А. Г. ВИТУШКИН

ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ ТАБУЛИРОВАНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Серия выпускается под общим руководством редакционной коллегии журнала «Успехи математических наук»

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

11-5-4

АННОТАЦИЯ

В этой книге автор устанавливает числовую оценку степени трудности задачи табулирования для различных классов функций. Приводятся различные конкретные способы построения, дающие наилучшие результаты. Автор опирается на результаты теории функций, в том числе на свои исследования, опубликованные в монографии «О многомерных вариациях».

Введение числовой оценки качества различных способов табулирования является необходимым для автоматизации с помощью автоматических цифровых машин выбора способа табулирования. Таким образом, рассматриваемая монография является первым шагом на пути использования идей теории функций в интересах машинной математики.

Книга рассчитана на научных работников и аспирантов в области математики и кибернетики.

Витушкин Анатолий Георгиевич

Оценка сложности задачи табулирования

Редакторы *М. Я. Антоновский* и *М. М. Горячая*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов* Корректор *И. Л. Едская*

Сдано в набор 24/IV 1959 г. Подписано к печати 10/IX 1959 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 7,125. Усл. печ. л. 11,67. Уч.-изд. л. 11,47. Тираж 7000 экз. Т-06386. Цена книги 7 р. 75 к. Заказ 393.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАБОТА ПОСВЯЩАЕТСЯ
ВЛАДИМИРУ ЕВГЕНЬЕВИЧУ
ШЕВАЛЕВУ

ПРЕДИСЛОВИЕ

По специфике результата монография примыкает к теории передачи и обработки информации. Целью работы является попытка математического определения на примере конкретных задач табулирования (составление таблиц для функций) понятия сложности задачи. Необходимость формального определения понятий подобного рода, не говоря уже о чисто теоретическом интересе, обусловливается нуждами машинной математики и в первую очередь потребностями автоматизации программирования.

Для читателя, желающего бегло ознакомиться с основными результатами работы, предназначается «Введение», которое идейно объединяет отдельные главы книги и является, по существу, ее рефератом. Здесь же отметим лишь, что три первые главы посвящены изучению понятия ε-энтропии метрического пространства и оценкам ε-энтропии некоторых пространств аналитических и дифференцируемых функций; в IV и V главах рассматриваются вариации подмножеств евклидовых пространств и оцениваются вариации некоторых конкретных множеств (алгебраических поверхностей); в двух последних главах выводятся оценки сложности составления таблиц для некоторых конкретных классов функций (например, для аналитических и дифференцируемых функций).

Автор глубоко благодарен А. А. Ляпунову, проявившему большое внимание к этой работе, и А. Л. Брудно, который рядом конкретных задач по табулированию функций навел автора на основной результат этой книги.

ВВЕДЕНИЕ

История вопроса. Начало тематике монографии положила работа над одной задачей Д. Гильберта (тринадцатой проблемой Гильберта). Гипотеза Гильберта, высказанная еще в 1900 году, состояла в следующем: *существуют аналитические функции трех переменных, не представимые в виде суперпозиций непрерывных функций двух переменных* [10]. Выдвигая эту задачу, вызванную потребностями номографии, Гильберт, по-видимому, хотел найти такие характеристики функции, по которым можно было бы отличать функции менее сложные от более сложных, подобно тому как, например, топологическая размерность позволяет классифицировать множества.

Для класса аналитических функций Гильберт решил поставленную им задачу, а именно доказал существование аналитических функций многих переменных, не представимых суперпозициями аналитических функций меньшего числа переменных. По-видимому, опираясь именно на эту теорему, Гильберт и высказал свою гипотезу, содержание которой, по существу, состоит в том, что «сложность» функции определяется в первую очередь числом ее аргументов. Для аналитических функций это действительно так, что видно, например, из теоремы Гильберта.

Для более широких классов функций это уже неверно. Например, для s раз дифференцируемых функций n переменных характеристикой сложности функций является не число n ее аргументов, а отношение $\frac{n}{s}$. В терминах суперпозиций этот факт выглядит следующим образом: *при всяких n и s существуют s раз дифференцируемые функции n переменных, не представимые суперпозициями p раз дифференцируемых функций m переменных, если только* $\frac{m}{p} < \frac{n}{s}$ [12]. С точки зрения трудности запоминания

функции (составления таблицы для функции) то же самое выглядит следующим образом: *если задан некоторый алгорифм, позволяющий разложить всякую s раз дифференцируемую функцию n переменных в суперпозицию функций меньшего числа переменных, то всякая таблица, в которую записаны функции, составляющие суперпозицию, окажется не проще, чем таблица, в которую, например, записаны коэффициенты* Фурье разлагаемой функции.

Более полным доказательством того, что характеристикой сложности s раз дифференцируемой функции n переменных является отношение $\frac{n}{s}$, а характеристикой сложности аналитической функции — число n ее аргументов, явились оценки А. Н. Колмогорова ε-энтропии для соответствующих функциональных пространств [3]. С помощью подобного рода оценок удается оценивать снизу объем таблиц (общее количество двоичных разрядов, необходимых для записи всех параметров таблицы). С другой стороны, усовершенствование методов работы [2] привело к рассматриваемым здесь оценкам сложности расшифровки таблиц. Эти оценки еще раз подтверждают ту точку зрения, что характеристикой сложности s раз дифференцируемой функции n переменных является отношение $\frac{n}{s}$, а характеристикой сложности аналитической функции n переменных число n ее аргументов.

Что же касается спортивной стороны в решении тринадцатой проблемы Гильберта, то следует отметить, что последнее слово опровержения гипотезы Гильберта принадлежит студенту Московского университета В. И. Арнольду. Совместными усилиями А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда доказано, что *всякая непрерывная функция n переменных (а следовательно, и всякая аналитическая функция) может быть представлена в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и операции сложения* [4].

Постановка задачи и основные результаты. Пусть F есть некоторое компактное семейство вещественных (или комплексных) функций $f(x)$, определенных на некотором множестве G (норма — верхняя грань значений модуля функции на множестве G). Φ — метрическое расширение простран-

ства F, т. е. такое пространство, которое содержит F своим подмножеством и имеет на нем тождественную метрику, а $T_\varepsilon^\Phi(f)$ — таблица любой функции $f(x) \in F$, состоящая из p параметров $y_1, y_2, \ldots, y_p$ и расшифровывающего алгорифма $\Gamma(t)$, восстанавливающая $f(x)$ (всюду на G) с точностью до ε. Под $\Gamma(y)$ будем подразумевать вещественный многочлен *) $P_x^k(y)$ от p переменных $y_1, y_2, \ldots, y_p$, имеющий по каждому из переменных степень не выше $k \geqslant 0$, коэффициенты которого произвольным образом зависят от $x \in G$, такой, что всякой функции $f(x) \in F$ можно указать такой набор значений параметров $y_1, y_2, \ldots, y_p$, что при всяком $x \in G$

$$|f(x) - P_x^k(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Верхний индекс у $T_\varepsilon^\Phi(f)$ указывает, что при всяком y $P_x^k(y)$ (как функция от x) является элементом пространства Φ.

Наша задача состоит в том, чтобы на основании общих свойств пространства F каким-либо образом оценить снизу «сложность» таблиц для элементов из F. Сложность таблицы характеризуется двумя факторами:

а) ее объемом (общим количеством двоичных разрядов, необходимых для записи всех параметров таблицы),

б) сложностью расшифровывающего таблицу алгорифма (в рассматриваемом случае — величиной чисел p и k).

Введенное А. Н. Колмогоровым понятие ε-энтропии метрического пространства позволяет оценивать порядок роста объема таблицы при увеличении точности запоминания функции. Это понятие здесь несколько усовершенствуется, а именно, определяются относительная ε-энтропия $H_\varepsilon^\Phi(F)$ и абсолютная ε-энтропия $H_\varepsilon(F)$ пространства F (определение см. в § 3, 4), в терминах которых удается доказать следующее:

---

*) Здесь мы ограничиваемся рассмотрением одного простейшего класса алгорифмов. В книге же рассматриваются таблицы с расшифровывающими алгорифмами, допускающими не только арифметические, но и простейшие логические операции (например, операции сравнения, взятия максимума и пр.).

1. $H_\varepsilon^\Phi(F)$ совпадает с точной нижней гранью объема таблиц $T_\varepsilon^\Phi(f)$ ($f \in F$, Φ фиксировано).

2. $H_\varepsilon(F)$ совпадает с точной нижней гранью объема всевозможных таблиц $T_\varepsilon^\Phi(f)$ ($f \in F$, а Φ — произвольно).

3. $H_\varepsilon(F) = \inf\limits_{\Phi \supset F} H_\varepsilon^\Phi(F)$ и при этом наилучшим метрическим расширением для всякого компактного метрического пространства F является пространство C всех непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций, т. е.

$$H_\varepsilon^C(F) = H_\varepsilon(F).$$

Во второй и третьей главах книги оценивается величина абсолютной ε-энтропии для некоторых подпространств аналитических и дифференцируемых функций. Доказываются следующие соотношения *):

$$2^{H_{4\delta(4\varepsilon)}(G)} + \log\left(\frac{c}{3\varepsilon}\right) \leqslant H_\varepsilon\left(F^G_{\omega(\delta), c}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{H_{\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)}(G)} + \log\left(\frac{3c}{\varepsilon}\right);$$

$$A(s, n)\rho^n\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}} \leqslant H_\varepsilon\left(F^{\rho, n}_{s, L, c}\right) \leqslant B(s, n)\rho^n\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}};$$

$$A(G_1, G_2)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} \leqslant H_\varepsilon\left(F^{G_1, n}_{G_2, c}\right) \leqslant$$

$$\leqslant B(G_1, G_2)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1};$$

$$H_\varepsilon\left(F^{r, n}_{\rho, c}\right) = \frac{2}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\log\rho_k} + \frac{1}{\log r_k}\right)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} +$$

$$+ O\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\right];$$

$$H_\varepsilon\left(F^\delta_{d, c, 2\pi}\right) = \frac{2}{(n+1)!\,(\log e)^n}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{d_k} + \frac{1}{\delta_k}\right)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} +$$

$$+ O\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log\frac{1}{\varepsilon}\right];$$

---

*) Второе и третье неравенства получены А. Н. Колмогоровым.

$$H_\varepsilon(F_{d,c,2\pi}) = \frac{2}{(n+1)!\,(\log e)^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k} \left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} + \\ + O\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right];$$

$$H_\varepsilon\left(F_{\rho,c}^{a,b}\right) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\log\left(\frac{2}{b_k - a_k}\rho_k\right)} \left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} + \\ + O\left[\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{c}{\varepsilon}\right];$$

$$H_\varepsilon\left(F_s^{\sigma,c,n}\right) = \frac{2}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n} S_k \frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}}{\left(\log\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n} + \\ + o\left[\frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}}{\left(\log\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n}\right]$$

(определение пространств $F^{G}_{\omega(\delta),c}, \ldots, F_s^{\sigma,c,n}$ см. в списке обозначений, приложенном в конце книги), где $A(s, n)$ $B(s, n)$, $A(G_1, G_2)$ и $B(G_1, G_2)$ суть положительные, не зависящие от ε константы.

Основным результатом монографии являются неравенства, дающие оценку сложности таблиц для элементов некоторых функциональных пространств. Для некоторых подпространств аналитических функций (например, для пространства $F^{G_1,n}_{G_2,c}$) в главе V доказывается, что, если $T_\varepsilon^\Phi(f)$ есть некоторая таблица, восстанавливающая функцию $f \in F$ с точностью ε, то соответствующие числа p, k и ε должны удовлетворять неравенству

$$p \log\left(\frac{k+1}{\varepsilon}\right) \geqslant A(F)\, H_\varepsilon(F),$$

где $A(F) > 0$ есть некоторая константа, не зависящая от p, k и ε. В частности, для тех случаев, когда удается вычислить основной член ε-энтропии пространства F (например, для пространств $F^{r,n}_{\rho,c}, \ldots, F_s^{\sigma,c,n}$), получается, что числа p, k

и ε для всякой таблицы $T_\varepsilon^\Phi(f)$ $(f \in F)$ удовлетворяют более точному неравенству

$$p \log\left(\frac{k+1}{\varepsilon}\right) \geqslant H_\varepsilon(F) - o\,[H_\varepsilon(F)].$$

С другой стороны, доказывается существование таких методов составления таблиц $T_\varepsilon^\Phi(f)$ $(f \in F)$, для которых

$$p \log\left(\frac{k+1}{\varepsilon}\right) \leqslant B(F)\, H_\varepsilon(F),$$

где $B(F) > 0$ есть некоторая константа. К таким методам составления таблиц относится, например, метод, основанный на запоминании коэффициентов отрезка ряда Тейлора функции.

Для некоторых пространств, по своей структуре напоминающих пространство C непрерывных на отрезке $[0, 1]$ вещественных функций (например, для пространств $F^g_{\omega(\delta), c}$ и $F^{\rho, n}_{s, L, c}$), в главе VII доказывается, что характеристики p и k сложности всякой таблицы $T_\varepsilon^\Phi(f)$ $(f \in F)$ должны удовлетворять неравенству

$$p \log(1+k) \geqslant c(F)\, H_\varepsilon(F),$$

где $c(F) > 0$ есть некоторая константа, не зависящая от p, k и ε.

С другой стороны, для пространств типа c доказывается, что если только числа p и k удовлетворяют неравенству

$$p \log(1+k) \geqslant H_{\frac{1}{2}\varepsilon}(F),$$

то можно указать такой способ составления таблиц для элементов $f \in F$, при котором числа p и k окажутся характеристиками сложности таблицы.

Основным рабочим аппаратом при выводе этих неравенств являются вариации множества, изучению которых здесь посвящаются IV и V главы.

ГЛАВА I

ПОНЯТИЕ ЭНТРОПИИ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Таблица и ее объем

Пусть F есть метрическое пространство, а Φ — его метрическое расширение, т. е. такое метрическое пространство, которое содержит F своим подмножеством, и такое, что для всякой пары элементов f_1 и f_2 из F выполняется равенство

$$\rho_F(f_1, f_2) = \rho_\Phi(f_1, f_2),$$

где $\rho_F(f_1, f_2)$ и $\rho_\Phi(f_1, f_2)$ суть расстояния между f_1 и f_2 в смысле метрик пространств F и Φ (соответственно).

Таблицей $T_\varepsilon^\Phi(f)$ элемента f из F, восстанавливающей f с точностью до ε при помощи некоторого элемента φ из Φ, мы будем называть упорядоченный набор $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p)$ элементов некоторого множества ω и алгорифм $\Gamma(t)$ (правило), который набору t ставит в соответствие некоторый элемент $\varphi \in \Phi$ такой, что $\rho_\Phi(\varphi, f) \leqslant \varepsilon$. Относительно $\Gamma(t)$ заметим, что этот алгорифм следует предполагать не зависящим от f, т. е. $\Gamma(t)$ можно рассматривать как отображение множества ω в пространстве Φ такое, что $\Gamma(\omega)$ образует в пространстве Φ ε-сеть *) для F.

Элементы $t_1, t_2, \ldots, t_p$ будем называть *параметрами* таблицы $T_\varepsilon^\Phi(f)$, а $\Gamma(t)$ — *расшифровывающим алгорифмом*.

Объемом таблицы $T_\varepsilon^\Phi(f)$ будем называть число $P(T_\varepsilon^\Phi(f)) = \log_2 n^p$, где n — число элементов множества ω.

---

*) Множество $A \subset \Phi$ называется ε-сетью пространства $F \subset \Phi$, если для всякой точки $f \in F$ в множестве A можно указать элемент, удаленный от f (в смысле метрики пространства Φ) не более чем на ε.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением числовых таблиц для функции (т. е. случаем, когда ω — множество чисел, а F — пространство функций). Для такого рода таблиц их объем можно определить как минимальное количество двоичных разрядов *), необходимых для записи параметров t_i таблицы, поскольку всякое действительное число может быть сколь угодно точно представлено с помощью двоичных чисел.

Рассмотрим один конкретный пример составления таблицы.

Пусть $f(x)$ есть заданная на отрезке [0, 1] вещественная функция, относительно которой известно, что максимумы модулей ее и ее первой производной на отрезке [0, 1] не превосходят 1. В качестве множества ω возьмем совокупность ω_ε чисел, кратных ε и не превосходящих по модулю 1. Таким образом, ω_ε оказывается состоящим из $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$ элементов. За параметры таблицы примем числа $t_1, t_2, \ldots, t_{2p}$ из множества ω_ε такие, что

$$|t_k - f(\varepsilon k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |t_{p+k} - f'(\varepsilon k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\left(k = 1, 2, \ldots, p;\ p = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right).$$

В качестве расшифровывающего таблицу алгорифма $\Gamma(t)$, с помощью которого можно было бы восстановить с точностью до $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$ значение функции $f(x)$ в произвольной точке x отрезка [0, 1], примем формулу

$$\varphi(x) = t_k + t_{p+k}(x - \varepsilon k),$$

где k есть число, которое в зависимости от x выбирается таким образом, чтобы

$$|x - \varepsilon k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Построенная таким образом таблица порождает некоторую функцию $\varphi(x)$ семейства $\Phi(0, 1)$ всех ограниченных

*) Двоичным числом (или разрядом) называется символ, обозначающий произвольный элемент множества, состоящего всего лишь из двух элементов — 0 и 1.

на отрезке [0, 1] вещественных функций. Под $F_1 = F \subset \Phi(0,1)$ в данном случае следует понимать пространство всех функций, обладающих теми же свойствами, которые известны относительно $f(x)$, т. е. пространство всех непрерывно дифференцируемых на отрезке [0, 1] функций, ограниченных по модулю вместе со своими первыми производными константой 1. Из теоремы Лагранжа нетрудно получить, что при $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$ выполняется неравенство

$$\|f(x) - \varphi(x)\| \leqslant \varepsilon,$$

где

$$\|f(x) - \varphi(x)\| = \max_x |f(x) - \varphi(x)|.$$

Объем составленной таблицы равен

$$\log_2\left(1 + \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]\right)^{2\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]} = 2\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\log_2\left(1 + \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]\right).$$

Далее мы покажем, что объем всякой таблицы для функции $f(x)$ рассматриваемого типа, составленной на основании лишь тех ее свойств, которые приведены выше, должен быть не менее $H_\varepsilon(F_1) \geqslant \frac{1}{\varepsilon} + \log_2 \frac{1}{\varepsilon} - 2$, и укажем для таких функций более экономный способ составления таблиц, объем которых будет равен $\frac{1}{\varepsilon} + \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 2$.

Отметим, что нельзя разумным образом оценить снизу объем таблицы для какой-либо конкретной функции, например, для $\sin x$ или $\log x$, не ограничивая при этом круга свойств функции, которые используются при составлении таблицы. Это следует хотя бы из тех соображений, что, например, при записи выражения «$\sin x$» используется очень мало места и в то же время эта запись абсолютно точно задает функцию $\sin x$. Поэтому для всякой конкретной функции оценить снизу объем ее таблиц можно разве лишь числом единица. Но практические способы табулирования, как правило, основываются на использовании лишь некоторых свойств функции. Поэтому можно заниматься более содержательной задачей, а именно, оценкой объема таблицы и ее «сложности» для таких случаев, когда при ее составлении

используется ряд тех свойств функции, которые присущи достаточно широкому классу функций. Именно этой задачей мы и будем заниматься.

§ 2. Энтропия дискретных множеств

Определение (К. Шеннон). Пусть X есть множество, состоящее из n элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Число $H(X) = \log n$ *) называется *энтропией* множества X (см. [9]).

Посмотрим, в чем смысл величины $H(X)$ с точки зрения сложности числовой записи элемента множества X.

Пусть на основании каких-то признаков каждому элементу $x \in X$ поставлена в соответствие конечная последовательность

$$\tau(x) = [\tau_1(x), \tau_2(x), \ldots, \tau_k(x)]$$

двоичных разрядов таким образом, чтобы различным элементам множества X соответствовали различные последовательности чисел. Так как различных (попарно отличающихся хотя бы по одному разряду) последовательностей, состоящих из k двоичных чисел, всего лишь 2^k, то в силу однозначности соответствия $2^k \geqslant n$, следовательно, $k \geqslant H(X)$. Таким образом, для записи элемента $x \in X$ (при условии, что относительно x не известно ничего, кроме того, что $x \in X$) необходимо использовать не менее чем $H(X)$ двоичных разрядов.

С другой стороны, можно указать способ записи элемента $x \in X$, при котором на запись элемента расходуется не более чем $[H(X)] + 1$ двоичных разрядов. Способ этот состоит в следующем. По какому-либо признаку множество X разбивается на два подмножества X_0 и X_1 ($X_0 + X_1 = X$), состоящие из одинакового числа элементов, если n-четно, и отличающиеся по мощности не более чем на 1 в противном случае. Каждое из множеств X_{τ_1} ($\tau_1 = 0, 1$) разделим на два отличающихся «по мощности» не более чем на 1 подмножества X_{τ_1, τ_2} ($\tau_2 = 0, 1$) и т. д. Продолжая аналогичным образом процесс деления множеств пополам (или почти пополам),

*) Здесь и всюду далее под выражением $\log n$ будет пониматься двоичный логарифм, в противном случае основание логарифма будет указываться.

получим множества $X_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k}$ ($\tau_r = 0, 1$; $r = 1, 2, \ldots, k$; $k \leqslant [H(X)] + 1$). При $k = [H(X)] + 1$ каждое из множеств $\{X_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k}\}$ оказывается состоящим не более чем из одного элемента, поскольку в противном случае оказалось бы, что $n > 2^{H(X)} = n$, что невозможно. Таким образом, каждому элементу $x = X_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{[H(X)]+1}}$ мы можем поставить в соответствие набор индексов $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{[H(X)]+1}$. Нетрудно убедиться, что это соответствие однозначно, и причем различным элементам из X соответствуют различные последовательности индексов τ_i. Искомая запись осуществлена.

Таким образом, число $H(x)$, определяемое мощностью множества X, показывает, из скольких (двоичных) разрядов должна состоять наиболее экономная таблица для $x \in X$.

§ 3. Понятие относительной ε-энтропии

Если множество X состоит из бесконечного числа элементов, то $H(X) = \log(+\infty) = +\infty$ и поэтому никаким конечным числом двоичных разрядов элемент из X точно записать нельзя.

Для того чтобы разумным образом определить понятие энтропии и для бесконечных множеств, приходится объединять достаточно близкие по свойствам элементы в одну группу так, что множество получившихся групп оказалось конечным.

Определение. Пусть F — компактное метрическое пространство, а Φ — его метрическое расширение. Обозначив через $N_\varepsilon^\Phi(F)$ число элементов минимальной в Φ по числу точек ε-сети $S_\varepsilon^\Phi(F)$ множества F, положим

$$H_\varepsilon^\Phi(F) = \log N_\varepsilon^\Phi(F).$$

Число $H_\varepsilon^\Phi(F)$ назовем *ε-энтропией* пространства F *относительно пространства* Φ или просто *относительной ε-энтропией* пространства F.

В настоящее время укоренилось данное А. Н. Колмогоровым понятие ε-энтропии. Поэтому следует сказать несколько слов для обоснования нового определения.

В наших обозначениях ε-энтропия пространства (в смысле А. Н. Колмогорова) равна $H_\varepsilon^F(F)$. С помощью этой величины удается точно оценить сразу объем таблиц лишь для того случая, когда порождаемый таблицей элемент оказывается принадлежащим пространству F. Если же разрешить при табулировании элемента из F записывать в таблицу элементы, хорошо аппроксимирующие рассматриваемый элемент, но, вообще говоря, не принадлежащие F, то относительно объема таблицы удается доказать лишь, что $P(T_\varepsilon^\Phi(f)) \geqslant H_{2\varepsilon}^F(F)$. Более ощутимым недостатком величины $H_\varepsilon^F(F)$ является то, что с помощью этого понятия не удается указать точно нижней грани объема таблиц в общем случае. В терминологии А. Н. Колмогорова упомянутая нижняя грань оказывается равной $H_{k\varepsilon}^F(F)$ $(1 \leqslant k \leqslant 2)$, где k, вообщее говоря, зависит от F. К тому же заметим, что сам факт разрешения записи в таблицу элементов расширения основного пространства приводит к конкретным, более экономным методам составления таблиц.

Теорема 1. *Относительная ε-энтропия $H_\varepsilon^\Phi(F)$ совпадает с точностью до* 1 *с нижней гранью величины $P[T_\varepsilon^\Phi(f)]$ $(f \in F)$, то есть*

$$\inf_{T_\varepsilon^\Phi(f)} P[T_\varepsilon^\Phi(f)] \leqslant H_\varepsilon^\Phi(F) \leqslant \inf_{T_\varepsilon^\Phi(f)} P[T_\varepsilon^\Phi(f)] + 1.$$

Действительно, поскольку, согласно определению таблиц, записанный в них алгорифм $\Gamma(t)$ позволяет всякому элементу $f \in F$ поставить в соответствие некоторый элемент $\varphi \in \Phi$, аппроксимирующий f с необходимой точностью ε, то всей совокупности таблиц элементов из F в пространстве Φ соответствует некоторое множество Φ_0, являющееся ε-сетью пространства F. Обозначим через n число элементов множества Φ_0. По определению минимиальной ε-сети $n \geqslant N_\varepsilon^\Phi(F)$. Поэтому

$$P[T_\varepsilon^\Phi(f)] \geqslant \log n \geqslant \log N_\varepsilon^\Phi(F) = H_\varepsilon^\Phi(F).$$

Укажем теперь алгорифм, позволяющий составить идеальную (с наименьшим объемом) таблицу, представляющую элемент $f \in F$ с точностью до ε. Для этого в пространстве Φ

фиксируем множество $S_\varepsilon^\Phi(F)$, являющееся минимальной ε-сетью (в Φ) пространства F. Элементы этого множества обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ $\left(n = N_\varepsilon^\Phi(F)\right)$. В качестве параметров идеальной таблицы для элемента $f \in F$ примем номер (индекс) того элемента φ, который аппроксимирует f с точностью до ε. Так как записанный в таблице номер может изменяться в пределах лишь от 1 до $n = N_\varepsilon^\Phi(F)$, то его двоичная запись занимает

$$\left[\log N_\varepsilon^\Phi(F)\right] + 1 = \left[H_\varepsilon^\Phi(F)\right] + 1$$

двоичных разрядов, т. е. объем идеальной таблицы равен $\left[H_\varepsilon^\Phi(F)\right] + 1$.

Теорема доказана.

§ 4. Абсолютная ε-энтропия метрического пространства

Если рассматривать таблицы для элементов из F, в которых разрешалось бы записывать (в качестве аппроксимирующих) элементы из всевозможных метрических расширений пространства F, то для оценки объема таких таблиц необходимо ввести по аналогии с относительной ε-энтропией новое понятие, не зависящее от способа расширения пространства F.

Определение. Пусть F есть компактное метрическое пространство, а $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — его произвольное 2ε-покрытие *) множествами $\{\alpha_k\}$ из F. Обозначим через $N_\varepsilon(F)$ число элементов покрытия наиболее экономного (т. е. состоящего из наименьшего числа множеств $\{\alpha_k\}$) 2ε-покрытия $S_\varepsilon(F)$. Число **)

$$H_\varepsilon(F) = \log N_\varepsilon(F)$$

называется *абсолютной* ε-энтропией пространства F.

---

*) Система подмножеств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ пространства F называется 2ε-покрытием пространства F, если диаметр всякого из этих множеств не превосходит 2ε и $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = F$. При этом множества $\{\alpha_k\}$ называются *элементами покрытия*.

**) Подобная характеристика в качестве вспомогательного понятия использовалась уже в работе А. Н. Колмогорова [6].

С целью оправдания названия абсолютной ε-энтропии докажем следующее:

Теорема 1. *Для всякого компактного метрического пространства F его абсолютная ε-энтропия $H_\varepsilon(F)$ совпадает с нижней гранью относительных ε-энтропий пространства при всевозможных его метрических расширениях*:

$$H_\varepsilon(F) = \inf_{\Phi \supset F} H_\varepsilon^\Phi(F).$$

Доказательство. Пусть фиксировано некоторое метрическое расширение Φ пространства F. Покажем, что в таком случае

$$H_\varepsilon^\Phi(F) \geqslant H_\varepsilon(F).$$

Пусть $S_\varepsilon^\Phi(F) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ $(n = N_\varepsilon(F))$ есть минимальная в пространстве Φ ε-сеть пространства F. Обозначим через σ_k замкнутый в Φ шар $\{\rho_\Phi(\varphi_k, \varphi) \leqslant \varepsilon\}$ радиуса ε с центром φ_k, а через σ_k^* — общую часть σ_k и F. Так как $S_\varepsilon^\Phi(F)$ приближает пространство F с точностью до ε, то $\sigma^* = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^* \supset F$. А так как всякое из множеств $\{\sigma_k^*\}$, будучи подмножеством шара радиуса ε, имеет диаметр, не превосходящий 2ε, то $N_\varepsilon^\Phi(F) \geqslant N_\varepsilon(F)$, поскольку $N_\varepsilon(F)$ есть число элементов наиболее экономного 2ε-покрытия пространства F. Следовательно,

$$H_\varepsilon^\Phi(F) = \log N_\varepsilon^\Phi(F) \geqslant \log N_\varepsilon(F) = H_\varepsilon(F).$$

Таким образом первая часть теоремы доказана. Для полного доказательства теоремы 1 достаточно указать такое метрическое расширение Φ пространства F, при котором

$$N_\varepsilon^\Phi(F) = N_\varepsilon(F).$$

Лемма 1 (В. Д. Ерохин). *Для всякого компактного подмножества диаметра $2r$ из пространства C всех непрерывных на отрезке* [0, 1] *функций можно указать элемент того же пространства C, удаленный от всех элементов рассматриваемого подмножества не более чем на r.*

Доказательство леммы. Пусть σ есть некоторое компактное подмножество диаметра $2r$ из пространства C. Обозначим через $\overline{f}(x)$ и $\underline{f}(x)$ функции, заданные на отрезке [0, 1], являющиеся соответственно верхней и нижней гранями семейства всех функций $f(x)$ из σ. Так как σ является компактным подмножеством пространства C, то существует непрерывная функция $\omega(\delta)$, ограничивающая сверху модули непрерывности для всех функций σ. Поэтому $\overline{f}(x)$ и $\underline{f}(x)$ также обязаны иметь модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Положим

$$f_0(x) = \frac{1}{2}[\overline{f}(x) + \underline{f}(x)],$$

функция $f_0(x)$ имеет модуль непрерывности, также не превосходящий $\omega(\delta)$, т. е. $f_0(x)$ есть непрерывная на отрезке [0, 1] функция, а следовательно, она является элементом пространства C.

Из определения функции $f_0(x)$ нетрудно получить, что при всяком x из отрезка [0, 1] значение всякой функции $f(x)$ в этой точке удовлетворяет неравенству $|f(x) - f_0(x)| \leqslant r$ и поэтому $\|f(x) - f_0(x)\| \leqslant r$ для всякой функции из σ. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1 (продолжение). В силу теоремы С. Банаха — С. Мазура всякое сепарабельное (а следовательно, и всякое компактное) метрическое пространство может быть изометрично вложено в пространство C. Поэтому мы можем считать пространство F подмножеством пространства C, т. е. считать, что C является одним из метрических расширений пространства F. Пусть σ_k^* ($k = 1, 2, \ldots, N_\varepsilon(F)$) суть подмножества пространства F диаметра 2ε, образующие 2ε-покрытие пространства F. В силу леммы 1 для всякого множества σ_k^* можно указать элемент $c_k \in C$, удаленный от всех точек множества σ_k^* не более чем на ε. Подмножество $\sum_{k=1}^{N_\varepsilon(F)} c_k$ множества C оказывается ε-сетью пространства F. Следовательно,

$$H_\varepsilon(F) \geqslant \log N_\varepsilon^C(F) = H_\varepsilon^C(F),$$

т. е., учитывая уже доказанную первую часть рассматриваемой теоремы, получаем:

$$H_\varepsilon(F) = H_\varepsilon^C(F).$$

Теорема 1 доказана. Одновременно получен следующий результат:

Теорема 2. *Пространство C является наилучшим метрическим расширением для всякого компактного метрического пространства F в том смысле, что*

$$H_\varepsilon^C(F) = H_\varepsilon(F) \leqslant H_\varepsilon^\Phi(F),$$

где Φ есть произвольное метрическое расширение пространства F.

Содержание введенного понятия абсолютной ε-энтропии метрического пространства отчасти сводится к следующей теореме:

Теорема 3. *Если $T_\varepsilon^\Phi(f)$ есть таблица элемента f пространства F, то ее объем должен быть не менее чем $H_\varepsilon(F)$. При этом для произвольного элемента из F можно составить таблицу, объем которой равен $[H_\varepsilon(F)]+1$.*

Первая часть этой теоремы получается из теорем 1 § 3 и 1 § 4. Из второй части теоремы 1 § 3 и теоремы 2 § 4 получается вторая половина теоремы.

§ 5. ε-емкость метрических пространств

Определение (А. Н. Колмогоров). Пусть F есть компактное метрическое пространство, $s_\varepsilon(F)$ — множество из F, состоящее из максимального числа элементов, попарно удаленных друг от друга строго более чем на 2ε; $n_\varepsilon(F)$ — число точек множества $s_\varepsilon(F)$. Число $h_\varepsilon(F) = \log n_\varepsilon(F)$ назовем *ε-емкостью* пространства F.

Отметим прежде всего два простейших свойства функций

$$H_\varepsilon^\Phi(F),\ H_\varepsilon(F),\ h_\varepsilon(F).$$

Лемма 1. *Для произвольного компактного пространства F и его метрического расширения Φ при всяких положительных ε и δ, $\delta \leqslant \varepsilon$, выполняются следующие*

неравенства:

$$H_\varepsilon^\Phi(F) \leqslant H_\delta^\Phi(F),$$

$$H_\varepsilon(F) \leqslant H_\delta(F),$$

$$h_\varepsilon(F) \leqslant h_\delta(F).$$

Лемма 2. *Пусть F_1 и F_2 суть два компактных метрических пространства такие, что F_2 является метрическим расширением пространства F_1, а Φ — метрическим расширением пространства F_2 (а следовательно, и пространства F_1). Тогда при всяком $\varepsilon > 0$ выполняются соотношения*:

$$H_\varepsilon^\Phi(F_2) \geqslant H_\varepsilon^\Phi(F_1),$$

$$H_\varepsilon(F_2) \geqslant H_\varepsilon(F_1),$$

$$h_\varepsilon(F_2) \geqslant h_\varepsilon(F_1).$$

Леммы 1 и 2 легко получаются из определения величин $H_\varepsilon^\Phi(F)$, $H_\varepsilon(F)$ и $h_\varepsilon(F)$.

Лемма 3 (А. Н. Колмогоров). *Для всякого компактного метрического пространства F и числа $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$H_\varepsilon(F) \geqslant h_\varepsilon(F),$$

причем множество $s_\varepsilon(F)$ образует в пространстве F 2ε-сеть.

Доказательство. Пусть $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ суть элементы из F, попарно удаленные друг от друга более чем на 2ε, а $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ — произвольное 2ε-покрытие пространства F. Ясно, что всякий из элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ принадлежит хотя бы одному из множеств $\{\sigma_i\}$ и никакая пара из $\{f_i\}$ не может принадлежать одному и тому же элементу покрытия. Следовательно, $k \geqslant n$, а потому, полагая $n = n_\varepsilon(F)$, получаем, что $H_\varepsilon(F) \geqslant \log n_\varepsilon(F) = h_\varepsilon(F)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если F есть компактное метрическое пространство, а Φ — его некоторое метрическое расширение, то при всяком $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство*

$$H_{2\varepsilon}^\Phi(F) \leqslant H_\varepsilon(F) \leqslant H_\varepsilon^\Phi(F).$$

Доказательство. Фиксируем наиболее экономное 2ε-покрытие $S_\varepsilon(F)=(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ $(n=n_\varepsilon(F))$ пространства F и в каждом из элементов этого покрытия выберем по одной точке. Таким образом, набранное множество обозначим через F^*. Так как диаметр всякого множества из $\{\sigma_i\}$ не превосходит 2ε, то $F^*\subset F\subset\Phi$ аппроксимирует в Φ пространство F с точностью 2ε, а поэтому число $N^\Phi_{2\varepsilon}(F)$ элементов минимальной в Φ 2ε-сети пространства F не может быть больше числа $n_\varepsilon(F)$, т. е. $H^\Phi_{2\varepsilon}(F)\leqslant H_\varepsilon(F)$. Вторая половина неравенства леммы доказана уже в теореме 1 § 4. Лемма доказана.

Лемма 5. *Во всяком компактном метрическом пространстве F можно указать $N_{2\varepsilon}(F)$ элементов, попарно удаленных друг от друга более чем на 2ε.*

Доказательство. Фиксируем в пространстве F множество $s_\varepsilon(F)$, состоящее из максимального числа $n_{2\varepsilon}(F)$ элементов, попарно удаленных более чем на 2ε. Обозначим через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ $(n=n_\varepsilon(F))$ замкнутые в F шары радиуса 2ε с центрами на $s_\varepsilon(F)$. Поскольку множество $s_\varepsilon(F)$ максимально в своем роде, то $\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i\supset F$, поскольку в противном случае оказалось бы, что $s_\varepsilon(F)$ можно пополнить еще хотя бы одним элементом из $F-\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i$, удаленным от множества $s_\varepsilon(F)$ строго более чем на 2ε. Таким образом, $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ оказывается 4ε-покрытием пространства F и, следовательно, $n_\varepsilon(F)\geqslant N_{2\varepsilon}(F)$, т. е. $h_\varepsilon(F)>H_{2\varepsilon}(F)$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для всяких F, $\Phi\supset F$ и $\varepsilon>0$ величины относительной и абсолютной ε-энтропии пространства F и ε-емкость F связаны неравенствами*

$$H^\Phi_\varepsilon(F)\geqslant H_\varepsilon(F)\geqslant h_\varepsilon(F)\geqslant H^\Phi_{2\varepsilon}(F)\geqslant H_{2\varepsilon}(F).$$

Теорема является объединением выше сформулированных лемм 3, 4, 5.

§ 6. Энтропия некоторых простейших множеств

Пусть F_1 и F_2 суть два компактных метрических пространства, а $F=F_1\times F_2$ — их прямое произведение. Ограничимся рассмотрением таких прямых произведений, мет-

рика которых удовлетворяет следующему условию: для всякой пары элементов

$$f' = (f_1', f_2') \quad \text{и} \quad f'' = (f_1'', f_2'') \quad \text{из} \quad F$$

выполняется неравенство

$$A \max\left[\rho_{F_1}(f_1', f_1''); \rho_{F_2}(f_2', f_2'')\right] \leqslant \rho_F(f', f'') \leqslant$$
$$\leqslant B \max\left[\rho_{F_1}(f_1', f_1''), \rho_{F_2}(f_2', f_2'')\right],$$

где A и B — некоторые положительные константы.

Лемма 1. *При всяком $\varepsilon > 0$ имеет место следующее неравенство*:

$$H_\varepsilon(F) \leqslant H_{\frac{\varepsilon}{B}}(F_1) + H_{\frac{\varepsilon}{B}}(F_2).$$

Доказательство. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{B}$ и обозначим через

$$S_\delta(F_1) = (\sigma_1^1, \sigma_2^1, \sigma_3^1, \ldots, \sigma_{n_1}^1) \quad \text{и} \quad S_\delta(F_2) = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{n_2}^2)$$

$(n_1 = N_\delta(F_1);\ n_2 = N_\delta(F_2))$ наилучшие 2δ-покрытия пространств F_1 и F_2. Нетрудно проверить, что множества

$$\sigma_i^1 \times \sigma_k^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_1,\ k = 1, 2, \ldots, n_2)$$

образуют 2δ-покрытие пространства F, а так как число этих множеств равно $n = n_1 n_2$, то

$$H_\varepsilon(F) = H_{B\delta}(F) \leqslant \log n = \log n_1 + \log n_2 =$$
$$= H_\delta(F_1) + H_\delta(F_2) = H_{\frac{\varepsilon}{B}}(F_1) + H_{\frac{\varepsilon}{B}}(F_2).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *При всяком $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$h_\varepsilon(F) \geqslant h_{\frac{\varepsilon}{A}}(F_1) + h_{\frac{\varepsilon}{A}}(F_2).$$

Доказательство. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{A}$ и обозначим через

$S_\delta(F_1) = (f_1^1, f_2^1, \ldots, f_{n_1}^1)$ и $S_\delta(F_2) = (f_1^2, f_2^2, \ldots, f_{n_2}^2)$ $(n_1 = N_\delta(F_1),\ n_2 = N_\delta(F_2))$ максимальные множества

элементов из F_1, F_2, таких, что

$$\rho_{F_1}(f_i^1, f_k^1) > 2\delta \quad \text{и} \quad \rho_{F_2}(f_i^2, f_k^2) > 2\delta.$$

Нетрудно проверить, что, во-первых, множество

$$S_\delta(F_1) \times S_\delta(F_2) = \sum_{p=1}^{n_1} \sum_{q=1}^{n_2} (f_p^1, f_q^2)$$

состоит из $n = n_1 n_2$ элементов и, во-вторых, расстояние (в смысле метрики пространства F) между парой элементов этого множества не меньше, чем $2A\delta > 2\varepsilon$. Поэтому

$$h_\varepsilon(F) = h_{A\delta}(F) \geqslant \log n_1 + \log n_2 =$$
$$= h_\delta(F_1) + h_\delta(F_2) = h_{\frac{\varepsilon}{A}}(F_1) + h_{\frac{\varepsilon}{A}}(F_2).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Если* $F = F_1 \times F_2$, *то*

$$H_{\frac{\varepsilon}{B}}(F_1) + H_{\frac{\varepsilon}{B}}(F_2) \geqslant H_\varepsilon(F) \geqslant H_{\frac{\varepsilon}{A}}(F_1) + H_{\frac{\varepsilon}{A}}(F_2).$$

Теорема следует из лемм 1 и 2 и теоремы 1 § 5.

Следствие 1. *Если* $F = \prod_{k=1}^{n} F_k$ *и для всякой пары элементов* $f' = (f_1', \ldots, f_n')$ *и* $f'' = (f_1'', f_2'', \ldots, f_n'')$ *из* F

$$\rho_F = \max\left(\rho_{F_1}(f_1', f_1''), \rho_{F_2}(f_2', f_2''), \ldots, \rho_{F_n}(f_n', f_n'')\right],$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} H_{\alpha\varepsilon}(F_k) \leqslant H_\varepsilon(F) \leqslant \sum_{k=1}^{n} H_\varepsilon(F_k),$$

где $\alpha = 2^{n-1}$.

Следствие получается из теоремы 1 с учетом того, что при вычислении $H_\delta(\Phi_k \times F_{k+1})$ $(\Phi_k = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_k)$ $A = 1$, $B = 1$.

Следствие 2. *Если* $F = \prod_{k=1}^{n} F_k$ *и для всякой пары элементов* $f' = (f_1', f_2', \ldots, f_n')$ и $f'' = (f_1'', f_2'', \ldots, f_n'')$

из F

$$\rho_F = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[\rho_{F_k}(f'_k, f''_k)\right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} H_{\alpha\varepsilon}(F_k) \leqslant H_\varepsilon(F) \leqslant \sum_{k=1}^{n} H_{\beta\varepsilon}(F_k),$$

где $\alpha = 2^{n-1}$, $\beta = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Следствие доказывается индукцией по числу k с учетом того, что при вычислении $H_\delta(\Phi_k \times F_{k+1})$ $(\Phi_k = F_1 \times \times F_2 \times \ldots \times F_k)$ в рассматриваемом случае $A = 1$, $B = 2$.

Лемма 3. *Пусть F есть отрезок длины r и для $a \in F$ и $b \in F$*

$$\rho_F(a, b) = (b - a).$$

Тогда

$$\log\left(\left[\frac{r}{2\varepsilon}\right] - 1\right) \leqslant H_\varepsilon(F) \leqslant \log\left(\left[\frac{r}{2\varepsilon}\right] + 1\right).$$

Доказательство. Пусть c и d суть левый и правый концы рассматриваемого отрезка (соответственно). Обозначим через a_k точку нашего отрезка с координатой $x_k = (2\varepsilon + \delta) \times \times \left(k - \frac{1}{2}\right)$ $\left(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = \left[\frac{r}{2\varepsilon + \delta}\right]\right)$, а через a_{n+1} точку нашего отрезка с координатой $x_{n+1} = d - \varepsilon$. При $\delta = 0$ система отрезков $[(x_k - \varepsilon), (x_k + \varepsilon)]$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ образует 2ε-покрытие отрезка $[cd]$. Поэтому

$$H_\varepsilon(F) \leqslant \log(n+1) = \log\left(1 + \left[\frac{r}{2\varepsilon}\right]\right).$$

При всяком $\delta > 0$ точки a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ попарно удалены друг от друга на $2\varepsilon + \delta > 2\varepsilon$. Поэтому в силу леммы 3 § 5

$$H_\varepsilon(F) \geqslant \log(n-1) = \log\left(\left[\frac{r}{2\varepsilon}\right] - 1\right)$$

$\left(\text{неравенство получается, например, при } \delta = \frac{4\varepsilon^2}{r} \leqslant \frac{2\varepsilon}{\left[\frac{r}{2\varepsilon}\right]}\right)$.

Лемма доказана.

Теорема 2 (А. Н. Колмогоров). *Пусть G есть некоторая ограниченная область n-мерного евклидова пространства E_n. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$*

$$H_\varepsilon(G) = n \log \frac{1}{\varepsilon} + O_G(1).$$

Доказательство. Фиксируем в E_n два n-мерных замкнутых куба J_1 и J_2 со сторонами r_1 и r_2 (соответственно) и такие, что $J_2 \supset G \supset J_1$. Так как n-мерный куб является n-кратным произведением отрезка, то в силу следствия 2 теоремы 1 и леммы 3

$$n \log\left(\left[\frac{r_1}{2^n\varepsilon}\right] - 1\right) \leqslant H_\varepsilon(J_1) \leqslant n \log\left(\left[\frac{2^{n-2}r_1}{\varepsilon}\right] + 1\right),$$

$$n \log\left(\left[\frac{r_2}{2^n\varepsilon}\right] - 1\right) \leqslant H_\varepsilon(J_2) \leqslant n \log\left(\left[\frac{2^{n-2}r_2}{\varepsilon}\right] + 1\right),$$

т. е. при достаточно малом ε

$$H_\varepsilon(J_1) = n \log \frac{1}{\varepsilon} + O_1(1),$$

$$H_\varepsilon(J_2) = n \log \frac{1}{\varepsilon} + O_2(1).$$

Следовательно, в силу леммы 2 получаем:

$$H_\varepsilon(G) = n \log \frac{1}{\varepsilon} + O_G(1).$$

Теорема доказана.

ГЛАВА II

ЭНТРОПИЯ ПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этой главе вычисляется основной член абсолютной ε-энтропии для некоторых пространств аналитических функций. Основная идея счета состоит в том, что по скорости убывания коэффициентов рядов для аналитических функций удается достаточно точно установить качество функций и, обратно, зная область аналитичности функции, удается столь же точно оценить скорость сходимости ее ряда; точнее: размер области аналитичности функции с точностью до мало существенной погрешности взаимно однозначно определяет порядок убывания коэффициентов ряда этой функции. Поэтому запоминание коэффициентов разложения функции оказывается почти наилучшим (с точки зрения экономии памяти) способом приближенной записи аналитических функций. Чтобы лучше показать идею счета, остановимся прежде всего на одном частном случае.

§ 7. Энтропия аналитических функций одной вещественной переменной

Оценим ε-энтропию пространства $F_{\rho, c}^{-1, 1}$ всех вещественных аналитических на отрезке $[-1, 1]$ функций, для которых существуют аналитические продолжения, ограниченные (по модулю) в области $\mathcal{Э}_\rho$ константой $c > 0$, где $\mathcal{Э}_\rho$ есть область комплексной плоскости, ограниченная эллипсом с фокусами в концах отрезка $[-1, 1]$ действительной оси и с полусуммой осей $\rho = \frac{a+b}{2}$. За норму в этом пространстве принимается максимум модуля функции на отрезке $[-1, 1]$.

Фиксируем некоторую функцию $f(x)$ семейства $F_{\rho, c}^{-1, 1}$ и рассмотрим ее разложение в ряд по полиномам Чебышева $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p t_p(x)$. Напомним, что (см., например, [6])

$$t_p(x) = \cos(p \arccos x) = \frac{1}{2^{p-1}} x^p + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^p x^k \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

$$a_p = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) \frac{t_p(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Напомним также некоторые свойства полиномов Чебышева и его рядов:

1. Максимум полинома $t_p(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ равен 1.

2. Наилучшим приближением полинома $t_p(x)$ (в классе всех алгебраических многочленов степени меньше p) на отрезке $[-1, 1]$ является тождественный нуль. Из этого и свойства 1, в частности, следует, что всякий многочлен вида $S_p(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{p} a_r t_r(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ уклоняется от нуля (в смысле метрики C) не менее чем на $|a_p|$.

3. Из этих же свойств и того, что полином $\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} t_p(x)$ уклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$ меньше, чем какой-либо другой многочлен степени p с коэффициентом 1 при x^p, получается, что всякий многочлен степени p, имеющий старший коэффициент $c_p = 1$, уклоняется от нуля не менее чем на $\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$.

4. Если функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[-1, 1]$ условию Дини — Липшица, т. е. если

$$\lim_{n \to \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0$$

($\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$), то на этом отрезке

$$|f(x)-S_p(x)|\leqslant l_p(3+\ln p),$$

где l_p есть уклонение от $f(x)$ наилучшего (в классе алгебраических полиномов степени p) приближения функции $f(x)$, а $S_p(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{r=1}^{p}a_rt_r(x)$ — отрезок ряда Чебышева рассматриваемой функции.

Доказательство сформулированных предложений можно найти, например, в [6].

Лемма 1. *Пусть заданы произвольное действительное число k; $\rho>1$ и $p\geqslant 1$. Тогда*

$$\sum_{m=p}^{\infty}\frac{1}{m^k\rho^m}\leqslant\frac{p^{|k|}}{(\ln\rho)\,\rho^{n-1}}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{m=p}^{\infty}\frac{1}{m^k\rho^m}\leqslant\sum_{m=p}^{\infty}\frac{m^{|k|}}{\rho^m}\leqslant\int_p^{\infty}\frac{x^{|k|}}{\rho^{x-1}}\,dx=$$

$$=\frac{p^{|k|}}{(\ln\rho)\,\rho^{p-1}}-\frac{|k|}{\ln\rho}\int_p^{\infty}\frac{x^{|k|-1}}{\rho^{x-1}}\,dx\leqslant\frac{p^{|k|}}{(\ln\rho)\,\rho^{p-1}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если числа a_p ($p=0, 1, 2, \ldots$) суть коэффициенты ряда Чебышева для некоторой функции $f(x)$ из семейства $F_{\rho,c}^{-1,1}$, то*

$$|a_p|\leqslant\frac{4c\,(3+\ln p)}{\rho^{p-1}}.$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что в силу теоремы Ахиезера (см. [1]) уклонение l_p функции $f(x)$ (из семейства $F_{\rho,c}^{-1,1}$) от своего наилучшего (в классе алгебраических полиномов степени p) приближения должно удовлетворять неравенству

$$l_p\leqslant\frac{2c}{\rho^p}.$$

Из этого неравенства получаем:

$$\begin{aligned}|a_p| = \|a_p t_p(x)\| = \|S_p(x) - S_{p-1}(x)\| \leqslant \\ \leqslant \|S_p(x) - f(x)\| + \|f(x) - S_{p-1}(x)\| \leqslant \\ \leqslant l_p(3 + \ln p) + l_{p-1}[3 + \ln(p-1)] \leqslant \\ \leqslant 2l_{p-1}(3 + \ln p) \leqslant \frac{4c}{\rho^{p-1}}(3 + \ln p).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если коэффициенты $\{a_p\}$ ряда Чебышева для функции $f(x)$ удовлетворяют неравенствам:*

$$|a_0| \leqslant c, \quad |a_p| \leqslant \frac{c}{4p^2\rho^p} \qquad (\rho > 1;\ p = 1, 2, \ldots),$$

то функция $f(x)$ принадлежит семейству $F_{\rho, c}^{-1, 1}$.

Доказательство. Покажем, что ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p t_p(z),$$

являющийся аналитическим продолжением функции $f(x)$, равномерно сходится на $Э_\rho$ и ограничен (по модулю) константой c. Действительно,

$$\left\|\frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p t_p(z)\right\| \leqslant \left|\frac{1}{2}a_0\right| + \sum_{p=1}^{\infty} \|a_p t_p(z)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}c + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c}{4p^2\rho^p}\rho^p = \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}c\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2} \leqslant c,$$

поскольку $\|t_p(z)\| \leqslant \rho^p$, ибо $t_p(z)$ есть многочлен степени p, не превосходящий по модулю 1 на отрезке $[-1, 1]$. Лемма доказана.

Обозначим теперь через $F_{\rho, k, c}$ пространство рядов вида

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p t_p(x)$$

таких, что

$$|a_0| \leqslant c \quad \text{и} \quad |a_p| \leqslant \frac{c}{p^k\rho^p} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

За норму в пространстве $F_{\rho, k, c}$ принимается максимум абсолютной величины функции.

Лемма 4. *Если* $A \leqslant \frac{1}{4} c$ *и* $B \geqslant 12\rho c$ $(\rho > 1)$,

то $F_{\rho, 2, A} \subset F_{\rho, c}^{-1, 1} \subset F_{\rho, -1, B}$.

Эта лемма легко получается из двух предыдущих лемм.

Таким образом, оценка ε-энтропии пространства $F_{\rho, c}^{-1, 1}$ сведена к вычислению энтропии для пространств типа $F_{\rho, k, c}$, поскольку, в силу леммы 4 и леммы 2 § 5,

$$H_\varepsilon(F_{\rho, 2, A}) \leqslant H_\varepsilon\left(F_{\rho, c}^{-1, 1}\right) \leqslant H_\varepsilon(F_{\rho, -1, B}).$$

Лемма 5. *Если* $\rho > 1$, *то*

$$H_\varepsilon(F_{\rho, k, c}) = \frac{1}{2 \log \rho}\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2 + O\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \log \log \varepsilon\right].$$

Доказательство. Фиксируем положительное число $\delta \leqslant \frac{c}{2\rho}$, натуральные числа $r \geqslant 1$ и q_p $(p = 0, 1, 2, \ldots, r)$ такие, что

$$\frac{c}{r^k \rho^r} \geqslant \delta,$$

$$(|q_p| + 1)\delta \geqslant \frac{c}{p^k \rho^p} \geqslant |q_p|\delta \qquad (p = 1, 2, \ldots, r),$$

$$(|q_0| + 1)\delta \geqslant \frac{1}{2} c \geqslant |q_0|\delta.$$

Положим

$$f_{k_0, k_1, \ldots, k_r}^{\delta} = k_0\delta + \sum_{p=1}^{r} k_p \delta \cdot t_p(x) \qquad (k_i \leqslant q_i;\ i = 1, 2, \ldots, r).$$

Подсчитывая число таких функций для двух конкретных значений пар r, δ, мы получим верхнюю и нижнюю оценки для $H_\varepsilon(F_{\rho, k, c})$. Обозначим через σ_r^δ число всех функций типа $f_{k_0, k_1, \ldots, k_r}^{\delta}$. Получаем:

$$\sigma_r^\delta \geqslant \left(\frac{c}{\delta} - 1\right) \prod_{p=1}^{r} \left(\frac{2c}{\delta p^k \rho^p} - 1\right) \geqslant \frac{c}{2\delta} \prod_{p=1}^{r} \frac{c}{\delta p^k \rho^p} =$$

$$= \frac{c^{r+1}}{2\delta^{r+1} (r!)^k \rho^{\frac{r(r+1)}{2}}}.$$

С другой стороны,

$$\sigma_r^\delta = \left(\left[\frac{c}{\delta}\right]+1\right)\prod_{p=1}^{r}\left(\left[\frac{2c}{\delta p^k \rho^p}\right]+1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\delta}\prod_{p=1}^{r}\frac{2c}{\delta p^k \rho^p} = \frac{2^r c^{r+1}}{\delta^{r+1}(r!)^k \rho^{\frac{r(r+1)}{2}}}.$$

Таким образом, получается неравенство

$$\frac{c^{r+1}}{2\delta^{r+1}(r!)^k \rho^{\frac{r(r+1)}{2}}} \leqslant \sigma_r^\delta \leqslant \frac{2^r c^{r+1}}{\delta^{r+1}(r!)^k \rho^{\frac{r(r+1)}{2}}}.$$

Положим $\delta = 3\varepsilon$. Фиксируем две различные функции f_1 и f_2 типа $f^{3\varepsilon}_{k_0, k_1, \ldots, k_r}$. Полагая

$$f_1 - f_2 = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{r} a_p t_p(x),$$

заметим, что все коэффициенты $\{a_p\}$ этого многочлена должны быть кратны 3ε и хотя бы один из них должен быть отличен от нуля. Поэтому модуль старшего отличного от нуля коэффициента этого полинома будет не менее 3ε. Следовательно, в силу свойства 2, $f_1 - f_2$ уклоняется от нуля не менее, чем на 3ε, а это означает, что

$$n_\varepsilon(F_{\rho, k, c}) \geqslant \sigma_r^{3\varepsilon}.$$

Тогда, в силу леммы 3 § 5,

$$H_\varepsilon(F_{\rho, k, c}) \geqslant h_\varepsilon(F_{\rho, k, c}) \geqslant \log \sigma_r^{3\varepsilon}.$$

Полагая

$$r = \left[\log_\rho\left[\frac{c}{\delta}\left(\log_\rho \frac{c}{\delta}\right)^{-2|k|}\right]\right]$$

и помня, что $\delta = 3\varepsilon$, из неравенства относительно σ_r^δ получаем:

$$H_\varepsilon(F_{\rho, k, c}) \geqslant \log \sigma_r^{3\varepsilon} \geqslant (r+1)\log c - \log\frac{1}{2} -$$

$$-(r+1)\log\delta - k\log(r!) - \frac{1}{2}r(r+1)\log\rho =$$

$$= \frac{1}{2\log\rho}\left\{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^2 + O\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}.$$

Положим теперь $r=\left[\left\{\log_\rho\left(\frac{2c}{\varepsilon\ln\rho}\log_\rho\frac{2c}{\varepsilon\ln\rho}\right)\right\}\right]+1$ и $\delta=\frac{\varepsilon}{r+1}$. Фиксируем функцию

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{p=1}^{\infty}a_pt_p(x)$$

семейства $F_{\rho,k,c}$. Подберем числа $k_p\,(p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$ так, чтобы выполнялось

$$|a_p-k_p\delta|\leqslant\frac{1}{2}\delta=\frac{\varepsilon}{2(r+1)}.$$

Тогда

$$\|f(x)-f^{\delta}_{k_0,\,k_1,\,\ldots,\,k_r}\|\leqslant\sum_{p=0}^{r}|a_p-k_p\delta|\,\|t_p(x)\|+$$

$$+\sum_{p=r+1}^{\infty}|a_p|\,\|t_p(x)\|\leqslant\sum_{p=0}^{r}\frac{\varepsilon}{2(r+1)}+\sum_{p=r+1}^{\infty}\frac{c}{p^k\rho^p}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{(r+1)^{|k|}}{(\ln\rho)\,\rho^2}\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

(см. лемму 1), т. е. множество функций типа $f^{\delta}_{k_0,\,k_1,\,\ldots,\,k_r}$ при фиксированных r и δ образуют в пространстве $F_{\rho,k,c}$ ε-сеть. А тогда из оценки величины σ^{δ}_r получаем:

$$H_\varepsilon(F_{\rho,k,c})\leqslant\log\left[\frac{2^rc^{r+1}}{\delta^{r+1}(r!)^k\rho^{\frac{r(r+1)}{2}}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\log\rho}\left\{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^2+O\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}.$$

Лемма доказана.

Результат параграфа состоит в следующем:

Теорема 1. *Абсолютная ε-энтропия пространства* $F^{-1,1}_{\rho,c}$ равна

$$H_\varepsilon\left(F^{-1,1}_{\rho,c}\right)=\frac{1}{2\log\rho}\left\{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^2+O\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}.$$

Теорема следует из лемм 3, 4.

§ 8. Энтропия рядов Лорана

Пусть задано некоторое компактное семейство Φ_0 непрерывных комплексных функций, определенных на некотором компакте A и ограниченных (по модулю) на A константой $c > 0$. За расстояние между двумя функциями из Φ_0 принимается максимум (на множестве A) модуля их разности. Обозначим через $\Phi^{r_0, r_1, \Phi_0}_{\rho_0, \rho_1, m}$ $(0 \leqslant r_1 < r_0 \leqslant \rho_0 < \rho_1 \leqslant +\infty$, m — произвольное число) пространство всех комплексных функций вида

$$f(\alpha, z) = a_0(\alpha) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p(\alpha) z^p}{p^m \rho_1^p} + \sum_{p=-1}^{-\infty} \frac{a_p(\alpha) z^p}{p^m r_1^p};$$

$$\alpha \in A; \qquad a_p(\alpha) \in \Phi_0 \qquad (p = \ldots, -1, 0, 1, \ldots).$$

В качестве расстояния между двумя функциями этого семейства принимается максимум модуля их разности на множестве $A \times B^{r_0}_{\rho_0}$, где $B^{r_0}_{\rho_0}$ есть кольцо комплексной плоскости, задаваемое неравенствами

$$\rho_0 \geqslant |z| \geqslant r_0.$$

Нетрудно убедиться, что ряды рассматриваемого вида абсолютно сходятся не только на множестве $A \times B^{r_0}_{\rho_0}$, но и на множестве $A \times \{\rho_1 > |z| > r_1\}$.

Обозначим через Ψ преобразование $z = e^{iz'}$ комплексной плоскости $\{z' = x' + iy'\}$ в комплексную плоскость $\{z = x + iy\}$, а через P^d_c — полосу плоскости $\{z'\}$, задаваемую неравенствами: $c \leqslant y' \leqslant d$. Нетрудно проверить, что преобразование Ψ переводит полосу P^d_c в кольцо

$$B^{d'}_{c'} \{c' \geqslant |z| \geqslant d'\} \quad (c' = e^{-c}, \ d' = e^{-d})$$

таким образом, что всякая прямая $y' = \text{const}$ переходит при этом в окружность $|z| = e^{-y'}$.

Лемма 1. *Пусть* $S_p(z') = \sum_{n=-p}^{p} a_n e^{inz'}$. *Тогда при всяком фиксированном* y'

$$\max_{x'} |S_p(z')| \geqslant (e^{-2py'} |a_p|^2 + e^{2py'} |a_{-p}|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство.

$$a_n e^{inz'} + a_{-n} e^{-inz'} = (b_n + ic_n) e^{inz'} + (b_{-n} + ic_{-n}) e^{-inz'} =$$
$$= (b_n + ic_n) e^{-ny'} (\cos nx' + i \sin nx') +$$
$$+ (b_{-n} + ic_{-n}) e^{ny'} (\cos nx' - i \sin nx') =$$
$$= [(-c_n e^{-ny'} + c_{-n} e^{ny'}) \sin nx' + (b_n e^{-ny'} + b_{-n} e^{ny'}) \cos nx'] +$$
$$+ i [(b_n e^{-ny'} - b_{-n} e^{ny'}) \sin nx' + (c_n e^{-ny'} + c_{-n} e^{ny'}) \cos nx']$$
$$(n = 1, 2, \ldots, p; \quad a_0 = b_0 + ic_0).$$

Поэтому рассматриваемый полином можно представить в виде

$$S_p(z') = \left\{ b_0 + \sum_{n=1}^{p} [(-c_n e^{-ny'} + c_{-n} e^{ny'}) \sin nx' + \right.$$
$$\left. + (b_n e^{-ny'} + b_{-n} e^{ny'}) \cos nx'] \right\} +$$
$$+ i \left\{ c_0 + \sum_{n=1}^{p} [(b_n e^{-ny'} - b_{-n} e^{ny'}) \sin nx' + \right.$$
$$\left. + (c_n e^{-ny'} + c_{-n} e^{ny'}) \cos nx'] \right\} =$$
$$= \{ S'_{p-1}(x', y') + [(-c_p e^{-py'} + c_{-p} e^{py'}) \sin px' +$$
$$+ (b_p e^{-py'} + b_{-p} e^{py'}) \cos px']\} +$$
$$+ i \{ S''_{p-1}(x', y') + [(b_p e^{-py'} - b_{-p} e^{py'}) \sin px' +$$
$$+ (c_p e^{-py'} + c_{-p} e^{py'}) \cos px']\},$$

где $S'_{p-1}(x', y')$ и $S''_{p-1}(x,' y')$ суть тригонометрические многочлены (относительно x') порядка $(p-1)$. Но известно, что всякий тригонометрический полином $\sigma_{p-1}(x) + a \sin px + b \cos px$ ($\sigma_{p-1}(x)$ — тригонометрический полином порядка $(p-1)$) на действительной оси уклоняется от нуля не менее чем на $\sqrt{a^2 + b^2}$ (см. [6]). Поэтому, считая y' фиксированным, получаем:

$$\max_{x'} |S_p(z')| \geqslant \max_{x'} \left\{ [e^{-2py'} |a_p|^2 + e^{2py'} |a_{-p}|^2 \pm \right.$$
$$\left. \pm 2 (b_p b_{-p} - c_p c_{-p})]^{\frac{1}{2}} \right\},$$

где

$$[e^{-2py'}|a_p|^2+e^{2py'}|a_{-p}|^2+2(b_pb_{-p}-c_pc_{-p})]=$$
$$=(-c_pe^{-py'}+c_{-p}e^{py'})^2+(b_pe^{-py'}+b_{-p}e^{py'})^2,$$
$$[e^{-2py'}|a_p|^2+e^{2py'}|a_{-p}|^2-2(b_pb_{-p}-c_pc_{-p})]=$$
$$=(b_pe^{-py'}-b_{-p}e^{py'})^2+(c_pe^{-py'}+c_{-p}e^{py'})^2.$$

Следовательно,

$$\max_{x'}|S_p(z')|\geqslant(e^{-2py'}|a_p|^2+e^{2py'}|a_{-p}|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $S_p(z')=\sum\limits_{n=-p}^{p}a_ne^{inz'}$ *и числа* a_p *и* a_{-p} *таковы, что либо* $|a_p|\geqslant\delta e^{cp}$, *либо* $|a_{-p}|\geqslant\delta e^{-dp}$ $(\delta>0)$. *Тогда в полосе* $P_c^d\{c\leqslant y'\leqslant d\}$ *функция* $|S_p(z')|$ *уклоняется от нуля не менее чем на* δ.

Доказательство. В силу предыдущей леммы

$$\max_{x'}|S_p(z')|\geqslant(e^{-2py'}|a_p|^2+e^{2py'}|a_{-p}|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Если $|a_p|\geqslant\delta e^{cp}$, то при $y'=c$, получаем:

$$\max_{x'}|S_p(z')|\geqslant(e^{2p(c-y')}\delta^2+e^{2py'}|a_{-p}|^2)^{\frac{1}{2}}\geqslant\delta.$$

Если $|a_{-p}|\geqslant\delta e^{-dp}$, то при $y'=d$ получаем:

$$\max_{x'}|S_p(z')|\geqslant(e^{-2py'}(a_p)^2+e^{2p(y'-d)}\delta^2)^{\frac{1}{2}}\geqslant\delta.$$

Лемма 3. *Пусть* $S_p(z')=\sum\limits_{n=-p}^{p}a_ne^{inz'}$ *и комплексные числа* a_p *и* a_{-p} *таковы, что либо* $|a_p|\geqslant\delta$, *либо* $|a_{-p}|\geqslant\delta$ $(\delta>0)$. *Тогда в полосе* $P_c^d\{c\leqslant y'\leqslant d\}$

$$\max|S_p(z')|\geqslant\frac{\delta}{\max(e^{cp},e^{-dp})}.$$

Доказательство. Положим

$$\delta'=\frac{\delta}{\max(e^{cp},e^{-dp})}.$$

Тогда либо

$$|a_p| \geqslant \delta' \max(e^{cp}, e^{-dp}) \geqslant \delta' e^{cp},$$

либо

$$|a_{-p}| \geqslant \delta' \max(e^{cp}, e^{-dp}) \geqslant \delta' e^{-dp}.$$

Поэтому, в силу предыдущей леммы

$$\max|S_p(z')| \geqslant \delta' = \frac{\delta}{\max(e^{cp}, e^{-dp})}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $S_p(z) = \sum_{m=-p}^{p} a_m z^m$ *и коэффициенты* a_p *и* a_{-p} *таковы, что либо* $|a_p| \geqslant \delta$, *либо* $|a_{-p}| \geqslant \delta$ $(\delta > 0)$. *Тогда на кольце* $B_\rho^r \{r \leqslant |z| \leqslant \rho\}$

$$\delta \left[\min\left(\rho, \frac{1}{r}\right)\right]^p \leqslant |S_p(z)|.$$

Доказательство.

$$|S_p(z)| = |S_p(e^{iz'})|$$

$\left(z' \in P_c^d\right.$, где $c = \ln\rho$, $\left.d = -\ln r\right)$. Поэтому, в силу предыдущей леммы,

$$\max_{B_\rho^r}|S_p(z)| = \max_{P_c^d}|S_p(e^{iz'})| \geqslant \frac{\delta}{\max(e^{cp}, e^{-dp})} =$$

$$= \delta[\min(e^{-cp}, e^{dp})] = \delta\left[\min\left(\rho^p, \left(\frac{1}{r}\right)^p\right)\right] = \delta\left[\min\left(\rho, \frac{1}{r}\right)\right]^p.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $S_p(z) = \sum_{m=-p}^{p} a_m z^m$ *и коэффициенты* a_p *и* a_{-p} *таковы, что либо* $|a_p| \geqslant \frac{\delta}{\rho^p}$, *либо* $|a_{-p}| \geqslant \delta r^p$ $(\delta > 0)$. *Тогда в кольце* B_ρ^r

$$|S_p(z)| \geqslant \delta.$$

Доказательство леммы легко получается из леммы 2.

Займемся теперь оценкой ε-энтропии пространства $\Phi_{\rho_0, \rho_1, m}^{r_0, r_1, \Phi_0}$. Обозначим через $D(\Phi_0)$ одномерный диаметр пространства Φ_0, т. е.

$$D(\Phi_0) = \sup_{\varphi_1 \in \Phi_0;\, \varphi_2 \in \Phi_0} \rho_{\Phi_0}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Фиксируем положительные числа p, q, $\delta \leqslant D(\Phi_0)$, δ_q, $\delta_{-q+1}, \ldots, \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_p$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\delta_0 = \delta; \\ &\delta_i = \frac{\delta \rho_1^i i^m}{\rho_0^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p); \\ &\delta_{-i} = \frac{\delta r_0^i i^m}{r_1^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q); \\ &\delta_i \leqslant D(\Phi_0) \qquad (i = -q, -q+1, \ldots, p); \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{D(\Phi_0)}{q^m r_1^{-q}} \geqslant \delta r_0^q; \qquad \frac{D(\Phi_0)}{p^m \rho_1^p} \geqslant \frac{\delta}{\rho_0^p}.$$

Лемма 6. *Абсолютная ε-энтропия пространства $\Phi_{\rho_0, \rho_1, m}^{r_0, r_1, \Phi_0}$ равна:*

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho_0, \rho_1, m}^{r_0, r_1, \Phi_0}\right) = \sum_{i=-q(\varepsilon)}^{+p(\varepsilon)} H_{\delta_i^\varepsilon}(\Phi_0),$$

где

$$q(\varepsilon) = \log_r \frac{1}{\varepsilon} + O_q\left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$p(\varepsilon) = \log_\rho \frac{1}{\varepsilon} + O_p\left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$\delta_i^\varepsilon = \varepsilon \rho^i \lambda_p(\varepsilon) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\delta_{-i}^\varepsilon = \varepsilon r^i \lambda_q(\varepsilon) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, q),$$

$$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_0}, \qquad r = \frac{r_0}{r_1};$$

причем существует не зависящая от ε положительная константа c_0 такая, что

$$c_0 + c_0 \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} \geqslant O_p\left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) \geqslant -c_0 - c_0 \ln \ln \frac{1}{\varepsilon},$$

$$c_0 + c_0 \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} \geqslant O_q\left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) \geqslant -c_0 - c_0 \ln \ln \frac{1}{\varepsilon},$$

$$c_0 + c_0\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{c_0} \geqslant \lambda_p(\varepsilon) \geqslant \left[c_0 + c_0\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{c_0}\right]^{-1},$$

$$c_0 + c_0\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{c_0} \geqslant \lambda_q(\varepsilon) \geqslant \left[c_0 + c_0\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{c_0}\right]^{-1}.$$

Доказательство. В пространстве Φ_0 фиксируем множества $S_{\delta_i}(\Phi_0)$ $(i=-q, -q+1, \ldots, p)$ (см. § 5). Функции из множества $S_{\delta_i}(\Phi_0)$ каким-либо образом перенумеруем и обозначим их через $a_i^j(\alpha)$ $\left(\alpha \in A;\ j=1, 2, \ldots, n_{\delta_i}(\Phi_0)\right)$.

Положим

$$f^{\delta}_{j_1, j_2, \ldots, j_{p+q+1}}(\alpha, z) = a_0^{j_0}(\alpha) + \sum_{i=-q}^{-1} \frac{a_i^{j_i}(\alpha) z^i}{i^m r_1^i} + \sum_{i=1}^{p} \frac{a_i^{j_i}(\alpha) z^i}{i^m \rho_1^i}$$

$$\left(j_i = 1, 2, \ldots, n_{\delta_i}(\Phi_0)\right).$$

Фиксируем две различные функции $f_1(\alpha, z)$, $f_2(\alpha, z)$ типа $f^{\delta}_{j_1, j_2, \ldots, j_{p+q+1}}(\alpha, z)$ и покажем, что эти функции в некоторой точке (α_0, z_0) $\left(\alpha_0 \in A;\ z_0 \in B_{\rho_0}^{r_0}\right)$ отличаются (по модулю) не меньше, чем на δ. Действительно, функция $|f_1(\alpha, z) - f_2(\alpha, z)|$ представима в виде

$$|f_1(\alpha, z) - f_2(\alpha, z)| = \left| b_0\alpha + \sum_{i=-q}^{-1} \frac{b_i(\alpha) z^i}{i^m r_1^i} + \sum_{i=1}^{p} \frac{b_i(\alpha) z^i}{i^m \rho_1^i} \right|$$

и при этом хотя бы один из коэффициентов $\{b_i(\alpha)\}$ не равен нулю тождественно (по α). Фиксируем n таким, чтобы

$$\max|b_n(\alpha)| + \max|b_{-n}(\alpha)| > 0$$

(если $n > q$, то $b_n(\alpha) \equiv 0$, если $n > p$, то $b_n(\alpha) \equiv 0$) и

$$\max|b_{n+k}(\alpha)| + \max|b_{-n-k}(\alpha)| = 0$$

при всяком $k > 0$. Тогда, в силу определения функций $f^{\delta}_{j_1, j_2, \ldots, j_{p+q+1}}(\alpha, z)$, либо

$$\max|b_n(\alpha)| \geqslant \delta_n = \frac{\delta \rho_1^n n^m}{\rho_0^n},$$

либо

$$\max|b_{-n}(\alpha)| \geqslant \delta_n = \frac{\delta r_0^n n^m}{r_1^n}$$

(см. равенства 1). Пусть для определенности $\max|b_n(\alpha)| \geqslant \delta_n$. Тогда, в силу замкнутости множества A и компактности

семейства Φ_0, можно указать точку $\alpha_0 \in A$ такую, что $|b_n(\alpha_0)| \geqslant \delta_n$. Поэтому, в силу леммы 5, получаем, что при некотором $z_0 \subset B_{\rho_0}^{r_0}$

$$|f_1(\alpha_0, z_0) - f_2(\alpha_0, z_0)| \geqslant \delta.$$

Последнее означает, что функции $\{f^{\delta}_{j_1, j_2, \ldots, j_{p+q+1}}(\alpha, z)\}$ образуют множество элементов пространства $\Phi^{r_0, r_1, \Phi_0}_{\rho_0, \rho_1, m}$, попарно отстоящих друг от друга не меньше чем на δ. Поэтому, в силу леммы 3 § 5, $H_{\frac{\delta}{2}}\left(\Phi^{r_0, r_1, \Phi_0}_{\rho_0, \rho_1, m}\right) \geqslant \log \sigma^{\delta}_{p, q}$, где $\sigma^{\delta}_{p, q}$ есть число функций типа $f^{\delta}_{j_1, j_2, \ldots, j_{p+q+1}}(\alpha, z)$.

Покажем теперь, что множество $\{f^{\delta}_{j_1, j_2, \ldots, j_{p+q+1}}\}$ образует в пространстве $\Phi^{r_0, r_1, \Phi_0}_{\rho_0, \rho_1, m}$ δ'-сеть, где

$$\delta' = \delta(p+q+1) + c\left[\frac{(q+1)^{|m|}}{r^q \ln r} + \frac{(p+1)^{|m|}}{\rho^p \ln \rho}\right]$$

$$\left(r = \frac{r_0}{r_1}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_0}\right).$$

Фиксируем для этого некоторую функцию

$$f(\alpha, z) = a_0(\alpha) + \sum_{i=-1}^{-\infty} \frac{a_i(\alpha) z^i}{i^m r_1^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(\alpha) z^i}{i^m \rho_1^i}$$

семейства $\Phi^{r_0, r_1, \Phi_0}_{\rho_0, \rho_1, m}$ и подберем индексы $j_1, j_2, \ldots, j_{p+q+1}$ таким образом, чтобы

$$\max\left|a_i(\alpha) - a_i^{j_i}(\alpha)\right| \leqslant \delta_i \qquad (i = -q, -q+1, \ldots, p)$$

(последнее возможно, поскольку, в силу леммы 3 § 5, при всяком i семейство $\{a_i(\alpha)\}$ образует δ_i-сеть в пространстве Φ_0). Тогда всюду на множестве $A \times B_{\rho_0}^{r_0}$

$$\left|f(\alpha, z) - f^{\delta}_{j_1, j_2, \ldots, j_{p+q+1}}(\alpha, z)\right| =$$

$$= \left|a_0(\alpha) - a_0^{j_0}(\alpha) + \sum_{i=-q}^{-1} \frac{\left[a_i(\alpha) - a_i^{j_i}(\alpha)\right] z^i}{i^m r_1^i} + \right.$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\frac{\left[a_i(\alpha)-a_i^{j_i}(\alpha)\right]z^i}{i^m\rho_1^i}+\sum_{i=-q-i}^{-\infty}\frac{a_i(\alpha)z^i}{i^m r_1^i}+\sum_{i=p+1}^{\infty}\frac{a_i(\alpha)z^i}{i^m\rho_1^i}\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\delta_0+\sum_{i=-q}^{-1}\frac{\delta_i r_0^i}{i^m r_1^i}+\sum_{i=1}^{p}\frac{\delta_i\rho_0^i}{i^m\rho_1^i}+\sum_{i=-q-1}^{-\infty}\frac{c r_0^i}{i^m r_1^i}+\sum_{i=p+1}^{\infty}\frac{c\rho_0^i}{\rho_1^i i^m}\leqslant$$

$$\leqslant\delta+\sum_{i=-q}^{-1}\delta+\sum_{i=1}^{p}\delta+\frac{c(q+1)^{|m|}}{\left(\ln\frac{r_0}{r_1}\right)\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^q}+\frac{c(p+1)^{|m|}}{\left(\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^p}=$$

$$=\delta(p+q+1)+c\left(\frac{(q+1)^{|m|}}{(\ln r)r^q}+\frac{(p+1)^{|m|}}{(\ln\rho)\rho^p}\right)=\delta',$$

где $\rho=\frac{\rho_1}{\rho_0}>1$, $r=\frac{r_0}{r_1}>1$ (см. лемму 1 § 7).

Таким образом доказано, что множество $\left\{f^{\delta}_{j_1,\ldots,j_{p+q+1}}(\alpha,z)\right\}$ образует в пространстве $\Phi^{r_0,r_1,\Phi_0}_{\rho_0,\rho_1,m}$ δ'-сеть, следовательно,

$$H_{\delta'}\left(\Phi^{r_0,r_1,\Phi_0}_{\rho_0,\rho_1,m}\right)\leqslant\log\sigma^{\delta}_{p,q}.$$

Оценим теперь число $\sigma^{\delta}_{p,q}$

$$\sigma^{\delta}_{p,q}=\prod_{i=-q}^{p}n_{\delta_i}(\Phi_0),\qquad \log\sigma^{\delta}_{p,q}=\sum_{i=-q}^{p}h_{\delta_i}(\Phi_0).$$

Положим

$$q=q^1_\varepsilon=\left[\left\{\log_r\left[\frac{D(\Phi_0)}{3\varepsilon}\left(\log_r\frac{D(\Phi_0)}{3\varepsilon}\right)^{-2|m|}\right]\right\}\right],$$

$$p=p^1_\varepsilon=\left[\left\{\log_\rho\left[\frac{D(\Phi_0)}{3\varepsilon}\left(\log_\rho\frac{D(\Phi_0)}{3\varepsilon}\right)^{-2|m|}\right]\right\}\right],$$

$$\delta^1_\varepsilon=3\varepsilon.$$

Нетрудно проверить, что при фиксированных p, q и δ можно указать $\varepsilon_0[m, r, \rho, D(\Phi_0)]>0$ такое, что при $3\varepsilon<\varepsilon_0[m, r, \rho, D(\Phi_0)]$ соотношения (1) для p^1_ε, q^1_ε, $\delta=3\varepsilon$ выполняются. Поэтому

$$H_\varepsilon\left(\Phi^{r_0,r_1,\Phi_0}_{\rho_0,\rho_1,m}\right)\geqslant H_{\frac{\delta}{2}}\left(\Phi^{r_0,r_1,\Phi_0}_{\rho_0,\rho_1,m}\right)\geqslant\log\sigma^{3\varepsilon}_{p^1_\varepsilon,q^1_\varepsilon}=\sum_{i=-q^1_\varepsilon}^{p^1_\varepsilon}h_{\delta^1_i}(\Phi_0),$$

где

$$\delta_i^1 = \frac{3\varepsilon\rho_1^i i^m}{\rho_0^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\delta_{-i}^1 = \frac{3\varepsilon r_0^i i^m}{r_1^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Положим теперь

$$p = p_\varepsilon^2 = \left[\log_\rho \left[\frac{4c\ln\rho}{\varepsilon}\left(\log_\rho \frac{4c\ln\rho}{\varepsilon}\right)^{2|m|}\right]\right],$$

$$q = q_\varepsilon^2 = \left[\log_r \left[\frac{4c\ln r}{\varepsilon}\left(\log_r \frac{4c\ln r}{\varepsilon}\right)^{2|m|}\right]\right]$$

$$\delta = \delta_\varepsilon^2 = \varepsilon\left[3 + 3p_\varepsilon^2 + 3q_\varepsilon^2 + \frac{4c\ln\rho\left(\log_\rho \frac{4c\ln\rho}{\varepsilon}\right)^{4|m|}}{D(\Phi_0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{4c\ln r\left(\log_r \frac{4c\ln r}{\varepsilon}\right)^{4|m|}}{D(\Phi_0)}\right]^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что при достаточно малом ε и при $p = p_\varepsilon^2$, $q = q_\varepsilon^2$, $\delta = \delta_\varepsilon^2$ соотношения (1) также будут выполняться. Поэтому множество функций $\left\{f_{j_1, j_2, \ldots, j_{p_\varepsilon^2 + {}_\varepsilon^2 + 1}}^{\delta_i^2}\right\}$ образует в пространстве $\Phi_{\rho_0, \rho_1, m}^{r_0, r_1, \Phi_0}$ δ'-сеть, где

$$\delta' = \delta(p + q + 1) + c\left[\frac{(q+1)^{|m|}}{r^q \ln r} + \frac{(p+1)^{|m|}}{\rho^p \ln\rho}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon,$$

т. е.

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho_0, \rho_1, m}^{r_0, r_1, \Phi_0}\right) \leqslant H_{\delta'}\left(\Phi_{\rho_0, \rho_1, m}^{r_0, r_1, \Phi_0}\right) \leqslant \sum_{i=-q^2}^{p_\varepsilon^2} h_{\delta_i^2}(\Phi_0),$$

где

$$\delta_i^2 = \frac{\delta_\varepsilon^2 \rho_1^i i^m}{\rho_0^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\delta_{-i}^2 = \frac{\delta_\varepsilon^2 r_0^i i^m}{r_1^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Итак:

$$\sum_{i=-q_\varepsilon^1}^{p_\varepsilon^1} h_{\delta_i^1}(\Phi_0) \leqslant H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho_0,\,\rho_1,\,m}^{r_0,\,r_1,\,\Phi_0}\right) \leqslant \sum_{i=-q_\varepsilon^2}^{p_\varepsilon^2} h_{\delta_i^2}(\Phi_0).$$

Следовательно, в силу теоремы 1 § 5,

$$\sum_{i=-q_\varepsilon^1}^{p_\varepsilon^1} H_{2\delta_i^1}(\Phi_0) \leqslant H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho_0,\,\rho_1,\,m}^{r_0,\,r_1,\,\Phi_0}\right) \leqslant \sum_{i=-q_\varepsilon^2}^{p_\varepsilon^2} H_{\frac{1}{2}\delta_i^2}(\Phi_0).$$

Учитывая выражения для

$$q_\varepsilon^1,\ p_\varepsilon^1,\ \delta_\varepsilon^1,\ q_\varepsilon^2,\ p_\varepsilon^2,\ \delta_\varepsilon^2,$$

мы вправе написать, что

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho_0,\,\rho_1,\,m}^{r_0,\,r_1,\,\Phi_0}\right) = \sum_{i=-q(\varepsilon)}^{p(\varepsilon)} H_{\delta_i^\varepsilon}(\Phi_0),$$

где

$$q(\varepsilon) = \log_r \frac{1}{\varepsilon} + O_q\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$p(\varepsilon) = \log_\rho \frac{1}{\varepsilon} + O_p\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$\delta_i^\varepsilon = \varepsilon\rho^i\lambda_p(\varepsilon) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

$$\delta_{-i}^\varepsilon = \varepsilon r^i\lambda_q(\varepsilon) \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ q);$$

и притом

$$c_0 + c_0\ln\ln\frac{1}{\varepsilon} \geqslant O_p\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) \geqslant -c_0 - c_0\ln\ln\frac{1}{\varepsilon},$$

$$c_0 + c_0\ln\ln\frac{1}{\varepsilon} \geqslant O_q\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) \geqslant -c_0 - c_0\ln\ln\frac{1}{\varepsilon},$$

$$c_0 + c_0\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{c_0} \geqslant \lambda_p(\varepsilon) \geqslant \left[c_0 + c_0\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{c_0}\right]^{-1},$$

$$c_0 + c_0\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{c_0} \geqslant \lambda_q(\varepsilon) \geqslant \left[c_0 + c_0\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{c_0}\right]^{-1}$$

(c_0 — некоторая положительная константа, не зависящая от ε). Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть пространство* Φ_0 *таково, что*

$$H_\varepsilon(\Phi_0) = c_n\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^n + O_{\Phi_0}\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

где

$$\left|O_{\Phi_0}\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]\right| \leqslant c(\Phi_0)\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}\log\log\frac{1}{\varepsilon};$$

($c(\Phi_0) > 0$ *есть некоторая константа, не зависящая от* ε).

Тогда

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho_0,\,\rho_1,\,m}^{r_0,\,r_1,\,\Phi_0}\right) = \frac{c_n}{n+1}\left(\frac{1}{\log\rho} + \frac{1}{\log r}\right)\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1} +$$

$$+ O\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log\frac{1}{\varepsilon}\right] \qquad \left(r = \frac{r_0}{r_1};\ \ \rho = \frac{\rho_1}{\rho_0}\right).$$

Доказательство. В силу предыдущей леммы

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho_0,\,\rho_1,\,m}^{r_0,\,r_1,\,\Phi_0}\right) = \sum_{i=-q(\varepsilon)}^{p(\varepsilon)} H_{\delta_i^\varepsilon}(\Phi_0) =$$

$$= \sum_{i=-q(\varepsilon)}^{0} H_{\delta_i^\varepsilon}(\Phi_0) + \sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} H_{\delta_i^\varepsilon}(\Phi_0) =$$

$$= \sum_{i=-q(\varepsilon)}^{0}\left\{c_n\left[\log\frac{1}{\delta_i^\varepsilon}\right]^n + O_{\Phi_0}\left[\left(\log\frac{1}{\delta_i^\varepsilon}\right)^{n-1}\log\log\frac{1}{\delta_i^\varepsilon}\right]\right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p(\varepsilon)}\left\{c_n\left(\log\frac{1}{\delta_i^\varepsilon}\right)^n + O_{\Phi_0}\left[\left(\log\frac{1}{\delta_i^\varepsilon}\right)^{n-1}\log\log\frac{1}{\delta_i^\varepsilon}\right]\right\} =$$

$$= \sum_{i=-q(\varepsilon)}^{0}\left\{c_n\left(\log\frac{1}{\varepsilon r^{-i}\lambda_q(\varepsilon)}\right)^n +\right.$$

$$\left. + O_{\Phi_0}\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon r^{-i}\lambda_q(\varepsilon)}\right)^{n-1}\log\log\frac{1}{\varepsilon r^{-i}\lambda_q(\varepsilon)}\right]\right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p(\varepsilon)}\left\{c_n\left(\log\frac{1}{\varepsilon\rho^{i}\lambda_p(\varepsilon)}\right)^n +\right.$$

$$\left. + O_{\Phi_0}\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon\rho^{i}\lambda_p(\varepsilon)}\right)^{n-1}\log\log\frac{1}{\varepsilon\rho^{i}\lambda_p(\varepsilon)}\right]\right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{q(\varepsilon)} c_n \left(\log \frac{1}{\varepsilon r^i \lambda_q(\varepsilon)}\right)^n + \sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} c_n \left(\log \frac{1}{\varepsilon \rho^i \lambda_p(\varepsilon)}\right)^n +$$

$$+ \sum_{i=0}^{q(\varepsilon)} O_{\Phi_0}\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon r^i \lambda_q(\varepsilon)}\right)^{n-1} \log\log \frac{1}{\varepsilon r^i \lambda_q(\varepsilon)}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} O_{\Phi_0}\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon \rho^i \lambda_p(\varepsilon)}\right)^{n-1} \log\log \frac{1}{\varepsilon \rho^i \lambda_p(\varepsilon)}\right].$$

Подсчитаем теперь первое слагаемое. Для этого прежде всего сделаем следующую оценку:

$$\left|\sum_{i=0}^{q(\varepsilon)} \left(\log \frac{1}{\varepsilon r^i}\right)^k\right| \leqslant (q(\varepsilon)+1)\left|\log \frac{1}{\varepsilon r^0}\right|^k = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{k+1},$$

поэтому

$$\sum_{i=0}^{q(\varepsilon)} c_n \left(\log \frac{1}{\varepsilon r^i \lambda_q(\varepsilon)}\right)^n = c_n \sum_{i=0}^{q(\varepsilon)} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\log \frac{1}{\varepsilon r^i}\right)^k \left(\log \frac{1}{\lambda_q(\varepsilon)}\right)^{n-k} =$$

$$= c_n \sum_{i=0}^{q(\varepsilon)} \left(\log \frac{1}{\varepsilon r^i}\right)^n + O\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right] =$$

$$= c_n \sum_{i=0}^{q(\varepsilon)} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^k \left(\log \frac{1}{r^i}\right)^{n-k} + O\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right] =$$

$$= c_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^k \sum_{i=0}^{q(\varepsilon)} \left(i \log \frac{1}{r}\right)^{n-k} +$$

$$+ O\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right] =$$

$$= c_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^k \left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-k} \sum_{i=0}^{q(\varepsilon)} i^{n-k} +$$

$$+ O\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right] =$$

$$= c_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^k \left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-k} \frac{q(\varepsilon)^{n-k+1}}{n-k+1} +$$

$$+ O\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right] =$$

$$= c_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^k \left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-k} \frac{\left(\log_r \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-k+1}}{n-k+1} +$$

$$+ O\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right] =$$

$$= c_n \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} C_n^k}{(n-k+1)\log r} +$$

$$+ O\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right] =$$

$$= \frac{c_n \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}}{(n+1)\log r} + O\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right],$$

поскольку

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} C_n^k}{n-k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{n+1}^k =$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k} C_{n+1}^k + C_{n+1}^{n+1}\right] = \frac{1}{n+1}.$$

Аналогично

$$\sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} c_n \left(\log \frac{1}{\varepsilon \rho^i \lambda_p(\varepsilon)}\right)^n = \frac{c_n \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}}{(\log \rho)(n+1)} + O\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right],$$

$$\sum_{i=0}^{q(\varepsilon)} O_{\Phi_0}\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon r^i \lambda_q(\varepsilon)}\right)^{n-1} \log\log \frac{1}{\varepsilon r^i \lambda_q(\varepsilon)}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} O_{\Phi_0}\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon \rho^i \lambda_p(\varepsilon)}\right)^{n-1} \log\log \frac{1}{\varepsilon \rho^i \lambda_p(\varepsilon)}\right] =$$

$$= O_{\Phi}\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right].$$

Итак,

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho_0,\,\rho_1,\,m}^{r_0,\,r_1,\,\Phi_0}\right)=\frac{c_n}{n+1}\left(\frac{1}{\log\rho}+\frac{1}{\log r}\right)\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}+$$
$$+O_\Phi\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^n\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right].$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Если множество A состоит всего лишь из одной точки, а Φ_0 — множество всех действительных констант, не превосходящих c (по абсолютной величине), то*

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho_0,\,\rho_1,\,m}^{r_0,\,r_1,\,\Phi_0}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log r}+\frac{1}{\log\rho}\right)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^2+O\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]$$
$$\left(r=\frac{r_0}{r_1};\qquad \rho=\frac{\rho_1}{\rho_0}\right).$$

Доказательство. В силу леммы 3 § 6,

$$H_\varepsilon(\Phi_0)=\log\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\pm 1=\log\frac{1}{\varepsilon}+O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Поэтому, в силу предыдущей леммы,

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho_0,\,\rho_1,\,m}^{r_0,\,r_1,\,\Phi_0}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log r}+\frac{1}{\log\rho}\right)\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^2+O\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log r}+\frac{1}{\log\rho}\right)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^2+O\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right].$$

Лемма 9. *Если множество A состоит всего лишь из одной точки, а Φ_0 — множество всех комплексных чисел, ограниченных по модулю константой $c>0$,* то

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho_0,\,\rho_1,\,m}^{r_0,\,r_1,\,\Phi_0}\right)=\left(\frac{1}{\log r}+\frac{1}{\log\rho}\right)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^2+O\left[\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]$$
$$\left(r=\frac{r_0}{r_1};\qquad \rho=\frac{\rho_1}{\rho_0}\right).$$

Доказательство получается аналогично доказательству предыдущей леммы из леммы 7 и теоремы 2 § 6.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi^{r_0, r_1}_{\rho_0, \rho_1, c}$ *есть пространство всех аналитических функций в кольце* $B^{r_1}_{\rho_1}\{r_1 \leqslant |z| \leqslant \rho_1\}$, *ограниченных по модулю в этом кольце константой* $c\,(c > 0)$ (*за норму в этом пространстве принимается максимум модуля функции на кольце* $B^{r_0}_{\rho_0}$).

Тогда

$$H_\varepsilon(\Phi^{r, r_1}_{\rho_0, \rho_1, c}) = \left(\frac{1}{\log r} + \frac{1}{\log \rho}\right)\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2 + O\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right]$$

$$\left(r = \frac{r_0}{r_1}; \qquad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_0}\right).$$

Доказательство. Фиксируем функцию $f(z)$ рассматриваемого семейства:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n},$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\, \zeta^{n-1}\, d\zeta \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(здесь γ есть произвольный контур кольца $B^{r_1}_{\rho_1}$, охватывающий точку $z = 0$). Следовательно,

$$|a_n| \leqslant \frac{c}{2\pi \rho_1^{n+1}} \leqslant \frac{c'}{\rho_1^n}$$

и

$$|b_n| \leqslant \frac{c r_1^{n-1}}{2\pi} \leqslant c' r_1^n.$$

Последнее означает, что $f(z)$ принадлежит семейству $\Phi^{r_0, r_1, \Phi'_0}_{\rho_0, \rho_1, 0}$ (Φ'_0 — пространство комплексных чисел, ограниченных по модулю константой c').

С другой стороны, нетрудно убедиться, что всякая функция семейства $\Phi^{r_0, r_1, \Phi''_0}_{\rho_0, \rho_1, 2}$ (Φ''_0 — пространство комплексных чи-

сел, ограниченных по модулю некоторой константой $c'' > 0$) принадлежит пространству $\Phi^{r_0,\, r_1}_{\rho_0,\, \rho_1,\, c}$.

Таким образом,

$$\Phi^{r_0,\, r_1,\, \Phi_0'}_{\rho_0,\, \rho_1,\, 0} \supset \Phi^{r_0,\, r_1,}_{\rho_0,\, \rho_1,\, c} \supset \Phi^{r_0,\, r_1,\, \Phi_0''}_{\rho_0,\, \rho_1,\, 2}.$$

Следовательно,

$$H_\varepsilon\left(\Phi^{r_0,\, r_1,\, \Phi_0'}_{\rho_0,\, \rho_1,\, 0}\right) \geqslant H_\varepsilon\left(\Phi^{r_0,\, r_1}_{\rho_0,\, \rho_1,\, c}\right) \geqslant H_\varepsilon\left(\Phi^{r_0,\, r_1,\, \Phi_0''}_{\rho_0,\, \rho_1,\, 2}\right).$$

Поэтому из предыдущей леммы получаем:

$$H_\varepsilon\left(\Phi^{r_0,\, r_1}_{\rho_0,\, \rho_1,\, c}\right) = \left(\frac{1}{\log r} + \frac{1}{\log \rho}\right)\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2 + O\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \log \log \frac{1}{\varepsilon}\right].$$

Теорема доказана.

§ 9. Энтропия пространства аналитических функций многих комплексных переменных

Примем следующие обозначения:

E_n^z — пространство n комплексных переменных ($z = z_1, z_2, \ldots, z_n$); $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

$B^{r_1'}_{\rho'} = B^{r_1', r_2', \ldots, r_n'}_{\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_n'}$ — кольцо из пространства E_n^z, задаваемое неравенствами $r_k' \leqslant |z_k| \leqslant \rho_k'$ ($k = 1, 2, \ldots, n$).

$B^{r''}_{\rho''} = B^{r_1'', r_2'', \ldots, r_n''}_{\rho_1'', \rho_2'', \ldots, \rho_n''}$ — кольцо из E_n^z, задаваемое неравенствами

$$r_k'' \leqslant |z| \leqslant \rho_k'' \left(0 \leqslant r_k'' < r_k' \leqslant \rho_k' < \rho_k'' \leqslant \infty,\ k = 1, 2, \ldots, n\right).$$

$F^{r',\, r''}_{\rho',\, \rho'',\, c}$ — пространство аналитических в кольце $B^{r''}_{\rho''}$ функций, ограниченных (по модулю) в этом кольце константой $c > 0$ (за норму в этом пространстве принимается максимум модуля функции в кольце $B^{r'}_{\rho'}$).

$\Phi^{r,\,\Phi_0}_{\rho,\,m,\,c} = \Phi^{r_1,\,r_2,\,\ldots,\,r_n,\,\Phi_0}_{\rho_1,\,\rho_2,\,\ldots,\,\rho_n,\,m,\,c}$ — пространство функций $f(z)$, представимых в виде

$$f(z) = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=-\infty}^{\infty} \frac{a_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}}{i_1^m i_2^m \ldots i_n^m \mu_1^{i_1} \mu_2^{i_2} \ldots \mu_n^{i_n}} =$$

$$= \sum_{\{i\}=-\infty}^{\infty} \frac{a_{\{i\},\,n} z^{\{i\},\,n}}{\{i\}_n^m \mu^{\{i\},\,n}}$$

(вторую половину равенства следует понимать как условную запись для $f(z)$), где $a_{\{i\},\,n} = a_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n} \in \Phi_0$; $i_k^m = (i_k)^m$ при $i_k \neq 0$, $i_k^m = 1$ при $i_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; $\mu_k^{i_k} = (\rho_k'')^{i_k}$ при $i_k > 0$, $\mu_k = 1$, при $i_k = 0$, $\mu_k^{i_k} = (r_k'')^{i_k}$ при $i_k < 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. За норму в пространстве $\Phi^{r,\,\Phi_0}_{\rho,\,m,\,c}$ принимается максимум модуля суммы в кольце $B^{r'}_{\rho'}$.

$$\rho_k = \frac{\rho_k''}{\rho_k'}; \qquad r_k = \frac{r_k'}{r_k''} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Под Φ_0 в данном параграфе будем понимать либо отрезок $-c \leqslant x_0 \leqslant c$, либо круг комплексной плоскости $|z_0| \leqslant c$; в первом случае Φ_0 будем обозначать через x_0, во втором — через z_0.

Лемма 1. *При всяких вещественных m и $c > 0$*

$$H_\varepsilon(\Phi^{r,\,x_0}_{\rho,\,m,\,c}) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\log r_k} + \frac{1}{\log \rho_k}\right) \left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} +$$

$$+ O_\Phi\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right],$$

где

$$A(\rho, r, m, c) + A(\rho, r, m, c)\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon} \geqslant$$

$$\geqslant O_\Phi\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right] \geqslant$$

$$\geqslant -A(\rho, r, m, c) - A(\rho, r, m, c)\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}$$

$\left(\text{здесь } \varepsilon \leqslant \frac{1}{2},\quad A(\rho, r, m, c) = A\left(\frac{\rho_1''}{\rho_1'}, \frac{\rho_2''}{\rho_2'}, \ldots, \frac{\rho_n''}{\rho_n'}, \frac{r_1'}{r_1''}, \frac{r_2'}{r_2''}, \ldots, \frac{r_n'}{r_n''}, m, c\right) > 0\right.$ *при всяких* m *и* c *не возрастает с ростом каждого из аргументов* $\left.\rho_k = \frac{\rho_k''}{\rho_k'}$ и $r_k = \frac{r_k'}{r_k''}\right)$.

Доказательство. В силу леммы 8 § 8 рассматриваемая лемма справедлива при $n = 1$. Далее, по индукции (см. лемму 7, § 8) получаем:

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho, m, c}^{r, x_0}\right) = \frac{c_n}{n+1}\left(\frac{1}{\log \rho_n} + \frac{1}{\log r_n}\right)\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} + \\ + O_\Phi\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right],$$

где $c_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\log \rho_k} + \frac{1}{\log r_k}\right)$ (по предположению индукции). Следовательно,

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho, m, c}^{r, x_0}\right) = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\log r_k} + \frac{1}{\log \rho_k}\right)\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} + \\ + O_\Phi\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right].$$

Лемма 2. *При всяких вещественных* m, $c > 0$

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{\rho, m, c}^{r, z_0}\right) = \frac{2}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\log r_k} + \frac{1}{\log \rho_k}\right)\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} + \\ + O_\Phi\left[\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right].$$

Доказательство по аналогии с предыдущей леммой легко получается из лемм 7, 9 § 8. Обозначим через $F_{\rho, c}^{r, n} = F_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, c}^{r_1, r_2, \ldots, r_n, n}$ пространство всех аналитических внутри области $B_{\rho''}^{r''}$ комплексных функций, ограниченных в этой области (по модулю) константой $c > 0$. (За норму принимается максимум модуля функции на множестве $B_{\rho'}^{r'}$.)

Лемма 3. *Всякая функция семейства* $\Phi^{r,\,z_0}_{\rho,\,2,\,c'_n}$ *принадлежит семейству* $F^{r,\,n}_{\rho,\,c}$ $\left(c'_n=\frac{c}{4^n}\right)$.

Доказательство. Докажем утверждение леммы индукцией по числу n. При $n=1$ пространство $\Phi^{r,\,z_0}_{\rho,\,2,\,c'_n}$ $\left(c'_n=\frac{c}{4}\right)$ есть совокупность функций вида

$$f(z_1)=a_0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i z_1^i}{(\rho_1'')^i i^2}+\sum_{i=-1}^{-\infty}\frac{a_i z_1^i}{(r_1'')^i i^2},$$

где

$$|a_i|\leqslant c'_n \qquad (-\infty\leqslant i\leqslant\infty).$$

Поэтому

$$|f(z_1)|\leqslant|a_0|+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|a_i||z_1|^i}{(\rho_1'')^i i^2}+\sum_{i=-1}^{-\infty}\frac{|a_i||z_1|^i}{(r_1'')^i i^2}\leqslant\frac{c}{4}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c}{4i^2}+\sum_{i=-1}^{-\infty}\frac{c}{4i^2}\leqslant c,$$

т. е.

$$\Phi^{r,\,z_0}_{\rho,\,2,\,\left(\frac{c}{4}\right)}\subset F^{r,\,1}_{\rho,\,c}.$$

Пусть доказано, что $\Phi^{r,\,z_0}_{\rho,\,2,\,c'_n}\subset F^{r,\,n-1}_{\rho,\,c}$ $\left(c'_n=\frac{c}{4^{n-1}}\right)$.

Тогда для всякой функции $f(z)$ семейства $\Phi^{r,\,z_0}_{\rho,\,2,\,c'_n}$ $\left(c'_n=\frac{c}{4^n}\right)$ получаем:

$$f(z)=\sum_{\{i\}=-\infty}^{\infty}\frac{a_{\{i\},\,n}z^{\{i\},\,n}}{\{i\}_n^2\,\mu^{\{i\},\,n}}=b_0\sum_{\{i\}=-\infty}^{\infty}\frac{a_{\{i\},\,n-1,\,0}z^{\{i\},\,n-1}}{\{i\}_{n-1}^2\,\mu^{\{i\},\,n-1}}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}\frac{b_{i_1}z_1^{i_1}}{i_1^2(\rho_1'')^{i_1}}\left[\sum_{\{i\}=-\infty}^{+\infty}\frac{a_{\{i\},\,n-1,\,i_1}z^{\{i\},\,n-1}}{\{i\}_{n-1}^2\,\mu^{\{i\},\,n-1}}\right]+$$

$$+\sum_{i_1=-1}^{-\infty}\frac{b_{i_1}z_1^{i_1}}{i_1^2(r_1'')^{i_1}}\left[\sum_{\{i\}=-\infty}^{\infty}\frac{a_{\{i\},\,n-1,\,i_1}z^{\{i\},\,n-1}}{\{i\}_{n-1}^2\,\mu^{\{i\},\,n-1}}\right]$$

и притом можно предполагать, что $|b_{i_1}| \leqslant \frac{1}{4}$ и $|a_{\{i\},\, n-1,\, i_1}| \leqslant \leqslant \frac{c}{4^{n-1}}$, поскольку, в силу определения пространства $\Phi^{r,\, z_0}_{\rho,\, 2,\, c'_n}\left(c'_n = \frac{c}{4^n}\right)$, $|b_{i_1} \cdot a_{\{i\},\, n-1,\, i_1}| \leqslant \frac{c}{4^n}$. Поэтому, в силу предположения индукции,

$$|f(z)| \leqslant |b_0| \left| \sum_{\{i\}=-\infty}^{\infty} \frac{a_{\{i\},\, n-1,\, 0}\, z^{\{i\},\, n-1}}{\{i\}^2_{n-1}\, \mu^{\{i\},\, n-1}} \right| +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{\infty} \left\{ \left| \frac{b_{i_1} z_1^{i_1}}{i_1^2 (\rho_1'')^{i_1}} \right| \left| \sum_{\{i\}=-\infty}^{\infty} \frac{a_{\{i\},\, n-1,\, i_1}\, z^{\{i\},\, n-1}}{\{i\}^2_{n-1}\, \mu^{\{i\},\, n-1}} \right| \right\} +$$

$$+ \sum_{i_1=-1}^{-\infty} \left\{ \left| \frac{b_{i_1} z_1^{i_1}}{i_1^2 (r_1'')^{i_1}} \right| \left| \sum_{\{i\}=-\infty}^{\infty} \frac{a_{\{i\},\, n-1,\, i_1}\, z^{\{i\},\, n-1}}{\{i\}^2\, \mu^{\{i\},\, n-1}} \right| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant |b_0 c| + \sum_{i_1=1}^{\infty} \left\{ \left| \frac{b_{i_1} z^{i_1}}{i_1^2 (\rho_1'')^{i_1}} \right| c \right\} + \sum_{i_1=-1}^{-\infty} \left\{ \left| \frac{b_{i_1} z_1^{i_1}}{i_1^2 (r_1'')^{i_1}} \right| c \right\} \leqslant$$

$$\leqslant c \left(\frac{1}{4} + \sum_{i_1=1}^{\infty} \frac{1}{4 i_1^2} + \sum_{i_1=-1}^{-\infty} \frac{1}{4 i_1^2} \right) \leqslant c.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Всякая функция семейства* $F^{r,\, n}_{\rho,\, c}$ *принадлежит пространству* $\Phi^{r,\, z_0}_{\rho,\, 0,\, c''_n}\left(c''_n = c \prod_{k=1}^{n} \frac{r''_k + 1}{r''_k}\right)$.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение леммы очевидно, поскольку всякая функция семейства $F^{r,\, n}_{\rho,\, c}$ представима в виде

$$f(z_1) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i z_1^i,$$

где $c_i = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}}$, $-\infty \leqslant i \leqslant \infty$ (γ есть некоторый

контур комплексной плоскости z_1, охватывающий точку $z_1=0$ и лежащий в кольце $B_{\rho_1''}^{r_1''}$), т. е.

$$|c_i| \leqslant \frac{c}{2\pi(\rho_1'')^{i+1}} \leqslant \frac{c_1''}{(\rho_1'')^i} \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$|c_{-i}| \leqslant \frac{c\,(r_1'')^{i-1}}{2\pi} \leqslant c_1''(r_1'')^i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$c_1''=\frac{c}{r_1''}(1+r_1'').$$

Предположим доказанным соотношение

$$F_{\rho,\,c}^{r,\,n-1} \subset \Phi_{\rho,\,0,\,c_{n-1}''}^{r,\,z_0}.$$

Фиксируем функцию $f(z)$ семейства $F_{\rho,\,c}^{r,\,n}$. В силу аналитичности функции $f(z)$ она может быть разложена в ряд

$$f(z)=\sum_{\{i\}=-\infty}^{+\infty} \frac{a_{\{i\},\,n} z^{\{i\},\,n}}{\mu^{\{i\},\,n}},$$

абсолютно сходящийся в области $B_{\rho''}^{r''}$. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z)=f_0(z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_n)\frac{(1+r_1'')}{r_1''}+$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{f_i(z_2,z_3,\ldots,z_n)(1+r_1'')}{r_1''}\frac{z_1^i}{(r_1'')^i}\right]+$$
$$+\sum_{i=-1}^{-\infty}\left[\frac{f_i(z_2,z_3,\ldots,z_n)(1+r_1'')}{r_1''}\frac{z_1^i}{(\rho_1'')^i}\right].$$

Из первоначального разложения $f(z)$ нетрудно усмотреть аналитичность всех функций $\{f_i(z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_n)\}$ в области $B_{\rho_2''}^{r_2''}\times B_{\rho_3''}^{r_3''}\times\ldots\times B_{\rho_n''}^{r_n''}$. Так как при $n=1$ утверждение

леммы доказано, то

$$\left| f_i(z_2, z_3, \ldots, z_n) \frac{(1+r_1'')}{r_1''} \right| \leqslant c_1'' = \frac{c\,(r_1''+1)}{r_1''},$$

т. е. $|f_i(z_2, z_3, \ldots, z_n)| \leqslant c$. Поэтому, в силу предположения индукции,

$$|a_{\{i\},\,n}| = \left| b_{i_1,\,\{i\},\,n-1} \frac{r_1''+1}{r_1''} \right| \leqslant c_{n-1}'' \cdot \frac{r_1''+1}{r_1''} =$$

$$= c \prod_{k=1}^{n} \frac{r_k''+1}{r_k''},$$

где $\{b_{i_1,\,\{i\},\,n-1}\}$ суть коэффициенты разложения

$$f_i(z_2, z_3, \ldots, z_n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{b_{i_1\{i\},\,n-1} z_2^{i_2} z_3^{i_3} \ldots z_n^{i_n}}{\mu_{\{i\},\,n-1}}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *ε-энтропия пространства $F_{\rho,\,c}^{r,\,n}$ равна*

$$H_\varepsilon(F_{\rho,\,c}^{r,\,n}) = \frac{2}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\log \rho_k} + \frac{1}{\log r_k} \right) \left(\log \frac{c}{\varepsilon} \right)^{n+1} +$$

$$+ O_F\left[\left(\log \frac{c}{\varepsilon} \right)^n \log\log \frac{c}{\varepsilon} \right]$$

и

$$\left| O_F\left[\left(\log \frac{c}{\varepsilon} \right)^n \log\log \frac{c}{\varepsilon} \right] \right| \leqslant B(r, \rho, c, n) \left(\log \frac{c}{\varepsilon} \right)^n \log\log \frac{c}{\varepsilon} +$$

$$+ B(r, \rho, c, n).$$

Функция $B(r, \rho, c, n) = B(r_1, r_2, \ldots, r_n; \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, c, n)$ обладает тем свойством, что при всяких фиксированных значениях $c > 0$ и $n > 0$ и при всяком $\delta > 0$ в области $\{r_k \geqslant \delta,\ \rho_k \geqslant \delta\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ она равномерно ограничена константой, зависящей только от c, n и δ.

Доказательство. Для начала будем предполагать, что все числа r_1'', r_2'', ..., r_n'' больше, например, числа 1.

Поскольку, в силу лемм 3 и 4

$$\Phi^{r,\,z_0}_{\rho,\,2,\,c'_n} \subset F^{r,\,n}_{\rho,\,c} \subset \Phi^{r,\,z_0}_{\rho,\,0,\,c''_n},$$

то, в силу леммы 2 § 6 и леммы 2 § 9,

$$\frac{2}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\log\rho_k}+\frac{1}{\log r_k}\right)\left(\log\frac{c''_n}{\varepsilon}\right)+$$
$$+O\left[\left(\log\frac{c''_n}{\varepsilon}\right)^n\log\log\frac{c''_n}{\varepsilon}\right]\geqslant H_\varepsilon\left(F^{r,\,n}_{\rho,\,c}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{2}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\log\rho_k}+\frac{1}{\log r_k}\right)\left(\log\frac{c'_n}{\varepsilon}\right)+$$
$$+O\left[\left(\log\frac{c'_n}{\varepsilon}\right)^n\log\log\frac{c'_n}{\varepsilon}\right],$$

т. е.

$$H_\varepsilon\left(F^{r,\,n}_{\rho,\,c}\right)=\frac{2}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\log\rho_k}+\frac{1}{\log r_k}\right)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}+$$
$$+O_F\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right].$$

Из формулировок указанных лемм нетрудно вывести, что

$$\left|O_F\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right]\right|\leqslant$$
$$\leqslant B(r,\ \rho,\ c,\ n)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n\log\log\frac{c}{\varepsilon}+B(r,\ \rho,\ c,\ n),$$

где

$$B(r,\ \rho,\ c,\ n)=B(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n,\ c,\ n)$$

есть функция параметров c и n, зависящая от $r_1, r_2, \ldots, r_n$, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ и не зависящая от абсолютных значений

$$r'_1,\ r'_2,\ \ldots,\ r'_n,\ r''_1,\ r''_2,\ \ldots,\ r''_n,\ \rho'_1,\ \rho'_2,\ \ldots,\ \rho'_n;\ \rho''_1,\ \rho''_2,\ \ldots,\ \rho''_n.$$

Для доказательства теоремы нам остается лишь освободиться от ограничений $\{r''_k\geqslant 1\}$. Для этого рассмотрим пре-

образование (инверсию) пространства E_n^z в себя, задаваемое равенствами $w_k = \frac{l}{z_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ 0 < l < \infty)$. Положим

$$\bar{r}''_k = \frac{l}{\rho''_k}; \qquad \bar{r}'_k = \frac{l}{\rho'_k},$$

$$\bar{\rho}'_k = \frac{l}{r'_k}, \qquad \bar{\rho}''_k = \frac{l}{r''_k}, \qquad \bar{r}_k = \frac{\rho''_k}{\rho'_k}, \qquad \bar{\rho}_k = \frac{r'_k}{r''_k},$$

$$\bar{\rho} = (\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \ldots, \bar{\rho}_n), \qquad \bar{r} = (\bar{r}_1\ \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n).$$

При этом преобразовании области $B_{\rho'}^{r'}$, $B_{\rho''}^{r''}$ перейдут в области $B_{\bar{\rho}'}^{\bar{r}'}$; $B_{\bar{\rho}''}^{\bar{r}''}$ (соответственно), а пространство $F_{\rho,\,c}^{r,\,n}$ отобразится при этом в пространство $F_{\bar{\rho},\,c}^{\bar{r},\,n}$ (функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ставится в соответствие функция $f(w_1, w_2, \ldots, w_n)$) таким образом, что

$$H_\varepsilon\left(F_{\rho,\,c}^{r,\,n}\right) = H_\varepsilon\left(F_{\bar{\rho},\,c}^{\bar{r},\,n}\right).$$

А поскольку для всякого наперед заданного набора чисел

$$0 \leqslant \bar{r}''_k < \bar{r}'_k \leqslant \bar{\rho}'_k < \bar{\rho}''_k < \infty \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

можно указать число l и набор $1 < r''_k < r'_k \leqslant \rho'_k < \rho''_k \leqslant \infty$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что

$$H_\varepsilon\left(F_{\bar{\rho},\,c}^{\bar{r},\,n}\right) = H_\varepsilon\left(F_{\rho,\,c}^{r,\,n}\right),$$

то теорему 1 можно считать доказанной в окончательных предположениях.

Следствие. *Пусть $B_{\rho'}^{\infty}$ есть область из E_n^z, задаваемая неравенствами $|z_k| \leqslant \rho'_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho' = (\rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_n))$, $B_{\rho''}^{\infty}$ — область $\{|z_k| \leqslant \rho''_k\}(\rho'' = (\rho''_1, \rho''_2, \ldots, \rho''_n))$; $\rho''_k > \rho'_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $F_{\rho,\,c}^{\infty,\,n}$ — пространство аналитических в $B_{\rho''}^{\infty}$ функций, ограниченных в этой области (по модулю) константой c (за норму в этом пространстве принимается максимум модуля функции на*

множестве $B_{\rho'}^{\infty}$). *Тогда*

$$H_\varepsilon\left(F_{\rho,\,c}^{\infty,\,n}\right)=\frac{2}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\log\rho_k}\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}+$$
$$+O_F\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n}\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right],$$

где $\rho_k=\dfrac{\rho_k''}{\rho_k'}$.

Доказательство. Полагая в теореме 1 $r_k''=0$ ($k=1, 2, \ldots, n$), убедившись, что даваемая теоремой оценка не зависит от $\{r_k'\}$ и на основании этого полагая $r_k'=0$ ($k=1, 2, 3, \ldots, n$), получаем нужную нам оценку.

Теорема 2 (А. Н. Колмогоров). *Пусть* G_1 *и* G_2 *суть две ограниченные области из* E_n^z, *первая из которых лежит строго внутри второй, а* $F_{G_2,\,c}^{G_1}$ — *пространство аналитических в* G_2 *комплексных функций, ограниченных на* G_2 *константой* c (за норму принимается максимум модуля функции в области G_1). *Тогда при достаточно малых* $\varepsilon>0$

$$A(G_1, G_2)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}\leqslant H_\varepsilon\left(F_{G_2,\,c}^{G_1,}\right)\leqslant B(G_1, G_2)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1},$$

где $A(G_1, G_2)$, $B(G_1, G_2)$ *суть положительные, не зависящие от* ε *константы.*

Доказательство. Фиксируем в пространстве E_n^z набор областей $\alpha_1, \alpha_2; \sigma_1', \sigma_2', \ldots, \sigma_q'; \sigma_1'', \sigma_2'', \ldots, \sigma_q''$ типа B_ρ^∞ (см. следствие теоремы 1) такие, что

$$\alpha_1\subset G_1\subset G_2\subset\alpha_2$$

$$G_2\supset\sum_{i=1}^{q}\sigma_i''\supset\sum_{i=1}^{q}\sigma_i'\supset G_1$$

и такие, что каждая из пар областей

$$(\alpha_1, \alpha_2),\ (\sigma_1', \sigma_1''),\ (\sigma_2', \sigma_2'')\ \ldots\ (\sigma_q', \sigma_q'')$$

концентрична в том смысле, что проекции всякой пары на каждую из координатных плоскостей z_k являются концен-

трическими кругами. Обозначим через $F^{\alpha_1}_{\alpha_2, c}$ пространство аналитических и ограниченных (по модулю) константой c в области α_2 комплексных функций (норма — максимум модуля функции на α_1); через $F_{i,c}$ — пространство аналитических и ограниченных (по модулю) константой c в области σ''_i $(i=1, 2, \ldots, q)$ комплексных функций (норма — максимум модуля функции на σ'_i, $i=1, 2, \ldots, q$). Так как $F^{\alpha_1}_{\alpha_2, c} \subset F^{G_1}_{G_2, c}$ и так как для всякой пары функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ из $F^{\alpha_1}_{\alpha_2, c}$

$$\|f_1(z)-f_2(z)\|_{\alpha_1} \leqslant \|f_1(z)-f_2(z)\|_{G_1},$$

то $h_\varepsilon\left(F^{\alpha_1}_{\alpha_2, c}\right) \leqslant h_\varepsilon\left(F^{G_1}_{G2,c}\right)$.

Некоторым фиксированным способом всякой точке области G_1 поставим в соответствие индекс (номер) одной из тех областей $\{\sigma'_i\}$, которые покрывают данную точку. Обозначим через σ^*_i множество всех точек области σ'_i, имеющих индекс i. Таким образом, область G_1 оказалась разбитой на подмножества $\{\sigma^*_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, q)$ такие, что $\sigma^*_i \subset \sigma'_i$ $(i=1, 2, \ldots, q)$ и $\sum\limits_{i=1}^{q} \sigma^*_i = G_1$. Обозначим через Φ пространство всех комплексных функций, определенных на области G_1 (норма — верхняя грань значений модуля функции на области G_1). Фиксируем функцию $f(z)$ семейства $F^{G_1}_{G_2, c}$ и зададимся некоторым $\varepsilon > 0$. В каждом из пространств $F_{i,c}$ фиксируем наиболее экономную ε-сеть $S_\varepsilon(F_{i,c})$, состоящую из $N_\varepsilon(F_{i,c})$ элементов f^i_j $(j=1, 2, \ldots, N_\varepsilon(F_{i,c}))$. Обозначим через $f_{j_1, j_2, \ldots, j_q}$ функцию пространства Φ, которая на каждом из множеств σ^*_i совпадает с одной из тех функций f^i_j, которая всюду на σ'_i (а, следовательно, и на σ^*_i) аппроксимирует $f(z)$ с точностью до ε. Понятно, что функции $\{f_{j_1, j_2, \ldots, j_q}\}$ $(j_i=1, 2, \ldots, N_\varepsilon(F_{i,c}),\quad i=1, 2, \ldots, q)$ образуют в пространстве Φ ε-сеть для множества $F^{G_1}_{G_2 c}$.

Поэтому

$$H_\varepsilon\left(F^{G_1}_{G_2, c}\right) \leqslant \log\left[\prod_{i=1}^{q} N_\varepsilon(F_{i,c})\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} H_\varepsilon(F_{i,c}) \leqslant B(G_1, G_2)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1},$$

поскольку при всяком i

$$H_\varepsilon(F_{i,c}) \leqslant b(\sigma_i', \sigma_i'')\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}$$

(см. следствие теоремы 1).

Выше было показано, что

$$h_\varepsilon(F_{\alpha_2,c}^{\alpha_1}) \leqslant h_\varepsilon(F_{G_2,c}^{G_1}),$$

т. е.

$$H_\varepsilon(F_{G_2,c}^{G_1}) \geqslant H_{2\varepsilon}(F_{\alpha_2,c}^{\alpha_1}) \geqslant A'(\alpha_1, \alpha_2)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} = \\ = A(G_1, G_2)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}$$

(см. теорему 1, § 6 и следствие теоремы 1 рассматриваемого параграфа). Теорема доказана.

§ 10. Энтропия пространства периодических аналитических функций многих комплексных переменных

Пусть E_n^w есть пространство n комплексных переменных $w=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ $(w_k = u_k + iv_k)$; $P_{\alpha_k}^{\beta_k}$ — полоса комплексной плоскости w_k, задаваемая неравенством $\alpha_k \leqslant v_k \leqslant \beta_k$; $P_\alpha^\beta = P_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n} = P_{\alpha_1}^{\beta_1} \times P_{\alpha_2}^{\beta_2} \times \ldots \times P_{\alpha_n}^{\beta_n}$ — замкнутая область из E_n^w, задаваемая неравенствами $\alpha_k \leqslant v_k \leqslant \beta_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$; $F_{d,c,2\pi}^\delta$ — пространство всех комплексных аналитических в области $P_{d''}^{\delta''}$ 2π-периодических по переменным $[u_k]$ функций, ограниченных в области $P_{d''}^{\delta''}$ по модулю константой $c>0$ (в качестве нормы в этом пространстве принимается максимум модуля функции в области $P_{d'}^{\delta'}$), где

$$-\infty \leqslant d_k'' < d_k' \leqslant \delta_k' < \delta_k'' \leqslant +\infty \qquad (k=1, 2, \ldots, n);$$

$$d' = (d_1', d_2', \ldots, d_n'), \qquad d'' = (d_1'', d_2'', \ldots, d_n'');$$

$$d = (d_1, d_2, \ldots, d_n), \qquad d_k = d_k' - d_k'' \qquad (k=1, 2, \ldots, n);$$

$$\delta' = (\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_n'), \qquad \delta'' = (\delta_1'', \delta_2'', \ldots, \delta_n'');$$

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n), \qquad \delta_k = \delta_k'' - \delta_k' \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим преобразование Ψ пространства E_n^w в пространство E_n^z, задаваемое равенствами $z_k = e^{iw_k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Это преобразование переводит область $P_{d'}^{\delta'}$ в область $B_{\rho'}^{r'}$ и область $P_{d''}^{\delta''}$ в $B_{\rho''}^{r''}$ таким образом, что всякая прямая $v_k = \text{const}$ и $w_i = \text{const}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$ преобразуется в окружность и притом так, что всякий полуинтервал из этой прямой длиной 2π преобразуется в эту окружность взаимно-однозначно. $\left(r'_k = e^{-\delta'_k}, r''_k = e^{-\delta''_k}, \rho'_k = e^{-d'_k}, \rho''_k = e^{-d''_k}, r_k = e^{\delta_k}, \rho_k = e^{d_k}\right)$. Преобразование Ψ порождает линейное, взаимно-однозначное отображение пространства $F_{d,c,2\pi}^{\delta}$ на пространство $F_{\rho,c}^{r,n}$ (см. обозначения § 9), а именно, функции $f(x)$ семейства $F_{\rho,c}^{r,n}$ при этом ставится в соответствие функция

$$f\left(e^{iw}\right) = f\left(e^{iw_1}, e^{iw_2}, \ldots, e^{iw_n}\right).$$

Нетрудно проверить, что при этом соответствии

$$\|f(z)\|_{B_{\rho'}^{r'}} = \|f(e^{iw})\|_{P_{d'}^{\delta'}}.$$

Поэтому $H_\varepsilon\left(F_{d,c,2\pi}^{\delta}\right) = H_\varepsilon\left(F_{\rho,c}^{r,n}\right)$, т. е. в силу теоремы 1 предыдущего параграфа получаем:

$$H_\varepsilon\left(F_{d,c,2\pi}^{\delta}\right) = \frac{2}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\log \rho_k} + \frac{1}{\log r_k}\right)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} + O_F\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n \log\log\frac{c}{\varepsilon}\right] =$$

$$= \frac{2}{(n+1)!\,(\log e)^n}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{d_k} + \frac{1}{\delta_k}\right)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} + O_F\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n \log\log\frac{c}{\varepsilon}\right].$$

Таким образом, учитывая оценку остаточного члена

$$O_F\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n \log\log\frac{c}{\varepsilon}\right]$$

(см. теорему 1 § 9), получаем следующую теорему:

Теорема 1. *Абсолютная ε-энтропия пространства* $F^{\delta}_{d,c,2\pi}$ равна

$$H_\varepsilon(F^{\delta}_{d,c,2\pi}) = \frac{2}{(n+1)!(\log e)^n}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{d_k}+\frac{1}{\delta_k}\right)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} + \\ + O_F\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n \log\log\frac{c}{\varepsilon}\right],$$

где

$$\left|O_F\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n \log\log\frac{c}{\varepsilon}\right]\right| \leqslant B'(d,\ \delta,\ c,\ n) + \\ + B'(d,\ \delta,\ c,\ n)\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n \log\log\frac{c}{\varepsilon}.$$

(Здесь $B'(d,\ \delta,\ c,\ n) = B(e^d,\ e^\delta,\ c,\ n)$ — см. теорему 1 § 9.)

§ 11. Энтропия пространства вещественных аналитических периодических функций многих переменных

Обозначим через $F_{d,c,2\pi}$ пространство вещественных, 2π-периодических (по каждому из переменных), аналитических (в пространстве E_n) функций от n вещественных переменных $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$, имеющих аналитические продолжения в области

$$P_d = P^d_{-d} = P^{d_1}_{-d_1} \times P^{d_2}_{-d_2} \times P^{d_3}_{-d_3} \times \ \ldots \ \times P^{d_n}_{-d_n}$$

(здесь $P^{d_k}_{-d_k}$ есть полоса комплексной плоскости $w_k = u_k + iv_k$, задаваемая неравенством $-d_k \leqslant v_k \leqslant d_k$), ограниченные в P_d (по абсолютной величине) константой $c > 0$; через $F^{+}_{d,c,2\pi}$ обозначим подпространство всех четных *) функций из $F_{d,c,2\pi}$;

---

*) В данном случае под *четностью функции* понимается то, что при всяком k

$$f(u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{k-1},\ u_k,\ u_{k+1},\ \ldots,\ u_n) \equiv \\ \equiv f(u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{k-1},\ -u_k,\ u_{k+1},\ \ldots,\ u_n)$$

ряд Фурье четной функции имеет отличные от нуля коэффициенты лишь при выражениях $\cos l_1u_1 \cos l_2u_2 \ldots \cos l_nu_n$.

через $\Phi_{d,\,m,\,c}$ — пространство функций, представимых на E_n в виде

$$f(u)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i_1\geqslant 0}^{i_1+i_2+\ldots+i_n=p}\sum_{i_2\geqslant 0}\cdots\sum_{i_n\geqslant 0}\frac{a_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}g_1^{i_1}g_2^{i_2}\cdots g_n^{i_n}}{(p+1)^m e^{d_1 i_1}e^{d_2 i_2}\ldots e^{d_n i_n}},$$

где $\{a_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}\}$ суть действительные числа, ограниченные по абсолютной величине константой c, и $g_k^{i_k}$ есть либо $\sin i_k u_k$, либо $\cos i_k u_k$.

В качестве нормы в каждом из перечисленных пространств принимается максимум модуля функции при всех действительных значениях ее аргументов.

Займемся для начала оценкой абсолютной ε-энтропии пространства $F^{+}_{d,\,c,\,2\pi}$.

Лемма 1. *Всякая функция пространства $F^{+}_{d,\,c,\,2\pi}$ принадлежит пространству $\Phi^{+}_{d_1-n,\,c''_n}$, где*

$$c''_n=c\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-d_k}+1}{e^{-d_k}}.$$

Доказательство. Фиксируем функцию $f(u)$ пространства $F^{+}_{d,\,c,\,2\pi}$ и рассмотрим ее ряд Фурье

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i_1\geqslant 0}^{i_1+i_2+\ldots+i_n=p}\sum_{i_2\geqslant 0}\cdots\sum_{i_n\geqslant 0}\frac{a_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}\cos l_1u_1\cos l_2u_2\ldots\cos l_nu_n}{e^{d_1 i_1}e^{d_2 i_2}\ldots e^{d_n i_n}},$$

где

$$a_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}=b_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}e^{d_1 i_1}e^{d_2 i_2}\ldots e^{d_n i_n}$$

($b_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}$ — соответствующий коэффициент Фурье). Так как $f(u)$ аналитична, то ее ряд Фурье всюду на E_n абсолютно сходится к ней самой (см. [11]). Преобразование Ψ (см. § 10) ставит этой функции в соответствие функцию $\varphi(z)=\varphi(e^{iw})=f(w)$, аналитическую в области

$$B^{r''}_{\rho''}=B^{r''_1}_{\rho''_1}\times B^{r''_2}_{\rho''_2}\times\ldots\times B^{r''_n}_{\rho''_n}\qquad(\rho''_k=e^{d_k};\ r''_k=e^{-d_k})$$

и ограниченную в этой области константой c. В силу леммы 4 § 9

$$\varphi(z)=\sum_{\{i\}=-\infty}^{+\infty}\frac{a'_{\{i\},n}z^{\{i\},n}}{\mu^{\{i\},n}}$$

(см. § 9), где

$$\left|a'_{\{i\},n}\right|\leqslant c''_n=c\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{r''_k+1}{r''_k}\right),$$

т. е.

$$\varphi(z)=\sum_{i_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{i_2=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{i_n=-\infty}^{+\infty}\frac{a'_{i_1,i_2,\ldots,i_n}z_1^{i_1}z_2^{i_2}\ldots z_n^{i_n}}{\rho_1^{i_1}\rho_2^{i_2}\ldots\rho_n^{i_n}},$$

поскольку в рассматриваемом случае $\rho'_k=r'_k=1$ и $\rho_k=\frac{1}{r_k}$. А так как $\rho_k=\rho''_k=e^{d_k}$, то

$$f(w)=\sum_{\{i\}=-\infty}^{\infty}\frac{a'_{\{i\},n}(e^{iw})^{\{i\},n}}{(e^d)^{\{i\},n}}=$$

$$=\sum_{i_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{i_2=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{i_n=-\infty}^{+\infty}\frac{a'_{i_1,i_2,\ldots,i_n}e^{ii_1w_1}e^{ii_2w_2}\ldots e^{ii_nw_n}}{e^{i_1d_1}e^{i_2d_2}\ldots e^{i_nd_n}}.$$

Заменяя $e^{ii_kw_k}$ по формуле Эйлера через $\cos i_kw_k+i\sin i_kw_k$ и приводя подобные члены, получаем

$$f(w)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i_1\geqslant 0}\sum_{i_2\geqslant 0}^{i_1+i_2+\ldots+i_n=p}\cdots\sum_{i_n\geqslant 0}\frac{c_{i_1,i_2,\ldots,i_n}g_1^{i_1}g_2^{i_2}\ldots g_n^{i_n}}{e^{d_1i_1}e^{d_2i_2}\ldots e^{d_ni_n}}+$$

$$+i\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i_1\geqslant 0}\sum_{i_2\geqslant 0}^{i_1+i_2+\ldots+i_n=p}\cdots\sum_{i_n\geqslant 0}\frac{c_{i_1,i_2,\ldots,i_n}g_1^{i_1}g_2^{i_2}\ldots g_n^{i_n}}{e^{d_1i_1}e^{d_2i_2}\ldots e^{d_ni_n}},$$

где $\left|c_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\right|\leqslant c''_n(p+1)^n$. А так как на пространстве E_n

функция $f(w)=f(u)$ вещественна, то

$$f(u)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i_1\geqslant 0}^{i_1+i_2+\ldots+i_n=p}\sum_{i_2\geqslant 0}\cdots\sum_{i_n\geqslant 0}\frac{c_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}g_1^{i_1}(u_1)\,g_2^{i_2}(u_2)\cdots g_n^{i_n}(u_n)}{e^{d_1i_1}e^{d_2i_2}\ldots e^{d_ni_n}}=$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i_1\geqslant 0}^{i_1+i_2+\ldots+i_n=p}\sum_{i_2\geqslant 0}\cdots\sum_{i_n\geqslant 0}\frac{a_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}\cos l_1u_1\cos l_2u_2\ldots\cos l_nu_n}{e^{d_1i_1}e^{d_2i_2}\ldots e^{d_ni_n}}$$

(в силу теоремы о единственности разложения функции в ряд по ортогональным функциям). А так как

$$|c_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}|=|a_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}|\leqslant c_n''(p+1)^n,$$

то

$$f(u)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i_1\geqslant 0}^{i_1+i_2+\ldots+i_n=p}\sum_{i_2\geqslant 0}\cdots\sum_{i_n\geqslant 0}\frac{a''_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}\cos l_1u_1\cos l_2u_2\ldots\cos l_nu_n}{(p+1)^{-n}e^{d_1i_1}e^{d_2i_2}\ldots e^{d_ni_n}},$$

где $a''_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}$ суть вещественные числа, ограниченные по абсолютной величине константой c_n''. Но

$$c_n''=c\prod_{k=1}^{n}\frac{r_k''+1}{r_k''}=c\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-d_k}+1}{e^{-d_k}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Всякая функция пространства* $\Phi^+_{d,\,n+2,\,\frac{c}{2}}$ *принадлежит семейству* $F^+_{d,\,c,\,2\pi}$.

Доказательство. Фиксируем функцию $f(u)$ семейства $\Phi^+_{d,\,n+2,\,\frac{c}{2}}$ и оценим модуль ее аналитического продолжения $f(w)$ в области P_d. Действительно,

$$|f(w)|=\left|\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i_1\geqslant 0}^{i_1+i_2+\ldots+i_n=p}\sum_{i_2\geqslant 0}\cdots\sum_{i_n\geqslant 0}\frac{a_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}}{(p+1)^{n+2}}\prod_{k=1}^{n}\frac{\cos l_kw_k}{e^{d_ki_k}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i_1\geqslant 0}^{i_1+i_2+\ldots+i_n=p}\sum_{i_2\geqslant 0}\cdots\sum_{i_n\geqslant 0}\frac{a_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}}{(p+1)^{n+2}}\prod_{k=1}^{n}\frac{|e^{ii_kw_k}|}{e^{d_ki_k}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i_1\geqslant 0}^{i_1+i_2+\ldots+i_n=p}\sum_{i_2\geqslant 0}\cdots\sum_{i_n\geqslant 0}\frac{|a_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}|}{(p+1)^{n+2}}\leqslant\sum_{p=0}^{\infty}\frac{c}{2(p+1)^2}\leqslant c.$$

Четность функции $f(u)$ легко усматривается из ее определения. Лемма доказана.

Лемма 3. *Абсолютная* ε-*энтропия пространства* $\Phi_{d,\,m,\,c}$ равна

$$H_\varepsilon(\Phi_{d,\,m,\,c}) = \frac{1}{(n+1)!\,(\log e)^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{d_k}\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} + \\ + O_\Phi\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n \log\log\frac{c}{\varepsilon}\right].$$

Доказательство этой леммы является почти дословным повторением приведенных выше рассуждений при вычислении ε-энтропии пространства $\Phi^{r,\,\Phi_0}_{\rho,\,m,\,c}$ рядов Лорана (см. § 8, 9). Поэтому здесь мы остановимся лишь на основных моментах доказательства. Обозначим через $\Phi^{\Phi_0}_{d,\,m,\,c}$ пространство рядов вида

$$f(u_0\alpha) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_p(\alpha)\cos pu_0}{e^{d_0}(p+1)^m},$$

где Φ_0 есть некоторое пространство функций, определенных на множестве A ($\alpha \in A$) и a_p — функция из Φ_0.

По аналогии с тем, как это делалось в лемме 6 § 8, можно доказать, что

$$H_\varepsilon\left(\Phi^{\Phi_0}_{d,\,m,\,c}\right) = \sum_{i=0}^{p(\varepsilon)} H_{\delta_i^\varepsilon}(\Phi_0),$$

где $p(\varepsilon) = \log_{e^{d_0}}\left(\frac{c}{\varepsilon}\right) + O_p\left(\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right)$, а $\delta_i^\varepsilon = \varepsilon e^{d_0 i}\lambda_p(\varepsilon)$ есть функция от ε, имеющая порядки роста и убывания как $\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{4m}$ и $\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-4m}$. Для доказательства этого факта достаточно использовать два свойства функции $\cos ku_0$, а именно, при вычислении нижней оценки для величины $H_\varepsilon\left(\Phi^{\Phi_0}_{d,\,m,\,c}\right)$ достаточно знать то свойство функций $\cos ku_0$, что всякий тригонометрический многочлен порядка p вида $\sum_{k=0}^{p} a_k \cos ku_0$ на оси u_0 уклоняется от нуля не меньше, чем $|a_p|$, а при вычислении верхней оценки для величины $H_\varepsilon\left(\Phi^{\Phi_0}_{d,\,m,\,c}\right)$ достаточно знать, что при действительных

$u_0 |\cos ku_0| \leqslant 1$. Считая доказанным равенство

$$H_\varepsilon\left(\Phi^{\Phi_0}_{d,m,c}\right) = \sum_{i=0}^{p(\varepsilon)} H_{\delta_i^\varepsilon}(\Phi_0),$$

по аналогии с леммой § 9 можно доказать, что

$$H_\varepsilon(\Phi_{d,m,c}) = \frac{1}{(n+1)!\,(\log e)^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k}\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} + \\ + O_\Phi\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n \log\log\frac{c}{\varepsilon}\right].$$

Объединяя результаты лемм 1, 2, 3, получаем следующую теорему:

Теорема 1. *Абсолютная* ε-*энтропия пространства* $F^+_{d,c,2\pi}$ *равна*

$$H_\varepsilon\left(F^+_{d,c,2\pi}\right) = \frac{1}{(n+1)!\,(\log e)^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k}\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} + \\ + O_F\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n \log\log\frac{c}{\varepsilon}\right].$$

Доказывая для пространств $\Phi_{d,m,c}$ и $F_{d,c,2\pi}$ утверждения, аналогичные леммам 1, 2 и 3, т. е. почти дословно повторяя доказательство теоремы 1, получим теорему:

Теорема 2. *Абсолютная* ε-*энтропия пространства* $F_{d,c,2\pi}$ *равна*

$$H_\varepsilon(F_{d,c,2\pi}) = \frac{2^n}{(n+1)!\,(\log e)^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k}\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} + \\ + O_F\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n \log\log\frac{c}{\varepsilon}\right]$$

(см. обозначения в начале параграфа).

§ 12. Энтропия пространства вещественных аналитических функций многих переменных

Обозначим через $F^{-1,1}_{\rho,c} = F^{-1,1}_{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n,c}$ пространство аналитических на n-мерном замкнутом кубе $J_n \subset E_n \subset E_n^z$ $\{-1 \leqslant x_k \leqslant 1\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, имеющих в области

$\mathcal{Э}_\rho = \mathcal{Э}_{\rho_1} \times \mathcal{Э}_{\rho_2} \times \ldots \times \mathcal{Э}_{\rho_n} \subset E_n^z$ аналитические продолжения, ограниченные по модулю в этой области константой $c > 0$, где $\mathcal{Э}_{\rho_k}$ есть область комплексной плоскости $z_k = x_k + iy_k$, ограниченная эллипсом с полусуммой осей ρ_k и с фокусами в точках -1, 1 вещественной оси ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Теорема 1. *Абсолютная* ε-*энтропия пространства* $F_{\rho, c}^{-1, 1}$ *равна*

$$H_\varepsilon\left(F_{\rho, c}^{-1, 1}\right) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\log \rho_k} \left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} + \\ + O_F\left[\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n \log \log \frac{c}{\varepsilon}\right].$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование Ψ' пространства E_n^w в пространство E_n^z, задаваемое равенствами

$$z_k = \cos w_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Это преобразование переводит область $P_d = P_{d_1} \times \times P_{d_2} \times \ldots \times P_{d_n}$ (см. обозначения § 10) в область $\mathcal{Э}_\rho = \mathcal{Э}_{\rho_1} \times \mathcal{Э}_{\rho_2} \times \ldots \times \mathcal{Э}_{\rho_n}$ (где $\rho_k = e^{d_k}$), вещественную плоскость E_n пространства E_n^w — в куб J_n. Отображение Ψ' не однозначное: точкам w и $-w$ оно ставит в соответствие одну точку $z = \cos w = \cos(-w)$. Однако всякую пару точек a, b, для которых при некотором k $|v_k(a)| \neq |v_k(b)|$, преобразование Ψ' переводит в различные точки пространства E_n^z. Относительно преобразования Ψ' заметим еще, что оно 2π-периодично вдоль каждой из осей $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Преобразование Ψ' порождает линейное отображение пространства $F_{d, c, 2\pi}^{+}$ (см. § 11) на пространство $F_{\rho, c}^{-1, 1}$ ($\rho_k = d^{d_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$), при котором сохраняется норма:

$$\|f(z)\|_{J_n} = \|f(w)\|_{E_n}.$$

Следовательно,

$$H_\varepsilon\left(F_{\rho,\,c}^{-1,\,1}\right)=H_\varepsilon\left(F_{d,\,c,\,2\pi}^{+}\right)=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\log\left(e^{d_k}\right)}\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}+O_F\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n}\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right]=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\log\rho_k}\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}+O_F\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n}\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right].$$

Теорема доказана.

Обозначим через $J_n^{a,\,b}$ n-мерный параллелепипед из E_n^z, задаваемый неравенствами $a_k\leqslant x_k\leqslant b_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$; через $\mathcal{Э}_{\rho_k}^{a_k,\,b_k}$ — область комплексной плоскости z_k, ограниченной эллипсом с полусуммой осей ρ_k и с фокусами в точках a_k, b_k действительной оси; через $F_{\rho,\,c}^{a,\,b}$ — пространство вещественных, аналитических на $J_n^{a,\,b}$ функций, модуль аналитических продолжений для которых в области $\mathcal{Э}_\rho^{a,\,b}=\mathcal{Э}_{\rho_1}^{a_1,\,b_1}\times\mathcal{Э}_{\rho_2}^{a_2,\,b_2}\times\ldots\times\mathcal{Э}_{\rho_n}^{a_n,\,b_n}$ ограничен константой $c>0$ (в качестве нормы в этом пространстве принимается максимум модуля функции на параллелепипеде $J_n^{a,\,b}$).

Теорема 2. *Абсолютная* ε-*энтропия пространства равна*

$$H_\varepsilon\left(F_{\rho,\,c}^{a,\,b}\right)=\frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\log\left(\dfrac{2}{b_k-a_k}\rho_k\right)}\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}+$$

$$+O_F\left[\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n}\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right].$$

Теорема 2 сводится к теореме 1 линейным преобразованием (с сохранением нормы) пространства $F_{\rho,\,c}^{a,\,b}$ в $F_{\rho',\,c}^{-1,\,1}$, которое задается следующим образом: функции $f(z)'$ пространства $F_{\rho',\,c}^{-1,\,1}$ ставится в соответствие функция

$$f\left(\frac{2(z-a)}{b-a}-1\right)\qquad\left(z_k'=\frac{2(z_k-a_k)}{b_k-a_k}-1,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n\right)$$

пространства $F_{\rho,\,c}^{a,\,b}$.

§ 13. Энтропия пространства целых функций

Пусть A есть компакт, а Φ_0 — некоторое компактное пространство, состоящее из комплексных функций, определенных на множестве A (норма — максимум модуля функции на множестве A). Обозначим через $\Phi_{l,m}^{\rho,\Phi_0}$ пространство функций вида

$$f(\alpha, z_1) = a_0(\alpha) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p(\alpha)\rho^p}{p^{lp+m}} z_1^p$$

($\alpha \in A$; $l > 0$, $\rho > 0$, m — произвольное действительное число), определенных на множество $A \times E_1^{z_1}$, где $\{a_p(\alpha)\}$ суть функции из Φ_0 (в качестве нормы в пространстве $\Phi_{l,m}^{\rho,\Phi_0}$ принимается максимум модуля функции на множестве $A \times B_1^0$, где B_1^0 есть круг комплексной плоскости $E_1^{z_1}$ $(0 \leqslant |z| \leqslant 1)$.

Лемма 1. *Модуль всякого полинома*

$$f(z_1) = \sum_{i=0}^{p} a_i z_1^i$$

($\{a_i\}$ — *суть комплексные числа*) *на круге* $B_r^0 \{0 \leqslant |z_1| \leqslant r\}$ *уклоняется от нуля не менее чем на* $|a_p| r^p$.

Доказательство. Преобразование Ψ (см. § 8) переводит круг B_r^0 в полуплоскость $y' \geqslant -\ln r$. На этой полуплоскости модуль функции $f(e^{i,z'}) = \sum_{k=0}^{p} a_k e^{ikz'}$ уклоняется от нуля не менее чем на $\sqrt{|a_p|^2 e^{2p\ln r}} = |a_p| e^{p\ln r}$ (см. лемму 1 § 8).

Следовательно, на круге B_r^0 $|f(z_1)|$ уклоняется от нуля не менее чем на $|a_p| r^p$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Абсолютная* ε-*энтропия пространства* $\Phi_{l,m}^{\rho,\Phi_0}$ *при достаточно малых* ε *равна*

$$H_\varepsilon(\Phi_{l,m}^{\rho,\Phi_0}) = \sum_{i=0}^{p(\varepsilon)} H_{\delta_i^\varepsilon}(\Phi_0),$$

где

$$p(\varepsilon)=\frac{\log\frac{c}{\varepsilon}}{l\log\log\frac{c}{\varepsilon}}(1+O_\Phi)\qquad(\lim_{\varepsilon\to 0}O_\Phi=0)$$

$$\delta_i^\varepsilon=\frac{\varepsilon l^{li+m}}{\rho^i}\lambda(\varepsilon)$$

$$(3\geqslant\lambda(\varepsilon)\geqslant\frac{l\log\log\frac{c}{\varepsilon}}{\log\frac{c}{\varepsilon}}B,\ \textit{где}\ B-\textit{абсолютная константа}).$$

Доказательство. Фиксируем числа p, δ_0, δ_1, ..., δ_p такие, что

$$\delta_i\leqslant D(\Phi_0);\quad \delta_i=\frac{\delta l^{li+m}}{\rho^i}\qquad(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

и число

$$\delta<\frac{D(\Phi_0)\,\rho^p}{p^{lp+m}},$$

где $D(\Phi_0)$ есть одномерный диаметр пространства Φ_0. Обозначим через $a_i^j(\alpha)$ $\left(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_{\frac{\delta_i}{2}}(\Phi_0)\right)$ набор функций из Φ_0, образующих в пространстве Φ_0 максимальное множество $S_{\frac{\delta_i}{2}}(\Phi_0)$ элементов, попарно удаленных друг от друга больше, чем на δ_i. Положим

$$f_{j_0,\,j_1,\,j_2,\,\ldots,\,j_p}(\alpha,\ z)=a_0^{j_0}(\alpha)+\sum_{i=1}^{p}\frac{a_i^{ji}(\alpha)\,\rho^i z_1^i}{l^{li+m}}$$

$$(j_i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_{\frac{\delta_i}{2}}(\Phi_0);\qquad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

Нетрудно убедиться, что число σ_p^δ функций $\left\{f_{j,\,j_1,\,j_2,\ldots,\,j_p}(\alpha,z)\right\}$ равно

$$\sigma_p^\delta=\prod_{i=0}^{p}n_{\frac{\delta_i}{2}}(\Phi_0),$$

Выбирая два конкретных значения пары δ и p, мы и получим нужные нам оценки ε-энтропии пространства $\Phi_{l,m}^{\rho,\Phi_0}$.

Чтобы получить нижнюю оценку для $H_\varepsilon\left(\Phi_{l,m}^{\rho,\Phi_0}\right)$, положим $\delta = 3\varepsilon$, а за p примем максимальное целое число, удовлетворяющее неравенству

$$3\varepsilon \leqslant \frac{D(\Phi_0)\rho^p}{p^{lp+m}}.$$

Можно показать, что

$$p = \frac{\log\frac{c}{\varepsilon}}{l\log\log\frac{c}{\varepsilon}}[1+\mu(\varepsilon)],$$

где $\mu(\varepsilon)$ есть функция от ε, стремящаяся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $f_1(\alpha, z_1)$ и $f_2(\alpha_1, z_2)$ суть две различные функции типа

$$f_{j_0, j_1, j_2, \ldots, j_p}(\alpha, z).$$

Тогда их разность представима в виде

$$f_1(\alpha, z_1) - f_2(\alpha, z_1) = b_0(\alpha) + \sum_{i=1}^{p} \frac{b_i(\alpha)\rho^i z_1^i}{i^{li+m}},$$

и притом коэффициенты $\{b_i(\alpha)\}$ таковы, что при всяком i $\max\limits_A |b_i(\alpha)|$ либо равен нулю, либо больше, чем $\delta_i = \frac{\delta i^{li+m}}{\rho^i}$. Поэтому можно фиксировать точку $\alpha_0 \in A$ такую, что при некотором $k \leqslant p$ $|b_k(\alpha_0)| \geqslant \delta_k$ и $|b_i(\alpha_0)| = 0$ при всяком $i > k$. А так как при z_1^k коэффициент полинома $f_1(\alpha_0, z_1) - f_2(\alpha_0, z_1)$ равен $\frac{b_k(\alpha_0)\rho^k}{k^{lk+m}} \geqslant 3\varepsilon$, то в силу леммы 1

$$\max_{B_1^0} |f_1(\alpha_0, z_1) - f_2(\alpha_0, z_1)| \geqslant 3\varepsilon,$$

т. е. функции $\left\{f_{j_0, j_1, j_2, \ldots, j_p}(\alpha, z)\right\}$ в пространстве $\Phi_{l,m}^{\rho,\Phi_0}$ образуют множество элементов, попарно удаленных друг от

друга больше чем на 2ε. Следовательно (см. лемму 3 § 5 и теорему 1 § 5),

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{l,m}^{\rho,\Phi_0}\right) \geqslant \sum_{i=0}^{p} \log\left[n_{\frac{\delta_i}{2}}(\Phi_0)\right] = \sum_{i=0}^{p} h_{\frac{\delta_i}{2}}(\Phi_0) \geqslant \sum_{i=0}^{p} H_{\delta_i}(\Phi_0),$$

где

$$\delta_i = \frac{3\varepsilon l^{li+m}}{\rho^i}\left(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, p,\ p = \frac{\log\frac{c}{\varepsilon}}{l\log\log\frac{c}{\varepsilon}}(1+\mu(\varepsilon))\right).$$

Фиксируем теперь наименьшее целочисленное p такое, что $\sum\limits_{i=p+1}^{\infty} \frac{c\rho^i}{l^{li+m}} \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$ и положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2(p+1)}$. И в данном случае нетрудно показать, что

$$p = \frac{\log\frac{c}{\varepsilon}}{l\log\log\frac{c}{\varepsilon}}(1+\nu(\varepsilon)),$$

где $\nu(\varepsilon)$ — функция от ε, стремящаяся к нулю при $\varepsilon \to 0$. При фиксированных δ и p функции $\left\{f_{j_0, j_1, j_2, \ldots, j_p}(\alpha, z)\right\}$ образуют в пространстве $\Phi_{l,m}^{\rho,\Phi_0}$ ε-сеть. Следовательно,

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{l,m}^{\rho,\Phi_0}\right) \leqslant \log \sigma_p^\delta \leqslant \sum_{i=0}^{p} H_{\delta_i}(\Phi_0),$$

где $\delta_i = \frac{\varepsilon l^{li+m}}{2(p+1)\rho^i}$. Объединяя полученные оценки, имеем:

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{l,m}^{\rho,\Phi_0}\right) = \sum_{i=0}^{p(\varepsilon)} H_{\delta_i^\varepsilon}(\Phi_0),$$

где

$$p(\varepsilon) = \frac{\log\frac{c}{\varepsilon}}{l\log\log\frac{c}{\varepsilon}}(1+O_\Phi) \qquad \left(\lim_{\varepsilon\to 0} O_\Phi = 0\right)$$

и

$$\delta_i^\varepsilon = \frac{\varepsilon l^{li+m}}{\rho^i} \lambda(\varepsilon)$$

$$\left(3 \geqslant \lambda(\varepsilon) \geqslant \frac{l \log\log\frac{c}{\varepsilon}}{\log\frac{c}{\varepsilon}} B, \text{ где } B \text{ — абсолютная константа}\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если A есть множество, состоящее из одной точки, а Φ_0 — совокупность комплексных чисел, модуль которых не превосходит константы c, то*

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{l,m}^{\rho,\Phi_0}\right) = \frac{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^2}{l\log\log\frac{c}{\varepsilon}} + O_\Phi\left[\frac{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^2 \log\log\log\frac{c}{\varepsilon}}{\left(\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^2}\right].$$

Доказательство. В силу предыдущей леммы

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{l,m}^{\rho,z_0}\right) = \sum_{i=0}^{p(\varepsilon)} H_{\delta_i^\varepsilon}(z_0) = \sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} = 2\log\frac{1}{\delta_i^\varepsilon} + O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

(см. теорему 2 § 6). Но

$$\delta_i^\varepsilon = \frac{\varepsilon l^{li+m}}{\rho^i}$$

(см. лемму 2), следовательно,

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{l,m}^{\rho,z_0}\right) = \frac{2\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^2}{l\log\log\frac{c}{\varepsilon}} + 2\sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} \log\frac{\rho^i}{l^{li+m}} + O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Оценим второе слагаемое:

$$\sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} \log\frac{\rho^i}{l^{li+m}} = \sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} \log\frac{1}{l^{li}} + \sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} i\log\rho + \sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} m\log\frac{1}{l} =$$

$$= l\sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} i\log\frac{1}{l} + (\log\rho)\frac{p(\varepsilon)+1}{2}p(\varepsilon) - m\log[p(\varepsilon)!] =$$

$$= l \sum_{i=1}^{p(\varepsilon)} i \log \frac{1}{l} + O\left[\frac{\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2}{\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2}\right] =$$

$$= -l \int_2^{p(\varepsilon)} x \log x \, dx + O\left[\frac{\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2}{\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2}\right] =$$

$$= -\frac{l}{2} [p(\varepsilon)]^2 \log p(\varepsilon) + O\left[\frac{\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2}{\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2l} \frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2}{\log\log \frac{c}{\varepsilon}} + O\left[\frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2 \log\log\log \frac{c}{\varepsilon}}{\log\log \frac{c}{\varepsilon}}\right],$$

т. е.

$$H_\varepsilon\left(\Phi_{l,\, m}^{\rho,\, z_0}\right) = \frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2}{l \log\log \frac{c}{\varepsilon}} + O_\Phi\left[\frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2 \log\log\log \frac{c}{\varepsilon}}{\left(\log\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2}\right].$$

Лемма доказана.

Обозначим через $F_s^{\sigma,\, c}$ пространство всех комплексных функций $f(z_1)$ одного комплексного переменного z_1 таких, что всюду на комплексной плоскости

$$|f(z_1)| \leqslant c e^{\sigma |z_1|^s}$$

(норма — максимум модуля функции на единичном круге $|z_1| \leqslant 1$). Такие функции обычно называют *целыми функциями порядка* σ, *типа* s.

Лемма 4. *Если* $f(z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k$ *принадлежит семейству* $F_s^{\sigma,\, c}$, *то при всяком* k

$$|a_k| \leqslant \frac{c}{2\pi} \left(\frac{e\sigma s}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{s}}.$$

Доказательство. Фиксируем функцию

$$f(z_1)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k$$

семейства $F_s^{\sigma, c}$. В силу теоремы Коши

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\varphi)}{\varphi^{n+1}}\,d\varphi.$$

Примем за γ окружность радиуса $r_n=\sqrt[s]{\frac{n+1}{\sigma s}}$. Тогда

$$a_n\leqslant\frac{ce^{\sigma r_n^s}}{2\pi r_n^{n+1}}=\frac{c}{2\pi}\left(\frac{e\sigma s}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{s}}.$$

Лемма 5. *Всякая функция семейства $\Phi_{l,m}^{\rho, z_0}$ является целой функцией порядка σ типа s, где $s=\frac{1}{l}$, а σ — некоторая константа, определяемая параметрами c, m, ρ, l.*

Доказательство. Фиксируем функцию

$$f(z_1)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k$$

семейства $\Phi_{l,m}^{\rho, z_0}$. Тогда

$$|f(z_1)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|a_k||z_1|^k\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c\rho^k|z_1|^k}{k^{lk+m}}+c=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c\rho^{\frac{p-m}{l}}|z_1|^{\frac{p-m}{l}}}{\left(\frac{p-m}{l}\right)^p}+c\leqslant c+\sum_p\frac{r^p|w|^{p+q}}{p^p}=$$

$$=c+|w|^2\sum_p\frac{r^p|w|^p}{p^p},$$

где $p=lk+m$, $r>1$, $q>0$, $w=z_1^{\frac{1}{l}}$. Далее будем считать $|z_1|$ столь большим, чтобы $|w|>1$. Тогда, полагая

$n=[p]+1$, получим:

$$|f(z_1)| \leqslant c+|w|^q \sum_p \frac{r^p |w|^p}{p^p} \leqslant$$

$$\leqslant c+|w|^q \sum_p \frac{r^n |w|^n}{(n-1)^{n-1}} \leqslant c+|w|^q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r')^n |w|^n}{n^n} <$$

$$< c+|w|^q e^{r'|w|} e^{r'|w|} \leqslant c+|z_1|^{\frac{q}{l}} e^{r'|z_1|^{\frac{1}{l}}}.$$

Поэтому можно указать константу σ такую, что при всяком z_1

$$|f(z_1)| \leqslant e^{\sigma |z_1|^{\frac{1}{l}}} = e^{\sigma |z_1|^s}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Абсолютная ε-энтропия пространства $F_s^{\sigma, c}$ равна*

$$H_\varepsilon(F_s^{\sigma, c}) = \frac{s\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2}{\log\log \frac{c}{\varepsilon}} + O_F\left[\frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2 \log\log\log \frac{c}{\varepsilon}}{\left(\log\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2}\right].$$

Теорема получается из лемм 3, 4, 5.

Обозначим через $\Psi_s^{\sigma, c}$ пространство вещественных аналитических функций, аналитические продолжения которых суть целые функции порядка σ типа $s>0$ (норма — максимум абсолютной величины функции на отрезке $[-1, 1]$).

Теорема 2. *Абсолютная ε-энтропия пространства $\Psi_s^{\sigma, c}$ равна*

$$H_\varepsilon(\Psi_s^{\sigma, c}) = \frac{s\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2}{2\log\log \frac{c}{\varepsilon}} + O_\psi\left[\frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2 \log\log\log \frac{c}{\varepsilon}}{\left(\log\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2}\right].$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1. Заметим лишь, что вместо леммы 1 при этом доказательстве следует использовать теорему Чебышева, состоящую в том, что всякий многочлен степени n, имеющий старший коэффициент, равный 1, на отрезке $[-1, 1]$ уклоняется от нуля не менее чем на $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Следствие теоремы 2. *Пусть* $\Psi_{1,T}^{\sigma,c}$ *есть пространство вещественных на действительной оси целых функций порядка* σ *типа* 1 (*норма — максимум абсолютной величины функции на отрезке* $0 \leqslant x \leqslant T$; $\sigma > 0$, $c > 0$). Тогда при достаточно малых ε

$$H_\varepsilon\left(\Psi_{1,T}^{\sigma,c}\right) = \frac{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^2}{2\log\log\frac{c}{\varepsilon}} + O_\Psi\left[\frac{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^2 \log\log\log\frac{c}{\varepsilon}}{\left(\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^2}\right].$$

Доказательство следствия легко получается из теоремы 2. Для этого достаточно лишь произвести замену переменного $\left(\text{сдвиг на } \frac{T}{2} \text{ и последующее сжатие в } \frac{T}{2} \text{ раз}\right)$.

Обозначим далее через $F_s^{\sigma,c,n}$ пространство комплексных целых функций, которые по переменному z_k имеют порядок σ_k и тип s_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) (норма — максимум модуля функции на множестве $B_1^0\{|z_k| \leqslant 1\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$), а через $\Psi_s^{\sigma,c,n}$ — совокупность функций из $F_s^{\sigma,c,n}$, действительных на вещественной части пространства E_n^z (норма — максимум абсолютной величины функции на кубе

$$J_n\{-1 \leqslant u_k \leqslant 1\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n).$$

Теорема 3. *Абсолютная* ε-*энтропия пространства* $F_s^{\sigma,c,n}$ *равна*

$$H_\varepsilon\left(F_s^{\sigma,c,n}\right) = \frac{2}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n} s_k \frac{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}}{\left(\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n} + o\left[\frac{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}}{\left(\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n}\right].$$

Теорема 4. *Абсолютная* ε-*энтропия пространства* $\Psi_s^{\sigma,c,n}$ *равна*

$$H_\varepsilon\left(\Psi_s^{\sigma,c,n}\right) = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n} s_k \frac{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}}{\left(\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n} + o\left[\frac{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}}{\left(\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n}\right].$$

Теоремы доказываются индукцией по числу n способом, который уже неоднократно демонстрировался в этой главе.

ГЛАВА III

ЭНТРОПИЯ НЕКОТОРЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 14. Энтропия пространства функций Липшица

Обозначим через $F^{\rho}_{L,\varepsilon}$ пространство (с метрикой C) функций $f(x)$, определенных на отрезке $(0 \leqslant x \leqslant \rho)$ длины ρ, удовлетворяющих условию Липшица с константой L и таких, что $|f(0)| \leqslant \varepsilon$, а через $\Phi^{\rho}_{L,\varepsilon}$ — совокупность функций $\varphi(x)$, представимых на отрезке r в виде

$$\varphi(x) = L\int_0^x \varphi^*(t)\,dt,$$

где $\varphi^*(t)$ есть функция, принимающая лишь два значения $+1$ и -1, постоянная на каждом из интервалов вида

$$\frac{(k-1)\varepsilon}{L} < t < \frac{k\varepsilon}{L} \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{\rho L}{\varepsilon}\right]\right).$$

Теорема 1. *Для всякой функции $f(x)$ семейства $F^{\rho}_{L,\varepsilon}$* можно указать функцию $\varphi(x)$ семейства $\Phi^{\rho}_{L,\varepsilon}$ такую, что всюду на отрезке r

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Положим

$$x_k = \frac{(k-1)\varepsilon}{L} \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, h;\ h = \left[\frac{\rho L}{\varepsilon}\right]\right)$$

и $x_{h+1}=\rho$. Точки $\{x_k\}$ разбивают отрезок r на $h+1$ отрезков $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{h+1}$, длина каждого из которых не превосходит $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$. Функцию $\varphi(x)$ будем искать в виде

$$\varphi(x)=L\int_0^x \varphi^*(t)\,dt.$$

Функцию $\varphi^*(t)$ будем задавать последовательно, переходя от одного отрезка δ_x к следующему. Первый шаг индукции, как мы увидим ниже, ничем не отличается от всякого следующего. Поэтому мы сразу перейдем к выбору знака функции $\varphi^*(t)$ на отрезке δ_k, считая при этом, что на всех отрезках с меньшим номером знак этой функции уже определен и уже заданная функция такова, что при всяком $j<k$ всюду на δ_j

$$|f(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Обозначим через $\varphi_+^*(t)$ (соответственно, $\varphi_-^*(t)$) функцию, совпадающую с $\varphi^*(t)$ на всех отрезках, предшествующих δ_k и равную $+1$ (соответственно, -1) внутри отрезка δ_k. Положим

$$\varphi_+(x)=L\int_0^x \varphi_+^*(t)\,dt; \qquad \varphi^*(x)=L\int_0^x \varphi_-^*(t)\,dt;$$

$$\varphi_+(x_k)=L\int_0^{x_k}\varphi_+^*(t)\,dt=L\int_0^{x_{k-1}}\varphi_+^*(t)\,dt+L\int_{\delta_k}dt=$$
$$=\varphi(x_{k-1})+L\,|\delta_k|.$$

Аналогично

$$\varphi_-(x_k)=\varphi(x_{k-1})-L\,|\delta_k|,$$

т. е.

$$\varphi_+(x_k)-\varphi_-(x_k)=2L\,|\delta_k|\leqslant 2\varepsilon.$$

Так как в силу предположения индукции

$$|f(x_{k-1})-\varphi(x_{k-1})|\leqslant\varepsilon\ ^{*})$$

и так как $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L, то

$$f(x_k)-\varphi_+(x_k)\leqslant\varepsilon \qquad \text{и} \qquad \varphi_-(x_k)-f(x_k)\leqslant\varepsilon.$$

В справедливости двух последних неравенств проще всего убедиться, рассматривая геометрическую картинку: если значение $f(x_k)$ попадает на отрезок $\varphi(x_{k-1})\pm L\,|\delta_k|$, то неравенства очевидны, поскольку их левые части в таком случае оказываются отрицательными; если значение $f(x_k)$ не попадает в указанный отрезок, то оно не может отличаться от ближайшего конца этого отрезка более чем на ε, поскольку

$$|f(x_{k-1})-\varphi(x_{k-1})|\leqslant\varepsilon$$

и потому, что $\varphi_+(x)$ и $\varphi_-(x)$ на отрезке δ_k изменяются (в различные стороны) с максимально допустимыми (константой Липшица) скоростями.

Из двух последних неравенств и того, что

$$\varphi_+(x_k)-\varphi_-(x_k)\leqslant 2\varepsilon,$$

следует, что имеет место хотя бы одно из двух неравенств:

$$|\varphi_+(x_k)-f(x_k)|\leqslant\varepsilon$$

либо

$$|\varphi_-(x_k)-f(x_k)|\leqslant\varepsilon.$$

Если имеет место первое неравенство, то на отрезке δ_k положим $\varphi^*(t)=+1$, в противном случае $\varphi^*(t)=-1$. Итак, знак функции $\varphi^*(t)$ на отрезке δ_k фиксируется таким образом, чтобы имели место неравенства:

$$|\varphi(x_k)-f(x_k)|\leqslant\varepsilon,$$

$$|\varphi(x_{k-1})-f(x_{k-1})|\leqslant\varepsilon$$

---

*) При $k=1$, т. е. при построении функции $\varphi^*(t)$ на δ_1, это неравенство автоматически получается из определения семейства $F^{\rho}_{L,\varepsilon}$ и $\Phi^{\rho}_{L,\varepsilon}$.

(второе неравенство получается автоматически из предположения индукции).

Из этих двух неравенств и того, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L, мы сейчас получим, что всюду на δ_k

$$|\varphi(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Предположим противное. Тогда в некоторой точке x'

$$|\varphi(x')-f(x')|>\varepsilon.$$

Для простоты будем предполагать, что

$$f(x')>\varphi(x')$$

и что на отрезке δ_k

$$\varphi(x)=\varphi_-(x).$$

Так как $f(x')-\varphi_-(x')>\varepsilon$, а $f(x_k)-\varphi_-(x_k)\leqslant\varepsilon$, то

$$f(x')-f(x_k)>\varphi_-(x')-\varphi_-(x_k)=L\,|x'-x_k|,$$

т. е.

$$f(x')-f(x_k)>L\,|x'-x_k|,$$

что противоречит условию Липшица.

Проводя указанные построения $h+1$ раз, мы определим функцию $\varphi(x)$ так, что

$$|\varphi(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Обозначим через $F^{\rho}_{L,c}$ пространство функций, определенных на отрезке r (длины ρ), удовлетворяющих на этом отрезке условию Липшица с константой L и не превосходящих в точке $x=0$ (по абсолютной величине) константы c.

Из теоремы 1 следует, что всякая функция из $F^{\rho}_{L,c}$ с точностью до ε может быть приближена функцией вида

$$f(0)+L\int_0^x f^*(t)\,dt,$$

где $f^*(x)$ есть функция семейства $\Phi^{\rho}_{L,\varepsilon}$, а $f(0)$ — число, кратное 2ε. Поэтому в качестве таблицы для функции из $F^{\rho}_{L,c}$

может служить последовательность из $\left[\frac{\rho L}{\varepsilon}\right]+\left[\log\frac{c}{\varepsilon}\right]+2$ двоичных разрядов

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{k_1},\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{k_2};$$

$$\left(k_1=\left[\frac{\rho L}{\varepsilon}\right]+1,\qquad k_2=\left[\log\frac{c}{\varepsilon}\right]+1\right),$$

которые в зависимости от функции $f(x)$ выбираются следующим образом: $\alpha_p=0$, если на соответствующем отрезке δ_p функция $f^*(x)$ (см. теорему 1) отрицательна, и $\alpha_p=1$ в противном случае ($p=1,\ 2,\ \ldots,\ k_1$); $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_k$ суть коэффициенты двоичного разложения числа $f(0)$, которые вычисляются индуктивно по формулам:

$$\beta_1=\begin{cases}0, & \text{если}\quad f(0)\leqslant 0,\\ 1, & \text{если}\quad f(0)>0.\end{cases}$$

$$\beta_q=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \left|f(0)-\sum\limits_{m=1}^{q-1}\frac{\beta_m c}{2^m}\right|\leqslant 0,\\ 1, & \text{если}\quad \left|f(0)-\sum\limits_{m=1}^{q-1}\frac{\beta_m c}{2^m}\right|>0.\end{cases}$$

Формула $f(x)\approx f(0)+L\int\limits_0^x f^*(t)\,dt$ позволяет по составленной таблице вычислить функцию $f(x)$ в любой точке x отрезка r.

Объем составленной таблицы для функции с условием Липшица равен

$$\left[\frac{\rho L}{\varepsilon}\right]+\left[\log\frac{c}{\varepsilon}\right]+2.$$

Чтобы показать, что не существует способов составления таблиц с заметно меньшим объемом для функций с условием Липшица, докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Абсолютная ε-энтропия пространства $F^{\rho}_{L,c}$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\rho L}{\varepsilon}+\log\frac{c}{\varepsilon}+2\geqslant H_{\varepsilon}\left(F^{\rho}_{L,c}\right)\geqslant\frac{\rho L}{\varepsilon}+\log\frac{c}{\varepsilon}-2 \qquad (\varepsilon\leqslant c).$$

Доказательство. Поскольку функции вида

$$f(0)+L\int_0^x f^*(t)\,dt$$

в своей совокупности представляют ε-сеть пространства $F^{\rho}_{L,c}$ и их число не больше чем $2^{k_1+k_2}=2^{\left(\left[\frac{\rho L}{\varepsilon}\right]+\left[\log\frac{c}{\varepsilon}\right]+2\right)}$, то

$$H_{\varepsilon}\left(F^{\rho}_{L,c}\right)\leqslant\left[\frac{\rho L}{\varepsilon}\right]+\left[\log\frac{c}{\varepsilon}\right]+2\leqslant\frac{\rho L}{\varepsilon}+\log\frac{c}{\varepsilon}+2.$$

Первая половина доказываемого неравенства получена.

Фиксируем $\delta>0$ и положим $\varepsilon'=\varepsilon+\delta$. Покажем, что всякие две различные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, представимые в виде

$$f(x)=f_0+L\int_0^x f^*(t)\,dt$$

($f^*(t)\in\Phi^{\rho}_{L,\varepsilon'}$; f_0 — число, кратное $2\varepsilon'$), хотя бы в одной точке отрезка r, отличаются более чем на 2ε. Если $f_1(0)\neq f_2(0)$, то

$$|f_1(0)-f_2(0)|\geqslant 2\varepsilon'=2\varepsilon+2\delta>2\varepsilon.$$

Следовательно, желая продолжать доказательство, будем далее предполагать, что $f_1(0)=f_2(0)$. Так как $f_1(x)\neq f_2(x)$ на отрезке r, то можно указать $k\leqslant\left[\frac{\rho L}{\varepsilon}\right]$ такое, что всюду внутри соответствующего интервала δ_k

$$|f_1^*(t)-f_2^{*\prime}(t)|=2$$

и $f_1^*(t)-f_2^*(t)$ сохраняет на отрезке δ_k постоянный знак. Фиксируем наименьшее k, удовлетворяющее этим условиям.

Тогда

$$|f_1(x_k)-f_2(x_k)|=\left|L\int_0^{x_k}(f_1^*(t)-f_2^*(t))\,dt\right|=$$

$$=L\int_{\delta_k}2\,dt=2L|\delta_k|=2L\frac{\varepsilon'}{L}=2\varepsilon'>2\varepsilon.$$

Из последнего и из того, что функции вида $f_0+L\int_0^x f^*(t)\,dt$ удовлетворяют условию Липшица с константой L, получаем, что в $F^{\rho}_{L,c}$ имеется не менее $2^{\left(\left[\frac{\rho L}{\varepsilon'}\right]+\left[\log\frac{c}{\varepsilon'}\right]\right)}$ попарно отстоящих друг от друга больше чем на 2ε элементов. А поскольку последнее верно при сколь угодно малом $\delta>0$, то в силу леммы 3 (§ 5),

$$H_\varepsilon(F^{\rho}_{L,c})\geqslant\left[\frac{\rho L}{\varepsilon'}\right]+\left[\log\frac{c}{\varepsilon}\right]\geqslant\frac{\rho L}{\varepsilon'}+\log\frac{c}{\varepsilon}-2.$$

Теорема доказана.

§ 15. Энтропия пространства дифференцируемых функций одного переменного

Фиксируем натуральное число $s\geqslant 1$ и произвольные числа $L>0$, $c>0$, $\rho>0$, $\delta>0$. Обозначим через $F^{\rho}_{s,L,c}$ пространство функций $f(x)$, заданных на отрезке r $(0\leqslant x\leqslant\rho)$ длины ρ, у которых всюду на отрезке r существует $(s-1)$-я производная, удовлетворяющая на этом отрезке условию Липшица с константой L, и таких, что

$$|f^{(k)}(0)|\leqslant c\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1)\ ^{*)}.$$

Обозначим через $\Phi^{\rho,\ \delta}_{s,\ L,\ c}$ пространство функций вида

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{s-1}a_kx^k+\frac{L}{(s-1)!}\int_0^x(x-t)^{s-1}\varphi_\delta^*(t)\,dt\qquad(x\in r),$$

---

*) Под производной нулевого порядка понимается сама функция.

где a_k есть числа, кратные δ^{s-k} $(k=0, 1, 2, \ldots, s-1)$ и ограниченные по абсолютной величине константой c, а $\varphi_\delta^*(t)$ — функция, принимающая всего лишь два значения $+1$ и -1 и постоянная на интервалах

$$\left(\delta_q\ (q-1)\,\delta < t < q\delta\right) \qquad \left(q=1, 2, \ldots, h;\ h=\left[\frac{\rho}{\delta}\right]\right)$$

и на интервале

$$\delta_{h+1} \qquad (h\delta < t < \rho).$$

В этом параграфе мы хотим оценить ε-энтропию пространства $F^\rho_{s,\,L,\,c}$ и заодно при этом доказать, что функции пространства $F^\rho_{s,\,L,\,c}$ достаточно хорошо аппроксимируются функциями $\varphi(x)$ из $\Phi^{\rho,\,\delta}_{s,\,L,\,c}$.

Теорема 1. *Для всякой функции $f(x)$ пространства $F^\rho_{s,\,1,\,c}$ можно указать функцию $\varphi(x)$ семейства $\Phi^{\rho,\,\delta}_{s,\,L,\,c}(L>1)$ такую, что*

$$\|\varphi(x)-f(x)\| \leqslant A\delta^s,$$

где $A>0$ есть некоторая константа, не зависящая ни от δ, ни от функции $f(x)$ (A зависит лишь от s и L). Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ есть некоторая функция пространства $F^\rho_{1,\,1,\,c}$, а $\varphi(x)$ — функция из $\Phi^{\rho,\,\delta}_{1,\,L,\,c}$ $(L>1)$ такая, что в точке $x_q=q\delta$*

$$|f(x_q)-\varphi(x_q)| \leqslant \delta\,(L+1).$$

Тогда для всякого числа α можно указать целое число

$$q(|\alpha|) \leqslant A(L)+\frac{\alpha}{\delta^2}$$

и функцию $\psi(x)$ семейства $\Phi^{\rho,\,\delta}_{1,\,L,\,c}$, совпадающую с $\varphi(x)$ при $x \leqslant x_q$ и такую, что

$$|f(x_{q+q(|\alpha|)})-\psi(x_{q+q(|\alpha|)})| \leqslant (L+1)\,\delta,$$

$$(x_{q+q(|\alpha|)}=(q+q(|\alpha|)+1)\,\delta),$$

$$\int\limits_{x_q}^{x_{q+q(|\alpha|)}} [f(x)-\psi(x)]\,dx=\alpha+\varepsilon_f,$$

где $|\varepsilon_f| \leqslant B(L)\delta^2$, а $A(L)$ и $B(L)$ суть положительные константы, зависящие только от L*).

Доказательство. Положим $g(x) = f(x) - \psi(x)$, где $\psi(x)$ — искомая функция. Отметим, что если $\psi(x) \in \Phi_{1,L,c}^{\rho,\delta}$, то на каждом из интервалов δ_p функция $g(x)$ в зависимости от функции $f(x)$ и знака $\psi_\delta^*(x)$ $\left(\psi_\delta^*(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}\right)$ либо строго монотонно возрастает, либо строго монотонно убывает, и при этом во всякой точке x, не совпадающей ни с одним из концов интервалов $\{\delta_p\}$, существует $g'(x)$, причем так как $|\psi'(x)| = L$, а $|f'(x)| \leqslant 1$, то

$$L - 1 \leqslant |g'(x)| \leqslant L + 1.$$

Из последнего вытекает, что при всяком $p < h$

$$\delta_p(L-1) \leqslant |g(x_p) - g(x_{p-1})| \leqslant \delta_p(L+1)$$

(x_{p-1}, x_p — суть концы интервала δ_p) и что знак разности $g(x_p) - g(x_{p-1})$ (при фиксированной функции $f(x)$) взаимнооднозначно определяется знаком функции $\psi_\delta^*(x)$ на интервале δ_p.

Будем далее для определенности предполагать, что заданное в формулировке леммы число α неотрицательно. Идея дальнейшего доказательства состоит в том, чтобы определить функцию $\psi_\delta^*(x)$ таким образом, чтобы соответствующая ей функция $g(x)$ на нескольких первых (после x_q) интервалах $\{\delta_p\}$ монотонно возрастала, затем на некоторой группе стандартных интервалов сохраняла положительный знак и была бы больше δ, и затем убывала на некоторой последующей группе интервалов до нуля.

На интервалах $\delta_{q+1}, \delta_{q+2}, \ldots, \delta_{q+q_1}$ (число q_1 будет определено ниже) знак функции $\psi_\delta^*(x)$ выберем таким образом, чтобы соответствующая функция $g(x)$ на всех этих интервалах монотонно возрастала. Число q_1 фиксируем таким,

---

*) Числа q, $|\alpha|$ и δ в лемме предполагаются столь малыми, чтобы $x_{q+q(|\alpha|)} < \rho$. Аналогичные условия будут предполагаться и в нижеследующих леммах 2 и 3.

чтобы выполнялось неравенство

$$\delta \leqslant g[\delta(q+q_1+1)] \leqslant 2(L+1)\delta.$$

Последнее возможно, поскольку при произвольном выборе значений функции $\psi_\delta^*(x)$ колебания соответствующей функции $g(x)$ на каждом из интервалов $\{\delta_p\}$ не превосходят $(L+1)\delta$ и не менее чем $(L-1)\delta$. Так как при всяком $i \leqslant q_i$

$$g[\delta(q+i+1)] - g[\delta(q+i)] \geqslant (L-1)\delta$$

и так как, по предположению леммы,

$$|g(q\delta)| = |f(q\delta) - \varphi(q\delta)| \leqslant (L+1)\delta,$$

то

$$q_1 \leqslant \left[\frac{L+2}{L-1}\right] + 1.$$

На следующих (за δ_{q+q_1}) интервалах $\delta_{q+q_1+1}, \delta_{q+q_1+2}, \ldots, \delta_{q+q_1+q_2}$ знаки функции ψ_δ^* выбираются последовательно с таким расчетом, чтобы при всяком i $(q+q_1+1 \leqslant i \leqslant q+q_1+q_2)$ и при всяком $x \in \delta_i$ выполнялось неравенство

$$\delta \leqslant g(x) \leqslant (3L+3)\delta.$$

Число q_2 подбирается таким образом, чтобы

$$\int\limits_{\delta(q+q_1)}^{\delta(q+q_1+q_2-1)} g(x)\,dx \leqslant \alpha \leqslant \int\limits_{\delta(q+q_1)}^{\delta(q+q_1+q_2)} g(x)\,dx.$$

Учитывая пределы для значений функции $g(x)$ на интервалах $\delta_{q+q_1+1}, \ldots, \delta_{q+q_1+q_2}$, получаем

$$q_2 \leqslant \left[\frac{\alpha}{\delta^2}\right] + 1.$$

На следующей группе интервалов $\delta_{q+q_1+q_2+1}, \ldots, \delta_{q+q_1+q_2+q_3}$ знаки функции $\psi_\delta^*(x)$ выбираются таким образом, чтобы функция $g(x)$ на каждом из этих интервалов монотонно убывала и в некоторой точке интервала $\delta_{q+q(\alpha)}$ $(q(\alpha)=q_1+q_2+q_3)$ обращалась в нуль. Так как $g[\delta(q+q_1+q_2+1)] \leqslant (3L+3)\delta$ и так как на последней группе интервалов функция $g(x)$ убывает со скоростью, не меньшей чем $L-1$, то $q_3 \leqslant \left[\frac{3L+3}{L-1}\right] + 1$.

Собирая полученные неравенства для q_1, q_2, q_3, получаем:

$$q(\alpha)=q_1+q_2+q_3\leqslant\left[\frac{L+2}{L-1}\right]+\left[\frac{\alpha}{\delta^2}\right]+\left[\frac{3L+3}{L-1}\right]+3\leqslant$$
$$\leqslant 3+\frac{4L+5}{L-1}+\frac{\alpha}{\delta^2}=A(L)+\frac{\alpha}{\delta^2}.$$

Оценим теперь разность числа α и интеграла от функции $g(x)$. В силу вышеполученных неравенств, полагая $a=q\delta$ и $b=(q+q(\alpha)+1)\delta$, имеем:

$$\left|\int_a^b[f(x)-\psi(x)]\,dx-\alpha\right|=\left|\int_a^b g(x)\,dx-\alpha\right|\leqslant$$
$$\leqslant(2L+2)\,\delta q_1\delta+(3L+3)\,\delta\delta+(3L+3)\,\delta\delta q_3\leqslant$$
$$\leqslant(3L+3)(q_1+1+q_3)\,\delta^2<(3L+3)\,A(L)\,\delta^2=B(L)\,\delta^2.$$

Так как в некоторой точке интервала $\delta_{q+q(\alpha)}$ функция $g(x)$ обращается в нуль, и всюду на этом интервале

$$\overline{\lim_{\delta x\to 0}}\left|\frac{\delta g(x)}{\delta(x)}\right|\leqslant L+1,$$

то

$$|g[\delta(q+q(\alpha)+1)]|\leqslant(L+1)\,\delta,$$

т. е.

$$|f[\delta(q+q(\alpha)+1)]-\psi[\delta(q+q(\alpha)+1)]|\leqslant(L+1)\,\delta.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ есть функция, определенная при всех вещественных значениях x, обладающая $(s-1)$-й производной $(s>0)$, удовлетворяющей на всей прямой условию Липшица с константой L, и такая, что в некоторой точке $x=c$*

$$f(c)\geqslant B_0\delta^s,\quad\left|\frac{d^kf(c)}{dx^k}\right|\leqslant B_k\delta^{s-k}$$

$(k=1,2,\ldots,s-1;\ \delta>0;\ B_k>0,\ k=0,1,2,\ldots,s-1)$.

Тогда на интервале (a,b)

$$\left(a=c-\frac{B_0\delta}{B+B_0},\ b=c+\frac{B_0\delta}{B+B_0}\right)\qquad f(x)>0$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant c(s, L)\,B_0\delta^{s+1},$$

где $c(s, L) > 0$ *и* $B > 0$ — *две константы, не зависящие ни от* B_0, *ни от* δ.

Доказательство. Так как $(s-1)$-я производная функции $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{d^k f(c)}{dx^k} \frac{1}{k!}(x-c)^k + \frac{1}{(s-1)!}\int_c^x (x-t)^{s-1} \frac{d^s f(t)}{dt^s}\,dt,$$

т. е.

$$f(x) \geqslant f(c) - \sum_{k=1}^{s-1} \left|\frac{d^k f(c)}{dx^k}\right| \frac{1}{k!}\,|x-c|^k -$$

$$- \frac{L}{S!}\,|x-c|^s \geqslant B_0\delta^s - \sum_{k=1}^{s-1} B_k\delta^{s-k}\,|x-c|^k - L\,|x-c|^s.$$

Положим $y = \frac{x-c}{\delta}$. Тогда при $y < 1$

$$f(x) \geqslant B_0\delta^s - \sum_{k=1}^{s-1} B_k\delta^s\,|y|^k - L\delta^s\,|y|^s \geqslant$$

$$\geqslant \delta^s(B_0 - B_y) \geqslant \delta^s[B_0 - (B+B_0)\,y] =$$

$$= \delta^s\left[B_0 - (B+B_0)\frac{|x-c|}{\delta}\right],$$

где B есть некоторая положительная константа, зависящая лишь от S и L. Положим $a = c - \frac{B_0\delta}{B+B_0}$ и $b = c + \frac{B_0\delta}{B+B_0}$. Так как a и b являются корнями уравнения

$$B_0 - (B-B_0)\frac{|x-c|}{\delta} = 0,$$

то внутри интервала (a, b)

$$f(x) \geqslant \delta^s \left[B_0 - (B + B_0) \frac{|x-c|}{\delta}\right] > 0,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b \delta^s \left[B_0 - (B + B_0) \frac{|x-c|}{\delta}\right] dx =$$

$$= 2\delta^s \int_c^b \left[B_0 - (B + B_0) \frac{|x-c|}{\delta}\right] dx =$$

$$= 2\delta^s \left[B_0(b-c) - \frac{B_0 + B}{2\delta}(b-c)^2\right] = \frac{B_0^2}{B + B_0}\delta^{s+1} =$$

$$= \frac{B_0\delta^{s+1}}{1 + \frac{B}{B_0}} \geqslant \frac{B_0\delta^{s+1}}{1+B} = c(s, L) B_0 \delta^{s+1}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Существуют целое число $q_s \geqslant 1$ и набор положительных констант $B_k^s \geqslant 1$ $(k = 0, 1, \ldots, s-1)$, обладающие следующим свойством: для всяких функций $f(x) \in F_{s,1,c}^{\rho}$ и $\varphi(x) \in \Phi_{s,L,c}^{\rho,\delta}$ $(L > 1)$ таких, что в некоторой точке $x_q = \delta_q \geqslant 0$*

$$\left|\frac{d^k f(x_q)}{dx^k} - \frac{d^k \varphi(x_q)}{dx^k}\right| \leqslant B_k^s \delta^{s-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1),$$

и числа $\eta = \pm 1$ можно указать функцию $\psi(x)$ того же семейства $\Phi_{s,L,c}^{\rho,\delta}$, совпадающую с $\varphi(x)$ при $x \leqslant x_q$ и такую, что

$$\left|\frac{d^k f(x_{q+q_s})}{dx^k} - \frac{d^k \psi(x_{q+q_s})}{dx^k}\right| \leqslant B_k^s \delta^{s-k}$$

$$(x_{q+q_s} = \delta(q + q_s), \qquad k = 0, 1, \ldots, s-1);$$

$$\operatorname{sign} \int_{x_q}^{x_{q+q_s}} [f(x) - \psi(x)]\,dx = \operatorname{sign} \eta;$$

$$\delta^{s+1} \leqslant \left|\int_{x_q}^{x_{q+q_s}} [f(x) - \psi(x)]\,dx\right| \leqslant B(s, L)\,\delta^{s+1},$$

где $B(s, L)$ суть положительный параметр, зависящий лишь от s и L.

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по числу s. При $s=1$ ее утверждение следует из леммы 1 (для этого достаточно положить $\alpha=(B(L)+1)\eta\delta^2$). Докажем то же утверждение в общем случае.

Пусть заданы функции $f(x)\in F^{\rho}_{s,1,c}$ и $\varphi(x)\in \Phi^{\rho,\delta}_{s,L,c}$, удовлетворяющие условиям леммы. Для определенности будем считать $\eta=+1$. Так как $f'(x)\in F^{\rho}_{s-1,1,c}$, а $\varphi'(x)\in \Phi^{\rho,\delta}_{s-1,L,c}$, то для них, в силу индуктивного предположения, лемма имеет место, а так как $[f^{(k)}(x)]'=f^{(k+1)}(x)$ и $[\varphi^{(k)}(x)]'=\varphi^{(k+1)}(x)$, то

$$B^{k+1}_{s+1}=B^{k}_{s}.$$

Обозначим

$$\psi_1^{s-1}(x)=\varphi'(x)=\sum_{k=0}^{s-2}a_kx^k+\frac{L}{(s-2)!}\int_0^x(x-t)^{s-2}\psi^{*,s-1}_{\delta,1}(t)\,dt$$

и построим последовательность (что можно сделать в силу предположения индукции)

$$\psi_1^{s-1},\ \psi_2^{s-1},\ \ldots,\ \psi_n^{s-1}$$

такую, что

1. $$\psi_1^{s-1}(x)=\varphi'(x) \text{ при } x\leqslant x_q=\delta q,$$

$$\psi_m^{s-1}(x)=\psi_{m-1}^{s-1}(x) \text{ при } x\leqslant y_m=\delta(q+mq_{s-1}-1)$$

$$(m=2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

2. $$\int_{y_{m-1}}^{y_m}[f'(x)-\psi_m^{s-1}(x)]\,dx\geqslant\delta^s$$

при $m=1, 2, \ldots, p\,(p \leqslant n)$.

3. $$\int\limits_{y_{m-1}}^{y_m} [f'(x) - \psi_m^{s-1}(x)]\,dx \leqslant -\delta^s$$

при $m=p+1, p+2, \ldots, n$.

4. $$\left| \frac{d^k f(y_m)}{dx^k} - \frac{d^k \psi_m^{s-1}(y_m)}{dx^k} \right| \leqslant B_k^s \delta^{s-k}$$

при $m=1, 2, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots, s-2$ (числа p и n будут фиксированы ниже).

В силу предположения индукции

$$\delta^s \leqslant \left| \int\limits_{y_{m-1}}^{y_m} [f'(x) - \psi_m^{s-1}(x)]\,dx \right| \leqslant B(s-1, L)\,\delta^s.$$

Положим

$$\psi_m^s(x) = \frac{L}{(s-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{s-1} \psi_{\delta, m}^{*s-1}(t)\,dt \qquad (m=1, 2, \ldots, n),$$

$$\psi(x) = \psi_n^s(x), \qquad g(x) = f(x) - \psi(x).$$

Из полученных неравенств следует, что

$$\delta^s \leqslant |g(y_m) - g(y_{m-1})| \leqslant B(s-1, L)\,\delta^s,$$

а из условий 2 и 3 вытекает, что

$$g(y_m) - g(y_{m-1}) \geqslant \delta^s \quad \text{при} \quad m \leqslant p,$$

$$g(y_m) - g(y_{m-1}) \leqslant -\delta^s \quad \text{при} \quad m > p.$$

Фиксируем теперь некоторое $m \leqslant n$ и некоторую точку x' отрезка $[y_{m-1}, y_m]$ и оценим сверху модуль приращения $|g(x') - g(y_{m-1})|$.

Имеем:

$$|g(x')-g(y_{m-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{y_{m-1}}^{x_1} \left|\frac{dg(t)}{dt}\right| dt = (x'-y_{m-1})\left|\frac{dg(x'')}{dx}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{s-2} \frac{1}{k!}\left|\frac{d^k g'(y_{m-1})}{dx^k}\right|(x'-y_{m-1})^k + \frac{L+1}{s!}(x'-y_{m-1})^s \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{(k-1)!}\left|\frac{d^k g(y_{m-1})}{dx^k}\right|(x'-y_{m-1})^{k-1} + \frac{L+1}{s!}(x'-y_{m-1})^s \leqslant$$

$$\leqslant \delta^s\left[(1+q_{s-1})\sum_{k=1}^{s-1} B_k^s + (L+1)\right] = B'(s,\ L)\,\delta^s$$

$(B'(s,\ L)>0)$, так как в силу предположения индукции q_{s-1} есть некоторая константа. Так как

$$|q(x')-q(y_{m-1})| \leqslant B'(s,\ L)\,\delta^s,$$

то колебание функции $g(x)$ на всяком из отрезков $\{[y_{m-1}, y_m]\}$ не превосходит $2B'(s,\ L)\,\delta^s$.

Положим теперь $B_0^s = 2B'(s,\ L)+1$. Значение числа p мы укажем ниже. Здесь же отметим, что n выбирается по возможности менее уклоняющимся от p так, чтобы в некоторой точке отрезка $[y_{n-1}, y_n]$ функция $g(x)$ обращалась в нуль. Последнее возможно, поскольку на отрезках $[y_{m-1}, y_m]$ $(m>p)$ функция $g(x)$ при переходе от точки y_{m-1} к точке y_m достаточно быстро убывает. При таком выборе числа n

$$|g(x_{q+q_s})| = |f(x_{q+q_s}) - \psi(x_{q+q_s})| \leqslant B_0^s\delta^s \quad (q_s = nq_{s-1}),$$

$$\left|\frac{d^k g(x_{q+q_s})}{dx^k}\right| = \left|\frac{d^k f(x_{q+q_s})}{dx^k} - \frac{d^k\psi(x_{q+q_s})}{dx^k}\right| \leqslant B_k^s\delta^{s-k}$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1)$$

(см. условие 4). Обозначим через a' и b' концы максимального интервала оси x, содержащего точку $c=y_p$, лежащего

внутри отрезка $[x_q, x_{q+q_s}]$ и такого, что всюду внутри интервала (a', b') $g(x) > 0$. Тогда в силу леммы 2

$$\int_{a'}^{b'} g(x)\,dx \geqslant \int_{a}^{b} g(x)\,dx \geqslant c(s, L-1)\,g(y_p)\,\delta.$$

А так как $|g(x_q)| \leqslant B_0^s\delta^s$ и $|g(x_{q+q_s})| \leqslant B_0^s\delta^s$ и так как колебание функции $g(x)$ на каждом из отрезков $\{[y_{m-1}, y_m]\}$ не превосходит $B_0^s\delta^s$, то

$$\int_{x_q}^{x_{q+q_s}} g(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{a'}^{b'} g(x)\,dx - \int_{x_q}^{a'} |g(x)|\,dx - \int_{b'}^{x_{q+q_s}} |g(x)|\,dx \geqslant$$

$$\geqslant c(s, L-1)\,g(y_p)\,\delta - 2B_0^s\delta^s\left[|x_q - a'| + |b' - x_{q+q_s}|\right].$$

А из того, что на множестве точек $\{y_m\}$ функция $g(x)$ сначала строго возрастает (при $m \leqslant p$) и затем строго монотонно убывает с шагом (по оси значений функции), не меньшим чем δ^s, то

$$a' - x_q \leqslant \left\{\left[2B_0^s\right] + 1\right\}(y_m - y_{m-1}) = B_1\delta$$

и

$$x_{q-q_s} - b' \leqslant \left\{\left[2B_0^s\right] + 1\right\}(y_m - y_{m-1}) = B_1\delta.$$

Поэтому

$$\int_{x_q}^{x_{q+q_s}} g(x)\,dx \geqslant c(s, L-1)\,g(y_p)\,\delta - B_0^s B_1 \delta^{s+1} =$$

$$= \delta^{s+1}\left(\frac{c(s, L-1)\,g(y_p)}{\delta^s} - 4B_0^s B_1\right).$$

Положим теперь

$$p = \left[\frac{1 + 4B_0^s B_1}{c(s, L-1)} + 2B_0^s\right] + 1.$$

Тогда

$$g(y_p) \geqslant p\delta^s - 2B_0^s\delta^s \geqslant \left(\left[\frac{1+4B_0^sB_1}{c(s,\ L-1)} + 2B_0^s\right] + 1\right)\delta^s - 2B_0^s\delta^s \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\left(1+4B_0^sB_1\right)\delta^s}{c(s,\ L-1)}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{x_q}^{x_{q+q_s}} g(x)\,dx \geqslant \delta^{s+1}\left(\frac{c(s,L)\,g(y_p)}{\delta^s} - 4B_0^sB_1\right) \geqslant \delta^{s+1}.$$

С другой стороны, так как при всяком m

$$|g(y_m) - g(y_{m-1})| \leqslant B(s-1,\ L)\,\delta^s,$$

то на отрезке $[x_q,\ x_{q+q_s}]$

$$\max|g(x)| \leqslant pB(s-1,\ L)\,\delta^s + 2B_0^s\delta^s =$$

$$= \delta^s\left(pB(s-1,\ L) + 2B_0^s\right).$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{x_q}^{x_{q+q_s}} g(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{x_q}^{x_{q+q_s}} [f(x) - \psi(x)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(x_{q+q_s} - x_q\right)\delta^s\left(pB(s-1,\ L) + 2B_0^s\right) =$$

$$= \delta_{q_{s-1}}n\delta^s\left(pB(s-1,\ L) + 2B_0^s\right) = B(s,\ L)\,\delta^{s+1}.$$

Таким образом, при $\eta = +1$ лемму можно считать доказанной. При $\eta = -1$ доказательство аналогично.

Доказательство теоремы 1. Пусть задана функция $f(x)$ семейства $F^{\rho}_{s,1,c}$. Фиксируем набор констант $\{a_k\}$ (a_k кратно δ^{s-k}) таких, что

$$|a_k| \leqslant c,\quad \left|a_k - \frac{d^kf(0)}{dx^k}\right| \leqslant \delta^{s-k} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1).$$

Из леммы 3 следует, что существует функция $\psi_1(x)$ из се-

мейства $\Phi^{\rho,\delta}_{s,L,c}$ такая, что $\frac{d^k\psi_1(0)}{dx^k}=a_k$ и

$$\left|\frac{d^k f(\delta q_s)}{dx^k}-\frac{d^k\psi_1(\delta q_s)}{dx^k}\right|\leqslant B^{\rho}_k\delta^{s-k}\qquad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ s-1).$$

В силу леммы 3 существует функция $\psi_2(x)$ семейства $\Phi^{\rho,\delta}_{s,L,c}$, совпадающая с $\psi_1(x)$ при $x\leqslant\delta q_s$ и такая, что

$$\left|\frac{d^k f(2\delta q_s)}{dx^k}-\frac{d^k\psi_2(2\delta q_s)}{dx^k}\right|\leqslant B^{s}_k\delta^{s-k}\qquad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ s-1).$$

Аналогичным образом определяются функции

$$\psi_3(x),\ \psi_4(x),\ \ldots,\ \psi_h(x)\quad\left(h=\left[\frac{\rho}{q_s\delta}\right]\right)$$

семейства $\Phi^{\rho,\delta}_{s,L,c}$ такие, что $\psi_m(x)$ совпадает с $\psi_{m-1}(x)$ при $x\leqslant(m-1)\delta q_s$ и

$$\left|\frac{d^k f(m\delta q_s)}{dx^k}-\frac{d^k\psi_m(m\delta q_s)}{dx^k}\right|\leqslant B^{s}_k\delta^{s-k}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1;\quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ h).$$

Обозначим через

$$\psi(x)=\sum_{k=0}^{s-1}a_kx^k+\frac{L}{(s-1)!}\int_0^x(x-t)^{s-1}\psi^*(t)\,dt$$

функцию семейства $\Phi^{\rho,\delta}_{s,L,c}$, которая при $x\leqslant h\,\delta q_s$ тождественно совпадает с функцией $\psi_h(x)$, для которой при $x\geqslant h\ \delta q_s$ $\psi^*(x)=+1$. Оценим величину $\|f(x)-\psi(x)\|$. Фиксируем точку x отрезка r и обозначим через $p\,\delta q_s$ наименьшее число, кратное δq_s, такое, что

$$|x-p\,\delta q_s|\leqslant\delta q_s.$$

Тогда

$$|f(x)-\psi(x)|=\left|\sum_{k=0}^{s-1}\left(\frac{d^k f(p\,\delta q_s)}{dx^k}-\frac{d^k\psi(p\,\delta q_s)}{dx^k}\right)\frac{(x-p\,\delta q_s)^k}{k!}+\right.$$

$$+\frac{1}{(s-1)!}\int_0^x(x-t)^{s-1}\left[\frac{d^s f(t)}{dt^s}-\frac{d^s\psi(t)}{dt^s}\right]dt=$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{s-1} \left(\frac{d^k f(p\,\delta q_s)}{dx^k} - \frac{d^k \psi_q(p\,\delta q_s)}{dx^k} \right) \frac{(x-p\,\delta_{q_s})^k}{k!} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(s-1)!} \int_0^x (x-t)^{s-1} \left[\frac{d^s f(t)}{dt^s} - \frac{d^s \psi(t)}{dt^s} \right] dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{s-1} \left(\frac{d^k f(p\,\delta q_s)}{dx^k} - \frac{d^k \psi_p(p\,\delta q_s)}{dx^k} \right) \frac{(x-p\,\delta q_s)^k}{k!} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(s-1)!} \int_0^x (x-t)^{s-1} \left[\frac{d^s f(t)}{dt^s} - \frac{d^s \psi(t)}{dt^s} \right] dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=0}^{s-1} B_k^s \delta^{s-k} \frac{(x-p\,\delta q_s)^k}{k!} + \frac{1}{(s-1)!} \int_0^x (x-t)^{s-1} 2L\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{s-1} B_k^s \delta^{s-k} \frac{(q_s\delta)^k}{k!} + \frac{2L}{s!} (q_s\delta)^s =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{q_s^k}{k!} B_k^s + \frac{2Lq_s^s}{s!} \right) \delta^s = A\delta^s.$$

Теорема доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *суть две функции семейства* $\Phi_{s,1,0}^{\rho,\delta}$ *такие, что в некоторой точке*

$$x_0 \leqslant \rho - 4s\delta \quad \varphi_1(x_0) \neq \varphi_2(x_0).$$

Тогда в некоторой точке x' *отрезка* r

$$|\varphi_1(x') - \varphi_2(x')| \geqslant c^s \delta^s,$$

где $c > 0$ *есть абсолютная константа.*

Доказательство. Обозначим через q наименьшее целое число такое, что на соответствующем интервале δ_q функции

$$\varphi_1^*(x) = \frac{d^s \varphi_1(x)}{dx^s}, \quad \varphi_2^*(x) = \frac{d^s \varphi_2(x)}{dx^s}$$

имеют различные значения, т. е. $|\varphi_1^*(x) - \varphi_2^*(x)| = 2$. Тогда

автоматически при $x \leqslant x_{q-1} = \delta(q-1)$ $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$. Положим

$$g(x) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \frac{1}{(s-1)!}\int_0^x (x-t)^{s-1} g^*(t)\,dt.$$

Если $x_{q-1} = 0$, то по предположению леммы

$$\frac{d^k g(0)}{dx^k} = \frac{d^k \varphi_2(0)}{dx^k} - \frac{d^k \varphi_1(0)}{dx^k} = 0.$$

Если же $x_{q-1} > 0$, то на отрезке $[0, x_{q-1}]$ функция $g(x) \equiv 0$ и, следовательно,

$$\frac{d^k g(x_{q-1})}{dx^k} = 0,$$

т. е. при любом x_{q-1}

$$\frac{d^k g(x_{q-1})}{dx^k} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Так как по предположению леммы $g(x_0) \neq 0$, то

$$x_{q-1} \leqslant x_0 \leqslant \rho - 4s\delta.$$

Пусть $x \geqslant x_{q-1}$. Тогда

$$|g(x)| = \frac{1}{(s-1)!}\left|\int_{x_{q-1}}^{x} (x-t)^{s-1} g^*(t)\,dt\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(s-1)!}\int_{x_{q-1}}^{x_q} (x-t)^{s-1} |g^*(t)|\,dt -$$

$$- \frac{1}{(s-1)!}\int_{x_q}^{x} (x-t)^{s-1} |g^*(t)|\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(s-1)!}\int_{x_{q-1}}^{x_q} (x-t)^{s-1} 2\,dt - \frac{1}{(s-1)!}\int_{x_q}^{x} (x-t)^{s-1} 2\,dt =$$

$$= \frac{2}{s!}\left[(x-x_{q-1})^s - 2(x-x_q)^s\right].$$

Положим

$$x' = \delta(q-1) + \delta \frac{2^{\frac{1}{s-1}}}{2^{\frac{1}{s-1}} - 1}.$$

Тогда нетрудно проверить, что $x' \leqslant \rho$ и

$$|g(x')| \geqslant \frac{2}{s!}\left[(x' - x_{q-1})^s - 2(x' - x_q)^s\right] =$$

$$= \frac{2\delta^s}{s!}\left(\frac{2^{\frac{s}{s-1}} - 2}{\left(2^{\frac{s}{s-1}} - 1\right)^s}\right) = \frac{4\delta}{s!}\,\frac{1}{\left(2^{\frac{1}{s-1}} - 1\right)^{s-1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4\delta^s}{s!}\,\frac{1}{\left[\left(1 + \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{s-1}} - 1\right]^{s-1}} = \frac{2^{3-s}s^{s-1}}{s!}\,\delta^s \geqslant \delta^s,$$

т. е. в точке $x' \leqslant \rho$

$$|\varphi_1(x') - \varphi_2(x')| \geqslant \delta^s.$$

Лемма доказана.

Теорема 2 (А. Н. Колмогоров). *При всяких $s \geqslant 1$, $L > 0$, $c > 0$ существуют две положительные константы A' и A'', зависящие лишь от s такие, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$A'\rho\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant H_\varepsilon\left(F^\rho_{s,L,c}\right) \leqslant A''\rho\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Доказательство. Докажем утверждение теоремы сначала при $L = 1$. Положим $\delta = (3\varepsilon)^{\frac{1}{s}}$. Тогда в силу леммы 4 всякие две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, не совпадающие на отрезке $[0, \rho - 4s\delta]$, отличаются на отрезке r друг от друга на $\delta^s_{h_s} = 3\varepsilon$. Но число таких функций, очевидно, не меньше чем 2^{h_s}, где $h_s = \left[\frac{\rho - 4s\delta}{\delta}\right] \geqslant \frac{\rho}{\delta} - 5s$. Поэтому в силу леммы 3 § 5

$$H_\varepsilon\left(F^\rho_{s,1,c}\right) \geqslant \frac{\rho}{\delta} - 5s = \rho\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}} - 5s$$

Положим теперь $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{A}\right)^{\frac{1}{s}}$. Тогда, в силу теоремы 1, всякая функция $f(x)$ семейства $F^{\rho}_{s,1,c}$ может быть приближена функцией $\varphi(x)$ семейства $\Phi^{\rho,\delta}_{s,L,c}$ с точностью до $(A\delta)^s = \varepsilon$ (L можно взять, например, равным 2; $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{A}\right)^{\frac{1}{s}}$, $A > 0$ зависит лишь от s).

Но число функций семейства $\Phi^{\rho,\delta}_{s,2,c}$ не превосходит $\left(\left[\frac{2c}{\delta}\right]+1\right)^s 2^h$, где $h = \left[\frac{\rho}{\delta}\right]+1$, т. е.

$$H_\varepsilon\left(F^{\rho}_{s,1,c}\right) \leqslant H_\varepsilon^{\Phi^{\rho,\delta}_{s,2,c}}\left(F^{\rho}_{s,1,c}\right) \leqslant \log\left\{\left(\left[\frac{2c}{\delta}\right]+1\right)^s 2^h\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \rho\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}} + 1 + \log\left(1 + \frac{cA^{\frac{1}{s}}}{\varepsilon^{\frac{1}{s}}}\right).$$

Следовательно, при достаточно малых ε

$$H_\varepsilon\left(F^{\rho}_{s,1,c}\right) \leqslant 2A^{\frac{1}{s}}\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}},$$

$$H_\varepsilon\left(F^{\rho}_{s,1,c}\right) \geqslant \rho\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}} - 5s \geqslant \frac{1}{2\cdot 3^{\frac{1}{s}}}\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}},$$

т. е. можно указать две положительные константы, зависящие лишь от s, такие, что при достаточно малых ε

$$A'\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant H_\varepsilon\left(F^{\rho}_{s,1,c}\right) \leqslant A''\rho\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Нетрудно убедиться в следующем равенстве:

$$H_\varepsilon\left(F^{\rho}_{s,L,c}\right) = H_{\frac{\varepsilon}{L}}\left(F^{\rho}_{s,1,\frac{c}{L}}\right).$$

Поэтому при всяком $L > 0$

$$A'\rho\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant H_\varepsilon\left(F^{\rho}_{s,\,L,\,c}\right) \leqslant A''\rho\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Теорема доказана.

§ 16. Теорема А. Н. Колмогорова

Пусть E_n есть n-мерное эвклидово пространство, J^{ρ}_n — n-мерный замкнутый куб из E_n, задаваемый неравенствами

$$0 \leqslant x_i \leqslant \rho \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Фиксируем натуральное число p и $0 < \alpha \leqslant 1$ и обозначим через $F^{\rho,\,n}_{s,\,L,\,c}$ $(s = p + \alpha)$ пространство действительных функций $f(x) = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, определенных на кубе J^{ρ}_n, все частные производные порядка p от которых на кубе J^{ρ}_n удовлетворяют условию Гёльдера *) с константой $L > 0$ и показателем α и таких, что

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} f(0)}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2},\ \ldots,\ \partial x_n^{k_n}}\right| \leqslant c \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \leqslant p\right).$$

В параграфе будет доказана полученная А. Н. Колмогоровым оценка ε-энтропии пространства $F^{\rho,\,n}_{s,\,L,\,c}$, а именно будет доказано, что при достаточно малых ε

$$A\rho^n\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}} \leqslant H_\varepsilon\left(F^{\rho,\,n}_{s,\,L,\,c}\right) \leqslant B\rho^n\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}},$$

где A и B суть положительные параметры, зависящие лишь от s и n.

Фиксируем $\delta > 0$ такое, чтобы число $\frac{\rho}{\delta}$ оказалось целым. Куб J^{ρ}_n гиперплоскостями, параллельными его $(n-1)$-

*) О функции $g(x)$ говорят, что она удовлетворяет условию Гёльдера с константой L и показателем α, если для всякой пары точек x', x'' из J^{ρ}_n

$$|g(x') - g(x'')| \leqslant L\left[\rho_{E_n}(x',\ x'')\right]^{\alpha}.$$

мерным граням, разделим на $\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^n$ n-мерных кубов ω_i^δ $\left(i=1, 2, \ldots, \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^n\right)$. Каждый из кубов ω_i^δ имеет сторону, равную δ, а ребра этих кубов параллельны ребрам куба J_n^ρ. Обозначим через C_i центр куба ω_i^δ, а через σ_i^δ n-мерный замкнутый шар (вписанный в куб ω_i^δ) радиуса $\frac{\delta}{2}$ с центром в точке C_i. Положим

$$\varphi_i^{A,\delta}(x)=\varphi_i^{A,\delta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\in J_n^\rho-\sigma_i^\delta, \\ A\left\{\cos\left[\frac{\pi}{\delta}\rho(c_i, x)\right]\right\}^s, \\ \qquad\qquad \text{если } x\in\sigma_i^\delta, \end{cases}$$

где $\rho(C_i, x)=\rho_{E_n}(C_i, x)$ есть расстояние от точки x до центра C_i шара σ_i^δ. Положим, далее,

$$\varphi_{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_h}^{A,\delta}(x)=\sum_{i=1}^{h}\eta_i\varphi_i^{A,\delta}(x)$$

$$\left(\eta_i=\pm 1;\ i=1, 2, \ldots, h;\ h=\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^n\right).$$

Лемма 1. *Можно указать положительное число $A(s, L, n)$ такое, что при $A=A(s, L, n)\delta^s$ и всяком наборе чисел η_i $(i=1, 2, \ldots, h)$ соответствующая функция $\varphi_{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n}^{A,\delta}(x)$ окажется принадлежащей пространству $F_{s, L, c}^{\rho, n}$.*

Доказательство. Дифференцируя $\varphi_i^{A,\delta}(x)$, нетрудно проверить, что эта функция внутри шара σ_i^δ обладает всеми частными производными сколь угодно высоких порядков. При этом модуль всякой частной производной порядка k внутри шара σ_i^δ ограничен величиной $AB(s, k, n)\delta^{-k}$, где $B(s, k, n)>0$ — некоторая константа, зависящая лишь от s, k, n. В частности, всякая из производных порядка $p+1$ функции $\varphi_i^{A,\delta}(x)$ в шаре σ_i^δ ограничена константой

$$AB(s, p+1, n)\delta^{-p-1}=\frac{A(s, L, n)B(s, p+1, n)}{\delta^{1-\alpha}}.$$

Обозначим через $g(x)$ какую-либо из частных производных функций $\varphi_i^{A,\delta}(x)$ порядка p. Фиксируем две точки a и b, принадлежащие шару σ_i^δ. Тогда $g(b)-g(a)=\rho_{E_n}(a, b)\frac{\partial g(C)}{\partial r}$, где $\frac{\partial g(C)}{\partial r}$ есть производная функции $g(x)$ вдоль направления (a, b), взятая в некоторой точке C отрезка $[a, b]$. Так как всякая из частных производных порядка $p+1$ от функции $\varphi_i^{A,\delta}(x)$ внутри шара σ_i^δ ограничена константой

$$\frac{A(s, L, n)\,B(r, p+1, n)}{\delta^{1-\alpha}}, \text{ то } \left|\frac{\partial g(c)}{\partial r}\right| \leqslant n\frac{A(s, L, n)\,B(s, p+1, n)}{\delta^{1-\alpha}}.$$

А тогда

$$|g(b)-g(a)| \leqslant \left|\rho\frac{\partial g\,C}{\partial r}\right| \leqslant \rho n\frac{A(s, L, n)\,B(s, p+1, n)}{\delta^{1-\alpha}} \leqslant$$
$$\leqslant \rho^\alpha n A(s, L, n)\,B(s, p+1, n).$$

Положим

$$A(s, L, n)=\frac{L}{2nB(s, p+1, n)}.$$

Тогда

$$|g(b)-g(a)| \leqslant \frac{1}{2}L\rho^\alpha.$$

Обозначим теперь через $\psi(x)$ какую-либо из p-х частных производных функций $\varphi^{A\,\delta}_{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_h}(x)$. Фиксируем две точки x' и x'' из $J_n^\rho\left(x'\in\sigma_i^\delta,\ x''\in\sigma_j^\delta\right)$ и обозначим через $g_1(x)$ и $g_2(x)$ частные производные того же вида, что и $\psi(x)$ функций $\varphi_i^{A,\delta}(x)$ и $\varphi_j^{A,\delta}(x)$ (соответственно). Нетрудно проверить, что функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ непрерывны на J_n^ρ и тождественно равны нулю на множествах $J_n^\rho-\sigma_i^\delta$ и $J_n^\rho-\sigma_j^\delta$ (соответственно). Фиксируем некоторую точку x_0, принадлежащую границе шара σ_i^δ и лежащую на отрезке $[x', x'']$. Тогда

$$|\psi(x'')-\psi(x')| \leqslant |g_1(x'')-g_1(x')|+|g_2(x'')-g_2(x')|=$$
$$=|g_1(x')-g_1(x_0)|+|g_2(x'')-g_2(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}L\,[\rho(x', x_0)]^\alpha+\frac{1}{2}L\,[\rho(x'', x_0)]^\alpha \leqslant L\,[\rho(x', x'')]^\alpha,$$

Если одна из точек x', x'' (или обе) принадлежат множеству $J_n^\rho - \sum_{i=1}^{h} \sigma_i^\delta$, то аналогичным образом доказывается, что

$$|\psi(x'') - \psi(x')| \leqslant L[\rho(x', x'')]^\alpha.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Существует положительная константа A, зависящая лишь от s, L, n такая, что при достаточно малых ε выполняется неравенство*

$$H_\varepsilon\left(F_{s,L,c}^{\rho,n}\right) \geqslant A\rho^n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}}.$$

Доказательство. Фиксируем некоторое положительное число $k > 1$ такое, чтобы при $\delta = \left[\frac{k\varepsilon}{A(s, L, n)}\right]^{\frac{1}{s}}$ число $\frac{\rho}{\delta}$ было целым.

Фиксируем две различные функции типа $\varphi^{A,\delta}_{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_h}(x)$ и $\varphi^{A,\delta}_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h}$ ($A = A(s, L, n)\delta^s$, и $A(s, L, n)$ фиксировано столь малым, чтобы обе из упомянутых функций принадлежали семейству $F_{s,L,c}^{\rho,n}$. Так как фиксированные функции предполагаются различными, то при некотором $i\tau_i \neq \eta_i$. А поэтому

$$\left|\varphi^{A,\delta}_{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_h}(C_i) - \varphi^{A,\delta}_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h}(C_i)\right| = \\ = 2A = 2A(s, L, n)\delta^s = 2k\varepsilon > 2\varepsilon.$$

Следовательно, в силу леммы 3 § 5,

$$H_\varepsilon\left(F_{s,L,c}^{\rho,n}\right) \geqslant \log 2^h = \frac{\rho}{\delta^n} = \left(\frac{A(s, L, n)}{k}\right)^{\frac{n}{s}} \rho^n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Существует константа $B > 0$ такая, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$H_\varepsilon\left(F_{s,L,c}^{\rho,n}\right) \leqslant B\rho^n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}}.$$

Доказательство. Зададимся некоторым $\delta > 0$ таким, чтобы отношение $\frac{\rho}{\delta}$ оказывалось целым числом. Рассмотрим в кубе J_n^ρ равномерную решетку с шагом δ, состоящую из точек $d_i \left(i = 1, 2, \ldots, h;\ h = \left(\frac{\rho}{\delta} + 1\right)^n\right)$.

Нумерацию узлов решетки будем предполагать выбранной таким образом, чтобы точка d_i совпадала с началом координат, а при всяком i

$$\rho_{E_n}(d_{i-1}, d_i) = \delta.$$

Фиксируем теперь некоторую функцию $f(x)$ семейства $F_{s, L, c}^{\rho, n}$ и укажем для нее способ составления таблицы, объем которой окажется не превосходящим $B\rho^n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}}$.

Обозначим через h_0 число различных видов частных производных (всех порядков до p включительно) функции n переменных. Нетрудно проверить, что $h_0 \leqslant (p+1)^n$. Обозначим через $\{\tau_1^{j, k}\}$ $(\tau_1^{j, k} = 0, 1)$ коэффициенты двоичных представлений (см. § 1) чисел

$$\frac{\partial^{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} f(d_1)}{\partial x_1^{k_1}, \partial x_2^{k_2}, \ldots, \partial x_n^{k_n}} \qquad (k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leqslant p),$$

записанных в некотором порядке. При этом числа

$$\left\{\frac{\partial^{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} f(d_1)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right\} \qquad (k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k)$$

записываются в таблицу с точностью до δ^{s-k}, т. е. на их двоичную запись достаточно

$$h_1^k \leqslant \left(\left[\log \frac{c}{\delta^{s-k}}\right] + 1\right)(k+1)^n$$

(см. лемму 3, § 6) двоичных разрядов $\tau_1^{j, k}$ $(J = 1, 2, \ldots, h_1^k)$. Таким образом, на двоичную запись всех частных произ-

водных функции $f(x)$ в точке $x=d_1$ будет достаточно

$$h_1=\sum_{k=0}^{p} h_1^k \leqslant (p+1)^{n+1}\left(1+\log\frac{c}{\delta^s}\right)$$

двоичных разрядов

$$\tau_1^{j,k}\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ h_1^k;\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ p).$$

Предположим далее, что уже указаны способ задания разрядов $\{\tau_1^{j,k}\}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ q-1)$ и правило, позволяющее на основании указанных разрядов восстановить значения чисел

$$\left\{\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} f(d_i)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right\}\qquad (k_1+k_2+\ldots+k_n=k)$$

$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ q-1)$ с точностью до δ^{s-k} $(k=0,1,\ldots,p)$. Рассмотрим дальнейший процесс построения таблицы для функции $f(x)$. Обозначим через $g_k(x)$ одну из частных производных функций $f(x)$ порядка k. По предположению индукции значения всех частных производных порядка $m\leqslant p-k$ от функции $g_k(x)$ в точке $x=d_{q-1}$ могут быть восстановлены на основании уже составленной части таблицы с точностью до δ^{s-k-m} $(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-k)$. В силу формулы Лагранжа значение $g_k(d_q)$ по приближенным значениям производных функции $g(x)$ в точке $x=d_{q-1}$ восстанавливается с некоторой достаточно высокой точностью. Поэтому для записи чисел $g_k(d_q)$ с точностью до δ^{s-k} нам требуется небольшое количество двоичных разрядов. Так как $\rho_{E_n}(d_{q-1},\ d_q)=\delta$, то все координаты (кроме одной) точек d_{q-1}, d_q попарно равны. Предположим для определенности, что

$$x_1(d_q)=x_1(d_{q-1})+\delta\quad\text{и}\quad x_i(d_q)=x_i(d_{q-1})$$

при $i=2, 3, \ldots, n$. Тогда

$$g_k(d_q)=\sum_{m=0}^{p-k-1}\frac{\partial^m g_k(d_{q-1})}{\partial x_1^m}\frac{\delta^m}{m!}+$$

$$+\frac{1}{(p-k)!}\frac{\partial^{p-k} g_k(d_{q-1}+\theta\delta)}{\partial x_1^{p-k}}\delta^{p-k}=$$

$$=\sum_{m=0}^{p-k}\frac{\partial^m g_k(d_{q-1})}{\partial x_1^m}\frac{\delta^m}{m!}+\frac{L}{(p-k)!}\Theta\delta^{s-k},$$

где $0\leqslant\theta\leqslant 1$ и $-1\leqslant\Theta'\leqslant 1$. А так как число $\frac{\partial^m g_k(d_{q-1})}{\partial x_1^m}$ задается таблицей лишь с точностью до δ^{s-k-m} ($m=0, 1, \ldots, p-k$), то число $g_k(d_q)$ предопределяется уже построенной частью таблицы лишь с точностью до

$$\sum_{m=0}^{p-k}\delta^{s-k-m}\frac{\delta^m}{m!}+\frac{L\delta^{s-k}}{(p-k)!}=$$

$$=\delta^{s-k}\left(\sum_{m=0}^{p-k}\frac{1}{m!}+\frac{L}{(p-k)!}\right)\leqslant e(L+1)\delta^{s-k}.$$

Поэтому для того чтобы записать в таблицу значение $g_k(d_q)$ с точностью до δ^{s-k}, достаточно дописать в таблице еще $h_q^{j,k}=[\log\{(L+1)e\}]+1$ двоичных разрядов $\tau_q^{j,k}$. Следовательно, для определения значений всех частных производных порядка k от функции $f(x)$ таблицу достаточно пополнить $h_q^k\leqslant(k+1)^n h_q^{j,k}$ двоичными разрядами ($k=0, 1, \ldots, p$). Таким образом, приближенная запись значений всех частных производных функций $f(x)$ в точке d_q занимает всего лишь

$$h_q=\sum_{k=0}^{p}h_q^k\leqslant(p+1)^{n+1}\{1+\log[e(L+1)]\}.$$

Построенная таблица T имеет объем

$$P(T)=\sum_{q=1}^{h} h_q \leqslant (p+1)^{n+1}\left(1+\log\frac{c}{\delta^s}\right)+$$
$$+(h-1)(p+1)^{n+1}\{1+\log[e(L+1)]\}.$$

Укажем теперь правило, пользуясь которым можно было бы по параметрам таблицы вычислить значение функции $f(x)$ в любой точке куба J_n^ρ. Для этого куб J_n^ρ каким-либо способом разобьем на множества ω_q ($\omega_q \ni d_q$), диаметр каждого из которых не превосходит $\delta\sqrt{n}$, и таких, что $\sum_{q=1}^{h}\omega_q = J_n^\rho$. Приближенное значение функции $f(x)$ восстанавливается на основании параметров $\tau_q^{j,k}$ таблицы T следующим образом.

Пусть $x \in \omega_q$. Тогда в качестве приближенного значения функции $f(x)$ принимается

$$f^*(x)=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n\leqslant p} a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}\prod_{i=1}^{n}\frac{[x_i-x_i(d_q)]^{k_i}}{k_i!},$$

где $a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ есть приближенное (с точностью до δ^{s-k}, $k=\sum_{i=1}^{n}k_i$) значение производной порядка k_i по переменной x_i ($i=1, 2, \ldots, n$) функции $f(x)$. Так как $f(x)\in F_{s,L,c}^{\rho,n}$, то $\|f(x)-f^*(x)\|\leqslant\delta^s[(p+1)^m+L+1]=B(s, L, n)\delta^s=\varepsilon'$. Поэтому, в силу теоремы 2 § 4,

$$H_{\varepsilon'}(F_{s,L,c}^{\rho,n})\leqslant(p+1)^{n+1}\left(1+\log\frac{c}{\delta^s}\right)+$$
$$+(h-1)(p+1)^{n+1}\{1+\log[e(L+1)]\}.$$

Определим теперь число δ в виде

$$\delta=\left(\frac{k\varepsilon}{B(s,L,n)}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Число $k<1$ подберем таким образом, чтобы отношение $\frac{\rho}{\delta}$ оказалось целочисленным. Тогда

$$H_\varepsilon(F_{s,L,c}^{\rho,n})\leqslant H_{\varepsilon'}(F_{s,L,c}^{\rho,n})\leqslant(p+1)^{n+1}\left(1+\log\frac{c}{\delta^s}\right)+$$
$$+(h-1)(p+1)^{n+1}\{1+\log[e(L+1)]\},$$

т. е. при достаточно малых ε

$H_\varepsilon\left(F^{\rho,\ n}_{s,\ L,\ c}\right) \leqslant B\rho^n\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}}$, где $B > 0$ есть константа, которую можно считать зависящей лишь от s, L, n.

Лемма доказана.

Теорема 1 (А. Н. Колмогоров). *Для всяких* $s > 0$, $L > 0$, $c > 0$ *и* $n \geqslant 1$ *можно указать положительные константы* $A(s, n)$ *и* $B(s, n)$ *такие, что при достаточно малых* ε

$$A(s,\ n)\,\rho^n\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}} \leqslant H_\varepsilon\left(F^{\rho,\ n}_{s,\ L,\ c}\right) \leqslant B(s,\ n)\,\rho^n\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}}.$$

Доказательство. Пусть для начала $L = 1$. Тогда в силу лемм 2 и 3 получаем:

$$A\rho^n\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}} \leqslant H_\varepsilon\left(F^{\rho,\ n}_{s,\ 1,\ c}\right) \leqslant B\rho^n\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}},$$

где A и B суть положительные константы, зависящие лишь от s и n, поскольку в данном случае $L = 1$. А так как

$$H_{\frac{\varepsilon}{L}}\left(F^{\rho,\ n}_{s,\ 1,\ \frac{c}{L}}\right) = H_\varepsilon\left(F^{\rho,\ n}_{s,\ L,\ c}\right),$$

то при достаточно малых ε

$$A(s,\ n)\,\rho^n\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}} \leqslant H_\varepsilon\left(F^{\rho,\ n}_{s,\ L,\ c}\right) \leqslant B(s,\ n)\,\rho^n\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}}.$$

Теорема доказана.

§ 17. Энтропия пространства непрерывных функций

Обозначим через $F^G_{\omega(\delta),\ c}$ пространство всех вещественных функций $f(x)$, заданных на компактном метрическом пространстве G и имеющих модуль непрерывности $\omega(\delta)$ *),

*) Относительно функции $f(x)$ говорят, что она имеет модуль непрерывности $\omega(\delta)$, если при всяком $\delta > 0$ для всякой пары точек x и y из G, такой, что при $\rho_G(x, y) \leqslant \delta$ имеет место неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \omega(\delta).$$

и таких, что $|f(x_0)| \leqslant c$, где x_0 есть некоторая точка пространства G, постоянная для всех функций семейства. Далее будем предполагать, что $\omega(\delta)$ непрерывна при $\delta = 0$ и $\omega(0) = 0$.

Теорема 1. *Если F есть некоторое подмножество пространства $F^G_{\omega(\delta), c} = \Phi$, то при всяком $\varepsilon > 0$*

$$H_\varepsilon(F) = H^\Phi_\varepsilon(F).$$

Доказательство легко получается из леммы 1 § 4.

Модуль непрерывности $\omega(\delta)$ будем называть регулярным, если $\omega(\delta)$, как функция от δ, рассматриваемая лишь на полупрямой $\delta \geqslant 0$, непрерывна в точке $\delta = 0$ ($\omega(0) = 0$) и такова, что она сама как функция от δ имеет модуль непрерывности $\omega(\delta)$, т. е. при всяких $\delta \geqslant 0$ и $\alpha > 0$

$$0 < \omega(\delta + \alpha) - \omega(\delta) \leqslant \omega(\alpha).$$

Нетрудно проверить, что регулярный модуль непрерывности является всюду на ($\delta \geqslant 0$) непрерывной строго монотонной возрастающей функцией.

Лемма 1. *Если модуль непрерывности $\omega(\delta)$ регулярен, то при всяком $\varepsilon < \frac{c}{18}$*

$$H_\varepsilon\left(F^G_{\omega(\delta), c}\right) \geqslant 2^{h_{2\delta(4\varepsilon)}(G)} + \log\frac{c}{6\varepsilon},$$

где $\delta(\varepsilon)$ есть значение обратной к $\omega(\delta)$ функции в точке $\omega = \varepsilon$.

Доказательство. В силу теоремы 1 § 5 в пространстве G можно фиксировать $n = n_j(G) = n_{2\delta(4\varepsilon)}(G)$ точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, попарно удаленных друг от друга строго больше, чем на $2j = 4\delta(4\varepsilon)$. Положим $x = \bigcup_{i=1}^{n} x_i$ и $\beta = \frac{3}{2}\delta(\varepsilon)$. Обозначим через $f_i^A(x)$ функцию точки x ($x \in G$), задаваемую следующим образом:

$$f_i^A(x) = \begin{cases} \omega[\beta - \rho_G(x_i, x)] + A & \text{при} \quad \rho_G(x_i, x) \leqslant \beta, \\ A & \text{при} \quad \rho_G(x_i, x) \geqslant \beta. \end{cases}$$

Докажем, что таким образом определенная функция $f_i^A(x)$ при всяком номере $i \leqslant n$ и действительном A имеет

модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Действительно, если x и y таковы, что $\rho_G(x_i, y) \leqslant \beta$ и $\rho(x_i, x) \leqslant \beta$, то

$$|f_i^A(x) - f_i^A(y)| = |\omega[\beta - \rho_G(x_i, x)] - \omega[\beta - \rho_G(x_i, y)]| \leqslant$$

$$\leqslant \omega[\rho_G(x_i, x) - \rho_G(x_i, y)] \leqslant \omega[\rho_G(x, y)]$$

в силу регулярности модуля непрерывности и аксиомы треугольника. Если $\rho_G(x_i, x) \geqslant \beta$ и $\rho_G(x_i, y) \geqslant \beta$, то

$$|f_i^A(x) - f_i^A(y)| = 0 \leqslant \omega[\rho_G(x, y)].$$

Если же, например, $\rho_G(x_i, x) \leqslant \beta$, а $\rho_G(x_i, y) \geqslant \beta$, то

$$|f_i^A(x) - f_i^A(y)| = |f_i^A(x) - A| \leqslant \omega[\rho_G(x, y)]$$

опять в силу регулярности модуля непрерывности и аксиомы треугольника. Итак, относительно функций $f_i^A(x)$ доказано, что их модуль непрерывности не превосходит $\omega(\delta)$.

Обозначим теперь через $f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x)$ функцию, определенную следующим образом:

$$f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x) = c - 6(k+1)\varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i^0(x)$$

$$\left(\alpha_i = \pm 1;\ i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{c}{3\varepsilon}\right] - 2\right).$$

Обозначим через σ_i множество, задаваемое неравенством

$$f_i^0(x) > 0.$$

Так как

$$\beta = \frac{3}{2}\delta(\varepsilon) \leqslant \frac{3}{2}\delta(4\varepsilon) \quad \text{и} \quad \rho_G(x_i, y_j) > 4\delta(4\varepsilon),$$

то $\rho_G(\sigma_i, \sigma_j) > \delta(4\varepsilon)$. А так как

$$\max_G f_i^0(x) = f_i^0(x_i) = \omega(\beta) = \omega\left[\frac{3}{2}\delta(\varepsilon)\right] < 2\varepsilon,$$

то для всякой пары точек $x \in \sigma_i$, $y \in \sigma_j$

$$|f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x) - f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(y)| \leqslant |f^0_i(x)| + |f^0_j(y)| \leqslant$$
$$\leqslant 4\varepsilon = \omega(\delta(4\varepsilon)) \leqslant \omega(\rho_G(x, y)).$$

Если $x \in \sigma_i$ и $y \in \sigma_i$, то

$$|f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x) - f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(y)| =$$
$$= |f^0_i(x) - f^0_i(y)| \leqslant \omega[\rho_G(x, y)],$$

так как $f^0_i(x)$ имеет модуль непрерывности $\omega(\delta)$.

Если же $x \in \sigma_i$, а $y \in G - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$, то

$$|f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x) - f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(y)| = f^0_i(x) + 0 \leqslant \omega[\rho_G(x, y)].$$

Таким образом доказано, что функции $\{f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x)\}$ имеют модуль непрерывности $\omega(\delta)$.

Так как $\max f^0_i(x) \leqslant 2\varepsilon$ и $0 < k \leqslant \left[\frac{c}{3\varepsilon}\right] - 2$, то

$$\max_G f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x) \leqslant k + \max_G f^0_i(x) \leqslant c.$$

Поэтому функции $f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x)$ принадлежат семейству $F^G_{\omega(\delta), c}$.

Если $k_1 \neq k_2$, то во всякой точке $x \in G - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$

$$|f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x) - f^{k_2}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x)| = 6\varepsilon\,|k_1 - k_2| \geqslant 6\varepsilon.$$

Если $f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x)$ и $f^k_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}(x)$ таковы, что при некотором i $\alpha_i \neq \beta_i$, то

$$|f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x_i) - f^k_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}(x_i)| =$$
$$= 2f^0_i(x_i) = 2\omega\left[\frac{3}{2}\delta(\varepsilon)\right] > 2\varepsilon,$$

т. е. функции $\{f^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x)\}$ попарно отличаются друг от друга строго больше, чем на 2ε.

Но число таких функций равно

$$\left(\left[\frac{c}{3\varepsilon}\right]-2\right)2^n.$$

Следовательно, в силу леммы 3 § 5

$$H_\varepsilon\left(F^G_{\omega(\delta),c}\right)\geqslant\log\left\{\left(\left[\frac{c}{3\varepsilon}\right]-2\right)2^n\right\}=$$
$$=n_{2\delta(4\varepsilon)}+\log\left(\left[\frac{c}{3\varepsilon}\right]-2\right)\geqslant 2^{h_{2\delta(4\varepsilon)}(G)}+\log\left(\frac{c}{3\varepsilon}-3\right)\geqslant$$
$$\geqslant 2^{h_{2\delta(4\varepsilon)}(G)}+\log\left(\frac{c}{6\varepsilon}\right),$$

так как $\varepsilon\leqslant\frac{c}{18}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если пространство G связно, то при всяком $\varepsilon\leqslant\frac{c}{2}$*

$$H_\varepsilon\left(F^G_{\omega(\delta),c}\right)\leqslant 2^{H_{\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}(G)}+\log\left(\frac{3c}{\varepsilon}\right).$$

Доказательство. Фиксируем δ-покрытие $\left(\delta=\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right)$ пространства G множествами $\{\sigma_i\}$, $i=1,2,\ldots,n$; $n=N_{\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)}(G)$ (см. § 4). Так как при замыкании множества его диаметр не увеличивается, то мы, очевидно, можем предполагать множества σ_i замкнутыми (в G). Нумерацию множеств σ_i будем предполагать выбранною таким образом, чтобы точка x_0 (см. определение пространства $F^G_{\omega(\delta),c}$) оказывалась принадлежащей множеству σ_1, чтобы σ_2 было одним из множеств, имеющих общие точки с σ_1 и т. д., чтобы σ_q было одним из множеств, имеющих хотя бы одну общую точку с множеством $\omega_{q-1}=\sum_{i=1}^{q-1}\sigma_i$. Нумерация с указанными свойствами возможна, поскольку в противном случае оказалось бы возможным разбиение пространства G на два непустых, замкнутых и непересекающих множества ω_{q-1} и $\omega_n-\omega_{q-1}$, что противоречит условию связности пространства G.

Обозначим через x_q некоторую точку множества $\omega_q \cap \sigma_{q+1}$ ($q=1, 2, \ldots, n$). Фиксируем теперь функцию $f(x)$ семейства $F^G_{\omega(\delta), c}$ и укажем способ составления таблицы $T^{\Phi}_{\varepsilon}(f)$, восстанавливающей $f(x)$ с точностью до ε. За Φ в данном случае примем пространство всех ограниченных вещественных функций, определенных на множестве G (норма — верхняя грань значений функций на множестве G).

В качестве первых n_0 параметров таблицы $T^{\Phi}_{\varepsilon}(f)$ примем коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_0}$ двоичной записи с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$ значения $f(x_1)$. Так как диаметр $D(\sigma_1) \leqslant \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $|f(x_0)| \leqslant c$, то

$$|f(x_1)| \leqslant |f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant c + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому в силу леммы 3 § 6 на двоичную запись (с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$) значения $f(x_1)$ достаточно

$$\log\left(1 + \left[\frac{c + \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}\right]\right) \leqslant \log\left(2 + \frac{2c}{\varepsilon}\right) \leqslant \log\left(\frac{3c}{\varepsilon}\right) \quad \left(\varepsilon \leqslant \frac{c}{2}\right)$$

двоичных разрядов, т. е. можно считать, что

$$n_0 \leqslant \log\left(\frac{3c}{\varepsilon}\right).$$

Все следующие параметры таблицы будут также двоичными числами

$$\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n \qquad (\beta_i = \pm 1,\ i = 2, \ldots, n).$$

Пусть уже указан способ вычисления чисел β_i ($i = 2, \ldots, q-1$) (по значениям $\{f(x_i)\}$), и этот способ таков, что по числам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_0}$; $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{q-1}$ удается каким-либо способом вычислить значение $f(x_{q-1})$ с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$, т. е. удается указать число $f^*(x_{q-1})$ такое, что

$$|f(x_{q-1}) - f^*(x_{q-1})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда значения $\beta_q = \pm 1$ выберем так, чтобы число

$$f^*(x_q) = f^*(x_{q-1}) + \beta_q \frac{\varepsilon}{2}$$

отличалось от $f(x_q)$ не более чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, т. е. таким, чтобы

$$|f^*(x_q) - f(x_q)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Последнее возможно, поскольку $D(\sigma_q) \leqslant \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ $(x_{q-1} \in \sigma_q$, $x_q \in \sigma_q)$, и поскольку в силу предположения индукции

$$|f^*(x_{q-1}) - f(x_{q-1})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

а, следовательно, и

$$|f(x_q) - f(x_{q-1})| \leqslant \omega[D(\sigma_q)] \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом определяются параметры $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ $\left(n = N_{\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)}(G)\right)$. На основании параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_0}$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ значения $\{f(x_q)\}$ восстанавливаются с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$. Определим функцию $f^*(x) \in \Phi$, которая приближала бы $f(x)$ всюду на G с точностью до ε следующим образом: если $x \in \sigma_q - \omega_{q-1}$, то

$$f^*(x) = f^*(x_q) \qquad (q = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как $D(\sigma_q) \leqslant \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и

$$|f(x_q) - f^*(x_q)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad (q = 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\|f(x) - f^*(x)\| \leqslant \omega\left[\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right] + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому

$$H_\varepsilon\left(F^G_{\omega(\delta),c}\right) \leqslant H^\Phi_\varepsilon\left(F^G_{\omega(\delta),c}\right) \leqslant \log\left(2^{n_0+n}\right) = n_0 + n \leqslant$$

$$\leqslant \log\left(\frac{3c}{\varepsilon}\right) + N_{\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}(G) \leqslant \log\left(\frac{3c}{\varepsilon}\right) + 2^{H_{\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}(G)}.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Если G есть связное компактное метрическое пространство, а модуль непрерывности $\omega(\delta)$ функций семейства $F^G_{\omega(\delta),c}$ регулярен, то при $0 < \varepsilon < \frac{c}{18}$*

$$N_{4\delta(4\varepsilon)}(G) + \log\left(\frac{c}{6\varepsilon}\right) \leqslant H_\varepsilon\left(F^G_{\omega(\delta),c}\right) \leqslant$$

$$\leqslant N_{\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)}(G) + \log\left(\frac{3c}{\varepsilon}\right),$$

т. е.

$$2^{H_{4\delta(4\varepsilon)}(G)} + \log\left(\frac{c}{6\varepsilon}\right) \leqslant H_\varepsilon\left(F^G_{\omega(\delta),c}\right) \leqslant 2^{H_{\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}(G)} + \log\left(\frac{3c}{\varepsilon}\right).$$

Доказательство теоремы получается из лемм 1, 2 и теоремы 1 § 5.

ГЛАВА IV

ВАРИАЦИИ МНОЖЕСТВА

Обозначим через E_n n-мерное эвклидово пространство; через $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ — ортонормированный базис этого пространства; через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты произвольной точки из E_n относительно этого базиса; пусть τ_i^k — k-мерная координатная плоскость из E_n, т. е. плоскость, натянутая на некоторые k координатных осей ($i=1, 2, \ldots, C_n^k$; нумерация плоскостей по индексу i фиксируется произвольным образом); $\beta_i^{n-k}(q)$ — $(n-k)$-мерная плоскость из E_n, содержащая точку $q \in \tau_i^k$ и ортогональная плоскости τ_i^k; J_n — n-мерный замкнутый правильный куб из E_n (куб будем называть правильным, если его ребра параллельны фиксированным в пространстве E_n координатным осям); J_n^* — граница куба J_n; $v_0^{J_n}(e \cap \beta)$ — число компонент множества $e \cap \beta \subset E_n$, лежащих строго внутри (т. е. не пересекающихся с границей) куба $J_n \subset E_n$; $\Psi_\tau(E)$ — ортогональная проекция множества $E \subset E_n$ на плоскость $\tau \subset E_n$.

§ 18. Функция кратности и ее измеримость для замкнутых множеств

Вариация множества будет определена как интеграл от некоторой функции, называемой функцией кратности.

Определение. Назовем i-й функцией кратности порядка k множества $e \subset E_n$ (относительно куба J_n) функцию $v_0^{J_n}[e \cap \beta_i^{n-k}(q)]$, определенную на плоскости τ_i^k и равную

числу компонент множества $e \cap \beta_i^{n-k}(q)$, лежащих строго внутри куба J_n $(i = 1, 2, \ldots, C_n^k;\ k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Мы ограничимся лишь замкнутыми множествами $e \subset E_n$. Делается это в основном потому, что не удается доказать измеримости для более широкого класса множеств, например, даже для множеств типа F_σ и G_δ.

Лемма 1. *Для всякого замкнутого подмножества e пространства E_n, для произвольных чисел k и i и правильного куба $J_n \subset E_n$ соответствующая функция $v_0^{J_n}[e \cap \beta_i^{n-k}(q)]$, как функция точки $q \in \tau_i^k$, измерима по Лебегу.*

Доказательство. Фиксируем счетное множество $A \subset e$ всюду плотное (в e) и обозначим через σ_j^ε некоторый конечный набор открытых (в E_n) шаров, диаметры которых рациональны и по величине не превосходят $\varepsilon > 0$, и таких, что их теоретико-множественная сумма Σ_j^ε покрывает множество $e \cap J_n$. Такого рода системы шаров предполагаются перенумерованными; j следует понимать как номер системы. Нумерация возможна, поскольку различных систем указанного вида всего лишь счетное число. Понятно далее, что функция кратности $v_0^{J_n}[\Sigma_j^\varepsilon \cap \beta_i^{n-k}(q)]$ множества Σ_j^ε принимает лишь конечное число значений и может изменить свое значение лишь при переходе ее аргумента (точки q) через такую точку q_0, для которой соответствующая плоскость $\beta_i^{n-k}(q_0)$ касается либо некоторого шара из системы σ_j^ε, либо общей части какой-либо пары шаров той же системы, или же, наконец, в таком случае, когда $\beta_i^{n-k}(q_0)$ касается одной из $(n-1)$-мерных граней куба J_n. Это означает, что рассматриваемая функция кратности почти всюду непрерывна (а, следовательно, и измерима по Лебегу), поскольку указанное множество точек разрыва (точек, где функция кратности изменяет свое значение), очевидно, складывается из конечного числа $(k-1)$-мерных поверхностей, являющихся границами эллипсоидов и куба, т. е. имеет меру нуль.

Покажем теперь, что

$$v_0^{J_n}[e \cap \beta_i^{n-k}(q)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_j v_0^{J_n}[\Sigma_j^\varepsilon \cap \beta_i^{n-k}(q)].$$

Неравенство

$$v_0^{J_n}\left[e \cap \beta_i^{n-k}(q)\right] \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \, \inf_j \, v_0^{J_n}\left[\Sigma_j^\varepsilon \cap \beta_i^{n-k}(q)\right]$$

выполняется, поскольку любые две компоненты множества $e \cap \beta_i^{n-k}(q)$ при некотором (своем для каждой фиксированной пары компонент) достаточно малом ε оказываются лежащими в различных компонентах всякого множества $\Sigma_j^\varepsilon \cap \beta_i^{n-k}(q)$ (в силу замкнутости множества e). Чтобы доказать неравенство

$$v_0^{J_n}\left[e \cap \beta_i^{n-k}(q)\right] \geqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \, \inf_j \, v_0^{J_n}\left[\Sigma_j^{J_n} \cap \beta_i^{n-k}(q)\right],$$

сделаем некоторое построение.

Фиксируем конечный набор открытых (в E_n) шаров s_1, $s_2, \ldots, s_e$, принадлежащих некоторому набору σ_j^ε, каждый из которых содержит точки из $e \cap \beta_i^{n-k}(q)$, и таких, что их теоретико-множественная сумма σ_1 покрывает множество $e \cap \beta_i^{n-k}(q)$. Так как множество $(e \cap J_n) - \sigma_1$ замкнуто и не имеет общих точек с плоскостью $\beta_i^{n-k}(q)$, то набор шаров s_1, $s_2, \ldots, s_e$ можно дополнить до набора типа σ_j^ε шарами s_{l+1}, $s_{l+2}, \ldots, s_m$ столь малого диаметра, что $\sigma_2 = \bigcup_{j=l+1}^{m} s_j$ оказалось бы непересекающимся с плоскостью $\beta_i^{n-k}(q)$. Это означает, что при любом $\varepsilon > 0$ удалось отыскать такой набор σ_j^ε, для которого

$$v_0^{J_n}\left[e \cap \beta_i^{n-k}(q)\right] \geqslant v_0^{J_n}\left[(\sigma_1 \cup \sigma_2) \cap \beta_i^{n-k}(q)\right],$$

т. е. при всяком ε

$$\inf_j \, v_0^{J_n}\left[\Sigma_j^\varepsilon \cap \beta_i^{n-k}(q)\right] \leqslant v_0^{J_n}\left[e \cap \beta_i^{n-k}(q)\right].$$

Следовательно,

$$v_0^{J_n}\left[e \cap \beta_i^{n-k}(q)\right] \geqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \, \inf_j \, v_0^{J_n}\left[\Sigma_j^\varepsilon \cap \beta_i^{n-k}(q)\right].$$

Итак, доказано, что

$$v_0^{J_n}\left[e \cap \beta_i^{n-k}(q)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_j v_0^{J_n}\left[\Sigma_j^\varepsilon \cap \beta_i^{n-k}(q)\right].$$

А так как функции $\left\{v_0^{J_n}\left[\Sigma_j^\varepsilon \cap \beta_i^{n-k}(q)\right]\right\}$ почти всюду (на τ_i^k) непрерывны, то $v_0^{J_n}\left[e \cap \beta_i^{n-k}(q)\right]$ измерима по Лебегу. Лемма доказана.

Отметим, что в формулировке доказанной леммы условие правильности куба J_n легко снимается. Более того, лемма почти так же легко доказывается, если за J_n принять произвольную выпуклую область, или, например, тело с достаточно гладкой границей (достаточным оказывается наличие у границы k непрерывных производных).

§ 19. Определение вариации множества

Определение. *Вариацией порядка k множества $e \subset E_n$ внутри куба J_n назовем число*

$$v_k^{J_n}(e) = \frac{1}{C_n^k} \sum_{i=1}^{C_n^k} \int_{\tau_i^k} v_0^{J_n}\left[e \cap \beta_i^{n-k}(q)\right] dq = \frac{1}{C_n^k} \sum_{i=1}^{C_n^k} v_{\tau_i^k}^{J_n}(e).$$

Число

$$v_{\tau_i^k}^{J_n}(e) = \int_{\tau_i^k} v_0^{J_n}\left[e \cap \beta_i^{n-k}(q)\right] dq$$

называется *вариацией порядка k множества e (внутри куба J_n) относительно плоскости* τ_i^k $(0 \leqslant k \leqslant n;\ n = 1, 2, \ldots)$.

При $k = 0$ плоскость $\tau_i^k = \tau_1^0$ вырождается в точку, а $\beta_i^{n-k}(q) = \beta_1^n$ оказывается совпадающим со всем пространством E_n, т. е. нулевая вариация множества e внутри куба J_n оказывается равной числу компонент множества e, лежащих строго внутри куба J_n.

При $k = n$ $\tau_i^k = \tau_1^n = E_n$, а плоскость $\beta_i^{n-k}(q) = \beta_1^0(q) = q$ в таком случае вырождается в точку; функция кратности порядка n совпадает внутри куба J_n с характеристической

функцией множества e, т. е.

$$v_0^{J_n}[e \cap \beta_1^0(q)] = \begin{cases} 1, & \text{если } q \in e \cap J_n, \\ 0, & \text{если } q \overline{\in} e \cap J_n. \end{cases}$$

Таким образом, получается, что

$$v_n^{J_n}(e) = \int\limits_{J_n} v_0^{J_n}[e \cap \beta_1^0(q)]\, dq = \operatorname{mes}_n(e)$$

равна n-мерной мере Лебега части множества e, лежащей внутри куба J_n.

В силу леммы предыдущего параграфа для замкнутого множества $e \in E_n$ соответствующие функции кратности $\{v_0^{J_n}[e \cap \beta_i^{n-k}(q)]\}$ измеримы, а потому приведенное выше определение вариации для замкнутых множеств имеет смысл.

Нижеследующая теорема по существу представляет собой другое (индуктивное) определение вариации множества.

Теорема 1. *Для вычисления вариации $v_k^{J_n}(e)$ порядка k замкнутого множества e через вариаций сечений этого множества $v_l^{J_n \cap \beta_i^{n-k+l}(q)}[e \cap \beta_i^{n-k+l}(q)]$ порядка l имеет место следующая формула:*

$$v_k^{J_n}(e) = \frac{1}{C_n^{k-l}} \sum_{i=1}^{C_n^{k-l}} \int\limits_{\tau_i^{k-l}} v_l^{J_n \cap \beta_i^{n-k+l}(q)}[e \cap \beta_i^{n-k+l}(q)]\, dq =$$

$$= \frac{1}{C_n^{k-l}} \sum_{i=1}^{C_n^{k-l}} v_{k,\, \tau_i^{k-l}}^{J_n}(e),$$

где

$$v_{k,\, \tau_i^{k-l}}^{J_n}(e) = \int\limits_{\tau_i^{k-l}} v_0^{J_n \cap \beta_i^{n-k+l}(q)}[e \cap \beta_i^{n-k+l}(q)]\, dq$$

есть вариации порядка k множества e внутри куба J_n относительно $(k-l)$-мерной плоскости τ_i^{k-l} $(l = 0, 1, \ldots, k-1)$.

Доказательство этой теоремы легко получается из теоремы Фубини и леммы 1 § 18. Действительно,

$$v_k^{J_n}(e)=\frac{1}{C_n^k}\sum_{i=1}^{C_n^k}\int\limits_{\tau_i^k} v_0^{J_n}\left[e\cap\beta_i^{n-k}(q)\right](dm)^k=$$

$$=\frac{1}{C_n^k C_k^l}\sum_{i=1}^{C_n^k} C_k^l\int\limits_{\tau_i^k} v_0^{J_n}\left[e\cap\beta_i^{n-k}(q)\right](dm)^k=$$

$$=\frac{1}{C_n^k C_k^l}\sum_{i=1}^{C_n^k}\sum_{j=1}^{C_k^{k-l}}\int\limits_{\tau_j^{k-l}\subset\tau_i^k} C_{n-k+l}^l v_l^{J_n\cap\beta_i^{n-k+l}(q)}\left[e\cap\beta_i^{n-k+l}(q)\right](dm)^{k-l}$$

$$=\frac{C_{n-k+l}^l}{C_n^k C_k^l}\sum_{i=1}^{C_n^{k-l}}\int\limits_{\tau_i^{k-l}} v_l^{J_n\cap\beta_i^{n-k+l}(q)}\left[e\cap\beta^{n-k+l}(q)\right](dm)^{k-l}=$$

$$=\frac{1}{C_n^{k-l}}\sum_{i=1}^{C_n^{k-l}} v^{J_n}_{k,\,\tau_i^{k-l}}(e).$$

Теорема доказана.

Определение. Число $v^{J_n}(e)=\sum\limits_{k=0}^{n} v_k^{J_n}(e)$ назовем *вариацией множества $e\subset E_n$ внутри куба J_n.*

Такое объединение вариаций в одну характеристику, по-видимому, весьма мало естественно, но оно приведет в дальнейшем к упрощению записи некоторых выкладок.

Следствие 1. *Для всякого замкнутого множества $e\subset E_n$ при всяком k $(1\leqslant k\leqslant n)$ имеет место равенство*

$$v_k^{J_n}(e)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\tau_i^1} v_{k-1}^{J_n\cap\beta_i^{n-1}(q)}(e)\,dq=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v^{J_n}_{k,\,\tau_i^1}(e),$$

где

$$v^{J_n}_{k,\,\tau_i^1}(e) = \int\limits_{\tau_i^1} v^{J_n \cap \beta_i^{n-1}(q)}_{k-1}(e)\,dq$$

есть вариация порядка k множества e относительно прямой τ_i^1.

Это утверждение легко получается из теоремы 1, если положить $l = k - 1$.

Следствие 2. *Для вычисления вариации $v^{J_n}(e)$ множества $e \subset E_n$ можно пользоваться формулой*

$$v^{J_n}(e) = v_0^{J_n}(e) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\tau_i^1} v^{J_n \cap \beta_i^{n-1}(q)}(e)\,dq =$$

$$= v_0^{J_n}(e) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v^{J_n}_{\tau_i^1}(e),$$

где

$$v^{J_n}_{\tau_i^1}(e) = \int\limits_{\tau_i^1} v^{J_n \cap \beta_i^{n-1}(q)}(e)\,dq$$

есть (по определению) вариация множества e внутри куба J_n *относительно прямой τ_i^1, т. е. вариация множества равна среднему арифметическому вариаций того же множества относительно всех координатных осей плюс его нулевая вариация.*

Это утверждение легко получается из теоремы 1, если положить $l = k - 1$ и просуммировать по k вариации различных размерностей.

Полученная формула представляет собой индуктивное определение вариации множества.

§ 20. Простейшие свойства вариаций множества

Вариация $v_k^{J_n}(e)$ множества e как функция множества обладает следующими свойствами *):

*) Все встречающиеся в формулировках функции кратности будут предполагаться измеримыми.

1. $v^{J_n}(e)$ всегда неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда множество e не содержит внутренних точек куба J_n. Функция $v_k^{J_n}(e)$ также неотрицательна для всякого множества e и равна нулю тогда и только тогда (при условии, что $v_{k+1}^{J_n}(e)=0$), когда множество e не содержит внутренних точек куба J_n.

2. Вариация $v_k^{J_n}(e)$ есть полуаддитивная функция множества e, т. е.

$$v_k^{J_n}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} v_k^{J_n}(e_i),$$

и потому

$$v^{J_n}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} v^{J_n}(e_i).$$

3. Если множества $\{e_i\}$ попарно отстоят друг от друга на положительном расстоянии, то

$$v_k^{J_n}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} v_k^{J_n}(e_i)$$

и потому

$$v^{J_n}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} v^{J_n}(e_i).$$

4. Если правильные кубы $\{J_n^i\}$ все содержатся в правильном кубе J_n и попарно не имеют общих точек, то

$$v_k^{J_n}(e) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} v_k^{J_n^i}(e),$$

и потому

$$v^{J_n}(e) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} v^{J_n^i}(e).$$

5. Если Φ есть преобразование параллельного переноса, то

$$v_k^{\Phi(J_n)}[\Phi(e)] = v_k^{J_n}(e),$$

и потому

$$v^{\Phi(J_n)}[\Phi(e)] = v^{J_n}(e).$$

6. Если Ψ есть преобразование равномерного растяжения пространства E_n (с коэффициентом растяжения $l > 0$), то

$$v_k^{\Psi(J_n)}[\Psi(e)] = l^k v_k^{J_n}(e).$$

7. Если e есть полиэдр размерности k, то

$$A_n v_k^{J_n}(e) \leqslant \operatorname{mes}_k\left[e \cap \left(J_n - \overset{*}{J}_n\right)\right] \leqslant B_n v_k^{J_n}(e),$$

где $\overset{*}{J}_n$ есть граница куба J_n, а $A_n > 0$ и $B_n > 0$ — параметры, зависящие лишь от n.

8. Если мера Хаусдорфа $h^k(e)$ порядка k множества e равна нулю, то $v_k^{J_n}(e) = 0$. В частности, если e представляет собой непрерывно дифференцируемый образ k-мерного эвклидова пространства, то $v_{k+l}^{J_n}(e) = 0$ при всяком $l > 0$.

9. $v_0^{J_n}(e)$ определена для всякого множества $e \subset E_n$ и равна числу компонент множества e, лежащих строго внутри J_n.

10. $v_n^{J_n}(e)$ определена для всякого измеримого по Лебегу множества e, и для всякого такого множества

$$v_n^{J_n}(e) = \operatorname{mes}_n(e \cap J_n).$$

11. Если при всяком положительном $l \leqslant n - p$

$$v_{p+l}^{J_n}(e) = 0,$$

то на всякую $(p+1)$-мерную координатную плоскость множество e проектируется в множество $(p+1)$-мерной меры нуль.

12. Вариации множества $v_k^{J_n}(e)$ различных порядков независимы в том смысле, что для всяких наперед заданных неотрицательных чисел A_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$; A_0 — целое, а $A_n \leqslant \operatorname{mes}_n(J_n)$), некоторые из которых могут быть даже бесконечными, можно построить замкнутое множество $e \subset J_n$ такое, что $v_k^{J_n}(e) = A_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Свойства 1—11 легко получаются либо непосредственно из определений, либо из теоремы 1 (индукцией по числу n). Некоторую трудность представляет лишь доказательство пункта 12, которое будет приведено несколько ниже.

§ 21. Основная лемма о вариациях множества

Определение. *Глубиной погружения множества $e \subset E_n$ в куб $J_n \subset E_n$* назовем верхнюю грань (на множестве $e \cap J_n$) расстояния от точки из $e \cap J_n$ до границы J_n и обозначим ее $\Gamma(e, J_n)$.

Основным работающим результатом относительно вариации множества является сформулированная А. С. Кронродом [5] теорема, состоящая в том, что для всякого множества e и куба J_n можно указать $k\,(0 \leqslant k \leqslant n)$ такое, что

$$v_k^{J_n}(e) \geqslant A(n, k)\,[\Gamma(e, J_n)]^k,$$

где $A(n, k) > 0$ есть некоторая зависящая лишь от k и n константа. В приложениях важно знать точное выражение константы $A(n, k)$. Здесь мы вычислим уже достижимое значение $A(n, k)$.

Лемма 1. *Пусть e есть замкнутое множество из E_n, для которого существует некоторое целое неотрицательное число $p \leqslant n$ такое, что при всяком целом положительном $l \leqslant n - p$ соответствующая вариация $v_{p+l}^{J_n}(e) = 0$. Тогда можно указать числа $m_k \geqslant 0$ ($k = 0, 1, \ldots, p$, m_0 — целое) такие, что*

$$\sum_{k=0}^{p} m_k \geqslant 1$$

и при всяком $k \leqslant p$

$$v_k^{J_n}(e) \geqslant \frac{m_k}{C_n^k}\,[\Gamma(e, J_n)]^k.$$

Доказательство. Если $m_0 \neq 0$, то справедливость леммы очевидна, поэтому в дальнейшем будем предполагать $m_0 = 0$. В силу замкнутости множества e можно указать точку $q_n^* \subset J_n \cap e$, отстоящую от границы J_n^* куба J_n на величину $\Gamma(e, J_n) = A$. Пусть J_n' есть правильный куб со

стороной $2A$ и с центром в точке q'_n. Так как в силу свойства 4 § 20

$$v_k^{J'_n}(e) \leqslant v_k^{J_n}(e),$$

то, не уменьшая общности, желая лишь упростить обозначения, мы будем считать, что $J'_n = J_n$, т. е. будем далее предполагать, что центр куба J_n принадлежит множеству e и сторона куба $J_n = 2A$. Учитывая свойство 5 § 20, для дальнейшего мы можем также предполагать, что центр $q'_n = 0$ куба J_n совпадает с началом координат.

Обозначим через Ψ_i^k преобразование ортогонального проектирования пространства E_n на k-мерную координатную плоскость τ_i^k и положим $\Phi_i^k = (\Psi_i^k)^{-1}$. Обозначим далее через Y_i^k отображение куба $J_n \cap \tau_i^k$ в куб ω_i^k, которое точке $q_i^k \in J_n \cap \tau_i^k$ с координатами $\{x_j(q_i^k)\}$ ставит в соответствие точку $y(q_i^k)$ с координатами $y_j(q_i^k) = |x_j(q_i^k)|$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Куб ω_i^k играет чисто вспомогательную роль, и поэтому его можно предполагать лежащим в отличном от E_n n-мерном эвклидовом пространстве E_n^*. Прообраз всякой отличной от начала координат точки $y \in \omega_i^k$ состоит из 2^k симметрично расположенных (относительно $x = 0 = q'_n$) точек, модули каждой из координат которых постоянны для всех 2^k точек.

Если f есть некоторое множество из τ_i^k, то через f^* мы будем обозначать множество $Y^{-1}[Y(f)]$. Положим

$$e_i^k = \Psi_i^k(e)$$

и обозначим через $e_i^{k,+}$ лебеговское множество

$$\{v_0^{J_n}[e \cap \beta_i^{n-k}(q)] \geqslant 1\},$$

т. е. множество всех таких точек $q \in \tau_i^k \cap J_n$, для каждой из которых соответствующее множество $e \cap \beta_i^{n-k}(q)$ имеет хотя бы одну недотягивающуюся до границы куба $J_n \cap \beta_i^{n-k}(q)$ компоненту; и аналогично через $e_i^{k,0}$ обозначим множество

$$\{v_0^{J_n}[e \cap \beta_i^{n-k}(q)] = 0\}.$$

Оценим снизу величину

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{C_n^k} \operatorname{mes}_k \left(e_i^k\right).$$

Для этого введем вспомогательное множество

$$f_k = J_n - \bigcup_{l=1}^{k-1} \bigcup_{i_l=1}^{C_n^l} \Phi_{i_l}^l \left(e_{i_l}^{l,+,*}\right).$$

Из леммы 1 § 18 следует, что f_k измеримо по Лебегу. Представляя число $\operatorname{mes}_l \left(e_i^{l,+,*}\right) = m_i^l (2A)^l$ $(0 \leqslant m_i^l \leqslant 1)$, нетрудно усмотреть, что

$$\operatorname{mes}_n (f_k) \geqslant \operatorname{mes}_n (J_n) - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i_l=1}^{C_n^l} (2A)^{n-l} m_{i_l}^l (2A)^l =$$

$$= (2A)^n \left(1 - \sum_{l=1}^{k-1} m_l\right),$$

где $m_l = \sum_{i_l=1}^{C_n^l} m_{i_l}^l$. Покажем теперь, что множество f_k можно представить в виде $f_k = \bigcup_{i=1}^{C_n^k} f_{i,k}$ так, что при всяком i множество $\Psi_i^k (f_{i,k})$ содержалось бы в e_i^k. Для этого фиксируем произвольную точку $q \in f_k$ и положим $q_i^l = \Psi_i^l (q)$. Пары плоскостей $\Phi_i^1 \left(q_i^{1,*}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ вырезают из J_n параллелепипед $\omega (q)$. Центр этого параллелепипеда совпадает с началом координат, а совокупность его вершин совпадает с множеством $q^* \subset f_k$. А так как начало координат принадлежит множеству e, то (в частности) компонента множества e, содержащая начало координат (центр параллелепипеда $\omega (q)$), должна дотягиваться до границы куба J_n, и, следовательно, должна пересекать одну из $(n-1)$-мерных граней параллелепипеда $\omega (q)$. Пусть для определенности эта грань лежит

в плоскости $\beta_1^{n-1}(q_1^1) = \Psi_1^1(q_1^1)$. Так как q_1^1, в силу определения множества f_k, принадлежит множеству $e_1^1 - e_1^{1,+,*}$, т. е. принадлежит $e_1^{1,0}$, а также потому, что $\omega(q) \cap \beta_1^{n-1}(q_1^1)$, как уже указывалось, пересекается с множеством e в некоторой точке a_1, то компонента множества $e \cap \beta_1^{n-1}(q_1^1)$, содержащая точку a_1, должна выходить на границу куба $J_n \cap \beta_i^{n-1}(q_1^1)$ и, следовательно, должна пересекать некоторую $(n-2)$-мерную грань параллелепипедов $\omega(q)$ и $\omega(q) \cap \beta_1^{n-1}(q_1^1)$. Рассуждая таким образом далее, мы получим, что e пересекается с некоторой $(n-k)$-мерной гранью параллелепипеда $\omega(q)$ в некоторой точке a_k. Эта $(n-k)$-мерная грань лежит в некоторой $(n-k)$-мерной плоскости $\beta_j^{n-k}(q') = \Phi_j^k(q')\,(q' \in q_j^{k,*})$, которая ортогональна координатной плоскости τ_j^k. В таком случае фиксированную ранее точку q и все множество $q^* \subset f_k$ включим в $f_{j,k}$ и это примем за определение множеств $\{f_{i,k}\}$. Таким образом всякая точка $q \in f_k$ вместе с q^* попадает хотя бы в одно из множеств $\{f_{i,k}\}$. Положим $f_i^k = \Psi_i^k\,(f_{i,k})$. Так как при проектировании Ψ_j^k множества $q^* \subset f_{i,k}$ хотя бы одна точка $q\,(q \in q^*)$ попадает в точку $q'\,(q' \in e_j^k)$, то $\Psi_j^k(q^*) \subset e_j^{k,*}$, и, следовательно,

$$f_j^k \subset e_j^{k,*} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ C_n^k).$$

А тогда из теоремы Фубини и того, что

$$\operatorname{mes}_n(f_k) \geqslant (2A)^n\left(1 - \sum_{l=0}^{k-1} m_l\right),$$

получаем:

$$\sum_{i=1}^{C_n^k} \operatorname{mes}_k(e_i^{k,*}) \geqslant \sum_{i=1}^{C_n^k} \operatorname{mes}_k(f_i^k) \geqslant \sum_{i=1}^{C_n^k} \frac{\operatorname{mes}_n(f_{i,k})}{(2A)^{n-k}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(2A)^{n-k}} \operatorname{mes}_n(f_n) \geqslant (2A)^k\left(1 - \sum_{l=0}^{k-1} m_l\right),$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{C_n^k} \operatorname{mes}_k(e_i^{k,*}) \geqslant (2A)^k\left(1 - \sum_{l=0}^{k-1} m_l\right).$$

А так как при всяком i $\operatorname{mes}_k(e_i^k) \geqslant \frac{1}{2^k} \operatorname{mes}_k e_i^{k,*}$) то получаем, что

$$\sum_{i=1}^{C_n^k} \operatorname{mes}_k(e_i^k) \geqslant A^k\left(1 - \sum_{l=0}^{k=1} m_l\right).$$

Это неравенство имеет место при любом $k \leqslant n$.

Так как при всяком $l > 0$ ($l \leqslant n - p$) соответствующая вариация $v_{p+l}^{J_n}(e) = 0$ (см. формулировку леммы), то либо (при $p = n$)

$$\operatorname{mes}_p(e_i^{p,+}) = \sum_{i=1}^{C_n^p} \operatorname{mes}_p(e_i^p) = \operatorname{mes}_n(e_1^n) = m_p A^p,$$

т. е.

$$A^p m_p \geqslant A^p\left(1 - \sum_{l=0}^{p-1} m_l\right),$$

либо (при $p < n$)

$$\sum_{i=1}^{C_n^{p+1}} \operatorname{mes}_{p+1}(e_i^{p+1}) = 0$$

(это легко доказывается индукцией по числу n), т. е.

$$0 \geqslant A^{p+1}\left(1 - \sum_{l=0}^{p} m_l\right).$$

В обоих случаях получаем, что

$$\sum_{k=0}^{p} m_k \geqslant 1.$$

Из определения вариации получаем

$$v_k^{J_n}(e) \geqslant \frac{1}{C_n^k} \sum_{i=1}^{C_n^k} \operatorname{mes}_k(e_i^{k,+}) = \frac{m_k}{C_n^k} A^k,$$

где $\sum_{k=0}^{p} m_k \geqslant 1$. Лемма доказана.

В следующем параграфе мы покажем, что даваемая леммой 1 оценка достижима. Сейчас же сформулируем некоторые простейшие следствия леммы 1.

Лемма 2. *Если множество e удовлетворяет условиям леммы* 1, *то существует* k $(0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n)$ *такое, что*

$$v_k^{J_n}(e) \geqslant \frac{[\Gamma(e, J_n)]^k}{pC_n^k} \quad \text{при} \quad p \neq 0$$

и

$$v_k^{J_n}(e) \geqslant 1 \quad \text{при} \quad p = 0.$$

Лемма 3. *Если множество e удовлетворяет условиям леммы* 1 *и* $\Gamma(e, J_n) \leqslant 1$, *то*

$$v^{J_n}(e) \geqslant \frac{[\Gamma(e, J_n)]^p}{2^n}.$$

Лемма 4. *Если множество e удовлетворяет условиям леммы* 1, *то существует* k $(0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n)$ *такое, что*

$$v_k^{J_n}(e) \geqslant \frac{[\Gamma(e, J_n)]^k}{2^k C_n^k}.$$

Леммы 2—4 легко получаются из леммы 1.

§ 22. Независимость вариаций множества

Покажем, прежде всего, что оценку вариаций множества e в кубе J_n через глубину погружения этого множества внутрь J_n, даваемую леммой 1 § 21, улучшить нельзя.

Для этого фиксируем произвольный набор неотрицательных чисел m_k $(k = 0, 1, \ldots, p;\ p \leqslant n)$ таких, что $\sum_{k=0}^{p} m_k \geqslant 1$ (m_0 — целое), и A $\left(0 < A \leqslant \frac{1}{2}\rho,\ \rho \text{ — сторона куба } J_n\right)$ и построим в кубе J_n замкнутое множество $e = e(m_0, m_1, \ldots, m_p)$, погруженное в куб J_n на глубину $\Gamma(e, J_n) = A$, для которого

$$v_k^{J_n}(e) = \frac{m_k}{C_n^k} A^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, p),$$

$$v_{p+1}^{J_n}(e) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n - p + 1).$$

Лемма 1. *Пусть заданы числа* $A > 0$, $m_k \geqslant 0$ ($k = 0, 1, \ldots, p$; $p \leqslant n$; m_0 — *целое*) *такие, что* $\sum_{k=0}^{p} m_k = 1$. *Тогда существует замкнутое множество* e, *лежащее в* n-*мерном замкнутом кубе* J_n^{2A} *со стороной* $2A$, *содержащее центр куба* J_n^{2A} *и такое, что*

$$v_k^{J_n^{2A}}(e) = \frac{m_k A^k}{C_n^k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, p),$$

$$v_{p+l}^{J_n^{2A}}(e) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-p).$$

Доказательство. В качестве куба J_n^{2A} примем правильный куб из E_n, задаваемый неравенствами

$$-A \leqslant x_i \leqslant A \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Положим

$$\mu_i = \frac{1 - \sum_{k=0}^{i} m_k}{1 - \sum_{k=0}^{i=1} m_k}$$

и в качестве множества $e = e\,(m_0, m_1, \ldots, m_p)$ примем множество $e = \bigcup_{k=0}^{p} \omega_k$, где ω_k при $k = 0$ есть центр куба ω, а в общем случае — k-мерный параллелепипед, определяемый соотношениями

$$A \geqslant x_i \geqslant \mu_i A \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1),$$

$$A \geqslant x_k \geqslant 0,$$

$$x_i = 0 \qquad (i = k+1, k+2, \ldots, n).$$

Нетрудно проверить, что

$$v_k^{J_n^{2A}}(e) = \frac{m_k A^k}{C_n^k} \qquad (0 \leqslant k \leqslant p),$$

$$v_k^{J_n^{2A}}(e) = \frac{1-\mu_k}{C_n^k} A^k \prod_{i=0}^{k-1} \mu_i \qquad (k \geqslant 2),$$

$$v_{p+l}^{J_n^{2A}}(e) = 0 \qquad (l > 0).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть заданы числа* $A\left(0<A<\frac{\rho}{2}\right)$ *и* $m_k \geqslant 0$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, *такие, что* m_0 — *целое,* $\sum_{k=0}^{n} m_k \geqslant 1$ *и* $m_n=0$. *Тогда во всякий правильный куб со стороной* ρ *можно вложить замкнутое множество* e, *такое, что*

$$\Gamma\left(e, J_n^\rho\right)=A, \quad v_k^{J_n^\rho}(e)=\frac{m_k\left[\Gamma\left(e, J_n^\rho\right)\right]^k}{C_n^k} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство. Так как $\sum_{k=0}^{n} m_k \geqslant 1$, то можно фиксировать набор неотрицательных чисел $\{m'_k\}$ таких, что m'_0 целое $\sum_{k=0}^{n} m'_k=1$ и $m'_k \leqslant m_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$. Обозначим через J_n^{2A} правильный куб со стороной $2A$, лежащий в кубе J_n^ρ и имеющий с этим кубом одну общую вершину.

Из предыдущей леммы следует, что в куб J_n^{2A} можно вложить такое замкнутое множество e', что

$$\Gamma\left(e', J_n^\rho\right)=\Gamma\left(e, J_n^{2A}\right)=A,$$

$$v_k^{J_n^\rho}(e')=v_k^{J_n^{2A}}(e')=\frac{m'_k A^k}{C_n^k} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Для этого достаточно построенное в доказательстве леммы 1 множество ориентировать в кубе J_n^{2A} (или повернуть соответствующим образом куб J_n^{2A} вместе с множеством) таким образом, чтобы все грани (различных размерностей) куба J_n^{2A}, имеющие непустое пересечение с множеством e', содержали в себе одну (общую для всех указанных граней) вершину a_0 куба J_n^ρ.

Обозначим через J_n^A правильный куб со стороной A, лежащий в кубе J_n^ρ и имеющий с этим кубом общую вершину a_0^*, симметричную (относительно центра куба J_n^ρ) вершине a_0. Куб J_n^A может иметь с множеством e' не более

чем одну общую точку. Такою точкой может быть только центр куба J_n^ρ, если $\rho = 2A$. Множество e зададим в виде $e = e' + \bigcup_{k=0}^{n-1} e_k$. Множество e' уже определено.

Далее, для определенности будем считать, что куб J_n^ρ вложен в пространство E_n таким образом, что его вершина a_0^* совпадает с началом координат, а одномерные ребра расположены на положительных частях координатных осей. Положим

$$m_k'' = m_k - m_k', \qquad n_0 = m_0'', \qquad n_k = 2\left[2^k m_k'' + 1\right],$$

$$\rho_k = \sqrt[k]{\frac{m_k'' A^k}{n_k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Нетрудно проверить, что $\rho_k \leqslant \frac{A}{2}$.

Обозначим через $\omega_{i_k}^k$ k-мерный куб, задаваемый соотношениями:

$$0 \leqslant x_i \leqslant \rho_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

$$x_j = \frac{A}{2} \qquad (j = k+1, \ldots, n-1),$$

$$x_n = \left(i_k + \sum_{l=0}^{k-1} n_l\right)^{-1} A$$

$$(i_k = 1, 2, \ldots, n_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Так как m_0 и m_0' — целые числа и $m_0' \leqslant m_0$, то $m_0'' = m_0 - m_0'$ — неотрицательное целое число. Положим

$$e_k = \bigcup_{i_k=1}^{n_k} \omega_{i_k}^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$e = e' + \bigcup_{k=0}^{n-1} e_k.$$

Вычислим теперь вариации множества e. По определению, каждое из множеств $\omega_{i_0}^0$ состоит из одной внутренней

точки куба J_n^A и при различных i_0 эти точки различны, т. е

$$v_0^{J_n^A}(e_0) = n_0 = m_0''.$$

Так как

$$v_0^{J_n^A}(e_0) = m_0'',$$

$$v_0^{J_n^{2A}}(e') = m_0',$$

то

$$v_0^{J_n^\rho}(e' + e_0) = m_0' + m_0'' = m_0.$$

А так как каждый из кубов $\{\omega_{i_k}^k\}$ $(k > 0)$ имеет общие точки с границей куба J_n^ρ, то

$$v_0^{J_n^\rho}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} e_k\right) = 0,$$

следовательно,

$$v_0^{J_n^\rho}(e) = v_0^{J_n^\rho}(e' + e_0) + v_0^{J_n^\rho}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} e_k\right) = v_0^{J_n^\rho}(e' + e_0) = m_0.$$

Так как

$$x_n(\omega_{i_k}^k) = \left(i_k + \sum_{l=0}^{k-1} n_l\right)^{-1} A = \text{const}$$

и при различных $\{k, i_k\}$ координата $x_n(\omega_{i_k}^k)$ принимает различные значения, то в силу п. 3 § 20

$$v_k^{J_n^\rho}(e) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i_l=1}^{n_l} v_l^{J_n^\rho}(\omega_{i_l}^l).$$

Так как ребра куба $\omega_{i_k}^k$ попарно параллельны координатным осям $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а каждая из координат $x_{k+1}, \ldots, x_n$ постоянна на кубе $\omega_{i_k}^k$, то на координатную плоскость τ_1^k, натянутую на векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k$, множество $\omega_{i_k}^k$ проектируется в k-мерный куб со стороной ρ, а на всякую координатную плоскость τ_i^k, содержащую хотя бы один из векто-

ров x_j $(j > k)$, куб $\omega_{i_k}^k$ проектируется в множество, лежащее в $(k-1)$-мерной плоскости ($x_j = \text{const}$), т. е. в множество, k-мерная мера которого равна нулю. Следовательно,

$$v_k^{J_n^\rho}\left(\omega_{i_k}^k\right) = \frac{1}{C_n^k}\sum_{i=1}^{C_n^k} v_{\tau_i^k}^{J_n^\rho}\left(\omega_{i_k}^k\right) = \frac{1}{C_n^k} v_{\tau_1^k}^{J_n^\rho}\left(\omega_{i_k}^k\right) =$$

$$= \frac{1}{C_n^k}(\rho_k)^k = \frac{m_k'' A^k}{C_n^k n_k}.$$

Так как $\omega_{i_k}^k$ на всякую $(k+l)$-мерную $(l > 0)$ координатную плоскость проектируется в множество нулевой меры (m^{k+l}), то

$$v_{k+l}^{J_n^\rho}\left(\omega_{i_k}^k\right) = 0 \qquad (l > 0).$$

Фиксируем теперь $(k-l)$-мерную координатную плоскость τ_i^{k-l} $(0 < l \leqslant k)$. Если τ_i^{k-l} содержит хотя бы один вектор из $x_{k+1}, \ldots, x_n$, например x_{k+1}, то $\Psi_i^{k-l}\left(\omega_{i_k}^k\right)$ оказывается принадлежащим $(k-l-1)$-мерной плоскости $x_{k+1} = \text{const}$, т. е. в таком случае

$$v_{\tau_i^{k-1}}^{J_n^\rho}\left(\omega_{i_k}^k\right) = 0.$$

Если же τ_i^k не содержит ни одного из векторов $x_{k+1}, \ldots, x_n$, то для всякой точки $q \in \tau_i^{k-l}$ соответствующая плоскость $\beta_i^{n-k+l}(q)$ либо вовсе не пересекается с множеством, $\omega_{i_k}^k$, либо это пересечение $\omega_{i_k}^k \cap \beta_i^{n-k+l}(q)$ является l-мерным кубом, имеющим общие точки с границей куба J_n^ρ, т. е. и в данном случае $v_{\tau_i^{k-l}}^{J_n^\rho}\left(\omega_{i_k}^k\right) = 0$.

Таким образом, при всяком $l > 0$ и i

$$v_{\tau_i^{k-l}}^{J_n^\rho}\left(\omega_{i_k}^k\right) = 0,$$

следовательно,

$$v_{k-1}^{J_n^\rho}\left(\omega_{i_k}^k\right)=\frac{1}{C_n^{k-l}}\sum_{i=1}^{C_n^{k-l}} v_{\tau_i^{k-l}}^{J_n^\rho}\left(\omega_{i_k}^k\right)=0,$$

т. е. при всяком $m \neq k$

$$v_m^{J_n^\rho}\left(\omega_{i_k}^k\right)=0,$$

$$v_k^{J_n^\rho}\left(\omega_{i_k}^k\right)=\frac{m_k'' A^k}{C_n^k n_k}.$$

А так как все множества e', $\left\{\omega_{i_k}^k\right\}$ попарно отстоят друг от друга на положительном расстоянии, то

$$v_k^{J_n^\rho}=v_k^{J_n^\rho}(e')+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i_k=1}^{n_k} v_k^{J_n^\rho}\left(\omega_{i_k}^k\right)=$$

$$=v_k^{J_n^\rho}(e')+\sum_{i_n=1}^{n_k} v_k^{J_n^\rho}\left(\omega_{i_k}^k\right)=\frac{m_k' A^k}{C_n^k}+\frac{m_k m_k'' A^k}{C_n^k n_k}=$$

$$=\frac{\left(m_k'+m_k''\right)A^k}{C_n^k}=\frac{m_k A^k}{C_n^k}.$$

Так как множества e' и $\left\{\omega_{i_k}^k\right\}$ замкнуты, то замкнуто и множество e, являющееся их суммой. А из того, что $\left\{\omega_{i_k}^k \subset J_n^A\right\}$ и $\Gamma\left(e', J_n^\rho\right)=A$, получаем, что

$$\Gamma\left(e, J_n^\rho\right)=A.$$

Лемма доказана.

Леммы 1 и 2 являются доказательством того, что даваемая леммой 1 § 21 оценка

$$\sum_{k=0}^{n} m_k \geqslant 1$$

улучшена быть не может.

Теорема 1. *Вариации множества различных порядков независимы в том смысле, что для всяких наперед заданных чисел* $\rho > 0$ *и* $0 \leqslant A_k \leqslant +\infty$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n$, A_0 — *целое число*, $A_n < \rho^n)$ *можно построить замкнутое множество* e, *лежащее в кубе* J_n^ρ, *такое, что*

$$v_k^{J_n^\rho}(e) = A_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Доказательство. Обозначим через J_n^r правильный куб, концентричный кубу J_n^ρ, со стороной

$$r = \sqrt[n]{\rho^n - A_n} > 0.$$

Множество e определим в виде

$$e = \bigcup_{m=0}^{\infty} e_m.$$

За e_0 примем замыкание множества $J_n^\rho - J_n^r$.

Фиксируем теперь последовательность правильных кубов $J_n^{r_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, обладающих следующими свойствами:

1. Все числа $\{r_m\}$ положительны и

$$\sum_{m=1}^{\infty} r_m \leqslant r.$$

2. Каждый из кубов $J_n^{r_m} \subset J_n^r$ одной из своих $(n-1)$-мерных граней примыкает к границе куба J_n^r.

3. Кубы $\{J_n^{r_m}\}$ попарно не пересекаются.

Фиксируем систему неотрицательных чисел

$$A_k^m \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ m = 1, 2, \ldots)$$

таких, что

а) $$A_k^1 = \begin{cases} A_k, & \text{если } A_k < +\infty, \\ 1, & \text{если } A_k = +\infty; \end{cases}$$

б) при $m > 1$ $$A_k^m = \begin{cases} 0, & \text{если } A_k < \infty, \\ 1, & \text{если } A_k = +\infty, \end{cases}$$

в) $$A_n^m = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$m_k^m = \frac{A_k^m C_n^k}{\left(\frac{r_m}{2}\right)^k}.$$

По аналогии с тем, как это делалось в лемме 2, можно построить замкнутое множество e_m, лежащее в кубе $J_n^{r_m}$, имеющее общие точки лишь с теми гранями куба $J_n^{r_m}$, которые принадлежат границе куба J_n^r, и такое, что

$$v_k^{J_n^r}(e_m) = v_k^{J_n^{r_m}}(e) = \frac{m_k^m \left(\frac{r_m}{2}\right)^k}{C_n^k} = A_k^m \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Положим $e = \bigcup_{m=0}^{\infty} e_m$. Так как множества e_m $(m = 1, 2, \ldots)$ замкнуты, то в силу условий 1 и 2 множество e должно быть также замкнутым, поскольку все предельные точки множества $\bigcup_{m=1}^{\infty} e_m$, не принадлежащие этому множеству, принадлежат границе куба J_n^r, а следовательно, и множеству e_0.

Нетрудно убедиться, что при $k < n$

$$v_k^{J_n^\rho}(e) = v^{J_n^r}(e),$$

$$v_n^{J_n^\rho}(e) = v_n^{J_n^r}(e) + (\rho^n - r^n) = (\rho^n - r^n) = A_n.$$

Из предположения, что e_m имеет общие точки лишь с теми гранями $J_n^{r_m}$, которые принадлежат границе куба J_n^r, следует, что

$$v_k^{J_n^r}(e_m) = v_k^{J_n^{r_m}}(e_m) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому, в силу п. 3 § 20, имеем при $k < n$

$$v_k^{J_n^\rho}(e) = v_k^{J_n^r}(e) = \sum_{m=1}^{\infty} v_k^{J_n^{r_m}}(e_m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m_k^m \left(\frac{r_m}{2}\right)^k}{C_n^k} = \sum_{m=1}^{\infty} A_k^m = A_k$$

(см. условия а) и б)).

Теорема доказана.

§ 23. Метрический закон двойственности

Вариации множеств, в отличие от прочих метрических характеристик, обладают тем замечательным свойством, что по их величинам можно судить о метрических характеристиках дополнения к множеству. Точнее, это свойство состоит в том, что вариация одного множества, аппроксимирующего другое с некоторой точностью ε, должна быть достаточно велика относительно ε-энтропии аппроксимируемого множества. Здесь будут приведены конкретные оценки, выражающие эту связь.

Мы ограничимся рассмотрением подмножеств эвклидовых пространств. Метрику в пространстве E_n определим как максимум модуля по координатной разности точек, т. е. в качестве расстояния $\rho_{E_n}(x', x'')$ между точками x' и x'' из E_n примем $\max\limits_i |x_i' - x_i''|$. Чтобы отличать такого рода пространство от эвклидова пространства с обычной метрикой $\left(\rho_{E_n}(x', x'') = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i' - x_i'')^2}\right)$, мы будем обозначать его через E_n^C. Указанный способ определения расстояния между точками будем называть метрикой C. В тех случаях, когда придется рассматривать расстояние между точками, лежащими в какой-либо координатной плоскости пространства E_n^C, будет иметься в виду опять же метрика C. В качестве меры в пространстве E_n^C примем обычную

лебеговскую меру $\mathrm{mes}_n(e) = m^n(e)$ и под знаком $\int\limits_e$ будем понимать обычный интеграл Лебега.

Лемма 1. *Пусть f есть произвольное подмножество куба $J_n \subset E_n^C$, отстоящее от границы этого куба не меньше чем на $2\varepsilon > 0$, а e — замкнутое множество из E_n^C такое, что*

$$v_{p+l}^{J_n}(e) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-p;\ p \leqslant n)$$

и при всяких $k\,(0 \leqslant k \leqslant p)$ и $q \in \tau_i^k$ (см. обозначения в начале главы) *выполняется неравенство*

$$v_0^{J_n}\left[e \cap \beta_i^{n-k}(q)\right] \leqslant v.$$

Тогда, если множество e аппроксимирует *) *f с точностью до ε, то найдется k, для которого справедливо неравенство*

$$v \geqslant \frac{1}{(p+1)^2\, 6^k C_n^k} \frac{n_{2\varepsilon}(f)}{n_\varepsilon^k(f)} \geqslant \frac{12^{-n}}{(p+1)^2} \frac{n_{2\varepsilon}(f)}{n_\varepsilon^k(f)}$$

$(0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n)$; $n_{2\varepsilon}(f)$ — см. § 5), *где $n_\varepsilon^k(f)$ есть максимум (по i) числа $N_\varepsilon\left[\Psi_i^k(f)\right]$* ($\Psi_i^k$ — преобразование ортогонального проектирования на плоскость τ_i^k или на соответствующую грань куба J_n).

Доказательство. Фиксируем в множестве f максимальную систему $S_{2\varepsilon}(f)$ точек, попарно удаленных друг от друга более чем на 4ε. По определению, множество $S_{2\varepsilon}(f)$ состоит из $N_{2\varepsilon}(f)$ точек (см. § 5). Обозначим через ω_l и ω_l^* правильные замкнутые кубы из E_n^C со сторонами 4ε и 2ε (соответственно), имеющие общий центр в точке $a_l \in S_{2\varepsilon}(f)$. Так как множество e аппроксимирует f с точностью до ε, то каждый из кубов $\{\omega_l^*\}$ обязан содержать точки из e, т. е. множество e погружается в каждый из кубов $\{\omega_l\}$ не менее чем на ε. А тогда из того, что кубы $\{\omega_l\}$ не имеют попарно

*) Это означает, что всякий правильный замкнутый куб со стороной 2ε и центром на множестве f содержит хотя бы одну точку множества e.

общих точек (поскольку расстояние в метрике C между их центрами строго больше, чем длина их стороны), из того, что все кубы $\{\omega_l\}$ лежат внутри J_n (поскольку f отстоит от границы куба J_n не менее чем на 2ε), следует (см. лемму 2 § 21), что существует k такое, что для некоторых $\frac{n_{2\varepsilon}(f)}{p+1}$ кубов из $\{\omega_l\}$ имеет место неравенство

$$v_k^{\omega_l}(e) \geqslant \frac{[\Gamma(e, \omega_l)]^k}{(p+1)\, C_n^k} \geqslant \frac{\varepsilon^k}{(p+1)\, C_n^k}.$$

Обозначим через ω теоретико-множественную сумму кубов из $\{\omega_l\}$, для которых выполняется последнее неравенство. Собирая предыдущие неравенства, получаем:

$$v_k^{\omega}(e) \geqslant \frac{\varepsilon^k}{(p+1)\, C_n^k} \frac{n_{2\varepsilon}(f)}{p+1} = \frac{\varepsilon^k n_{2\varepsilon}(f)}{(p+1)^2\, C_n^k}.$$

Обозначим через $\gamma_{i,\varepsilon}^k$ множество всех точек плоскости τ_i^k, удаленных (в смысле метрики C) от множества $\Psi_i^k(f)$ не более чем на 2ε. Понятно, что $\Psi_i^k(\omega) \subset \gamma_{i,\varepsilon}^k$ и, следовательно,

$$\operatorname{mes}_k\left[\Psi_i^k(\omega)\right] \leqslant \operatorname{mes}_k\left(\gamma_{i,\varepsilon}^k\right).$$

Фиксируем наиболее экономное 2ε-покрытие множества $\Psi_i^k(f)$ его подмножествами $\{\sigma_{i,m}^k\}$ $(m = 1, 2, \ldots, N_\varepsilon[\Psi_i^k(f)])$. Так как множество $\sigma_{i,m}^k$, по определению, имеет диаметр (в метрике C), не превосходящий 2ε, то существует k-мерный замкнутый куб $\omega_{i,m}^k \subset \tau_i^k$, со стороной не более чем 2ε такой, что $\sigma_{i,m}^k \subset \omega_{i,m}^k$. Обозначим $\omega_{i,m}^{k,*}$ k-мерный замкнутый куб из τ_i^k, концентричный кубу $\omega_{i,m}^k$ и имеющий сторону, равную 6ε. Так как всякая точка x множества $\gamma_{i,\varepsilon}^k$ (по определению $\gamma_{i,\varepsilon}^k$) удалена от множества $\Psi_i^k(f)$ не более чем на 2ε, то некоторый из кубов $\{\omega_{i,m}^k\}$ удален от точки x не более чем на 2ε, а поэтому соответствующий куб $\omega_{i,m}^{k,*}$ должен содержать точку x, т. е.

$$\gamma_{i,\varepsilon}^k \subset \bigcup_m \omega_{i,m}^{k,*}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{mes}_k\left(\gamma_i^k\right) \leqslant \sum_m m_k\left(\omega_{i,m}^{k,*}\right) = 6\,(\varepsilon)^k N_\varepsilon\left[\Psi_i^k(f)\right] \leqslant (6\varepsilon)^k n_\varepsilon^k(f).$$

А так как

$$v_k^\omega(e) \leqslant \frac{v}{C_n^k} \sum_{i=1}^{C_n^k} \operatorname{mes}_k\left(\gamma_i^k\right) \leqslant v\,(6\varepsilon)^k n_\varepsilon^k(f),$$

то из вышедоказанного неравенства

$$v_k^\omega(e) \geqslant \frac{\varepsilon^k n_{2\varepsilon}(f)}{(p+1)^2 C_n^k}$$

получаем:

$$v\,(6\varepsilon)^k n_\varepsilon^k(f) \geqslant \frac{\varepsilon^k n_{2\varepsilon}(f)}{(p+1)^2 C_n^k},$$

т. е.

$$v \geqslant \frac{1}{6^k (p+1)^2 C_n^k} \frac{n_{2\varepsilon}(f)}{n_\varepsilon^k(f)} \geqslant \frac{12^{-n}}{(p+1)^2} \frac{n_{2\varepsilon}(f)}{n_\varepsilon^k(f)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть f есть произвольное подмножество куба J_n, отстоящее от его границы не меньше чем на 2ε, а e — замкнутое подмножество из E_n^C $\left(E_n^C \supset J_n\right)$, для которого при $l = 1, 2, \ldots, n-p$ $(p \leqslant n)$*

$$v_{p+l}^{J_n}(e) = 0$$

и при всяких k $(0 \leqslant k \leqslant p)$ и $q \in \tau_i^k$

$$v_0^{J_n}\left[e \cap \beta_i^{n-k}(q)\right] \leqslant v.$$

Тогда, если множество e аппроксимирует f с точностью до ε, то существует $k \leqslant p$ такое, что

$$v \geqslant \frac{\varepsilon^k}{(p+1)^2 C_n^k} \frac{n_{2\varepsilon}(f)}{\rho^k},$$

где ρ есть сторона куба J_n.

Доказательство. По аналогии с тем, как это делалось при доказательстве леммы 1, легко доказать суще-

ствование k такого, что

$$v_k^{\omega}(e) \geqslant \frac{\varepsilon^k}{(p+1)\,C_n^k}\,\frac{n_{2\varepsilon}(f)}{p+1}.$$

А так как $v_k^{\omega}(e) \leqslant v_k^{J_n}(e) \leqslant v\rho^k$ (см. п. 4 § 20), то

$$v \geqslant \frac{\varepsilon^k}{(p+1)^2\,C_n^k}\,\frac{n_{2\varepsilon}(f)}{\rho^k}.$$

Лемма 3. *Пусть f есть произвольное подмножество куба $J_n \subset E_n^C$, удаленное от его границы не меньше чем на 2ε, а e — замкнутое подмножество пространства E_n^C такое, что*

$$v_{p+l}^{J_n}(e) = 0 \qquad (l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-p;\ p \leqslant n).$$

Тогда, если множество e аппроксимирует f с точностью до ε $(0 < \varepsilon \leqslant 1)$, то

$$v^{J_n}(e) \geqslant \frac{\varepsilon^p}{2^n}\,n_{2\varepsilon}(f).$$

Доказательство. Используя обозначения доказательства леммы 1, имеем:

$$v^{\omega_l}(e) = \sum_{k=0}^{n} v_k^{\omega_l}(e) = \sum_{k=0}^{p} v_k^{\omega_l}(e) = \sum_{k=0}^{p} \frac{m_k^l\,[\Gamma(e,\ \omega_l)]^k}{C_n^k},$$

где

$$m_k^l = \frac{v_k^{\omega_l}(e)\,C_n^k}{[\Gamma(e,\ \omega_l)]^k}.$$

В силу леммы 1 § 21 $\sum\limits_{k=0}^{p} m_k^l \geqslant 1$. Поэтому в силу п. 4 § 20 получаем:

$$v^{J_n}(e) \geqslant \sum_{l=1}^{n_{2\varepsilon}(f)} v^{\omega_l}(e) = \sum_{l=1}^{n_{2\varepsilon}(f)} \sum_{k=0}^{p} \frac{m_k^l\,[\Gamma(e,\ \omega_l)]^k}{C_n^k} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{l=1}^{n_{2\varepsilon}(f)} \sum_{k=0}^{p} \frac{m_k^l\,\varepsilon^k}{2^n} \geqslant \frac{\varepsilon^p}{2^n} \sum_{l=1}^{n_{2\varepsilon}(f)} \sum_{k=0}^{p} m_k^l \geqslant \frac{\varepsilon^p}{2^n}\,n_{2\varepsilon}(f).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть J_n^ρ есть правильный куб со стороной $\rho \leqslant 1$, а e — его некоторое замкнутое подмножество такое, что $v_{p+l}^{J_n^\rho}(e) = 0$ $(l = 1, 2, \ldots, n-p;\ p < n)$.*

Тогда в $J_n^\rho - e$ можно вписать правильный n-мерный замкнутый куб J_n^d со стороной

$$d \geqslant \frac{\rho^{\frac{n}{n-p}}}{3 + \sqrt[n-p]{6^n v^{J_n^\rho}(e)}}.$$

Теорема 2. *Пусть задано замкнутое множество $e \subset E_n^C$ такое, что*

$$v_{p+l}^{J_n^\rho}(e) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-p;\ p \leqslant n)$$

и при всяких i, k и $q \in \tau_i^k$

$$v_0^{J_n^\rho}\left[e \cap \beta_i^{n-k}(q)\right] \leqslant v \qquad (v > 0).$$

Тогда в $J_n^\rho - e$ можно вписать правильный n-мерный замкнутый куб J_n^d со стороной

$$d \geqslant \frac{\rho}{3 + \sqrt[n-p]{6^n (p+1)^2 v}},$$

где ρ есть сторона куба J_n^ρ.

Теоремы 1, 2 с более грубой оценкой для d можно было бы получить из лемм 1—3. Приведем непосредственное доказательство одной из этих теорем. Вторая теорема доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 1. Куб J_n^ρ гиперплоскостями, параллельными координатным гиперплоскостям, разделим на m^n конгруэнтных кубов $\{\omega_i\}$. Обозначим через ω_i' куб, концентричный кубу ω_i со стороной $d = \frac{\rho'}{3m}$. Если предположить, что каждый из кубов $\{\omega_i'\}$ содержит

точки множества e, то в силу леммы 3 § 21 окажется, что

$$v^{J_n^\rho}(e) \geqslant \sum_{i=1}^{m^n} v^{\omega_i}(e) \geqslant \frac{m^n}{2^n}\left(\frac{\rho}{3m}\right)^p,$$

т. е. m должно удовлетворять неравенству

$$m \leqslant \sqrt[n-p]{3^p 2^n \rho^{-p} v^{J_n^\rho}(e)}.$$

Фиксируя теперь

$$m = 1 + \left[\sqrt[n-p]{3^p 2^n \rho^{-p} v^{J_n^\rho}(e)}\right] > \sqrt[n-p]{3^p 2^n \rho^{-n} v^{J_n^\rho}(e)},$$

мы получим, что хотя бы один из кубов ω_i' окажется пустым от точек множества e. Но сторона такого куба равна

$$d = \frac{\rho}{3m} \geqslant \frac{\rho\rho^{\frac{p}{n-p}}}{3\rho^{\frac{p}{n-p}} + \sqrt[n-p]{3^{n-p}3^p 2^n v^{J_n^\rho}(e)}} \geqslant \frac{\rho^{\frac{n}{n-p}}}{3 + \sqrt[n-p]{6^n v^{J_n^\rho}(e)}}.$$

Теорема доказана.

ГЛАВА V

ОЦЕНКИ ВАРИАЦИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КОНКРЕТНЫХ МНОЖЕСТВ

В этой главе приводятся оценки функций кратности для множеств, получаемых из эвклидовых пространств с помощью преобразований, задаваемых рациональными функциями. Такого рода оценки легко сводятся к оценкам чисел Бетти для алгебраических поверхностей.

§ 24. Уровни полинома

Основной для нижеследующих оценок функции кратности является следующая лемма.

Лемма 1 (О. А. Олейник). *Число ограниченных компонент множества уровня полинома $P_n^k(x)$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ степени k (по каждому из переменных) не превосходит $(k-1)^n$ при $k \geqslant 1$ и равно нулю при $k=0$ $(n \geqslant 2)$* *).

Доказательство леммы см. [7].

Лемма 2. *Всякое множество уровня полинома $P_n^k(x)$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x \in E_n)$ степени k разбивает всякий n-мерный замкнутый шар $\sigma \subset E_n$ не более чем на $(k+1)^n$ частей $(n \geqslant 1,\ k \geqslant 0)$.*

Доказательство. Обозначим через r радиус шара σ, а через $\{x_i^0\}$ — координаты центра этого шара; через σ^* — границу шара σ; через e_t^0 — пересечение множества e_t уровня t

*) При $n=1$ число компонент (точек) уровня полинома $P_n^k(x)$, очевидно, не превосходит числа корней уравнения $P_n^k(x)-t=0$, т. е. не превосходит числа k.

полинома $P_n^k(x)$ $\left(x \in e_t, \text{ если } P_n^k(x) = t\right)$ с шаром σ; через α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_l$ — некоторые из компонент $\sigma - e_t^0 = \sigma - e_t$.

Докажем, что l не может превосходить числа $(k+1)^n$. При $n=1$ это утверждение очевидно, поскольку в таком случае число компонент множества $\sigma - e_t^0$ не может превосходить числа корней уравнения $\frac{d}{dx_1} P_1^k(x_1) = 0$ более чем на единицу, т. е. не превосходит $k+1$. Поэтому далее мы будем считать $n \geqslant 2$.

Положим

$$P_n^{k+2}(x) = \left[P_n^k(x) - t\right]\left[r^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)^2\right].$$

Полином $P_n^{k+2}(x)$ имеет степень $k+2$ и его нулевое множество уровня

$$e_0 = e_t + \sigma^*.$$

Обозначим через β_i компоненту множества $\sigma - l_0$, содержащуюся в α_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$.

Ясно, что в каждой из областей $\{\beta_i\}$ хотя бы в одной из внутренних точек градиент полинома $P_n^{k+2}(x)$ $\operatorname{grad} P_n^{k+2}(x) = 0$ (такими являются экстремальные точки, т. е. точки максимума или минимума полинома $P_n^{k+2}(x)$). Понятно также, что этим свойством обладает всякий другой полином, который на σ достаточно хорошо аппроксимирует $P_n^{k+2}(x)$.

В работе [8] доказывается, что всякий многочлен $P_n^m(x)$ сколь угодно малым изменением его коэффициентов можно перевести в вещественный многочлен $P_{n,*}^m(x)$, нулевой уровень градиента от которого состоит не более чем из $(m-1)^n$ различных точек. Но при достаточно малом (по сравнению с $r + \max\limits_i x_i^0$) изменении коэффициентов полинома $P_n^{k+2}(x)$ он преобразуется в новый многочлен $P_{n,*}^{k+2}(x)$, достаточно хорошо аппроксимирующий первый на шаре σ, и такой, что число корней уравнения

$$\operatorname{grad}\left[P_{n,*}^{k+2}(x)\right] = 0$$

не превосходит $(k+1)^n$. Поэтому в силу высказанного $l \leqslant (k+1)^n$.

Лемма доказана.

Лемма 3 (О. А. Олейник). *Если множество уровня полинома $P_n^k(x)$ n переменных степени k не содержит точек, в которых* $\operatorname{grad} P_n^k(x) = 0$, *то число ограниченных компонент этого множества уровня не превосходит* $\frac{1}{2}(k-1)^n$ $(n > 1,\ k \geqslant 1)$.

Доказательство см. [7].

Лемма 4. *Число компонент полинома $P_n^k(x)$ n переменных степени k, рассматриваемого лишь на n-мерном замкнутом шаре σ, не превосходит* $(k+1)^n$ $(n \geqslant 1,\ k \geqslant 0)$.

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Тогда число $v_0(e_t \cap \sigma)$ компонент некоторого множества уровня t полинома P_n^k, рассматриваемого лишь на σ, окажется превосходящим $(k+1)^n$. В таком случае можно фиксировать сколь угодно малое ε (положительное или отрицательное) такое, что, во-первых, ни в какой точке множества $e_{t+\varepsilon}$ уровня $t+\varepsilon$ полинома $P_n^k(x)$ градиент рассматриваемого полинома не будет обращаться в нуль, и, во-вторых, $v_0\ (e_{t+\varepsilon} \cap \sigma)$ окажется строго больше чем $\frac{1}{2}(k+1)^n$.

Фиксируем такое ε. Для определенности будем считать, что $\varepsilon > 0$. Тогда можно указать $\delta > 0$ (знак δ определяется знаком ε) такое, что множество f_δ уровня δ полинома

$$P_n^{k+2}(x) = \left[P_n^k(x) - t\right]\left[r^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)^2\right]$$

не будет содержать точек с нулевым градиентом того же полинома $P_n^{k+2}(x)$, а число ограниченных компонент этого множества уровня будет больше чем $\frac{1}{2}(k+1)^n$, поскольку всякая компонента уровня $t+\varepsilon$ полинома $P_n^k(x)$ порождает вблизи от нее лежащую компоненту множества уровня δ полинома $P_n^{k+2}(x)$, уже обязательно не выходящую на границу шара σ. Последнее противоречит лемме 3.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если множество уровня полинома $P_n^k(x)$ не содержит точек нулевого множества уровня градиента от того же полинома, то оно разбивает всякий n-мерный замкнутый шар не более чем на $\frac{1}{2}(k+1)^n$ частей.*

Лемма 6. *Если множество уровня полинома $P_n^k(x)$ не содержит точек нулевого множества уровня градиента от того же полинома, то со всяким n-мерным замкнутым шаром σ она пересекается не более, чем по $\frac{1}{2}(k+1)^n$ компонентам.*

Доказательство двух последних лемм практически содержится в приведенных выше доказательствах лемм 2 и 4.

Лемма 7. *Множество уровня полинома $P_n^k(x)$ $(x \in E_n)$ разбивает пространство E_n не более чем на $(k+1)^n$ областей $(n \geqslant 1,\ k \geqslant 0)$.*

Лемма 8. *Число компонент (ограниченных и неограниченных) всякого множества уровня полинома $P_n^k(x)$ не превосходит $(k+1)^n$ $(n \geqslant 1,\ k \geqslant 0)$.*

Две последние леммы легко получаются из лемм 2 и 4, если в качестве шара σ взять достаточно большой шар с центром в начале координат.

§ 25. Уровни рациональных функций

Рациональной функцией степени k от n переменных мы будем называть отношение двух многочленов степени не выше k.

Лемма 1. *Пусть*

$$R_n^k(x) = \frac{P_n^k(x)}{Q_n^k(x)} \qquad (x \in E_n)$$

есть рациональная функция, являющаяся отношением многочленов $P_n^k(x)$ и $Q_n^k(x) \neq 0$ степени k.

Тогда всякое множество уровня функции $R_n^k(x)$ разбивает всякий n-мерный замкнутый шар $\sigma \subset E_n$ (а следовательно, и все пространство E_n) не более чем на $(k+1)^n$ частей $(n \geqslant 1,\ k \geqslant 0)$.

Лемма 2. *Если функция $R_n^k(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1, то число компонент пересечения всякого множества уровня этой функции с произвольным n-мерным замкнутым шаром σ (а следовательно, и со всем пространством E_n) не превосходит $(k+1)^n$ ($n \geqslant 1$, $k \geqslant 0$).*

Леммы 1 и 2 легко получаются из лемм 2 и 4 § 24. Для этого достаточно лишь убедиться в том, что множество уровня t функции $R_n^k(x)$ совпадает с нулевым множеством уровня многочлена $P_n^k(x) - tQ_n^k(x)$, степень которого, очевидно, не превосходит k.

Оценим теперь возможное число компонент множества уровня рациональной функции $R_n^k(x) = \dfrac{P_n^k(x)}{Q_n^k(x)}$ для случая, когда функция $Q_n^k(x)$ может принимать нулевые значения.

Положим $R_n^k(x) = \dfrac{P_n^k(x)}{Q_n^k(x)}$, где $P_n^k(x)$ и $Q_n^k(x)$ суть многочлены от n переменных степени k, и обозначим через $\sigma_\varepsilon(Q_n^k)$ множество всех таких точек n-мерного замкнутого шара σ ($\sigma \subset E_n$), для которых $|Q_n^k(x)| \geqslant \varepsilon$.

Лемма 3. *При всяком $\varepsilon > 0$ число компонент пересечения множества $\sigma_\varepsilon(Q_n^k)$ с произвольным множеством уровня рациональной функции*

$$R_n^k(x) = \frac{P_n^k(x)}{Q_n^k(x)} \qquad (k \geqslant 0,\ n \geqslant 1)$$

не превосходит

$$(4k+1)^n + (k+1)^n \leqslant (5k+2)^n.$$

Доказательство. Так как на множестве $\sigma_\varepsilon(Q_n^k)$ $Q_n^k(x) \neq 0$ (по определению), то на этом множестве равенство

$$R_n^k(x) = t$$

эквивалентно равенству

$$\frac{P_n^k(x) - tQ_n^k(x)}{Q_n^k(x)} = 0,$$

т. е. внутри $\sigma_\varepsilon(Q_n^k)$ множества, задаваемые этими равен-

ствами, совпадают. Поэтому для доказательства леммы нам достаточно оценить число компонент пересечения $e_t^0 \cap \sigma_\varepsilon(Q_n^k)$ множества e_t^0 нулевого уровня функции $\dfrac{P_n^k(x) - tQ_n^k(x)}{Q_n^k(x)}$ с множеством $\sigma_\varepsilon(Q_n^k)$.

Обозначим через e_t^1 теоретико-множественную сумму всех компонент множества $e_t^0 \cap \sigma_\varepsilon(Q_n^k)$, имеющих общие точки с множеством $\{|Q_n^k(x)| = \varepsilon\}$, а через e_t^2 — теоретико-множественную сумму всех прочих компонент того же множества $e_t^0 \cap \sigma_\varepsilon(Q_n^k)$. Так как $e_t^0 \cap \sigma_\varepsilon(Q_n^k) = e_t^1 \cup e_t^2$, то, очевидно,

$$v_0[e_t^0 \cap \sigma_\varepsilon(Q_n^k)] \leqslant v_0(e_t^1) + v_0(e_t^2).$$

Поскольку каждая компонента α множества e_t^1 порождает в множестве $e_t^1 \cap \{|Q_n^k(x)| = \varepsilon\}$ не менее чем одну компоненту (принадлежащую множеству $\alpha \cap \{|Q_n^k(x)| = \varepsilon\}$), то число компонент множества e_t^1 не может превосходить числа компонент множества $e_t^1 \cap \{|Q_n^k(x)| = \varepsilon\}$. Но последнее множество на шаре σ совпадает с нулевым уровнем многочлена

$$P_\varepsilon(x) = [(Q_n^k(x))^2 - \varepsilon^2]^2 + [P_n^k(x) + tQ_n^k(x)]^2,$$

степень которого не превосходит $4k$. Поэтому в силу леммы 4 § 24 число компонент множества $e_t^1 \cap \{|Q_n^k(x)| = \varepsilon\}$ не превосходит $(4k+1)^n$, а следовательно, и

$$v_0(e_t^1) \leqslant (4k+1)^n.$$

В силу той же леммы 4 § 24

$$v_0(e_t^2) \leqslant v_0(e_t^0 \cap \sigma) \leqslant (k+1)^n,$$

поскольку множество $\left\{\dfrac{P_n^k(x) - tQ_n^k(x)}{Q_n^k(x)} = 0\right\}$ внутри $\sigma_\varepsilon(Q_n^k)$ совпадает с множеством $\{P_n^k(x) - tQ_n^k(x) = 0\}$. Итак,

$$v_0[e_t^0 \cap \sigma_\varepsilon(Q_n^k)] \leqslant v_0(e_t^1) + v_0(e_t^2) \leqslant$$
$$\leqslant (4k+1)^n + (k+1)^n \leqslant (5k+2)^n.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Число компонент пересечения множества* $\sigma \cap \{Q_n^k(x) \neq 0\}$ (*а следовательно* *), *и множества* $\{Q_n^k(x) \neq 0\}$) *с произвольным множеством уровня рациональной функции*

$$R_n^k(x) = \frac{P_n^k(x)}{Q_n^k(x)}$$

не может превосходить числа

$$(5k+2)^n \qquad (k \geqslant 0;\ n \geqslant 1).$$

Доказательство. Фиксируем последовательность положительных чисел $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и обозначим через e_t^m часть множества уровня t рациональной функции $R_n^k(x)$, принадлежащую множеству $\sigma_{\varepsilon_m}(Q_n^k)$, а через e_t^∞ — пересечение множества $\sigma \cap \{Q_n^k(x) \neq 0\}$ со множеством уровня t функции $R_n^k(x)$. В силу леммы 3

$$v_0(e_t^m) \leqslant (5k+2)^n \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Так как при всяком $m > 1$ $\sigma_{\varepsilon_m}(Q_n^k) \subset \sigma_{\varepsilon_{m-1}}(Q_n^k)$, то

$$e_t^m \supset e_t^{m-1} \qquad (m = 2, 3, \ldots),$$

а поэтому

$$v_0(e_t^\infty) \leqslant \sup_m v_0(e_t^m) \leqslant (5k+2)^n.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Всякое множество уровня рациональной функции*

$$R_n^k(x) = \frac{P_n^k(x)}{Q_n^k(x)}$$

разделяет множество

$$\sigma \cap \{Q_n^k(x) \neq 0\}$$

не более чем на $(2k+1)^n$ *частей* $(k \geqslant 0,\ n \geqslant 1)$.

---

*) В силу произвольности шара σ.

Доказательство. Обозначим через e_t множество уровня t функции $R_n^k(x)$, а через f_t^0 — нулевое множество уровня полинома $Q_n^k(x)\left[P_n^k(x)-tQ_n^k(x)\right]$. Тогда

$$\sigma\cap\left\{Q_n^k(x)\neq 0\right\}-e_t=\sigma-\left\{Q_n^k(x)=0\right\}-e_t=\sigma-f_t^0,$$

т. е. множество $\sigma\cap\left\{Q_n^k(x)\neq 0\right\}-e_t$ совпадает с дополнением до шара σ к нулевому уровню многочлена $Q_n^k(x)\left[P_n^k(x)-tQ_n^k(x)\right]$, степень которого не превосходит $2k$. Поэтому в силу леммы 2 § 24 число компонент этого множества не превосходит $(2k+1)^n$.

Лемма доказана.

§ 26. Кусочно-рациональные функции

Определение. Функцию $r(x)$, определенную на некотором подмножестве Ω_n n-мерного эвклидова пространства E_n, будем называть *кусочно-рациональной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) существует полином $P_n^q(x)$ такой, что на всякой компоненте γ_i дополнения к нулевому множеству уровня этого полинома функция $r(x)$ может быть представлена в виде отношения двух полиномов степени k:

$$r(x)=r_{\gamma_i}(x)=\frac{P_{n,\,i}^k(x)}{Q_{n,\,i}^k(x)}$$

($i=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\ l\leqslant(q+1)^n$ — число компонент дополнения к множеству $\left\{P_n^q(x)=0\right\}$);

2) во всякой точке $x\in\bar{\gamma}_i\cap\bar{\gamma}_j$, где $\bar{\gamma}_i$ есть замыкание области $\gamma_i\,(i\neq j)$, функция $r(x)$, вообще говоря, не однозначна; число значений, принимаемых функцией $r(x)$ во всякой такой точке, равно числу множеств $\bar{\gamma}_i\ni x$, для которых соответствующие многочлены $\left\{Q_{n,\,i}^k(x)\right\}$ в рассматриваемой точке не обращаются в 0.

Множество $\left\{P_n^q(x)=0\right\}$ будем называть *барьером* функции $r(x)$, а число q — *порядком барьера*. Число k будем называть *степенью функции* $r(x)$.

Областью определения функции $r(x)$ будем считать множество

$$\Omega_n = \bigcup_{i=1}^{l} [\bar{\gamma}_i - \{Q_{n,\,i}^k(x) = 0\}] +$$
$$+ \bigcup_{i=1} \bigcup_{j=1}^{l} [\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j - \{Q_{n,\,i}^k(x) = 0\} - \{Q_{n,\,j}^k(x) = 0\}].$$

Кусочно-рациональную функцию $r(x)$ будем называть *непрерывной*, если при всяком i всюду на γ_i $Q_{n,\,i}^k(x) \neq 0$.

Лемма 1. *Пусть задано некоторое натуральное число m и непрерывные кусочно-рациональные функции $r_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ n переменных степени k с общим барьером $\{P_n^q(x) = 0\}$* порядка q.

Тогда число компонент пересечения множества всех решений системы

$$r_i(x) = t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

($\{t_i\}$ — произвольные действительные числа) с произвольным n-мерным замкнутым шаром σ не может превосходить

$$\frac{1}{2}[(q+1)(2k+q+1)]^n \qquad (n \geqslant 1, \quad k \geqslant 0, \quad q \geqslant 0).$$

Доказательство. Обозначим через γ некоторую из компонент множества $\sigma - \sigma^* - \{P_n^q(x) = 0\}$ (σ^* — граница шара σ), а через γ^* — границу этой области. На множестве $\gamma + \gamma^* = \bar{\gamma}$ каждая из функций $r_i(x)$ (согласно определению непрерывной кусочно-рациональной функции) представима в виде отношения двух многочленов степени k:

$$r_i(x) = \frac{P_{i,\,\gamma}^k(x)}{Q_{i,\,\gamma}^k(x)}.$$

Положим:

$$P_\gamma^{2k}(x) = \sum_{i=1}^{m} [P_{i,\,\gamma}^k(x) - t_i Q_{i,\,\gamma}^k(x)]^2,$$

$$P_\varepsilon^{2k+q+2}(x) = [\varepsilon - P_\gamma^{2k}(x)] \left[r^2 - \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0)^2 \right] P_n^q(x) \operatorname{sign} P_n^q(x),$$
$$x \in \gamma,$$

где $\varepsilon > 0$ есть некоторое число, r — радиус шара σ, а $\{x_j^0\}$ — координаты центра этого шара. При фиксированном $\varepsilon > 0$ для каждой компоненты k_i множества

$$e_0 = \bar{\gamma} \cap \{P_\gamma^{2k}(x) = 0\}$$

можно указать ее окрестность, в которой

$$P_\varepsilon^{2k+q+2}(x) > 0.$$

Обозначим через α_i максимальную из этих окрестностей компоненты $k_i \in e_0$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. При достаточно малом ε окрестности $\{\alpha_i\}$ попарно не будет иметь общих внутренних точек и на их границах будет выполняться равенство

$$P_\varepsilon^{2k+q+2}(x) = 0.$$

Число ε выберем именно таким, чтобы имело место последнее предположение. Тогда при достаточно малых $\delta > 0$ множество e_ε^δ уровня δ полинома $P_\varepsilon^{2k+q+2}(x)$ в каждой из областей $\{\alpha_i\}$ будет иметь хотя бы по одной компоненте, т. е. при всяком достаточно малом δ множество e_ε^δ будет иметь не менее l ограниченных компонент. А так как почти все уровни полинома не содержат точек с нулевым значением его градиента, то из леммы 3 § 24 следует, что

$$l \leqslant \frac{1}{2}(2k + q + 1)^n.$$

Нетрудно далее убедиться, что множество всех (в $\bar{\gamma}_j = \bar{\gamma}$) решений рассматриваемой системы совпадает с множеством

$$e_0 = \bar{\gamma}_j \cap \{P_\gamma^{2k}(x) = 0\} = e_0^j.$$

А так как $\sum_j e_0^j$ совпадает с множеством всех решений рассматриваемой системы, лежащих в шаре σ, то из леммы 4 § 24 следует, что число компонент множества всех (на σ) решений нашей системы не превосходит

$$\sum_j v_0(e_0^j) \leqslant (q+1)^n \frac{1}{2}(2k + q + 1)^n =$$
$$= \frac{1}{2}[(q+1)(2k+q+1)]^n.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $m > 0$ есть некоторое натуральное число; $r_i(x)$ — кусочно-рациональная функция степени $k \geqslant 0$ с барьером $\{P_n^q(x) = 0\}$ порядка $q \geqslant 0$, представимая на компоненте γ_i множества $\sigma - \{P_n^q(x) = 0\}$ в виде*

$$r_i(x) = \frac{P_{i,\gamma_j}^k(x)}{Q_{i,\gamma_j}^k(x)} \qquad (l = 1, 2, \ldots, m);$$

l — число компонент множества $\sigma - \{P_n^q(x) = 0\}$; $\bar{\gamma}_j$ — замыкание множества γ_j;

$$\sigma_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{l} \left[\bar{\gamma}_j - \left\{ \left| \prod_{i=1}^{m} Q_{i,\gamma_j}^k(x) \right| < \varepsilon \right\} \right];$$

e_t — множество всех решений системы

$$r_i(x) = t_i$$

($l = 1, 2, \ldots, m$; $\{t_i\}$ — произвольные действительные числа).

Тогда при всяком ε

$$v_0(e_t \cap \sigma_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2} [(q+1)(2mk + 2k + q + 1)]^n.$$

Доказательство. Так как на множестве

$$\bar{\gamma}_j - \left\{ \left| \prod_{i=1}^{m} Q_{i,\gamma_j}^k(x) \right| < \varepsilon \right\}$$

ни один из полиномов $Q_{i,\gamma_j}^k(x)$ ($l = 1, 2, \ldots, m$) не обращается в нуль, то

$$e_t \cap \left[\bar{\gamma}_j - \left\{ \left| \prod_{i=1}^{m} Q_{i,\gamma_j}^k(x) \right| < \varepsilon \right\} \right]$$

совпадает с множеством

$$f_t^j \cap \left[\bar{\gamma}_j - \left\{ \left| \prod_{i=1}^{m} Q_{i,\gamma_j}^k(x) \right| < \varepsilon \right\} \right],$$

где f_t^j — множество всех решений системы

$$P_{i,\gamma_j}^k(x) - t_i Q_{i,\gamma_j}^k(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Оценим число компонент множества

$$f_t^j \cap \left[\bar{\gamma}_j - \left\{ \left| \prod_{i=1}^m Q_{i,\gamma_j}^k(x) \right| < \varepsilon \right\}\right].$$

Для этого положим

$$P_{\gamma_j}^{2k}(x) = \sum_{i=1}^m \left[P_{i,\gamma_j}^k(x) - t_i Q_{i,\gamma_j}^k(x)\right]^2$$

и рассмотрим полином

$$P_{\varepsilon,\delta}(x) = [\operatorname{sign} P_n^q(x)]\, P_n^q(x) \left[\left(\prod_{i=1}^m Q_{i,\gamma_j}^k(x)\right)^2 - \varepsilon^2\right] \times$$
$$\times \left[r^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2\right] \left[\delta - P_{\gamma_j}^{2k}(x)\right],$$

где r есть радиус шара σ, $\{x_i^0\}$ — координаты центра шара σ, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

Изучим поведение многочлена $P_{\varepsilon,\delta}(x)$ на множестве $\bar{\gamma}_j - \left\{ \left| \prod_{i=1}^m Q_{i,\gamma_j}^k(x) \right| > \varepsilon \right\}$. На границе этого множества многочлен $P_{\varepsilon,\delta}(x)$ равен нулю, так как указанная граница состоит из точек множества $\{P_n^q(x) = 0\}$, на котором

$$P_n^q(x) = 0,$$

и точек множества

$$\left\{ \left| \prod_{i=1}^m Q_{i,\gamma_j}^k(x) \right| = \varepsilon \right\} \cap \bar{\gamma}_j,$$

на котором

$$\left(\prod_{i=1}^m Q_{i,\gamma_j}^k(x)\right)^2 - \varepsilon^2 = 0.$$

Если точка $x \in \{P^{2k}_{\gamma_j}(x) = \delta\}$ не входит в границу множества

$$\bar{\gamma}_j - \left\{ \left| \prod_{i=1}^{m} Q^k_{i,\gamma_j}(x) \right| < \varepsilon \right\},$$

то

$$P_{\varepsilon,\delta}(x) > 0.$$

Если точка $x \in \{P^{2k}_{\gamma_j}(x) = \delta\}$ принадлежит границе множества $\bar{\gamma}_j - \left\{ \left| \prod_{i=1}^{m} Q^k_{i,\gamma_j}(x) \right| < \varepsilon \right\}$, то $P_{\varepsilon,\delta}(x) = 0$, но во всякой точке

$$x' \in \gamma_j - \left\{ \left| \prod_{i=1}^{m} Q^k_{i,\gamma_j}(x) \right| \leqslant \varepsilon \right\},$$

сколь угодной близкой к x,

$$P_{\varepsilon,\delta}(x') > 0.$$

Если точка $x \in \gamma_j - \left\{ \left| \prod_{i=1}^{m} Q^k_{i,\gamma_j}(x) \right| \leqslant \varepsilon \right\}$ достаточно далеко отстоит от множества $\{P^{2k}_{\gamma_j}(x) = 0\}$, точнее, если эта точка принадлежит множеству $\{P^{2k}_{\gamma_j}(x) > \delta\}$, то

$$P_{\varepsilon,\delta}(x) < 0.$$

Так как в силу леммы 4 § 24 множество $\{P^{2k}_{\gamma_j}(x) = 0\}$ состоит из конечного числа компонент $k_1, k_2, \ldots, k_s$, каждая из которых в силу непрерывности $P^{2k}_{\gamma_j}(x)$ является замкнутым множеством, то можно фиксировать $\delta > 0$ столь малое, чтобы всякая пара компонент из $\{k_i\}$ внутри $\bar{\gamma}_j - \left\{ \left| \prod_{i=1}^{m} Q^k_{i,\gamma_j}(x) \right| < \varepsilon \right\}$ оказывалась разделенной множеством $\{P_{\varepsilon,\delta}(x) = 0\}$. Фиксируем δ таким, чтобы выполнялось последнее утверждение, т. е. таким, чтобы число компонент открытого множества

$$\{P_{\varepsilon,\delta}(x) > 0\} \cap \left[\gamma_j - \left\{ \left| \prod_{i=1}^{m} Q^k_{i,\gamma_j}(x) \right| \leqslant \varepsilon \right\} \right]$$

оказывалось состоящим не менее чем из s компонент, где s есть число компонент множества

$$\{P^{2k}_{\gamma_j}(x)=0\}\cap\left[\bar{\gamma}_j-\left\{\left|\prod_{i=1}^{m}Q^k_{i,\gamma_j}(x)\right|<\varepsilon\right\}\right].$$

Тогда при всяком достаточно малом $\delta'>0$ в каждой из компонент множества

$$\{P_{\varepsilon,\delta}(x)>0\}\cap\left[\gamma_j-\left\{\left|\prod_{i=1}^{m}Q^k_{i,\gamma_j}(x)\right|\leqslant\varepsilon\right\}\right]$$

будет лежать, по крайней мере, по одной компоненте множества

$$\{P_{\varepsilon,\delta}(x)=\delta'\}\cap\left[\gamma_j-\left\{\left|\prod_{i=1}^{m}Q^k_{i,\gamma_j}(x)\right|\leqslant\varepsilon\right\}\right].$$

Так как почти на всяком уровне многочлена нет точек с нулевым значением его градиента, то можно фиксировать сколь угодно малое $\delta'>0$ такое, что на соответствующем множестве $\{P_{\varepsilon,\delta}(x)=\delta'\}$ градиент многочлена $P_{\varepsilon,\delta}(x)$ не обращается в нуль. Поэтому в силу леммы 3 § 24 число компонент множества

$$\{P_{\varepsilon,\delta}(x)=\delta'\}\cap\left[\gamma_j-\left\{\left|\prod_{i=1}^{m}Q^k_{i,\gamma_j}(x)\right|\leqslant\varepsilon\right\}\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(2mk+2k+q+1)^n,$$

поскольку полином $P_{\varepsilon,\delta}(x)$ имеет степень не выше чем $(2mk+2k+q+2)$. Следовательно,

$$s\leqslant\frac{1}{2}(2mk+2k+q+1)^n.$$

А так как

$$\{P^{2k}_{\gamma_j}(x)=0\}\cap\left[\bar{\gamma}_j-\left\{\left|\prod_{i=1}^{m}Q^k_{i,\gamma_j}(x)\right|<\varepsilon\right\}\right]=$$
$$=f^j_t\cap\left[\bar{\gamma}_j-\left\{\left|\prod_{i=1}^{m}Q^k_{i,\gamma_j}(x)\right|<\varepsilon\right\}\right],$$

то и число компонент множества

$$f_t^j \cap \left[\bar{\gamma}_j - \left\{\left|\prod_{i=1}^{m} Q_{i,\gamma_j}^k(x)\right| < \varepsilon\right\}\right]$$

не превосходит $\frac{1}{2}(2mk+2k+q+1)^n$.

И, наконец, из того, что

$$e_t \cap \sigma_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{l} [\bar{\gamma}_j - \{|Q_{i,\gamma_j}^k(x)| < \varepsilon\} \cap e_t =$$
$$= \bigcup_{j=1}^{l} f_t^j \cap \left[\bar{\gamma}_j - \left\{\left|Q_{i,\gamma_j}^k(x)\right| < \varepsilon\right\}\right],$$

и того, что в силу леммы 4 § 24 $l \leqslant (q+1)^n$, получаем:

$$v_0(e_t \cap \sigma_\varepsilon) \leqslant \sum_{j=1}^{l} v_0\left(f_t^j \cap \left[\bar{\gamma}_j - \left\{\left|Q_{i,\gamma_j}^k(x)\right| < \varepsilon\right\}\right]\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}[(q+1)(2mk+2k+q+1)]^n.$$

Лемма доказана.

§ 27. Рациональные поверхности и свойства их дополнений

Пусть заданы два эвклидовых пространства E_p и E_m ($p \geqslant 1$, $m \geqslant 1$). В пространстве E_p фиксируем ортонормированный базис $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \ldots, \boldsymbol{Y}_p)$ и обозначим через $y_1, y_2, \ldots, y_p$ координаты произвольной точки $y \in E_p$ относительно этого базиса; аналогично, в пространстве E_m фиксируем ортонормированный базис $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \ldots, \boldsymbol{T}_m)$ и обозначим через $t_1, t_2, \ldots, t_m$ координаты произвольной точки $t \in E_m$ в этой системе координат.

Определение. Преобразование пространства E_p в пространство E_m будем называть *кусочно-рациональным*, если это преобразование можно задать с помощью равенств

$$t_i = r_i^{k,q}(y) = r_i^{k,q}(y_1, y_2, \ldots, y_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где $\{r_i^{k,q}(y)\}$ суть кусочно-рациональные функции степени k с общим для них барьером порядка q.

Преобразование R будем называть *непрерывным кусочно-рациональным* преобразованием, если все $\{r_i^{k,q}(y)\}$ являются непрерывными кусочно-рациональными функциями.

Множество $e \subset E_m$ будем называть *p-мерной кусочно-рациональной поверхностью степени k порядка q*, если это множество является образом пространства E_p при кусочно-рациональном преобразовании его в пространство E_m, задаваемое кусочно-рациональными функциями степени k с барьером порядка q.

Через $\bar{e}$ будем обозначать замыкание множества e.

Теорема 1. *Пусть J_m есть m-мерный правильный куб из E_m со стороной $\rho \leqslant 1$, а $e \subset E_m$ — непрерывная кусочно-рациональная поверхность степени $k \geqslant 0$ порядка $q \geqslant 0$.*

Тогда в $J_m - \bar{e}$ можно вписать m-мерный открытый правильный куб со стороной

$$d \geqslant \frac{\rho}{3 + \sqrt[m-p]{6^m (p+1)^2 (q+1)^p (2k+q+1)^p}}.$$

Теорема 2. *Пусть J_m есть m-мерный правильный куб из E_m со стороной $\rho \leqslant 1$, а $e \subset E_m$ — некоторая кусочно-рациональная поверхность степени k порядка q.*

Тогда в $J_m - \bar{e}$ можно вписать m-мерный открытый правильный куб со стороной

$$d \geqslant \frac{\rho}{3 + \sqrt[m-p]{6^m (p+1)^2 (q+1)^p (2mk+2k+q+1)^p}}.$$

Доказательства этих теорем аналогичны. Остановимся лишь на одном из них.

Доказательство теоремы 2. Обозначим через σ_n множество из E_p, являющееся пересечением p-мерного замкнутого шара радиуса n с центром в начале координат с множеством

$$\bigcup_{j=1}^{l} \left[\bar{\gamma}_j - \left\{ \left| \prod_{i=1}^{m} Q_{i,\gamma_j}^k(y) \right| < \frac{1}{n} \right\} \right],$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ — компоненты дополнения к барьеру до рассматриваемого шара, а $Q^k_{i,\gamma_j}(y)$ — знаменатели рациональных функций, задающих отображение на области γ_j

$$r^{k,q}_{i,\gamma_j}(y) = \frac{P^k_{i,\gamma_j}(y)}{Q^k_{i,\gamma_j}(y)}.$$

Положим $e_n = R(\sigma_n)$. Пусть β есть $(m-s)$-мерная плоскость, ортогональная к s-мерной координатной плоскости τ^s_1, натянутой, например, на векторы $T_1, T_2, \ldots, T_s$, и проходящая через точку $(t_1, t_2, \ldots, t_s; \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-s})$. Обозначим через e^*_n прообраз (при преобразовании R) множества $e_n \cap \beta$. Нетрудно убедиться, что e^*_n есть совокупность всех решений системы

$$r^{k,q}_i(y) = t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

принадлежащих множеству σ_n. Поэтому в силу леммы 2 § 26

$$v_0(e^*_t) \leqslant \frac{1}{2}(q+1)^p(2s_k + 2k + q + 1)^p \leqslant$$
$$\leqslant (q+1)^p(2mk + 2k + q + 1)^p.$$

На множестве σ_n, как нетрудно проверить, все функции $\{r^{k,q}_i(y)\}$ непрерывны, а само множество σ_n замкнуто. А так как при непрерывном преобразовании множества число его компонент не увеличивается, то

$$v_0(e_n \cap \beta) \leqslant \frac{1}{2}(q+1)^p(2mk + 2k + q + 1)^p.$$

Таким образом доказано, что все функции кратности (различных порядков) множества e_n равномерно ограничены константой

$$(q+1)^p(2mk + 2k + q + 1)^p.$$

Множество e_n замкнуто, поскольку замкнуто множество σ_n и преобразование R (на множестве σ_n) непрерывно.

Таким образом, можно считать доказанной следующую лемму.

Лемма 1. *Если $e \subset E_m$ есть p-мерная кусочно-рациональная поверхность степени k порядка q, то в e можно фиксировать счетную последовательность замкнутых подмножеств e_n ($n = 1, 2, \ldots$), для каждого из которых все функции кратности (различных порядков) равномерно ограничены константой*

$$(q+1)^p(2mk+2k+q+1)^p,$$

и таких, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n = e$.

В силу леммы 1 и теоремы 1 § 23 в $J_m - e_n$ можно вписать правильный m-мерный замкнутый куб $J_{m,n}$ со стороной

$$d \geqslant \frac{\rho}{3+\sqrt[m-p]{6^m(p+1)^2(q+1)^p(2mk+2k+q+1)^p}}$$

($n = 1, 2, \ldots$). Обозначим через c_n центр куба $J_{m,n}$. Последовательность точек c_n ($n = 1, 2, \ldots$) в кубе J_m имеет хотя бы одну предельную точку c_0. Обозначим через J'_m открытый правильный куб с центром в c_0 и со стороной

$$d = \frac{\rho}{3+\sqrt[m-p]{6^m(p+1)^2(q+1)^p(2mk+2k+q+1)^p}}.$$

Так как $e = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ и при всяком n

$$J_{m,n} \cap e_n = J_{m,n} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} e_i\right) = 0,$$

то никакая внутренняя точка куба J'_m не может принадлежать множеству e, а следовательно, и множеству $\bar{e}$. Понятно также, что J'_m лежит строго внутри J_m, поскольку этим свойством обладал каждый из кубов $J_{m,n}$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Теорема доказана.

§ 28. Аппроксимация множеств кусочно-рациональными поверхностями

Сформулируем несколько теорем, выражающих связь ε-энтропии множества с параметрами аппроксимирующей его кусочно-рациональной поверхности.

Теорема 1. *Пусть f есть произвольное подмножество m-мерного правильного куба $J_m \subset E_m$* (см. § 23), *отстоящее от его границы не менее чем на 3ε, а $(l-p)$-мерная кусочно-рациональная поверхность степени k порядка q, аппроксимирующая (в смысле метрики C) множество f с точностью ε.*

Тогда числа p, k, q, m и ε должны удовлетворять неравенству

$$[(q+1)(2mk+2k+q+1)]^p \geqslant \frac{n_{3\varepsilon}(f)}{12^m (p+1)^2 n^p_{3\varepsilon/2}(f)}$$

(см. лемму 1 § 23).

Доказательство. В множестве f фиксируем $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть $S^f_{\varepsilon/2}(f)$, состоящую из точек $f_1, f_2, \ldots, f_l$. Так как e аппроксимирует f с точностью ε, то можно указать точки $f_i^* \in e$ $(i=1, 2, \ldots, l)$ такие, что

$$\rho_{E^C_m}(f_i, f_i^*) \leqslant \varepsilon.$$

В силу леммы 1 предыдущего параграфа можно указать замкнутое множество $e_n \subset e$, для которого все функции кратности равномерно ограничены константой

$$v = (q+1)^p (2mk+2k+q+1)^p,$$

и такое, что $e_n \supset \bigcup_{i=1}^{l} f_i^*$ (для этого нужно лишь фиксировать n достаточно большим). Так как множество $\bigcup_{i=1}^{l} f_i$ образует в f $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть, а множество $\bigcup_{i=1}^{l} f_i^*$ аппроксимирует мно-

жество $\bigcup_{i=1}^{l} f_i$ с точностью до ε, то множество $e_n \supset \bigcup_{i=1}^{l} f_i^*$ приближает множество f с точностью до $\frac{3\varepsilon}{2}$ (в силу аксиомы треугольника). Поэтому в силу леммы 1 § 23

$$v \geqslant \frac{n_{3\varepsilon}(f)}{12^m (p+1)^2 n^p_{3\varepsilon/2}(f)},$$

т. е.

$$[(q+1)(2mk+2k+q+1)]^p \geqslant \frac{n_{3\varepsilon}(f)}{12^m (p+1)^2 n^p_{3\varepsilon/2}(f)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть f есть произвольное подмножество правильного куба $J_m^\rho \subset E_m^C$ ($\rho \leqslant 1$ — сторона куба J_m^ρ), отстоящее от границы куба J_m^ρ не менее чем на 3ε, а e — p-мерная кусочно-рациональная поверхность степени k порядка q, аппроксимирующая множество f с точностью до ε.*

Тогда числа p, k, q, m, ε должны удовлетворять неравенству

$$[(q+1)(2k+q+1)]^p \geqslant \frac{\varepsilon^p n_{3\varepsilon}(f)}{(p+1)^2 2^m}.$$

Теорема 2 получается из леммы 2 § 23 и леммы 1 § 27. Доказательство по аналогии с теоремой 1.

Лемма 1. *Всякую непрерывную p-мерную кусочно-рациональную поверхность $e \subset E_m$ степени k порядка q можно представить в виде суммы замкнутых (в E_m) множеств e_n ($n = 1, 2, \ldots$), для каждого из которых все функции кратности (различных порядков) равномерно ограничены константой*

$$v = [(q+1)(2k+q+1)]^p.$$

Доказательство. По определению, $e = R(E_p)$ (см. § 27), где R есть непрерывное отображение пространства E_p в пространство E_m. Обозначим через σ_n p-мерный замкнутый шар из E_p радиуса n с центром в начале коор-

динат и положим $e_n = R(\sigma_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Множества e_n замкнуты, поскольку преобразование R непрерывно.

Пусть β есть $(m-s)$-мерная плоскость, ортогональная к s-мерной координатной плоскости τ_1^s, натянутой, например, на векторы $T_1, T_2, \ldots, T_s$, и проходящая через точку $(t_1, t_2, \ldots, t_s; \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-s})$. Обозначим через e_n^* прообраз (при преобразовании R) множества $e_n \cap \beta$. Нетрудно убедиться, что e_n^* есть совокупность всех решений системы

$$r_i^{k,q}(y) = t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

принадлежащих множеству σ_n. Поэтому в силу леммы 1 § 26

$$v_0(e_t^*) = (q+1)^p (2k+q+1)^p.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть f есть произвольное подмножество куба $J_m \subset E_m^C$, отстоящее от его границы не менее чем на 3ε, а e — непрерывная p-мерная кусочно-рациональная поверхность степени k порядка q, аппроксимирующая f с точностью до ε.*

Тогда числа p, k, q, m, ε должны удовлетворять неравенству

$$[(q+1)(2k+q+1)]^p \geqslant \frac{n_{3\varepsilon}(f)}{12^m (p+1)^2 n_{3\varepsilon/2}^p(f)}.$$

Теорема 4. *Пусть f есть произвольное подмножество правильного куба J_m^ρ ($\rho \leqslant 1$ — сторона куба J_m^ρ), отстоящее от границы куба J_m^ρ не менее чем на 3ε, а e — непрерывная p-мерная кусочно-рациональная поверхность степени k порядка q, аппроксимирующая f с точностью до ε.*

Тогда

$$[(q+1)(2k+q+1)]^p \geqslant \frac{\varepsilon^p n_{3\varepsilon}(f)}{(p+1)^2 2^m}.$$

Используя лемму 1, эти теоремы можно получить, почти дословно повторяя доказательство теоремы 1.

§ 29. Аппроксимация множеств алгебраическими поверхностями

Пусть E_p и E_m суть два эвклидовых пространства, а P^k — преобразование пространства E_p в E_m, задаваемое равенствами $t_i = P_i^k(y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ (см. § 27), где $\{P_i^k(y)\}$ — суть многочлены от p переменных $y_1, y_2, \ldots, y_p$, имеющие по каждому из переменных степень не выше k.

Определение. Поверхности вида $P^k(E_p)$ будем называть *алгебраическими поверхностями степени* k.

Теорема 1. *Пусть f есть некоторое ограниченное подмножество пространства E_m^C, а $p \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ — натуральные числа такие, что*

$$p \log(1 + k) \geqslant H_\varepsilon(f).$$

Тогда существует p-мерная алгебраическая поверхность $e \subset E_m^C$ степени k, аппроксимирующая множество f с точностью ε.

Доказательство. Фиксируем наиболее экономное (2ε)-покрытие множества f его подмножествами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ $(n = N_\varepsilon(f) = 2^{H_\varepsilon(f)} < +\infty$, поскольку множество f ограничено). Так как множество σ_i согласно определению 2ε-покрытия имеет диаметр (в смысле метрики C), не превосходящий 2ε, то σ_i на каждую из координатных осей проектируется в множество, содержащееся в отрезке длины 2ε. Поэтому можно указать правильный куб ω_i со стороной 2ε и такой, что $\sigma_i \subset \omega_i$.

Обозначим через c_i центр куба ω_i, а через $t_1(c_i)$, $t_2(c_i), \ldots, t_m(c_i)$ — координаты точки c_i. В пространстве E_p фиксируем целочисленную решетку, состоящую из $(k+1)^p$ точек $a_l = a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ $(i_q = 0, 1, 2, \ldots, k;\ q = 1, 2, \ldots, p)$. Точки a_l будем предполагать каким-то образом перенумерованными $(l = 1, 2, \ldots, (k+1)^p)$. Множество $\{c_i\}$ пополним произвольными точками $c_j \in E_m$, $j = n+1, \ldots, (k+1)^p$ (так как по предположению теоремы $p \log(k+1) \geqslant H_\varepsilon(f)$, то $n \leqslant (k+1)^p$). Таким образом, в E_m мы имеем $(k+1)^p$ фиксированных точек $c_1, c_2, \ldots, c_{(k+1)^p}$.

Положим

$$P_i^k(y) = \sum_{l=1}^{(k+1)^p} t_i(c_l) \prod_{q=1}^{p} \prod_{i_q \neq y_q(a_l)} \frac{y_q - i_q}{y_q(a_l) - i_q};$$

$$(i_q = 0, 1, 2, \ldots, k;\ q = 1, 2, \ldots, p).$$

Нетрудно проверить, что

$$P_i^k(a_l) = t_i(c_l) \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, m;\ l = 1, 2, \ldots, (k+1)^p\right).$$

Всякий многочлен $P_i^k(y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ по каждому из переменных имеет степень k.

Примем за e поверхность из E_m, задаваемую равенствами

$$t_i = P_i^k(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Степень алгебраической поверхности e равна k. Эта поверхность проходит через все точки $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots, c_{(k+1)^p}$. А так как множество $\bigcup_{l=1}^{n} c_l$ аппроксимирует множество f с точностью до ε, то и $e \supset \bigcup_{l=1}^{n} c_l$ приближает f с точностью до ε. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть f есть некоторое ограниченное подмножество пространства E_m^C, p, k и q — натуральные числа такие, что*

$$p \log[(q+1)(k+1)] \geqslant H_\varepsilon(f).$$

Тогда существует непрерывная кусочно-рациональная поверхность $e \subset E_m^C$ степени k порядка q, аппроксимирующая множество f с точностью до ε.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1, поэтому мы остановимся лишь на основных его моментах.

В пространстве E_m^C фиксируем множество точек $c_1, c_2, \ldots, c_n$ $\left(n = N_\varepsilon(f) = 2^{H_\varepsilon(f)}\right)$. Рассмотрим многочлен

$$P^q(y) = P^q(y_1, y_2, \ldots, y_p) = \prod_{i=1}^{p} \prod_{l=0}^{q-1} \left(y_i - 2^{k+1} l\right).$$

Нулевой уровень этого многочлена является теоретико-множественной суммой q^p гиперплоскостей пространства E_p

$\{y_i = 2^{k+1} l\}$, разрезающих пространство E_p на $(q+1)^p$ областей $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{(q+1)^p}$. В области γ_j фиксируем правильную целочисленную решетку с шагом единица, состоящую из точек a_i^j $(i = 1, 2, \ldots, (k+1)^p)$. Так как по предположению теоремы

$$p \log [(q+1)(k+1)] \geqslant H_\varepsilon(f),$$

то

$$n = N_\varepsilon(f) \leqslant (q+1)^p (k+1)^p = n'.$$

В пространстве E_m^c фиксируем некоторое множество, состоящее из $n' - n$ точек $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots, c_{n'}$, и все точки $c_1, c_2, \ldots, c_{n'}$ перенумеруем с помощью двух индексов:

$$\bigcup_{j=1}^{(q+1)^p} \bigcup_{i=1}^{(k+1)^p} c_i^j = \bigcup_{i=1}^{n'} c_i.$$

Обозначим через $\{P_{i,\gamma_j}^k(y)\}$ многочлены от $y_1, y_2, \ldots, y_p$, имеющие по каждому из переменных степень k, такие, что

$$t_l(c_i^j) = P_{i,\gamma_j}^k(a_i^j)$$
$$(l = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, (k+1)^p;\ j = 1, \ldots, (q+1)^p)$$

(см. доказательство теоремы 1). Обозначим далее через $r_i^{k,q}(y)$ непрерывную кусочно-рациональную функцию степени k с барьером $\{P^q(y) = 0\}$ порядка q такую, что

$$r_i^{k,q}(y) = P_{i,\gamma_j}^k(y) \quad \text{при} \quad y \in \bar{\gamma}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, (q+1)^p),$$

а через $R_p^{k,q}$ — преобразование пространства E_p в пространство E_m, задаваемое равенствами

$$t_i = r_i^{k,q}(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Положим $e = R_p^{k,q}(e_p)$. Множество e является непрерывной кусочно-рациональной поверхностью степени k порядка q, которая проходит через точки $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и потому

аппроксимирует множество f с точностью до ε. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 являются обратными к теоремам 3 и 4 § 28. Однако оценки, получаемые в этих теоремах (прямых и обратных), достаточно сильно отличаются друг от друга. Результаты этих теорем в общем случае (для произвольных f) сблизить нельзя. Доказательством этого могут служить множества f с малой энтропией, которые, с одной стороны, могут концентрироваться в окрестности сравнительно простых поверхностей малой размерности, а с другой стороны, могут быть достаточно сильно разбросанными в пространстве. Первые множества (сосредоточнные около простых поверхностей) аппроксимируются этими (достаточно простыми) поверхностями с нужной точностью; множества второго вида, т. е. имеющие ту же энтропию, что и первые множества, но достаточно сильно разбросанные по пространству, для их аппроксимации требуют сравнительно сложных поверхностей. Поэтому для того, чтобы сблизить результаты прямых и обратных теорем, в их формулировки, кроме понятия ε-энтропии множества, следует ввести какие-то более тонкие метрические характеристики множества. Мы же займемся другой задачей, а именно, рассмотрением приложений доказанных теорем к некоторым конкретным задачам из теории табулирования.

ГЛАВА VI

ЛЕГКО ПРЕДСТАВИМЫЕ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ

Здесь мы займемся оценкой сложности таблиц для аналитических функций.

§ 30. Допустимые алгорифмы

Пусть G есть некоторое множество, а F — некоторая совокупность комплексных (или вещественных) функций, определенных на множестве G. В качестве расстояния между двумя элементами f_1 и f_2 из F примем

$$\rho_F(f_1, f_2) = \sup_{x \in G} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Определение. ε-*представлением* семейства F будем называть всякую комплексную функцию $F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x, y)$, определенную на множестве $G \times E_p$ (E_p — p-мерное эвклидово пространство) ($x \in G$, $y \in E_p$), обладающую следующими свойствами:

1) при всяком $x_0 \in G$ действительная и мнимая части функции $F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x_0, y)$ являются кусочно-рациональными функциями точки $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$ степени не выше k с барьером $\{P^{q,x_0}(y) = 0\}$ порядка q; барьер $\{P^{q,x_0}(y) = 0\}$, вообще говоря, предполагается зависящим от точки x_0;

2) для всякой функции $f(x)$ семейства F можно указать хотя бы одну точку $y_0 = y[f(x)]$ такую, что при всяком $x \in G$

$$|f(x) - F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x, y_0)| \leqslant \varepsilon.$$

ε-представление $F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x, y)$ семейства F будем называть *непрерывным*, если при всяком $x \in G$ $F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x, y)$ является

кусочно-непрерывной рациональной функцией точки $y \in E_p$, $F_{\varepsilon, p}^{k, q}(x, y)$ будем называть *алгебраическим* ε-представлением семейства F, если при всяком $x \in G$ $F_{\varepsilon, p}^{k, q}(x, y)$ является многочленом относительно y. Множество $\{P^{q, x}(y) = 0\}$ будем называть *барьером функции* $F_{\varepsilon, p}^{k, q}(x, y)$, а число q — его порядком.

Рассмотрим некоторые примеры ε-представлений.

I. Приближение функций алгебраическими многочленами. Пусть $f(x)$ есть аналитическая функция семейства $F_{\rho, c}^{-1, 1}$ (см. § 7). Тогда можно указать полином $R^p(x)$ степени $p = \left[\log_\rho\left(\frac{2c}{\varepsilon}\right)\right] + 1$, приближающий функцию $f(x)$ с точностью до $\frac{2c}{\rho^p} \leqslant \varepsilon$ (см. [1]). Поэтому, если в качестве параметров $y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}$ принять коэффициенты многочлена $R^p(x)$, то функция

$$F_{\varepsilon, p+1}^{1, 0}(x, y) = \sum_{n=1}^{p+1} y_n x^{n-1}$$

окажется алгебраическим ε-представлением семейства $F_{\rho, c}^{-1, 1}$ $\left(k = 1,\ q = 0,\ p = \left[\log_\rho\left(\frac{2c}{\varepsilon}\right)\right] + 1\right)$. Действительно, условие 1) выполняется, поскольку функция $F_{\varepsilon, p+1}^{1, 0}(x, y)$ при всяком x линейна; условие 2) также выполняется, поскольку в данном случае в качестве $y[f(x)]$ можно принять точку y пространства E_{p+1}, координаты которой $y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}$ совпадают с коэффициентами многочлена $R^p(x)$.

II. Локальная интерполяция функций многочленами. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть элемент пространства $F_{s, L, c}^{\rho, n}$ (см. § 16). Фиксируем в кубе J_n^ρ, являющемся областью определения функции $f(x)$, равномерно распределенную решетку с шагом $\delta = A(s, L, n)\varepsilon^{\frac{1}{s}}$, состоящую из точек a_i $\left(i = 1, 2, \ldots, \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^n\right)$. Значение константы $A(s, L, \rho)$ выберем позднее, сейчас же будем лишь предполагать, что $\frac{\rho}{\delta}$ целое. Куб J_n^ρ разобьем на $\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^n$ множеств

$\{\omega_i\}$ таким образом, чтобы $\omega_i \supset a_i$ и одномерный диаметр

$$D(\omega_i) \leqslant \delta\sqrt{n} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^n\right).$$

Положим

$$y_i = y^j_{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} f(a_j)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}$$

$$\left(k_m = 0, 1, \ldots, [s];\ m = 1, 2, \ldots, n;\right.$$

$$\left. i = 1, 2, \ldots, p, \text{ где } p \leqslant ([s]+1)^n \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^n\right)$$

и

$$F^{1,\,0}_{\varepsilon,\,p}(x, y) = F^{1,\,0}_{\varepsilon,\,p}(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_p) =$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n \leqslant [s]} \sum \ldots \sum \frac{y^l_{k_1, k_2, \ldots, k_n}}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \prod_{m=1}^{n} [x_m - x_m(a_l)]^{k_m}$$

$$(x \in \omega_l).$$

Из теоремы Лагранжа следует, что

$$\|f(x) - F^{1,\,0}_{\varepsilon,\,p}(x, y)\| \leqslant B(s, L, n)\,\delta^s =$$

$$= B(s, L, n)\,[A(s, L, n)]^s\,\varepsilon.$$

Константу $A(s, L, n)$ выберем такою, чтобы

$$B(s, L, n)\,[A(s, L, n)]^s \leqslant 1.$$

Тогда функция $F^{1,\,0}_{\varepsilon,\,p}(x, y)$ окажется алгебраическим (линейным) представлением семейства $F^{\rho,\,n}_{s,\,L,\,c}$.

III. Интегральное представление функций. Пусть $f(x)$ есть функция семейства $F^{\rho}_{s,\,L,\,c}$ (см. § 15). Тогда эта функция с точностью до ε представима в виде

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{s-1} \frac{a_k x^k}{k!} + \frac{1}{(s-1)!} \int_0^x (x-t)^{s-1} f^*(t)\, dt,$$

где $f^*(t)$ есть функция, постоянная на каждом из интервалов $\{\delta_k\}$ $((k-1)\delta < t < k\delta)$ $\left(\delta = A\varepsilon^{\frac{1}{s}};\ k = 1, 2, \ldots, h;\ h = \left[\frac{\rho}{\delta}\right]\right)$ и на интервале δ_{h+1} $(h\delta < t < \rho)$. Поэтому

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{s-1} \frac{a_k x^k}{k!} + \frac{1}{(s-1)!} \int_0^x (x-t)^{s-1} f^*(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{s-1} \frac{a_k x^k}{k!} + \frac{1}{s!} \sum_{k=1}^{h+1} f^*(\delta_k)\, [(x - k\delta + \delta)^s - (x - k\delta)^s].$$

Если числа $a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}, f^*(\delta_1), f^*(\delta_2), \ldots, f^*(\delta_{h+1})$ принять в качестве параметров $y_1, y_2, \ldots, y_p$ $\left(p = s + h + 1 = s + \left[\frac{\rho}{\delta}\right] + 1\right)$, то функция $F^{1,\,0}_{s,\,p}(x, y) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{y_{k+1} x^k}{k!} + \frac{1}{s!} \sum_{k=1}^{h+1} y_{s+k} [(x - k\delta + \delta)^s - (x - k\delta)^s]$ окажется линейным ε-представлением семейства $F^{\rho}_{s,\,L,\,c}$.

IV. Представление функции в виде суперпозиции. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ есть функция, представимая на трехмерном замкнутом кубе $J_3 (0 \leqslant x_i \leqslant 1;\ i = 1, 2, 3)$ в виде

$$f(x_1, x_2, x_3) = \varphi(u, v),$$

где $u = u(x_1, x_2)$, $v = v(x_2, x_3)$ и $\varphi(u, v)$ суть s раз непрерывно дифференцируемые функции, у которых все частные производные всех порядков (до s включительно) так же, как и сами функции u, v и φ, по абсолютной величине не превосходят единицы. Положим

$$\delta = A(s, 1, 2)\, \varepsilon^{\frac{1}{s}}, \quad \delta' = \left(\frac{\delta}{B(s, 1, 2)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

(см. II). Положим далее

$$x_i^1 = \frac{\delta}{2} + i\delta'$$

$$\left(i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm p^1;\ p^1 = \left[\frac{1-\frac{\delta}{2}}{\delta}\right] + 1\right);$$

$$x_i^2 = \frac{\delta'}{2} + i\delta'$$

$$\left(i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm p^2;\ p^2 = \left[\frac{1-\frac{\delta}{2}}{\delta}\right] + 1\right);$$

$$y_{i_1,\ i_2}^{k_1,\ k_2,\ (1)} = \frac{\partial^{k_1+k_2}\varphi\left(x_{i_1}^1,\ x_{i_2}^1\right)}{\partial u^{k_1}\,\partial v^{k_2}};$$

$$y_{i_1,\ i_2}^{k_1,\ k_2,\ (2)} = \frac{\partial^{k_1+k_2}u\left(x_{i_1}^2,\ x_{i_2}^2\right)}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}};$$

$$y_{i_1,\ i_2}^{k_1,\ k_2,\ (3)} = \frac{\partial^{k_1+k_2}v\left(x_{i_1}^2,\ x_{i_2}^2\right)}{\partial x_2^{k_1}\,\partial x_3^{k_2}};$$

$$(i_1 = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm p^1;\ i_2 = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm p^2,$$

$$k_1 + k_2 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1).$$

Запишем теперь приближенное значение функции $f(x)$ через параметры $\left\{y_{i_1,\ i_2}^{k_1,\ k_2,\ (l)}\right\}$:

$$f(x) \approx F_{\varepsilon,\ p}^{k,\ q}(x,\ y) = \sum_{k_1+k_2 \leqslant s-1}\ \sum \frac{y_{i_1,\ i_2}^{k_1,\ k_2,\ (1)}}{k_1!\,k_2!}\left(u_0 - x_{i_1}^1\right)^{k_1}\left(v_0 - x_{i_2}^1\right)^{k_2},$$

где

$$u_0 = \sum_{l_1+l_2 \leqslant s-1}\ \sum \frac{y_{j_1,\ j_2}^{l_1,\ l_2,\ (2)}}{l_1!\,l_2!}\left(x_1 - x_{j_1}^2\right)^{l_1}\left(x_2 - x_{j_2}^2\right)^{l_2},$$

$$v_0 = \sum_{m_1+m_2 \leqslant s-1}\ \sum \frac{y_{j_2,\ j_3}^{m_1,\ m_2,\ (3)}}{m_1!\,m_2!}\left(x_2 - x_{j_2}^2\right)^{m_1}\left(x_3 - x_{j_3}^2\right)^{m_2},$$

а числа j_1, j_2, j_3; l_1, l_2 в зависимости от координат x_1, x_2, x_3 выбираются таким образом, чтобы выполнялись

неравенства

$$\left|x_i - x^2_{j_i}\right| \leqslant \frac{\delta'}{2} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

$$\left|u_0 - x^1_{i_1}\right| \leqslant \frac{\delta}{2},$$

$$\left|v_0 - x^1_{i_1}\right| \leqslant \frac{\delta}{2}$$

(индексы p, k, q будут определены ниже). Значения δ и δ' подбирались таким образом, чтобы

$$\left|f(x) - F^{k,\,q}_{\varepsilon,\,p}(x,\ y)\right| \leqslant \varepsilon$$

(см. II). При всяких (фиксированных) значениях x_1, x_2, x_3 функция $F^{k,\,q}_{\varepsilon,\,p}(x,\ y)$ является непрерывной кусочно-рациональной функцией степени $k = s - 1$ с барьером

$$\left\{P^{q,\,x}(y) = \prod_{i_1=-p_1}^{+p_1} \prod_{i_2=-p_1}^{+p_1} \left(u_0 - x^1_{i_1}\right)\left(v_0 - x^1_{i_2}\right) = 0\right\}$$

порядка

$$q = (2p^2 + 1)^2\, 2\,(s - 1).$$

Оценим число p переменных $\left\{y^{k_1,\,k_2,\,(l)}_{i_1,\,i_2}\right\}$ функции $F^{k,\,q}_{\varepsilon,\,p}(x,\ y)$

$$p \leqslant (s-1)(2p^2+1)^3 + (s-1)(2p^1+1)^2 \leqslant \frac{\alpha}{\delta^2},$$

где $\alpha > 0$ есть некоторая константа.

Во всякой точке y, не принадлежащей кубу $\left\{\left|y^{k_1,\,k_2,\,(l)}_{i_1,\,i_2}\right| \leqslant 1\right\}$, функцию $F^{k,\,q}_{\varepsilon,\,p}(x,\ y)$ положим равной нулю. Таким образом, определенная функция $F^{k,\,q}_{\varepsilon,\,p}(x,\ y)$ является непрерывным ε-представлением для семейства всех функций вида $\varphi(u,\ v)$.

§ 31. Аппроксимация функциональных пространств конечномерными пространствами

Пусть задано некоторое пространство F комплексных (или вещественных) функций $f(x)$, определенных на множестве G (норма — верхняя грань значений модуля функции на множестве G). В G фиксируем множество α, состоящее

из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и обозначим через Φ_m^α преобразование пространства всех комплексных функций, определенных на множестве G, в m-мерное ($m=2n$) пространство E_m^C, которое каждой функции $f(x)$ ставит в соответствие точку $t \in E_m^C$ с координатами $t_i = \operatorname{Re} f(x_i)$ и $t_{i+n} = \operatorname{Im} f(x_i)$ ($i=1, 2, \ldots, n$). Обозначим через $\nu_\varepsilon^\delta(F)$ число элементов минимального множества $\alpha = \alpha_\varepsilon^\delta$, для которого соответствующее множество

$$f_\varepsilon^\delta = \Phi_m^\alpha(F) \subset E_m^C \qquad \left(m = 2\nu_\varepsilon^\delta(F)\right)$$

таково, что

$$H_\varepsilon\left(f_\varepsilon^\delta\right) \geqslant H_\delta(F).$$

Еще раз напомним, что в пространстве E_m^C в качестве расстояния между точками принят максимум модуля по координатной разности этих точек.

Лемма 1. *Если G есть полное компактное метрическое пространство, а пространство F компактно и состоит лишь из непрерывных функций, то при всяких $\delta \geqslant \frac{3}{2}\varepsilon > 0$ соответствующее множество $\alpha_\varepsilon^\delta$ состоит из конечного числа точек, т. е.*

$$\nu_\varepsilon^\delta(F) < +\infty.$$

Доказательство. Фиксируем множество α, состоящее из конечного числа n точек и являющееся ε'-сетью пространства G. Выбор такого множества возможен при всяком ε' в силу компактности пространства G. Конкретное значение ε' будет фиксировано ниже. Обозначим через $S_\varepsilon(f)$ наиболее экономное (2ε)-покрытие множества $f = \Phi_m^\alpha(F)$ ($m=2n$) его подмножествами $\{S_i\}$ ($i=1, 2, \ldots, M_\varepsilon(f)$), а через S_i^{-1} — полный (в F) прообраз множества S_i при преобразовании Φ_m^α. Так как

$$\bigcup_i S_i = f,$$

то

$$\bigcup_i S_i^{-1} = F.$$

Фиксируем две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из множества S_i^{-1}. Так как

$$\rho_{E_m^C}\left\{\Phi_m^\alpha[f_1(x)],\ \Phi_m^\alpha[f_2(x)]\right\}\leqslant 2\varepsilon,$$

то во всякой точке $x\in\alpha$

$$|f_1(x)-f_2(x)|=\sqrt{\{\mathrm{Re}\,[f_1(x)-f_2(x)]\}^2+\{\mathrm{Im}\,[f_1(x)-f_2(x)]\}^2}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{(2\varepsilon)^2+(2\varepsilon)^2}=2\varepsilon\sqrt{2},$$

т. е. $\qquad |f_1(x)-f_2(x)|\leqslant 2\varepsilon\sqrt{2}\qquad (x\in\alpha).$

Так как G есть полное компактное пространство, а F состоит из непрерывных функций и также компактно, то в силу теоремы Арцела функции семейства F равностепенно непрерывны. Поэтому, фиксируя ε' достаточно малым, можно добиться того, чтобы во всякой ε'-окрестности произвольной точки $x\in\alpha$ колебание всякой функции семейства F не превосходило

$$\delta'=\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\varepsilon>0.$$

Тогда во всякой точке $x\in G$

$$|f_1(x)-f_2(x)|\leqslant 2\varepsilon\sqrt{2}+2\delta'=2\varepsilon\,\frac{3}{2}\leqslant 2\delta.$$

Следовательно, каждое из множеств S_i^{-1} $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N_\varepsilon(f))$ имеет диаметр, не превосходящий 2δ, т. е. множества $\{S_i^{-1}\}$ образуют (2δ)-покрытие пространства F. Поэтому

$$H_\delta(F)\leqslant\log N_\varepsilon(f)=H_\varepsilon(f).$$

Таким образом, при достаточно малых ε' соответствующее множество α состоит из конечного числа точек и

$$H_\varepsilon(f)\geqslant H_\delta(F).$$

Лемма доказана.

§ 32. Основные неравенства

Теорема 1. *Пусть G есть полное компактное метрическое пространство, F — некоторое компактное семейство непрерывных комплексных (или вещественных) функций, определенных на пространстве G, а $F_{\varepsilon,\,p}^{k,\,q}(x,\ y)$ —*

некоторое ε-*представление этого семейства* $\left(0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}\right)$. *Тогда при всяком* $\delta\geqslant 9\varepsilon>0$ *имеет место неравенство*

$$m+p\log\left[\frac{(q+1)(k+1)}{\varepsilon}\right]+16\rho p\log[(m+1)(q+2)(k+1)]\geqslant$$
$$\geqslant H_\delta(F),$$

где $\rho>0$ *есть некоторая константа, зависящая лишь от* F, а $m=2\nu_{6\varepsilon}^{\delta}(F)$.

Доказательство. В силу теоремы Арцела семейство F равномерно ограничено некоторой константой M. Поэтому соответствующее множество

$$f_{6\varepsilon}^{\delta}=\Phi_m^{\alpha_{6\varepsilon}^{\delta}}(F)$$

(см. § 31) имеет одномерный диаметр, не превосходящий $2M$. А так как $\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$, то существует m-мерный правильный куб $J_m^{\rho}\subset E_m^C\left(m=2\nu_{6\varepsilon}^{\delta}(F)\right)$ со стороной $\rho=2M+3$ такой, что $J_m^{\rho}\supset f_{6\varepsilon}^{\delta}$ и граница куба J_m^{ρ} удалена от множества $f_{6\varepsilon}^{\delta}$ не меньше чем на 3ε.

Положим

$$P^{(mq)}(y)=\prod_{i=1}^{m}P^{q,\,x_i}(y)\qquad\left(x_i\in\alpha_\varepsilon^{\delta}\right).$$

Принимая множество $\left\{P^{(mq)}(y)=0\right\}$ за барьер поверхности $e_{6\varepsilon}^{\delta}=\Phi_m^{\alpha_{6\varepsilon}^{\delta}}\left[F_{\varepsilon,\,p}^{k,\,q}(x,\,y)\right]$ *), мы получаем, что $e_{6\varepsilon}^{\delta}$ оказывается кусочно-рациональной поверхностью степени k с барьером порядка mq. Поскольку $e_{6\varepsilon}^{\delta}$ аппроксимирует $f_{6\varepsilon}^{\delta}$ с точностью ε, то из теоремы 3 § 28 следует, что

$$[(mq+1)(2mk+2k+mq+1)]^p\geqslant\frac{\varepsilon^p n_{3\varepsilon}\left(f_{6\varepsilon}^{\delta}\right)}{\rho^p(p+1)^2\,2^m}.$$

Логарифмируя последнее неравенство, получаем:

$$m+p\log\left[\frac{\rho}{\varepsilon}(mq+1)(2mk+2k+mq+1)\right]+$$
$$+2\log(1+p)\geqslant n_{3\varepsilon}\left(f_{6\varepsilon}^{\delta}\right)\geqslant H_{6\varepsilon}\left(f_{6\varepsilon}^{\delta}\right)\geqslant H_\delta(F)$$

---

*) Здесь $F_{\varepsilon,\,p}^{k,\,q}(x,\,y)$ рассматривается как семейство функций от x, зависящих от параметра y.

(в силу определения множества $f_{6\varepsilon}^{\delta}$ и леммы 1 § 31), т. е.

$$H_\delta(F) \leqslant m + p\log\left[\frac{\rho}{\varepsilon}(mq+1)(2mk+2k+mq+1)\right] + \\ + 2\log(1+p) \leqslant \\ \leqslant m + p\log\left[\frac{(q+1)(k+1)}{\varepsilon}\rho(m+1)^2(q+1)4\right] + 2\log(1+p) \leqslant \\ \leqslant m + p\log\left[\frac{(q+1)(k+1)}{\varepsilon}\right] + 16\rho p\log[(m+1)(q+2)(k+1)].$$

Итак,

$$m + p\log\left[\frac{(q+1)(k+1)}{\varepsilon}\right] + \\ + 16\rho p\log[(m+1)(q+2)(k+1)] \geqslant H_\delta(F).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть F удовлетворяет условиям теоремы* 1, *а* $F_{\varepsilon,p}^{k,q}(x, y)$ — *непрерывное* ε-*представление* $\left(0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\right)$ *семейства F с барьером порядка q, не зависящим от x. Тогда при всяком* $\delta \geqslant 9\varepsilon$ *имеет место неравенство*

$$m + p\log\left[\frac{(q+1)(k+1)}{\varepsilon}\right] + 4\rho p\log(q+2) \geqslant H_\delta(F),$$

где $m = 2\nu_{6\varepsilon}^{\delta}(F)$, *а* $\rho > 0$ *есть некоторая константа, зависящая лишь от F.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. *Если F и* $F_{\varepsilon,p}^{k,q}(x, y)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1, *то при всяком* $\delta \geqslant 9\varepsilon$

$$m + p\log\left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] + \\ + 2p\log[2\rho(m+1)] + 2\log(p+1) \geqslant H_\delta(F),$$

где $m = 2\nu_{6\varepsilon}^{\delta}(F)$, *а* $\rho > 0$ — *константа, зависящая только от F.*

Теорема 4. *Если F и $F_{\varepsilon,\frac{q}{p}}^{k,}(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, то при всяком $\delta \geqslant 9\varepsilon$*

$$m + p\log\left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] + 3p\log(2\rho) \geqslant H_\delta(F),$$

где $m = 2\nu_{6\varepsilon}^{\delta}(F)$, а $\rho > 0$ — константа, зависящая только от F.

Теоремы 3, 4 доказываются аналогично теореме 1.

§ 33. Легко представимые семейства функций

Определение. Семейство F функций, определенных на множестве G, будем называть *легко представимым*, если существует функция $\delta = \delta(\varepsilon) \geqslant 2\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, монотонно убывающая к нулю при $\varepsilon \to 0$ и такая, что при всяких $B > 0$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\nu_{B\varepsilon}^{\delta(\varepsilon)}(F) < +\infty$$

(см. § 31) и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\nu_{B\varepsilon}^{\delta(\varepsilon)}(F)}{H_{\delta(\varepsilon)}(F)} = 0.$$

Функцию $\delta(\varepsilon)$, удовлетворяющую перечисленным свойствам, будем называть *характеристикой представимости* семейства F.

Как мы увидим ниже, все пространства аналитических функций, с которыми мы встречались во второй главе, являются легко представимыми семействами.

Эти функции $\delta(\varepsilon)$ в каком-то смысле характеризуют трудность построения ε-представлений семейства. Оценка сложности ε-представления таких семейств сводится к отысканию (по возможности) быстро убывающих к нулю характеристик представимости семейства. Более точно последнее выражается следующими теоремами.

Теорема 1. *Пусть F есть некоторое легко представимое компактное пространство* (норма — максимум модуля функции на множестве G) *непрерывных комплексных (или вещественных) функций, определенных на полном компактном метрическом пространстве G, такое,*

что при всяком положительном $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}$

$$H_\varepsilon(F) \leqslant A\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^n \qquad (n > 0,\ A > 0).$$

Пусть $\delta = \delta(\varepsilon) \geqslant 9\varepsilon$ — *некоторая характеристика представимости пространства* F, *а* $F_{\varepsilon,\,p}^{k,\,q}(x,\,y)$ — *произвольное* ε-*представление семейства* F. *Тогда числа* ε, p, k *и* q *должны удовлетворять неравенству*

$$p\log\left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] \geqslant H_\delta(F) - o\,[H_\delta(F)].$$

Доказательство. В силу теоремы 3 § 32 имеем:

$$m + p\log\left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] + \\ + 2p\log[2\rho(m+1)] + 2\log(p+1) \geqslant H_\delta(F),$$

поскольку $\delta = \delta(\varepsilon) \geqslant 9\varepsilon$. Следовательно,

$$m + p\log\left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] + 8\rho p\log(m+2) \geqslant H_\delta(F).$$

Если $p \geqslant \dfrac{H_\delta(F)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}$, то

$$p\log\left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] \geqslant H_\delta(F),$$

т. е. в этом случае утверждение теоремы имеет место.

Пусть $p \leqslant \dfrac{H_\delta(F)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}$. Тогда

$$p\log\left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] \geqslant H_\delta(F) - m - 8\rho p\log(m+2) \geqslant \\ \geqslant H_\delta(F) - m - 8\rho\frac{H_\delta(F)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\log(m+2).$$

Так как в силу определения легко представимого семейства при всяком $B > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\nu^{\delta}_{B\varepsilon}(F)}{H_{\delta}(F)} = 0,$$

то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m}{H_{\delta}(F)} = 2 \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\nu^{\delta}_{6\varepsilon}(F)}{H_{\delta}(F)} = 0,$$

т. е.

$$m = o\,[H_{\delta}(F)] \leqslant A_0 \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^n \leqslant A_0 \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n$$

($A_0 > 0$ — некоторая константа). Поэтому

$$p \log \left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] \geqslant$$

$$\geqslant H_{\delta}(F) - m - 8\rho \frac{H_{\delta}(F)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \log \left[A_0 \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n + 2\right] \geqslant$$

$$\geqslant H_{\delta}(F) - o\,[H_{\delta}(F)] - A_1 H_{\delta}(F) \frac{\log \log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \geqslant$$

$$\geqslant H_{\delta}(F) - o\,[H_{\delta}(F)]$$

($A_1 > 0$ — некоторая константа). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* F, $\delta = \delta(\varepsilon)$, $F^{k,\,q}_{\varepsilon,\,p}(x, y)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и*

$$H_{\varepsilon}(F) = A \frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log \log \frac{c}{\varepsilon}\right)^s} + o\left[\frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log \log \frac{c}{\varepsilon}\right)^s}\right]$$

$$\left(A > 0,\ c > 0,\ n > 0,\ s \geqslant 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \frac{c}{4}\right),$$

а $\delta(\varepsilon)$ *при* $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\delta(\varepsilon) \leqslant B\varepsilon \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^r \qquad (B > 0,\ r \geqslant 0).$$

Тогда

$$p \log \left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \right] \geqslant H_\varepsilon(F) - o\,[H_\varepsilon(F)].$$

Доказательство. В силу теоремы 1 имеем:

$$p \log \left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \right] \geqslant H_\delta(F) - o\,[H_\delta(F)] =$$

$$= A \frac{\left(\log \frac{c}{\delta}\right)^n}{\left(\log\log \frac{c}{\delta}\right)^s} - o \left\{ A \frac{\left(\log \frac{c}{\delta}\right)^n}{\left(\log\log \frac{c}{\delta}\right)^s} + o \left[\frac{\left(\log \frac{c}{\delta}\right)^n}{\left(\log\log \frac{c}{\delta}\right)^s} \right] \right\} =$$

$$= A \frac{\left(\log \frac{c}{\delta}\right)^n}{\left(\log\log \frac{c}{\delta}\right)^s} - o \left[\frac{\left(\log \frac{c}{\delta}\right)^n}{\left(\log\log \frac{c}{\delta}\right)^s} \right] =$$

$$= A \frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^s} - o \left[\frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^s} \right],$$

поскольку

$$\frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left[\log\left(\log \frac{c}{\varepsilon} + \log \frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right]^s} + o \left\{ \frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left[\log\left(\log \frac{c}{\varepsilon} + \log \frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right]^s} \right\} =$$

$$= \frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^s} + \left[\frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^s} \right] +$$

$$+ o \left\{ \frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^s} + o \left[\frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^s} \right] \right\} =$$

$$= \frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^s} + o \left[\frac{\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^s} \right],$$

так как

$$H_\varepsilon(F) = A\frac{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^s} + o\left[\frac{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^s}\right],$$

то

$$p\log\left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] \geqslant$$

$$\geqslant A\frac{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^s} - o\left[\frac{\left(\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^n}{\left(\log\log\frac{c}{\varepsilon}\right)^s}\right] = H_\varepsilon(F) - o\,[H_\varepsilon(F)].$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть F есть некоторое легко представимое компактное пространство непрерывных комплексных (или вещественных) функций, определенных на полном компактном метрическом пространстве G, такое, что при всяком положительном ε*

$$H_\varepsilon(F) \leqslant A_0 + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n \qquad (A_0 > 0,\ n > 0).$$

Пусть $\delta = \delta(\varepsilon) \geqslant 9\varepsilon$ — *некоторая характеристика представимости, а $F_{\varepsilon,\,p}^{k,\,q}(x, y)$ — произвольное ε-представление пространства F.*

Тогда существует константа $A(F) > 0$, зависящая только от F, такая, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$p\log\left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] \geqslant A(F)\,H_\delta(F).$$

Доказательство. В силу теоремы 3 § 32 имеем:

$$m + p\log\left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] +$$
$$+ 2p\,[2\rho(m+1) + 2\log(p+1)] \geqslant H_\delta(F).$$

Пусть A есть некоторая положительная константа, конкретное значение которой мы фиксируем ниже. Если

$$p \geqslant \frac{AH_\delta(F)}{\log\frac{1}{\varepsilon}},$$

то

$$p \log \left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \right] \geqslant AH_\delta(F).$$

Пусть, далее, $p \leqslant \frac{AH_\delta(F)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$. Тогда

$$p \log \left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \right] \geqslant$$
$$\geqslant H_\delta(F) - m - 2p \log [2\rho(m+1)] - 2 \log (p+1) \geqslant$$
$$\geqslant H_\delta(F) - m - 8\rho p \log (m+2) \geqslant$$
$$\geqslant H_\delta(F) - m - 8\rho \frac{AH_\delta(F)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \log (m+2).$$

Но в силу определения легко представимого семейства

$$m = o[H_\delta(F)]$$

и при достаточно малых ε

$$m \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n - 2.$$

Следовательно, при достаточно малых ε получаем:

$$p \log \left(\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \right] \geqslant$$
$$\geqslant H_\delta(F) - m - 8\rho \frac{AH_\delta(F)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \log (m+2) \geqslant$$
$$\geqslant H_\delta(F) - \frac{1}{2} H_\delta(F) - 8\rho \frac{AH_\delta(F)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n =$$
$$= \left(\frac{1}{2} - 8\rho A_n\right) H_\delta(F).$$

Полагая $A = \frac{1}{32} \frac{1}{\rho n}$ и $A(F) = \min \left\{ \frac{1}{4}; A \right\}$, получаем, что при достаточно малых ε

$$p \log \left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \right] \geqslant A(F) H_\delta(F).$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть F есть некоторое легко представимое компактное пространство непрерывных комплексных (или вещественных) функций, определенных на полном компактном метрическом пространстве G; $\delta = \delta(\varepsilon) \geqslant 9\varepsilon$ — некоторая характеристика представимости этого семейства, а $F_{\varepsilon, p}^{k, q}(x, y)$ — непрерывное ε-представление семейства F с барьером, не зависящим от x (например, алгебраическое представление).*

Тогда

$$p \log \left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] \geqslant H_\delta(F) - o[H_\delta(F)].$$

Доказательство. В силу теоремы 4 § 32 имеем

$$m + p \log \left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] + 3p \log(2\rho) \geqslant H_\delta(F).$$

При $p \geqslant \dfrac{H_\delta(F)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$

$$p \log \left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] \geqslant H_\delta(F).$$

При $p \leqslant \dfrac{H_\delta(F)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$

$$p \log \left[\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}\right] \geqslant H_\delta(F) - m - 3p \log(2\rho) \geqslant$$

$$\geqslant H_\delta(F) - m - 3 \frac{H_\delta(F)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \log(2\rho) =$$

$$= H_\delta(F) - m - o[H_\delta(F)] = H_\delta(F) - o[H_\delta(F)]$$

(см. определение легко представимого семейства функций). Теорема доказана.

Замечание. Как мы увидим далее, оценки, полученные в теоремах 1—4, достижимы, т. е. существуют семейства функций и такие их представления, для которых приведенные неравенства обращаются в равенства (с точностью до постоянного множителя в правых частях).

§ 34. Некоторые легко представимые пространства аналитических функций

Здесь мы докажем, что все пространства аналитических функций, с которыми мы встречались во второй главе, являются легко представимыми семействами.

Обозначим через $\mathcal{Э}_\rho^{l,k,z}$ замкнутую область комплексной плоскости (z_k), ограниченную эллипсом с фокусами в точках $z-l$ и $z+l$, для которого отношение полусуммы длин осей к числу $l>0$ равно $\rho>1$, и положим

$$\mathcal{Э}_\rho^{l,z}=\mathcal{Э}_\rho^{l,1,z_1}\times\mathcal{Э}_\rho^{l,2,z_2}\times\ \ldots\times\mathcal{Э}_\rho^{l,n,z_n},$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ суть координаты точки $z\in F_n^z$ (см. § 9). Обозначим через J_n^{l,z_0} n-мерный замкнутый куб

$$\{\operatorname{Re}[z_k(z_0)-l]\leqslant\operatorname{Re}z_k\leqslant\operatorname{Re}[z_k(z_0)+l],$$

$$\operatorname{Im}z_k=\text{const}=\operatorname{Im}z_k(z_0)\}\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Лемма 1. *Для всякого положительного* $\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$ *в кубе* $J_n^{1,0}$ *можно фиксировать* $\nu\leqslant A\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^n$ *точек* $\{a_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\}$ *таких, что всякая аналитическая в* $\mathcal{Э}_\rho^{1,0}$ *функция* $f(x)$, *ограниченная в этой области константой* c *и принимающая в точках* $\{a_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\}$ *значения, по модулю не превосходящие* ε, *всюду в области* $\mathcal{Э}_r^{1,0}$ $(r<\rho)$ *будет ограничена (по модулю) величиной* $B\varepsilon^{1-\omega}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n}$, *где* $\omega=n\frac{\log r}{\log\rho-\log r}$, *а* $A>0$ *и* $B>0$ — *некоторые константы, не зависящие от* ε *и* r.

Доказательство. Разложим $f(z)$ в ряд по многочленам Чебышева

$$f(z)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty}a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}t_{k_1}(z_1)t_{k_2}(z_2)\ldots t_{k_n}(z_n)$$

(см. § 7 и 12) и положим

$$P_k(z)=\sum_{k_1=0}^{k}\sum_{k_2=0}^{k}\ldots\sum_{k_n=0}^{k}a_{k_1,\,k_2,\,\ldots,\,k_n}t_{k_1}(z_1)\,t_{k_2}(z_2)\ldots t_{k_n}(z_n).$$

На основании результатов второй главы получаем, что при положительных $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$

$$|a_{k_1,\,k_2,\,\ldots,\,k_n}|\leqslant\frac{A_1k_1k_2\ldots k_n}{\rho^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}.$$

А так как в области $\mathfrak{Э}_r^{1,\,0}$

$$|t_p(z_i)|\leqslant r^p$$

(см. [6]), то при $z\in\mathfrak{Э}_r^{1,\,0}$

$$|f(z)-P_k(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k_1=k+1}^{\infty}\sum_{k_2=k+1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=k+1}^{\infty}|a_{k_1,\,k_2,\,\ldots,\,k_n}|\,|t_{k_1}(z_1)|\ldots|t_{k_n}(z_n)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k_1=k+1}^{\infty}\sum_{k_2=k+1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=k+1}^{\infty}\frac{A_1k_1k_2\ldots k_nr^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\rho^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}\leqslant$$

$$\leqslant A_1\sum_{p=k+1}^{\infty}(p+1)^np^n\left(\frac{r}{\rho}\right)^p\leqslant A_0\left(\frac{r}{\rho}\right)^k=\frac{A_0}{q^k}.$$

Фиксируем k таким, чтобы

$$\|f(z)-P_k(z)\|\leqslant\varepsilon,\qquad z\in\mathfrak{Э}_r^{1,\,0}.$$

Из полученного выше неравенства следует, что k можно считать удовлетворяющим неравенству

$$k\leqslant\log_q\frac{A_0}{\varepsilon}.$$

Обозначим через $a_{i_j}^j$ $(i_j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1)$ узлы Чебышева отрезка $(-1\leqslant\operatorname{Re}z_j\leqslant1,\ \operatorname{Im}z_j=0)$ (см. [6]). В качестве точки $a_{i_1},\ a_{i_2},\ \ldots,\ a_{i_n}$ примем точку из $J_n^{1,\,0}$ с координатами $a_{i_1}^1,\ a_{i_2}^2,\ \ldots,\ a_{i_n}^n$ $(i_j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Число различных точек $\{a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\}$ равно

$$(k+1)^n \leqslant \left(1 + A_0 \log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n \leqslant A\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n.$$

Так как

$$\left|f\left(a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\right) - P_k\left(a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\right)\right| \leqslant \varepsilon,$$

то

$$\left|P_k\left(a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\right)\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Представим $P_k(z)$ в виде

$$P_k(z) = \sum_{i_1=1}^{k+1} \sum_{i_2=1}^{k+1} \cdots \sum_{i_n=1}^{k+1} P_k\left(a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\right) \prod_{j=1}^{n} \prod_{i \neq i_j} \frac{z_j - a_i^j}{a_{i_j}^j - a_i^j}.$$

Так как $\left|P_k\left(a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\right)\right| \leqslant 2\varepsilon$, то при всяком j для

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in J_n^{1,0}$$

$$\sum_{i_j=1}^{k+1} \prod_{i \neq i_j} \frac{|z_j - a_i^j|}{|a_{i_j}^j - a_i^j|} = \lambda_k(z_j) \leqslant A_2 \log k$$

(см. [6]), т. е.

$$\prod_{i \neq i_j} \frac{|z_j - a_i^j|}{|a_{i_j}^j - a_i^j|} \leqslant A_2 \log k.$$

Если же $z_j \in \mathfrak{Э}_r^{i, j, 0}$, то

$$\prod_{i \neq i_j} \frac{|z_j - a_i^j|}{|a_{i_j}^j - a_i^j|} \leqslant (A_2 \log k)\, r^k$$

(см. [6]). Следовательно, при $z \in \mathfrak{Э}_r^{1,0}$

$$|P_k(z)| \leqslant \sum_{i_1=1}^{k+1} \sum_{i_2=1}^{k+1} \cdots \sum_{i_n=1}^{k+1} \left|P_k\left(a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\right)\right| \prod_{j=1}^{n} \prod_{i \neq i_j} \frac{|z_j - a_i^j|}{|a_{i_j}^j - a_i^j|} \leqslant$$

$$\leqslant (k+1)^n\, 2\varepsilon\, (A_2 r^k \log k)^n \leqslant A_3 k^{2n} r^{nk} 2\varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant A_4 \varepsilon \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n \frac{\log r}{\log q}} = A_4 \varepsilon^{1-\omega} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n},$$

где $\omega = n\dfrac{\log r}{\log\rho - \log r}$. А поэтому при $z \in \mathcal{E}_r^{1,0}$

$$|f(z)| \leqslant |P_k(z)| + |f(z) - P_k(z)| \leqslant A_4\varepsilon^{1-\omega}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n} + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant B\varepsilon^{1-\omega}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для всякого положительного* $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$ *в кубе* J_n^{l,z_0} *можно фиксировать* $\nu \leqslant A\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^n$ *точек* $\{a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\}$ *таких, что всякая аналитическая в* $\mathcal{E}_\rho^{l,z_0}$ *функция* $f(z)$, *ограниченная в этой области константой* c *и принимающая в точках* $\{a_{i_1, i_2 \ldots, i_n}\}$ *значения, по модулю не превосходящие* ε, *всюду в области* $\mathcal{E}_r^{l,z_0}$ $(r < \rho)$ *будет ограничена (по модулю) величиной* $B\varepsilon^{1-\omega}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n}$ *(где* $\omega = n\dfrac{\log r}{\log\rho - \log r}$; $A > 0$ *и* $B > 0$ — *некоторые константы, не зависящие от* ε *и* r*).*

Эта лемма легко сводится к предыдущей заменой переменных.

Лемма 3. *Пусть заданы наборы положительных чисел*

$$\rho' = (\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_n'), \qquad \rho'' = (\rho_1'', \rho_2'', \ldots, \rho_n''),$$
$$r' = (r_1', r_2', \ldots, r_n'), \qquad r'' = (r_1'', r_2'', \ldots, r_n''),$$
$$(0 \leqslant r_k'' < r_k' \leqslant \rho_k' < \rho_k'' \leqslant +\infty; \quad k = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда для всякого положительного $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$ *на границе* $\widetilde{B}_{\rho'}^{r'}$ *множества*

$$B_{\rho'}^{r'} = B_{\rho_1'}^{r_1'} \times B_{\rho_2'}^{r_2'} \times \ldots \times B_{\rho_n'}^{r_n'} \subset E_n^z$$

(см. § 9) *можно фиксировать* $\nu \leqslant A'\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^n$ *точек* $\{a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\}$ *таких, что всякая аналитическая в* $B_{\rho''}^{r''}$

функция $f(z)$, ограниченная в этой области константой c и принимающая в точках $\{a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\}$ значения, по модулю не превосходящие ε, всюду в области $B_{\rho'}^{r'}$, будет ограничена (по модулю) величиной $B'\varepsilon\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n}$ (где $A'>0$ и $B'>0$ — некоторые константы, не зависящие от ε и функции $f(z)$).

Доказательство. Рассмотрим преобразование $\Psi\{z_k = e^{iw_k}\}$ комплексного пространства E_n^w в пространство E_n^z. Преобразование Ψ отрезок $J_1^{\pi, -\ln\rho_k'}$ комплексной плоскости w переводит в окружность $|z_k| = \rho_k'$. Так как $f(z)$ аналитична в $B_{\rho''}^{r''} \supset B_{\rho'}^{r'}$, то $f(e^{iw})$ аналитична в некоторой окрестности отрезка $J_1^{\pi, -\ln\rho_k'}$. По аналогичной причине $f(e^{i, w})$ ограничена в этой окрестности константой c. Поэтому в силу леммы 2 на отрезке $J_1^{\pi, -\ln\rho_k'}$ можно фиксировать $\nu_k \leqslant A_k \log\frac{1}{\varepsilon_k}$ точек $b_{i_k}^k$ $(i_k = 1, 2, \ldots, \nu_k)$ таких, что если

$$\left|f\left(e^{ib_{i_k}^k}\right)\right| \leqslant \varepsilon_k \qquad (i_k = 1, 2, \ldots, \nu_k),$$

то всюду на $J_1^{\pi, -\ln\rho_k'}$

$$|f(e^{iw})| \leqslant \varepsilon_k B\left(\log\frac{1}{\varepsilon_k}\right)^2 \leqslant \varepsilon_{k+1}$$

$$\left(\varepsilon_k = \varepsilon B^{k-1} 2^{k-1} (k-1)! \left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2k-2} = \varepsilon B_{k-1}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2k-2}\right).$$

Положим

$$a_{i_k}^{k, \rho_k'} = \Psi\left(b_{i_k}^k\right) = e^{ib_{i_k}^k}.$$

Отметим, что если

$$\left|f\left(z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, a_{i_k}^{k, \rho_k'}, z_{k+1}, \ldots, z_n\right)\right| \leqslant \varepsilon_k$$

$$(i_k = 1, 2, \ldots, \nu_k),$$

то всюду на окружности $|z_k| = \rho'_k$

$$|f(z)| \leqslant \varepsilon_k B\left(\log \frac{1}{\varepsilon_k}\right)^2.$$

Аналогичным образом на окружности $|z_k| = r'_k$ выбираются точки $a_{i_k}^{k, r'_k}$ $(i_k = 1, 2, \ldots, \nu_k)$ такие, что если

$$\left|f\left(z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, a_{i_k}^{k, r'_k}, z_{k+1}, \ldots, z_n\right)\right| \leqslant \varepsilon_k,$$

то всюду на окружности $|z_k| = r'_k$

$$|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leqslant \varepsilon_k B\left(\log \frac{1}{\varepsilon_k}\right)^2.$$

Точки множества

$$\bigcup_{i_k=1}^{\nu_k} a_{i_k}^{k, \rho'_k} + \bigcup_{i_k=1}^{\nu_k} a_{i_k}^{k, r'_k}$$

перенумеруем в одну последовательность и обозначим их через $\left\{a_{i_k}^k\right\}$ $(i_k = 1, 2, 3, \ldots, 2\nu_k)$. Если

$$\left|f\left(z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}, a_{i_k}^k, z_{k+1}, \ldots, z_n\right)\right| \leqslant \varepsilon_k,$$

то на окружностях $|z_k| = \rho'_k$ и $|z_k| = r'_k$

$$|f(z)| \leqslant \varepsilon_{k+1},$$

а поэтому в силу принципа максимума для аналитических функций всюду в кольце $B_{\rho'_k}^{r'_k}$

$$|f(z)| \leqslant \varepsilon_{k+1}.$$

В качестве точки $a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ примем точку из E_n^z с координатами $a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, \ldots, a_{i_n}^n$ $(i_k = 1, 2, \ldots, 2\nu_k;\ k = 1, 2, \ldots, n)$. Число таких точек равно

$$\nu = \prod_{k=1}^{n} 2\nu_k \leqslant 2 \prod_{k=1}^{n} A_k \log \frac{1}{\varepsilon_k} \leqslant A'\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^n.$$

Предположим теперь, что во всякой из точек $\{a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\}$

$$|f(z)| \leqslant \varepsilon = \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_3 \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon_n.$$

При всевозможных $i_2, i_3, \ldots, i_n$ и при $z_1 \in B_{\rho_1^1}^{r_1^1}$

$$\left|f\left(z_1, a_{i_2}^2, \ldots, a_{i_n}^n\right)\right| \leqslant \varepsilon_1 B\left(\log\frac{1}{\varepsilon_1}\right)^2 \leqslant \varepsilon_2,$$

а поэтому при всяких $i_3, i_4, \ldots, i_n$ и $z_1 \in B_{\rho_1^1}^{r_1^1}$, $z_2 \in B_{\rho_2^1}^{r_2^1}$

$$\left|f\left(z_1, z_2, a_{i_3}^3, \ldots, a_{i_n}^n\right)\right| \leqslant \varepsilon_2 B\left(\log\frac{1}{\varepsilon_2}\right)^2 \leqslant \varepsilon_3$$

и т. д. Проводя указанную оценку n раз, получим, что при $z \in B_{\rho'}^{r'}$

$$|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leqslant \varepsilon_n B\left(\log\frac{1}{\varepsilon_n}\right)^2 \leqslant \varepsilon_{n+1} =$$

$$= \varepsilon B^n 2^n n!\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n} = \varepsilon B'\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть F есть одно из семейств $F_{\rho, c}^{r, n}$, $F_{d, c, 2\pi}^{\delta}$, $F_{\rho, c}^{a, b}$, $F_{s}^{\sigma, c}$* (см. главу II). *Тогда F является легко представимым семейством и имеет характеристику представимости*

$$\delta = \delta(\varepsilon) = 9\varepsilon\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n+1} \qquad \left(\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\right).$$

Доказательство различных случаев этой теоремы получается из леммы 1—3 одним и тем же методом. Поэтому остановимся лишь на случае, когда $F = F_{\rho, c}^{r, n}$.

Положим

$$\delta = \delta(\varepsilon) = 9\varepsilon\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n+1}.$$

Пусть $B > 0$ есть некоторая константа. Обозначим через α множество точек $\{a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\}$ (см. лемму 3, при этом в качестве числа ε в формулировке леммы 3 следует при-

нять число $\varepsilon' = 2B\varepsilon$) и положим

$f = \Phi_m^\alpha(F) \subset E_m^c$ (см. § 31) $\left(m = 2\nu_{B\varepsilon}^\delta(F) \leqslant 2A'\left(\log\frac{1}{\varepsilon'}\right)^n\right)$.

Если f_1 и f_2 из $f \subset E_m^c$ таковы, что $\rho_{E_m^C}(f_1, f_2) \leqslant \varepsilon$, то в силу леммы 3

$$\rho_F\left\{\left[\Phi_m^\alpha\right]^{-1}(f_1),\ \left[\Phi_m^\alpha\right]^{-1}(f_2)\right\} \leqslant \varepsilon' B'\left(\log\frac{1}{\varepsilon'}\right)^{2n},$$

т. е. при достаточно малых ε

$$\rho_F\left\{\left[\Phi_m^\alpha\right]^{-1}(f_1),\ \left[\Phi_m^\alpha\right](f_2)\right\} \leqslant 9\varepsilon\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n+1} < 2\delta.$$

Это означает, что если система множеств $\{\sigma_i \subset f\}$ образует $2B\varepsilon$-покрытие множества f_1, то соответствующая система множеств $\left\{\left[\Phi_m^\alpha\right]^{-1}(\sigma_i) \subset F\right\}$ образует 2δ-покрытие пространства F, т. е. при достаточно малых ε

$$H_{B\varepsilon}(f) \geqslant H_\delta(F).$$

При этом

$$m = 2\nu_{B\varepsilon}^\delta(F) \leqslant 2A'\left(\log\frac{1}{2B\varepsilon}\right)^n.$$

А потому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\nu_{B\varepsilon}^\delta(F)}{H_\delta(F)} \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{A'\left(\log\frac{1}{2B\varepsilon}\right)^n}{A\left(B_{\rho'}^{r'}, B_{\rho''}^{r''}\right)\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{A'\left(\log\frac{1}{2B\varepsilon}\right)^n}{A\left(B_{\rho'}^{r'}, B_{\rho''}^{r''}\right)\left[\log\frac{1}{9\varepsilon} - (2n+1)\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^{n+1}} = 0,$$

т. е. F есть легко представимое семейство и $\delta(\varepsilon)$ является его некоторой характеристикой представимости.

§ 35. Сложность таблиц для аналитических функций

Теорема 1. *Пусть F есть одно из пространств $F_{\rho,c}^{r,n}$, $F_{\alpha,c,2\pi}^\delta$, $F_{\rho,c}^{a,b}$, $F_s^{\sigma,c}$* (см. главу II), *а $F_{\varepsilon,p}^{k,q}(x, y)$ — произвольное представление пространства F.*

Тогда

$$p \log \frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \geqslant H_\varepsilon(F) - o[H_\varepsilon(F)].$$

Эта теорема легко получается из теорем 2 § 33, 1 § 34 и соответствующих оценок для $H_\varepsilon(F)$ (см. главу II).

Теорема 2. *Пусть F есть пространство всех комплексных аналитических в области $G_1 \subset E_n^z$ функций, имеющих аналитические продолжения, ограниченные в конечной области $G_2 \supset G_1$ константой c (норма — максимум модуля функции на замыкании области G_1), а $F_{\varepsilon, p}^{k, q}(x, y)$ — произвольное ε-представление пространства F на множестве G_1.*

Тогда

$$p \log \frac{(q+1)(q+k+1)}{\varepsilon} \geqslant A(F) H_\varepsilon(F) \geqslant B(F)\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^n,$$

где $A(F)$ и $B(F)$ — положительные константы, зависящие лишь от G_1, G_2 и c.

Доказательство. Для определенности будем предполагать, что начало координат $z=0$ пространства E_n^z является внутренней точкой области G_1. Тогда, фиксируя числа $\rho_1^1, \rho_2^1, \ldots, \rho_n^1$ достаточно малыми, мы получим, что соответствующее множество

$$B_{\rho}^{0}{}_{1} = B_{\rho_1^1}^{0} \times B_{\rho_2^1}^{0} \times \ldots \times B_{\rho_n^1}^{0} \quad \text{(см. § 9)}$$

окажется целиком погруженным в область G_1. А так как область G_2 предполагается ограниченной, то, выбирая числа $\rho_1'', \rho_2'', \ldots, \rho_n''$ достаточно большими, будем иметь, что

$$B_{\rho}^{0}{}_{''} = B_{\rho_1''}^{0} \times B_{\rho_2''}^{0} \times \ldots \times B_{\rho_n''}^{0} \supset G_2.$$

Нетрудно проверить, что пространство $F_{\rho, c}^{0, n}$ (см. § 9) является подмножеством пространства F и для всякой пары функций f_1 и f_2 из $F_{\rho, c}^{0, n}$

$$\rho_{F_{\rho, c}^{0, n}}(f_1, f_2) \leqslant \rho_F(f_1, f_2).$$

Поэтому $F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x, y)$ является ε-представлением и для пространства $F^{0,n}_{\rho,c}$. А тогда в силу теоремы 1 получаем, что

$$p \log \frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \geqslant H_\varepsilon(F^{0,n}_{\rho,c}) - o\left[H_\varepsilon(F^{0,n}_{\rho,c})\right] =$$

$$= \frac{2}{(n+1)!} \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{\log\left(\frac{\rho''_l}{\rho'_l}\right)} \left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1} +$$

$$+ o\left[\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}\right] \geqslant A(F) H_\varepsilon(F) \geqslant B(F) \left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1}$$

(см. теоремы 1 и 2 из § 9). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть G_1 есть некоторая область n-мерного эвклидова пространства E_n, G_2 — ограниченная $2n$-мерная область пространства $E^z_n \supset E_n$, содержащая G_1 в качестве подмножества, F — пространство всех вещественных аналитических в G_1 функций, аналитические продолжения которых в области G_2 ограничены константой c, $F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x, y)$ — произвольное ε-представление семейства F (на множестве G_1). Тогда*

$$p \log \frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \geqslant A(F) H_\varepsilon(F) \geqslant B(F) \left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^{n+1},$$

где $A(F)$ и $B(F)$ суть положительные константы, зависящие лишь от G_1, G_2 и c.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Смысл теорем 1—3 состоит в том, что если за меру сложности таблицы аналитической функции $f \in F$ принять выражение

$$\xi_\varepsilon = p \log \frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}$$

(p, k и q суть индексы ε-представления $F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x, y)$ пространства F, порождающего рассматриваемый способ составления таблицы), то

$$\xi_\varepsilon \geqslant A(F) H_\varepsilon(F),$$

т. е. для целого ряда классов аналитических функций трудность составления таблицы для элемента $f \in F$ определяется в основном ε-энтропией соответствующего пространства F.

На одном конкретном примере посмотрим, насколько точны результаты теорем 1—3. В качестве F рассмотрим пространство $F_{\rho, c}^{-1, 1}$ всех вещественных, аналитических на отрезке $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ функций, аналитические продолжения которых в области $\mathcal{E}_{\rho}^{-1, 1}$ ограничены константой c (см. § 7).

Как указывалось в п. 1 § 30, метод приближения функции алгебраическими многочленами является алгебраическим ε-представлением семейства $F_{\rho, c}^{-1, 1}$, для которого $q = 0$, $k = 1$ и

$$p = \left[\log_{\rho}\left(\frac{2c}{\varepsilon}\right)\right] + 1.$$

Следовательно, при данном способе составления таблицы

$$\xi_{\varepsilon} = p \log \frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} = \left[\left[\log_{\rho}\left(\frac{2c}{\varepsilon}\right)\right] + 1\right] \log \frac{2}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\log \rho}\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2 + o\left[\left(\log \frac{c}{\varepsilon}\right)^2\right] = 2H_{\varepsilon}(F) + o\left[H_{\varepsilon}(F)\right]$$

(см. § 7), а оценка теоремы 1 в данном случае такова:

$$\xi_{\varepsilon} \geqslant H_{\varepsilon}(F) - o\left[H_{\varepsilon}(F)\right],$$

т. е. метод отыскания наилучших алгебраических приближений функции (с точностью до 2) является наилучшим способом составления таблицы для аналитических функций.

Для общего случая можно доказать следующее:

Теорема 4. *Для того чтобы семейство F было легко представимым семейством функций, необходимо и достаточно, чтобы при всяком $\varepsilon > 0$ можно было указать ε-представление $F_{\varepsilon, p}^{k, q}(x, y)$ этого семейства такое, что*

$$p \log \frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \leqslant c(F) H_{\varepsilon}(F),$$

где $c(F) > 0$ — некоторая константа, зависящая лишь от F.

Доказательство теоремы опускается.

ГЛАВА VII

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Здесь мы рассмотрим ε-представления для некоторых классов дифференцируемых и непрерывных вещественных функций.

§ 36. Пространства типа C

Пусть G есть некоторое множество, а F — некоторое компактное семейство вещественных функций, определенных на множестве G (в качестве расстояния принимается верхняя грань значений абсолютной величины разности функций). Пусть, далее, $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ есть множество из G, состоящее из точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$; E_m^C — m-мерное пространство с метрикой C; Φ_m^α — преобразование проектирования пространства F в пространство E_m^C, которое функции $f(x) \in F$ ставит в соответствие точку $t \in E_m^C$ с координатами $t_i = f(a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$; $f_\alpha = \Phi_m^\alpha(F)$ — проекция множества F на пространство E_m^C.

Определение. Семейство F будем называть *пространством типа* C, если существуют две положительные константы A и B такие, что для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ в G можно фиксировать множество α, состоящее из

$$m = m_\varepsilon \geqslant AH_{B\varepsilon}(F)$$

точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, и функцию $f_\varepsilon(x) \in F$, обладающие тем свойством, что для произвольного наперед заданного набора действительных чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ $(|\delta_i| \leqslant \varepsilon, i = 1, 2, \ldots, m)$

в F можно фиксировать функцию $f_{\delta_1, \delta_2 \ldots, \delta_m}(x)$ такую, что

$$f_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(a_i) = f_\varepsilon(a_i) + \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Как мы увидим ниже, всякое равномерно-ограниченное семейство функций с наперед заданным модулем непрерывности является пространством типа C. К этому же классу пространств относятся и все семейства дифференцируемых функций.

Лемма 1. *Если F является пространством типа C, то для всякого $\delta > 0$ в множестве G можно фиксировать множество α, состоящее из $m = m_\delta \geqslant AH_{B\delta}(F)$ точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, такое, что соответствующее множество $f_\alpha = \Phi_m^\alpha(F) \in E_m^C$ будет содержать некоторый m-мерный правильный замкнутый куб $J_m^{2\delta}$ со стороной 2δ.*

Нетрудно проверить, что эта лемма является всего лишь переформулировкой определения пространства типа C.

Теорема 1. *Пусть F есть некоторое пространство типа C, а $F_{\varepsilon, p}^{k, q}(x, y)$ — непрерывное ε-представление семейства F с барьером, не зависящим от x.*

Тогда числа ε, p, k и q должны удовлетворять неравенству

$$p \log [(q+1)(k+1)] \geqslant A(F) H_{B(F)\varepsilon}(F),$$

где $A(F)$ и $B(F)$ — некоторые положительные константы, не зависящие от ε, p, k, q.

Доказательство. Положим $\delta = l\varepsilon$ (конкретное значение числа $l > 0$ будет фиксировано ниже). Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ есть множество, упоминаемое в формулировке леммы 1. Тогда соответствующее множество f_α содержит правильный куб $J_m^{2\delta}$ со стороной 2δ. Обозначим через l_α проекцию семейства функций $\left\{F_{\varepsilon, p}^{k, q}(x, y) = F_{\varepsilon, p, y}^{k, q}(x)\right\}$ в пространство $E_m^C \supset f_\alpha$, т. е. образ этого семейства при преобразовании, которое функции $F_{\varepsilon, p, y}^{k, q}(x)$ ставит в соответствие точку $t \in E_m^C$ с координатами $t_i = F_{\varepsilon, p, y}^{k, q}(a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Из определения $F_{\varepsilon, p}^{k, q}(x, y)$ следует, что e_α есть p-мерная непрерывная кусочно-рациональная поверхность степени k

с барьером порядка q, не зависящим от x. Тогда в куб $J_m^{2\delta}$ можно вписать правильный куб J_m^d со стороной

$$d = \frac{2\delta}{3 + \sqrt[m-p]{6^m (p+1)^2 (q+1)^p (2k+q+1)^p}}$$

(см. теорему 1 § 27), не содержащий точек поверхности e_α. А так как e_α в силу определения ε-представления аппроксимирует f_α с точностью до ε и так как $f_\alpha \supset J_m^{2\delta}$, то

$$d \leqslant 3\varepsilon.$$

Следовательно,

$$3\varepsilon \geqslant \frac{2\delta}{3 + \sqrt[m-p]{6^m (p+1)^2 (q+1)^p (2k+q+1)^p}}.$$

А так как $\delta = l\varepsilon$, то

$$6^m (p+1)^2 [(q+1)(2k+q+1)]^p \geqslant \left(\frac{2}{3} l - 3\right)^{m-p},$$

т. е.

$$\left(\frac{2}{3} l - 3\right)^{m-p} \leqslant 6^m (p+1)^2 [(q+1)(2k+q+1)]^p \leqslant$$
$$\leqslant 6^m 2^{2p+2} 2^p [(q+1)(k+q+1)]^p \leqslant$$
$$\leqslant 8^{m+3p+2} [(q+1)(k+q+1)]^p.$$

Логарифмируя, получаем:

$$p \log [(q+1)(k+q+1)] \geqslant$$
$$\geqslant (m-p) \log \left(\frac{2}{3} l - 3\right) - 3(m+3p+2).$$

Положим теперь $l = 30$. Тогда

$$p \log [(q+1)(k+1)] \geqslant \frac{1}{2} p \log [(q+1)(k+q+1)]^p \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \left[(m-p) \log \left(\frac{2}{3} l - 3\right) - 3(m+3p+2)\right] \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} [4(m-p) - 3(m+3p+2)] = \frac{m}{2} - \frac{13}{2} p - 3 \geqslant \frac{m}{2} - 10p.$$

Если $p \leqslant \frac{1}{40} m$, то

$$p \log [(q+1)(k+1)] \geqslant \frac{1}{2} m - 10p \geqslant \frac{1}{4} m \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4} AH_{B\delta}(F) = \frac{1}{4} AH_{Bl\varepsilon}(F).$$

Если же $p \geqslant \frac{1}{40} m$ и $\log [(q+1)(k+1)] \geqslant 1$, то

$$p \log [(q+1)(k+1)] \geqslant \frac{1}{40} m \geqslant \frac{1}{4} AH_{Bl\varepsilon}(F).$$

Если $\log [(q+1)(k+1)] = 0$, то $q = k = 0$, т. е. в таком случае $F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x, y)$ вырождается в функцию, зависящую лишь от x, которая, в силу определения $F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x, y)$ аппроксимирует всякую функцию из F с точностью до ε, т. е. в таком случае

$$H_\varepsilon(F) = 0 = p \log [(q+1)(k+1)].$$

Таким образом, принимая в качестве $B(F)$ максимум чисел 1 и Bl и полагая $A(F) = \frac{1}{40} A$, получаем, что во всех случаях

$$p \log [(q+1)(k+1)] \geqslant A(F) H_{B(F)\varepsilon}(F).$$

Теорема доказана.

Чтобы подчеркнуть сравнительную точность теоремы 1, докажем следующее:

Теорема 2. *Пусть G есть компактное метрическое пространство, F — равномерно ограниченное равностепенно непрерывное семейство функций, определенных на пространстве G, а числа $\varepsilon > 0$, $p \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ удовлетворяют неравенству*

$$p \log [(q+1)(k+1)] \geqslant H_{\frac{1}{2}\varepsilon}(F).$$

Тогда для F существует непрерывное ε-представление (с p параметрами) степени k с барьером порядка q, не зависящим от x.

Доказательство. Так как семейство F равностепенно непрерывно, то можно указать $\delta > 0$ такое, что на

всяком множестве $\omega \subset G$ диаметра δ колебание функции из F не будет превосходить $\frac{1}{2}\varepsilon$. Фиксируем в G конечное число множеств $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, одномерный диаметр каждого из которых не превосходит δ и таких, что $\bigcup_{i=1}^{m} \omega_i = G$. В каждом из множеств $\{\omega_i\}$ фиксируем по одной точке и таким образом выбранное множество точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(a_i \in \omega_i)$ обозначим через α.

Рассмотрим соответствующие множества

$$f_\alpha = \Phi_m^\alpha(F) \subset E_m^C.$$

Нетрудно проверить, что

$$H_{\frac{\varepsilon}{2}}(f_\alpha) \leqslant H_{\frac{\varepsilon}{2}}(F).$$

А так как

$$p \log [(q+1)(k+1)] \geqslant H_{\frac{\varepsilon}{2}}(F),$$

то и подавно

$$p \log [(q+1)(k+1)] \geqslant H_{\frac{\varepsilon}{2}}(f_\alpha).$$

Поэтому в силу теоремы 2 § 29 существует p-мерная непрерывная кусочно-рациональная поверхность e степени k порядка q, аппроксимирующая f_α с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$.

По определению кусочно-рациональной поверхности, e является образом p-мерного эвклидова пространства E_p при преобразовании, задаваемом равенствами

$$t_i = r_i(y) \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где $\{r_i(y)\}$ — непрерывные кусочно-рациональные функции от p переменных $(y_1, y_2, \ldots, y_p) = y$ степени k с барьером порядка q, не зависящим от индекса i. Положим

$$\gamma_i = \omega_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} \omega_j.$$

В качестве $F^{k,\,q}_{\varepsilon,\,p}(x,\,y)$ примем функцию, которая при всяком i во всякой точке $x \in \gamma_i$, как функция от y, равна

$$r_i(y) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Пусть $f(x) \in F$ и $f^* = \Phi^{\alpha}_m[f(x)]$. Так как e аппроксимирует f_α с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$, то можно указать точку $y_0 = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_p)$ такую, что

$$|t_i(f^*) - r_i(y_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

т. е. такую, что

$$|f(a_i) - r_i(y_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

А так как при всяком $x \in \gamma_i$ и фиксированном y функция $F^{k,\,q}_{\varepsilon,\,p}(x,\,y)$ принимает одно и то же значение $F^{k,\,q}_{\varepsilon,\,p}(a_i,\,y)$ и так как колебание функции $f(x)$ на множестве ω_i, а следовательно, и на множестве γ_i, не превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, то при всяком $x \in G$

$$\left|f(x) - F^{k,\,q}_{\varepsilon,\,p}(x,\,y_0)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |f(a_i) - r_i(y_0)| + |f(x) - f(a_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, доказано, что $F^{k,\,q}_{\varepsilon,\,p}(x,\,y)$ является искомым ε-представлением семейства F.

Теорема доказана.

Для произвольных ε-представлений пространства типа C удается доказать лишь следующее:

Теорема 3. *Пусть F есть пространство типа C такое, что при всяком $\delta > 0$*

$$H_\delta(F) \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^s,$$

а $F^{k,\,q}_{\varepsilon,\,p}(x,\,y)$ — его произвольное ε-представление $\left(\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\right)$. Тогда

$$p \log \frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \geqslant A(F)\, H_{B(F)\,\varepsilon}(F),$$

где $A(F) > 0$ *и* $B(F) > 0$ — *некоторые константы, не зависящие от* ε, p, k *и* q.

Доказательство. Положим $\delta = l\varepsilon$. Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ есть множество, упоминаемое в формулировке леммы 1. Тогда соответствующее множество f_α содержит правильный куб $J_m^{2\delta}$ со стороной 2δ. Обозначим через f_1^*, $f_2^*, \ldots, f_n^* (n = 2^m)$ вершины куба $J_m^{2\delta}$, а через $f_1(x), f_2(x), \ldots$ $\ldots, f_n(x)$ — некоторый набор функций из F таких, что

$$\Phi_m^\alpha [f_i(x)] = f_i^* \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как при

$$i \neq j \quad \rho_{E_m^C}(f_i^*, f_j^*) = 2\delta,$$

то

$$\|f_i(x) - f_j(x)\| \geqslant 2\delta.$$

Следовательно, в силу теоремы 1 § 5

$$H_{\frac{\delta}{2}}(F) \geqslant h_{\frac{\delta}{2}}(F) \geqslant \log n = m,$$

т. е.

$$m \leqslant H_{\frac{\delta}{2}}(F).$$

Обозначим через e_α проекцию семейства функций $\left\{F_{\varepsilon, p}^{k, q}(x, y) = F_{\varepsilon, p, y}^{k, q}(x)\right\}$ в пространство $E_m^C \supset f_\alpha$, т. е. образ этого семейства при преобразовании, которое функции $F_{\varepsilon, p, y}^{k, q}(x)$ ставит в соответствие точку $t \in E_m^C$ с координатами

$$t_i = F_{\varepsilon, p, y}^{k, q}(a_i) = r_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Из определения $F_{\varepsilon, p}^{k, q}(x, y)$ следует, что e_α есть p-мерная непрерывная кусочно-рациональная поверхность степени k с барьером $\left\{P^{q, x}(y) = 0\right\}$ порядка q, вообще говоря, зависящим от i.

Положим

$$P^{mq}(y) = \prod_{i=1}^{m} P^{q, a_i}(y).$$

Принимая множество $\{P^{mq}(y)=0\}$ в качестве нового барьера функций $r_i(x)$, мы будем считать e_α кусочно-рациональной поверхностью степени k порядка mq.

Аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 1, в данном случае из теоремы 2 § 27 нетрудно вывести, что

$$3\varepsilon \geqslant \frac{2\delta}{3+\sqrt[m-p]{6^m(p+1)^2(mq+1)^p(2mk+2k+mq+1)}},$$

где $m \geqslant AH_{B\delta}(F)$ (см. определение пространства типа C). А из этого неравенства получается, что

$$p\log[(mq+1)(2mk+2k+mq+1)] \geqslant$$
$$\geqslant (m-p)\log\left(\frac{2}{3}l-3\right)-3(m+3p+2).$$

Полагая $l=30$, получаем

$$p\log[(mq+1)(2mk+2k+mq+1)] \geqslant m-20p,$$

т. е.

$$m-20p \leqslant p\log[(mq+1)(2mk+2k+mq+1)] \leqslant$$
$$\leqslant p\log[(q+1)8(m+1)^2(k+q+1)] =$$
$$= p\log[(q+1)(k+q+1)]+p\log[8(m+1)^2].$$

Но

$$\log[8(m+1)^2] \leqslant 8\log(m+1) \leqslant 8\log[1+H_{15\varepsilon}(F)] \leqslant$$
$$\leqslant 8\log\left[1+\left(\frac{1}{15\varepsilon}\right)^8\right] \leqslant A'\log\frac{1}{\varepsilon},$$

где $A' \geqslant 1$ — некоторая константа. Поэтому

$$m-20p \leqslant p\log[(q+1)(k+q+1)]+A'p\log\frac{1}{\varepsilon} \leqslant$$
$$\leqslant A'p\log\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}.$$

Если $p \leqslant \frac{1}{40}m$, то

$$p\log\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \geqslant \frac{1}{A'}(m-20p) \geqslant \frac{m}{2A'} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{A}{2A'}H_{B\delta}(F) = \frac{A}{2A'}H_{\varepsilon 0 B\varepsilon}(F).$$

Если же $p \geqslant \frac{1}{40} m$, то

$$p \log \frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \geqslant p \geqslant \frac{1}{40} m \geqslant \frac{1}{40} A H_{30B\varepsilon}(F).$$

Полагая

$$A(F) = \min\left(\frac{1}{40} A, \frac{A}{2A'}\right)$$

и

$$B(F) = 30B,$$

получаем, что во всех случаях

$$p \log \frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \geqslant A(F) H_{B(F)\varepsilon}(F).$$

Теорема доказана.

§ 37. Таблицы для дифференцируемых функций

Рассмотрим теперь пространство $F^{\rho, n}_{s, L, c}$ $(s = p + \alpha)$ p раз дифференцируемых на кубе J^{ρ}_n функций, все частные производные порядка p от которых удовлетворяют условию Гельдера с константой L и показателем α (см. § 16).

Лемма 1. *Если $s > 0$, $c > 0$, $L > 0$, $\rho > 0$ и $n \geqslant 1$, то семейство $F^{\rho, n}_{s, L, c}$ является пространством типа C.*

Доказательство. Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_m$ все точки куба J^{ρ}_n, все координаты каждой из которых положительны и кратны некоторому числу $\delta > 0$ (значение числа δ будет фиксировано ниже), и положим $\alpha = \bigcup_{i=1}^{m} a_i$. Пусть задано некоторое достаточно малое число $\varepsilon > 0$ (ограничения, налагаемые на величину ε, будут приведены ниже). В качестве функций $f_\varepsilon(x)$ (см. определение в § 36) примем тождественный нуль. Пусть задан набор чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ таких, что

$$|\delta_i| \leqslant \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Покажем, что существует функция $f_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x)$ семейства $F^{\rho, n}_{s, L, c}$ такая, что

$$f_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(a_i) = \delta_i = f_\varepsilon(a_i) + \delta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Обозначим через σ_i n-мерный замкнутый шар из $E_n \supset J_n^\rho$ радиуса $\frac{\delta}{2}$ с центром в точке a_i, а через $f^i_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x)$ — функцию, определенную на J_n^ρ, тождественно равную нулю вне шара σ_i и равную

$$\delta_i \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{\delta} \rho_{E_n}(x, a_i)\right]\right\}^s =$$

$$= A_i \delta^s \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{\delta} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j(a_i))^2}\right]\right\}^s$$

при $x \in \sigma_i$. В силу леммы 1 § 16 существует константа $A > 0$ такая, что при $A_i < A$ соответствующая функция $f^i_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x)$ оказывается принадлежащей семейству $F^{\rho, n}_{s, L, c}$.

Положим теперь $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{A}\right)^{\frac{1}{s}}$. Так как

$$\delta_i = \delta_i \left\{ \cos\left[\frac{\pi}{\delta} \cdot 0\right]\right\}^s = A_i \delta^s \left[\cos\left(\frac{\pi}{\delta} \cdot 0\right)\right]^s = A_i \delta^s,$$

т. е.

$$A_i = \frac{\delta_i}{\delta^s} \leqslant \frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{A}} = A,$$

то в силу упомянутой леммы 1 § 16 $f^i_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x)$ принадлежит семейству $F^{\rho, n}_{s, L, c}$.

Положим

$$f_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m} = \sum_{i=1}^{m} f^i_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x).$$

Так как при всяком i $f^i_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x) \in F^{\rho, n}_{s, L, c}$ и так как функции $\{f^i_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x)\}$ отличны от нуля на попарно не пересекающихся областях, то и $f_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x)$ принадлежит семейству $F^{\rho, n}_{s, L, c}$. С другой стороны.

$$f_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(a_i) = f^i_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(a_i) = \delta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Для полного доказательства леммы остается лишь оценить снизу число m. Имеем

$$m \geqslant \left(\left[\frac{\rho}{\delta}\right]\right)^n,$$

т. е. при $\varepsilon \leqslant A\left(\frac{\rho}{2}\right)^s$ получаем, что

$$m \geqslant \left\{\left[\rho\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}}\right]\right\}^n \geqslant \left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}}\right]^n \geqslant A'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}} \geqslant$$
$$\geqslant A'' H_\varepsilon\left(F^{\rho, n}_{s, L, c}\right)$$

(см. теорему 1 § 16).

Таким образом, доказано, что для всякого достаточно малого ε $\left(\varepsilon \leqslant A\left(\frac{\rho}{2}\right)^s\right)$ в кубе J^ρ_n можно фиксировать множество $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, состоящее из $m \geqslant A'' H_\varepsilon\left(F^{\rho, n}_{s, L, c}\right)$ точек и такое, что для всяких $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ $(|\delta_i| \leqslant \varepsilon)$ в $F^{\rho, n}_{s, L, c}$ существует $f_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x)$, принимающая в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$ значения $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ (соответственно), т. е. доказано, что $F^{\rho, n}_{s, L, c}$ является пространством типа C.

Теорема 1. *Если $F^{k, q}_{\varepsilon, p}(x, y)$ есть непрерывное ε-представление пространства $F^{\rho, n}_{s, L, c}$ с барьером порядка q, не зависящим от x $(\varepsilon \leqslant 1)$, то*

$$p \log [(q+1)(k+1)] \geqslant A(F) H_\varepsilon(F) \geqslant C(F)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}},$$

где $A(F) > 0$ и $c(F) > 0$ — некоторые константы, не зависящие от ε, p, k и q.

Теорема 2. *Если $F^{k, q}_{\varepsilon, p}(x, y)$ есть некоторое ε-представление $(\varepsilon \leqslant 1)$ семейства $F^{\rho, n}_{s, L, c}$,* то

$$p \log \frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \geqslant A(F) H_\varepsilon(F) \geqslant c(F)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}},$$

где $A(F) > 0$ и $c(F) > 0$ — константы, зависящие лишь от s, L, c, ρ, n.

Эти теоремы являются следствиями теорем 1, 2 § 36 и леммы 1 (см. также теорему 1 § 16).

В § 30 приводились два способа построения непрерывных ε-представлений семейства $F^{\rho,\,n}_{s,\,L,\,c}$ с барьером нулевого порядка, для которых

$$p \log [(q+1)(k+1)] \leqslant B\left(F^{\rho,\,n}_{s,\,L,\,c}\right) H_{\varepsilon}\left(F^{\rho,\,n}_{s,\,L,\,c}\right).$$

Более того, при всяких ε, p, k и q, удовлетворяющих неравенству

$$p \log [(q+1)(k+1)] \geqslant H_{\frac{\varepsilon}{2}}\left(F^{\rho,\,n}_{s,\,L,\,c}\right)$$

для семейства $F^{\rho,\,n}_{s,\,L,\,c}$ можно построить непрерывное ε-представление (с p параметрами) степени k с барьером порядка q, не зависящим от x (см. теорему 2 § 36).

Таким образом, можно сделать следующий вывод: трудность составления таблицы для s раз дифференцируемой функции n переменных определяется в основном отношением $\frac{n}{s}$. Доказательством этого служат теоремы 1 и 2 и оценки для объема таблиц таких функций, получаемые из теоремы 2 § 4 и теоремы 1 § 16.

§ 38. Таблицы для непрерывных функций

Рассмотрим теперь пространство $F^{G}_{\omega(\delta),\,c}$ всех вещественных функций, определенных на связном компактном метрическом пространстве G, равномерно ограниченных константой c и имеющих регулярный модуль непрерывности $\omega(\delta)$ (см. § 17).

Лемма 1. *Если G состоит более чем из одного элемента, а $\omega(\delta)$ при положительных δ не равна нулю, то $F^{G}_{\omega(\delta),\,c}$ является пространством типа C.*

Доказательство. Обозначим через $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ $(m = n_{\delta(4\varepsilon)}(G))$ множество, состоящее из максимального числа элементов $a_1, a_2, \ldots, a_m$, попарно удаленных друг от друга более чем на $2\delta(4\varepsilon)$ ($\delta(\omega)$ есть функция, обратная к $\omega(\delta)$). В качестве функции $f_{\varepsilon}(x)$ (см. определение в § 36) примем тождественный нуль. Пусть задан некоторый набор чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ таких, что

$$|\delta_i| \leqslant \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Обозначим через σ_i замкнутый шар из G $\{\rho_G(x, a_i) \leqslant \delta(\delta_i)\}$ радиуса $\delta(\delta_i)$ с центром в точке a_i, а через $f^i_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x)$ — функцию от $x \in G$, тождественно равную нулю вне шара σ_i и равную $\delta_i - \omega[\rho_G(x, a_i)]$ при $x \in \sigma_i$.

Положим

$$f_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x) = \sum_{i=1}^{m} f^i_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x).$$

Так как при $i \neq j$,

$$\rho_G(a_i, a_j) \geqslant 2\delta(4\varepsilon) > 2\delta(\varepsilon) \geqslant \delta(\delta_i) + \delta(\delta_j),$$

то шары (σ_i) попарно не пересекаются. Поэтому

$$f_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(a_i) = f^i_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(a_i) = \delta_i - \omega[\rho_G(a_i, a_j)] = \delta_i.$$

Докажем теперь, что $f(x) = f_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x)$ имеет модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Действительно, если $x \in \sigma_i$, а $y \in \sigma_j$ $(i \neq j)$, то

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(a_i)| + |f(a_j)| = |\delta_i| + |\delta_j| \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon = \omega[\delta(2\varepsilon)] \leqslant \omega[\rho_G(\sigma_i, \sigma_j)] \leqslant \omega[\rho_G(a_i, a_j)],$$

поскольку

$$\rho_G(\sigma_i, \sigma_j) \geqslant \rho_G(a_i, a_j) - \delta(\delta_i) - \delta(\delta_j) \geqslant$$
$$\geqslant 2\delta(4\varepsilon) - 2\delta(\varepsilon) \geqslant 4\delta(2\varepsilon) - 2\delta(\varepsilon) \geqslant \delta(2\varepsilon).$$

Если $x \in \sigma_i$ и $y \in \sigma_i$, то

$$|f(x) - f(y)| = |\{\delta_i - \omega[\rho_G(x, a_i)]\} - \{\delta_i - \omega[\rho_G(y, a_i)]\}| =$$
$$= |\omega[\rho_G(y, a_i)] - \omega[\rho_G(x, a_i)]| \leqslant$$
$$\leqslant \omega[|\rho_G(y, a_i) - \rho_G(x, a_i)|] \leqslant \omega[\rho_G(x, y)]$$

(в силу регулярности $\omega(\delta)$). Если $x \in \sigma_i$, а $y \in G - \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i$, то

$$|f(x) - f(y)| = |f(x)| \leqslant \omega[\rho_G(x, g - \sigma_i)] \leqslant \omega[\rho_G(x, y)].$$

Итак, доказано, что модуль непрерывности функции $f_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x)$ не превосходит $\omega(\delta)$, т. е. что

$$f_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x) \in F^G_{\omega(\delta), c}.$$

Для доказательства леммы остается лишь оценить снизу число m. Имеем:

$$m = n_{\delta(4\varepsilon)}(G) = 2^{h_{\delta(4\varepsilon)} G} \geqslant 2^{H_{\delta(4\varepsilon)} G} \geqslant$$
$$\geqslant 2^{H_{4\delta(4\varepsilon)} G} \geqslant H_{8\varepsilon}\left(F^G_{\omega(\delta), c}\right) - \log\left(\frac{3c}{\varepsilon}\right)$$

(см. теорему 2 § 17). Так как G является связным множеством, состоящим более чем из одной точки, то при достаточно малых ε

$$H_\varepsilon(G) \geqslant \log\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)$$

($d > 0$ — некоторая константа), т. е.

$$2^{H_\varepsilon(G)} \geqslant \frac{d}{\varepsilon}.$$

Следовательно, при достаточно малых ε

$$m \geqslant H_{8\varepsilon}\left(F^G_{\omega(\delta), c}\right) - \log\left(\frac{3c}{\varepsilon}\right) \geqslant \frac{1}{2} H_{8\varepsilon}\left(F^G_{\omega(\delta), c}\right),$$

ибо $\log\left(\frac{3c}{\varepsilon}\right)$ является величиной бесконечно малой по сравнению с

$$H_{8\varepsilon}\left(F^G_{\omega(\delta), c}\right) \geqslant 2^{H_{4\delta(32\varepsilon)}(G)} + \log\left(\frac{c}{6\varepsilon}\right) \geqslant$$
$$\geqslant 2^{H_{k, \varepsilon}(G)} + \log\left(\frac{c}{6\varepsilon}\right) \geqslant \frac{d}{k\varepsilon},$$

поскольку при достаточно малых ε

$$4\delta(32\varepsilon) \leqslant k\varepsilon,$$

где k не зависит от ε. (Последнее имеет место, так как в силу регулярности $\omega(\delta)$ является выпуклой функцией.)

Лемма доказана.

Теорема 1. *Если $F^G_{\omega(\delta), c}$ удовлетворяет условиям леммы* 1, *а $F^{k, q}_{\varepsilon, p}(x, y)$ — непрерывное ε-представление*

семейства $F^G_{\omega(\delta),c}$ *с барьером порядка* q, *не зависящим от* x, *и* ε *достаточно мало, то*

$$p\log[(q+1)(k+1)] \geqslant AH_{B\varepsilon}\left(F^G_{\omega(\delta),c}\right) \geqslant A'2^{H_\delta(B'\varepsilon)}(G),$$

где A, B, A' *и* B' — *положительные константы, не зависящие от* ε, p, k *и* q.

Теорема 2. *Если* $F^G_{\omega(\delta),c}$ *удовлетворяет условиям леммы* 1, *а* $F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x, y)$ *есть произвольное* ε-*представление этого пространства* (ε *достаточно мало*), *то*

$$p\log\frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon} \geqslant AH_{B\varepsilon}\left(F^G_{\omega(\delta),c}\right) \geqslant A'2^{H_\delta(B'\varepsilon)}(G),$$

где A, B, A', B' — *положительные константы, не зависящие от* ε, p, k *и* q.

Эти теоремы являются следствиями теорем 1 и 3 из § 36 и леммы 1 (см. также теорему 2 § 17).

Чтобы подчеркнуть сравнительную точность результата теоремы 1, укажем способ составления таблицы для функции $f(x) \in F^G_{\omega(\delta),c}$, при котором сложность таблицы

$$p\log[(q+1)(k+1)] \leqslant 2^{H_{\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)}(G)}.$$

Для этого фиксируем наиболее экономное δ-покрытие ($\delta = \delta(\varepsilon)$) $s_{\frac{\delta}{2}}(G)$ пространства G множествами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ $\left(n = N_{\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)}(G)\right)$ и в каждом из множеств $\{\sigma_i\}$ фиксируем некоторую точку a_i. Положим

$$\omega_i = \sigma_i - \bigcup_{j=1}^{i-1}\sigma_j.$$

В качестве $F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x, y)$ примем функцию от x, y ($x \in G$) ($y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$), равную y_i при $x \in \omega_i$. Функция $F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x, y)$ является ε-представлением пространства $F^G_{\omega(\delta),c}$, поскольку для всякой функции $f(x)$ этого семейства можно фиксировать точку

$$y \in E_p \quad (p = n;\ y_i = f(a_i); \qquad i = 1, 2, \ldots, p)$$

такую, что

$$\left\| f(x) - F^{k,q}_{\varepsilon,p}(x, y) \right\| \leqslant \varepsilon.$$
$$x \in G$$

Степень этого ε-представления равна 1, а порядок барьера — 0. То есть в данном случае

$$p \log [(q+1)(k+1)] = n = N_{\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)}(G) = 2^{H_{\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)}(G)}.$$

Более того, для всяких наперед заданных чисел $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ таких, что

$$p \log [(q+1)(k+1)] \geqslant H_{\frac{1}{2}\varepsilon}\left(F^{G}_{\omega(\delta), c}\right)$$

можно построить непрерывное ε-представление семейства $F^{G}_{\omega(\delta), c}$ (с p параметрами) степени k с барьером порядка q, не зависящим от x.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: если принять за меру сложности таблицы выражение $p \log \frac{(q+1)(k+q+1)}{\varepsilon}$, то сложность всякой таблицы, восстанавливающей элемент f из $F^{G}_{\omega(\delta), c}$ с точностью до ε, должна быть не меньше $AH_{B\varepsilon}\left(F^{G}_{\omega(\delta), c}\right)$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1947.
2. Витушкин А. Г., К 13-й проблеме Гильберта, ДАН **95**, **4**, 1954.
3. Колмогоров А. Н., О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств, ДАН **108**, 3, 1956.
4. Колмогоров А. Н., О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных, ДАН **108**, 2, 1956.
5. Кронрод А. С., О функциях двух переменных, УМН **5**, 1 (35), 1950.
6. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Москва, 1949.
7. Олейник О. А., Оценки чисел Бетти действительных алгебраических гиперповерхностей, Мат. сб. **28**, 3, 1951.
8. Олейник О. А., Петровский И. Г., О топологии алгебраических поверхностей, Изв. АН, сер. мат. **13**, 5, 1949.
9. Шеннон К. (Shannon C. E.), Статистическая теория передачи электрических сигналов, сборник статей «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», ИЛ, 1953.
10. Hilbert D. (Гильберт Д.), Gesammelte Abhandlungen **3**, 17, 1935.
11. Tonelli L. (Тонелли Л.), Serie trigonometrische, Bologna, 1924.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ИХ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Понятие	Обозначение	Стр.*)
Алгорифм, расшифровывающий таблицу	$\Gamma(t)$	15
Базис ортонормированный пространства E_n	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$	122
Барьер порядка q	$\{P^{q,\,x}(y) = 0\}$	177
Вариация множества e внутри куба J_n	$v^{J_n}(e)$	127
Вариация порядка k множества e внутри куба J_n	$v_k^{J_n}(e)$	125
Вариация порядка k множества e внутри куба J_n относительно плоскости τ_i^k	$v_{\tau_i^k}^{J_n}(e)$	125
Глубина погружения множества e в куб J_n	$\Gamma(e, J_n)$	131
Граница куба J_n	J_n^*	122
Диаметр одномерный пространства F	$D(F)$	41
ε-емкость пространства F	$h_\varepsilon(F)$	24
Кольцо комплексной плоскости, задаваемое неравенствами $r_0 \leqslant \lvert z \rvert \leqslant \rho_0$	$B_{\rho_0}^{r_0}$	38
Логарифм a при основании 2 . . .	$\log a$	18
Многочлен от n вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ степени не выше k по каждой из этих переменных	$P_n^k(x)$	152

*) Указаны страницы, где впервые вводится данное понятие.

Продолжение

Понятие	Обозначение	Стр.
Множество из F, состоящее из максимального числа элементов, попарно удаленных друг от друга более чем на 2ε	$s_\varepsilon(F)$	24
Модуль непрерывности	$\omega(\delta)$	114
Норма функции $f(x)$ (в большинстве случаев в качестве нормы принимается верхняя грань значений модуля функции на том или ином множестве)	$\|f(x)\|$	—
Область комплексной плоскости z_k, ограниченная эллипсом с полусуммой осей ρ_k и с фокусами в точках a_k и b_k действительной оси	$Э_{\rho_k}^{a_k, b_k}$	73
Объем таблицы $T_\varepsilon^\Phi(f)$	$P\left[T_\varepsilon^\Phi(f)\right]$	15
Отрезок, задаваемый неравенством $a \leqslant x \leqslant b$	$[a, b]$	—
Отрезок ряда Чебышева, состоящий из $(p+1)$ первых членов	$S_p(x)$	32
Параллелепипед из E_n^z n-мерный, задаваемый неравенствами $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ . . .	$J_n^{a, b}$	73
Плоскость из E_n размерности k координатная	τ_i^k	122
Плоскость из E_n размерности $(n-k)$ ортогональная плоскости τ_i^k и проходящая через точку $q \in \tau_i^k$	$\beta_i^{n-k}(q)$	122
2ε-покрытие пространства F, содержащее наименьшее число элементов покрытия	$S_\varepsilon(F)$	9
Полином Чебышева порядка p . . .	$t_p(x)$	32
Полоса плоскости, задаваемая неравенством $c \leqslant y' \leqslant d$	P_c^d	38

Продолжение

Понятие	Обозначение	Стр.
Правильный n-мерный замкнутый куб из E_n, задаваемый неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant \rho$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$	J_n^ρ	106
ε-представление пространства F (с p параметрами) степени k с барьером порядка q	$F_{\varepsilon,\, p}^{k,\, q}(x, y)$	177
Преобразование $z = e^{iz'}$	Ψ	38
Преобразование, обратное к Ψ_i^k . .	Φ_i^k	132
Преобразование проектирования пространства F_C на m-мерное евклидово пространство E_m . . .	Φ_m^α	183
Преобразование пространства E_n^w в пространство E_n^z, задаваемое равенствами $z_k = \cos \omega_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$	Ψ'	72
Проекция ортогональная множества $E \subset E_n$ на плоскость $\tau_i^k \subset E_n$	$\Psi_i^k(E)$	122
Проекция ортогональная множества $E \subset E_n$ на плоскость $\tau \subset E_n$	$\Psi_\tau(E)$	122
Произведение $\mathcal{Э}_{\rho_1}^{a_1,\, b_1} \times \mathcal{Э}_{\rho_2}^{a_2,\, b_2} \times \ldots \ldots, \times \mathcal{Э}_{\rho_n}^{a_n,\, b_n}$	$\mathcal{Э}_\rho^{a,\, b}$	73
Пространство аналитических в G_2 комплексных функций, ограниченных на G_2 константой c (норма-максимум модуля функции в области $G_1 \subset G_2$)	$F_{G_2,\, c}^{G_1}$	62
Пространство вещественных аналитических на $I_n^{a,\, b}$ функций, модуль аналитических продолжений для которых в области $\mathcal{Э}_\rho^{a,\, b}$ ограничен константой $c > 0$	$F_{\rho,\, c}^{a,\, b}$	73
Пространство вещественных аналитических функций, ограниченных в области $\mathcal{Э}_\rho$ константой c	$F_{\rho,\, c}^{-1,1}$	31

Продолжение

Понятие	Обозначение	Стр.
Пространство вещественных $2n$-периодических (по каждому из переменных) аналитических (в пространстве E_n) функций от n вещественных переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$, имеющих аналитические продолжения в области P_d, ограниченные в P_d константой $c > 0$	$F_{d,\, c,\, 2n}$	66
Пространство вещественных аналитических функций, аналитические продолжения которых есть целые функции порядка σ типа $s > 0$ (норма-максимум абсолютной величины функции на отрезке $[-1, 1]$)	$\Psi_s^{\sigma,\, c}$	81
Пространство всех аналитических в кольце $B_{\rho_1}^{r_1}$ $\{r_1 \leqslant \lvert z \rvert \leqslant \rho_1\}$ функций, ограниченных (по модулю) в этом кольце константой $c > 0$ (норма-максимум модуля функции на кольце $B_{\rho_0}^{r_0}$)	$\Phi_{\rho_0,\, \rho_1,\, c}^{r_0,\, r_1}$	52
Пространство всех аналитических внутри области $B_{\rho''}^{r''}$ комплексных функций, ограниченных в этой области (по модулю) константой $c > 0$ (норма-максимум модуля функции на $B_{\rho'}^{r'}$)	$F_{\rho,\, c}^{r,\, n}$	55
Пространство всех вещественных функций $f(x)$, заданных на компактном метрическом пространстве G, имеющих модуль непрерывности $\omega(\delta)$ и таких, что $\lvert f(x_0) \rvert \leqslant c$, где x_0 есть некоторая точка пространства G, постоянная для всех функций семейства . . .	$F_{\omega(\delta),\, c}^{G}$	114
Пространство всех комплексных аналитических (в области $P_{d''}^{\delta''}$) $2n$-периодических по переменным $\{u_k\}$ функций, ограниченных в области $P_{d''}^{\delta''}$ по модулю константой $c > 0$ (норма-максимум модуля функции в области $P_{d'}^{\delta'}$)	$F_{d,\, c,\, 2n}^{\delta}$	64

Продолжение

Понятие	Обозначение	Стр.
Пространство всех непрерывных, на отрезке [0,1] вещественных функций (норма-максимум модуля функции на отрезке)	C	—
Пространство всех ограниченных на отрезке [0,1] функций	$\Phi(0, 1)$	16
Пространство действительных функций $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенных на кубе I_n^ρ, все частные производные порядка p от которых на кубе I_n^ρ удовлетворяют условию Гёльдера с константой $L > 0$ и показателем α и таких, что $\left\lvert \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} f(0)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\rvert \leqslant c \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \leqslant p \right)$.	$F_{s,\, L,\, c}^{\rho,\, n}$	106
Пространство компактное метрическое	F	38
Пространство n комплексных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$	E_n^z	53
Пространство комплексных целых функций, которые по переменному z_k имеют порядок σ и тип s_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$	$F_s^{\sigma,\, c,\, n}$	82
Пространство размерности n евклидово	E_n	30
Пространство размерности n, в котором в качестве нормы принимается абсолютная величина максимальной (по модулю) координаты	E_n^C	145
Пространство функций, заданных на отрезке r $(0 \leqslant x \leqslant \rho)$ длины ρ, у которых всюду на отрезке r существует $(s-1)$-я частная производня, удовлетворяющая на этом отрезке условию Липшица с константой L, и таких, что $\lvert f^{(k)}(0) \rvert \leqslant c$ $(k = 0, 1, \ldots, s-1)$	$F_{s,\, L,\, c}^{\rho}$	89

Продолжение

Понятие	Обозначение	Стр.
Пространство функций, определенных на отрезке r длины ρ, удовлетворяющих на этом отрезке условию Липшица с константой L и не превосходящих (по абсолютной величине) константы c . .	$F^{\rho}_{L,c}$	86
Пространство целых функций порядка σ типа s	$F^{\sigma,c}_{s}$	79
Расстояние в смысле метрики пространства F между элементами f_1 и f_2	$\rho_F(f_1, f_2)$	15
Расширение пространства F метрическое	Φ	15
ε-сеть пространства F минимальная (в смысле числа элементов), составленная из элементов пространства F	$S^{\Phi}_{\varepsilon}(F)$	19
Совокупность из $F^{\sigma,c,n}_{s}$ функций, действительных на вещественной части пространства E^{z}_{n} (норма-максимум абсолютной величины функции на кубе I_n $\{-1 \leqslant u_k \leqslant 1\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$)	$\Psi^{\sigma,c,n}_{s}$	82
Совокупность функций $\varphi(x)$, представимых на отрезке r в виде $$\varphi(x) = L\int_0^x \varphi^*(t)\,dt,$$ где $\varphi^*(t)$ есть функция, принимающая лишь значения $+1$ и -1, постоянная на каждом из интервалов вида $$\frac{(k-1)\varepsilon}{L} < t < \frac{k\varepsilon}{L}\left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{\rho L}{\varepsilon}\right]\right)$$	$\Phi^{\rho}_{L,\varepsilon}$	83

Продолжение

Понятие	Обозначение	Стр.
Таблица элемента $f \in F$, порождающая некоторый элемент метрического расширения Φ пространства F, отстоящий от f не более чем на ε	$T_\varepsilon^\Phi(f)$	15
Уклонение функции от своего наилучшего (в классе всех алгебраических полиномов степени p) приближения	l_p	33
Характеристика представимости семейства функций	$\delta(\varepsilon)$	187
Часть A целая	$[A]$	—
Число компонент множества e . . .	$v_0(e)$	154
Число компонент множества $e \subset E_n$, лежащих строго внутри I_n . . .	$v_0^{I_n}(e)$	122
Число множеств, образующих покрытие $S_\varepsilon(F)$	$N_\varepsilon^*(F)$	22
Число элементов минимального множества $\alpha = \alpha_\varepsilon^\delta$, для которого соответствующее множество $f_\varepsilon^\delta = \Phi_m^\alpha(F) \subset E_m^C \left(m = 2\nu_\varepsilon^\delta(F)\right)$ таково, что $H_\varepsilon\left(f_\varepsilon^\delta\right) \geqslant H_\delta(F)$ . . .	$\nu_\varepsilon^\delta(F)$	183
Число элементов множества $S_\varepsilon^\Phi(F)$.	$N_\varepsilon^\Phi(F)$	19
Число элементов множества $s_\varepsilon(F)$.	$n_\varepsilon(F)$	24
Энтропия дискретного множества x	$H(x)$	18
ε-энтропия пространства F абсолютная	$H_\varepsilon(F)$	21
ε-энтропия пространства F относительно пространства Φ	$H_\varepsilon^\Phi(F)$	19