeta) \frac{d\Phi}{d\zeta} + (m+1)\Phi = 0, \quad (4.19)$$

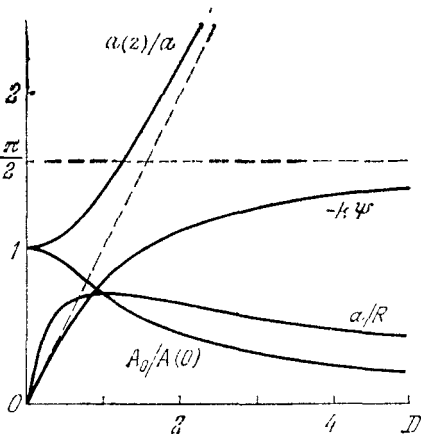
где $\zeta = r^2/[a^2(1+iD)]$. Решениями (4.19) являются функции вида

$$\Phi = e^{-\zeta} L_m(\zeta), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

Здесь L_m — полином Чебышева — Лягерра порядка m . Эти полиномы образуют ортогональную и нормированную с весом $\exp(-\zeta)$ систему функций. Другие пучки могут быть представлены в виде линейной комбинации решений (4.20), т. е. описаны выражением

$$A = \exp \left[-\frac{r^2}{a^2(1+iD)} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(0)}{(1+iD)^{m+1}} L_m \left[\frac{r^2}{a^2(1+iD)} \right]. \quad (4.21)$$

Найденное выше решение (4.13) в виде гауссоиды соответствует члену ряда (4.21) с $m = 0$.



8.6. Изменение с расстоянием параметров дифрагирующего пучка в процессе превращения плоской волны в сферическую.

Уравнение (4.17) линейно. Поэтому любая линейная комбинация решений будет также его решением. Таким образом, удается сконструировать простые выражения, приобретающие новый физический смысл. Например, разность двух гауссоид с одинаковыми амплитудами $A(0)$ и различными ширинами a_1 и a_2 будет описывать пучок с «провалом» на оси

$$A = \frac{A(0)}{1+iD_1} \exp\left[-\frac{r^2}{a_1^2(1+iD_1)}\right] - \frac{A(0)}{1+iD_2} \exp\left[-\frac{r^2}{a_2^2(1+iD_2)}\right]. \quad (4.22)$$

Здесь $D_{1,2} = 2z/ka_{1,2}^2$. При $r = 0$ амплитуда в процессе распространения изменяется по закону

$$|A| = A(0) \frac{\left| \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right| \frac{2z}{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2z}{ka_1^2}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{ka_2^2}\right)^2}}. \quad (4.23)$$

Она вначале растет пропорционально z , т. е. в центре пучка имеет место фокусировка. При больших z наступает дефокусировка и волна расходится как сферическая:

$$|A| = A(0)k \left| \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right| / 2z.$$

Существует еще один способ построения решений уравнения (4.17). Действуя оператором $\partial/\partial z$ или Δ_{\perp} на любое из решений (4.17), получим новое решение этого уравнения. Например, дифференцирование по z функции (4.13), описывающей нулевой член ряда (4.21), даст первый член, соответствующий $m = 1$, $L_1(\xi) = 1 - \xi$:

$$A = \frac{A_1(0)}{(1+iD)^2} \left[1 - \frac{r^2}{a^2(1+iD)} \right] \exp\left[-\frac{r^2}{a^2(1+iD)}\right]. \quad (4.24)$$

Выражение (4.24) описывает дифракцию пучка, имеющего максимальную амплитуду на оси и минимум («темное кольцо») при $r = a$.

Перейдем теперь к рассмотрению дифракционных эффектов в сфокусированных пучках. Для того чтобы пучок был сходящимся, он должен иметь искривленный фазовый фронт. Поэтому условие на границе примем в следующем виде:

$$A|_{z=0} = A(0) \exp\left(-\frac{r^2}{a^2} - i\frac{kr^2}{2R}\right). \quad (4.25)$$

Здесь R — исходный радиус кривизны фронта. Соответствующее решение при $z > 0$ можно формально получить из выражения

(4.13), переобозначив в нем

$$\frac{1}{a^2} \rightarrow \frac{1}{a^2} \left(1 + i \frac{ka^2}{2R}\right) = \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{i}{D} \frac{z}{R}\right).$$

Это решение имеет вид

$$A = \frac{A(0)}{1 - \frac{z}{R} + iD} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2} \frac{1 + \frac{i}{D} \frac{z}{R}}{1 - \frac{z}{R} + iD}\right) = A_0 e^{ik\Psi}. \quad (4.26)$$

Действительные амплитуда и фаза в (4.26) равны

$$A_0 = \frac{A(0)}{\sqrt{\left(1 - \frac{z}{R}\right)^2 + D^2}} \exp\left\{-\frac{r^2}{a^2 \left[\left(1 - \frac{z}{R}\right)^2 + D^2\right]}\right\}; \quad (4.27)$$

$$k\Psi = \frac{r^2}{a^2} \frac{D - \left(1 - \frac{z}{R}\right) \frac{z}{R} \frac{1}{D}}{\left(1 - \frac{z}{R}\right)^2 + D^2} - \operatorname{arctg} \frac{D}{1 - \frac{z}{R}} - \pi\theta(z - R),$$

где θ — единичная функция Хевисайда, равная нулю при $z \leq R$.

В отличие от формул (4.13), (4.14) для квазишлюской волны, решение (4.26), (4.27) содержит два характерных параметра с размерностью длины: $z_1 = ka^2/2$ и $z_2 = R$. Отношение этих величин $\delta = z_1/z_2 = ka^2/2R$ может служить мерой того, какой из двух процессов — дифракция или геометрическая сходимость — является преобладающим.

Согласно (4.27) амплитуда волны на оси изменяется по закону

$$A_0 = A(0) / \sqrt{\left(1 - \frac{z}{R}\right)^2 + D^2}. \quad (4.28)$$

Она вначале растет, достигает в точке $D = \delta/(1 + \delta^2)$ максимального значения, равного $A_{\max} = A(0)\sqrt{1 + \delta^2}$, а затем монотонно убывает. Ширина пучка

$$a^2(z) = a^2 \left[\left(1 - \frac{z}{R}\right)^2 + D^2 \right] \quad (4.29)$$

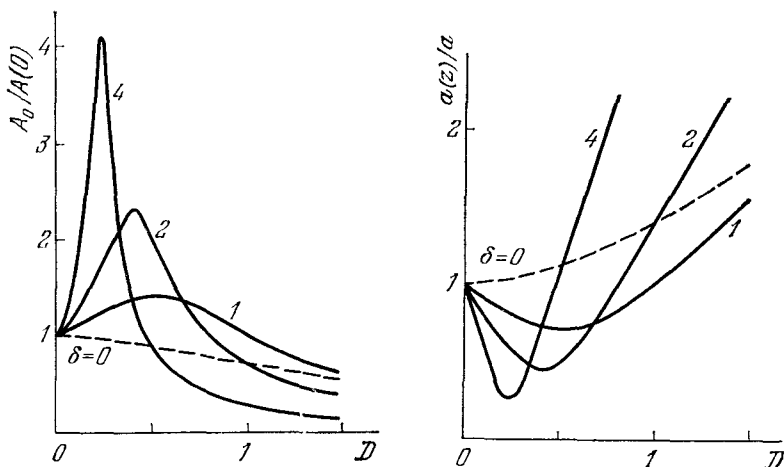
вначале уменьшается из-за фокусировки. Его минимальная ширина — радиус фокального пятна («перетяжки» пучка) — равна $a_{\min} = a/\sqrt{1 + \delta^2}$; при $D > \delta/(1 + \delta^2)$ ширина монотонно возрастает. Фазовый сдвиг на оси

$$-k\Psi(r = 0) = \operatorname{arctg} \frac{D}{1 - z/R} + \pi\theta(z - R)$$

монотонно возрастает с увеличением пройденного волной расстояния. Сдвиг, равный нулю при $z = 0$, достигает значения $\pi/2$ в

точке геометрического фокуса $z = R$, а затем асимптотически стремится к значению $\pi - \text{arctg } \delta^{-1}$. Зависимости амплитуды волны $A_0/A(0)$ на оси и ширины пучка $a(z)/a$ от расстояния D изображены на рис. 8.7 для различных значений параметра δ .

Вместо того чтобы решать параболическое уравнение теории дифракции, записанное для комплексной амплитуды A , часто используют систему уравнений для действительных функций — амплитуды A_0 и фазы $k\Psi$. Полагая в уравнении (4.4)



8.7. Изменение с расстоянием параметров сфокусированного пучка с учетом дифракции.

$A = A_0 \exp(ik\Psi)$ и собирая отдельно члены, образующие действительную и мнимую части полученного соотношения, придем к системе

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + (\nabla_{\perp} \Psi)^2 = \frac{1}{k^2} \frac{\Delta_{\perp} A_0}{A_0}, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial z} + \nabla_{\perp} A_0 \nabla_{\perp} \Psi + \frac{1}{2} A_0 \Delta_{\perp} \Psi = 0. \quad (4.31)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что выражения (4.14) для квазиплоской и (4.27) для сфокусированной волн являются точными решениями этой системы.

В уравнениях (4.30), (4.31) удобно совершить переход к приближению геометрической оптики. В пределе очень коротких длин волн ($k \rightarrow \infty$) правая часть (4.30) становится пренебрежимо малой. Отсутствие члена $\Delta_{\perp} A_0$, описывающего поперечную диффузию действительной амплитуды, позволяет решать уравнение (4.30) независимо от (4.31). Интересно сравнить результаты,

полученные с помощью параболического уравнения и в приближении геометрической оптики. Для аксиально-симметричных пучков система уравнений примет вид

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 = 0, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial z} + \frac{\partial A_0}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{A_0}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = 0.$$

Решением (4.32), как нетрудно проверить, будут следующие выражения:

$$\Psi = \frac{r^2}{2(z-R)},$$

$$A_0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{R}\right)} \varphi \left[\frac{r^2}{a^2 \left(1 - \frac{z}{R}\right)^2} \right]. \quad (4.33)$$

Здесь φ — произвольная гладкая функция. К выражениям (4.33) можно также прийти, исходя из имеющегося решения (4.27) для сфокусированного пучка. Устремляя в нем волновой параметр D к нулю, получим в точности решение (4.33) с функцией $\varphi(\xi) = \exp(-\xi)$. Таким образом, решение в приближении геометрической оптики не описывает поля вблизи фокуса. При $z \rightarrow R$ амплитуда неограниченно возрастает. Фокальное пятно при $D \rightarrow 0$ стягивается в точку. Кроме того, в решении (4.33) фаза изменяется скачком на π при прохождении волны через фокус $z = R$.

§ 5. Отражение ограниченных волновых пучков

Рассмотрим отражение волнового пучка от границы раздела двух однородных сред. Для простоты решим двумерную задачу; будем считать, что пучок образован при дифракции плоской волны с комплексной амплитудой

$$u(x, z) = u_0(x, z) \exp \{ ikx \sin \theta_0 + ikz \cos \theta_0 \}$$

на плоском экране со щелью, шириной a , расположенном в плоскости $z = 0$ (рис. 8.8). Угловой спектр пучка при $z = 0$ определяется в этом случае формулой (2.11). Будем считать, что $\frac{\lambda}{a \cos \theta_0} \ll 1$, следовательно, пучок имеет узкий угловой спектр. На расстоянии l от экрана со щелью находится граница раздела двух сред, от которой происходит отражение пучка (рис. 8.8). Поле падающего пучка на границе раздела при $z = l$ согласно (2.3), (2.6) и

(2.11) запишем в виде суперпозиции плоских волн:

$$u(x, l) = \frac{e^{ikl \cos \theta_0}}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \exp \left[-i(k_x - k_{x0})\xi + ik_{xx}x - il \frac{k_x^2}{2k} \right] d\xi dk_x. \quad (5.1)$$

Чтобы записать поле отраженного пучка в аналогичном виде, умножим каждую плоскую волну, образующую пучок, на коэффициент Френеля (см. § 7 гл. I)

$$R(k_x) = |R(k_x)| e^{i\varphi(k_x)},$$

тогда

$$u_{\text{отр}}(x, l) = \frac{e^{ikl \cos \theta_0}}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} |R(k_x)| u_0(\xi) \exp \{ i[\varphi(k_x) - (k_x - k_{x0})\xi + k_{xx}x - lk_x^2/2k] \} d\xi dk_x. \quad (5.2)$$

Поле отраженного пучка отличается от поля падающего, поскольку под интегралом появляются дополнительные амплитудные $|R(k_x)|$ и фазовые $\varphi(k_x)$ множители. Рассмотрим случай, когда

в пределах ширины углового спектра пучка модуль коэффициента Френеля изменяется мало, тогда можно положить $|R(k_x)| = |R(k_{x0})|$ и вынести из-под знака интеграла. Фазу коэффициента Френеля разложим в ряд по $(k_x - k_{x0})$:

$$\varphi(k_x) = \varphi(k_{x0}) + \varphi'(k_{x0})\beta + \frac{1}{2} \varphi''(k_{x0})\beta^2 + \dots, \quad (5.3)$$

8.8. Смещение пучка при отражении от границы раздела двух сред.

где

$$\beta = (k_x - k_{x0}). \quad (5.4)$$

Ограничимся в (5.2) членами первого порядка по β и по k_x , т. е. пренебрежем дифракционным расплыванием пучка и изменением поперечного сечения пучка при отражении. Учитывая введенное обозначение (5.4), можно интегралы (5.1), (5.2) преобразовать к виду

$$u(x, l) = \exp [ik(l \cos \theta_0 + x \sin \theta_0)] \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \exp [i\beta(x - \xi)] d\xi d\beta, \quad (5.5)$$

$$u_{отр}(x, l) = R(k_{x0}) \exp [ik(l \cos \theta_0 + x \sin \theta_0)] \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \exp [i\beta(x - \xi - \varphi'(k_{x0}))] d\xi d\beta. \quad (5.6)$$

Сравнивая (5.6) и (5.5), заметим, что

$$|u_{отр}(x, l)| = |R(k_{x0})| |u\{x + \varphi'(k_{x0}), l\}|. \quad (5.7)$$

Отсюда следует, что пучок при отражении смещается вдоль границы раздела на величину (см. рис. 8.8)

$$\Delta = - \left(\frac{d\varphi}{dk_x} \right)_{k_{x0}}. \quad (5.8)$$

Наиболее существенным смещение пучка будет в том случае, когда фаза коэффициента отражения с изменением угла падения волны на границу раздела двух сред изменяется наиболее быстро. Например, если угол падения пучка θ_0 немного превышает критический угол полного отражения.

При полном отражении электромагнитной волны от границы раздела двух диэлектриков $|R(k_{x0})| = 1$, а фаза коэффициента Френеля для горизонтально поляризованной волны (с вектором \mathbf{E} , перпендикулярным плоскости падения) определяется формулой (7.18) гл. I, которая в обозначениях данного параграфа может быть записана в виде

$$\varphi_{\perp} = -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{k_x^2 - k^2 n^2}}{\sqrt{k^2 - k_x^2}}, \quad (5.9)$$

$n = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$ — показатель преломления, $k^2 = \omega^2/c^2$.

Для вертикально поляризованной электромагнитной волны:

$$\varphi_{\parallel} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{k_x^2 - k^2 n^2}}{n^2 \sqrt{k^2 - k_x^2}}. \quad (5.10)$$

Используя формулу (5.8), найдем смещение горизонтально поляризованного пучка при полном отражении

$$\Delta_{\perp} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - n^2}}. \quad (5.11)$$

Для вертикально поляризованной волны

$$\Delta_{\parallel} = \frac{\lambda}{\pi n^2} \frac{(1 - n^2) \operatorname{tg} \theta_0}{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - n^2} \cos^2 \theta_0 \left[1 + \frac{\sin^2 \theta_0 - n^2}{n^4 \cos^2 \theta_0} \right]}. \quad (5.12)$$

Поскольку эффект наиболее существен при $n \approx \sin \theta_0$, формулу (5.12) можно упростить

$$\Delta_{\parallel} \approx \frac{\lambda}{\pi n^2} \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - n^2}}. \quad (5.13)$$

Смещение пучка тем больше, чем ближе угол падения пучка к предельному углу полного отражения: при $\sin \theta_0 \rightarrow n$, $\Delta_{\perp} \rightarrow \infty$ и $\Delta_{\parallel} \rightarrow \infty$. Отношение $\Delta_{\perp}/\Delta_{\parallel} = n^2$. Смещение пучка, падающего под углом, близким к предельному, составляет много длин волн. Однако, чтобы сделать это смещение доступным измерению (например, в оптическом диапазоне волн), необходимо иметь многократное отражение пучка.

Если от границы раздела отражается линейно-поляризованный пучок с произвольно направленным вектором E относительно плоскости падения (такой пучок можно представить в виде суперпозиции горизонтально и вертикально поляризованного пучков), то при многократном полном отражении происходит пространственное разделение горизонтально и вертикально поляризованных пучков.

Подобное явление наблюдается экспериментально при многократном отражении лазерных пучков от границы раздела диэлектрик — воздух.

Если в разложении фазы φ в ряд по β удержать члены следующего порядка, например член с β^2 , то поле отраженного пучка будет описываться формулой:

$$u_{\text{отр}}(x, l) = |R(k_{x0})| \exp [ik(l \cos \theta_0 + x \sin \theta_0)] \frac{i}{2\pi} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \exp \left[i\beta(x - \xi - \varphi') - \frac{1}{2} i\beta^2 \varphi'' \right] d\xi d\beta. \quad (5.14)$$

Мы получили выражение, аналогичное (4.2) данной главы и (8.10) гл. II. Следовательно, член $\frac{1}{2}\beta^2\varphi''$ в фазе подынтегрального выражения в (5.14) описывает изменение распределения амплитуды в сечении пучка при его отражении. Вблизи угла полного отражения ($\sin \theta_0 \rightarrow n$) коэффициент φ'' становится большим и форма пучка сильно искажается. Таким образом, при отражении пучка от границы раздела центр его смещается и распределение интенсивности по сечению пучка изменяется.

§ 6. Обобщение метода Кирхгофа для векторных полей. Метод Кирхгофа — Котлера

Пользуясь методом Кирхгофа для скалярных волн, можно правильно определить интенсивность и фазу волны в различных точках за экраном. Формально можно обобщить метод Кирхгофа на случай векторных полей. Действительно, запишем для каждой декартовой компоненты векторов E и H интеграл Кирхгофа (1.4), а затем сложим их векторно. В результате получим векторную

теорему для \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \iint_S [G(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{E} - \mathbf{E}(\mathbf{n}\nabla G)] dS, \quad (6.1)$$

и аналогичный интеграл для вектора \mathbf{H} . Интеграл (6.1) можно преобразовать к более удобному виду.

Запишем подынтегральное выражение в виде

$$[. . .] = (\mathbf{n}\nabla)(G\mathbf{E}) - 2\mathbf{E}(\mathbf{n}\nabla G). \quad (6.2)$$

Используя векторные тождества, можно преобразовать последний член в (6.2):

$$[. . .] = (\mathbf{n}\nabla)(G\mathbf{E}) - [n[E\nabla G]] - (\nabla G)(\mathbf{n}\mathbf{E}) - n(\mathbf{E}\nabla G) - \\ - [[\mathbf{n}\mathbf{E}]\nabla G]. \quad (6.3)$$

Члены $[n[E\nabla G]]$ и $n(\mathbf{E}\nabla G)$ преобразуем, воспользовавшись формулами для ротора произведения вектора на скаляр и для дивергенции от произведения вектора на скаляр, и учтем, что

$$\text{rot } \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H} \text{ и } \text{div } \mathbf{E} = 0.$$

В результате (6.1) можно записать в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \{(\mathbf{n}\nabla)(G\mathbf{E}) + [n \text{rot}(G\mathbf{E})] - n \text{div } G\mathbf{E}\} dS - \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ i \frac{\omega}{c} \mu [n\mathbf{H}] G + [[\mathbf{n}\mathbf{E}] \text{grad } G] + (\mathbf{n}\mathbf{E}) \text{grad } G \right\} dS. \quad (6.4)$$

Покажем, что первый интеграл в (6.4) обращается в нуль. Для этого нужно воспользоваться формулами:

$$\int_V \text{rot } \mathbf{a} dV = \int_S [n\mathbf{a}] dS, \quad \int_V \text{div } \mathbf{a} dV = \int_S (n\mathbf{a}) dS, \\ \int_V \text{grad } \varphi dV = \int_S \varphi \mathbf{n} dS,$$

тогда первый интеграл по поверхности преобразуется в объемный,

$$\int_V \{\Delta(G\mathbf{E}) + \text{rot rot}(G\mathbf{E}) - \text{grad div}(G\mathbf{E})\} dV = 0,$$

поскольку подынтегральное выражение тождественно обращается в нуль. Формула (6.4) принимает вид

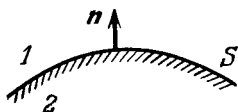
$$\mathbf{E}(x, y, z) = - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ i \frac{\omega}{c} \mu [n\mathbf{H}] G + [[\mathbf{n}\mathbf{E}] \text{grad } G] + \right. \\ \left. + (\mathbf{n}\mathbf{E}) \text{grad } G \right\} dS. \quad (6.5)$$

Аналогичным образом для вектора \mathbf{H} можно получить

$$\mathbf{H}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ -i \frac{\omega}{c} \varepsilon [\mathbf{nE}] G + [[\mathbf{nH}] \text{grad } G] + (\mathbf{nH}) \text{grad } G \right\} dS. \quad (6.6)$$

Значения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в любой точке за экраном определяются тангенциальными и нормальными компонентами векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в отверстии Σ . Членам, входящим в подынтегральные выражения в (6.5) и (6.6), можно придать наглядный смысл, если вспомнить граничные условия для тангенциальных и нормальных компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , вытекающие из уравнений Максвелла. Если на поверхности раздела между средой 1, характеризующейся значениями ε_1 , μ_1 , и средой 2 с параметрами ε_2 и μ_2 находится переменный заряд, поверхностная плотность которого равна η , то нормальные компоненты вектора \mathbf{E} должны удовлетворять граничному условию

$$\varepsilon_1 (\mathbf{nE}_1) - \varepsilon_2 (\mathbf{nE}_2) = 4\pi\eta, \quad (6.7)$$



8.9. Нормаль к поверхности раздела двух сред.

\mathbf{n} — нормаль к поверхности, направленная из второй среды в первую (рис. 8.9). Если $\mathbf{E}_2 = 0$, то $(\mathbf{nE}_1) = 4\pi\eta/\varepsilon_1$. Таким образом, скалярное произведение (\mathbf{nE}) эквивалентно некоторому переменному поверхностному электрическому заряду с плотностью $\eta = (\mathbf{nE})\varepsilon/4\pi$. Из граничного условия для тангенциальных компонент вектора \mathbf{H}

$$[\mathbf{nH}_1] - [\mathbf{nH}_2] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (6.8)$$

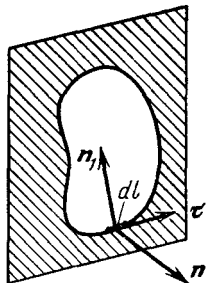
где \mathbf{j} — плотность поверхностного тока, получим, что при $\mathbf{H}_2 = 0$ $[\mathbf{nH}_1] = 4\pi\mathbf{j}/c$, т. е. разрыв непрерывности тангенциальной компоненты вектора \mathbf{H} можно трактовать как поверхностный электрический ток. По аналогии можно считать, что скалярное произведение (\mathbf{nH}) эквивалентно плотности некоторого поверхностного «магнитного заряда», а $[\mathbf{nE}]$ эквивалентно поверхностному «магнитному току».

Таким образом, поле в точках, расположенных за экраном, создается источниками в виде поверхностных электрических и магнитных токов и поверхностных электрических и магнитных зарядов, распределенных по площади отверстия в экране. Однако если пользоваться граничными условиями Кирхгофа и считать, что тангенциальные и нормальные компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} терпят разрыв на контуре отверстия (тангенциальные компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} на теневой стороне экрана равны нулю), то \mathbf{E} и \mathbf{H} , определенные

формулами (6.5), (6.6), не будут удовлетворять уравнениям Максвелла (будут нарушаться уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$).

Для того чтобы удовлетворить условиям непрерывности векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} на контуре отверстия, необходимо ввести некоторое эквивалентное распределение зарядов на контуре отверстия и токов, текущих по поверхности экрана, внутри отверстия. Метод нахождения плотности заряда на контуре отверстия был предложен Котлером. Изложим смысл этого метода.

Пусть Σ — площадь отверстия в экране, а C — его контур, \mathbf{n} — внутренняя нормаль к плоскости экрана, \mathbf{n}_1 — нормаль к элементу контура dl , $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, касательный к контуру dl , η — линейная плотность электрических зарядов, распределенных по контуру (рис. 8.10). Предположим, что внутри отверстия существует поверхностный ток, плотность которого равна \mathbf{j} , а на теневой стороне экрана ток равен нулю. Уравнение непрерывности должно связывать поверхностный ток с линейным зарядом η , распределенным по контуру C . Запишем уравнение непрерывности



8.10. К выводу формулы Кирхгофа — Котлера.

$$(\mathbf{n}_1 \mathbf{j}) = - \frac{\partial \eta}{\partial t} = i\omega \eta. \quad (6.9)$$

Согласно (6.8) $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{n} \mathbf{H}]$, и, подставляя (6.8) в (6.9), получим

$$\eta = \frac{c}{4\pi i\omega} (\mathbf{n}_1 [\mathbf{n} \mathbf{H}]) = \frac{c}{4\pi i\omega} (\mathbf{H} \boldsymbol{\tau}). \quad (6.10)$$

Линейный заряд, распределенный по контуру отверстия, также является источником электромагнитного поля и должен быть учтен в выражении для \mathbf{E} . К интегралу (6.5) должен быть добавлен интеграл $\int \frac{4\pi}{e} \eta \operatorname{grad} G$. Но поскольку η — линейная плотность заряда, то интеграл по поверхности S превратится в линейный интеграл по контуру отверстия. Поле \mathbf{E} при этом должно быть определено как сумма полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 , где \mathbf{E}_1 определяется формулой (6.5), а

$$\mathbf{E}_2 = \frac{c}{4\pi i\omega e} \oint_C (\mathbf{H} \boldsymbol{\tau}) \operatorname{grad} G dl. \quad (6.11)$$

Удобнее преобразовать контурный интеграл (6.11) в интеграл по площади отверстия Σ . Проведем это преобразование. Подынте-

гральное выражение (6.11) можно записать в виде

$$(\mathbf{H}\boldsymbol{\tau}) \text{grad } G = \sum_{k=1}^3 e_k \left(\boldsymbol{\tau} \left(\mathbf{H} \frac{\partial G}{\partial x_k} \right) \right), \quad |e_k| = 1.$$

Тогда интеграл по контуру (обозначим его l) можно преобразовать в интеграл по площади, ограниченной контуром

$$I = \sum_{k=1}^3 e_k \oint_C \boldsymbol{\tau} \left(\mathbf{H} \frac{\partial G}{\partial x_k} \right) dl = \sum_{k=1}^3 e_k \iint_{\Sigma} \left(\text{rot} \left(\mathbf{H} \frac{\partial G}{\partial x_k} \right), \mathbf{n} \right) dS.$$

Вспользуемся формулой для rot от произведения вектора на скаляр и учитывая, что $\text{rot } \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{E}$, получим

$$I = - \sum_{k=1}^3 e_k \iint_{\Sigma} [\mathbf{nH}] \text{grad} \frac{\partial G}{\partial x_k} dS - i \frac{\omega}{c} \varepsilon \iint_{\Sigma} (\mathbf{nE}) \text{grad } G dS.$$

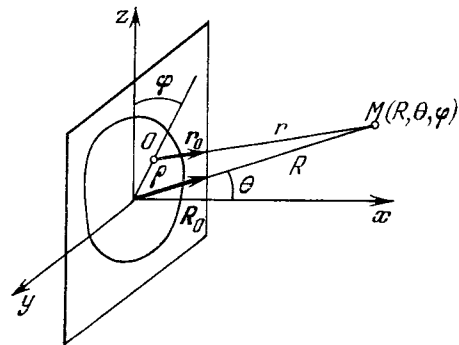
Выполняя суммирование по k , окончательно можем записать

$$\mathbf{E}_2 = - \frac{c}{4\pi i \omega \varepsilon} \iint_{\Sigma} ([\mathbf{nH}] \nabla) \text{grad } G dS - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\mathbf{nE}) \text{grad } G dS.$$

А полное поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ будет равно

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left\{ i \frac{\omega}{c} \mu [\mathbf{nH}] G + [[\mathbf{nE}] \text{grad } G] - \frac{c}{i \omega \varepsilon} ([\mathbf{nH}] \nabla) \text{grad } G \right\} dS. \quad (6.12)$$

При этом мы учли, что теперь \mathbf{n} — внутренняя нормаль к поверхности экрана. Вектор \mathbf{H} можно определить из уравнений Максвелла.



8.11. К расчету дифракции с помощью формулы Кирхгофа — Котлера.

Применим формулу (6.12) для расчета поля в области френгоферовой дифракции. Введем сферическую систему координат R, θ, φ (рис. 8.11). Для функции $G = e^{ikr}/r$, где $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \boldsymbol{\rho}$, можно записать

$$\begin{aligned} \text{grad } G &= - \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{r}_0 \approx \\ &\approx - ik \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{r}_0, \end{aligned} \quad (6.13)$$

поскольку $kr \gg 1$. Направление единичных векторов \mathbf{r}_0 и \mathbf{R}_0 указано на рис. 8.11. Последний член в интеграле (6.12) будет в этом случае равен

$$\begin{aligned}
 ([\mathbf{nH}] \nabla) \text{grad } G &= -ik \left\{ \mathbf{e}_1 [\mathbf{nH}]_x \mathbf{r}_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikr}}{r} + \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{e}_2 [\mathbf{nH}]_y \mathbf{r}_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{ikr}}{r} + \mathbf{e}_3 [\mathbf{nH}]_z \mathbf{r}_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikr}}{r} \right\} = \\
 &= -k^2 \left\{ \left([\mathbf{nH}]_x \mathbf{e}_1 \frac{x}{r} + [\mathbf{nH}]_y \mathbf{e}_2 \frac{y}{r} + [\mathbf{nH}]_z \mathbf{e}_3 \frac{z}{r} \right) \mathbf{r}_0 \right\} \frac{e^{ikr}}{r} = \\
 &= -k^2 ([\mathbf{nH}] \mathbf{r}_0) \mathbf{r}_0 \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

Подставляя (6.13) и (6.14) в (6.12) и полагая $\varepsilon = \mu = 1$, получим

$$\mathbf{E} = \frac{ik}{4\pi} \iint_{\Sigma} \{ [\mathbf{nH}] + [\mathbf{r}_0 [\mathbf{nE}]] - ([\mathbf{nH}] \mathbf{r}_0) \mathbf{r}_0 \} \frac{e^{ikr}}{r} dS.$$

В зоне дифракции Фраунгофера можно считать, что $r = R - (\rho\mathbf{r})$, $\mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{R}_0$ и отличие r от R можно учесть только в показателе экспоненты, тогда, записывая скалярное произведение $k(\rho\mathbf{r}) = k_x \xi + k_y \eta$ (ξ, η — прямоугольные координаты точки O), получим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(R, \theta, \varphi) &= \frac{ike^{ikR}}{4\pi R} \{ [\mathbf{nH}] + [\mathbf{R}_0 [\mathbf{nE}]] - ([\mathbf{nH}] \mathbf{R}_0) \mathbf{R}_0 \} \times \\
 &\quad \times \iint_{\Sigma} \exp[-i(k_x \xi + k_y \eta)] d\xi d\eta. \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

Интеграл равен угловому спектру поля в плоскости экрана, так что

$$\mathbf{E}(R, \theta, \varphi) = \frac{ike^{ikR}}{4\pi R} F(k_x, k_y) \{ [\mathbf{nH}] + [\mathbf{R}_0 [\mathbf{nE}]] - ([\mathbf{nH}] \mathbf{R}_0) \mathbf{R}_0 \}. \quad (6.16)$$

Покажем, что поле в области дифракции Фраунгофера поперечно. Условием поперечности поля является равенство $(\mathbf{E}\mathbf{R}_0) = 0$. Умножив скалярно (6.16) на \mathbf{R}_0 , получим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}\mathbf{R}_0 &= \frac{\overline{ike^{ikR}}}{R} F(k_x, k_y) \{ [\mathbf{nH}] \mathbf{R}_0 + [\mathbf{R}_0 [\mathbf{nE}]] \mathbf{R}_0 - \\
 &\quad - ([\mathbf{nH}] \mathbf{R}_0)(\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_0) \}.
 \end{aligned}$$

Фигурная скобка равна нулю, так как первый и последний член в ней взаимно уничтожаются, а средний член равен нулю, так как

$$[\mathbf{R}_0 [\mathbf{nE}]] \mathbf{R}_0 = [\mathbf{nE}][\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_0] = 0.$$

Следовательно, $E\mathbf{R}_0 = 0$, и поле в области дифракции Фраунгофера поперечно, отличны от нуля только компоненты E_θ и E_φ . Вектор \mathbf{H} связан с вектором \mathbf{E} в этой области формулой:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{R}_0\mathbf{E}].$$

Рассмотренные примеры дифракционных задач являются простейшими, однако, пользуясь методами решений, описанными в данной главе, можно решить и более сложные задачи дифракции, например, рассчитать дифракцию скалярных волн на амплитудной и фазовой решетках и т. п.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ И ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

В нелинейных средах могут проявляться эффекты самовоздействия и взаимодействия волн. Эти процессы были рассмотрены в гл. V при распространении в диспергирующей среде плоских монохроматических волн. Однако плоские волны — это идеализация; на самом деле мы имеем дело с волнами, ограниченными в пространстве и во времени. Поэтому, вообще говоря, нелинейные эффекты протекают совместно с дифракционными и дисперсионными явлениями и встает задача выявить их конкуренцию и взаимное влияние.

Рассмотрим, например, среду, показатель преломления которой зависит от интенсивности волны, $n = n(|E|^2)$. В такой среде плоская волна бежит с фазовой скоростью, определяемой амплитудой поля $v = v(|E|^2)$. Если теперь на такую среду падает ограниченный волновой пучок, то эффект самовоздействия приобретает принципиально новые черты. Под действием амплитудно-модулированной волны нелинейная среда становится неоднородной: показатель преломления в области, занимаемой пучком, изменяется на нелинейную добавку по сравнению с областью вне пучка. Причем в отличие от линейных сред, в которых неоднородности определяются внешними условиями и являются известными функциями координат и времени, неоднородности, наведенные в нелинейных средах, зависят от профиля интенсивности волны и ее мощности. Вследствие наведенных неоднородностей траектории лучей в нелинейной среде в общем случае искривляются — возникает явление нелинейной рефракции. Нелинейная рефракция может приводить к целому ряду явлений: самофокусировке, самоканализации, дефокусировке и самоотклонению волновых пучков; самокомпрессии и декомпрессии импульсов, образованию солитонов.

Взаимодействие модулированных волн также приобретает новые черты по сравнению со случаем плоских волн. С одной стороны, вследствие дифракции происходит нарушение строгого условия фазового синхронизма и ограничение области эффективного взаимодействия размерами фокального пятна; с другой стороны, при сильных полях сама дифракция взаимодействующих волн может иметь совершенно иной характер, чем в линейной среде.

В настоящей главе мы рассмотрим основные закономерности распространения волновых пучков и волновых пакетов, т. е. волн с узкими частотным и угловым спектрами, в средах с нелинейным показателем преломления. Иными словами, мы разберем несколько характерных задач нелинейной квазиоптики.

§ 1. Нелинейная квазиоптика

Рассмотрим распространение модулированной волны в среде, диэлектрическая проницаемость которой зависит от интенсивности волны

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{\text{нл}} (|E|^2). \quad (1.1)$$

Здесь ε_0 — линейная диэлектрическая проницаемость (асимптотическое значение ε при $|E| \rightarrow 0$), $\varepsilon_{\text{нл}}$ — нелинейная добавка, которую можно представить в виде ряда

$$\varepsilon_{\text{нл}} = \varepsilon_2 |E|^2 + \varepsilon_4 |E|^4 + \varepsilon_6 |E|^6 + \dots, \quad (1.2)$$

где первый член разложения, $\varepsilon_2 |E|^2$, соответствует учету кубичной по полю нелинейной поляризации среды; $\varepsilon_4 |E|^4$ — поляризации пятого порядка по полю и т. д.

С нелинейным изменением диэлектрической проницаемости связаны эффекты самовоздействия. В процессе самовоздействия волна остается квазимонохроматической; нелинейный эффект проявляется в изменении амплитудной и фазовой модуляции волны, формы ее углового и частотного спектров. При изменении углового спектра или пространственной модуляции волны говорят о самофокусировке и самодефокусировке, а при изменении частотного спектра или временной модуляции — о самокомпрессии (самосжатии) и самодекомпрессии волновых пакетов. Хотя оба указанных явления могут, вообще говоря, протекать одновременно, мы будем рассматривать их отдельно. При этом, так как самовоздействия волновых пучков и волновых пакетов имеют много общих черт, мы будем вести основное изложение на примере пространственной самофокусировки волн.

Стационарное самовоздействие волн в среде с диэлектрической проницаемостью (1.1) описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 E + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\text{нл}} (|E|^2) E = 0. \quad (1.3)$$

В случае волновых пучков с узким угловым спектром и малой нелинейностью среды решение последнего уравнения можно упростить, воспользовавшись методом медленно изменяющихся амплитуд. Мы уже применяли данный подход в линейных средах, $\varepsilon_{\text{нл}} = 0$, для описания дифракции волновых пучков (гл. VIII), получив уравнение параболического типа с мнимым коэффициентом

диффузии — соответствующее приближение называется *квазиоптическим*. Метод медленно изменяющихся амплитуд применялся также нами при анализе распространения плоских волн в нелинейных средах (гл. V). Теперь необходимо объединить эти две теории, т. е. необходимо обобщить квазиоптическое описание на нелинейные волны.

Итак, представим волновое поле дифрагирующего пучка в виде квазиплоской волны

$$E = \frac{e}{2} A(\mu z, \sqrt{\mu} x, \sqrt{\mu} y) \exp[i(\omega t - kz)] + \text{к. с.} \quad (1.4)$$

где z — направление распространения пучка, x и y — поперечные координаты, A — медленно изменяющаяся амплитуда, μ — малый параметр, характеризующий отличие пучка от линейной плоской волны, которое появляется у него вследствие дифракции и нелинейности среды. В (1.4) учтено, что изменения комплексной амплитуды поперек волнового пучка происходят более быстро, чем вдоль пучка. Считая, что нелинейность среды имеет тот же порядок малости μ , $\epsilon_{\text{нл}} \approx \mu \epsilon_0$, получаем после подстановки (1.4) в (1.3) в первом приближении по малому параметру следующее уравнение:

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \Delta_{\perp} A + \frac{k^2 \epsilon_{\text{нл}} |A|^2}{\epsilon_0} A. \quad (1.5)$$

При $\epsilon_{\text{нл}} = 0$ уравнение (1.5) переходит в параболическое уравнение, используемое в квазиоптической теории дифракции волновых пучков в линейных средах (гл. VIII).

Таким образом, уравнение (1.5) соответствует квазиоптическому приближению в теории нелинейных волн. Оно описывает стационарное самовоздействие дифрагирующих волновых пучков. Входящие в уравнение (1.5) линейная и нелинейная части диэлектрической проницаемости являются, строго говоря, комплексными функциями. В дальнейшем мы будем считать ϵ_0 и $\epsilon_{\text{нл}}$ действительными величинами, пренебрегая тем самым как линейным, так и нелинейным поглощением волны. Тогда член с $\epsilon_{\text{нл}}$ в параболическом уравнении (1.5) отвечает учету зависимости фазовой скорости от интенсивности.

Уравнение (1.5) является комплексным. В ряде случаев более удобно перейти к действительным величинам. С этой целью представим комплексную амплитуду в виде

$$A = A_0 \exp(-ik\psi), \quad (1.6)$$

где A_0 — действительная амплитуда, ψ — эйконал комплексной амплитуды, который является добавкой к эйконалу плоской волны в (1.4).

Подставляя (1.6) в уравнение (1.5) и отделяя мнимую и действительную части, приходим к системе двух действительных

уравнений

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + (\nabla_{\perp} \Psi)^2 = \frac{\varepsilon_{\text{нл}}(A_0^2)}{\varepsilon_0} + \frac{\Delta_{\perp} A_0}{k^2 A_0}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial z} + \nabla_{\perp} \Psi \cdot \nabla_{\perp} A_0 + \frac{1}{2} A_0 \Delta_{\perp} \Psi = 0. \quad (1.8)$$

Первое из этих уравнений (1.7) — уравнение эйконала, в правой части которого стоят две «силы»: нелинейной рефракции и дифракции. Второе уравнение (1.8) — уравнение переноса, выражающее закон сохранения энергии в дифференциальной форме. Для двумерного «щелевого» пучка и трехмерного осесимметричного пучка уравнения (1.7) и (1.8) принимают вид

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 = \frac{\varepsilon_{\text{нл}}(A_0^2)}{\varepsilon_0} + \frac{1}{k^2 A_0} \left(\frac{\partial^2 A_0}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial A_0}{\partial r} \right), \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial A_0}{\partial r} + \frac{1}{2} A_0 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = 0. \quad (1.10)$$

Здесь двумерному пучку соответствует $m = 0$, $r = x$, а трехмерному — $m = 1$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

§ 2. Нелинейная геометрическая оптика

Рассмотрим поведение волнового пучка в нелинейной среде в приближении геометрической оптики. Для перехода к геометрической оптике нужно в уравнениях (1.9) и (1.10) устремить длину волны к нулю, или волновое число к бесконечности. Тогда уравнение переноса (1.10) не изменится, а в уравнении эйконала (1.9) исчезнет дифракционный член. При этом оставшаяся нелинейная «сила» будет описывать влияние на ход лучей неоднородностей, наведенных в нелинейной среде волновым пучком. Явление искривления лучей из-за нелинейности среды называется *нелинейной рефракцией*.

Чтобы выявить основные особенности эффекта нелинейной рефракции, ограничимся учетом младшего (а, следовательно, и наибольшего) нелинейного члена в разложении диэлектрической проницаемости по полю (1.1), т. е. будем считать

$$\varepsilon_{\text{нл}} = \varepsilon_2 |E|^2. \quad (2.1)$$

Зависимость (2.1) отвечает локальному механизму нелинейности среды, в которой нелинейная часть поляризации кубична по полю (см. (1.19) и (1.20) гл. V). Таким образом, полагая в уравнении эйконала (1.9) $k \rightarrow \infty$ и подставляя (2.1), приходим к уравнениям

геометрической оптики для кубично-нелинейной среды:

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 = \frac{\varepsilon_2 A_0^2}{\varepsilon_0}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial A_0^2}{\partial r} + A_0^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Особенность уравнений нелинейной геометрической оптики (2.2) и (2.3), отличающая ее от уравнений линейной оптики (см. гл. VII), состоит в том, что здесь уравнение эйконала (2.2) не является независимым от уравнения переноса для амплитуды (2.3), вследствие чего его решение, определяющее ход лучей, зависит не только от начальной формы волнового фронта, но и от вида амплитудного профиля волны. Последнее как раз характерно для явления нелинейной рефракции.

Уравнениям нелинейной геометрической оптики можно придать несколько другой вид, заметив, что поперечный градиент эйконала равен углу наклона элементарного луча к оси z :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \theta. \quad (2.4)$$

С учетом последнего соотношения уравнения (2.2) и (2.3) приобретают следующий вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} + \theta \frac{\partial \theta}{\partial r} = \gamma \frac{\partial J}{\partial r}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial J}{\partial z} + \theta \frac{\partial J}{\partial r} + J \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{m}{r} \theta \right) = 0, \quad (2.6)$$

где $\gamma = \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon_0}$, $J = A_0^2$.

Найти аналитическое решение уравнений (2.2) и (2.3) или (2.5), (2.6) в общем виде для произвольных начальных профилей интенсивности $A_0^2(0, r)$ и эйконала $\Psi(0, r)$ не представляется возможным. Однако можно указать некоторые классы точных решений, позволяющие выявить основные черты нелинейной рефракции.

Безабберрационное самовоздействие пучков. Рассмотрим самовоздействие пучков, волновые фронты которых остаются в нелинейной среде сферическими или цилиндрическими, но кривизна фронта $\beta(z)$, а следовательно, и его радиус кривизны $R(z) = 1/\beta(z)$ изменяются в процессе распространения:

$$\Psi = \frac{r^2}{2} \beta(z) + \varphi(z), \quad (2.7)$$

где $\varphi(z)$ — набег фазы на оси пучка. Кривизна $\beta > 0$ соответствует сходящемуся фронту, $\beta < 0$ — расходящемуся, а $\beta = 0$, $R = \infty$ — плоскому. Следует напомнить, что при квазиоптиче-

ском описании, которым мы в данный момент пользуемся, сферическим и цилиндрическим волновым фронтам соответствует параболический закон изменения эйконала.

Решая уравнение для траектории лучей

$$\frac{dr}{dz} = \theta = r\beta(z), \quad (2.8)$$

приходим к выводу, что в безабберационном случае все лучи ведут себя подобным образом:

$$r = r_0 f(z), \quad f = \exp\left(\int_0^z \beta(z) dz\right). \quad (2.9)$$

Здесь r_0 — начальная координата луча. В соответствии с таким ходом лучей форма поперечного профиля пучка не искажается, меняется лишь ширина пучка. Действительно, решение уравнения переноса (2.3) с учетом (2.7) имеет автомодельный характер

$$A_0^2 = \frac{I_0^2 \left(\frac{r}{af(z)}\right)}{f^{1+m}(z)}, \quad (2.10)$$

где $F_0^2(r/a)$ — функция, задающая начальное распределение амплитуды поперек волнового пучка, a — начальная ширина пучка. Как видно из (2.10), величину $f(z)$ можно назвать безразмерной шириной пучка; она связана с кривизной фронта простым дифференциальным соотношением (см. (2.9))

$$\beta(z) = \frac{1}{f} \frac{df}{dz}. \quad (2.11)$$

Теперь вопрос заключается в том, при каких условиях может наблюдаться безабберационное распространение волнового пучка. В линейной среде, $\varepsilon_2 = 0$, уравнение для эйконала (2.2) отщепляется от уравнения переноса и из его решения в форме (2.7) можно найти

$$f(z) = 1 + \frac{z}{R_0}, \quad \beta(z) = \frac{1}{z + R_0}, \quad (2.12)$$

где R_0 — начальный радиус волнового фронта. При этом амплитудный профиль пучка $F_0^2(r/a)$ может быть произвольным; только при учете дифракции форма пучка сказывается на процессе его распространения, особенно вблизи каустик и фокальных точек.

В нелинейной среде, $\varepsilon_2 \neq 0$, безабберационное распространение пучка осуществляется не для произвольного профиля амплитуды, как это имеет место в линейной среде. (Напомним, что речь идет пока о приближении геометрической оптики, $k \rightarrow \infty$.) Если подставить в левую часть уравнения (2.2) выражение для эйконала (2.7),

соответствующее сферическому и цилиндрическому фазовым фронтам, то мы увидим, что левая часть будет содержать члены нулевого и второго порядка по координате r . Если речь идет о построении точного решения, то такие же члены по r должны входить в правую часть уравнения (2.2), где стоит интенсивность волны. Это означает, что безабберационное самовоздействие в кубично-нелинейной среде будет испытывать пучок с параболическим профилем интенсивности. Удерживая в F_0^2 (2.10) нулевой и квадратичный по r члены, находим

$$A_0^2(r, z) = \frac{E_0^2}{f^{1+m}(z)} \left[1 - \frac{2r^2}{a^2 f^2(z)} \right]. \quad (2.13)$$

Подставляя выражения для амплитуды (2.13) и эйконала (2.7) с учетом (2.11) в уравнение (2.2), приходим к следующему уравнению для безразмерной ширины пучка:

$$\frac{a^2 f}{dz^2} = - \frac{\text{sign } \epsilon_2}{R_{\text{нл}}^2 f^{2+m}(z)}, \quad (2.14)$$

где величина $R_{\text{нл}}$, равная

$$R_{\text{нл}} = a \sqrt{\frac{\epsilon_1}{2 |\epsilon_2| E_0^2}}, \quad (2.15)$$

характеризует «силу» нелинейной рефракции. Более ясный физический смысл величины $R_{\text{нл}}$ выяснится чуть позже.

Уравнению (2.14) можно дать следующую интерпретацию. Вторая производная $d^2 f/dz^2$ определяет, как видно из (2.9), кривизну лучей. В линейной среде, $\epsilon_2 = 0$, кривизна равна нулю и лучи являются прямыми линиями. В нелинейной среде, $\epsilon_2 \neq 0$, возникает нелинейная рефракция и лучи перестают быть прямыми: кривизна лучей определяется «силой» нелинейной рефракции, стоящей в правой части уравнения (2.14). Причем в среде с $\epsilon_2 > 0$ лучи отклоняются к оси пучка, где интенсивность больше (самофокусируются). Если же $\epsilon_2 < 0$, лучи изгибаются от оси к периферии (самодефокусируются). Отметим также, что сила нелинейной рефракции возрастает при сжатии пучка (концентрации поля) и уменьшается при расширении пучка; причем эта зависимость более резкая у трехмерного пучка ($m = 1$).

Проанализируем ход лучей в нелинейной среде для параболического пучка с плоским начальным волновым фронтом; граничные условия имеют вид

$$f(0) = 1 \quad \text{и} \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = \frac{1}{R_0} = 0. \quad (2.16)$$

Умножая обе части уравнения (2.14) на производную df/dz и интегрируя по z с учетом граничных условий (2.16), находим первый

интеграл

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = \frac{4\varepsilon_2 E_0^2}{(1+m)\varepsilon_0 a^2} \left(\frac{1}{f^{1+m}} - 1\right). \quad (2.17)$$

Рассмотрим отдельно самовоздействие трехмерных и двумерных пучков.

Для случая трехмерного осесимметричного пучка, $m = 1$, решение уравнения (2.17) дает следующую зависимость:

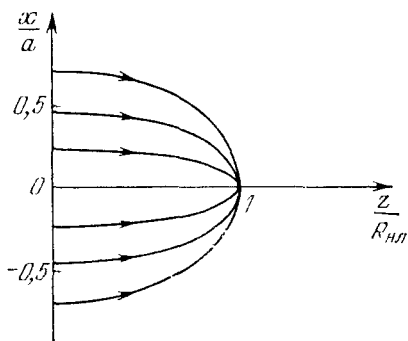
$$f^2(z) = 1 - (\text{sign } \varepsilon_2) \frac{z^2}{R_{нл}^2}. \quad (2.18)$$

В среде с $\varepsilon_2 > 0$ ширина пучка согласно (2.18) уменьшается, развивается самофокусировка (рис. 9.1, а). Нелинейный фокус, где ширина пучка обращается в нуль, расположен на расстоянии $R_{нл}$ от входа в среду. Таким образом, величина $R_{нл}$ (2.15) равна *фокальной длине толстой нелинейной линзы*, создаваемой в среде с $\varepsilon_2 > 0$ коллимированным трехмерным пучком ($m = 1, R_0 = \infty$) с параболическим профилем интенсивности (2.13). То обстоятельство, что кривизна лучей увеличивается по мере приближения к нелинейному фокусу, отражает лавинообразный характер самофокусировки.

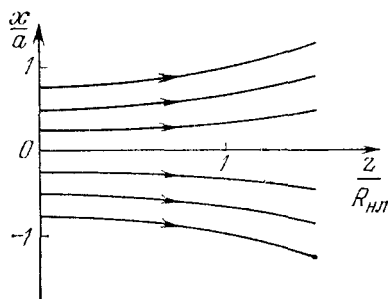
В среде с $\varepsilon_2 < 0$ ширина пучка увеличивается по мере его распространения — это явление *самодефокусировки* (рис. 9.1, б). В отличие от самофокусировки, с ростом пройденного расстояния «сила» нелинейной рефрак-

ции (см. (2.14)) при самодефокусировке ослабевает и лучи становятся все более прямыми. На больших длинах, $z \gg R_{нл}$, ширина пучка возрастает пропорционально расстоянию:

$$f = \frac{z}{R_{нл}}. \quad (2.19)$$



а)



б)

9.1. Траектории лучей при нелинейной рефракции пучка с параболическим профилем в случае самофокусировки (а) и самодефокусировки (б).

Это означает, что в области $z \gg R_{\text{нл}}$ нелинейная среда практически не оказывает влияния на ход лучей, так как амплитуда поля расфокусированного пучка становится малой. В итоге пучок приобретает нелинейную расходимость $\theta_{\text{нл}} = a \, df/dz$, равную конечной величине

$$\theta_{\text{нл}} = \frac{a}{R_{\text{нл}}} = \sqrt{\frac{2|\epsilon_2| E_0^2}{\epsilon_0}}, \quad (2.20)$$

т. е. квадрат нелинейной расходимости равен относительному изменению диэлектрической проницаемости среды на оси входного пучка.

В случае самовоздействия двумерного пучка, $m = 0$, после интегрирования (2.17) получаем более сложные неявные выражения для ширины пучка в произвольном сечении нелинейной среды.

Ширина самофокусирующегося пучка ($\epsilon_2 > 0$) описывается формулой

$$f(z) = \cos^2 \left[\sqrt{f(1-f)} - \frac{z}{R_{\text{нл}}} \right], \quad (2.21)$$

где величина $R_{\text{нл}}$ задается прежней формулой (2.15). Нелинейный фокус двумерного пучка, в котором $f = 0$, расположен несколько дальше, чем трехмерного: $z_{\text{ф}} = \frac{\pi}{2} R_{\text{нл}}$. Это и понятно: для двумерного пучка ($m = 0$) «сила» нелинейной рефракции нарастает менее стремительно, чем для трехмерного пучка ($m = 1$) (см. (2.14)).

Самодефокусировка двумерного пучка ($\epsilon_2 < 0$) описывается следующей формулой:

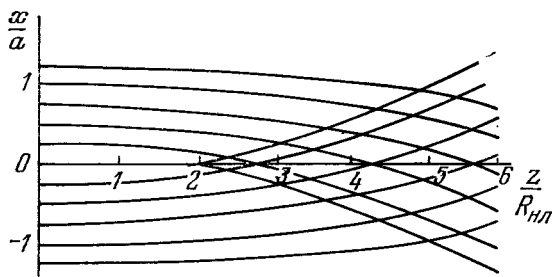
$$f = \text{ch}^2 \left[\sqrt{f(f-1)} - \frac{z}{R_{\text{нл}}} \right]. \quad (2.22)$$

Здесь «сила» нелинейной рефракции ослабевает более медленно, чем у трехмерного пучка, и на больших расстояниях $z \gg R_{\text{нл}}$ ширина двумерного пучка несколько больше, чем трехмерного (2.19):

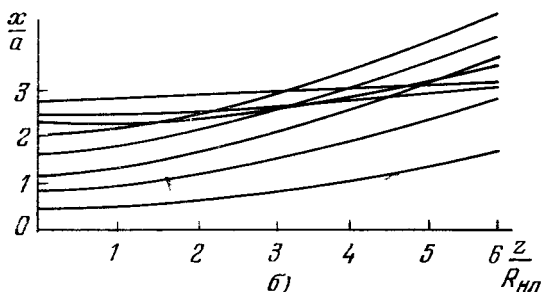
$$f = \frac{z}{R_{\text{нл}}} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{z}{2R_{\text{нл}}} \right). \quad (2.23)$$

Нелинейные aberrации волновых пучков. При распространении в нелинейной среде пучков с профилем интенсивности, отличным от параболического (2.13), возникают aberrации: различные лучи ведут себя по-разному, автомодельность решения отсутствует и профиль пучка искажается. Для двумерного пучка можно провести достаточно общее рассмотрение, позволяющее учесть в приближении нелинейной геометрической оптики aberrационные явления. Дело заключается в том, что в двумерном случае ($m = 0$) уравнения нелинейной геометрической оптики, записанные в форме (2.5) и (2.6), имеют гидродинамический аналог. Именно, эти уравнения при $m = 0$ формально аналогичны уравнениям, опи-

сывающим нестационарное, изоэнтропическое течение баротропной жидкости. Однако если для жидкости $\gamma < 0$, то для нелинейной среды возможны как $\gamma < 0$ (случай самодефокусировки, $\varepsilon_2 < 0$), так и $\gamma > 0$ (случай самофокусировки, $\varepsilon_2 > 0$). Из курсов гидродинамики известно, что систему уравнений (2.5) и (2.6) при $m = 0$ можно свести к линейной посредством преобразования годографа. Последнее дает возможность развить достаточно общую



а)



б)

9.2. Аберрационная картина самовоздействия двумерного пучка с колоколообразным профилем интенсивности при самофокусировке (а) и самодефокусировке (б).

методку анализа уравнений нелинейной геометрической оптики для двумерных пучков. С помощью такого подхода удается найти точное решение уравнений (2.5), (2.6) для пучка с начальным профилем интенсивности

$$J_0 \left(\frac{x}{a} \right) = E_0^2 \operatorname{ch}^{-2} \frac{x}{a}, \quad (2.24)$$

которое имеет неявный вид

$$\theta = - \frac{2\gamma z J}{a} \operatorname{th} \frac{x - \theta z}{a}, \quad (2.25)$$

$$J = \left(J_0 + \frac{\gamma z^2 J^2}{a^2} \right) \operatorname{ch}^{-2} \frac{x - \theta z}{a}. \quad (2.26)$$

Используя неявное решение (2.25), (2.26), можно на плоскости x, z нанести поле лучевых векторов, наклоненных к оси z на угол θ . Линии, которые в каждой точке касаются этих векторов, и будут траекториями лучей. Построенные таким способом лучи представлены на рис. 9.2.

Из рис. 9.2, *a*, который относится к среде с $\varepsilon_2 > 0$, следует, что при самофокусировке колоколообразного пучка (2.24), в отличие от рассмотренного выше случая волны с параболическим профилем интенсивности, возникают довольно сильные аберрации. Периферийные лучи пересекают ось z позже, чем приосевые. Нелинейный фокус расположен на оси пучка в плоскости $z_{\text{ф}} = 2R_{\text{нл}}$.

При самодефокусировке, $\varepsilon_2 < 0$, вследствие нелинейных аберраций образуется внешняя область пересечения лучей (рис. 9.2, *b*).

Аберрационная картина самофокусировки и самодефокусировки наиболее типична для реальных волновых пучков. Хотя для трехмерных пучков картину аберраций аналитически рассчитать весьма затруднительно, ясно, что на расстояниях порядка $z \gtrsim R_{\text{нл}}$, а иногда и раньше аберрации начинают сильно влиять на характер самовоздействия пучка. Нелинейные аберрации, как правило, уменьшают силу нелинейной рефракции, вследствие чего, например, темп нарастания поля вблизи нелинейного фокуса может замедлиться.

§ 3. Дифракция волн в нелинейных средах

Проанализируем теперь поведение волнового пучка в кубично-нелинейной среде в рамках полных квазиоптических уравнений (1.9) и (1.10), не отбрасывая в уравнении для эйконала (1.9) дифракционный член, пропорциональный квадрату длины волны. Иными словами, рассмотрим закономерности распространения пучка при одновременном действии дифракции и нелинейной рефракции.

Учет дифракционного члена в квазиоптических уравнениях значительно усложняет задачу нахождения точных аналитических решений. В принципе такие решения можно получить для двумерных пучков, применяя метод обратной задачи рассеяния. Однако изложение этого математически сложного аппарата выходит за рамки данного курса. К тому же общие решения, полученные этим методом, довольно громоздкие и не позволяют просто проследить за процессом распространения пучков на всех этапах.

В данном параграфе мы рассмотрим самовоздействие волновых пучков с учетом дифракции в безаберрационном приближении, которое широко применяется при решении различных задач подобного типа.

Пусть на вход нелинейной среды падает пучок с гауссовым профилем интенсивности и, для простоты, с плоским волновым

фронтом:

$$A_0^2(r, 0) = E_0^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{a^2}\right), \quad \Psi(r, 0) = 0. \quad (3.1)$$

По мере распространения пучка в нелинейной среде меняются его амплитудный и фазовый профили. Мы учтем эти изменения, полагая, что в первом приближении волновой фронт пучка можно считать сферическим ($m = 1$) или цилиндрическим ($m = 0$) с переменной кривизной (ср. с (2.7))

$$\Psi = \frac{r^2 \beta(z)'}{2} + \varphi(z). \quad (3.2)$$

Тогда, в соответствии с уравнением переноса (1.10), пучок сохраняет свою гауссову форму

$$A_0^2(r, z) = \frac{E_0^2}{f^{1+m}(z)} \exp\left[-\frac{2r^2}{a^2 f^2(z)}\right], \quad (3.3)$$

где $f(z)$ — безразмерная ширина пучка, связанная с кривизной фронта прежним соотношением (2.11).

Подставим выражения (3.2) и (3.3) в уравнение для эйконала (1.9), полагая $\varepsilon_{\text{нл}} = \varepsilon_2 A_0^2$. В правой части этого уравнения стоят две «силы»: нелинейной рефракции и дифракции. Дифракционная «сила» гауссова пучка (3.3) будет содержать только нулевые и квадратичные члены по поперечной координате r :

$$\frac{\Delta_{\perp} A_0}{k^2 A_0} = -\frac{4}{k^2 a^2 f^2} + \frac{4r^2}{k^2 a^4 f^4}. \quad (3.4)$$

Это отражает тот факт, что дифракция не искажает гауссовой формы пучка в линейной среде. Однако в нелинейной среде есть еще «сила» рефракции, $\varepsilon_2 A_0^2 / \varepsilon_0$. Очевидно, она будет содержать помимо нулевого и квадратичного по r членов еще и другие слагаемые более высокого порядка, наличие которых приводит к нелинейным абберациям. Так как мы пренебрегаем нелинейными абберациями, то учтем в разложении «силы» нелинейной рефракции по координате r вблизи оси пучка только первые два члена:

$$\frac{\varepsilon_2 A_0^2(r, z)}{\varepsilon_0} \approx \frac{\varepsilon_2 E_0^2}{\varepsilon_0 f^{1+m}} - \frac{2\varepsilon_2 E_0^2 r^2}{\varepsilon_0 a^2 f^{3+m}}. \quad (3.5)$$

В безабберационном приближении мы учитываем изменение кривизны фронта, предполагая, что сферичность и цилиндричность фронта не нарушается. Собирая в уравнении для эйконала (1.9) члены при r^2 , приходим к уравнению для ширины пучка

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{\text{sign } \varepsilon_2}{R_{\text{нл}}^2 f^{2+m}} + \frac{1}{R_{\text{д}}^2 f^3}. \quad (3.6)$$

Здесь $R_{\text{нл}}$ характеризует силу нелинейной рефракции и дается прежней формулой (2.15); $R_{\text{д}} = ka^2/2$ — дифракционная длина пучка, равная половине конфокального параметра, или длине зоны френелевской дифракции в линейной среде.

Первый интеграл уравнения (3.6) для пучка с начальным плоским фронтом ($f = 1$ и $df/dz = 0$ при $z = 0$) имеет вид:

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = \frac{2 \operatorname{sign} \varepsilon_2 (1 - f^{1+m})}{(1+m) R_{\text{нл}}^2 f^{1+m}} + \frac{f^2 - 1}{R_{\text{д}}^2 f^2}. \quad (3.7)$$

Теперь, в рамках общей волновой теории, поведение пучка зависит от соотношения сил нелинейной рефракции и дифракции. Причем в нелинейной среде с $\varepsilon_2 < 0$ нелинейная рефракция и дифракция действуют в одну сторону и совместно приводят к расфокусировке пучка. В среде с $\varepsilon_2 > 0$ нелинейная рефракция и дифракция противодействуют друг другу и здесь возможны различные режимы распространения. Рассмотрим, как и ранее, отдельно самовоздействие трехмерных ($m = 1$) и двумерных ($m = 0$) пучков. Для трехмерных осесимметричных пучков решение уравнения (3.7) имеет вид

$$f^2 = 1 + z^2 \left(\frac{1}{R_{\text{д}}^2} - \frac{\operatorname{sign} \varepsilon_2}{R_{\text{нл}}^2} \right). \quad (3.8)$$

Относительный вклад дифракции и рефракции определяется величиной $R_{\text{д}}^2/R_{\text{нл}}^2$, которую можно переписать в терминах мощности:

$$\frac{R_{\text{д}}^2}{R_{\text{нл}}^2} = \frac{P_0}{P_{\text{кр}}}, \quad (3.9)$$

где $P_0 = cn_0 E_0^2 a^2 / 16$ — полная мощность гауссова пучка, а $P_{\text{кр}}$ — критическая мощность, равная

$$P_{\text{кр}} = \frac{cn_0 \lambda^2}{32\pi^2 |\varepsilon_2|}. \quad (3.10)$$

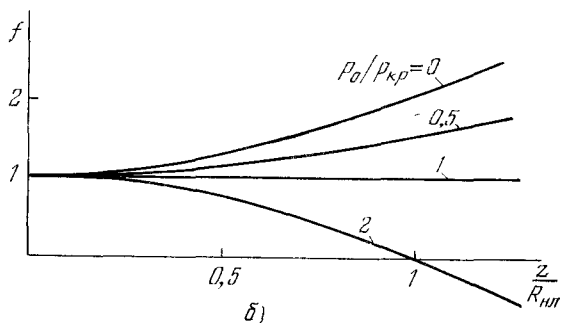
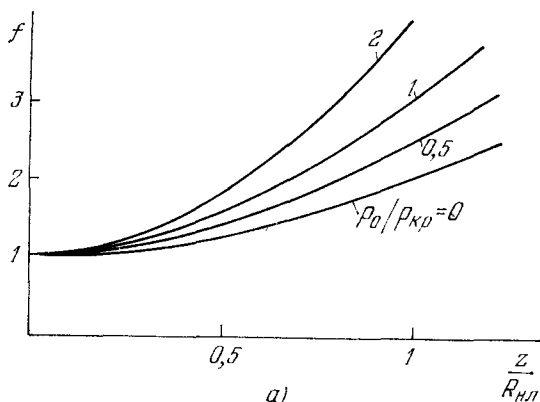
Используя соотношение (3.9), формулу (3.8) можно переписать так:

$$f^2 = 1 + \frac{z^2}{R_{\text{д}}^2} \left(1 - \operatorname{sign} \varepsilon_2 \frac{P_0}{P_{\text{кр}}} \right) = 1 + \frac{z^2}{R_{\text{нл}}^2} \left(\frac{P_{\text{кр}}}{P_0} - \operatorname{sign} \varepsilon_2 \right).$$

Рассмотрим сначала поведение пучка в дефокусирующей среде, $\varepsilon_2 < 0$. Здесь, как видно из (3.8), происходит расплывание пучка вследствие дифракции и рефракции (рис. 9.3, а). На больших расстояниях $z \gg R_{\text{нл}}$, $R_{\text{д}}$ пучок приобретает угловую расходимость:

$$\theta_{\text{нл}} = a \frac{df}{dz} = \theta_{\text{д}} \sqrt{1 + P_0/P_{\text{кр}}}, \quad (3.11)$$

где $\theta_d = 2/ka$ — дифракционная расходимость гауссова пучка в линейной среде. Видно, что при $P_0 \ll P_{кр}$ основную роль играет дифракция; если же $P_0 \gg P_{кр}$ — то нелинейная рефракция. При $P_0 = P_{кр}$ расходимость пучка увеличивается в $\sqrt{2}$ раз, а поперечное сечение — в 2 раза по сравнению со случаем линейной среды.



9.3. Зависимость безразмерной ширины гауссова пучка с различной мощностью от расстояния, пройденного в нелинейной среде при самодефокусировке (а) и самофокусировке (б).

В нелинейной фокусирующей среде, $\varepsilon_2 > 0$, можно выделить три различных режима распространения в зависимости от мощности пучка (рис. 9.3, б).

1. $P_0 \ll P_{кр}$, $R_{нл} \gg R_d$. Если мощность пучка меньше критической, то дифракция преобладает над нелинейной рефракцией и пучок расплывается. Однако скорость уширения уменьшается и расходимость пучка в френгоферовой зоне также уменьшается по сравнению с линейной средой: $\theta_{нл} = \theta_d \sqrt{1 - P_0/P_{кр}}$ (ср. со случаем дефокусировки (3.11)).

2. $P_0 = P_{кр}$, $R_{нл} = R_{д}$. Мощность пучка в точности равна критической, т. е. дифракция и нелинейная рефракция находятся в равновесии. В этом специальном случае ширина пучка не меняется с расстоянием, $f \equiv 1$, — имеет место волноводное распространение в нелинейной среде. Отметим, что критическая мощность нелинейного осесимметричного волновода (3.10) не зависит от поперечных размеров.

3. $P_0 > P_{кр}$, $R_{нл} < R_{д}$. Если мощность пучка превышает критическую, то нелинейная рефракция подавляет дифракцию и ширина пучка уменьшается — наступает самофокусировка. Ширина пучка обращается в нуль, $f \rightarrow 0$, на конечном расстоянии

$$z_{\phi} = R_{нл} \sqrt{1 - P_{кр}/P_0} \quad (3.12)$$

в точке, которую можно назвать *нелинейным фокусом*. Поле на оси пучка, $A_0(0, z) = E_0/f(z)$, стремится к бесконечности при приближении к нелинейному фокусу (возникает коллапс); причем в отличие от линейной среды дифракция не способна одна противоборствовать образованию коллапса в кубично-нелинейной среде. Учитывая, что при самофокусировке $f^2 = 1 - z^2/z_{\phi}^2$, можно указать закон изменения поля вблизи нелинейного фокуса:

$$A_0 \sim E_0/\sqrt{1 - z/z_{\phi}}.$$

Для более корректного описания нелинейной фокальной области надо, вообще говоря, усложнить модель среды (учесть вынужденные рассеяния, нелинейное поглощение и т. д.) и уточнить квазиоптическое скалярное приближение (вблизи нелинейного фокуса лучи имеют очень большие наклоны, что выходит за рамки предположения).

Для двумерных пучков, $m = 0$, общая классификация различных режимов самовоздействия такая же, как и в предыдущем случае осесимметричных пучков. Однако здесь есть и существенные отличия. Во-первых, для двумерного гауссова пучка имеет смысл погонная мощность $P_{0, пог} = cn_0 E_0^2 a / 8\sqrt{2\pi}$ и в соответствии с этим вводится погонная критическая мощность

$$P_{кр, пог} = \frac{cn_0 \lambda^2}{16\pi^3 \sqrt{2\pi} \epsilon_2 a}, \quad (3.13)$$

которая обратно пропорциональна ширине пучка; при этом $R_{д}^2/R_{нл}^2 = P_{0, пог}/P_{кр, пог}$. Поэтому одномерный в поперечном сечении нелинейный волновод, возникающий при $P_{0, пог} = P_{кр, пог}$, имеет поперечный размер, обратно пропорциональный его мощности: $a_{в} \sim c\lambda^2/\epsilon_2 P_{0, пог}$. Во-вторых, сила нелинейной рефракции, как видно из (3.6), зависит от ширины пучка f менее резко, чем сила дифракции. Вследствие этого при самофокусировке двумерного пучка, когда $P_{0, пог} > P_{кр, пог}$, коллапс в нелинейном фокусе

не возникает: здесь дифракция ограничивает размеры фокального пятна. Действительно, полагая в (3.7) $df/dz = 0$, находим

$$f_{\min}(z_{\Phi}) = \frac{1}{2P_{0, \text{пог}}/P_{\text{кр, пог}} - 1}. \quad (3.14)$$

После прохождения нелинейного фокуса пучок расширяется, ширина пучка достигает первоначального значения, $f_{\max} = 1$ и процесс повторяется снова. Таким образом, волноводное распространение наступает и при $P_{0, \text{пог}} > P_{\text{кр, пог}}$, только волновод в этом случае является осциллирующим.

§ 4. Волноводное распространение пучков

Как мы видели выше (см. § 3), при мощности пучка, равной критической, в среде с $\varepsilon_2 > 0$ может наступить волноводное распространение, когда плоский фазовый фронт и профиль интенсивности пучка не меняются с расстоянием. Этот режим можно проанализировать более строго, не ограничиваясь безаберрационным приближением. Волноводному распространению соответствует следующая форма волнового поля:

$$A = A_{\text{в}}(r) \exp(-i\Gamma z), \quad (4.1)$$

где Γ — константа, характеризующая добавку к волновому вектору в линейной среде. Подставляя (4.1) в квазиоптические уравнения (1.5) или (1.9) и (1.10), находим

$$\frac{d^2 A_{\text{в}}(r)}{dr^2} + \frac{m}{r} \frac{dA_{\text{в}}(r)}{dr} - 2\Gamma k A_{\text{в}} + \frac{\varepsilon_2 k^2}{\varepsilon_0} A_{\text{в}}^3 = 0. \quad (4.2)$$

Граничные условия для поперечных мод нелинейного волновода, локализованных в пространстве, имеют вид

$$\left. \frac{dA_{\text{в}}}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad A_{\text{в}} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.2) можно привести к безразмерному виду, вводя нормировку амплитуды и ширины пучка:

$$A_{\text{в}} = E_{\text{в}} \bar{A}_{\text{в}} \left(\frac{r}{a_{\text{в}}} \right). \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.2) и приравнявая все коэффициенты единице, получаем

$$\frac{d^2 \bar{A}_{\text{в}}}{d\bar{r}^2} + \frac{m}{\bar{r}} \frac{d\bar{A}_{\text{в}}}{d\bar{r}} - \bar{A}_{\text{в}} + \bar{A}_{\text{в}}^3 = 0, \quad (4.5)$$

при этом константа распространения, ширина пучка и поле на оси связаны между собой соотношениями

$$\Gamma = \frac{1}{2ka_B^2} = \frac{\varepsilon_2 k E_B^2}{2\varepsilon_0}. \quad (4.6)$$

Рассмотрим свойства нелинейных волноводов, двумерных ($m = 0$) и осесимметричных ($m = 1$).

В случае двумерного волновода имеется единственное решение уравнения (4.5), удовлетворяющее граничным условиям (4.3), а именно

$$\bar{A}_B = \frac{\sqrt{2}}{\text{ch}(x/a_B)}. \quad (4.7)$$

Таким образом, существует только одна поперечная мода нелинейного двумерного волновода, несущая критическую погонную мощность $P_{\text{кр, пог}}^B \sim \int \bar{A}_B^2 dx$, равную

$$P_{\text{кр, пог}}^B = \frac{cn_0 \lambda^2}{8\pi^3 \varepsilon_2 a_B}. \quad (4.8)$$

С точностью до численного коэффициента эта величина совпадает с выражением (3.13) для критической мощности, полученным в безабберационном приближении.

Для осесимметричных пучков ($m = 1$) решения уравнения (4.5) удается найти только численными методами. Математический анализ этой задачи показывает, что при $m = 1$ существует бесконечный набор решений, у которых величина амплитуды на оси пучка $\bar{A}_B(0)$ и полная мощность принимают вполне определенные дискретные значения. Иными словами, осесимметричный нелинейный волновод имеет бесконечный дискретный спектр собственных мод.

На основной моде амплитуда монотонно уменьшается при удалении от оси пучка, а на высших модах N -го порядка радиальная зависимость амплитуды имеет характер затухающих осцилляций, причем число нулей, $\bar{A}_{B,N}(r) = 0$, равно номеру моды N .

Таким образом, картина распределения интенсивности в поперечном сечении нелинейного осесимметричного волновода имеет в общем случае кольцевую структуру.

Критическая мощность самоканализирующегося пучка на основной моде равна

$$P_{\text{кр}}^B = \frac{5,763 cn_0 \lambda_0^2}{16\pi^3 \varepsilon_2}. \quad (4.9)$$

Эта величина превышает в 3,7 раза критическую мощность (3.10), вычисленную в безабберационном приближении. Последнее обстоятельство отражает тот факт, что в безабберационном прибли-

жении, как было показано ранее, величина «силы» нелинейной рефракции завьшается, а критическая мощность, при которой наступает равновесие «сил» нелинейной рефракции и дифракции, соответственно занижается. С ростом номера моды амплитуда на оси пучка $\tilde{A}_{v,N}(0)$ и критическая мощность $P_{кр,N}^p$ неограниченно увеличиваются.

Основные качественные закономерности явлений самофокусировки и волноводного распространения пучков в нелинейных средах можно исследовать с более общих позиций. Обратимся к исходному в квазиоптической теории параболическому уравнению (4.5) для амплитуды волнового пучка, распространяющегося в среде с нелинейной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_{нл}(|A|^2)$. Покажем, что это уравнение обладает интегралами движения, не зависящими от продольной координаты z .

Умножим уравнение (4.5) на A^* и вычтем комплексно-сопряженное выражение; в результате получим ($\epsilon_{нл}$ — действительная величина)

$$2ik \frac{\partial |A|^2}{\partial z} = (A^* \Delta_{\perp} A - A \Delta_{\perp} A^*). \quad (4.10)$$

Проинтегрируем (4.10) по поперечному сечению, учитывая, что $A(x, y = \pm\infty) = 0$. Тогда интеграл от правой части дает нуль и мы приходим к закону сохранения полной энергии

$$\frac{dI_1}{dz} = 0, \quad I_1 = \iint |A|^2 dx dy. \quad (4.11)$$

В недиссипативной среде, как и следовало ожидать, полная мощность пучка сохраняется.

Найдем теперь другой весьма важный интеграл движения, для чего умножим уравнение (4.5) на $\partial A^*/\partial z$ и сложим с комплексно-сопряженным выражением. Это дает выражение

$$\frac{\partial A^*}{\partial z} \Delta_{\perp} A + \frac{\partial A}{\partial z} \Delta_{\perp} A^* + \epsilon_{нл}(|A|^2) k_0^2 \frac{\partial |A|^2}{\partial z} = 0. \quad (4.12)$$

Снова интегрируя по поперечному сечению, находим второй закон сохранения

$$\frac{dI_2}{dz} = 0, \quad I_2 = \iint \left\{ \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial A}{\partial y} \right|^2 - k_0^2 F_{нл}(|A|^2) \right\} dx dy, \quad (4.13)$$

где введена потенциальная функция

$$F_{нл} = \int_0^{|A|^2} \epsilon_{нл}(\xi) d\xi. \quad (4.14)$$

Для кубично-нелинейной среды с $\epsilon_{нл} = \epsilon_2 |A|^2$ имеем

$$F_{нл} = \epsilon_2 |A|^4 / 2. \quad (4.15)$$

Таким образом, пучок сохраняет в процессе распространения не только полную мощность I_1 , но и величину I_2 . Интеграл I_2 учитывает одновременно нелинейные и дифракционные эффекты.

В линейной среде, $F_{\text{нл}} = 0$, интеграл движения I_2 , как видно из (4.13), всегда положителен. В нелинейной среде в интеграле I_2 появляется дополнительный член, который может быть как положительным в дефокусирующей среде, так и отрицательным в самофокусирующей среде. В последнем случае при достаточно большой мощности пучка интеграл I_2 может быть отрицательным. Так как интеграл I_2 сохраняется при распространении волны, то его нелинейная часть, несущая отрицательную величину, не может стремиться к нулю. Это означает, что в самофокусирующей среде, $\epsilon_{\text{нл}} > 0$, пучок с $I_2 < 0$ не может перейти в расходящуюся волну, амплитуда которой стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. Таким образом, при выполнении условия $I_2 < 0$ пучок испытывает в нелинейной среде волноводное распространение. При произвольных начальных условиях нелинейный волновод будет нерегулярным: его поперечное сечение непрерывно искажается, осциллируя около некоторого среднего сечения.

Пользуясь интегралом движения I_2 , можно заново вывести в безабберрационном приближении уравнение для ширины гауссова пучка. Подставим в (4.13) с учетом (4.15) автомодельное представление комплексной амплитуды гауссова пучка со сферическим фронтом

$$A = \frac{E_0}{f(z)} \exp \left[-\frac{r^2}{a^2 f^2} - \frac{ikr^2}{2f} \frac{df}{dz} \right]. \quad (4.16)$$

После интегрирования получаем в осесимметричном случае уравнение

$$\left(\frac{df}{dz} \right)^2 = \frac{\text{sign } \epsilon_2 \cdot (1 - f^2)}{4R_{\text{нл}}^2 f^2} + \frac{f^2 - 1}{R_{\text{д}}^2 f^2}, \quad (4.17)$$

где $R_{\text{д}}$ и $R_{\text{нл}}$ — дифракционная и нелинейная длины, введенные ранее. Сравнение последнего уравнения с уравнением (3.7), полученным непосредственно из уравнения эйконала (1.9), показывает, что при усредненном описании безабберрационной самофокусировки с помощью интеграла движения «сила» нелинейной рефракции уменьшается в 4 раза. Соответственно этому критическая мощность возрастает в 4 раза по сравнению с (3.10).

Уравнение (4.17) в количественном отношении лучше описывает самофокусировку, чем (3.7). Волноводному распространению в (4.17) соответствует $I_2 = 0$. Длина самофокусировки, равная $2R_{\text{нл}}$, менее точно согласуется с результатами численного решения уравнения (1.5).

Интерес к изучению волноводных режимов распространения в нелинейной среде в значительной степени связан также с тем, что

нелинейные волноводы могут формироваться в результате распад-ной неустойчивости. В гл. V мы рассмотрели распадную неустойчивость волн в среде с квадратичной нелинейностью, когда волна частоты ω_3 отдает почти полностью свою энергию двум другим волнам меньших частот: $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Аналогичный процесс может наблюдаться в среде с кубичной нелинейностью, только здесь другое соотношение частот: $2\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, и, в частности, частоты всех волн (слабых и сильных) могут быть одинаковыми, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$.

Рассмотрим на основе уравнения (1.5) простейшую задачу об устойчивости распространения интенсивной плоской волны в среде с кубичной нелинейностью $\epsilon_{нл} = \epsilon_2 |A|^2$. Плоская волна амплитуды E_0 распространяется в нелинейной среде с другой фазовой скоростью, чем в линейной:

$$A_{пл} = E_0 \exp\left(-\frac{ik\epsilon_2 E_0^2 z}{2\epsilon_0}\right). \quad (4.18)$$

Наложим на плоскую волну малые пространственные возмущения

$$A = (E_0 + \bar{A}(x, y, z)) \exp\left(-\frac{ik\epsilon_2 E_0^2 z}{2\epsilon_0}\right), \quad (4.19)$$

причем $|\bar{A}| \ll E_0$. Чтобы проследить за развитием возмущений, подставим (4.19) в уравнение (1.5). Оставляя только линейные члены по амплитуде возмущения, получаем дифференциальное уравнение

$$2ik \frac{\partial \bar{A}}{\partial z} = \Delta_{\perp} \bar{A} + \frac{k^2 \epsilon_2 E_0^2}{\epsilon_0} (\bar{A} + \bar{A}^*). \quad (4.20)$$

Для анализа устойчивости распространения плоской волны достаточно проследить за поведением отдельных пространственных фурье-компонент, на которые можно разложить возмущения

$$\bar{A} = \bar{E} e^{\Gamma z} \cos \frac{x}{a_1} \cos \frac{y}{a_2}. \quad (4.21)$$

Подставляя (4.21) в (4.20), находим из условия нетривиальности решения системы двух алгебраических уравнений для \bar{E} и \bar{E}^* выражение для коэффициента, входящего в экспоненту (4.21),

$$\Gamma = \pm \frac{a_1^2 + a_2^2}{2ka_1^2 a_2^2} \sqrt{-1 + \frac{2k^2 \epsilon_2 E_0^2 a_1^2 a_2^2}{\epsilon_0 (a_1^2 + a_2^2)}}. \quad (4.22)$$

Из (4.22) следует, что при $\epsilon_2 < 0$ коэффициент Γ является чисто мнимой величиной. Это означает, что в дефокусирующей среде возмущения не нарастают, т. е. плоская волна устойчива.

В среде с $\varepsilon_2 > 0$ при выполнении порогового условия

$$E_0^2 > E_{\text{кр}}^2 = \frac{\lambda_0^2 (a_1^2 + a_2^2)}{8\pi^2 \varepsilon_2 a_1^2 a_2^2} \quad (4.23)$$

коэффициент Γ становится действительной величиной и решение, отвечающее $\Gamma > 0$, экспоненциально нарастает с расстоянием. При этом в каждую область возмущения (4.21) с поперечными размерами λa_1 и λa_2 захватывается мощность

$$\bar{P}_{\text{кр}} = \frac{cn_0 \lambda_0^2}{64\pi^3 \varepsilon_2} \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right). \quad (4.24)$$

Эта мощность по порядку величины сравнима с критической мощностью самоканализирующегося пучка: ср. (4.24) с (3.10) при $a_1 = a_2$ и (3.13) при $a_2 \rightarrow \infty$. Таким образом, в среде с $\varepsilon_2 > 0$ плоская волна неустойчива: она разбивается на отдельные самофокусирующиеся пучки, несущие мощность порядка критической.

Среди всевозможных пространственных возмущений существуют такие, для которых инкремент Γ наибольший. Дифференцируя выражение для Γ (4.22) по a_1 и a_2 , находим, что оптимальный масштаб поперечной модуляции плоской волны

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{1 + a_1^2/a_2^2}} \right)_{\text{опт}} = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2 E_0^2}}, \quad (4.25)$$

а максимум инкремента

$$\Gamma_{\text{опт}} = \frac{k\varepsilon_2 E_0^2}{2\varepsilon_0}. \quad (4.26)$$

Обратная величина инкремента Γ^{-1} характеризует порядок длины самофокусировки. Возмущения с поперечным размером (4.25) формируются быстрее других на длине

$$z_{\text{ф, опт}} = \frac{\lambda \varepsilon_0}{\pi \varepsilon_2 E_0^2}. \quad (4.27)$$

В наиболее быстро самофокусирующуюся нить захватывается мощность $P_{\text{опт}} = cn_0 \lambda_0^2 / (16\pi \varepsilon_2)$ для двумерных возмущений, $a_1 = a_2$, и погонная мощность $P_{\text{опт, пог}} = \frac{c\lambda_0 E_0}{16\pi^2} \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_2}$ для одномерных возмущений, $a_2 \rightarrow \infty$.

Распадная неустойчивость в среде с $\varepsilon_2 > 0$ проявляется не только у плоской волны, но и у ограниченных пучков с мощностью $P_0 \gg P_{\text{кр}}$. Здесь происходит конкуренция самофокусировки пучка как целого на длине $R_{\text{нл}} = a\sqrt{\varepsilon_0/2\varepsilon_2 E_0^2}$ и процесса распада пучка на отдельные нити. Однако если профиль пучка достаточно гладкий (в его пространственном спектре отсутствуют компоненты

с масштабом порядка оптимального), то неустойчивость пучка не проявляется на длине самофокусировки $R_{\text{нл}}$.

В заключение этого параграфа отметим, что во многих лазерных экспериментах амплитуда электромагнитного излучения обычно меняется во времени, $E_0(t)$. Если ограничиться первым приближением теории дисперсии (см. гл. III), то вместо стационарного уравнения (1.5) поведение амплитуды пучка A будет описываться уравнением

$$2ik \left(\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \Delta_{\perp} A + k_0^2 \varepsilon_2 (|A|^2) A(x, y, z, t), \quad (4.28)$$

где u — групповая скорость. Введем вместо времени t сопровождающую координату

$$\tau = t - z/u. \quad (4.29)$$

Тогда уравнение (4.28) примет вид

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \Delta_{\perp} A + k_0^2 \varepsilon_2 (|A|^2) A(x, y, z, \tau), \quad (4.30)$$

совершенно аналогичный уравнению (1.5), только теперь в уравнение (4.30) входит время через параметр τ . Поэтому для анализа квазистационарной самофокусировки и дефокусировки достаточно во всех выражениях и формулах этого параграфа заменить E_0 на $E_0(\tau)$. Например, длина самофокусировки (2.15) будет меняться во времени, следя за изменением огибающей импульса. Такие бегущие фокальные точки прочерчивают в нелинейной среде треки, весьма похожие на волноводные каналы.

§ 5. Самовоздействие волновых пакетов в диспергирующей среде

Рассмотрим распространение плоских волновых пакетов с одновременным учетом эффектов самовоздействия и дисперсионного расплывания. В среде с нелинейным показателем преломления $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{\text{нл}}(|A|^2)$ параболическое уравнение для медленно изменяющейся амплитуды волнового пакета, отвечающее второму приближению в теории дисперсии (см. гл. III), имеет вид

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = -k \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \frac{k^2 \varepsilon_{\text{нл}}(|A|^2)}{\varepsilon_0} A(z, \tau). \quad (5.1)$$

Если ввести новые переменные

$$\tilde{z} = -\text{sign} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right) \cdot z, \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{k \left| \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|}}, \quad \varepsilon_{\text{нл}} = -\text{sign} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right) \cdot \varepsilon_{\text{нл}}, \quad (5.2)$$

то уравнение (5.1) можно записать следующим образом:

$$2ik \frac{\partial A}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{\tau}^2} + \frac{k^2 \tilde{\epsilon}_{\text{нл}} (|A|^2)}{\epsilon_0} A(\tilde{z}, \tilde{\tau}). \quad (5.3)$$

Сравнение уравнения (5.3) с уравнением (4.5), описывающим стационарное самовоздействие волнового пучка, показывает, что между поведением плоского волнового пакета и пространственной самофокусировкой или дефокусировкой двумерного пучка ($m = 0$) имеется математическая аналогия. В силу математической идентичности уравнений (4.5) и (5.3) при анализе закономерностей нелинейного распространения волновых пакетов остаются в силе все выкладки и соответствующие выводы § 1—5 при формальной замене величин

$$z \rightarrow \tilde{z}, \quad x \rightarrow \tilde{\tau}, \quad \epsilon_{\text{нл}} \rightarrow \tilde{\epsilon}_{\text{нл}}, \quad a \rightarrow \frac{T}{\sqrt{k |\partial^2 k / \partial \omega^2|}}. \quad (5.4)$$

Единственное существенное отличие заключается в том, что если пространственная самофокусировка пучков происходит в среде с $\epsilon_2 > 0$, то самосжатие волновых пакетов может наблюдаться в среде с $\tilde{\epsilon}_2 > 0$, т. е. при $\epsilon_2 \partial^2 k / \partial \omega^2 < 0$, или $\epsilon_2 \partial u / \partial \omega > 0$. Напротив, нелинейное распыление импульсов (аналог дефокусировки пучков в среде с $\epsilon_2 < 0$) развивается в среде с $\tilde{\epsilon}_{\text{нл}} < 0$, или $\epsilon_2 \partial u / \partial \omega < 0$. Этот вывод следует, в частности, из анализа интегралов движения волновых пакетов в нелинейной среде.

Используя связь переменных величин (5.2), можно сразу написать интегралы движения по аналогии с (4.11) и (4.13):

$$I_1 = \int |A|^2 d\tau, \quad (5.5)$$

$$I_2 = \int \left\{ \left| \frac{\partial A}{\partial \tau} \right|^2 + \frac{k_0^2}{k (\partial^2 k / \partial \omega^2)} F_{\text{нл}} (|A|^2) \right\} d\tau. \quad (5.6)$$

Теперь при $I_2 > 0$ происходит дисперсионное и нелинейное распыление импульса — декомпрессия волнового пакета, а при $I_2 < 0$ дисперсионное распыление подавляется эффектом самосжатия импульса — образуется солитонное состояние. Условие $I_2 < 0$, как видно из (5.6), можно достичь только в среде с $\epsilon_2 \partial^2 k / \partial \omega^2 < 0$.

Стационарный солитон вида $A = \exp(i\Gamma z) A_c(\tau)$ (аналог двумерного волновода) имеет структуру типа (4.7), а именно

$$A_c = \sqrt{2} E_c \text{ch}^{-1}(\tau/T_c) \quad (5.7)$$

при наличии соотношений между параметрами солитона

$$\Gamma = \frac{-\partial^2 k / \partial \omega^2}{2T_c^2} = \frac{k\epsilon_2 E_c^2}{2\epsilon_0}. \quad (5.8)$$

Солитон (5.7) обладает энергией (ср. с (4.8))

$$W_{\text{кр}} = -\frac{c\varepsilon_0\lambda_0}{4\pi^2\varepsilon_2 T_c} \frac{\partial^2 k / \partial \omega^2}{}, \quad (5.9)$$

которая обратно пропорциональна его длительности.

При описании нелинейного распространения волнового пакета в предположении сохранения формы огибающей можно воспользоваться результатами безаберрационной самофокусировки двумерных пучков. Автомодельное представление гауссова импульса переменной длительности с квадратичным изменением фазы по аналогии с (4.16) или (3.2) и (3.3) записывается так:

$$A = \frac{E_0}{\sqrt{f(z)}} \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{T^2 f^2} - \frac{i\tau^2 (df/dz)}{2(\partial^2 k / \partial \omega^2) f} \right\}. \quad (5.10)$$

Относительное изменение длительности импульса $f(z) = T(z)/T$ в кубично-нелинейной среде описывается уравнением типа (4.17):

$$\left(\frac{df}{dz} \right)^2 = \frac{\text{sign}(\tilde{\varepsilon}_2) (1-f)}{R_{\text{нл}, T}^2 f} + \frac{f^2 - 1}{L_p^2 f^2}, \quad (5.11)$$

где нелинейная длина

$$R_{\text{нл}, T} = T \sqrt{\left| \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_2 E_0^2 k (\partial^2 k / \partial \omega^2)} \right|}, \quad (5.12)$$

а длина дисперсионного расплывания (см. гл. III)

$$L_p = \frac{T^2}{2 |\partial^2 k / \partial \omega^2|}. \quad (5.13)$$

При условии $R_{\text{нл}} \ll L_p$ или $W_0 \gg W_{\text{кр}}$ волновой пакет испытывает на длине $z \approx R_{\text{нл}, T}$ самосжатие, если $\varepsilon_2 > 0$, или нелинейное расплывание, когда $\varepsilon_2 < 0$. При этом, очевидно, импульс приобретает дополнительную фазовую модуляцию.

В среде с $\tilde{\varepsilon}_2 > 0$ волновой пакет неустойчив: он может разбиться на отдельные сгустки энергии — солитоны, аналогично тому, как волновой пучок разбивается в самофокусирующей среде с $\varepsilon_2 > 0$ на волноводные нити. Наиболее быстро, на длинах порядка $z_{\text{ф, опт}}$ (4.27), нарастают возмущения с периодом модуляции

$$T_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{-\varepsilon_0 k}{\varepsilon_2 E_0^2 (\partial^2 k / \partial \omega^2)}}. \quad (5.14)$$

В результате распадной неустойчивости волновой пакет с энергией $W_0 \gg W_{\text{кр}}$ разбивается на солитоны, каждый из которых несет энергию

$$W_c = \frac{cn_0 E_0}{8\pi} \sqrt{\frac{-\varepsilon_0 k}{\varepsilon_2 (\partial^2 k / \partial \omega^2)}}. \quad (5.15)$$

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРИСУТСТВИИ НАПРАВЛЯЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Простейшими волнами, которые могут распространяться в однородных средах, являются плоские волны. Как было показано в гл. VII и VIII, в неоднородных средах фронт волны искривляется. Если распространение электромагнитных волн происходит вблизи каких-либо металлических или диэлектрических поверхностей (двухпроводных или однопроводных линий, диэлектрических пластин или стержней), то структура их очень сильно отличается от структуры плоских волн: волны распространяются вдоль поверхности, и у самой поверхности поле оказывается максимальным. Поверхность определяет направление распространения волн.

Математически задача о нахождении поля электромагнитной волны при гармонической зависимости от времени в этих случаях сводится к нахождению решения векторного уравнения Гельмгольца

$$\Delta E + k^2 E = 0$$

при заданных граничных условиях. Векторное уравнение Гельмгольца всегда можно заменить системой трех скалярных уравнений для прямоугольных компонент вектора E . Но не всегда удается подобрать такую систему координат, чтобы можно было построить решение этой системы уравнений, удовлетворяющее граничным условиям. Известно 11 различных систем криволинейных координат, в которых можно записать решение трехмерного скалярного уравнения Гельмгольца, однако полные решения векторного уравнения известны лишь для некоторых систем цилиндрических координат и для сферической системы координат. В таких системах координат электромагнитное поле может быть представлено в виде суммы двух полей, каждое из которых определяется через одну скалярную функцию, удовлетворяющую скалярному уравнению Гельмгольца.

§ 1. Электрический и магнитный векторы Герца

Если источники электромагнитного поля имеют осевую симметрию (например, электромагнитное поле возбуждается линейными или круговыми токами) или распространение волн происходит вблизи направляющих поверхностей, имеющих вид цилин-

дрических поверхностей, то удобно строить решение векторного уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат. При этом векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} можно выразить через электрический Π^e и магнитный Π^m векторы Герца, каждый из которых в этом случае имеет лишь одну отличную от нуля компоненту, совпадающую с осью цилиндрической системы координат.

Определим векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} через вектор Π^e по формулам

$$\mathbf{E} = k_0^2 \varepsilon \mu \Pi^e + \text{grad div } \Pi^e, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{H} = -ik_0 \varepsilon \text{rot } \Pi^e. \quad (1.2)$$

Легко убедиться, что определенные таким образом векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= -ik_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= ik_0 \mu \mathbf{H}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

если функция Π^e удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Pi^e + k_0^2 \varepsilon \mu \Pi^e = 0. \quad (1.4)$$

Введенный при помощи формул (1.1) и (1.2) электрический вектор Герца пропорционален векторному потенциалу \mathbf{A} :

$$\Pi^e = -\frac{i}{k_0^2 \varepsilon \mu} \mathbf{A}.$$

Уравнения Максвелла (1.3) симметричны относительно векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , если заменить ε на μ и i на $-i$. Через электрический вектор Герца Π^e векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются несимметричным образом.

Можно определить векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} через Π^m по формулам

$$\mathbf{E} = ik_0 \mu \text{rot } \Pi^m, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{H} = k_0^2 \varepsilon \mu \Pi^m + \text{grad div } \Pi^m. \quad (1.6)$$

Вектор Π^m также удовлетворяет уравнению Гельмгольца.

Можно выразить \mathbf{E} и \mathbf{H} одновременно через векторы Π^e и Π^m по формулам, которые получаются при сложении правых частей формул (1.1), (1.5) и (1.2), (1.6). Учитывая, что Π^e и Π^m удовлетворяет уравнению (1.4), получим

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \Pi^e + ik_0 \mu \text{rot } \Pi^m, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{H} = \text{rot rot } \Pi^m - ik_0 \varepsilon \text{rot } \Pi^e. \quad (1.8)$$

Выражения \mathbf{E} и \mathbf{H} через Π^e и Π^m симметричны. Поскольку в цилиндрической системе координат векторы Герца Π^e и Π^m имеют лишь по одной отличной от нуля компоненте, формулы (1.7) и (1.8) позволяют определить все компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} через две скалярные волновые функции, каждая из которых удовлетворяет однородному скалярному уравнению Гельмгольца.

§ 2. Цилиндрические волны

Напишем решение скалярного уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат u_1, u_2, z . Ось z является осью цилиндрической системы. Записывая оператор Лапласа в произвольной цилиндрической системе координат, получим следующее уравнение для функции $\Pi_z^e(u_1, u_2, z)$:

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial u_2} \right) \right\} + \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z^e = 0, \quad (2.1)$$

где $k^2 = k_0^2 \varepsilon \mu$, h_1, h_2 — коэффициенты Ламэ данной цилиндрической системы координат. Аналогичное уравнение получается и для Π_z^m . Решение уравнения (2.1) имеет вид

$$\Pi_z^e(u_1, u_2, z) = \Pi^e(u_1, u_2) e^{ihz}, \quad (2.2)$$

где функция $\Pi^e(u_1, u_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \Pi^e}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi^e}{\partial u_2} \right) \right\} + (k^2 - h^2) \Pi^e = 0, \quad (2.3)$$

h характеризует периодичность поля вдоль оси цилиндрической системы координат и называется *продольным волновым числом*. Уравнение (2.3) определяет зависимость комплексной амплитуды $\Pi^e(u_1, u_2)$ от поперечных координат.

Рассмотрим решение уравнения (2.3) в круговой цилиндрической системе координат: r, φ, z . В этом случае $h_1 = 1$, $h_2 = r$ и (2.3) имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi^e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial \varphi^2} + (k^2 - h^2) \Pi^e = 0. \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.4) может быть записано в виде

$$\Pi^e(r, \varphi) = f_1(r) f_2(\varphi), \quad (2.5)$$

где функция $f_2(\varphi)$ есть решение уравнения

$$\frac{d^2 f_2}{d\varphi^2} + p^2 f_2 = 0, \quad (2.6)$$

а $f_1(r)$ — удовлетворяет уравнению Бесселя

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df_1}{dr} \right) + [(k^2 - h^2)r^2 - p^2] f_1 = 0. \quad (2.7)$$

Таким образом, $f_2(\varphi) = e^{\pm ip\varphi}$, а $f_1(r) = Z_p(r \sqrt{k^2 - h^2})$, где $Z_p(r \sqrt{k^2 - h^2})$ — цилиндрическая функция порядка p .

Частное решение уравнения (2.1) в круговой цилиндрической системе координат может быть записано в виде

$$\Pi_z^e(r, \varphi, z) = e^{ip\varphi} Z_p(r \sqrt{k^2 - h^2}) e^{ihz}. \quad (2.8)$$

Выбор параметра p и цилиндрической функции $Z_p(\rho)$ определяется условиями задачи. Если область пространства по φ не ограничена, то из условия однозначности решения следует, что p может принимать только целые значения

$$p = 0, \pm 1, \pm \dots \pm n.$$

Вид цилиндрической функции определяется граничными условиями. Для областей, ограниченных по r : $r_1 \leq r \leq r_2$, в качестве $Z_n(r\sqrt{k^2 - h^2})$ нужно брать функции Бесселя $J_n(r\sqrt{k^2 - h^2})$ и Неймана $N_n(r\sqrt{k^2 - h^2})$, так как эти функции при больших значениях аргумента представляют стоячие волны, амплитуда которых убывает как $1/\sqrt{\rho}$ ($\rho = r\sqrt{k^2 - h^2}$). При $\rho \gg 1$, $\rho > n$

$$J_n(\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos\left(\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right), \quad (2.9)$$

$$N_n(\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin\left(\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right). \quad (2.10)$$

Если область, в которой определяется поле, захватывает и ось цилиндра, то в качестве цилиндрических функций берутся только функции Бесселя $J_n(\rho)$, так как функции $N_n(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$ обращаются в бесконечность, и не могут быть использованы для определения полей, которые по своему физическому смыслу конечны в окрестности $\rho = 0$.

Для области, неограниченной по r , $r_1 \leq r \leq \infty$, зависимость Π_z от r представляется функцией Ганкеля первого рода $H_n^{(1)}(\rho)$, которая при $\rho \gg 1$ представляет радиально расходящуюся волну (если зависимость от времени берется в виде $e^{-i\omega t}$)

$$H_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \exp\left[i\left(\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right)\right]. \quad (2.11)$$

Таким образом, каждая элементарная цилиндрическая волна

$$\Pi_{zn}^e(r, \varphi, z; t) = Z_n(r\sqrt{k^2 - h^2})e^{in\varphi}e^{ihz - i\omega t} \quad (2.12)$$

определяется тройкой чисел k, h, n . При $n = 0$ поле симметрично относительно оси z (нет угловой зависимости), при $h = 0$ волна распространяется только в радиальном направлении — поле двумерно. Если пространство по r ограничено и $Z_n(r\sqrt{k^2 - h^2})$ — действительные функции, то фаза волны зависит лишь от z . В этом случае решение (2.12) представляет плоскую неоднородную волну, распространяющуюся вдоль оси z с фазовой скоростью $v_\phi = \omega/h$, амплитуда которой в плоскости $z = \text{const}$ является функцией от r и φ .

Для того чтобы получить общее решение, определяющее функцию $\Pi_z^e(r, \varphi, z)$, нужно умножить частное решение (2.12) на постоянные коэффициенты a_n и просуммировать по всем n :

$$\Pi_z^e(r, \varphi, z; t) = \exp(ihz - i\omega t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n Z_n(r \sqrt{k^2 - h^2}) e^{in\varphi}. \quad (2.13)$$

Коэффициенты a_n определяются из граничных условий. После того как найдено решение для функции $\Pi_z^e(u_1, u_2, z)$ и может быть записано совершенно аналогичное решение для $\Pi_z^m(u_1, u_2, z)$, запишем выражение для всех компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в произвольной цилиндрической системе координат. Для этого нужно воспользоваться выражением для ротора произвольного вектора в ортогональной криволинейной системе координат. Если поле определяется электрическим вектором Герца Π_z^e , то согласно формулам (1.1) и (1.2) получим

$$\begin{aligned} H_1 &= -ik_0\varepsilon \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial u_2} = -ik_0\varepsilon \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Pi^e}{\partial u_2} e^{ihz}, \\ H_2 &= ik_0\varepsilon \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial u_1} = ik_0\varepsilon \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Pi^e}{\partial u_1} e^{ihz}, \\ H_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial u_1 \partial z} = \frac{ih}{h_1} \frac{\partial \Pi^e}{\partial u_1} e^{ihz}, \\ E_2 &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial u_2 \partial z} = -\frac{ih}{h_2} \frac{\partial \Pi^e}{\partial u_2} e^{ihz}, \\ E_z &= k^2 \Pi_z^e + \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial z^2} = (k^2 - h^2) \Pi^e e^{ihz}. \end{aligned}$$

Поле такого типа называется полем типа « E » или поперечно-магнитным (TM).

Если поле определяется магнитным вектором Герца Π_z^m , то согласно формулам (1.5) и (1.6) получим

$$\begin{aligned} E_1 &= ik_0\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial u_2} e^{ihz}, & H_1 &= \frac{ih}{h_1} \frac{\partial \Pi^m}{\partial u_1} e^{ihz}, \\ E_2 &= -ik_0\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial u_1} e^{ihz}, & H_2 &= \frac{ih}{h_2} \frac{\partial \Pi^m}{\partial u_2} e^{ihz}, \\ E_z &= 0, & H_z &= (k^2 - h^2) \Pi^m e^{ihz}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Формулы (2.15) определяют компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} волны типа « H » или поперечно-электрической (TE).

Пользуясь формулами (2.14) и (2.15), можно указать на некоторые общие свойства волн типа E и H . Как легко показать,

скалярное произведение (\mathbf{EH}) равно нулю для волн обоих типов. Действительно, записывая $(\mathbf{EH}) = E_1 H_1 + E_2 H_2$ и пользуясь формулами (2.14) и (2.15), получим в правой части равенства нуль. Следовательно, в плоскости $z = \text{const}$ векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} ортогональны. Для волн типа E направление вектора \mathbf{E} в плоскости поперечных координат совпадает с направлением $\text{grad } \Pi^e(u_1, u_2)$. Поскольку векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} в плоскости u_1, u_2 ортогональны, то магнитные силовые линии в этом случае совпадают с линиями $\Pi^e(u_1, u_2) = \text{const}$. Для волн типа H картина обратная — направление вектора \mathbf{H} совпадает с направлением $\text{grad } \Pi^m(u_1, u_2)$, а электрические силовые линии совпадают с линиями $\Pi^m(u_1, u_2) = \text{const}$.

§ 3. Волноводы

Металлические волноводы — наиболее распространенный тип линий передачи электромагнитной энергии в диапазоне сантиметровых волн. *Волноводами* обычно называют металлические трубы с любой замкнутой формой контура поперечного сечения, диэлектрическая ϵ и магнитная μ проницаемости внутри волновода считаются постоянными. Будем считать, что контур поперечного сечения не меняется вдоль оси волновода (регулярный волновод) и стенки волновода идеально проводящие. Поле в волноводе возбуждается токами, текущими в стенках; внутри волновода источники электромагнитного поля отсутствуют.

Поле в волноводе может быть определено с помощью двух функций: $\Pi^e(u_1, u_2)e^{ihz}$ и $\Pi^m(u_1, u_2)e^{ihz}$. Обе функции удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta_{\perp} \Pi^{e,m} + (k^2 - h^2) \Pi^{e,m} = 0 \quad (3.1)$$

($k^2 = k_0^2 \epsilon \mu$). Будем считать, что $\epsilon = \mu = 1$ внутри волновода, тогда $k^2 = k_0^2$. Установим граничные условия для функций $\Pi^e(u_1, u_2)$ и $\Pi^m(u_1, u_2)$ на контуре поперечного сечения волновода C . Граничное условие для Π^e и Π^m найдем из граничного условия для вектора \mathbf{E} . Поскольку стенки волновода идеально проводящие, тангенциальные к поверхности металла компоненты вектора \mathbf{E} должны быть равны нулю

$$E_{\text{tg}}|_C = 0. \quad (3.2)$$

Введем на контуре поперечного сечения C направления τ_0 и η_0 . Единичный вектор нормали к контуру η_0 направлен внутрь стенки, τ_0 — по касательной к контуру C ; η, τ и ось z образуют правую прямоугольную систему координат. Тангенциальными компонентами вектора \mathbf{E} будут компоненты E_{τ} и E_z . Согласно фор-

мулам (2.14) и (2.15)

$$E_{\tau} = \left(i h \frac{\partial \Pi^e}{\partial \tau} + i k_0 \frac{\partial \Pi^m}{\partial \eta} \right) e^{i h z},$$

$$E_z = (k^2 - h^2) \Pi^e e^{i h z}.$$

Следовательно, если функции Π^e и Π^m будут удовлетворять на контуре C граничным условиям

$$\Pi^e|_C = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \Pi^m}{\partial \eta} \Big|_C = 0, \quad (3.4)$$

а внутри контура уравнению (3.1), то поля (2.14) и (2.15) будут удовлетворять уравнениям Максвелла.

Граничные условия будут выполнены также, если $k^2 = h^2$ и

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \tau} \Big|_C = 0. \quad (3.5)$$

Если $k^2 = h^2$, то $E_z = 0$ и $H_z = 0$ не только на стенках, но и во всех точках внутри контура поперечного сечения, т. е. в этом случае волна должна быть поперечной электромагнитной волной (*ТЕМ*).

Покажем, что волны *ТЕМ* в волноводе существовать не могут. Действительно, при $k^2 = h^2$ функции Π^e и Π^m удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta_{\perp} \Pi^{e,m} = 0.$$

При граничных условиях (3.4) или (3.5) уравнение Лапласа внутри замкнутой односвязной области имеет лишь тривиальное решение $\Pi^{e,m}(u_1, u_2) = \text{const}$, и поле в волноводе равно нулю.

Следовательно, в волноводе могут существовать только волны двух типов: волны типа *E*, поле этих волн выражается через функцию Π_z^e , и волны типа *H*, которые описываются с помощью функции Π_z^m .

Задача о нахождении поля в волноводе сводится к задаче о нахождении [решений уравнения (3.1) для функции $\Pi^e(u_1, u_2)$ с граничным условием (3.3) и того же уравнения (3.1) для функции Π^m с граничным условием (3.4). Граничные задачи такого рода хорошо исследованы. Известно, что ненулевые решения соответствуют некоторым значениям параметра $\alpha^2 = k^2 - h^2$. Эти значения называются *собственными значениями*, они образуют дискретную последовательность возрастающих положительных чисел

$$\alpha_1^2 < \alpha_2^2 < \dots < \alpha_n^2. \quad (3.6)$$

Функции Π_n^e и Π_n^m , соответствующие собственным значениям α_n , называются *собственными функциями*. Собственные значения и собственные функции для волн типа E и типа H , вообще говоря, различны.

Собственные функции, принадлежащие различным собственным значениям α_n и α_m , ортогональны между собой, т. е.

$\int_{\Sigma} \Pi_m \Pi_n dS = 0$, где интеграл берется по площади поперечного сечения волновода. Если ввести еще условие нормировки, то можно записать

$$\int_{\Sigma} \Pi_m \Pi_n dS = \delta_{mn}, \quad (3.7)$$

где $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$ и $\delta_{nn} = 1$. Каждому значению α_n соответствует продольное волновое число $h_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$. Решение

$$A_n \Pi_n^e(u_1, u_2) \exp [i (h_n z - \omega t)]$$

определяет «нормальную» волну («моду») типа E_n в волноводе. Решение

$$B_n \Pi_n^m(u_1, u_2) \exp [i (h_n z - \omega t)]$$

определяет «нормальную» волну типа H в волноводе.

При $k^2 > \alpha_n^2$ в волноводе распространяется нормальная волна типа E_n (или типа H_n). Набор поперечных волновых чисел определяет спектр нормальных волн. Если в волноводе возбуждаются колебания частоты ω , т. е. волновое число фиксировано, то, начиная с некоторого номера n ,

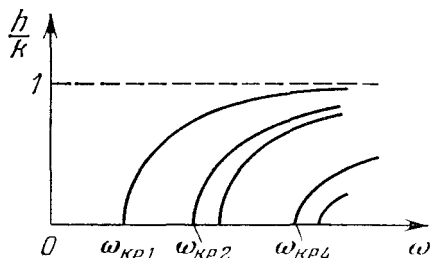
$$\alpha_n^2 \geq k^2.$$

Тогда для всех α , номера которых больше n , h^2 становится отрицательной величиной, а h — чисто мнимой. Такие волны не распространяются в волноводе, они возбуждаются, но поле их уменьшается в направлении оси z по экспоненциальному закону. Таким образом, в волноводе всегда существует дискретный ограниченный спектр нормальных волн типа E и H . Если $k^2 < \alpha_1^2$, то распространяющихся волн в волноводе нет. Условие $k_{кр} = \alpha_1$ определяет *критическую частоту* или *критическую длину волны*, которая может распространяться в волноводе. Нормальные волны следующих номеров имеют меньшие критические длины волн. Величина собственного значения параметра α_n определяется размерами и геометрией поперечного сечения, следовательно, и критическая длина волны $\lambda_{нкр} = 2\pi/\alpha_n$ является геометрическим параметром, $\lambda_{нкр \max}$ имеет порядок поперечного размера волновода.

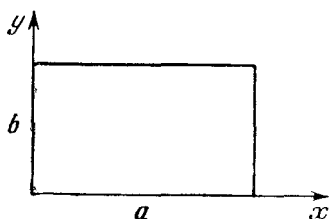
Продольное волновое число h определяет периодичность поля в волноводе по оси z . Поэтому длина волны в волноводе

$$\Lambda = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_{кр}^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}}. \quad (3.8)$$

Если длина волны, на которой возбуждается волновод, $\lambda < \lambda_{кр}$, волна распространяется в волноводе и длина волны в волноводе



10.1. Зависимость h/k от частоты при различных значениях $\omega_{кр}$.



10.2. Поперечное сечение прямоугольного волновода.

$\Lambda > \lambda$. При $\lambda \rightarrow \lambda_{кр}$ $\Lambda \rightarrow \infty$, т. е. при $\lambda = \lambda_{кр}$ поле в волноводе имеет не волновой, а колебательный характер: в волноводе образуется стоячая волна. При $\lambda > \lambda_{кр}$ волна в волноводе затухает. Фазовая скорость в волноводе

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{h} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}}. \quad (3.9)$$

Групповая скорость

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dh} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}, \quad (3.10)$$

$$v_{гр} < c \text{ и при } \omega \rightarrow \omega_{кр} \quad v_{гр} \rightarrow 0.$$

Между групповой и фазовой скоростями в волноводе существует связь, определяемая соотношением

$$v_{\phi} v_{гр} = c^2. \quad (3.11)$$

Таким образом, при распространении волн в волноводе наблюдается явление дисперсии. В волноводе характерным параметром является его поперечный размер (критическая длина волны), поэтому дисперсия особенно существенна, когда длина волны, на которой возбуждается волновод, близка к критической длине волны. Зависимость h/k от частоты изображена на рис. 10.1. При $\lambda \ll \lambda_{кр}$ $v_{\phi} \approx c$ и $v_{гр} \approx c$.

При распространении импульсного сигнала в волноводе, как и во всякой диспергирующей среде, наблюдается его расплывание. Скорость распространения импульса равна групповой скорости, а передний фронт сигнала движется со скоростью c (см. § 7 гл. II).

В качестве примеров рассмотрим систему нормальных волн в волноводах прямоугольного и круглого сечений. Прямоугольные волноводы чаще всего используются для канализации сантиметровых волн. Пусть стенки волновода имеют размеры a и b ($a > b$). В качестве поперечных координат выберем прямоугольные координаты x и y , совпадающие со стенками волновода (рис. 10.2).

Уравнение для функций Π^e и Π^m имеет в этом случае вид

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \alpha^2 \Pi = 0. \quad (3.12)$$

Запишем решение в виде произведения двух функций $\Pi(x, y) = X(x)Y(y)$. Функции $X(x)$ и $Y(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha_y^2 Y = 0, \quad (3.13)$$

где

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \alpha^2. \quad (3.14)$$

Решение этих уравнений, учитывая, что значения x и y меняются в пределах $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, запишем в виде

$$\begin{aligned} X &= A_1 \sin(\alpha_x x) + B_1 \cos(\alpha_x x), \\ Y &= A_2 \sin(\alpha_y y) + B_2 \cos(\alpha_y y). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Если рассматривать систему волн типа E , то граничное условие $\Pi^e|_C = 0$ сведется к условиям $X_{x=0} = 0$ и $Y_{y=0} = 0$. Из условий $X_{x=0} = 0$ и $Y_{y=0} = 0$ мы получим, что $B_1 = B_2 = 0$, второе условие накладывает ограничения на значения α_x и α_y :

$$\alpha_x = \frac{m\pi}{a}, \quad \alpha_y = \frac{n\pi}{b} \quad (m, n = 1, 2, \dots). \quad (3.16)$$

Таким образом, собственные функции, определяющие поле волны E_{mn} в прямоугольном волноводе, имеют вид

$$\Pi_{mn}^e(x, y) = A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \quad (3.17)$$

а собственные значения $\alpha_{mn} = \sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}}$ зависят от двух чисел m и n . Наименьшее значение, которое могут принимать числа m и n : $m = 1$ и $n = 1$. Значения $m = 1$ и $n = 1$ определяют поле волны E_{11} в прямоугольном волноводе. Эта волна обладает

наибольшей критической длиной волны из всех волн типа E_{mn} :

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\alpha_{11}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3.18)$$

Для волн типа H граничное условие $\frac{\partial \Pi^m}{\partial n} \Big|_{c=0} = 0$ сведется к условиям $\frac{dX}{dx} \Big|_{x=0} = 0$ и $\frac{dY}{dy} \Big|_{y=b} = 0$.

В этом случае в (3.15) мы должны положить равными нулю константы A_1 и A_2 , и собственные функции, определяющие поле волны H_{mn} в прямоугольном волноводе, будут иметь вид

$$\Pi_{mn}^m(x, y) = B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right). \quad (3.19)$$

В (3.19) одно из двух чисел m или n может быть равно нулю. Поскольку критическая длина волны соответствует наименьшему возможному собственному значению, то

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\alpha_{10}} = 2a.$$

Такую критическую длину волны имеет волна типа H_{10} в прямоугольном волноводе. Волна типа H_{10} является основной волной прямоугольного волновода. Все остальные нормальные волны, как типа H , так и типа E имеют большие критические длины волн. Следующей волной в зависимости от соотношения между размерами стенок может быть либо волна H_{01} ($\alpha_{кр} = 2b$), либо волна H_{11} ($\lambda_{кр} = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$), может быть так же и волна H_{20} ($\lambda_{кр} = a$).

Если длину волны, на которой возбуждается волновод, подобрать так, чтобы она была меньше $2a$, но больше следующей критической длины волны (например, $2a > \lambda > 2b$), то волновод будет пропускать только одну волну, волну типа H_{10} .

Рассмотрим структуру поля в поперечном сечении волновода для основных типов волн. Для волны H_{10} $\Pi_{10}^m = B_{10} \cos \frac{\pi x}{a}$, и поле имеет только две поперечные компоненты, отличные от нуля:

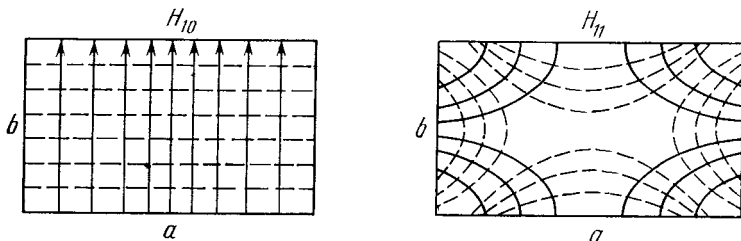
$$E_y \sim \sin \frac{\pi x}{a}, \quad H_x \sim \sin \frac{\pi x}{a}.$$

В этом случае, как следует из общих свойств волн типа H , с линиями $\Pi^m = \text{const}$ совпадают силовые линии электрического поля, которые сгущаются в центре волновода. Силовые линии магнитного поля в плоскости x, y (штриховые линии на рис. 10.3) перпендикулярны электрическим силовым линиям (сплошные линии). Распределение поля H_{20} является двукратным повторением распределения поля волны H_{10} по оси x . Для волны H_{01}

картина поля будет повернута на 90° относительно поля волны H_{10} . Для волны H_{11} функция Π_{11}^m имеет вид

$$\Pi_{11}^m = B_{11} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Эта функция имеет максимальное значение при $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$. Около экстремальных точек линии постоянного



10.3. Структура поля волн типов H_{10} и H_{11} в поперечном сечении прямоугольного волновода.

значения функции имеют вид окружностей или эллипсов, с линиями постоянного уровня совпадают силовые линии электрического поля. Пользуясь этими соображениями, легко построить распределение поля для волны H_{11} (рис. 10.3). Распределение поля для волны с индексами H_{mn} легко представить, если разделить сечение волновода на клетки со сторонами a/m и b/n . Структура поля в каждой клетке будет повторять структуру поля волны H_{11} .

Точно так же можно построить распределение поля для волн типа E_{mn} . Например, поле волны E_{11} описывается функцией $\Pi_{11}^e = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$. Эта функция имеет максимальное значение при $x = a/2$ и $y = b/2$, при $x = 0$ и $x = a$ и $y = 0$ и $y = b$, т. е. на контуре волновода, она обращается в нуль. С линиями постоянного значения

10.4. Структура поля волны типа E_{11} в поперечном сечении прямоугольного волновода.

функции Π_{11}^e совпадают магнитные силовые линии. Структура поля для волны E_{11} изображена на рис. 10.4. Для волны с индексами E_{mn} распределение поля будет m, n -кратным повторением этого распределения.

Поле в волноводе круглого поперечного сечения целесообразно исследовать в круговой цилиндрической системе координат (r, φ, z) . В этом случае функции Π_2^e и Π_2^m определяются формулой

(2.13). В качестве цилиндрической функции должна быть выбрана функция Бесселя $J_m(\alpha r)$, поскольку в волноводе r меняется в пределах $0 \leq r \leq a$ (a — радиус волновода). Таким образом,

$$\Pi_z^{e,m} = A_m J_m(\alpha r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \exp(iz \sqrt{k^2 - \alpha^2} - i\omega t). \quad (3.20)$$

Собственные значения поперечного волнового числа α для волны типа E определяются из условия

$$J_m(\alpha r) \Big|_{r=a} = 0. \quad (3.21)$$

Если обозначить корни функций Бесселя m -го порядка величиной ν_{mn} , то

$$\alpha_{mn} = \nu_{mn}/a. \quad (3.22)$$

Зависимость поля волны E в круглом волноводе от поперечных координат определяется функцией

$$\Pi_{mn}^e = A_m J_m\left(\frac{\nu_{mn}}{a} r\right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}. \quad (3.23)$$

Наименьшие значения ν_{mn} соответствуют индексам $m = 0, n = 1$ и $m = 1, n = 1$: $\nu_{01} = 2,4$; $\nu_{11} = 3,83$.

Собственные значения поперечного волнового числа для волны типа H определяются из условия

$$\frac{dJ_m(\alpha r)}{dr} \Big|_{r=a} = 0. \quad (3.24)$$

Если обозначить корни производной функции Бесселя m -го порядка величиной μ_{mn} , то

$$\alpha_{mn} = \mu_{mn}/a. \quad (3.25)$$

Зависимость поля волны типа H в круглом волноводе от поперечных координат r и φ определяется функцией

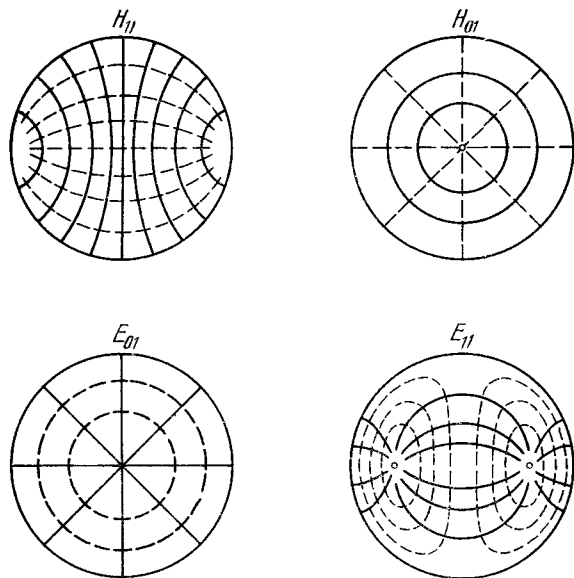
$$\Pi_{mn}^m = B_m J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{a} r\right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}.$$

Наименьшие значения μ_{mn} соответствуют индексам $m = 1, n = 1$ и $m = 0, n = 1$: $\mu_{11} = 1,84$; $\mu_{01} = 3,83$.

Поскольку основной волной в волноводе является волна, имеющая наибольшую критическую длину волны (наименьшее поперечное волновое число), то основной волной в круглом волноводе является волна H_{11} . Для волны типа H_{11}

$$\Pi_{11}^m = B_1 J_1\left(\frac{1,84}{a} r\right) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{и} \quad \lambda_{кр} = \frac{2\pi}{1,84} a = 3,4a.$$

Структура поля в поперечном сечении для волны H_{11} в круглом волноводе изображена на рис. 10.5. Поскольку зависимость от угла может определяться как $\cos \varphi$, так и $\sin \varphi$, то каждому собственному значению α_{11} соответствуют две собственные функции (собственное значение является двукратно вырожденным). Вырождение такого вида называется *поляризационным*.



10.5. Структура поля основных типов волн в поперечном сечении круглого волновода.

Следующей по величине критической длиной волны обладает волна типа E_{01} :

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\nu_{01}} = \frac{2\pi a}{2,4} = 2,6 a, \quad \Pi_{01}^e = A_0 J_0 \left(\frac{2,4}{a} r \right).$$

Собственное значение ν_{01} не вырождено, так как ему соответствует только одна собственная функция. Функция Π_{01}^e имеет максимальное значение при $r = 0$ ($J_0(0) = 1$). Магнитные силовые линии совпадают с линиями $\Pi_{01}^e(r) = \text{const}$ и имеют вид окружностей с центрами при $r = 0$, электрические силовые линии направлены по радиусам (рис. 10.5). Волна E_{01} (так же, как все волны E_{0n}) имеет отличную от нуля продольную компоненту при $r = 0$ в центре волновода, поскольку $E_{01z} = \alpha^2 \Pi_{01}^e(\alpha_r) e^{ihz} = \alpha^2 A_0 J_0 \left(\frac{2,4}{a} r \right) e^{ihz}$. Поэтому волна E_{01} применяется в электрон-

ных приборах, в которых необходимо обеспечить эффективное взаимодействие электромагнитного поля с осевым потоком электронов.

Если круглый волновод возбуждается волнами с длинами волн в диапазоне

$$3,4a > \lambda > 2,6a,$$

то в волноводе распространяется только одна основная волна, волна типа H_{11} .

Следующее по величине собственное значение соответствует значениям $\nu_{11} = \mu_{01} = 3,83$. Совпадение значений ν_{11} и μ_{01} определяется свойствами функций Бесселя: $J_0'(x) = -J_1(x)$. Собственное значение $\nu_{11} = \mu_{01}$ является вырожденным, ему соответствует волна H_{01} , поле которой определяется функцией $\Pi_{01}^m = B_{01}J_0\left(\frac{3,83}{a}r\right)$, и волна E_{11} , для которой $\Pi_{11}^e = A_{11}J_1\left(\frac{3,83}{a}r\right) \cos \varphi$.

Поле волны H_{01} (а также и всех остальных симметричных волн H_{0n}) содержит только 3 компоненты поля, отличные от нуля: E_φ , H_r и H_z (см. (2.15)). При распространении этих волн на стенках волновода не образуется зарядов и ток течет только по контуру поперечного сечения волновода, осевых токов нет. Это приводит (как мы увидим дальше) к аномально малому поглощению волн типа H_{0n} . Кроме того, поскольку волны не несут осевых токов, то поле их мало искажается, если в стенках волноводов имеются поперечные (азимутальные) щели.

Разложение волноводных волн на плоские. Волны в волноводе можно представить в виде суперпозиции плоских волн. Такое представление оказывается полезным в ряде задач.

Рассмотрим, например, волну H_{10} в прямоугольном волноводе. Поле этой волны описывается функцией

$$\begin{aligned} \Pi_z^m(x, z, t) &= B_{10} \cos \frac{\pi x}{a} \exp(ihz - i\omega t) = \\ &= \frac{1}{2} B_{10} \left[\exp\left(i \frac{\pi x}{a} + ihz - i\omega t\right) + \exp\left(-i \frac{\pi x}{a} + ihz - i\omega t\right) \right]. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет сумму двух плоских волн, распространяющихся под углами θ и $-\theta$ к оси z , где $\cos \theta = h/k$, $\sin \theta = \alpha/k = \pi/ak = \lambda/2a$, поскольку в данном случае $\alpha = \pi/a$. Компоненты полей, отличные от нуля в волне H_{10} , равны

$$\begin{aligned} E_y &= B_{10}k \frac{1}{2} \frac{\pi}{a} (e^{i\pi x/a} - e^{-i\pi x/a}) \exp(ihz - i\omega t), \\ H_x &= -B_{10}h \frac{1}{2} \frac{\pi}{a} (e^{i\pi x/a} - e^{-i\pi x/a}) \exp(ihz - i\omega t), \\ H_z &= B_{10} \frac{1}{2} (k^2 - h^2) (e^{i\pi x/a} + e^{-i\pi x/a}) \exp(ihz - i\omega t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Все компоненты поля имеют такую же структуру, как и функция Π_z^m , т. е. поле волны H_{10} в прямоугольном волноводе представляет собой суперпозицию двух плоских волн, распространяющихся под углами θ и $-\theta$ к оси волновода. Каждая плоская волна чисто поперечна и линейно-поляризована в плоскости x, z . Магнитное поле имеет составляющие H_x и H_z , поэтому результирующее поле имеет продольную составляющую $H_z \neq 0$. Как видно из формул (3.26), при $x = 0, x = a$ $E_y = 0$, т. е. если при $x = 0$ и $x = a$ поставить идеально проводящие плоскости (стенки), структура поля не изменится и граничные условия на стенках волновода будут выполнены.

Если каждая плоская волна распространяется со скоростью c , то скорость перемещения фазы в направлении оси z

$$v_\Phi = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{ck}{h} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}}.$$

При $\lambda \rightarrow 2a \sin \theta \rightarrow 1$, $\theta \rightarrow \pi/2$, плоские волны распространяются в направлении оси x навстречу друг другу, $v_\Phi \rightarrow \infty$. В волноводе образуется стоячая волна. При $\lambda \ll 2a \sin \theta \ll 1$, $\theta \rightarrow 0$, $v_\Phi \rightarrow c$. В этом случае направление распространения плоских волн совпадает с осью волновода, $h \approx k$, $H_z \approx 0$ и поле почти поперечно.

Групповая скорость в волноводе — скорость перемещения энергии вдоль оси z , поэтому

$$v_{гр} = c \cos \theta = c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}.$$

Для волн более высоких номеров E_{mn} и H_{mn} поле в прямоугольном волноводе также можно представить в виде суперпозиции полей плоских волн (только уже не двух, а четырех), идущих под углами $\theta_{mn} = \arccos(h_{mn}/k)$ к оси волновода.

В цилиндрическом волноводе такое представление также возможно. Действительно, поле в цилиндрическом волноводе описывается функциями

$$\Pi_z = A e^{im\varphi} J_m(\alpha r) e^{ihz}. \quad (3.27)$$

Функция $J_m(\alpha r)$ может быть записана в виде интеграла

$$J_m(\alpha r) = \frac{i^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\alpha r \cos \theta + im\theta) d\theta. \quad (3.28)$$

Подставляя (3.28) в (3.27) и вводя вместо θ переменную интегрирования $\eta = \theta + \varphi$, получим

$$\Pi_z(r, \varphi, z) = e^{ihz} \frac{i^m}{2\pi} \int_\varphi^{2\pi+\varphi} \exp[i\alpha r (\cos \eta \cos \varphi + \sin \eta \sin \varphi)] e^{im\eta} d\eta.$$

Вводя прямоугольные координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получим

$$\Pi_z(x, y, z) = e^{ihz} \frac{i^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp [i (\alpha x \cos \eta + \alpha y \sin \eta)] e^{im\eta} d\eta. \quad (3.29)$$

Выражение (3.29) и представляет разложение цилиндрической волны по плоским волнам, направления распространения которых образуют конус с углом раствора $\theta = \arccos (h/k)$ относительно оси z . Таким образом, $h = k \cos \theta$, $\alpha = k \sin \theta$.

§ 4. Поток энергии в волноводе. Затухание волн в волноводах

Каждая нормальная волна, бегущая вдоль оси волновода, переносит энергию. Средняя мощность, переносимая одной нормальной волной,

$$\bar{P}_{nz} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \iint_{\Sigma} ([E_n H_n^*] \cdot z_0) dS, \quad (4.1)$$

Σ — площадь поперечного сечения волновода, z_0 — единичный вектор в направлении оси z ,

$$[E_n H_n^*] \cdot z_0 = E_{n1} H_{n2}^* - E_{n2} H_{n1}^*,$$

где E_{n1} , E_{n2} , H_{n1} , H_{n2} — проекции векторов E_n и H_n на координатные оси в плоскости поперечного сечения.

Для определения компонент векторов E и H воспользуемся формулами (2.14) для волн типа E или (2.15) для волн типа H . Выражение $E_{n1} H_{n2}^* - E_{n2} H_{n1}^*$ записывается одинаково как для волн типа E , так и для волн типа H , если функцию Π_n^e заменить через функцию Π_n^m , поэтому, опуская верхний индекс у функции Π_n , запишем

$$E_{n1} H_{n2}^* - E_{n2} H_{n1}^* = k_0 h \left[\frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial \Pi_n}{\partial u_1} \frac{\partial \Pi_n^*}{\partial u_1} \right) + \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{\partial \Pi_n}{\partial u_2} \frac{\partial \Pi_n^*}{\partial u_2} \right) \right]. \quad (4.2)$$

Выражение в квадратных скобках представляет скалярное произведение $\operatorname{grad} \Pi_n \operatorname{grad} \Pi_n^*$, которое можно записать в виде

$$\operatorname{grad} \Pi_n \operatorname{grad} \Pi_n^* = \operatorname{div} (\Pi_n \operatorname{grad} \Pi_n^*) - \Pi_n \Delta_{\perp} \Pi_n^* = \operatorname{div} (\Pi_n \operatorname{grad} \Pi_n^*) + \alpha^2 \Pi_n \Pi_n^*. \quad (4.3)$$

Подставляя (4.2) в (4.1) с учетом (4.3), получим

$$\bar{P}_{nz} = \frac{c}{8\pi} k_0 \operatorname{Re} \left\{ h \left[\iint_{\Sigma} \operatorname{div} (\Pi_n \operatorname{grad} \Pi_n^*) dS + \alpha^2 \iint_{\Sigma} |\Pi_n^*|^2 dS \right] \right\}. \quad (4.4)$$

Первый интеграл можно преобразовать, воспользовавшись формулой Гаусса — Остроградского:

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{div} (\Pi_n \operatorname{grad} \Pi_n^*) dS = \int_C \Pi_n \frac{\partial \Pi_n^*}{\partial \eta} dl,$$

η — нормаль к контуру поперечного сечения волновода, $\int_C \Pi_n \frac{\partial \Pi_n^*}{\partial \eta} dl = 0$, поскольку для волн типа E $\Pi_n|_C = 0$, а для волн типа H $\left. \frac{\partial \Pi_n^*}{\partial \eta} \right|_C = 0$ и поток энергии, переносимый нормальной волной вдоль оси волновода,

$$\bar{P}_{nz} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(h) k_0 a_n^2 \iint_{\Sigma} |\Pi_n|^2 dS. \quad (4.5)$$

При $\lambda < \lambda_{\text{нкp}}$ величина $\operatorname{Re} h = h$, так как в этом случае h — действительно. При $\lambda > \lambda_{\text{нкp}}$ h — мнимая величина, $\operatorname{Re}(h) = 0$ и $\bar{P}_{zn} = 0$. Если в волноводе распространяется несколько нормальных волн, то \bar{P}_z будет равна сумме слагаемых вида (4.5).

Затухание волн в волноводе. До сих пор мы считали, что стенки волновода идеально проводящие и, следовательно, поле в стенке не проникает. В реальных волноводах стенки обладают достаточно большой, но конечной проводимостью, поэтому поле волны проникает в стенки волновода, и энергия волны расходуется на нагревание стенок. Это приводит к затуханию волны по мере ее распространения. Продольное волновое число h становится комплексным $h = h' + ih''$, где h' характеризует фазовую скорость волны, а h'' — коэффициент затухания. В этом случае понятие критической длины волны теряет свой абсолютный смысл: при $\lambda < \lambda_{\text{нкp}}$ существует небольшое затухание, при $\lambda > \lambda_{\text{нкp}}$ наряду с большим экспоненциальным затуханием существует малый поток энергии вдоль оси волновода.

Поскольку векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} в этом случае будут пропорциональны $\exp(-h''z + ih'z)$, для \bar{P}_{nz} из (4.1) получим

$$\bar{P}_{nz} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \iint_{\Sigma} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] z_0 e^{-2h''z} dS. \quad (4.6)$$

Изменение потока энергии $-d\bar{P}_z/dz = -2h''\bar{P}_z$, откуда коэффициент затухания

$$h'' = \frac{1}{2} \frac{d\bar{P}_z/dz}{\bar{P}_z}. \quad (4.7)$$

Изменение энергии на единицу длины волновода равно потоку энергии в металлические стенки

$$\frac{d\bar{P}_z}{dz} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_0^1 dz \int_C ([EH^*] \eta_0) dl = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_C ([EH^*] \eta_0) dl,$$

η_0 — единичный вектор нормали к контуру C . Поэтому

$$h'' = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re} \int_C ([EH^*] \eta_0) dl}{\operatorname{Re} \iint_{\Sigma} ([EH^*] z_0) dS}. \quad (4.8)$$

Формула (4.8) является точной. Однако для того чтобы воспользоваться ею, необходимо знать поля E и H в волноводе с неидеальными стенками. Для того чтобы найти точные значения полей в волноводе, необходимо решить сложную электродинамическую задачу об определении поля внутри волновода и в металле с учетом граничных условий на поверхности стенок. Однако если стенки обладают достаточно большой проводимостью, то задачу можно решить приближенно с малой погрешностью. Для приближенного решения задачи используются два предположения.

1. Структура поля в волноводе такая же, как в волноводе с идеально проводящими стенками. При этом интеграл, стоящий в знаменателе формулы (4.8), равен согласно (4.5) $k_0 \alpha_n h' \iint_{\Sigma} |\Pi_n|^2 dS$, где h' — продольное волновое число в идеальном волноводе — действительно.

2. В качестве граничных условий на контуре поперечного сечения можно использовать приближенные граничные условия Леонтовича (см. § 7 гл. I).

Интеграл в числителе формулы (4.8) можно представить в виде

$$\operatorname{Re} \int_C ([EH^*] \eta_0) dl = \operatorname{Re} \int_C (E_{\tau} H_z^* - E_z H_{\tau}^*) dl.$$

Согласно приближенным граничным условиям Леонтовича тангенциальные компоненты векторов E и H на границе раздела двух сред связаны соотношениями

$$E_{\tau} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_z, \quad E_z = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_{\tau}$$

и

$$(E_{\tau} H_z^* - E_z H_{\tau}^*) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (|H_z|^2 + |H_{\tau}|^2). \quad (4.9)$$

Для металла $\mu = 1$, $\varepsilon = i \frac{4\pi\tau}{\omega}$, поэтому

$$Z_0 = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{4\pi\tau}}.$$

Волна проникает в стенку на толщину скин-слоя $d = 1/k_0 n$ (см. § 4 гл. I), где n — показатель преломления стенки — согласно (4.18) гл. I равен $\sqrt{2\pi\sigma/\omega}$, и комплексный импеданс стенки

$$Z_0 = \frac{1-i}{2} k_0 d, \quad \operatorname{Re} Z_0 = \frac{1}{2} k_0 d. \quad (4.10)$$

Для волн типа E :

$$H_z = 0, \quad H_\tau = ik_0 \frac{\partial \Pi^e}{\partial \eta} e^{ihz};$$

для волн типа H :

$$H_z = \alpha^2 \Pi^m e^{ihz}, \quad H_\tau = ih \frac{\partial \Pi^m}{\partial \tau} e^{ihz}.$$

Поэтому, учитывая (4.5), (4.9) и (4.10), получим

$$h_E'' = \frac{k_0 d}{4} \frac{k_0 \int_C \left| \frac{\partial \Pi^e}{\partial \eta} \right|^2 dl}{\alpha^2 h' \iint_\Sigma |\Pi^e|^2 dS}, \quad (4.11)$$

$$h_H'' = \frac{k_0 d}{4} \frac{\alpha^4 \int_C |\Pi^m|^2 dl + h^2 \int_C \left| \frac{\partial \Pi^m}{\partial \tau} \right|^2 dl}{k_0 h' \alpha^2 \iint_\Sigma |\Pi^m|^2 dS}. \quad (4.12)$$

Исследуем зависимость коэффициентов затухания волн E и H в волноводах произвольного сечения от частоты. В формулах (4.11) и (4.12) интегралы по контуру и по площади поперечного сечения от частоты не зависят и зависимость h_E'' и h_H'' от частоты определяется зависимостью от частоты $k_0 d$, h' , k_0 , причем $k_0 d \sim 1/\sqrt{\lambda} \sim \sqrt{\omega}$, $h' \sim \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_{кр}}\right)^2 - 1}$, $k_0 \sim \omega$. Введем вместо ω безразмерную величину $\nu = \omega/\omega_{кр}$, тогда зависимость h_E'' и h_H'' от ν определится следующими формулами:

$$h_E'' \sim \frac{c_1 \nu \sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu^2 - 1}}, \quad (4.13)$$

$$h_H'' \sim \frac{c_2 \sqrt{\nu} + c_3 (\nu^2 - 1) \sqrt{\nu}}{\nu \sqrt{\nu^2 - 1}}, \quad (4.14)$$

c_1, c_2, c_3 — константы. При $\nu \rightarrow 1$ $h_E'' \rightarrow \infty$ и $h_H'' \rightarrow \infty$. Однако этот результат является следствием приближенного определения затухания. Более подробный анализ затухания волн при $\omega = \omega_{кр}$ показывает, что затухание волн в волноводе при $\nu = 1$ остается конечным, хотя и сильно возрастает. С увеличением ν затухание сначала уменьшается, достигая некоторого минимального значения, а затем растет примерно пропорционально $\sqrt{\nu}$. Минимальное значение h_E'' , независимо от формы контура поперечного сечения и номера нормальной волны, соответствует $\nu = \sqrt{3}$; минимальное значение h_H'' зависит от формы контура поперечного сечения и от номера нормальной волны (рис. 10.6). Частотная зависимость коэффициента затухания примерно одинакова для всех нормальных волн в волноводе. Исключения составляют только симметричные волны H_{0n} в круглом волноводе. Как уже упоминалось в § 2, для волн этого типа функция $\Pi^m(r, \varphi)$ на контуре C , т. е.

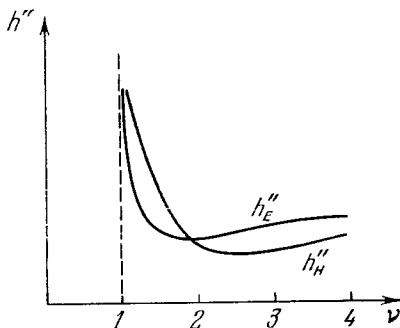
при $r = a$, постоянна: $\frac{\partial \Pi^m}{\partial r} \Big|_C = 0$, а коэффициент затухания

$$h_H'' = \frac{k_0 d}{4} \frac{\alpha^2 \int_C |\Pi^m|^2 dl}{k_0 h' \iint_{\Sigma} |\Pi^m|^2 dS}. \quad (4.15)$$

Частотная зависимость h_H'' для волн типа H_{0n} , и в частности для волны H_{01} , определяется формулой

$$h_H'' \sim \frac{c_2 \sqrt{\nu}}{\nu \sqrt{\nu^2 - 1}}. \quad (4.16)$$

При $\nu \rightarrow 1$ h_H'' имеет максимальное значение и неограниченно убывает с ростом частоты. В широких волноводах, когда частота значительно превышает критическую частоту для волны H_{01} , затухание волны H_{01} может быть очень малым. Например, в медном волноводе при $a = 30$ мм и $\lambda = 8$ мм затухание H_{01} имеет порядок нескольких децибелл на километр. Для волн других типов затухание в этом диапазоне волн составляет десятки децибелл на 1 км. Но при передаче волны H_{01} по волноводному тракту может происходить преобразование H_{01} на неоднородностях волновода в другие типы волн, которые при условии $\omega \gg \omega_{кр}$ также могут



10.6. Зависимость коэффициентов затухания в волноводе для волн типа E и типа H от частоты.

распространяться в волноводе. Поэтому использование H_{01} для передачи энергии по волноводу на большие расстояния связано со значительными трудностями.

Зависимость h'' от частоты исследовалась в предположении о постоянстве поперечных размеров волноводов. Если учесть, что с переходом к более высоким частотам размеры волновода должны уменьшаться, чтобы число нормальных волн было не слишком велико, то увеличение h'' с ростом частоты происходит еще быстрее, примерно, как $\nu^{3/2}$. Значительное затухание является одной из причин, по которой металлические волноводы не применяются на длинах волн короче нескольких миллиметров.

В качестве примера приведем формулы коэффициентов затухания для основных волн в прямоугольном и круглом волноводе. Для волны H_{10} в волноводе прямоугольного сечения со стенками a и b

$$h'' = \frac{d}{ha} \left(k_0^2 \frac{a}{2b} + \frac{\pi^2}{a^2} \right).$$

Для H_{11} в круглом волноводе радиуса a

$$h'' = \frac{d}{2(u_{11}^2 - 1) ah} \left[k_0^2 + \frac{u_{11}^2 (u_{11}^2 - 1)}{a^2} \right],$$

u_{11} — корень производной функции Бесселя первого порядка.

§ 5. Объемные резонаторы

В диапазоне дециметровых и сантиметровых волн в качестве резонансных систем применяются объемные резонаторы, представляющие металлические полости, заполненные диэлектриком. Теория объемных резонаторов простейших форм (цилиндрических, прямоугольных) тесно связана с теорией волноводов. Объемные резонаторы цилиндрической и прямоугольной форм можно рассматривать как отрезки соответствующих волноводов с закрытыми торцами. Как и в теории волноводов, примем, что стенки резонатора идеально проводящие и резонатор заполнен однородным диэлектриком. При таких предположениях потеря энергии в резонаторе нет. Вследствие отражения от торцовых поверхностей зависимость полей в резонаторе от z представляет собой стоячие волны $A \cos(hz) + B \sin(hz)$.

Поле в резонаторе будем определять с помощью функций $\Pi_z^e(u_1, u_2, z)$ и $\Pi_z^m(u_1, u_2, z)$. Зависимость Π_z^e и Π_z^m от координаты z определится из граничных условий для поля E на торцовых стенках:

$$E_{tg} \Big|_{z=0}^{z=l} = 0. \quad (5.1)$$

Для колебаний типа E определим компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} согласно формулам (2.14) через функцию Π_z^e :

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial u_1 \partial z}, & H_1 &= -ik \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial u_2}, \\ E_2 &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial u_2 \partial z}, & H_2 &= ik \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial u_1}, \\ E_z &= k^2 \Pi_z^e + \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial z^2}, & H_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Тангенциальные компоненты вектора \mathbf{E} на торцовых стенках определяются через производные от функции Π_z^e по z и будут равны нулю, если $\left. \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z} \right|_{z=0}^{z=l} = 0$. Это условие будет выполнено, если $B = 0$ и $h = r\pi/l$, где $r = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, функция Π_z^e , определяющая колебания типа E в резонаторе, должна иметь вид

$$\Pi_z^e(u_1, u_2, z) = A \Pi_{m,n}^e(u_1, u_2) \cos \frac{r\pi}{l} z, \quad (5.3)$$

где функции $\Pi_{m,n}^e(u_1, u_2)$ являются собственными функциями для соответствующего волновода.

Функции (5.3) определяют собственные колебания объемного резонатора $E_{m,n,p}$. Собственные резонансные частоты для колебания с индексами m, n, p могут быть найдены из условия

$$k_{mnp}^2 = \alpha_{mn}^2 + \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2$$

или

$$\omega_{mnp}^2 = c^2 \left[\alpha_{mn}^2 + \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 \right]. \quad (5.4)$$

Для колебаний типа H компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} определим через функцию Π_z^m (2.15):

$$\begin{aligned} E_1 &= ik \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial u_2}, & H_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial u_1 \partial z}, \\ E_2 &= -ik \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial u_1}, & H_2 &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial u_2 \partial z}, \\ E_z &= 0, & H_z &= k^2 \Pi_z^m + \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Тангенциальные компоненты вектора \mathbf{E} при $z = 0$ и $z = l$ определяются производными функции Π_z^m по поперечным координатам, поэтому $E_{1g} \Big|_{z=0}^{z=l} = 0$, если $\Pi_z^m \Big|_{z=0}^{z=l} = 0$. Поэтому $A = 0$, $h = r\pi/l$,

где $p = 1, 2, 3, \dots$. Собственные функции для колебания H_{mnp} имеют вид

$$\Pi_z^m(u_1, u_2, z) = B \Pi_{mn}^m(u_1, u_2) \sin \frac{p\pi z}{l}, \quad (5.6)$$

а собственные частоты определяются формулой (5.4).

Рассмотрим некоторые примеры. Очень часто встречаются резонаторы в виде прямого круглого цилиндра длиной l . Иногда длина резонатора может изменяться с помощью поршня, что позволяет производить настройку резонатора. Для колебаний типа E_{mnp} собственные функции, описывающие распределение поля в цилиндрическом резонаторе, имеют вид

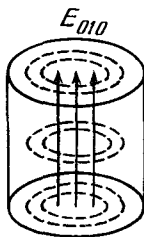
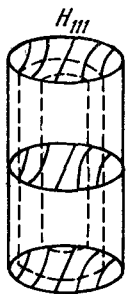
$$A_m J_m \left(\frac{\nu_{mn}}{a} r \right) e^{im\varphi} \cos \frac{p\pi z}{l}, \quad (5.7)$$

ν_{mn} — n -й корень функции Бесселя m -го порядка, а собственные частоты

$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2}. \quad (5.8)$$

Наинизшую частоту имеет колебание с индексами $m = 0, n = 1$ (при этом ν_{mn} имеет наименьшее значение), $p = 0$

$$\omega_{010} = c \frac{\nu_{01}}{a}. \quad (5.9)$$



Колебание типа E_{010} является основным поперечно-магнитным колебанием. Распределение поля в резонаторе для колебания E_{010} изображено на рис. 10.7.

Для колебаний типа H_{mnp} поле в резонаторе определяется функцией

$$B_m J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} r \right) e^{im\varphi} \sin \frac{p\pi z}{l}, \quad (5.10)$$

а собственные частоты

$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2}, \quad (5.11)$$

10.7. Структура поля колебаний E_{010} и H_{111} в цилиндрическом резонаторе.

μ_{mn} — n -й корень производной функции Бесселя m -го порядка. Наинизшую частоту имеет в этом случае колебание H_{111} , резонансная частота которого

$$\omega_{111} = c \sqrt{\left(\frac{1,84}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{l} \right)^2}. \quad (5.12)$$

Распределение поля для колебания H_{111} изображено на рис. 10.7. Если

$$\left(\frac{1,84}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 < \left(\frac{2,4}{a}\right)^2, \quad (5.13)$$

то резонансная частота колебания H_{111} будет меньше частоты колебания $E_{0,10}$ и основным колебанием будет колебание типа H_{111} . Неравенство (5.13) выполняется при условии $l \gg 2a$. Если длина резонатора меньше его диаметра, то основным является колебание E_{010} .

Кроме колебания H_{111} часто используется также колебание H_{011} , поле которого симметрично относительно оси резонатора, собственная частота

$$\omega_{011} = c \sqrt{\left(\frac{3,83}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}. \quad (5.14)$$

Хотя это колебание не является основным, частота его больше, чем у колебания H_{111} , но оно обладает высокой добротностью.

Ту же собственную частоту имеет колебание E_{111} . Это затрудняет использование колебания H_{011} , так как трудно возбудить колебание H_{011} , не возбудив также и колебание E_{111} , которое обладает гораздо большими потерями и может вызвать быстрое затухание всего колебательного процесса. Для снятия вырождения в резонатор вводят поглотители в область, где поле колебания H_{011} мало, а поле колебания E_{111} велико.

Прямоугольный резонатор. В резонаторах прямоугольной формы разделение полей на поля E и H условно, так как три главных направления в резонаторе равноправны. Если определять поля через функцию

$$\Pi_z^e(x, y, z) = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{l}, \quad (5.15)$$

то все компоненты векторов E и H имеют такую же структуру:

$$\begin{aligned} E_x &= A_1 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{l}, \\ E_y &= A_2 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{l}, \\ E_z &= A_3 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{l}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Собственные частоты для колебания с индексами m, n, p найдутся из условия

$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}. \quad (5.17)$$

Основное колебание, имеющее наименьшую частоту, соответствует наименьшим возможным значениям чисел m , n и p , причем только одно из чисел m , n или p может обращаться в нуль, так как если в нуль обращаются одновременно два числа, поле в резонаторе равно нулю. Если $a < b < l$, то основным колебанием будет E_{011} . В этом случае вектор \mathbf{E} имеет одну компоненту, отличную от нуля: $E = E_x = A_1 \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi z}{l}$. Вектор \mathbf{H} , который можно определить непосредственно из уравнения Максвелла

$$\mathbf{H} = -i \frac{1}{k_0} \operatorname{rot} \mathbf{E},$$

имеет отличные от нуля компоненты H_y и H_z :

$$H_y = -A \frac{i}{k_0} \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi z}{l}, \quad H_z = iA \frac{1}{k_0} \cos \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Это же колебание можно считать колебанием H_{101} , если определять поле с помощью функции $\Pi_z^m = A \cos \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi z}{l}$, и для нахождения компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} воспользоваться формулами (5.5). Как легко убедиться, результаты совпадают с точностью до постоянных множителей. Частота основного колебания

$$f_{011} = \frac{\omega_{011}}{2\pi} = c \sqrt{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{b^2}}.$$

Все колебания, для которых ни одно из чисел m , n и p не равно нулю, в прямоугольном резонаторе вырождены. Действительно, поскольку в резонаторе нет источников поля, вектор \mathbf{E} должен удовлетворять уравнению $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Подставляя вектор \mathbf{E} из (5.16), получим

$$\left(A_1 \frac{m\pi}{a} + A_2 \frac{n\pi}{b} + A_3 \frac{p\pi}{l} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{l} = 0; \quad (5.18)$$

если $n \neq 0$, $m \neq 0$ и $p \neq 0$, то (5.18) выполняется при условии

$$A_1 \frac{m\pi}{a} + A_2 \frac{n\pi}{b} + A_3 \frac{p\pi}{l} = 0. \quad (5.19)$$

Отсюда видно, что данной группе фиксированных значений чисел m , n , p , среди которых нет нулей, соответствует по крайней мере два собственных колебания с одной и той же частотой. Вырождение снимается, если одно из чисел m , n или p обращается в нуль. Дополнительное вырождение возникает при повышении симметрии резонатора (в резонаторе с соизмеримыми стенками). Из формул (5.2), (5.5) видно, что в цилиндрических резонаторах любой формы все компоненты вектора \mathbf{E} (так же как и компоненты вектора \mathbf{H}) синфазны между собой. Между векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} существует сдвиг по фазе, равный $\pi/2$, т. е. колебания векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} смещены во

времени друг относительно друга на четверть периода. Колебательный процесс в резонаторе напоминает, таким образом, колебание в LC -контуре, энергия в резонаторе каждые четверть периода переходит из электрического поля в магнитное и обратно.

Средние за период энергии электрического и магнитного полей в резонаторе равны между собой. Поэтому

$$\int_V \overline{W} dV = \frac{1}{16\pi} \int_V (|E|^2 + |H|^2) dV = \frac{1}{8\pi} \int_V |E|^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int_V |H|^2 dV. \quad (5.20)$$

Интеграл берется по объему резонатора V .

Таким образом, для волноводных резонаторов можно написать явное выражение для полей собственных колебаний через функции $\Pi_z^e(u_1, u_2, z)$ и $\Pi_z^m(u_1, u_2, z)$.

В практике радиотехники СВЧ часто используются резонаторы сложной формы, для которых определение собственных частот и распределения полей собственных колебаний не сводится к скалярной двумерной задаче. Но свойства собственных частот и собственных колебаний являются общими для резонаторов любой формы. Любой объемный резонатор имеет дискретный спектр собственных резонансных частот. Каждой частоте соответствует определенное распределение поля в резонаторе. Поля различных по частоте колебаний ортогональны между собой. Все компоненты вектора E и все компоненты вектора H синфазны между собой. Между E и H есть сдвиг по фазе на $\pi/2$ (четверть периода).

Поскольку в резонаторе с идеальными стенками резонансные кривые имеют вид δ -функций, то возбудить колебания в резонаторе возможно только при условии точного совпадения частоты возбуждения с одной из резонансных частот. В действительности стенки резонатора обладают большой, но конечной проводимостью, это приводит к потерям энергии в стенках резонатора и к затуханию во времени колебательного процесса. Затухающий во времени колебательный процесс представляет некоторую суперпозицию частот, расположенных в окрестности $\omega = \omega_0$. Таким образом, резонансные кривые реального резонатора обладают некоторой конечной шириной $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. Ширина резонансных кривых определяется отношением средней энергии, запасенной в резонаторе \overline{W} , к энергии потерь за период колебаний, т. е. добротностью резонатора

$$Q = \frac{2\pi}{T_0} \frac{\overline{W}}{\overline{P}} = \omega_0 \frac{\overline{W}}{\overline{P}}, \quad (5.21)$$

\overline{W} — средняя энергия в объеме резонатора, \overline{P} — средняя мощность тепловых потерь, T_0 — период колебаний в отсутствие потерь.

Если поток энергии через замкнутую поверхность отсутствует, то изменение энергии в замкнутом объеме равно мощности омических потерь, $\bar{P} = -d\bar{W}/dt$, и уравнение (5.21) можно записать в виде

$$\frac{1}{\bar{W}} \frac{d\bar{W}}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q},$$

откуда

$$\bar{W} = \bar{W}_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{Q} t\right). \quad (5.22)$$

Поскольку $\bar{W} \sim |E|^2$, то поле в резонаторе меняется по закону

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t - i\omega_0 t\right). \quad (5.23)$$

Можно найти частотный спектр такого колебательного процесса

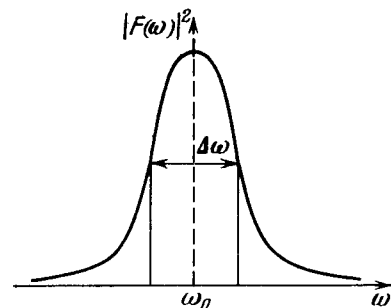
$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E_0 \exp\left[-\frac{\omega_0 t}{2Q} - i(\omega - \omega_0) t\right] dt. \quad (5.24)$$

Вычисляя интеграл, получим

$$|F(\omega)|^2 = \frac{C}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0/2Q)^2}, \quad (5.25)$$

C — константа. Формула (5.25) определяет частотное распределение энергии в резонаторе (рис. 10.8). Ширина резонансной кривой на уровне половинной мощности

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (5.26)$$



10.8. Резонансная кривая для объемного резонатора.

Величина Q для резонаторов сантиметрового диапазона волн составляет несколько сотен или тысяч.

Для определения добротности резонатора необходимо подсчитать запас энергии в резонаторе данной формы и мощность омических потерь в стенках. Согласно (5.20)

$$\bar{W} = \frac{1}{8\pi} \int_V |H|^2 dV.$$

Мощность потерь можно подсчитать, проинтегрировав по поверхности стенок средний поток энергии, направленный в стенки:

$$\bar{P} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \oint_S ([EH^*] \cdot \eta_0) dS. \quad (5.27)$$

η_0 — нормаль к стенке. Для определения \bar{W} и \bar{P} примем, что распределение поля в резонаторе с неидеальными стенками такое же, как и при идеальной проводимости стенок, и тангенциальные компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} на поверхности стенок связаны приближенными граничными условиями Леонтовича (см. (7.29) гл. I). Тогда

$$\bar{P} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \right) \oint_S |H_{\text{tg}}|^2 dS. \quad (5.28)$$

Учитывая (5.21), (5.28) и (4.10), получим

$$Q = \frac{2}{d} \frac{\int_V |H|^2 dV}{\oint_S |H_{\text{tg}}|^2 dS}. \quad (5.29)$$

Добротность резонатора зависит от типа колебаний. Запас энергии в волноводе пропорционален его объему V . Энергия, теряемая в стенках волновода, пропорциональна объему, в котором происходят потери, т. е. произведению площади поверхности стенок S на толщину скин-слоя d . Поэтому

$$Q \sim \frac{V}{Sd}. \quad (5.30)$$

Для основных колебаний объем V пропорционален λ^3 , $S \sim \lambda^2$, а $d \sim \lambda^{1/2}$, следовательно, $Q \sim \lambda^{1/2}$. С уменьшением длины волны (при соответственном уменьшении размеров резонатора) добротность его уменьшается. Поэтому в миллиметровом диапазоне волн объемные резонаторы оказываются не эффективными — добротность их мала. При переходе к коротким волнам можно было бы оставлять размеры резонаторов прежними, а использовать колебания более высоких типов. Но этому препятствует неравномерность частотного спектра замкнутых резонаторов. Число колебаний N , приходящееся на полосу частот $\Delta\omega$ в замкнутом объеме V ,

$$N = \frac{V}{2\pi^2 c^3} \omega^2 \Delta\omega.$$

Поскольку каждый резонансный пик имеет конечную ширину, то при достаточно высоких частотах резонансные кривые резонатора перекрываются и резонансные свойства теряются.

§ 6. Волны в длинных линиях

Длинными линиями называются энергопроводящие системы, образованные двумя проводящими поверхностями. Примерами таких линий может служить двухпроводная линия и коаксиальный кабель. Структуру поля электромагнитных волн, распро-

страняющихся вдоль длинных линий, можно так же, как и волны в волноводе, описать, пользуясь функциями $\Pi^e(u_1, u_2) e^{ihz}$ и $\Pi^m(u_1, u_2) e^{ihz}$. Функции Π^e и Π^m должны удовлетворять уравнению Гельмгольца (3.1) и граничным условиям на контуре поперечного сечения проводов линии (3.3) и (3.4), если $h^2 \neq k^2$, или (3.5) и (3.4) при $h^2 = k^2$. Если $h = k$, то функции Π^e и Π^m удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta_{\perp} \Pi^{e, m} = 0$$

при условиях $\left. \frac{\partial \Pi^e}{\partial \tau} \right|_C = 0$ и $\left. \frac{\partial \Pi^m}{\partial \eta} \right|_C = 0$, при этом $E_z = H_z = 0$.

В волноводе такой волновой процесс невозможен. В длинных линиях условие $\left. \frac{\partial \Pi^e}{\partial \tau} \right|_C = 0$ означает, что Π^e не может быть различным в разных точках поверхности одного и того же провода, но на разных проводах Π^e может иметь разное значение. При таких граничных условиях существует решение уравнения Лапласа. Следовательно, в длинных линиях могут существовать волны, для которых $h = k$, $E_z = H_z = 0$, а поперечные компоненты поля определяются с помощью функции $\Pi(u_1, u_2)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$\Delta_{\perp} \Pi = 0 \quad (6.1)$$

и граничному условию на каждом проводе

$$\Pi|_C = \text{const.} \quad (6.2)$$

Поперечные компоненты полей (в качестве поперечных координат возьмем прямоугольные координаты x, y) согласно (2.14) равны

$$E_x = H_y = ik \frac{\partial \Pi}{\partial x} e^{ikz}, \quad E_y = -H_x = ik \frac{\partial \Pi}{\partial y} e^{ikz}, \quad (6.3)$$

т. е. компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} связаны между собой так же, как в плоской волне. Но, в отличие от плоской волны, компоненты E_x и E_y в плоскости x, y не постоянны — поле максимально у проводов линии и убывает в радиальном направлении. Волны такого типа называются волнами *ТЕМ*. Скорость волн *ТЕМ* не зависит от частоты $v_{\phi} = v_{\text{гp}} = c$. Если среда, в которой расположены провода линии, является однородным диэлектриком, то $v_{\phi} = c/\sqrt{\epsilon}$.

Поскольку поперечные компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют уравнению Лапласа, поле в поперечном сечении двухпроводной линии в каждый данный момент времени совпадает с электростатическим полем, т. е. распределение поля такое же, как в конденсаторе соответствующей формы. Например, в коаксиальном кабеле

$$E_r = H_{\phi} = ik \frac{\partial \Pi}{\partial r} e^{ikz},$$

$$E_{\phi} = E_z = H_r = H_z = 0.$$

Функция Π удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Pi}{dr} \right) = 0, \quad \frac{d\Pi}{dr} = \frac{A}{r},$$

т. е. $E_r = H_\varphi = \frac{A}{r}$, $A = \text{const}$. Подсчитаем поток энергии, переносимый волной TEM , распространяющейся в коаксиальном кабеле, радиус внешней оболочки которого b , а внутреннего провода a

$$\begin{aligned} \bar{P}_z &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_S ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{z}_0) dS = \\ &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \frac{A^2}{r^2} r dr = \frac{c}{4} |A^2| \ln \frac{b}{a}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Если $b \rightarrow \infty$, или $a \rightarrow 0$, \bar{P}_z обращается в бесконечность, т. е. волны TEM в однопроводной линии существовать не могут.

Для описания распространения волн TEM в двухпроводных линиях, если расстояние между проводами линии меньше длины волны, вместо полей \mathbf{E} и \mathbf{H} можно рассматривать изменение тока и напряжения вдоль проводов линии, т. е. от уравнений Максвелла перейти к более простым телеграфным уравнениям. Телеграфные уравнения позволяют рассматривать распространение волн в длинных линиях и в том случае, когда коэффициент поглощения не мал. Поперечное электрическое поле между проводами линии соответствует полю в конденсаторе, образованному проводами линии, несущими равные и противоположные по знаку заряды q . Заряды связаны с токами, текущими по проводам, уравнением непрерывности

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0.$$

Разность потенциалов (напряжение) между проводами

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = q/C,$$

где C — емкость единицы длины провода. Если емкость постоянна вдоль линии, то

$$\frac{\partial q}{\partial t} = C \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Если, кроме того, между проводами линии имеется проводимость, равная G на единицу длины линии, то

$$-\frac{\partial I}{\partial z} = C \frac{\partial U}{\partial t} + GU$$

или при гармонической зависимости от времени

$$-\frac{dI}{dz} = (G - i\omega C)U. \quad (6.5)$$

Изменение напряжения вдоль проводов линии описывается уравнением

$$-\frac{dU}{dz} = (R - i\omega L)I, \quad (6.6)$$

R и L — погонные сопротивление и индуктивность.

Уравнения (6.5) и (6.6) (так же как и аналогичные уравнения при произвольной зависимости U и I от времени) называются *телеграфными уравнениями*.

Исключая из (6.5) и (6.6) напряжение U , получим уравнение

$$\frac{d^2I}{dz^2} + \omega^2 \left(C + i \frac{G}{\omega} \right) \left(L + i \frac{R}{\omega} \right) I = 0. \quad (6.7)$$

Следовательно,

$$I(z, t) = A_1 \exp [i(kz - \omega t)] + A_2 \exp [-i(kz + \omega t)], \quad (6.8)$$

где

$$k = \omega \sqrt{\left(C + i \frac{G}{\omega} \right) \left(L + i \frac{R}{\omega} \right)}.$$

Если потерь в линии нет, $G = R = 0$, то $k = \omega \sqrt{CL}$. Связь напряжения между проводами линии с током можно найти из уравнения (6.5). Для волны, бегущей в положительном направлении оси z ,

$$U(z, t) = \frac{-ik}{G - i\omega C} I(z, t).$$

Отношение напряжения к току в бегущей волне называется *импедансом линии*

$$Z_0 = \frac{U}{I} = \frac{-ik}{G - i\omega C} = \sqrt{\frac{R - i\omega L}{G - i\omega C}}.$$

В общем случае импеданс — комплексная величина, что указывает на существование сдвига фаз между током и напряжением в линии. Если G и R равны нулю (линия без потерь), то импеданс — действительная величина $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\mu/\epsilon}$, где ϵ и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, окружающей провода длинной линии. С помощью телеграфных уравнений легко определить отражение волн в линии от неоднородных участков — нагрузок, подключенных к линии, и т. п.

В коаксиальном кабеле кроме волн TEM могут распространяться волны волноводного типа, т. е. волны типа E и типа H .

Эти волны могут распространяться только в том случае, когда длина волны меньше критического значения. Основной волной является волна H_{11} , ее критическая длина волны $\lambda_{кр} \approx \pi(a + b)$. Для всех волн, длиннее чем $\pi(a + b)$, по коаксиальному кабелю может распространяться только одна волна — основная волна TEM .

§ 7. Диэлектрические волноводы

В волноводах с металлическими стенками поле сосредоточено в пространстве, ограниченном стенками. В волноводных системах типа двухпроводной линии поле простирается в пространстве на некоторое расстояние от проводов линии, убывая как $1/r$ для волны TEM . Существуют другие волноводные системы открытого типа, в которых могут распространяться волны типа E и типа H . Такими системами являются диэлектрические стержни, пластины или металлические цилиндры (однопроводная линия). Диэлектрические пластины и стержни применяются в последнее время в качестве волноводов в оптическом диапазоне волн (оптические волокна). Оптические волокна представляют собой очень тонкие диэлектрические нити (цилиндры) с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , покрытые слоем из материала с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_2 < \epsilon_1$.

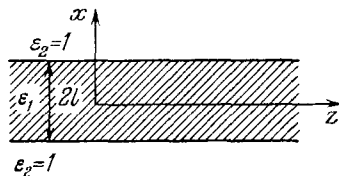
В диэлектрических волноводах поле существует как внутри диэлектрика, так и во внешнем пространстве. Мы познакомимся со свойствами волн в таких системах на примере плоского диэлектрического волновода или слоя (рис. 10.9). Волны распространяются вдоль оси z . Слой диэлектрика неограниченно простирается в направлении осей y и z . Тогда поле от координаты y не зависит. Поле в диэлектрическом слое и вне диэлектрического слоя будем находить с помощью функции $\Pi_z = \Pi(x) e^{ihz}$. Внутри диэлектрического слоя ($|x| \leq l$) функция $\Pi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} + (k_0^2\epsilon_1 - h^2)\Pi = 0, \quad (7.1)$$

вне диэлектрика ($|x| > l$) — уравнению

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} + (k_0^2 - h^2)\Pi = 0. \quad (7.2)$$

Фазовая скорость волн в диэлектрике $v_\phi = \omega/h$, где $h = \sqrt{k_0^2\epsilon_1 - \alpha^2}$, $\alpha > 0$, α — поперечное волновое число в диэлектрике. Если ϵ_1 больше единицы, то для некоторых значений α $h > k_0$ и $v_\phi < c$.



10.9. К определению поля в диэлектрическом слое.

Чтобы выполнялись граничные условия на границе диэлектрического слоя, продольное волновое число должно быть одним и тем же как внутри, так и вне слоя. Тогда $k_0^2 - h^2 = -p^2 < 0$, где $p^2 > 0$, и уравнение (7.2) будет иметь вид

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} - p^2\Pi = 0. \quad (7.3)$$

Уравнению (7.3) удовлетворяют функции

$$Ae^{-px} \text{ и } Be^{px}. \quad (7.4)$$

Но поскольку при $x \rightarrow \infty$ поле должно быть конечным, нужно выбрать только одно решение, и

$$\Pi_z(x, z) = Ae^{-p|x|}e^{ihz} \text{ при } |x| > l. \quad (7.5)$$

Решение (7.5) определяет поле волны, распространяющейся вне диэлектрика. Фазовая скорость волны v_ϕ меньше фазовой скорости плоской волны в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 (в данном случае $v_\phi < c$, поскольку $\epsilon_2 = 1$). Такая волна называется *медленной*. Поле ее сосредоточено у поверхности, вдоль которой распространяется медленная волна, в перпендикулярном направлении поле убывает по экспоненциальному закону. Поэтому такие волны называются *поверхностными волнами*. Поверхностные волны всегда являются медленными.

Внутри диэлектрика функция $\Pi(x)$ удовлетворяет уравнению (7.1). Его решение

$$\Pi(x, z) = (A_1 \cos \alpha x + B_1 \sin \alpha x) e^{ihz} \quad (7.6)$$

определяет значение функции $\Pi(x)$ при $|x| < l$. На границе раздела диэлектрик — воздух должны выполняться граничные условия. При $|x| = l$ $E_{tg_1} = E_{tg_2}$, $H_{tg_1} = H_{tg_2}$. Решения (7.5) и (7.6) позволяют найти компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} внутри и вне слоя.

Рассмотрим волны типа E и выберем зависимость $\Pi^e(x)$ при $|x| < l$ в виде $B_1 \sin \alpha x$. Тогда согласно формулам (2.14) при $|x| < l$

$$E_x = ih\alpha B_1 \cos \alpha x \cdot e^{ihz}, \quad H_y = ik_0\epsilon\alpha B_1 \cos \alpha x \cdot e^{ihz}, \\ E_z = \alpha^2 B_1 \sin \alpha x \cdot e^{ihz}, \quad E_y = H_x = H_z = 0.$$

Поперечные компоненты полей E_x и E_y в этом случае являются четными функциями от x . Волны с таким распределением поля называются *четными волнами*. Продольное волновое число внутри слоя

$$h = \sqrt{k_0^2\epsilon - \alpha^2}.$$

При $|x| > l$, учитывая (7.5), получим

$$E_x = -ikpA \exp(-p|x| + ihz), \quad H_y = -ik_0pA \exp(-p|x| + ihz),$$

$$E_z = -p^2A \exp(-p|x| + ihz), \quad E_y = H_x = H_z = 0.$$

При $|x| = l$ должны выполняться граничные условия. Тангенциальными компонентами в данном случае являются z и y — компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Следовательно, при $|x| = l$

$$\alpha^2 B_1 \sin \alpha l = -p^2 A e^{-pl},$$

$$\varepsilon \alpha B_1 \cos \alpha l = -p A e^{-pl} \quad (7.7)$$

и

$$k_0^2 \varepsilon - \alpha^2 = k_0^2 + p^2, \quad (7.8)$$

или

$$\alpha^2 + p^2 = k_0^2 (\varepsilon - 1).$$

Приравнявая нулю определитель системы (7.7), мы получим второе уравнение, связывающее p и α — характеристическое уравнение для четных волн типа E :

$$\frac{1}{\varepsilon} \alpha l \operatorname{tg} \alpha l = pl. \quad (7.9)$$

Если зависимость $\Pi^e(x)$ при $|x| < l$ взята в виде $A_1 \cos \alpha x$, то поперечные компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} будут нечетными функциями от x . Повторяя вычисления, аналогичные проведенным выше, получим характеристическое уравнение для нечетных волн типа E :

$$-\frac{1}{\varepsilon} \alpha l \operatorname{ctg} \alpha l = pl. \quad (7.10)$$

Для волн типа H поле определяется с помощью функции $\Pi^m(x)$. Функция $\Pi^m(x)$ внутри и вне слоя удовлетворяет уравнениям (7.1) и (7.2) соответственно. Отличными от нуля в этом случае будут компоненты H_x , H_z и E_y . Приравнявая при $|x| = l$ тангенциальные компоненты полей внутри и вне слоя, получим следующие характеристические уравнения для волн типа H :

$$pl = \alpha l \operatorname{tg} \alpha l - \text{четные } H\text{-волны}, \quad (7.11)$$

$$pl = -\alpha l \operatorname{ctg} \alpha l - \text{нечетные } H\text{-волны}. \quad (7.12)$$

Решая характеристическое уравнение для волн данного типа совместно с уравнением (7.8), можно определить поперечные волновые числа (собственные значения).

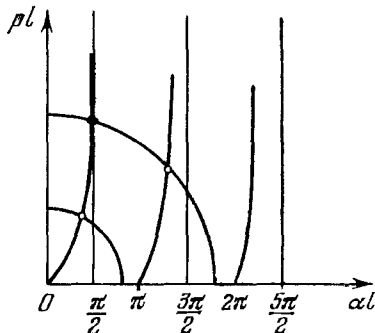
Рассмотрим решение системы уравнений (7.8) и (7.9) для четных волн типа E . Умножим обе части уравнения (7.8) на l^2 , тогда

$$(\alpha l)^2 + (pl)^2 = (k_0 l)^2 (\varepsilon - 1). \quad (7.13)$$

Решение системы уравнений (7.13), (7.9) найдем графически. Согласно (7.9) $pl = \frac{1}{\varepsilon} al \operatorname{tg} \alpha l$; поскольку $pl > 0$, уравнению (7.9) будут удовлетворять такие значения α , при которых $\operatorname{tg} \alpha l > 0$, т. е. когда αl меняется в пределах:

$$0 \leq \alpha l \leq \pi/2, \quad \pi \leq \alpha l \leq \frac{3\pi}{2} \quad \text{и т. д.}$$

Уравнения (7.13) — уравнения семейства окружностей, радиусы которых $R = k_0 l \sqrt{\varepsilon - 1}$ при заданной диэлектрической проницаемости ε , толщине слоя l , являются функциями частоты.



10.10. К графическому определению продольных волновых чисел для четных волн в диэлектрическом волноводе.

для каждой нормальной волны

$$h_{2n,0}^2 = k_0^2 \varepsilon - \alpha_{2n,0}^2. \quad (7.14)$$

Мы приходим к выводу, что в диэлектрическом слое, так же как в металлическом волноводе, существует дискретный спектр четных нормальных волн типа E . Критические частоты определяются из соотношения

$$R_{\text{кр}} = k_0 l \sqrt{\varepsilon - 1} = n\pi, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots$$

При $R < R_{\text{кр}}$ волна данного типа не возбуждается (в металлическом волноводе при $\omega = \omega_{\text{кр}}$ волна возбуждается, но не распространяется). При $R = R_{\text{кр}}$ $p = 0$, $\alpha = k_0 \sqrt{\varepsilon - 1}$, $h = k$ и $v_{\text{ф}} = c$, а не ∞ , как в металлическом волноводе. Как видно из рис. 10.10, при $R \gg R_{\text{кр}}$ для волны данного типа p увеличивается, а α остается приблизительно постоянным. При этом $h \approx k_0 \sqrt{\varepsilon}$, а протяженность поля вне пластины $x \approx 1/p \ll l$. Поле волны данного типа в основном сосредоточено внутри диэлектрика. При

$R \rightarrow R_{кр}$ $p \rightarrow 0$, протяженность поля вне пластины $x \approx \frac{1}{p} \gg l$ — волна излучается в окружающее пластину пространство. Четная волна E_{00} не имеет критической частоты, т. е. может распространяться в диэлектрике на любых частотах.

Характеристическое уравнение для нечетных волн определяет собственные значения для волн E_{10} , E_{30} и т. д. Зависимость pl от αl при учете (7.10) представлена на рис. 10.11. Критические частоты находятся из условия

$$R = k_0 l \sqrt{\varepsilon - 1} = (2n - 1) \frac{\pi}{2}.$$

В остальном свойства нечетных волн такие же, как и свойства четных волн.

Точно так же можно рассмотреть систему четных и нечетных волн типа H , собственные значения для которых находятся из характеристических уравнений для волн типа H .

Нормальные волны типа E и типа H определяют полный набор направляемых волн плоского диэлектрического волновода при условии независимости полей от координаты y . В реальных плоских диэлектрических волноводах, размеры которых ограничены по оси y , поля зависят от y . В этом случае появляются гибридные типы волн, содержащие все шесть компонент поля.

Волны в диэлектрическом цилиндре. Рассмотрим диэлектрический цилиндр радиуса a , с диэлектрической проницаемостью ε_1 , окруженный слоем диэлектрика с $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

В этом случае поле определяется с помощью функции $\Pi_z(r, \varphi, z) = \Pi(r) \exp(in\varphi + ihz)$, где функция $\Pi(r)$ удовлетворяет уравнениям

$$r^2 \frac{d^2 \Pi}{dr^2} + r \frac{d \Pi}{dr} + (\alpha^2 r^2 - n^2) \Pi = 0 \quad \text{при } r < a, \quad (7.15)$$

$$r^2 \frac{d^2 \Pi}{dr^2} + r \frac{d \Pi}{dr} - (p^2 r^2 + n^2) \Pi = 0 \quad \text{при } r > a, \quad (7.16)$$

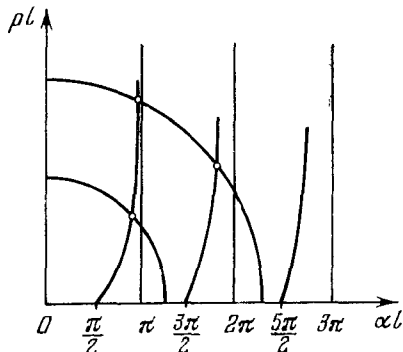
где

$$p^2 = -k_0^2 \varepsilon_2 + h^2, \quad p^2 > 0,$$

$$\alpha^2 = k_0^2 \varepsilon_1 - h^2, \quad \alpha^2 > 0,$$

т. е.

$$k_0^2 \varepsilon_2 < h^2 < k_0^2 \varepsilon_1. \quad (7.17)$$



10.11. К графическому определению продольных волновых чисел для нечетных волн в диэлектрическом волноводе.

В качестве решения уравнения (7.15) в данной задаче необходимо выбрать функцию Бесселя $J_n(\alpha r)$ (пространство по r ограничено и при $r = 0$ поле должно иметь конечное значение). Уравнению (7.16) удовлетворяют модифицированные функции Бесселя:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) \quad \text{и} \quad K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix)$$

($K_n(x)$ — функция Макдональда). При $x \gg 1$

$$I_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^x,$$

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

Поскольку поле вне цилиндра должно оставаться конечным, при $r \rightarrow \infty$ в качестве решения уравнения (7.16) выберем функцию $K_n(pr)$.

Рассмотрим цилиндрически симметричную волну, т. е. положим $n = 0$, тогда

$$\Pi_z(r, z) = A J_0(\alpha r) e^{ihz} \quad \text{при} \quad r < a,$$

$$\Pi_z(r, z) = A_1 K_0(pr) e^{ihz} \quad \text{при} \quad r > a.$$

Характеристическое уравнение получим, приравнявая тангенциальные компоненты векторов E и H при $r = a$. Для симметричной волны типа E отличными от нуля в этом случае будут компоненты E_z , E_r и H_φ :

$$\begin{aligned} E_z &= \alpha^2 A J_0(\alpha r) e^{ihz} & \text{при} \quad r < a, \\ E_z &= -p^2 A_1 K_0(pr) e^{ihz} & \text{при} \quad r > a, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} H_\varphi &= -ik_0 \varepsilon_1 \alpha A J_1(\alpha r) e^{ihz} & \text{при} \quad r < a, \\ H_\varphi &= -ik_0 \varepsilon_2 p A_1 K_1(pr) e^{ihz} & \text{при} \quad r > a. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Здесь учтено, что $Z_0'(x) = -Z_1(x)$ (Z_0 — любая цилиндрическая функция). При $r = a$

$$\alpha^2 A J_0(\alpha a) = -p^2 A_1 K_0(pa),$$

$$\varepsilon_1 \alpha A J_1(\alpha a) = p \varepsilon_2 A_1 K_1(pa)$$

или

$$\alpha a \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{J_0(\alpha a)}{J_1(\alpha a)} = -pa \frac{K_0(pa)}{K_1(pa)}. \quad (7.20)$$

Второе уравнение, связывающее p и α , найдем из условия $h_{r < a} = h_{r > a}$:

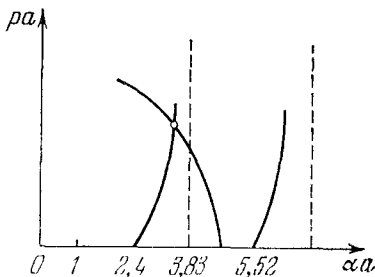
$$(pa)^2 + (\alpha a)^2 = (k_0 a)^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (7.21)$$

Решение системы уравнений (7.20), (7.21) исследуем графически, подобно тому, как это было сделано для плоского диэлектрического слоя.

Правая часть уравнения (7.20) отрицательна при любых ra . Поэтому ca может принимать только те значения, при которых функции $J_0(ca)$ и $J_1(ca)$ имеют разные знаки, т. е. значения ca должны лежать в интервалах между корнями функций $J_0(ca)$ и $J_1(ca)$:

$$2,4 \leq ca \leq 3,83, \\ 5,52 \leq ca \leq 7,02 \text{ и т. д.}$$

Кривая $ra = f(ca)$ состоит из ряда ветвей (рис. 10.12). Значения ra и ca , удовлетворяющие условиям задачи, находятся как координаты точек пересечения с окружностями (7.21), радиусы которых $R = k_0 a \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$ зависят от частоты возбуждения (при заданных a , ε_1 и ε_2). При любых значениях R может существовать лишь конечное число симметричных E -волн в диэлектрическом стержне. Критические частоты находятся из условия



10.12. К графическому определению продольных волновых чисел в диэлектрическом цилиндрическом волноводе.

$$k_0 = \frac{v_{0n}}{a \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}}, \quad (7.22)$$

где v_{0n} — n -й корень функции Бесселя нулевого порядка. При $k_0 < \frac{2,4}{a \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}}$ вообще не существует симметричных волн типа E в диэлектрическом цилиндрическом волноводе. При $\omega \rightarrow \omega_{кр}$ $p \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow k_0 \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$, при этом $h \rightarrow k_0 \sqrt{\varepsilon_2}$, и протяженность поля вне диэлектрического цилиндра, определяемая, как $r = \frac{1}{p} \gg a$, велика. Волна распространяется в диэлектрической оболочке, окружающей цилиндр, фазовая скорость $v_{\phi} \approx c/\sqrt{\varepsilon_2}$. При $\omega \gg \omega_{кр}$ для волны данного типа ca меняется мало, ra при этом неограниченно растет (рис. 10.12). В этом случае поле нормальной волны данного типа сосредоточено в диэлектрическом стержне и убывает в e раз на расстоянии $r \approx 1/p$.

Таким образом, свойства симметричных волн типа E в диэлектрическом цилиндре аналогичны свойствам волн типа E в диэлектрическом слое.

Изучение симметричных волн типа H производится таким же образом. Поле этих волн также содержит три отличные от нуля

компоненты поля, которые выражаются через функцию $P^m(r)$, удовлетворяющую тем же уравнениям (7.15) и (7.16). Волны H_{0n} и E_{0n} имеют одни и те же критические частоты.

Заметим, что величина критической частоты (7.22) зависит как от радиуса цилиндра, так и от разности $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Если радиус и разность $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ достаточно малы, то критическая частота основной волны может быть очень высокой. Именно поэтому в оптических волокнах диэлектрическая нить покрывается диэлектрической оболочкой. Если выбрать отношение $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ как можно ближе к единице, то даже при относительно большом радиусе внутреннего цилиндра (в несколько микрон) критическая частота будет столь велика, что по волноводу будет распространяться лишь одна нормальная волна (одномодовый режим).

Для цилиндрически-несимметричных волн моды диэлектрического волновода имеют шесть компонент поля и их невозможно разделить на поперечно-электрические и поперечно-магнитные. Все шесть компонент поля выражаются одновременно через две функции P_z^e и P_z^m , каждая из которых содержит две произвольные постоянные. Граничных условий тоже четыре для компонент E_z , E_ϕ , H_z и H_ϕ . Граничные условия приводят к четырем уравнениям для произвольных постоянных. Условие их совместности определяет характеристическое уравнение, связывающее p и α . Кривые, определяющие зависимость pa от αa , имеют такой же вид, как на рис. 10.12. Фазовая скорость меняется в пределах

$$c/\sqrt{\varepsilon_1} \leq v_\phi \leq c/\sqrt{\varepsilon_2}.$$

Сохраняется общий характер изменения поля при возрастании частоты от $\omega = \omega_{кр}$ до $\omega \gg \omega_{кр}$. Среди несимметричных волн есть волна с индексами $m = 1$, $n = 1$, для которой нет критической частоты, т. е. волна, которая может распространяться на любых частотах (аналогично симметричной волне E_{00} в диэлектрическом слое).

§ 8. Однопроводная металлическая линия

В § 7 мы рассматривали волны в диэлектрическом волноводе и считали при этом, что ε , а следовательно, и \hbar — величины действительные. Ясно, что в этом случае затухание волн при распространении вдоль оси z не происходит. Рассмотрим теперь распространение волн вдоль металлического цилиндра радиуса a с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$, причем $|\varepsilon| \gg 1$, а импеданс металлического провода $|Z_0| \ll 1$. В этом случае можно не находить поле внутри цилиндра, которое проникает в цилиндр лишь на толщину скин-слоя, а определить поле вне цилиндра и исполь-

зовать приближенные граничные условия Леонтовича. Поскольку поверхность провода не плоская, дополнительное требование, позволяющее воспользоваться приближенными граничными условиями Леонтовича, сводится к тому, чтобы толщина скин-слоя d была бы много меньше радиуса провода a : $d \ll a$, или, учитывая, что $d = 1/k_0 n$, получим условие

$$a \gg \frac{1}{k_0 n}. \quad (8.1)$$

Будем рассматривать распространение симметричной волны типа E . Отличными от нуля в этой волне будут компоненты E_r , E_z и H_φ . Согласно приближенным граничным условиям Леонтовича тангенциальные компоненты E_z и H_φ связаны соотношением

$$E_z = Z_0 H_\varphi. \quad (8.2)$$

При $r > a$ компоненты E_z и H_φ определяются согласно (7.18) и (7.19):

$$\begin{aligned} E_z &= -p^2 A_1 K_0(pr) e^{ihz}, \\ H_\varphi &= -ik_0 p A_1 K_1(pr) e^{ihz}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Подставляя (8.3) в (8.2), получим характеристическое уравнение для определения $h = \sqrt{k_0^2 + p^2}$:

$$pa \frac{K_0(pa)}{K_1(pa)} = ik_0 a Z_0. \quad (8.4)$$

Поскольку $|Z_0| \ll 1$, а $k_0 a$ порядка единицы или меньше, правая часть уравнения (8.4) мала, поэтому уравнению (8.4) могут удовлетворять только значения $pa \ll 1$. При $pa \ll 1$ $K_0(pa) \approx \ln \frac{2}{\gamma pa}$,

$K_1(pa) = \frac{1}{pa}$ (здесь γ — постоянная Эйлера), и характеристическое уравнение имеет вид

$$(pa)^2 \ln \frac{2}{\gamma pa} = iZ_0 k_0 a. \quad (8.5)$$

Уравнение (8.5) имеет комплексные корни, поэтому $h = h' + ih''$. Для численного решения уравнения (8.5) применяется метод итераций.

Для оценки p , h' и h'' можно использовать следующий способ. Величина $\frac{2}{\gamma pa} \gg 1$, логарифм от большого числа мало меняется при изменении аргумента, поэтому примем, что $\ln \frac{2}{\gamma pa} = \text{const}$. Согласно (4.10)

$$Z_0 = \frac{1-i}{2} k_0 d.$$

Поэтому из (8.5) получим

$$\frac{p^2}{k_0^2} = \frac{h^2 - k_0^2}{k_0^2} = \frac{1}{\ln \frac{2}{\gamma pa}} \frac{1+i}{2} \frac{d}{a},$$

$$h = h' + ih'' \approx k_0 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{1}{\ln \left(\frac{2}{\gamma pa} \right)} \frac{d}{a} \right) + \frac{i}{4} k_0 \frac{1}{\ln \left(\frac{2}{\gamma pa} \right)} \frac{d}{a}. \quad (8.6)$$

Из выражения (8.6) следует, что $h' > k_0$ — волна медленная; $h'' > 0$ — распространение волны сопровождается затуханием.

Эффективный радиус поля $r_{\text{эфф}}$ определяется расстоянием от провода, на котором поле убывает в e раз,

$$r_{\text{эфф}} = \frac{1}{\text{Re}(p)} \approx \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{a}{d}}.$$

Затухание h'' имеет порядок kd/a . При уменьшении толщины скин-слоя затухание убывает быстрее, чем возрастает эффективный радиус. Провод с конечной проводимостью является направляющей линией, вдоль которой может распространяться поверхностная волна, поле которой сконцентрировано у поверхности провода. Чем меньше толщина скин-слоя (больше проводимость), тем меньше концентрация.

ОТКРЫТЫЕ ЛИНЗОВЫЕ ЛИНИИ И ОТКРЫТЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Для коротких электромагнитных волн, длина которых менее 1 мм, резонаторы и волноводы обычных типов становятся практически непригодными. В § 5 гл. X было показано, что с уменьшением длины волны λ добротность резонатора Q для основных типов колебаний уменьшается по закону $Q \sim \lambda^{1/2}$. При использовании высших типов колебаний необходима очень большая точность в изготовлении камеры резонатора и обработке ее поверхности, что не всегда технически осуществимо; в противном случае резонансные кривые соседних мод перекрываются, и система теряет свои частотно-избирательные свойства.

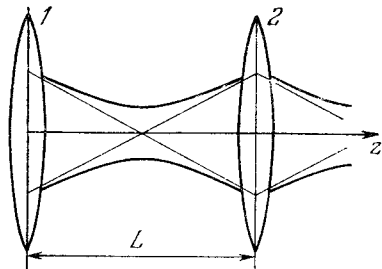
Поэтому в технике волн миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов нашли широкое применение волноводные и резонансные системы, основанные на совершенно иных принципах — открытые линзовые и зеркальные линии и открытые резонаторы. Эти системы играют также основную роль в лазерной технике и оптических устройствах, осуществляющих фокусировку и различные другие преобразования световых пучков. Открытые резонаторы являются одними из основных элементов конструкции большинства лазеров; отсутствие боковых стенок позволяет удобным способом вводить излучение накачки для возбуждения активного вещества.

§ 1. Линзовые линии

При распространении в свободном пространстве ширина пучка электромагнитной волны увеличивается из-за дифракции. Как было показано в § 4 гл. VIII, плоская волна постепенно превращается в сферически расходящуюся. На расстояниях $D^2 \gg 1$ (где $D = 2z/ka^2$) фронт волны искривляется, становится параболическим, и волна распространяется в конусе с углом раскрытия $2/ka$. Для того чтобы передать энергию электромагнитной волны направленным пучком на расстояния $D^2 \gg 1$, необходимо скомпенсировать естественную дифракционную расходимость. С этой целью можно произвести коррекцию фазового фронта волны с помощью собирающей линзы и добиться того, что расходимость уменьшится; если оптическая сила линзы достаточно велика, то волна может даже стать сходящейся. Однако эта сходя-

щаяся волна после прохождения фокальной области вновь станет расходящейся, и для коррекции фронта нужно использовать вторую собирающую линзу. Этот процесс может быть продолжен. Таким образом, для передачи энергии на значительные расстояния нужно использовать последовательность линз, расположенных на общей оптической оси, т.е. *линзовую линию*.

Мы рассмотрим периодическую линию, состоящую из одинаковых круглых линз, расположенных на одинаковом расстоянии L друг от друга (рис. 11.1).



11.1. Участок линзовой линии.

Задачу будем решать в квазиоптическом приближении, т.е. примем, что характерная ширина пучка много больше длины волны ($ka \gg 1$), но мала по сравнению с пространственным периодом системы ($a \ll L$). При этом распространение волны в пространстве между линзами удобно описывать параболическим уравнением теории дифракции для комплексной амплитуды волны A (см. (4.17)

гл. VIII); в случае аксиально-симметричного пучка оно имеет вид

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} = 0. \quad (1.1)$$

Считаем, что ширина a пучка, формирующегося в линзовой линии, много меньше радиуса линз r_0 . Это допущение позволяет пренебречь краевыми эффектами, связанными с конечностью апертуры оптической системы. Однако нужно иметь в виду, что в приближении бесконечных линз ($r_0 \rightarrow \infty$) отсутствуют потери на излучение — так называемые *радиационные потери*. В реальных системах они возникают вследствие того, что часть энергии пучка, формируемого предыдущей линзой, проходит мимо последующей линзы и необратимо излучается в пространство. Помимо радиационных потерь энергия поглощается в материале линз из-за его неидеальной прозрачности; эти (диэлектрические) потери мы также будем считать пренебрежимо малыми.

Перейдем к нахождению *собственных волн* линзовой линии. Потребуем, чтобы форма радиального распределения комплексной амплитуды волны не изменялась при переходе от линзы к линзе. Пусть на выходе тонкой линзы 1, расположенной в осевом сечении $z = 0$ (см. рис. 11.1), распределение амплитуды дается функцией $A(z = 0, r)$. Эту функцию используем в качестве граничного условия для решения уравнения (1.1), описывающего распространение волны в пространстве между линзами 1 и 2. Обозначим полученное таким образом решение, дающее распределение амплитуды

на входе линзы 2, через $A(z = L, r) \cdot \exp(ikL)$. Чтобы записать решение на выходе тонкой линзы 2, нужно ввести зависящий от r фазовый сдвиг. Поскольку в квазиоптическом приближении искривленные волновые фронты приближенно заменяются параболическими, линзу можно считать квадратичным корректором и описывать ее влияние умножением амплитуды на $\exp(-ikr^2/2f)$, где f — фокусное расстояние линзы.

Таким образом, условие повторяемости (поле на выходе линзы 2 с точностью до не зависящего от r множителя χ повторяет поле на выходе линзы 1) имеет следующий вид:

$$\chi A(z = 0, r) = \exp(ikL) \exp\left(-i \frac{kr^2}{2f}\right) A(z = L, r). \quad (1.2)$$

Воспользуемся в качестве функции $A(z, r)$ решением параболического уравнения (1.1) в виде сходящегося пучка гауссовой формы. Это решение было получено в § 4 гл. VIII; оно дается выражениями (4.25), (4.26). С его помощью условие (1.2) запишется как

$$\begin{aligned} \chi A(0) \exp\left[-\frac{r^2}{a^2} \left(1 + \frac{i}{D} \frac{L}{R}\right)\right] = \\ = \exp\left(ikL - i\nu \frac{k}{L} r^2\right) \frac{A(0)}{1 - \frac{L}{R} + iD} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2} \frac{1 + \frac{i}{D} \frac{L}{R}}{1 - \frac{L}{R} + iD}\right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь для удобства введено безразмерное число $\nu = L/2f$, $D = 2L/ka^2$. Для того чтобы зависящие от r функции были одинаковыми в правой и левой частях соотношения (1.3), положим

$$1 + \frac{i}{D} \frac{L}{R} = i \frac{2\nu}{D} + \frac{1 + \frac{i}{D} \frac{L}{R}}{1 - \frac{L}{R} + iD}. \quad (1.4)$$

Разделяя в этом уравнении действительную и мнимую части, найдем

$$\frac{L}{R} = \nu, \quad D = \frac{2L}{ka^2} = \sqrt{2\nu - \nu^2}. \quad (1.5)$$

Квадрат ширины пучка собственной волны, формируемой в линзовой линии, равен

$$a^2 = \frac{2L}{k} \frac{1}{\sqrt{2\nu - \nu^2}}. \quad (1.6)$$

Перейдем к анализу полученных результатов. Из формулы (1.6) следует, что амплитуда волны убывает при $r \rightarrow \infty$ не для всех значений ν , а только при

$$0 < \nu < 2, \quad f > L/4. \quad (1.7)$$

Отрицательные ν соответствуют рассеивающим линзам; в линии из таких линз собственная волна сформироваться не может. Когда $\nu > 2$, т. е. фокусное расстояние меньше, чем $1/4$ расстояния между линзами, собственная волна также не формируется.

Ширина пучка $a(\nu)$ имеет минимум при $\nu = 1$, когда $f = L/2$. Такая система называется *конфокальной*, поскольку фокусы соседних линз совпадают.

Потери энергии волны определяются величиной $1 - |\chi|^2$. Как следует из формулы (1.3),

$$|\chi| = \left| \frac{\exp(ikL)}{1 - \frac{L}{R} + iD} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{L}{R}\right)^2 + D^2}}. \quad (1.8)$$

Пользуясь соотношениями (1.5), нетрудно показать, что $|\chi| = 1$ при любых значениях числа ν , т. е. у собственной волны линзовой линии потери отсутствуют.

Найденная собственная волна является основной модой. В линзовых линиях могут формироваться также собственные волны высших порядков. Их поперечная структура аналогична структуре высших мод пучков, распространяющихся в свободном пространстве (см. (4.21) гл. VIII). Чем выше номер волны m , тем при больших значениях r ее амплитуда начинает заметно уменьшаться. Следовательно, с увеличением m возрастают и радиационные потери.

Для детального рассмотрения вопроса о затухании собственных волн и расчета их структуры существует более сложный подход, основанный на использовании интегральной формы соотношения (1.2). Подставляя в правую часть (1.2) общее выражение (4.3) гл. VIII для решения параболического уравнения, получим

$$\frac{k}{2\pi i L} e^{ikL} e^{i\Psi(x,y)} \iint_S A(\xi, \eta, 0) \times \\ \times \exp\left\{\frac{ik}{2L} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right\} d\xi d\eta = \chi A(x, y, 0). \quad (1.9)$$

В плоскости линзы введены декартовы координаты x, y ; интеграл берется по конечной апертуре S ; функция $\Psi(x, y)$ описывает коррекцию фазового фронта, вносимую линзой. Формула (1.9) есть *интегральное уравнение Фредгольма* второго рода относительно неизвестной функции $A(x, y, 0)$. Это уравнение имеет бесконечную последовательность собственных значений χ_m и соответствующих им собственных функций A_m . Поскольку ядро уравнения (1.9) симметрично, различные его собственные функции ортогональны.

Более простой вид (1.9) принимает в двумерном случае, когда зависимость от y отсутствует. Интегрируя (1.9) по η в бесконечных

пределах, получим

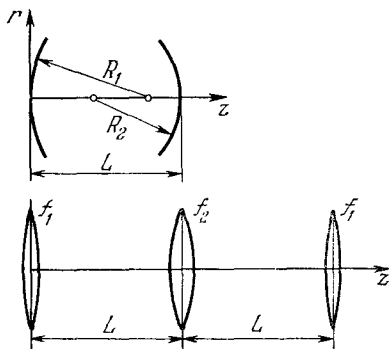
$$\sqrt{\frac{k}{2\pi i L}} e^{ikL} e^{i\Psi(x)} \int_{-x_0}^{x_0} A(\xi, 0) \exp\left[\frac{ik}{2L}(x - \xi)^2\right] d\xi = \chi A(x, 0). \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) соответствует линзам с цилиндрическими поверхностями, образующие которых параллельны оси y ; размер этих линз вдоль оси x равен $2x_0$. Для линз с конечной апертурой S или x_0 решение уравнений (1.9), (1.10) обычно производится численными методами. Иногда используется описание собственной функции для уравнений с конечными пределами в виде разложения по собственным функциям уравнений, соответствующего бесконечным линзам.

§ 2. Открытые резонаторы

Изучение волновых процессов в открытых резонаторах приобрело особенно важное значение в связи с их использованием в лазерах и устройствах нелинейной оптики (параметрических генераторах света и др.). Открытый резонатор состоит обычно из двух плоских параллельных или сферических зеркал, расположенных на общей оптической оси. Процесс распространения волнового пучка в такой системе аналогичен его поведению в линзовой линии. Различие состоит в том, что в резонаторе оптический путь складывается из многократных проходов волной одного и того же расстояния L между зеркалами. Поскольку радиусы кривизны зеркал R_1 и R_2 могут быть различными, в качестве эквивалентной линзовой линии следует взять периодическую структуру, изображенную на рис. 11.2. Она состоит из чередующихся линз двух типов (с фокусными расстояниями $f_1 = R_1/2$ и $f_2 = R_2/2$), которые расположены на одном и том же расстоянии L друг от друга.

Резонатор со сферическими зеркалами различной кривизны может быть как устойчивым, так и неустойчивым. В устойчивом резонаторе пучок, отражаясь от зеркал, испытывает периодическую фокусировку. В неустойчивом резонаторе, напротив, при распространении пучок все более расширяется; его ширина может стать сравнимой с размером зеркал, что приведет к сильным радиационным потерям.



11.2. Открытый резонатор и эквивалентная линзовая линия.

Для исследования вопроса об устойчивости воспользуемся условием повторяемости (1.2), изменив его соответствующим образом с учетом различной кривизны идеально отражающих зеркал. Запишем решение параболического уравнения (1.1) для амплитуды дифрагирующей волны, заданной на выходе первого зеркала ($z = 0$) в виде сходящегося гауссова пучка

$$A(z = 0, r) = A(0) \exp \left[-\frac{r^2}{a_1^2} \left(1 + i \frac{ka_1^2}{2R_1} \right) \right]. \quad (2.1)$$

На входе второго зеркала ($z = L$) это решение имеет вид

$$A(z = L, r) = \frac{A(0)}{1 - v_1 + iD_1} \exp \left[-\frac{r^2}{a_1^2} \frac{1 + \frac{i}{D_1} v_1}{1 - v_1 + iD_1} \right] \exp(ikL). \quad (2.2)$$

Здесь a_1 — характерная ширина пучка на первом зеркале; $v_1 = L/R_1$. Второе зеркало при отражении вносит фазовую коррекцию; поэтому для получения поля на его выходе нужно умножить (2.2) на $\exp(-iv_2kr^2/L)$, где $v_2 = L/R_2$. Предполагаем, что полученное таким образом выражение описывает пучок, который на выходе второго зеркала по-прежнему имеет гауссову форму, но с другой шириной a_2 и другой кривизной фазового фронта:

$$A(z = L, r) = \chi A(0) \exp \left[-\frac{r^2}{a_2^2} \left(1 + i \frac{ka_2^2}{2R_2} \right) \right]. \quad (2.3)$$

Отсюда следует условие, аналогичное (1.2), (1.3):

$$\begin{aligned} \frac{A(0)}{1 - v_1 + iD_1} \exp \left[-\frac{r^2}{a_1^2} \frac{1 + \frac{i}{D_1} v_1}{1 - v_1 + iD_1} \right] \exp \left(i\tilde{k}L - iv_2 \frac{k}{L} r^2 \right) = \\ = \chi A(0) \exp \left[-\frac{r^2}{a_2^2} \left(1 + \frac{i}{D_2} v_2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Нужно заметить, что мы еще не рассмотрели полного цикла, т. е. не записали, как изменяется амплитуда волны при распространении в обратном направлении — в пространстве между зеркалами 2 и 1 и при отражении от первого зеркала. Нетрудно видеть, что уравнение, соответствующее этим процессам, получается из (2.4) переобозначением индексов 1 и 2 у всех величин. Однако для исследования устойчивости резонатора достаточно воспользоваться лишь условием (2.4).

Введем удобные обозначения:

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{k}{2L} \mu_1, \quad \frac{1}{a_2^2} = \frac{k}{2L} \mu_2. \quad (2.5)$$

Тогда $D_1 = \mu_1$, $D_2 = \mu_2$ и следующее из (2.4) уравнение для зависящих от r функций принимает вид

$$\mu_1 \frac{1 + \frac{i}{\mu_1} v_1}{1 - v_1 + i\mu_1} + i2v_2 = \mu_2 \left(1 + \frac{i}{\mu_2} v_2\right). \quad (2.6)$$

Действительная и мнимая части этого уравнения дают

$$\mu_1 (1 - v_2) = \mu_2 (1 - v_1), \quad \mu_1 \mu_2 = v_1 + v_2 - v_1 v_2. \quad (2.7)$$

Отсюда после несложных преобразований находим

$$\mu_1 = |1 - v_1| \sqrt{\frac{1}{(1 - v_1)(1 - v_2)} - 1},$$

$$\mu_2 = |1 - v_2| \sqrt{\frac{1}{(1 - v_1)(1 - v_2)} - 1}. \quad (2.8)$$

Согласно обозначениям (2.5) μ_1 и μ_2 должны быть действительными и положительными величинами. Это возможно только при выполнении условия

$$0 < (1 - v_1)(1 - v_2) < 1 \quad \text{или} \quad 0 < \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1. \quad (2.9)$$

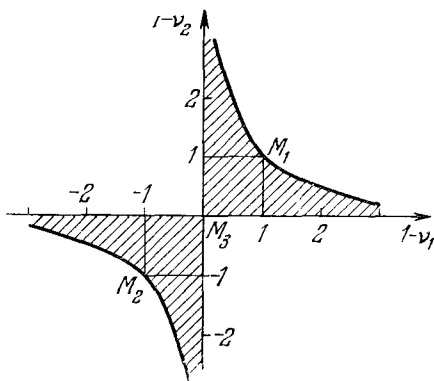
В противном случае числа μ_1 , μ_2 окажутся мнимыми, а амплитуды волны на зеркалах не будут убывать при удалении от центра пучка.

На рис. 11.3 показана область устойчивости; границы заштрихованных областей определяются из уравнений:

$$(1 - v_1)(1 - v_2) = 1 - \text{гиперболы}$$

и

$$(1 - v_1)(1 - v_2) = 0 - \text{координатные оси.}$$



11.3. Диаграмма устойчивости для открытых резонаторов.

Точка $M_1(1, 1)$ соответствует резонатору с плоскими зеркалами ($R_1 = R_2 = \infty$); она лежит на границе заштрихованной области устойчивости. Это означает, что небольшое искривление хотя бы одного зеркала в ту или другую сторону делает резонатор либо устойчивым, либо неустойчивым. То же самое относится и к концентрическому резонатору с $R_1 = R_2 = L/2$; ему соответствует точка $M_2(-1, -1)$. Если одно из зеркал плоское ($R_2 \rightarrow \infty$), то резонатор будет устойчивым при всех $R_1 > L$. В случае одинаковых зеркал устойчивость имеет место при $R > L/2$.

Точка $M_3(0, 0)$, соответствующая конфокальному резонатору ($R_1 = R_2 = L$), лежит на границе двух заштрихованных областей. Колебания в нем неустойчивы, поскольку при таком изменении радиусов кривизны зеркал, когда один из них увеличивается, а другой уменьшается ($R_1 > L$, $R_2 < L$ или $R_1 < L$, $R_2 > L$), точка M_3 переходит в незаштрихованную область. Это может привести к большим потерям и сильному затуханию колебательного процесса. Технически этого эффекта можно избежать, поместив в фокальную плоскость сферического зеркала с $R_1 = L$ плоское зеркало с $R_2 = \infty$. Такой полуконфокальный резонатор длиной $L/2$ соответствует конфокальному резонатору длиной L , поскольку второе сферическое зеркало эквивалентно изображению первого в плоском зеркале.

Отметим, что неустойчивые резонаторы (наряду с устойчивыми) широко применяются в устройствах квантовой электроники; их использование при наличии активной среды часто дает ряд преимуществ.

Перейдем теперь к определению собственных частот и типов колебаний. Рассмотрим резонатор, образованный двумя зеркалами квадратной формы. Распространение волнового пучка в пространстве между зеркалами в этом случае описывается параболическим уравнением вида

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0. \quad (2.10)$$

Здесь x, y — декартовы координаты в плоскости, перпендикулярной оси пучка. Решение (2.10) можно представить как

$$A(x, y, z) = A_n(x, z) A_m(y, z);$$

функции A_n, A_m должны при этом удовлетворять более простым уравнениям

$$2ik \frac{\partial A_n}{\partial z} + \frac{\partial^2 A_n}{\partial x^2} = 0, \quad 2ik \frac{\partial A_m}{\partial z} + \frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} = 0. \quad (2.11)$$

Решение, например, первого из уравнений (2.11) для зеркал с бесконечной апертурой имеет вид

$$A_n(x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} \int_{-\infty}^{\infty} A_n(\xi, 0) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x - \xi)^2\right] d\xi. \quad (2.12)$$

Вычислим интеграл (2.12) для важного частного случая, когда распределение амплитуды в сечении $z = 0$ описывается выражением

$$A_n(x, 0) = A_n(0) \exp(-x^2/a^2) H_n(x/b). \quad (2.13)$$

Здесь

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

— полином Эрмита порядка n ; a , b — константы, имеющие смысл характерных масштабов изменения соответствующих функций с координатой x . Подставляя (2.13) в (2.12) и пользуясь интегральным соотношением, известным из теории полиномов Эрмита,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2} H_n(\beta\xi) d\xi = \sqrt{\pi} (1-\beta^2)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right), \quad (2.14)$$

найдем

$$A_n = \frac{A_n(0)}{\sqrt{1+iD}} \exp\left[-\frac{x^2}{a^2(1+iD)}\right] \left[\frac{1+iD(1-a^2/b^2)}{1+iD}\right]^{\frac{n}{2}} \times \\ \times H_n\left[\frac{x}{b\sqrt{1+iD}} \frac{1}{\sqrt{1+iD(1-a^2/b^2)}}\right], \quad D = \frac{2z}{ka^2}. \quad (2.15)$$

Выражение (2.15) представляет наибольший интерес в двух случаях. Когда $a = b$, из формулы (2.15) получается автомоделное решение

$$A_n = \frac{A_n(0)}{(1+iD)^{\frac{n+1}{2}}} \exp(-\xi) H_n(\sqrt{\xi}), \quad \xi = \frac{x^2}{a^2(1+iD)}, \quad (2.16)$$

аналогичное решению (4.18) — (4.21) гл. VIII для цилиндрически-симметричного пучка. При $a = b\sqrt{2}$ из формулы (2.15) имеем

$$A_n = \frac{A_n(0)}{\sqrt{1+iD}} \exp\left[-\frac{x^2}{a^2(1+iD)}\right] \left[\frac{1-iD}{1+iD}\right]^{\frac{n}{2}} H_n\left(\sqrt{2} \frac{x}{a\sqrt{1+iD}}\right). \quad (2.17)$$

Функции $A_n(x, z)$, определяемые формулой (2.17), замечательны тем, что при $z = 0$ они ортогональны с весом, равным единице:

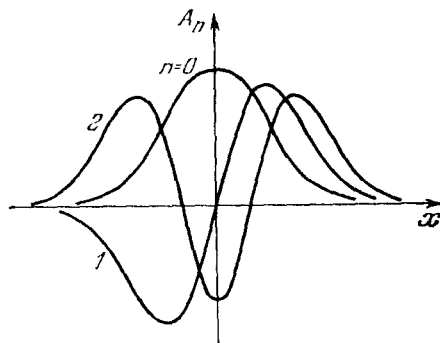
$$\int_{-\infty}^{\infty} A_n(x, 0) A_{n'}(x, 0) dx = \\ = A_n(0) A_{n'}(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x^2}{a^2}} H_n\left(\sqrt{2} \frac{x}{a}\right) H_{n'}\left(\sqrt{2} \frac{x}{a}\right) dx = \\ = a \sqrt{\frac{\pi}{2}} n! 2^n \delta_{n,n'}.$$

Эти типы распределений поля называют модами. Структура первых трех нормированных функций $A_n(x, 0)$ (для $n = 0, 1, 2$) показана на рис. 11.4.

С учетом аналогичной (2.17) зависимости от y моды пучков прямоугольной формы запишутся в виде

$$A_{nm} = \frac{A_{nm}(0)}{1+iD} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{a^2(1+iD)} \right] \left[\frac{1-iD}{1+iD} \right]^{\frac{n+m}{2}} \times \\ \times H_n \left(\sqrt{2} \frac{x}{a \sqrt{1+D^2}} \right) H_m \left(\sqrt{2} \frac{y}{a \sqrt{1+D^2}} \right). \quad (2.18)$$

Распределения полей на квадратных зеркалах резонатора для нескольких типов колебаний (обозначаемых TEM_{nm}) изображены на рис. 11.5.



11.4. Структура первых трех поперечных мод в резонаторе.

Для учета кривизны R^{-1} волнового фронта в сходящемся пучке. После этого из (2.18) нетрудно найти

$$\text{Arg } A_{nm}(0, 0, z) = \text{Arg } \chi_{mn} = -i(n+m+1) \arctg \frac{D}{1 - \frac{z}{R}}. \quad (2.19)$$

Из формулы (2.19) следует, что скорость распространения волны в пучке из-за дифракции отличается от скорости плоской волны. С ростом номеров n , m фазовый сдвиг на оси пучка увеличивается. В резонаторах это явление приводит к различию между частотами разных типов колебаний.

Собственные частоты можно найти из следующего условия: фазовый сдвиг при прохождении волной расстояния между зеркалами с радиусами кривизны R_1 , R_2 (туда и обратно) должен быть равен $2\pi(q+1)$, где q — целое число нулей стоячей волны, формирующейся вдоль оси резонатора. Полный фазовый сдвиг складывается из оптического пути $2kL$ и дифракционных фазовых сдвигов, поэтому

$$2\pi(q+1) =$$

$$= 2kL - (n+m+1) \arctg \frac{D_1}{1 - L/R_1} - (n+m+1) \arctg \frac{D_2}{1 - L/R_2}.$$

Чтобы найти собственные частоты резонатора, соответствующие различным поперечным модам TEM_{nm} , нам потребуется определить фазовый сдвиг волны на оси пучка. Положим в решении (2.18) $x = y = 0$, а также заменим $1+iD \rightarrow 1 - z/R + iD$. Последняя замена, как и в § 4 гл. VIII при выводе формулы (4.26), необходи-

ма для учета кривизны R^{-1} волнового фронта в сходящемся пучке. После этого из (2.18) нетрудно найти

$$\text{Arg } A_{nm}(0, 0, z) = \text{Arg } \chi_{mn} = -i(n+m+1) \arctg \frac{D}{1 - \frac{z}{R}}. \quad (2.19)$$

Из формулы (2.19) следует, что скорость распространения волны в пучке из-за дифракции отличается от скорости плоской волны. С ростом номеров n , m фазовый сдвиг на оси пучка увеличивается. В резонаторах это явление приводит к различию между частотами разных типов колебаний.

Собственные частоты можно найти из следующего условия: фазовый сдвиг при прохождении волной расстояния между зеркалами с радиусами кривизны R_1 , R_2 (туда и обратно) должен быть равен $2\pi(q+1)$, где q — целое число нулей стоячей волны, формирующейся вдоль оси резонатора. Полный фазовый сдвиг складывается из оптического пути $2kL$ и дифракционных фазовых сдвигов, поэтому

$$2\pi(q+1) =$$

$$= 2kL - (n+m+1) \arctg \frac{D_1}{1 - L/R_1} - (n+m+1) \arctg \frac{D_2}{1 - L/R_2}.$$

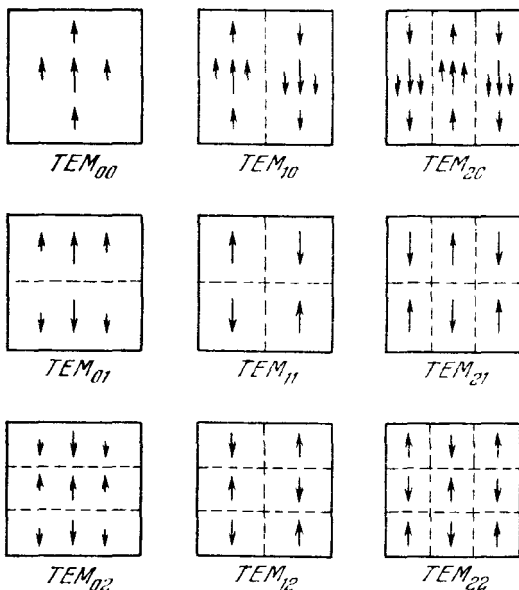
С помощью введенных выше обозначений $D_{1,2} = \mu_{1,2}$, $L/R_{1,2} = \nu_{1,2}$ и решения (2.8) получаем ($k_{nmq} = 2\pi\nu_{nmq}/c$)

$$\frac{2L}{c} \nu_{nmq} = (q+1) + \frac{1}{\pi} (n+m+1) \arccos \sqrt{(1-\nu_1)(1-\nu_2)}. \quad (2.20)$$

В случае конфокального резонатора

$$\nu_{nmq} = \frac{c}{2L} \left[(q+1) + \frac{1}{2} (n+m+1) \right]. \quad (2.21)$$

Обычно число q очень велико (например, в газовых лазерах $q \sim 10^6$), а числа n и m принимают значения $n, m = 0, 1, 2, \dots$



11.5. Типы TEM_{nm} распределений поля на квадратных зеркалах в резонаторе.

При фиксированных n и m резонансные частоты соседних продольных мод отличаются на $\Delta\nu = c/2L$.

С ростом поперечных номеров волны n и m ширина пучка увеличивается; возрастают радиационные потери, что приводит к более сильному затуханию высших мод и эффективному разрежению спектра собственных колебаний. Поэтому в открытых резонаторах удастся возбуждать малое число мод, соответствующих фиксированному большому значению q и нескольким первым номерам n, m .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ ПО ЗАДАНЫМ ИСТОЧНИКАМ

Рассматривая в предыдущих главах различные вопросы теории волн, мы не касались вопроса о возбуждении волн и о свойствах волнового поля в присутствии источников, создающих волны. Все рассмотренные линейные задачи описывались однородным волновым уравнением, а для гармонических во времени полей — однородным уравнением Гельмгольца.

В данной главе мы рассмотрим некоторые вопросы возбуждения электромагнитных волн ограниченными системами колеблющихся зарядов и токов.

§ 1. Источники электромагнитного поля

Систему зарядов и токов, изменяющихся во времени, всегда можно разложить на гармоники (с помощью рядов или интегралов Фурье) и рассматривать поля, создаваемые ограниченной системой зарядов и токов, меняющихся во времени по синусоидальному закону. Поэтому мы можем для описания электромагнитных полей воспользоваться уравнениями Максвелла для комплексных амплитуд векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , которые с учетом источников примут вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \epsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} (\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} (\mu \mathbf{H}) = 0. \quad (1.4)$$

Здесь \mathbf{j} и ρ — плотности электрических токов и зарядов, поддерживаемых «сторонними силами». Эти «сторонние» токи и заряды \mathbf{j} и ρ могут создаваться электромагнитными полями, которые не включаются в \mathbf{E} и \mathbf{H} , входящие в уравнения Максвелла, т. е. обратным воздействием полей \mathbf{E} и \mathbf{H} на \mathbf{j} и ρ мы пренебрегаем. Токи и заряды, возбуждаемые электромагнитным полем в среде, учитываются в уравнениях (1.1) — (1.4) введением комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon = \epsilon' + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$.

Сторонние токи и заряды связаны между собой уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.5)$$

Следовательно, их можно определить с помощью одной векторной функции \mathbf{P} , связанной с \mathbf{j} и ρ соотношениями:

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{P}. \quad (1.6)$$

Здесь \mathbf{P} — поляризация, распределенная по объему излучающей системы (антенны).

Поле, создаваемое заданным током, обычно легче определить, если вместо векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} ввести вспомогательные векторные функции — электрический Π^e и магнитный Π^m векторы Герца, которые связаны с векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} формулами (1.1), (1.2) и (1.5), (1.6) гл. X.

Подставляя (10.1.1) и (10.1.2) в уравнение Максвелла (1.1), получим для Π^e уравнение:

$$\Delta \Pi^e + k_0^2 \epsilon \mu \Pi^e = -i \frac{4\pi}{\omega \epsilon} \mathbf{j} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \mathbf{P}. \quad (1.7)$$

Как видно из (1.7), декартовы компоненты векторов Π^e и \mathbf{j} по различным осям не связаны друг с другом, т. е., например, если ток \mathbf{j} направлен по оси z , то и вектор Π^e имеет то же направление. Компонента j_z не вызывает появления Π_x и Π_y . Поэтому, если источником электромагнитного поля является линейный ток, то векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} с помощью формул (10.1.1) и (10.1.2) выражаются через одну скалярную волновую функцию Π^e . Заметим, что направления векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в этом случае не совпадают с направлением стороннего тока. Действительно, исключая из системы уравнений (1.1)—(1.4) вектор \mathbf{H} , получим для вектора \mathbf{E} уравнение

$$\Delta \mathbf{E} + k_0^2 \epsilon \mu \mathbf{E} = -i \frac{4\pi k_0 \mu}{c} \mathbf{j} - i \frac{4\pi}{\omega \epsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{j}, \quad (1.8)$$

а исключая вектор \mathbf{E} , получим

$$\Delta \mathbf{H} + k_0^2 \epsilon \mu \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}. \quad (1.9)$$

Если источником электромагнитного поля является переменный круговой ток, то такой контур тока можно заменить магнитным листком, в пределах которого существует некоторое намагничивание \mathbf{M} , связанное с плотностью тока соотношением

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}.$$

Если ток постоянен по длине контура, то интеграл от \mathbf{M} по объему листка определяет магнитный момент контура

$$\mathbf{m} = \frac{\mu}{c} IS, \quad S = \int_C \mathbf{n} dl,$$

\mathbf{n} — вектор нормали к поверхности S , опирающейся на контур C . Появление магнитного момента \mathbf{m} формально должно приводить к появлению дополнительного члена в уравнении (1.2). Чтобы сделать уравнения Максвелла симметричными, можно ввести фиктивный «магнитный ток» \mathbf{j}_m , который определим по формуле

$$\mathbf{j}_m = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{m}. \quad (1.10)$$

Магнитный ток \mathbf{j}_m связан с фиктивными «магнитными зарядами» ρ_m уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0.$$

Тогда, если источником поля является круговой ток, уравнения Максвелла будут иметь вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m, \quad (1.12)$$

$$\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = 0, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{div} (\mu \mathbf{H}) = 4\pi \rho_m. \quad (1.14)$$

Если определить поля \mathbf{E} и \mathbf{H} через магнитный вектор Герца Π^m по формулам (10.1.5) и (10.1.6), то для Π^m в этом случае мы получаем неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta \Pi^m + k_0^2 \varepsilon \mu \Pi^m = -i \frac{4\pi}{\omega \mu} \mathbf{j}_m = -\frac{4\pi}{\mu} \mathbf{m}. \quad (1.15)$$

Если плоскость кругового тока совпадает с плоскостью x, y , то вектор \mathbf{m} , а следовательно и \mathbf{j}_m , направлен по оси z и Π^m имеет одну отличную от нуля компоненту

$$\Pi^m = z_0 \Pi^m.$$

Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} в этом случае могут быть определены с помощью одной скалярной волновой функции Π^m . Если источниками электромагнитного поля являются как линейные, так и круговые токи, то векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} могут быть определены с помощью обеих функ-

ций Π^e и Π^m по формулам:

$$\begin{aligned} E &= \text{grad div } \Pi^e + k_0^2 \varepsilon \mu \Pi^e + ik_0 \mu \text{ rot } \Pi^m, \\ H &= \text{grad div } \Pi^e + k_0^2 \varepsilon \mu \Pi^m - ik_0 \varepsilon \text{ rot } \Pi^e. \end{aligned} \quad (1.16)$$

§ 2. Интегральное уравнение для вектора Герца

В наиболее общем виде задача о нахождении электромагнитного поля, возбуждаемого системой источников, может быть сформулирована следующим образом: в некотором замкнутом объеме V , ограниченном поверхностью S и заполненном однородной средой, задано произвольное распределение источников электромагнитного поля. Этими источниками могут быть как электрические токи \mathbf{j} и заряды ρ , так и магнитные токи \mathbf{j}_m и магнитные заряды ρ_m . Необходимо в любой точке A внутри объема V , положение которой относительно прямоугольной системы координат x, y, z характеризуется радиус-вектором \mathbf{R} (рис. 12.1), определить величину электромагнитного поля, т. е. найти значения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} (или векторов Π^e и Π^m).

Для нахождения вектора Герца Π^e (или Π^m), когда источником, создающим поле, является произвольная система токов, необходимо решить систему для трех декартовых компонент вектора Герца

$$\Delta \Pi_i + k^2 \Pi_i = Q_i(x, y, z), \quad (2.1)$$

где $k^2 = k_0^2 \varepsilon \mu$, Q_i — функция, описывающая источники, $i = 1, 2, 3$. Если находится электрический вектор Герца, то

$$Q_i(x, y, z) = -i \frac{4\pi}{\omega \varepsilon} j_i(x, y, z) = -\frac{4\pi}{\varepsilon} P_i(x, y, z), \quad (2.2)$$

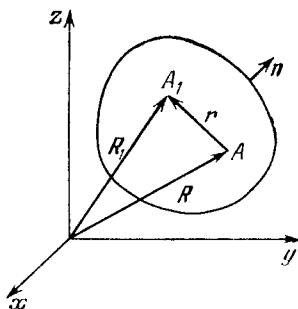
если — магнитный вектор, то

$$Q_i(x, y, z) = -i \frac{4\pi}{\omega \mu} j_i^m(x, y, z) = -\frac{4\pi}{\mu} m_i(x, y, z).$$

Для решения задачи воспользуемся теоремой Грина (см. (1.1) гл. VIII)

$$\int_V (G \Delta u - u \Delta G) dV = \int_S \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (2.3)$$

$\partial/\partial n$ — производная по направлению нормали к поверхности S , внешней по отношению к объему V (см. рис. 12.1); функция u ,



12.1. К выводу интегрального уравнения для вектора Герца.

равная здесь Π_i , удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца (2.1); в качестве функции G выберем функцию точечного источника, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta G + k^2 G = -4\pi\delta(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|) \quad (2.4)$$

и равную

$$G = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (2.5)$$

где \mathbf{R}_1 — радиус-вектор текущей точки A_1 объема V , $r = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|$.

Определяя $\Delta\Pi_i$ из (2.1) и ΔG из (2.4) и подставляя в (2.3), получим

$$\begin{aligned} 4\pi \int_V \Pi_i(\mathbf{R}_1) \delta(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|) dV_1 + \int_V Q_i(\mathbf{R}_1) G(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|) dV_1 = \\ = \int_S \left(G \frac{\partial \Pi_i}{\partial n} - \Pi_i \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \end{aligned}$$

Учитывая (2.2), (2.5) и заменяя Q_i через $\frac{i}{\varepsilon\omega} j_i$, получим интегральное уравнение для вектора Герца

$$\Pi_i(\mathbf{R}) = \frac{i}{\varepsilon\omega} \int_V j_i(\mathbf{R}_1) \frac{e^{ikr}}{r} dV_1 + \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \Pi_i}{\partial n} - \Pi_i \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS. \quad (2.6)$$

Для определения поля в точке A необходимо знать значение Π_i и $\partial\Pi_i/\partial n$ на поверхности S .

Если источники находятся в неограниченном пространстве, то поверхность S можно считать поверхностью сферы бесконечно большого радиуса. Но бесконечно удаленные источники, расположенные на поверхности S , не должны влиять на поле в точке A , и интеграл по S в этом случае должен обращаться в нуль. Для гармонических полей обращение интеграла по поверхности сферы бесконечно большого радиуса в нуль накладывает определенные условия на поведение функции Π_i при $R \rightarrow \infty$ (условие Зоммерфельда для излучения; см. (1.6) гл. VIII). Согласно условию излучения

$\Pi_i(\mathbf{R}) \underset{R \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{R} e^{ikR}$. При выбранной нами зависимости полей от времени в виде $e^{-i\omega t}$ функция $\Pi_i(\mathbf{R}, t) \underset{R \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{R} \exp(ikR - i\omega t)$ определяет расходящуюся сферическую волну.

Таким образом, в неограниченном пространстве поле в точке A будет определяться объемным интегралом. Объединяя уравнения

для трех прямоугольных компонент вектора Герца, получим

$$\Pi^e(\mathbf{R}) = \frac{i}{\omega \varepsilon} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{R}_1) \frac{e^{ikr}}{r} dV_1 \quad (2.7)$$

или, учитывая (1.6),

$$\Pi^e(\mathbf{R}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{R}_1) \frac{e^{ikr}}{r} dV_1. \quad (2.8)$$

Интегрирование в (2.7) и (2.8) ведется по объему, занятому источниками.

Вектор Герца может быть определен по формуле (2.7), если известно распределение токов. Подобное вычисление возможно проделать для некоторых антенн, имеющих достаточно простую геометрию. Однако в том случае, когда наибольший размер d области, занятой токами, меньше длины волны λ , и мы рассматриваем поля вдали от источника, т. е. считаем, что $r \gg d$, в интеграле (2.8) можно положить

$$r = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_1| \approx |\mathbf{R}| - \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1,$$

где \mathbf{R}_0 — единичный вектор в направлении \mathbf{R} . При этом

$$\frac{e^{ikr}}{r} \approx \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{-ik\Delta R}}{1 - \Delta R/R}, \quad \Delta R = \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1.$$

Разложив экспоненту и знаменатель в ряд по ΔR , получим

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{R} - ik \right) \Delta R + \frac{1}{2} \left(-k^2 - \frac{2ik}{R} + \frac{2}{R^2} \right) (\Delta R)^2 \right\}, \quad (2.9)$$

R — расстояние от точки наблюдения до центра области, занятой токами, ΔR по порядку величины не превышает d . Подставляя (2.9) в (2.8), получим m -й член ряда для Π^e :

$$\Pi_m^e(\mathbf{R}) = \frac{e^{ikR}}{\varepsilon R} \frac{(-ik)^m}{m!} \left(1 + \frac{a_1}{ikR} + \dots + \frac{a_m}{(ikR)^m} \right) \int_V \mathbf{P}(\mathbf{R}_1) (\Delta R)^m dV_1. \quad (2.10)$$

где коэффициенты полинома a_m — некоторые целые числа.

Рассмотрим свойства поля на разных расстояниях от источника (в разных зонах):

- 1) $d \ll R \ll \lambda$ — ближняя зона,
- 2) $d \ll R \sim \lambda$ — промежуточная зона,
- 3) $d \ll \lambda \ll R$ — дальняя или волновая зона.

В ближней зоне, где $kR \ll 1$, в полиноме (2.10) преобладает последний член, поэтому

$$\Pi_m^e(\mathbf{R}) = \frac{(-1)^m}{\varepsilon m!} \frac{a_m}{R^{m+1}} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{R}_1) (\Delta R)^m dV_1. \quad (2.11)$$

Так как Π_m^e в (2.11) не зависит от k , поля в ближней зоне имеют квазистатический характер: они меняются во времени по гармоническому закону, а в пространстве распределение полей соответствует статическому случаю.

В дальней зоне при $kR \gg 1$ преобладает первый член и

$$\Pi_m^e(\mathbf{R}) = \frac{e^{ikR}}{\varepsilon R} \frac{(-ik)^m}{m!} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{R}_1) (\Delta R)^m dV_1. \quad (2.12)$$

В этом случае Π_m^e имеет вид расходящейся сферической волны, его амплитуда равна

$$\frac{1}{m!} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{R}_1) (k\Delta R)^m dV_1.$$

Поскольку ΔR имеет порядок d , а произведение $kd \ll 1$, то последовательные члены в разложении Π^e быстро уменьшаются с ростом номера m и излучение источника определяется первым исчезающим членом разложения (2.9).

§ 3. Поле электрического диполя в однородной среде

Если ограничиться первым членом в разложении (2.9), не делая никаких предположений об отношении R и λ , то

$$\Pi^e(\mathbf{R}) = \frac{e^{ikR}}{\varepsilon R} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{R}_1) dV_1,$$

т. е. каждый элемент объема dV_1 с дипольным моментом \mathbf{P} создает поле

$$d\Pi^e = \frac{1}{\varepsilon R} \mathbf{P} e^{ikR} dV_1.$$

Интеграл $\int_V \mathbf{P}(\mathbf{R}_1) dV_1$ характеризует полный дипольный момент источника \mathbf{P}_0 и

$$\Pi^e(\mathbf{R}) = \frac{e^{ikR}}{\varepsilon R} \mathbf{P}_0. \quad (3.1)$$

Источник, характеризуемый вектором \mathbf{P}_0 , называется *электрическим диполем*. Формула (3.1) определяет поле электрического ди-

поля. Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} определяются формулами

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \Pi^e + k_0^2 \epsilon \mu \Pi^e,$$

$$\mathbf{H} = -ik_0 \epsilon \text{rot } \Pi^e.$$

Выбирая ось z вдоль направления вектора \mathbf{P}_0 (рис. 12.2), имеем $\Pi^e = \Pi_z(x, y, z) \approx_0$. Записав в сферических координатах $\text{rot } \Pi^e$ и $\text{grad div } \Pi^e$, получим

$$E_R = 2 \frac{P_0}{\epsilon} \frac{e^{ikR}}{R} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{ik}{R} \right) \cos \theta,$$

$$E_\theta = \frac{P_0}{\epsilon} \frac{e^{ikR}}{R} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{ik}{R} - k_0^2 \epsilon \mu \right) \sin \theta,$$

$$H_\varphi = -ik_0 P_0 \frac{e^{ikR}}{R} \left(\frac{1}{R} - ik \right) \sin \theta, \quad (3.2)$$

$$E_\varphi = H_R = H_\theta = 0.$$

В ближней зоне $R \ll \lambda$ и компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} равны

$$E_R = \frac{2P_0}{\epsilon} \frac{1}{R^3} \cos \theta, \quad E_\theta = \frac{P_0}{\epsilon R^3} \sin \theta, \quad H_\varphi = -\frac{ik_0 P_0}{R^2} \sin \theta.$$

(3.3)

Если не рассматривать изменений во времени, то электрическое поле в ближней зоне совпадает с полем статического электрического диполя. В области $k_0 R \ll 1$ магнитное поле в $(k_0 R)$ раз меньше электрического. Поэтому поле в ближней зоне имеет в основном электрический характер. В пределе при $k_0 \rightarrow 0$ магнитное поле равно нулю, и ближняя зона распространяется до бесконечности.

В волновой зоне $k_0 R \gg 1$ и

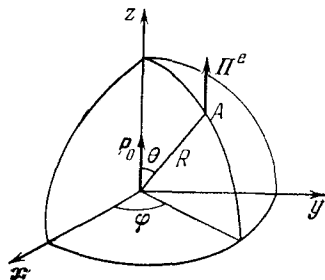
$$E_R = -\frac{ik}{R^2} \frac{2P_0}{\epsilon} e^{ikR} \cos \theta,$$

$$E_\theta = -k_0^2 \mu P_0 \frac{e^{ikR}}{R} \sin \theta,$$

$$H_\varphi = -k_0^2 \sqrt{\epsilon \mu} P_0 \frac{e^{ikR}}{R} \sin \theta. \quad (3.4)$$

Отношение E_R/E_θ имеет порядок $(k_0 R)^{-1} \ll 1$. Поэтому в волновой зоне поле поперечно. Отношение $E_\theta/H_\varphi = \sqrt{\mu/\epsilon}$, т. е. определяется импедансом среды (так же как в плоской волне). Излучение представляет собой расходящуюся сферическую волну. Средняя плотность потока энергии в волновой зоне

$$|\bar{S}| = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [E\mathbf{H}^*] = \frac{ck_0^4}{8\pi R^2} P_0^2 \mu \sqrt{\epsilon \mu} \sin^2 \theta. \quad (3.5)$$



12.2. К определению поля вертикального электрического диполя.

Как следует из формулы (3.5), электрический диполь создает направленное излучение, вдоль оси диполя $|\bar{\mathbf{S}}| = 0$. Полная излучаемая мощность W будет равна интегралу по поверхности сферы радиуса R от $|\bar{\mathbf{S}}|$:

$$W = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |\bar{\mathbf{S}}| R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \mu \sqrt{\varepsilon} \frac{P_0^2 \omega^4}{c^3}. \quad (3.6)$$

Энергия, излучаемая электрическим диполем, пропорциональна четвертой степени частоты.

Примером электрического диполя может служить линейная антенна, возбуждаемая в середине.

Используя формулу (2.7) и учитывая, что для линейной антенны $dV = dl \, dS$, получим

$$\Pi^e = \frac{i}{\omega \varepsilon} \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^d dl \int_S \mathbf{j} \, dS. \quad (3.7)$$

Интеграл $\int_S \mathbf{j} \, dS$ равен полному току, протекающему через поперечное сечение линейного проводника $I(l)$, поэтому

$$\Pi^e = \frac{i}{\omega \varepsilon} \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^d I(l) \, dl. \quad (3.8)$$

Если размеры антенны $d \ll \lambda$, то I от l не зависит, и

$$\Pi^e = \frac{id}{\omega \varepsilon} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (3.9)$$

При $I(l) \neq \text{const}$ формулу (3.9) можно записать в виде

$$\Pi^e = \frac{i I_{\max} d_{\text{д}}}{\omega \varepsilon} \frac{e^{ikR}}{R},$$

где

$$d_{\text{д}} = \int_0^d \frac{I(l)}{I_{\max}} \, dl,$$

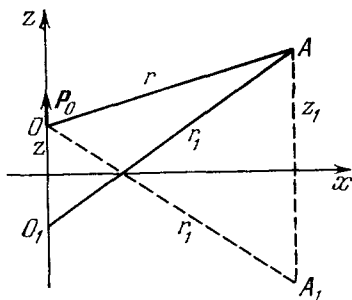
$d_{\text{д}}$ — действующая длина линейной антенны, а I_{\max} — ток в пучности.

Если источником электромагнитного поля являются круговые токи (рамочная антенна), все уравнения (с точностью до замены ε на μ и i на $-i$) переносятся на магнитный вектор Герца, а излучатель, если его размеры малы по сравнению с длиной волны, является магнитным диполем.

§ 4. Излучение электромагнитных волн поверхностными токами и зарядами

В реальных условиях приходится иметь дело с распространением электромагнитных волн в присутствии границ раздела сред с различными физическими свойствами. Для ограниченных объемов условия излучения не выполняются, так как от границ раздела в точку наблюдения приходят отраженные волны. В этом случае вектор Герца определяется уравнением (2.6), и кроме функции, описывающей источник, необходимо знать Π и $\partial\Pi/\partial n$ на поверхности S . Соответствующим выбором функции Грина (см. § 1 гл. VIII) можно свести задачу к определению на S только Π или только $\partial\Pi/\partial n$.

В качестве примера рассмотрим поле вертикального электрического диполя, расположенного над плоской идеальной проводящей поверхностью (рис. 12.3). В качестве поверхности S в поверхностном интеграле возьмем плоскость, совпадающую с границей раздела, и поверхность полусферы бесконечно большого радиуса, опирающуюся на эту плоскость. Интеграл по поверхности полусферы вследствие условий излучения обратится в нуль. Функцию Грина возьмем в виде



12.3. К определению поля вертикального электрического диполя над плоской идеальной проводящей поверхностью.

$$G = \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr_1}}{r_1}, \quad (4.1)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z_1 - z)^2}, \quad r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z_1 + z)^2}.$$

В этом случае $\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{z=0} = \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$ и в точке наблюдения A

$$\Pi_A^e = \frac{P}{\varepsilon} \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{P}{\varepsilon} \frac{e^{ikr_1}}{r_1} + \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial \Pi}{\partial z} G(x, y, z) dx dy. \quad (4.2)$$

Поскольку мы предполагаем, что вторая среда идеально проводящая,

$$E_{tg} = E_x = \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial x \partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (4.3)$$

Граничное условие $E_x = 0$ должно выполняться для всей плоскости $z = 0$, поэтому (4.3) можно проинтегрировать по x , тогда

$$\frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (4.4)$$

Следовательно, поверхностный интеграл в (4.2) обращается в нуль и

$$\Pi_A = \frac{P}{\varepsilon} \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{P}{\varepsilon} \frac{e^{ikr_1}}{r_1}. \quad (4.5)$$

Как видно из рис. 12.3, первый член в (4.5) представляет собой поле прямой волны, излучаемой диполем, расположенным в точке O , второй член соответствует полю волны, излучаемой источником, расположенным в точке O_1 , которая является зеркальным изображением точки O .

Поверхностный интеграл в уравнении (2.6) описывает поле, которое создается зарядами и токами, индуцируемыми на границе раздела полем падающей волны. Поверхностные токи и поверхностные заряды могут создаваться так же и источниками, расположенными вне рассматриваемого объема V , тогда поле в точке A будет определяться только поверхностным интегралом. С задачами подобного рода мы уже познакомились в гл. VIII.

Интегральные уравнения типа (2.6) могут быть записаны для любого вектора поля, если в качестве источников поля подставить источники соответствующего вектора. Если воспользоваться уравнениями Максвелла для комплексных амплитуд, записанными в симметричном виде,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -ik_0 \varepsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= ik_0 \mu \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m, \\ \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} &= 4\pi \rho, \\ \operatorname{div} \mu \mathbf{H} &= 4\pi \rho_m, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где \mathbf{j}_m и ρ_m — плотности «магнитных токов» и «зарядов» (смысл \mathbf{j}_m и ρ_m рассмотрен в § 1 настоящей главы), то можно показать, что интегральные уравнения для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} (мы приводим их без вывода) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{c} \int_V \left\{ ik_0 \mu \mathbf{j} G - [\mathbf{j}_m \operatorname{grad} G] + \frac{c}{\varepsilon} \rho \operatorname{grad} G \right\} dV - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ ik_0 \mu [\mathbf{nH}] G + [[\mathbf{nE}] \operatorname{grad} G] + (\mathbf{nE}) \operatorname{grad} G \right\} dS, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \int_V \left\{ ik_0 \varepsilon \mathbf{j}_m G + [\mathbf{j} \operatorname{grad} G] + \frac{c}{\mu} \rho_m \operatorname{grad} G \right\} dV - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ -ik_0 \varepsilon [\mathbf{nE}] G + [[\mathbf{nH}] \operatorname{grad} G] + (\mathbf{nH}) \operatorname{grad} G \right\} dS. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Сравнивая подынтегральные выражения в объемных и поверхностных интегралах, находим, что они аналогичны, только токи и за-

ряды, входящие в объемные интегралы, заменяются в поверхностных векторными и скалярными произведениями векторов поля на нормаль \mathbf{n} к поверхности S .

В объемных интегралах: $\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, $\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m$, $4\pi\rho$, $4\pi\rho_m$.

В поверхностных интегралах: $[\mathbf{nH}]$, $-\mathbf{[nE]}$, $\varepsilon(\mathbf{nE})$, $\mu(\mathbf{nH})$. Из проведенного сопоставления следует, что векторные произведения $[\mathbf{nH}]$ и $[\mathbf{nE}]$ соответствуют некоторым эффективным плотностям поверхностного электрического и поверхностного магнитного тока, а $\varepsilon(\mathbf{nE})$ и $\mu(\mathbf{nH})$ — могут быть интерпретированы как эффективные плотности поверхностных электрических и магнитных зарядов.

В неограниченной среде поверхностные интегралы должны обращаться в нуль. Полагая $G = \frac{e^{ikR}}{R}$, получим

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{4\pi} \left\{ ik_0\mu [\mathbf{R}_0\mathbf{H}] + [[\mathbf{R}_0\mathbf{E}] \mathbf{R}_0] \left(ik - \frac{1}{R} \right) + \right. \\ \left. + \mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0\mathbf{E}) \left(ik - \frac{1}{R} \right) \right\} \frac{e^{ikR}}{R} R^2 d\Omega = 0. \quad (4.9)$$

Здесь \mathbf{R}_0 — единичный вектор внешней нормали к поверхности сферы радиуса R , $d\Omega$ — элемент телесного угла. Учитывая, что $[[\mathbf{R}_0\mathbf{E}] \mathbf{R}_0] = -\mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0\mathbf{E}) + \mathbf{E}$, получим

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{4\pi} \left\{ ik_0\mu [\mathbf{R}_0\mathbf{H}] + \left(ik - \frac{1}{R} \right) \mathbf{E} \right\} R e^{ikR} d\Omega = 0. \quad (4.10)$$

Равенство (4.10) будет справедливо при условии

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \{ ik_0\mu [\mathbf{R}_0\mathbf{H}] + ik\mathbf{E} \} R = 0. \quad (4.11)$$

Из условия (4.11) следует, что при $R \rightarrow \infty$ поля \mathbf{E} и \mathbf{H} должны убывать с расстоянием, как $1/R$, и векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} должны быть связаны между собой соотношением

$$\mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\mathbf{R}_0\mathbf{H}]. \quad (4.12)$$

На больших расстояниях от излучателя поле имеет структуру, характерную для поля диполя: \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{R}_0 — три ортогональных вектора, связь между которыми (см. (4.12)) определяет волну, распространяющуюся в направлении \mathbf{R}_0 (от источника). Условие (4.11) является условием излучения для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Общие интегральные соотношения (2.6), (4.7), (4.8), справедливые для любого вектора поля, содержат принцип Гюйгенса. Представим, что поверхность S_1 лежит в однородной среде, причем источник и точка наблюдения находятся по разные стороны от

этой поверхности. Поле в точке наблюдения должно определяться лишь поверхностным интегралом, взятым по поверхности S_1 , так как в объеме V_2 нет источников. (Считаем, что объем V_2 ограничен поверхностью S_1 и поверхностью сферы S_2 бесконечно большого радиуса.) Следовательно, поверхность S_1 должна быть заполнена вторичными излучателями. Поверхность S_1 можно деформировать произвольным образом так, чтобы она проходила через любую точку поля. Таким образом, каждая точка поля сама должна быть источником вторичных волн, как это и следует из принципа Гюйгенса.

§ 5. Разложение сферической волны по плоским волнам

Если источник волны находится вблизи поверхности раздела двух сред, причем вторая среда обладает конечной проводимостью, задача определения поля как в первой, так и во второй средах становится весьма сложной. По существу она сводится к задаче об отражении и преломлении сферической волны от плоской поверхности раздела. В подобных задачах часто оказывается целесообразным представить сферическую волну в виде суперпозиции плоских волн. Опуская зависимость от времени (множитель $e^{-i\omega t}$), запишем поле сферической волны единичной амплитуды в виде e^{ikR}/R , где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, т. е. считаем, что излучатель находится в начале координат.

В плоскости $z = 0$ поле сферической волны имеет вид e^{ikr}/r , где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Разложим функцию e^{ikr}/r в двойной интеграл Фурье по переменным x и y :

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \iint_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y, \quad (5.1)$$

где

$$A(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy. \quad (5.2)$$

Перейдем к полярным координатам как в плоскости x, y , так и в плоскости k_x, k_y :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & dx dy &= r dr d\varphi, \\ k_x &= q \cos \eta, & k_y &= q \sin \eta. \end{aligned}$$

Тогда

$$A(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \exp\{ir[k - q \cos(\varphi - \eta)]\} dr.$$

Если предположить, что в среде имеется хотя бы сколь угодно малое поглощение, то, выполняя интегрирование по r и подставляя пределы, получим

$$\int_0^{\infty} \exp \{ir [k - q \cos (\varphi - \eta)]\} dr = \frac{i}{k - q \cos (\varphi - \eta)} .$$

Интегрируя по φ , получим

$$i \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{k - q \cos (\varphi - \eta)} = \frac{i2\pi}{\sqrt{k^2 - q^2}} = \frac{i2\pi}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} , \quad (5.3)$$

$$A(k_x, k_y) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} .$$

Таким образом,

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp [i(k_x x + k_y y)]}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y . \quad (5.4)$$

Подынтегральное выражение в (5.4) представляет собой плоскую волну в плоскости $z = 0$ с компонентами волнового вектора k_x , k_y и $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ и амплитудой $dk_x dk_y / k_z$, а следовательно, интеграл (5.4) представляет разложение сферической волны в плоскости $z = 0$ в угловой спектр по плоским волнам.

Угловой спектр при $z \neq 0$ (см. § 1 гл. VIII)

$$A(k_x, k_y, z) = \frac{i}{2\pi} \frac{\exp (\pm ik_z z)}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} . \quad (5.5)$$

Знак плюс в экспоненте соответствует точкам, лежащим в полупространстве $z > 0$, и волнам, распространяющимся в направлении положительной оси z ; знак минус соответствует значениям $z < 0$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikR}}{R} &= \frac{i}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp [i(k_x x + k_y y + k_z z)] \frac{dk_x dk_y}{k_z} \quad \text{при } z > 0, \\ \frac{e^{ikR}}{R} &= \frac{i}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp [i(k_x x + k_y y - k_z z)] \frac{dk_x dk_y}{k_z} \quad \text{при } z < 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Формулы (5.6) определяют разложение сферической волны по плоским волнам. При $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ величина k_z — мнимая, таким образом, в разложении сферической волны по плоским волнам присутствуют как плоские однородные, так и плоские неоднородные волны. Именно, присутствие в спектре плоских неоднород-

ных волн обеспечивает появление особенности (бесконечного значения) у поля при $x = y = z = 0$ или $R = 0$.

Если опять перейти в плоскости x, y и в плоскости k_x, k_y к полярным координатам, то (5.6) можно записать так:

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty q \frac{\exp(\mp z \sqrt{q^2 - k^2})}{\sqrt{q^2 - k^2}} \int_0^{2\pi} \exp[iqr \cos(\eta - \varphi)] d\eta.$$

Интеграл по η , с учетом коэффициента $1/2\pi$ перед интегралом, представляет функцию Бесселя нулевого порядка, поэтому

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^\infty q J_0(qr) \frac{\exp(+z \sqrt{q^2 - k^2})}{q^2 - k^2} dq. \quad (5.7)$$

Знак минус в экспоненте соответствует положительным значениям z , знак плюс — отрицательным. Интеграл (5.7) представляет собой разложение сферической волны по цилиндрическим волнам.

§ 6. Распространение электромагнитных волн над поверхностью Земли

Определение напряженности поля электромагнитных волн при распространении вдоль поверхности Земли, обладающей конечной проводимостью, относится к числу классических задач теории волн. Впервые в наиболее простом варианте, когда источником волн является элементарный диполь, а земная поверхность считается плоской и обе среды — атмосфера и земля — однородными, она была решена А. Зоммерфельдом в 1909 г. Общее решение было представлено в виде контурных интегралов. Однако физическая трактовка найденного решения и приведение его к виду, удобному для практического определения поля и исследования его структуры, оказались гораздо более трудной задачей. Эта задача привлекла внимание очень многих исследователей, среди которых можно назвать Ваг-дер-Поля, Вейля, М. А. Леонтовича, В. А. Фока, Е. Л. Фейнберга, П. А. Рязина и других. Наиболее общее решение с учетом кривизны поверхности Земли и неоднородности атмосферы было получено В. А. Фоком.

Мы рассмотрим задачу о распространении электромагнитной волны в атмосфере над поверхностью Земли в наиболее простом ее виде, т. е. будем считать Землю плоской, среду однородной; в качестве источника, создающего поле, рассмотрим вертикальный электрический диполь, расположенный на высоте z_0 над поверхностью Земли (задача Зоммерфельда). Пусть ось z совпадает с осью диполя. Поверхность Земли совпадает с плоскостью $z = 0$ (рис. 12.4). В атмосфере при $z > 0$ $\epsilon_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$, $k_1 = k_0$; при $z < 0$ среда

характеризуется параметрами

$$\varepsilon_2, \sigma_2, \quad k_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_2 + i \frac{4\pi\sigma_2}{\omega}} = k.$$

Задача состоит в нахождении поля диполя в произвольной точке $A(r, z)$, которая может находиться как в земле, так и в атмосфере. Если бы диполь находился в неограниченной однородной среде, то поле в точке A определялось бы вектором Герца, направленным параллельно оси диполя

$$\Pi_A = \frac{e^{ik_0 R}}{R} \mathbf{P}_0. \quad (6.4)$$

\mathbf{P}_0 — дипольный момент излучателя, для простоты положим $|\mathbf{P}_0| = 1$. В данном случае вибратор находится не в безграничной среде, а у поверхности Земли, поэтому и в атмосфере и в земле поле будет возмущенным. На поле элементарного вибратора накладываются поля, создаваемые токами, текущими в земле и возбуждаемыми падающей волной. Поэтому

$$\begin{aligned} \Pi_1(r, z) &= \frac{e^{ik_0 R}}{R} + F_1(k_0, r, z) && \text{при } z > 0, \\ \Pi_2(r, z) &= F_2(k, r, z) && \text{при } z < 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

При $z = 0$ должны выполняться граничные условия

$$E_{r1} = E_{r2}, \quad H_{\varphi 1} = H_{\varphi 2}.$$

Напишем граничные условия для вектора Герца

$$E_r = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial z}, \quad H_\varphi = -ik_0 \varepsilon \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

или

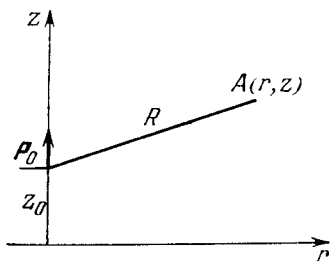
$$1) \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial r \partial z}, \quad 2) k_0^2 \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} = k^2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial r}.$$

Эти граничные условия должны выполняться при любых значениях r . Поэтому, интегрируя по r , получим

$$1) \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial z}, \quad 2) k_0^2 \Pi_1 = k^2 \Pi_2. \quad (6.3)$$

Вектор Герца должен удовлетворять граничным условиям (6.3) и уравнению

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0.$$



12.4. К определению поля диполя над плоской Землей.

в земле и возбуждаемыми

Частное решение этого уравнения в цилиндрической системе координат имеет вид

$$J_0(qr) \exp(\pm z \sqrt{q^2 - k^2}).$$

Зависимости от угла в силу осевой симметрии поля нет. Общее решение может быть представлено в виде непрерывного спектра элементарных цилиндрических волн (непрерывность спектра связана с неограниченностью среды).

Таким образом, вторичное поле в атмосфере и в земле можно разложить по цилиндрическим волновым функциям

$$F_1(r, z) = \int_0^{\infty} f_1(q) J_0(qr) \exp[-\sqrt{q^2 - k_0^2}(z + z_0)] dq \quad \text{при } z > 0, \quad (6.4)$$

$$F_2(r, z) = \int_0^{\infty} f_2(q) J_0(qr) \exp(z \sqrt{q^2 - k^2} - z_0 \sqrt{q^2 - k_0^2}) dq \quad \text{при } z < 0. \quad (6.5)$$

Знак перед корнем $\sqrt{q^2 - k^2}$ выбирается так, чтобы поле в первой и во второй средах удовлетворяло условиям излучения.

Первичное поле мы также должны разложить по цилиндрическим волновым функциям. Согласно (5.7)

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^{\infty} q J_0(qr) \frac{\exp(-|z - z_0| \sqrt{q^2 - k_0^2})}{\sqrt{q^2 - k_0^2}} dq. \quad (6.6)$$

Для определения функций $f_1(q)$ и $f_2(q)$ воспользуемся граничными условиями (6.3).

Введем обозначения:

$$\alpha_1 = \sqrt{q^2 - k_0^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{q^2 - k^2}. \quad (6.7)$$

Подставим (6.4), (6.5) и (6.6) в (6.3), тогда

$$\int_0^{\infty} J_0(qr) e^{-\alpha_1 z_0} [q - \alpha_1 f_1(q) - \alpha_2 f_2(q)] dq = 0, \quad (6.8)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(qr) e^{-\alpha_1 z_0} \left[k_0^2 \frac{q}{\alpha_1} + k_0^2 f_1(q) - k^2 f_2(q) \right] dq = 0.$$

Отсюда получаем следующие уравнения для определения коэффициентов $f_1(q)$ и $f_2(q)$:

$$\begin{aligned} q - \alpha_1 f_1(q) - \alpha_2 f_2(q) &= 0, \\ q + \alpha_1 f_1(q) - \frac{k^2}{k_0^2} \alpha_1 f_2(q) &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно f_1 и f_2 , находим

$$f_1(q) = \frac{q}{\alpha_1} \left(1 - \frac{2\alpha_2}{\frac{k^2}{k_0^2} \alpha_1 + \alpha_2} \right), \quad (6.9)$$

$$f_2(q) = \frac{2q}{\frac{k^2}{k_0^2} \alpha_1 + \alpha_2}. \quad (6.10)$$

Подставляя в (6.2) и учитывая (6.4) и (6.5), получим

$$\begin{aligned} \Pi_1(r, z) = & \int_0^\infty J_0(qr) \frac{1}{\alpha_1} \exp(-\alpha_1 |z - z_0|) q dq + \\ & + \int_0^\infty J_0(qr) \frac{1}{\alpha_1} \exp[-\alpha_1(z + z_0)] q dq - \\ & - 2 \int_0^\infty J_0(qr) \frac{\alpha_2 \exp[-\alpha_1(z + z_0)]}{\alpha_1 \left(\frac{k^2}{k_0^2} \alpha_1 + \alpha_2 \right)} q dq, \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\Pi_2(r, z) = 2 \int_0^\infty J_0(qr) \frac{\exp(\alpha_2 z - \alpha_1 z_0)}{\frac{k^2}{k_0^2} \alpha_1 + \alpha_2} q dq. \quad (6.12)$$

Первый интеграл в (6.11) представляет поле диполя, находящегося в точке $z = z_0$; второй — поле диполя, расположенного в точке $z = -z_0$ (рис. 12.4), поскольку

$$\int_0^\infty J_0(qr) \frac{\exp[-\alpha_1(z + z_0)]}{\alpha_1} q dq = \frac{\exp(ikR_1)}{R_1},$$

выражение (6.11) при $z > 0$ может быть записано в виде

$$\Pi_1(r, z) = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR_1}}{R_1} - 2 \int_0^\infty J_0(qr) \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\exp[-\alpha_1(z + z_0)]}{\frac{k^2}{k_0^2} \alpha_1 + \alpha_2} q dq. \quad (6.13)$$

Если вторая среда идеально проводящая, т. е. $\sigma_2 \rightarrow \infty$, то $k = k_2 \rightarrow \infty$ и интегралы в (6.13) и (6.12) равны нулю. В этом случае

$$\Pi_1(r, z) = \frac{e^{ik_0 R}}{R} + \frac{e^{ik_0 R_1}}{R_1}, \quad \Pi_2(r, z) = 0.$$

При $z_0 = 0$ $R_1 = R$ и $\Pi_1(r, z) = 2 \frac{e^{ik_0 R}}{R}$. Если границы нет, то $k = k_0$ и $\alpha_1 = \alpha_2$, интеграл в (6.13) и (6.12) равен e^{ikR}/R и $\Pi_2(r, z) =$

$= \Pi_1(r, z) = e^{ikR}/R$, что соответствует полю диполя в однородной среде. Интегральные формулы для вектора Герца (6.12) и (6.13) являются весьма сложными, подинтегральные выражения имеют точки ветвления и полюсы. Приведение (6.13) к виду, удобному для исследования и практических расчетов, представляет достаточно сложную задачу. Поэтому часто оказывается более целесообразным использовать приближенные методы решения задачи Зоммерфельда, которые основаны на том, что импеданс земной поверхности $|Z_3| = \left| \frac{1}{\sqrt{\epsilon_3}} \right| \ll 1$ и изменение амплитуды поля по мере распространения над поверхностью Земли происходит медленно.

§ 7. Определение функции ослабления по методу параболического уравнения Леонтовича

Примем, что источником поля является вертикальный электрический диполь, помещенный в точке $x = y = z = 0$ с дипольным моментом $|P_0| = 1$. Поле на расстоянии $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ от диполя (r — расстояние вдоль поверхности Земли, ось z направлена вертикально вверх) будем характеризовать электрическим вектором Герца, направленным по оси z , $\Pi = z_0 \Pi$

$$\Pi(r, z) = \frac{e^{ik_0 R}}{R} W(r, z). \quad (7.1)$$

Если импеданс Земли $|Z_3| \ll 1$, то функция $W(r, z)$, которая называется *функцией ослабления*, есть медленно изменяющаяся функция координат.

Будем рассматривать поле на расстоянии по крайней мере нескольких длин волн от источника, вблизи поверхности Земли, т. е. примем, что $k_0 R \gg 1$, $z \ll r$, тогда $R \approx r + z^2/2r$ и

$$\Pi(r, z) = e^{ik_0 r} \frac{1}{r} W(r, z) e^{ik_0 z^2/2r} = e^{ik_0 r} V(r, z). \quad (7.2)$$

Функция $V(r, z)$ также называется *функцией ослабления*. Поле в (7.2) представляет собой произведение двух функций: быстро осциллирующей экспоненциальной функции $e^{ik_0 r}$ и медленно изменяющейся функции ослабления $V(r, z)$. В предыдущих разделах книги уже было показано, что в таких случаях уравнение, описывающее волновое поле, может быть сведено к параболическому. Метод параболического уравнения впервые был предложен М. А. Леонтовичем в 1944 г. при решении именно этой задачи.

Найдем для функции V уравнение и граничные и начальные условия. Для этого воспользуемся уравнением Гельмгольца для функции $\Pi(r, z)$, записанным в цилиндрических координатах (зависимости от угла нет в связи с цилиндрической симметрией

задачи),

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) + k_0^2 \Pi = 0. \quad (7.3)$$

Подставляя (7.2) в (7.3), получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + 2ik_0 \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{ik_0}{r} V = 0. \quad (7.4)$$

Граничные условия для функции V найдем из приближенных граничных условий Леонтовича. Согласно приближенным граничным условиям тангенциальные компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} при $z=0$ связаны соотношением

$$E_r = +Z_3 H_\varphi. \quad (7.5)$$

Поскольку $E_r = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial z}$, $H_\varphi = -ik_0 \frac{\partial \Pi}{\partial r}$, то из (7.5) следует граничное условие для Π :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} + ik_0 Z_3 \Pi = 0. \quad (7.6)$$

Отсюда, учитывая (7.1) и (7.2), получим граничное условие для V :

$$\frac{\partial V}{\partial z} + ik_0 Z_3 V = 0. \quad (7.7)$$

Малый параметр Z_3 входит в граничное условие. Граничное условие (7.7) означает, что вблизи плоскости $z=0$ поле по вертикали меняется медленно.

Введем безразмерные координаты

$$\zeta = iZ_3 k_0 z, \quad \rho = i \frac{1}{2} Z_3^2 k_0 r. \quad (7.8)$$

В новых переменных уравнение для V примет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} + \frac{Z_3^2}{4} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{2\rho} V = 0, \quad (7.9)$$

а граничное условие

$$\frac{\partial V}{\partial \zeta} + V = 0. \quad (7.10)$$

Если в уравнении (7.9) пренебречь членом, содержащим малый параметр, то для функции V получим параболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{2\rho} V = 0. \quad (7.11)$$

Таким образом, выбор безразмерных переменных ζ и ρ позволяет исключить малый параметр как из уравнения для функции V , так и из граничного условия. Заметим, что введение безразмерных координат аналогично предположению о том, что степень медленно-

сти изменения функции ослабления по координатам r и z различна: координата z входит с множителем $\sqrt{\mu}$, а r с множителем μ , где $|\mu| = |Z_3^2| \ll 1$.

Возвращаясь к переменным r и z и вводя функцию

$$V_1 = \sqrt{\frac{r}{k_0}} V, \quad (7.12)$$

из (7.11) получим уравнение

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} \quad (7.13)$$

и граничное условие

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} + ik_0 Z_3 V_1 = 0. \quad (7.14)$$

Уравнение (7.13) — уравнение диффузии с мнимым коэффициентом диффузии, равным $i/2k_0$; роль времени в уравнении (7.13) играет r — расстояние от источника. По мере распространения волн вдоль поверхности Земли происходит просачивание поля в почву, этот процесс аналогичен диффузионному процессу. Начальные условия для V_1 , т. е. вид функции V_1 вблизи источника (при $r \rightarrow 0$), найдем из следующих соображений. При малых расстояниях r ослабление поля, вызванное потерями в земле, мало, и поле должно быть приблизительно равно полю диполя, расположенному над идеально проводящей поверхностью, т. е. $W(r, z) \approx 2$, а учитывая (7.12) и (7.2),

$$V_1(r, z) \approx \frac{2}{k_0 r} \exp\left(ik_0 \frac{z^2}{2r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow 0 \text{ и } z > 0. \quad (7.15)$$

Функция Грина для параболического уравнения (7.13)

$$G(r, z - z_1) = \frac{\sqrt{k_0}}{\sqrt{2\pi r}} \exp\left[ik_0 \frac{(z - z_1)^2}{2r} - i \frac{\pi}{4}\right]. \quad (7.16)$$

При $r \rightarrow 0$ $G(0, z - z_1) = \delta(z - z_1)$, $\delta(z - z_1)$ — дельта-функция. Функцию $V_1(r, z)$ можно записать в виде

$$V_1(r, z) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{k_0} e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{k_0}{2\pi r}} \exp\left(ik_0 \frac{z^2}{2r} - i \frac{\pi}{4}\right). \quad (7.17)$$

Сравнивая (7.17) и (7.16) при $r \rightarrow 0$, находим, что функция $V_1(r, z)$ при $r \rightarrow 0$ имеет вид

$$V_1(r, z) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{k_0} e^{i\pi/4} \delta(z) \quad \text{при } z \geq 0. \quad (7.18)$$

Для того чтобы найти значение $V_1(r, z)$ при $r = 0$ и $z < 0$, необходимо воспользоваться граничным условием (7.14) для V_1 .

Положим $V_1(0, z) = f(z)$, тогда

$$V_1(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r, z - z_1) f(z_1) dz_1. \quad (7.19)$$

Подставив (7.19) в граничное условие (7.14), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\partial G}{\partial z}(r, z) + ik_0 Z_3 G(r, z) \right] f(z) dz = 0.$$

Интегрируя первый член и учитывая, что функция Грина обращается в нуль при $z \rightarrow \pm \infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(r, z) \left[\frac{df}{dz} + ik_0 Z_3 f(z) \right] dz = 0. \quad (7.20)$$

Поскольку $G(r, z)$ — четная функция от z , интеграл (7.20) обратится в нуль при условии, что выражение, стоящее в скобках, будет нечетной функцией от z , т. е.

$$\frac{df}{dz}(-z) + ik_0 Z_3 f(-z) = - \left[\frac{df}{dz} + ik_0 Z_3 f(z) \right]. \quad (7.21)$$

Решая это уравнение, найдем

$$f(-z) = e^{ik_0 Z_3 z} \left\{ \int_0^z e^{-ik_0 Z_3 \xi} \left[\frac{df}{d\xi} + ik_0 Z_3 f(\xi) \right] d\xi + f(0) \right\}$$

или, интегрируя по частям, получим

$$f(-z) = f(z) + 2ik_0 Z_3 e^{ik_0 Z_3 z} \int_0^z e^{-ik_0 Z_3 \xi} f(\xi) d\xi. \quad (7.22)$$

Учитывая, что $f(z) = V_1(0, z)$ и подставляя $V_1(0, z)$ из (7.18), получим

$$f(z) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{k_0} e^{i\frac{\pi}{4}} \delta(z) \quad \text{при } z \geq 0,$$

$$f(z) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{k_0} e^{i\frac{\pi}{4}} [\delta(z) + ik_0 Z_3 e^{-ik_0 Z_3 z}] \quad \text{при } z \leq 0,$$

откуда, учитывая (7.19) и (7.16),

$$V_1(r, z) = \frac{2}{\sqrt{k_0 r}} \exp\left(ik_0 \frac{z^2}{2r}\right) + 2 \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{r}} Z_3 e^{i\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^0 \exp\left\{ik_0 \left[\frac{(z-z_1)^2}{2r} - Z_3 z_1\right]\right\} dz_1. \quad (7.23)$$

Возвращаясь к функции ослабления

$$W(r, z) = \sqrt{rk_0} \exp(-ik_0 z^2/2r) V_1(r, z)$$

и вводя обозначения

$$\sigma = e^{i\pi/4} Z_3 \sqrt{\frac{k_0 r}{2}} = \sqrt{\rho} \quad \text{и} \quad \tau = e^{i\pi/4} \frac{z}{r} \sqrt{\frac{k_0 r}{2}} = \frac{\xi}{2\sqrt{\rho}},$$

формулу (7.23) можно переписать в виде

$$W = 2 - 4\sigma \exp[-(\sigma + \tau)^2] \int_{-i\infty}^{\sigma + \tau} e^{t^2} dt. \quad (7.24)$$

Безразмерная комплексная переменная ρ называется *численным расстоянием* и зависит от параметров ϵ и σ поверхности, над которой распространяются волны, от длины волны и от расстояния вдоль поверхности r .

Формула (7.24) называется *формулой Вейля — Ван-дер-Поля*. Первое слагаемое в правой части (7.24) определяет функцию ослабления $W(r, z)$ в том случае, когда волна распространяется над идеально проводящей поверхностью, второе слагаемое учитывает ослабление поля вследствие проводимости земной поверхности, оно исчезает при $Z_3 \rightarrow 0$. Если мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости велика по сравнению с действительной, то

$$Z_3^2 = \frac{1}{\epsilon_3} \approx i \frac{\omega}{4\pi\sigma}$$

и численное расстояние ρ становится действительным

$$\rho = \frac{\pi\epsilon}{2\sigma\lambda^2} r.$$

Чем меньше численное расстояние при данном r , тем меньше ослабление поля, вызываемое потерями в земле. При малых численных расстояниях земную поверхность можно считать идеально проводящей. При данной проводимости земной поверхности и при данном r величина ρ очень сильно зависит от длины волны. Например, при $\sigma = 2 \cdot 10^8$ СГСЭ, $r = 10$ км, $\lambda = 1000$ м $\rho \approx 0,02$, а при $\lambda = 100$ м $\rho \approx 2$. Из примера видно, что в первом случае конечная проводимость земли не будет приводить к существенному ослаблению поля, во втором случае поле должно существенным образом отличаться от поля над идеально проводящей поверхностью.

Рассмотрим вид функции ослабления в предельном случае

$$|\sigma + \tau| \gg 1.$$

Взяв интеграл (7.24) по частям, получим

$$\int_{-i\infty}^{\alpha} e^{t^2} dt = \frac{e^{t^2}}{2t} \Big|_{-i\infty}^{\alpha} + \int_{-i\infty}^{\alpha} \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt \approx \frac{e^{\alpha^2}}{2\alpha} + \frac{e^{\alpha^2}}{4\alpha^3} + \dots \quad (7.25)$$

Если

$$|\alpha| = |\sigma + \tau| \gg 1,$$

то дальнейшие члены можно не учитывать. Тогда при $\tau \neq 0$, т. е. когда точка наблюдения приподнята над поверхностью Земли,

$$W = \frac{2\tau}{\sigma + \tau} = \frac{2z/r}{Z_3 + z/r} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + Z_3}, \quad (7.26)$$

где $\cos \theta = z/r$. В этом случае согласно (7.1)

$$\Pi(r, z) = W(r, z) \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{\cos \theta - Z_3}{\cos \theta + Z_3} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (7.27)$$

Согласно (7.27) поле представляется в виде суммы прямой волны (первое слагаемое) и отраженной волны с коэффициентом отражения

$$\frac{\cos \theta - Z_3}{\cos \theta + Z_3}$$

(второе слагаемое).

Если точка наблюдения находится вблизи поверхности Земли, т. е. $z \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, то функция ослабления

$$W(r) = 2 - 4 \sqrt{\rho} e_{\frac{1}{2}}^{-\rho} \int_{-i\infty}^{\sqrt{\rho}} e^{t^2} dt. \quad (7.28)$$

При малых численных расстояниях, когда $|\rho| \ll 1$,

$$W(r) \approx 2.$$

Результат физически понятен: поскольку Z_3 — малая величина, распространение радиоволн на небольшие расстояния происходит так же, как если бы земля была идеально проводящей. Влияние малого импеданса Z_3 сказывается лишь в том случае, когда ρ конечно или велико. При $|\rho| \gg 1$ согласно (7.25)

$$W(\rho) = -\frac{1}{\rho}. \quad (7.29)$$

При этом для точек, лежащих вблизи поверхности Земли, поле убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от источника. Закон изменения с расстоянием амплитуды напряженности поля при увеличении численного расстояния изменяется от $1/r$ до $1/r^2$.

Множитель ослабления W в общем случае является комплексной функцией от r :

$$W(r) = |W(r)| e^{i\varphi(r)}.$$

Выясним смысл аргумента функции ослабления. Фаза волны, распространяющейся вдоль поверхности раздела,

$$\Psi(r, t) = k_0 r + \varphi(r) - \omega t.$$

Поверхность равных фаз соответствует условию $\Psi(r, t) = \text{const}$. Отсюда фазовая скорость волны

$$v_\varphi = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k \left(1 + \frac{1}{k} \frac{d\varphi}{dr}\right)} = \frac{c}{1 + \frac{1}{k} \varphi'(r)}. \quad (7.30)$$

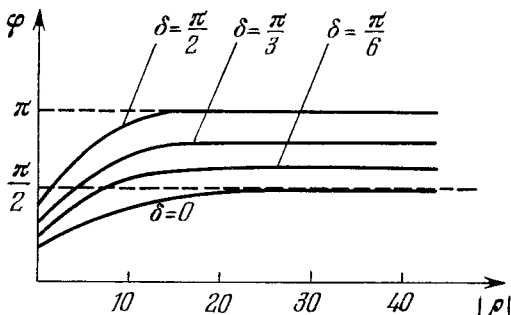
Фазовая скорость меньше c и меняется с расстоянием, поскольку $\varphi'(r) \neq 0$. Однако, как было показано, при больших ρ

$$W(\rho) = -\frac{1}{\rho} = -\frac{2}{iZ_3^2 k_0 r} = e^{i\pi/2} \frac{2\varepsilon_3}{k_0 r}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \arg \left(\frac{2\varepsilon_3}{k_0 r} e^{i\pi/2} \right) = \frac{\pi}{2} + \text{argtg } \delta, \\ \text{tg } \delta = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon_3}.$$

Если почва хорошо проводящая, то $\delta \approx \pi/2$ и $\varphi = \pi$. Для диэлектрика $\delta = 0$ и $\varphi = \pi/2$. В промежуточных случаях φ принимает



12.5. Зависимость фазы функции ослабления от модуля численного расстояния.

постоянное значение, лежащее между $\pi/2$ и π . При больших значениях ρ , φ от r не зависит. С другой стороны, при малых численных расстояниях $\varphi = 0$. Отсюда следует, что аргумент множителя ослабления с увеличением расстояния от источника меняет-

ся от нуля до некоторого постоянного числа, лежащего между $\pi/2$ и π .

На рис. 12.5 приведена зависимость φ от модуля численного расстояния $|\rho|$ для разных почв. Как видно из рисунка, фазовая скорость волн, распространяющихся вдоль земли, возрастает с увеличением r и при больших численных расстояниях становится постоянной и равной c .

Таким образом, при больших численных расстояниях скорость распространения волн не зависит от электрических параметров земной поверхности и равна скорости распространения волн в воздухе. Этот результат, впервые теоретически обоснованный П. А. Рязиным и экспериментально исследованный большой группой советских физиков под руководством Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, имеет очень большое значение для радионавигации, радиолокации и радиогеодезии.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики: Электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах.— М.: изд. ВИНТИ, 1964.— (Итоги науки.)
- Бломберген Н.* Нелинейная оптика: Пер. с англ./Под ред. С. А. Ахманова и Р. В. Хохлова.— М.: Мир, 1966.
- Борн М., Вольф Э.* Основы оптики: Пер. с англ./Под ред. Г. П. Мотулевич.— М.: Наука, 1970.
- Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах.— М.: Наука, 1973.
- Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны.— М.: Сов. радио, 1957.
- Вайнштейн Л. А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы.— М.: Сов. радио, 1966.
- Вайнштейн Л. А.* Теория дифракции и метод факторизации.— М.: Сов. радио, 1966.
- Введение в интегральную оптику.— Сб. статей: Пер. с англ./ Под ред. Т. А. Шмаонова.— М.: Мир, 1977.
- Исакович М. А.* Общая акустика.— М.: Наука, 1973.
- Виноградова М. Б., Семенов А. А.* Основы теории распространения ультракоротких радиоволн в тропосфере.— М.: Изд-во АН СССР, 1963.
- Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
- Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, 1975.— (Современные проблемы физики.)
- Гуревич А. В., Шварцбург А. Б.* Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере.— М.: Наука, 1973.
- Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику.— М.: Наука, 1966.
- Кадомыцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
- Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.— М.: Наука, 1973.
- Каценеленбаум Б. З.* Высокочастотная электродинамика.— М.: Наука, 1966.
- Косевич А. М.* Основы механики кристаллической решетки.— М.: Наука, 1972.
- Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой.— М.: Наука, 1975.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1954.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.— М.: Физматгиз, 1959.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М.: Наука, 1960.
- Лекции, прочитанные на 2-й научной школе по нелинейным колебаниям и волнам.— Горький, 1973.— Изв. вузов, Радиофизика, 1974, т. 17, № 4.
- Лекции, прочитанные на 3-й научной школе по нелинейным колебаниям и волнам.— Горький, 1976.— Изв. вузов, Радиофизика, 1976, т. 19, № 5, 6.
- Маркузе Д.* Оптические волноводы: Пер. с англ./Под ред. В. В. Шевченко.— М.: Мир, 1974.

- Нелинейная теория распространения волн.— Сб. статей: Пер. с англ./Под ред. Г. И. Баренблатта.— М.: Мир, 1970.
- Нелинейные волны.— Сб. статей: Пер. с англ./Под ред. А. В. Гапонова и Л. А. Островского.— М.: Мир, 1977.
- Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн.— М.: Наука, 1973.
- Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики.— М.: Наука, 1975.
- Семенов А. А. Теория электромагнитных волн.— М.: Наука, 1970.
- Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике: Пер. с англ./Под ред. Л. А. Островского и М. И. Рабиновича.— М.: Сов. радио, 1977.
- Тамм И. Е. Основы теории электричества.— М.: Наука, 1966.
- Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ./Под ред. А. Б. Шабата.— М.: Мир, 1977.
- Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности.— М.: Наука, 1964.
- Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.— М.: Сов. радио, 1970.

*Виноградова Марианна Брониславовна,
Руденко Олег Владимирович,
Сухоруков Анатолий Петрович*

ТЕОРИЯ ВОЛН

М., 1979 г., 384 стр. с илл.

Редактор *Д. А. Миртова*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *З. В. Антонова, Н. Б. Румянцева*

ИБ № 11154

Сдано в набор 30.10.78.
Подписано к печати 22.01.79.
Бумага 60×90^{1/2}, тип. № 1.
Обыкновенная гарнитура. Высокая печать.
Условн. печ. л. 24. Уч.-изд. л. 22,76.
Тираж 18 000 экз. Заказ № 1085
Цена книги 1 р. 10 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической
литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука».
121099 Москва, Г-99, Шубинский пер., 10