

А. А. ВЛАСОВ

# МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

*Допущено Главным управлением университетов,  
экономических и юридических вузов  
Министерства высшего образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для государственных университетов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1955

## АННОТАЦИЯ

Учебное пособие по макроскопической электродинамике на основе курса лекций, читанных автором в Московском университете.

Книга рассчитана на студентов университетов и педагогических институтов.

*Власов Анатолий Александрович.*  
Макроскопическая электродинамика.

Редактор *К. П. Гуров.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*

Корректор *И. С. Цветкова*

---

Сдано в набор 13/VIII 1955 г. Подписано к печати 29/X 1955 г. Бумага 60×92/16.  
Печ. л. 14,25. Условн. печ. л. 14,25. Уч.-изд. л. 12,99. Тираж 15000 экз.  
Т-08419. Цена книги 5 р. 40 к. Заказ № 306.

---

Государственное издательство технико-теоретической литературы.  
Москва, В-71, Б. Калужская ул., 15.

---

Министерство культуры СССР.  
Главное управление полиграфической промышленности.  
2-я типография „Печатный Двор“ им. А. М. Горького.  
Ленинград, Гатчинская, 26.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава I. Основные величины макроскопической электродинамики . . .</b>	<b>7</b>
§ 1. Заряд, напряженности поля $E$ и $H$ в вакууме . . . . .	7
§ 2. Напряженности полей в веществе. Векторы $D$ , $B$ , $P$ , $M$ , $j$ . . .	10
§ 3. Уравнения состояния . . . . .	15
§ 4. Силовые линии в криволинейных координатах . . . . .	20
<i>Задачи</i> . . . . .	22
<b>Глава II. Основные уравнения электродинамики как обобщение опытных фактов . . . . .</b>	<b>23</b>
§ 1. Закон взаимодействия между точечными зарядами и его обобщение . . . . .	23
§ 2. Обобщение опытного закона электромагнитной индукции . . . . .	30
§ 3. Обобщение опытных данных о магнитном поле . . . . .	34
§ 4. Опытный факт об отсутствии магнитных зарядов, аналогичных электрическим . . . . .	37
§ 5. Исходная система уравнений электродинамики . . . . .	38
<i>Задачи</i> . . . . .	44
<b>Глава III. Общие следствия основных положений электродинамики . .</b>	<b>45</b>
§ 1. Закон сохранения заряда . . . . .	45
§ 2. Закон сохранения энергии. Теорема Умова и Пойнтинга . . . . .	48
§ 3. Теорема единственности решений уравнений электродинамики . . . . .	52
§ 4. Пограничные условия . . . . .	54
<i>Задачи</i> . . . . .	59
<b>Глава IV. Электростатика . . . . .</b>	<b>60</b>
§ 1. Свойства электростатического поля в проводящих и диэлектрических средах . . . . .	61
§ 2. Потенциальность электростатического поля . . . . .	63
§ 3. Потенциалы в диэлектрических средах . . . . .	67
§ 4. Случай разрыва потенциала . . . . .	69
§ 5. $\delta$ -функция в электростатике . . . . .	71
§ 6. Дифференциальные уравнения для потенциалов . . . . .	73
§ 7. Прямая и обратная задачи электростатики . . . . .	75
§ 8. Метод решения дифференциального уравнения для потенциала с помощью интеграла Фурье . . . . .	79
§ 9. Краевые задачи электростатики . . . . .	81
§ 10. Энергия электростатического поля . . . . .	84
§ 11. Силы в макроскопической электростатике . . . . .	94
<i>Задачи</i> . . . . .	99

Глава V. Основы магнитостатики . . . . .	100
§ 1. Физические и математические основы магнитостатики . . . . .	100
§ 2. Основные задачи магнитостатики . . . . .	104
§ 3. Влияние магнитной среды на магнитное поле, вызываемое токами . . . . .	110
§ 4. Магнитное поле в сверхпроводниках . . . . .	120
§ 5. Энергия поля для магнито статических явлений . . . . .	124
<i>Задачи</i> . . . . .	128
Глава VI. Квазистационарные явления . . . . .	129
§ 1. Область квазистационарных явлений . . . . .	129
§ 2. Уравнения для квазистационарной области явлений . . . . .	131
§ 3. Квазистационарные явления в линейных проводниках . . . . .	133
§ 4. Энергия и силы в области квазистационарных явлений . . . . .	140
§ 5. Скин-эффект. Аномальный скин-эффект при низких температурах . . . . .	146
<i>Задачи</i> . . . . .	153
Глава VII. Проблема излучения . . . . .	154
§ 1. Общие замечания . . . . .	154
§ 2. Дифференциальные уравнения для потенциалов . . . . .	154
§ 3. Частные решения уравнений для потенциалов . . . . .	157
§ 4. Метод решения неоднородного волнового уравнения, опирающийся на формулу Грина. Формула Кирхгофа . . . . .	161
§ 5. Запаздывающие и опережающие потенциалы как решения задачи Коши . . . . .	166
§ 6. Излучение от электрического и магнитного момента . . . . .	174
§ 7. Излучение дипольных волн. «Игольчатое» излучение . . . . .	187
<i>Задачи</i> . . . . .	192
Глава VIII. Распространение электромагнитных волн . . . . .	193
§ 1. Плоские волны в неограниченной однородной непроводящей среде . . . . .	193
§ 2. Распространение волн в неограниченной однородной проводящей среде . . . . .	199
§ 3. Отражение и преломление волн на плоской границе раздела двух сред . . . . .	203
§ 4. Свойства направленных поперечных волн . . . . .	211
§ 5. Распространение направленных продольно-поперечных волн . . . . .	218

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга излагает первую часть двухсеместрового курса электродинамики, который я читал несколько лет для студентов физического факультета Московского университета. Первая часть курса посвящалась изложению макроскопической (феноменологической) электродинамики, в которой в основном не затрагивались вопросы атомизма электричества (во второй части курса рассматривались основы микроскопической электродинамики).

При подготовке лекций к печати я сознательно избегал дополнений, чтобы подчеркнуть объем знаний по этой главе теоретической физики, предъявляемый в настоящее время к студентам-физикам, вне зависимости от их узкой специализации.

*А. Власов*



## ГЛАВА I

### ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

#### § 1. Заряд, напряженности поля $E$ и $H$ в вакууме

Приступая к изучению электромагнитных явлений, выделим прежде всего основные величины, характеризующие эти явления. Такими величинами являются следующие три категории величин: а) электрический заряд  $e$  и напряженность электрического поля  $E$ , магнитный заряд  $m$  и напряженность магнитного поля  $H$ , б) векторы электрической и магнитной индукции  $D$  и  $B$ , в) векторы электрической и магнитной поляризации  $P$  и  $M$  и вектор плотности тока  $j$ .

Дать в физике определение физической величине, свойствам изучаемого объекта, — это значит установить связь, взаимоотношения изучаемых свойств, величин с другими свойствами и с другими величинами. При этом «свойства данной вещи не создаются ее отношением к другим вещам, а лишь обнаруживаются в таком отношении...» (К. Маркс и Ф. Энгельс, соч., т. 27, стр. 66). Установление такой связи опирается на опыт или на обобщение опытных данных. Определение физической величины должно включать в себя также анализ экспериментальных возможностей ее количественного выявления. Абстрактное определение тех или иных свойств вне связи с другими свойствами является метафизическим.

Мы будем считать ясными такие понятия, как наэлектризованное или намагниченное тело, подразумевая под этим то состояние вещества, которое может быть получено известными элементарными опытами.

При определении величин  $e$ ,  $E$ ;  $m$ ,  $H$  макроскопическая электродинамика опирается на силы, действующие между наэлектризованными (намагниченными) телами, т. е. определяет эти величины через посредство статических сил взаимодействия между ними.

Пусть имеется некоторое наэлектризованное тело  $A$  и несколько наэлектризованных пробных тел  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ..., в отношениях с которыми мы изучаем свойства интересующего нас тела и положением которых мы можем распорядиться, не нарушая заметным образом состояния электризации изучаемого тела. Опыт показывает, что силы

$F_a$  и  $F_b$ , действующие со стороны изучаемого неподвижного тела на два в разной степени наэлектризованных тельца, последовательно помещаемых в одну и ту же точку пространства, одинаковы по направлению, но различны по величине, так что

$$\frac{F_a}{F_b} = \text{скаляр.} \quad (1.1)$$

Если те же тельца поместить в другую точку пространства, то получим силы  $F'_a$ ,  $F'_b$  (т. е. сила  $F$  есть функция пространственных координат), но отношение этих сил останется прежним:

$$\frac{F_a}{F_b} = \frac{F'_a}{F'_b}. \quad (1.2)$$

Таким образом, скалярная величина не зависит от координат, а определяется только свойствами пробных тел.

Соотношения (1.1) и (1.2) можно удовлетворить, полагая

$$F_a = e_a E(x, y, z), \quad F_b = e_b E(x, y, z), \quad (1.3)$$

где  $e_a$  и  $e_b$  — постоянные, не зависящие от координат, но определяемые свойствами пробных тел, а  $E$  — векторная функция пространственных координат, не зависящая от свойств пробных тел. В таком случае имеем:

$$\frac{F_a}{F_b} = \frac{e_a}{e_b}. \quad (1.4)$$

Постоянные  $e_a$  и  $e_b$  называются зарядами пробных тел. Если одну из этих постоянных принять за единицу, то тем самым выбирается мера определения заряда любых других тел.

Соотношения (1.3) приводят к определению напряженности электрического поля

$$E = \frac{F}{e} \quad (1.5)$$

как силы, действующей на единицу положительного заряда.

Отношение (1.4) допускает существование как положительных, так и отрицательных зарядов, поскольку оно может иметь как положительный, так и отрицательный знак. Опыт подтверждает такую возможность: наэлектризованные тела имеют или положительный, или отрицательный заряд. Положительными зарядами принято называть те заряды, которые появляются на стекле при натирании его шелком или фланелью.

Аналогичным образом можно выявить и магнитные характеристики. С помощью магнитных пробных тел (каковым, например, может служить один из концов намагниченной спицы, настолько длинной, чтобы можно было пренебречь силою, действующей на другой конец) мы устанавливаем величину «магнитного заряда»  $m$  и напряженности магнитного поля  $H$ , определяемых аналогично элек-



трическому заряду и электрической напряженности. Основное соотношение здесь будет:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \quad (1.6)$$

Вопрос о природе аналогии и разнице между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ,  $e$  и  $m$  не может быть решен лишь на основе приведенного способа выявления свойств полей и требует дополнительного анализа.

Сделаем следующие замечания к приведенным характеристикам электромагнитных явлений:

а) Сам факт существования величин  $e$ ,  $\mathbf{E}$ ;  $m$ ,  $\mathbf{H}$  не требует строгой фиксации какого-либо вполне определенного закона взаимодействия между заряженными частицами, так как при выявлении этих величин мы не пользовались законом Кулона. Эти величины могут отображать свойства электромагнитного поля и в случае отступления при известных условиях закона Кулона от действительного закона взаимодействия. Значение этого обстоятельства заключается в том, что понятия заряда, напряженности поля могут иметь место для различных физических полей не только электромагнитных. Например, в ядерной физике имеется понятие «ядерный заряд» — величина, характеризующая интенсивность взаимодействий уже не электромагнитной природы.

Заметим, что до тех пор, пока неизвестен закон взаимодействия между зарядами, соотношения (1.4) и (1.5) не дают возможности установить размерность заряда. Заряд в указанных соотношениях есть величина новой размерности (в сравнении с силой — исходной величиной в рассмотрении). Однако о численном значении заряда можно сделать вполне однозначное заключение путем сравнения с величиной заряда, принятой за единицу.

б) Поскольку  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  суть функции координат и не зависят от природы пробного тельца, хотя и обнаруживаются с помощью этого тельца, можно утверждать о существовании электромагнитного поля как объективной реальности, которая обнаруживается в каждой точке пространства или электрической напряженностью  $\mathbf{E}$ , или магнитной напряженностью  $\mathbf{H}$ , или тем и другим вместе.

Вопрос об инерциальных свойствах заряда остается на данном этапе изложения открытым, так как выше устанавливались свойства заряда по отношению только к статическим силам взаимодействия между покоящимися зарядами.

Очевидно, что в отношении к силам взаимодействия покоящихся тел электрический заряд и магнитный заряд — величины равноправные, разница между ними выявляется только в отношениях к другим явлениям.

в) Введение основных величин, характеризующих электромагнитные явления, связано с определенными ограничениями. Прежде всего пробные тельца должны обладать особыми свойствами. Так, они

должны иметь точную локализацию в пространстве координат (и скоростей), т. е. обладать строго фиксированными значениями координат и скоростей и, следовательно, не подвержены флуктуациям в положениях и скоростях. В противном случае они потеряют свое назначение — определение напряженности полей как вполне определенных векторных функций координат. Пробные тельца должны обладать также сколь угодно малым зарядом, ибо в противном случае они будут менять распределение зарядов на исследуемом теле, и равенство (1.2) будет нарушено.

Ясно, что столь сильные ограничения оставляют открытым вопрос о том, насколько развитые представления о поле могут быть перенесены в область порядка пространственных размеров элементарных частиц, где исследование поля с помощью таких пробных телец противоречит самой природе явлений.

Условия, накладываемые на пробные тельца при обнаружении свойств поля и выраженные в определении основных величин, характеризуют своеобразную черту электродинамики: электродинамика формулируется как проблема, по крайней мере, двух тел, из которых состояние одного (пробного) всегда строго фиксировано.

Однако, в какой степени указанные обстоятельства ограничивают саму теорию или присущи только ее форме, является одним из не вполне уясненных вопросов электродинамики.

## § 2. Напряженности полей в веществе.

### Векторы $D$ , $B$ , $P$ , $M$ , $j$

Выше даны были определения напряженности полей  $E$  и  $H$  в вакууме. Понятия напряженности поля в веществе должны быть дополнительно рассмотрены. Детализация смысла напряженности электрического поля в веществе требует дополнительных данных о структуре диэлектрической среды и о некоторых общих свойствах поля как результата данных опыта. В электродинамике принимается, что диэлектрическая среда в каждой пространственной точке состоит из положительных и отрицательных зарядов, точно компенсирующих друг друга в неполяризованном состоянии. При наличии внешнего поля возникает взаимное смещение зарядов, обусловленное действием этого поля: диэлектрик поляризуется.

Заряды в диэлектрике, появляющиеся при поляризации, принято называть «связанными зарядами»; они принадлежат самой диэлектрической среде. Заряды же, возникающие на телах при их электризации, называются «свободными зарядами». Обозначим плотность связанных зарядов через  $\rho_{св}$ , а напряженность поля, создаваемую связанными зарядами, через  $E_{св}$ .

Существует опытный факт, что общая напряженность поля, создаваемая разными источниками поля, всегда равна сумме напряженно-

сти полей, создаваемых каждым источником порознь. Этот опытный факт носит название принципа аддитивности полей и лежит в основе электродинамики. На основании этого принципа определим напряженность поля в веществе как сумму поля, создаваемого внешними источниками,  $E_p$  и поля, создаваемого связанными зарядами поляризованного диэлектрика,  $E_{св}$ :

$$E = E_p + E_{св}. \quad (1.7)$$

Важно установить экспериментальную возможность определения поля  $E$ , так как процесс измерения потребует нарушения диэлектрика путем вырезания полостей для помещения пробного заряда. Измеряемое поле  $E_{изм}$  равно:

$$E_{изм} = E + \delta E,$$

где  $\delta E$  — искажение поля, обусловленное наличием полости. Определим условия опыта, при которых  $\delta E$  можно сделать как угодно малым. Это достигается выбором игольчатой полости, параллельной направлению поляризации, так как в этом случае возможное искажение поля будет обусловлено только концами игольчатой полости, на поверхности которых появятся при поляризации заряды, принадлежащие самой диэлектрической среде. На боковой поверхности игольчатой полости не будет нормальных составляющих к поверхности полости смещений связанных зарядов и по этой причине боковая часть поверхности не внесет искажений в поле. При достаточно длинной игольчатой полости влияние связанных зарядов на ее концах может быть сделано сколь угодно малым (т. е.  $\delta E \rightarrow 0$ ). Поэтому измерения в игольчатой полости дают нам возможность измерить напряженность электрического поля в диэлектрической среде без заметного искажения всего поля.

Иное имеет место в случае дискообразной полости. Сила, действующая на единицу положительного заряда, помещенного в дискообразную полость, перпендикулярную направлению электрического поля в диэлектрической среде, не будет, очевидно, равна напряженности электрического поля, поскольку на параллельных плоскостях диска выступают связанные заряды противоположных знаков, поле которых остается конечным при уменьшении толщины дискообразной полости. Обозначим силу, действующую на единицу положительного заряда в такой дискообразной полости, через  $D$  (вектор электрической индукции). Можно установить, что эта сила является функцией напряженности электрического поля, причем эта функция в определенных условиях имеет очень простой вид. В самом деле, воспользовавшись разложением

$$D(E) = D(0) + \left(\frac{\partial D}{\partial E}\right)_0 E + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial E^2}\right) E^2 + \dots, \quad (1.8)$$

причем  $D(0) = 0$ , так как при  $E = 0$  нет связанных зарядов, выражение (1.8) можно записать так:

$$D(E) = \varepsilon E,$$

где

$$\varepsilon = \left( \frac{\partial D}{\partial E} \right)_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial E^2} \right)_0 E + \dots$$

при малых полях  $E$ , можно считать коэффициент  $\varepsilon$  не зависящим от поля. Для изотропных сред, очевидно,

$$D = \varepsilon E. \quad (1.9)$$

Поскольку размерности величин  $D$  и  $E$  одинаковы, постоянная  $\varepsilon$  является безразмерным коэффициентом, характеризующим среду, он называется коэффициентом диэлектрической проницаемости или просто диэлектрической постоянной.

Совершенно аналогично для силы, действующей на единицу магнитного заряда в дискообразной полости, вырезанной в веществе, будем иметь:

$$B = \mu H, \quad (1.10)$$

где  $B$  носит название вектора магнитной индукции, а  $\mu$  — коэффициента магнитной проницаемости.

Состояние поляризации диэлектрической среды можно характеризовать некоторым вектором, отнесенным к единице объема. Пусть  $\rho_{св}$  — связанный заряд одного знака, приходящийся на единицу объема диэлектрической среды. Тогда, по определению, электрический момент, возникающий в элементе объема  $\Delta\tau$  равен:  $\Delta p = \rho_{св} \Delta\tau \xi$ , где  $\xi$  — вектор смещения связанных зарядов. Относя электрический момент к единице объема, определим вектор поляризации:

$$P = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta\tau}. \quad (1.11)$$

Полный электрический момент некоторого объема  $V$  будет выражаться через вектор поляризации следующим образом:

$$p = \int_V P \, d\tau.$$

Аналогично вектор намагничивания  $M$  определяется формулой

$$M = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau}, \quad (1.12)$$

где  $\Delta m$  — вектор магнитного момента объема  $\Delta\tau$ .

Установим связь между двумя типами векторов, характеризующих состояние среды, а именно, между  $B$  и  $M$  и между  $D$  и  $P$ .

Дискообразная полость играет роль плоского конденсатора (рис. 1) с поверхностной плотностью заряда  $\sigma_{св}$ . Тогда поле внутри полости складывается из поля  $E$  и поля  $E_{св}$ , созданного связанными зарядами.

В плоском конденсаторе  $E_{св} = 4\pi\sigma_{св}$  и, таким образом,

$$D = E + 4\pi\sigma_{св}. \quad (1.13)$$

Убедимся теперь, что численно  $\sigma_{св} = P$ . Для этой цели рассмотрим поляризацию цилиндрического элемента объема с основанием  $dS$  на поверхности дискообразной полости и с образующей, равной смещению  $\xi$  связанных зарядов. Электрический момент этого объема равен:  $dp = P d\tau = p_{св} d\tau \xi$ , а так как  $\xi p_{св} = \sigma_{св}$ , то  $dp = P d\tau = \sigma_{св} d\tau$  и, следовательно,

$$P = \sigma_{св}.$$

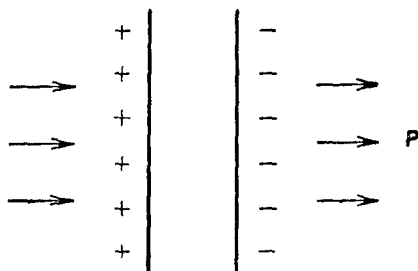


Рис. 1.

Таким образом, если учесть направление вектора поляризации, то связь между вектором электрической индукции и вектором поляризации диэлектрика выразится так:

$$D = E + 4\pi P, \quad (1.14)$$

т. е. вектор электрической индукции есть сумма двух физически разных векторов.

Только использованный выше способ определения  $D$  как силы, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в дискообразную полость, позволил объединить их в один вектор.

Ранее мы выяснили, в какой мере сам факт существования величин  $e$ ,  $m$ ,  $E$ ,  $H$  определяется конкретизацией закона взаимодействия между зарядами. Поставим аналогичный вопрос о соотношении (1.14). При получении этого соотношения была использована формула для напряженности электрического поля в плоском конденсаторе  $E_{св} = 4\pi\sigma_{св}$ . Это значит, что принят был закон Кулона для взаимодействия между зарядами. Выясним, в какой мере изменится соотношение (1.14) при изменении этого закона.

Опираясь только на сам факт зависимости  $\sigma_{св}$  от  $E$  и считая возможным разложение функции  $\sigma_{св}$  в ряд по степеням  $E$ , имеем:

$$\sigma_{св} = \sigma_{св}(0) + \left(\frac{\partial\sigma_{св}}{\partial E}\right)_0 E + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\sigma_{св}}{\partial E^2}\right)_0 E^2 + \dots,$$

откуда, учитывая, что в отсутствии поля  $\sigma_{св} = 0$ , получим при малых  $E$ :

$$\sigma_{св} = \alpha E,$$

где  $\alpha(x, y, z)$  — коэффициент пропорциональности, который только для закона Кулона не зависит от координат и равен  $4\pi$ .

Таким образом, в любом случае произвольного закона сил взаимодействия между электрическими зарядами нужно писать

$$D = E + \alpha \sigma_{св},$$

а так как связь между  $\sigma_{св}$  и  $P$  не требовала конкретизации этого закона ( $\sigma_{св}$  всегда численно равна  $P$ ), то окончательно имеем:

$$D = E + \alpha P. \quad (1.15)$$

Аналогично можно установить связь между вектором магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и вектором намагничивания  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}. \quad (1.16)$$

Плотность тока определяется формулой

$$j = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{\Delta S},$$

где  $\Delta J$  — сила тока, проходящего через перпендикулярное ему сечение  $\Delta S$ . В изотропных средах направление тока совпадает с направлением напряженности электрического поля. Предполагая возможность разложения функциональной связи  $j = j(E)$  в ряд, имеем:

$$j(E) = j(0) + \left(\frac{\partial j}{\partial E}\right)_0 E + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 j}{\partial E^2}\right)_0 E^2 + \dots \quad (1.17)$$

Учитывая, что в отсутствии поля  $j(0) = 0$ , и ограничиваясь только линейным приближением, получаем:

$$j = \sigma E,$$

где  $\sigma$  — коэффициент электропроводности должен заимствоваться из опыта. Принимая во внимание отмеченную выше связь между направлениями  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ , окончательно имеем:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.18)$$

Это соотношение, имеющее место в каждой точке любой изотропно проводящей среды, соответствует известному из общего курса физики выражению связи между током  $J$  и разностью потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1$

$$J = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R}, \quad R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S},$$

где  $\sigma$  — коэффициент удельной электропроводности. Такая связь, однако, справедлива только для однородных проводников цилиндри-

ческой формы. Но в неоднородном проводнике произвольной формы мы можем выделить бесконечно малый цилиндр и написать

$$\Delta J = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \Delta S \sigma,$$

или

$$j = \lim_{\Delta S} \frac{\Delta J}{\Delta S} = \sigma E.$$

Если учтем, что в изогранных средах вектора  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  совпадают по направлению, то

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Таким образом, действительно, соотношение, связывающее  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ , полученное с помощью разложения в ряд (1.17), соответствует закону Ома, известному из курса общей физики.

Полученное соотношение (1.18) представляет собою связь между током и полем, которая имеет место в каждой точке проводящей среды. Поэтому это соотношение часто называют дифференциальной формой связи между током и электрическим полем, справедливой и для неоднородной среды и для переменного во времени поля.

### § 3. Уравнения состояния

Назовем соотношения, в которые входят постоянные, характеризующие свойства сред, уравнениями состояния сред. Такими уравнениями являются следующие три уравнения:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.19)$$

Разложения в ряд (1.8) и (1.17), приведшие к установлению этих уравнений, не накладывают каких-либо ограничений на поля и характеристики сред в смысле зависимости их от координат и времени. В общем случае характеристики сред могут быть функциями координат и времени:

$$\epsilon = \epsilon(x, y, z, t), \quad \mu = \mu(x, y, z, t), \quad \sigma = \sigma(x, y, z, t).$$

Первые два уравнения для сред могут быть выражены через вектор поляризации  $\mathbf{P}$  и вектор намагничивания  $\mathbf{M}$ :  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$ , с другой стороны,  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . Следовательно,

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{H}. \quad (1.20)$$

Поставим вопрос, как, ограничиваясь линейным приближением исходных уравнений для сред, учесть анизотропию в диэлектрических, магнитных свойствах или в свойствах электропроводности?

Усложнение, очевидно, в случае анизотропии заключается в следующем. Например, в изотропном случае  $D_x$  есть функция только  $E_x$

$$D_x = D_x(E_x).$$

Для анизотропной же среды этого уже не будет:

$$D_x = D_x(E_x, E_y, E_z).$$

Разлагая в ряд по степеням  $E_x, E_y, E_z$  и ограничиваясь линейными членами, получим:

$$D_x = \epsilon_{11}E_x + \epsilon_{12}E_y + \epsilon_{13}E_z;$$

аналогично

$$D_y = \epsilon_{21}E_x + \epsilon_{22}E_y + \epsilon_{23}E_z;$$

$$D_z = \epsilon_{31}E_x + \epsilon_{32}E_y + \epsilon_{33}E_z.$$

Таким образом, вместо диэлектрической постоянной  $\epsilon$ , т. е. одного скаляра, анизотропная диэлектрическая среда характеризуется величинами, составляющими трехрядную матрицу

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

Совершенно аналогичным образом обобщаются на анизотропный случай остальные два уравнения состояния.

Важно отметить, что значение величин  $\epsilon_{ik}, \mu_{ik}, \sigma_{ik}$  зависит от ориентации осей координатной системы относительно так называемых кристаллографических осей решетки твердого тела — диэлектрика, магнетика, металла, обладающих анизотропными свойствами.

Как показывает опыт, электрические токи в проводящей среде могут быть вызваны не только электрическим полем, но и другими причинами. Например, в случае разности концентраций зарядов возникают токи диффузионного происхождения, в случае разности температуры — токи термического происхождения. В этих или подобных случаях причина, вызывающая ток, может быть отображена дополнительным полем «сторонних» сил  $E^{\text{стор}}$ , вообще говоря, неэлектрического происхождения. Разлагая в ряд функциональную связь  $j = f(E + E^{\text{стор}})$ , получаем обобщенный закон Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}), \quad (1.21)$$

справедливый и для тех точек проводящей среды, в которых действуют сторонние силы. Например, при наличии разности концентрации  $\rho$  или температур  $T$  имеем:

$$\sigma \mathbf{E}^{\text{стор}} = -D \text{grad } \rho; \quad \sigma \mathbf{E}^{\text{стор}} = -b \text{grad } T,$$

где  $D$  — коэффициент диффузии,  $b$  — термический коэффициент.



Сделаем следующие замечания к уравнениям состояния:

а) В уравнениях (1.19) среда и вакуум представляют одну и ту же физическую субстанцию, поскольку эти среды отличаются лишь численным значением основных констант (для вакуума  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$ ). Вопрос о соотношении свойств сред и вакуума — центральный и принципиальный вопрос электродинамики. Как мы увидим далее, на разных этапах развития электродинамики этот вопрос решался различно. Вакуум как пространственное вместилище, полностью оторванное от материи, не приемлем с позиций диалектического материализма, согласно которому пространство и время являются формами существования материи и «без материи суть ничто, пустые представления, абстракции, существующие только в нашей голове»<sup>1)</sup>.

б) Может показаться, что уравнения состояния (1.19) получены только при одном предположении о линейности связи между величинами, характеризующими среду ( $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$ ) с напряженностями поля ( $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ), так как при их получении использовалось только разложение в ряд Тейлора по величине напряженности поля. Такое заключение является, однако, неправильным. В самом деле, сам факт предположения о функциональной зависимости, например вида  $\mathbf{j} = f(\mathbf{E})$ , является ограничением, так как тем самым предполагается, что плотность тока зависит от поля в той же точке пространства. Этим предположением, вообще говоря незаконным, исключаются, например, зависимости плотности тока от значения напряженности в как угодно близких точках пространства. Математически такие зависимости определяются не функциями, а функционалами. В случае «изотропных» зависимостей связь между  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  в разных точках пространства будет определяться только расстоянием между этими точками. Если в элементе объема  $d\tau' = dx' dy' dz'$  напряженность поля равна  $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ , то это значение обуславливает в точке  $\mathbf{r}$  плотность тока  $d\mathbf{j}(\mathbf{r}) = K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\tau'$  (рис. 2), где коэффициент пропорциональности  $K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  определяет интенсивность связи между  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  в разных точках пространства. Полное значение плотности  $\mathbf{j}$  в точке  $\mathbf{r}$  определяется полным вкладом от полей во всех других точках. Таким образом, имеем:

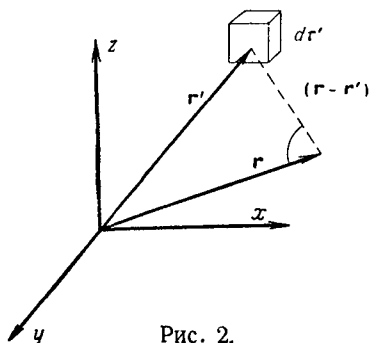


Рис. 2.

$$\mathbf{j} = \int V K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (1.22)$$

Связь такого типа носит название линейного функционала.

<sup>1)</sup> Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1950, стр. 187.

В частном случае, когда напряженность поля не зависит от координат, имеем:

$$\mathbf{j} = E \int_V K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\tau'.$$

Для всех точек, достаточно удаленных от границ по сравнению с радиусом сферы действия функции  $K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ , можно при интегрировании по точкам  $\mathbf{r}'$  положить  $V \rightarrow \infty$ , так как вклад от интегрирования по области, бóльшей указанной сферы действия, будет мал. Поэтому

$$\int_{V \rightarrow \infty} K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\tau' = 4\pi \int_0^{\infty} K(R) R^2 dR$$

и, следовательно,

$$\mathbf{j} = E \cdot 4\pi \int_0^{\infty} K(R) R^2 dR,$$

что совпадает с законом Ома, если положить

$$\sigma = 4\pi \int_0^{\infty} K(R) R^2 dR.$$

При дополнительных предположениях линейный функционал может быть заменен соотношением между величинами в одной точке, содержащим, однако, производные сколь угодно высокого порядка. Вводя новую переменную интегрирования  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , можно написать

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}') = E(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = E(\mathbf{r}) - \sum (x - x'_i) \frac{\partial}{\partial x'_i} E(\mathbf{r}) + \\ + \frac{1}{2} \sum \sum (x - x_i)(x - x_j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} E(\mathbf{r}) - \dots \\ (x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z); \end{aligned}$$

после подстановки в (1.22) и интегрирования получим:

$$\begin{aligned} \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) E(\mathbf{r}') d\tau' = \sigma E + \sigma_2 \Delta E + \sigma_4 \Delta^2 E + \dots \quad (1.23) \\ \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \end{aligned}$$

где

$$\sigma = \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\tau', \quad \sigma_2 = \frac{1}{6} \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^2 d\tau' \text{ и т. д.}$$

Отсюда заключаем, что замена функциональных связей алгебраическими является оправданной только в случае полей, не особенно быстро изменяющихся в пространстве, когда высшими производными по координатам можно пренебречь. Такое ограничение соответствует предположению, что поле мало меняется на протяжении характерной длины  $r_0$ , определяющей «сферу действия» функциональных связей:

$$r_0^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \frac{\frac{1}{6} \int_0^{\infty} K(s) s^2 ds}{\int_0^{\infty} K(s) ds}; \quad \frac{r_0^2 \Delta E}{E} \ll 1.$$

Вид ядер  $K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  в феноменологической теории должен быть заимствован из опыта. В микроскопической электродинамике эти ядра, как и значение постоянных  $\sigma$ ,  $\mu$ ,  $\epsilon$ , должны определяться из динамики микрочастиц. Ограничиваясь только двумя членами в разложении (1.23), получаем:

$$\mathbf{j} = \sigma(1 + r_0^2 \Delta) \mathbf{E}. \quad (1.22')$$

в) Особо следует оговорить обобщение уравнений состояния на случай полей, переменных во времени. Поскольку классические уравнения состояния не учитывают наиболее общих свойств инерционности всех величин, связанных с электрическим и магнитным состоянием сред (если исчезает  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ , то по уравнениям состояния мгновенно исчезают  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{M}$ ), то макроскопические уравнения состояния могут претендовать на правомерность только в случае не очень быстро изменяющихся полей, когда роль инерционных свойств не является существенной. Положение здесь вполне аналогично предыдущему случаю. Введение функциональных связей позволяет ввести «трение», «инерцию» и другие эффекты.

Если, например, необходимо учесть эффекты трения при электризации или намагничивании, вводят так называемые гистерезисные связи между величинами. Поскольку необратимые явления существенно отделяют прошлое от будущего, полагают

$$\mathbf{D}(t) = \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau, \quad (1.24)$$

тем самым причинно связывая  $\mathbf{D}$  в момент времени  $t$  с  $\mathbf{E}$  во все предыдущие моменты времени; ядро  $K(t - \tau)$  определяет интенсивность этой связи.

Вводя новую переменную интегрирования  $t - \tau = s$  и ограничиваясь случаем дифференцируемого векторного поля  $\mathbf{E}$ , имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t K(t - \tau) E(\tau) d\tau &= \int_0^{\infty} K(s) E(t - s) ds = \\ &= \int_0^{\infty} K(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n E}{\partial t^n} s^n ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{\partial^n E}{\partial t^n} \int_0^{\infty} K(s) s^n ds. \end{aligned}$$

Функциональную связь (1.24) можем записать теперь так:

$$\mathbf{D} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} K(s) s^n ds \cdot \frac{\partial^n \mathbf{E}}{\partial t^n}. \quad (1.25)$$

Соотношение (1.25) содержит как четные, так и нечетные производные по времени и поэтому явно представляет необратимую связь между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  в наиболее общей форме. Это указывает на ограниченность классических уравнений для сред, а именно: на тот случай, в котором характеристики сред ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ) являются недостаточными.

#### § 4. Силовые линии в криволинейных координатах

Векторные поля могут быть охарактеризованы семейством линий, которые в каждой точке касаются вектора, характеризующего поле ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и т. д.). Такие линии носят название векторных или силовых линий. Найдем дифференциальные уравнения силовых линий в произвольной криволинейной ортогональной системе координат. Пусть  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  — единичные векторы, определяющие направление криволинейных координат, вообще говоря, разные для разных точек поля ( $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ). Криволинейные координаты, координатные линии которых в каждой точке поля взаимно перпендикулярны ( $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = 0$ , при  $i \neq k$ ) называются ортогональными.

Квадрат длины бесконечно малого расстояния между двумя точками в ортогональных координатах выражается квадратичной формой:

$$dl^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \quad (1.26)$$

где  $H_i(q_1, q_2, q_3)$  — метрические коэффициенты, определяющие конкретный вид ортогональных криволинейных координат.

Рассмотрим, например, приращение радиуса вектора  $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ :

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3.$$

Составим производную  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$ . Поскольку при дифференцировании по  $q_1$

координаты  $q_2$  и  $q_3$  считаются постоянными, вектор перемещения  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1$  направлен вдоль координатной линии  $q_1$  и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = H_1 \mathbf{e}_1,$$

где  $H_1(q_1, q_2, q_3)$  — длина вектора  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$ . Таким образом, имеем:

$$d\mathbf{r} = H_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + H_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + H_3 dq_3 \mathbf{e}_3.$$

Возводя в квадрат и учитывая условие ортогональности  $(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k) = 0$  ( $i \neq k$ ) и нормировки  $(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k) = 1$  ( $i = k$ ), получим для квадрата длины выражение (1.26). Итак, величина бесконечно малого перемещения вдоль криволинейной координаты  $q_1$ , равной

$$dl_1 = H_1 dq_1; \quad (1.27)$$

аналогично

$$dl_2 = H_2 dq_2, \quad dl_3 = H_3 dq_3.$$

Для прямоугольных координат  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$  элементарные перемещения вдоль координатных осей равны  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , следовательно,  $H_1 = H_2 = H_3 = 1$ .

Для цилиндрических координат  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  имеем:

$$dl_1 = d\rho, \quad dl_2 = \rho d\varphi, \quad dl_3 = dz; \quad H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1$$

и

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Для сферических координат  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  имеем:  $dl_1 = dr$ ,  $dl_2 = r d\theta$ ,  $dl_3 = r \sin \theta d\varphi$  и поэтому

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r \sin \theta;$$

отсюда

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Рассмотрим вектор

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3) \mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3) \mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3) \mathbf{e}_3.$$

Этот вектор совпадет с направлением вектора  $d\mathbf{r}$ , если отношение их проекций постоянно, таким образом, дифференциальные уравнения силовых линий в произвольной системе криволинейных ортогональных координат должны иметь вид

$$\frac{H_1 dq_1}{a_1} = \frac{H_2 dq_2}{a_2} = \frac{H_3 dq_3}{a_3}. \quad (1.28)$$

Например, уравнение для силовых линий в прямоугольной и цилиндрической системах координат имеют вид

$$\frac{dx}{E_x(x, y, z)} = \frac{dy}{E_y(x, y, z)} \neq \frac{dz}{E_z(x, y, z)}, \quad (1.29)$$

$$\frac{d\rho}{E_\rho(\rho, \varphi, z)} = \frac{\rho d\varphi}{E_\varphi(\rho, \varphi, z)} = \frac{dz}{E_z(\rho, \varphi, z)}. \quad (1.30)$$

### Задачи

1. В какой мере основные величины электродинамики  $e$ ,  $m$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$  и соотношения  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$  связаны с конкретизацией закона электрических (магнитных) взаимодействий?

2. В определении каких величин электродинамики использован принцип аддитивности электрических (магнитных) взаимодействий?

3. Какие физические ограничения имеют в виду, предполагая функциональную связь между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ ?

## ГЛАВА II

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ КАК ОБОБЩЕНИЕ ОПЫТНЫХ ФАКТОВ

#### § 1. Закон взаимодействия между точечными зарядами и его обобщение

Одним из фундаментальных опытных законов, лежащих в основе современной электродинамики, является закон взаимодействия между зарядами (закон Кулона). Этот закон формулируется для предельного случая точечных зарядов, под которыми понимают заряженные тела, с линейными размерами, весьма малыми в сравнении с расстоянием между телами. В атомной физике на основании опытов по рассеянию  $\alpha$ -частиц на атомных ядрах установлена справедливость этого закона вплоть до расстояний порядка  $10^{-12}$  —  $10^{-13}$  см.

Математически этот закон записывается следующим образом:

$$F_{12} = \frac{e_1 e_2}{\epsilon r_{12}^2}. \quad (2.1)$$

Найдем обобщенную форму этого закона, справедливую для пространственно протяженных (объемных) зарядов, для неоднородной среды  $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$  и для переменного поля. Это мы можем достигнуть, переходя от закона, выраженного в конечных разностях, к дифференциальной форме закона.

Заметим, что к исходному опытному факту относится не только соотношение (2.1), или в векторной форме

$$\mathbf{D} = \frac{e}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{e}{\epsilon r^3} \mathbf{r}, \quad (2.2)$$

но и так называемый принцип аддитивности полей: в случае нескольких зарядов

$$\mathbf{D} = \sum \frac{e_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i, \quad (2.3)$$

т. е. закон (2.1) справедлив вне зависимости от наличия или отсутствия других зарядов в пространстве. Для поставленной цели важно

выразить опытный закон в интегральной форме, позволяющей осуществить в последующем переход к дифференциальной форме закона. По определению, под потоком вектора электрической индукции через произвольным образом ориентированную площадку  $ds$  (рис. 3) будем понимать выражение

$$dN = \mathbf{D} ds = D ds \cos(\mathbf{D}, ds), \quad (2.4)$$

т. е. скалярное произведение векторов  $\mathbf{D}$  и  $ds$ <sup>1)</sup>.

Проекцию вектора площадки на направление вектора  $\mathbf{D}$  обозначим через  $ds' = ds \cos(\mathbf{D}, ds)$ . Поскольку величина  $D$  известна на основании (2.2),

$$dN = \frac{e}{r^2} ds' = e d\Omega, \quad (2.5)$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла, под которым видна площадка из точки, где находится точечный заряд.

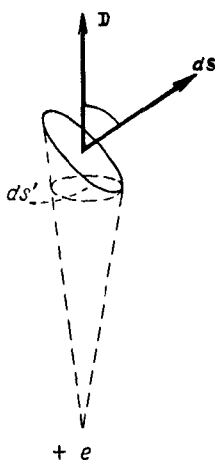


Рис. 3.

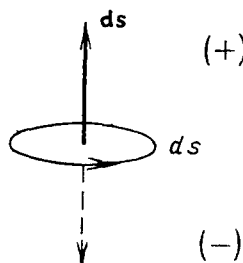


Рис. 4.

Если интересуются потоком через замкнутую поверхность, то нужно различать два случая:

а) точечный заряд находится вне замкнутой поверхности и  
б) точечный заряд находится внутри поверхности. Случай, когда точечный заряд находится на поверхности, приводит к неопределенности выражения для потока, поскольку на поверхности индукция принимает бесконечное значение.

В первом случае, как видно из (рис. 5),  $\Omega \rightarrow 0$  при стягивании всей поверхности к замкнутой, для второго случая

$$\Omega \rightarrow 4\pi.$$

<sup>1)</sup> Установление положительного направления нормали к элементарной площадке  $ds$  производится в связи с направлением обхода по контуру, ограничивающему эту площадку. Связка этих двух направлений считается положительной (см. рис. 4), если она соответствует известному правилу буравчика и называется праввинтовой связкой или праввинтовой системой координат, которая принята в этой книге.



Таким образом, для потока вектора индукции через замкнутую поверхность имеем:

$$N = \oint_S \mathbf{D} ds = \begin{cases} 0, & \text{если заряд находится вне замкнутой поверхности} \\ \text{или} & \\ 4\pi e, & \text{если заряд находится внутри замкнутой поверхности.} \end{cases}$$

На основании принципа аддитивности полей это соотношение должно иметь место независимо от того, присутствуют ли в пространстве другие заряды. Поэтому в случае нескольких заряженных точечных частиц мы можем написать для каждой частицы:

$$N_i = \oint_S \mathbf{D}_i ds = 4\pi e_i.$$

Далее

$$N = \sum_i N_i = \oint_S \left( \sum_i \mathbf{D}_i \right) ds = 4\pi \sum_i e_i.$$

Но на основании того же принципа

$$\mathbf{D} = \sum_i \mathbf{D}_i$$

и, следовательно,

$$N = \oint_S \mathbf{D} ds = 4\pi \sum_i e_i, \quad (2.6)$$

где  $\sum_i e_i$  представляет всю сумму зарядов, находящихся внутри поверхности  $S$ .

Теперь можно перейти от точечных зарядов, с которыми мы оперировали в качестве исходного опытного факта, к пространственно протяженному распределению с некоторой плотностью  $\rho = \rho(x, y, z)$

$$\sum_i e_i \rightarrow \int_V \rho d\tau.$$

Для этой цели вместо заряженных точек введем малые объемы  $\Delta\tau_i$  с зарядом в каждом объеме  $\Delta e_i = \rho \Delta\tau_i$ . В результате для полного заряда в некотором объеме  $V$  получаем:  $\sum_i \rho \Delta\tau_i$ . Заменяя в пределе суммирование интегрированием, имеем:

$$\oint_S \mathbf{D} ds = 4\pi \int_V \rho d\tau. \quad (2.7)$$

Если теперь наложить условие дифференцируемости на векторную функцию  $\mathbf{D}$  внутри объема  $V$ , то можно от интегральной формы (2.7)

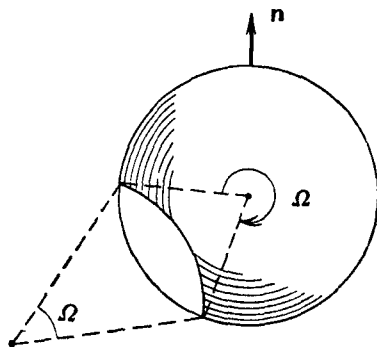


Рис. 5.

перейти к дифференциальной, воспользовавшись теоремой Остроградского о преобразовании поверхностного интеграла в объемный для произвольной дифференцируемой векторной функции  $\mathbf{D}$ :

$$\oint_S \mathbf{D} ds = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} d\tau, \quad (2.8)$$

где

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{D} ds}{\Delta\tau} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

С помощью (2.8) соотношение (2.7) можем переписать так:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} d\tau = 4\pi \int_V \rho d\tau,$$

Поскольку равенство имеет место для произвольных пределов интегрирования (объема  $V$ ), то

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (2.9)$$

Это уравнение представляет одно из основных уравнений электродинамики.

В качестве примера вычислим  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. Имеем (см. гл. I, § 4)

$$dl_i = H_i dq_i, \quad (2.9')$$

где  $H_i(q_1, q_2, q_3)$  — метрические коэффициенты, определяющие конкретный вид криволинейных ортогональных координат. Площади граней бесконечно малого параллелепипеда будут:

$$ds_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3, \quad ds_2 = H_3 H_1 dq_3 dq_1, \quad ds_3 = H_2 H_1 dq_2 dq_1,$$

а объем его равен:

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Подсчитывая суммарный поток через боковые грани, найдем:

$$\oint \mathbf{a} ds = \left\{ \frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right\} dq_1 dq_2 dq_3,$$

опуская высшие члены разложения, откуда

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\oint \mathbf{a} ds}{dV} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right\}.$$

Для цилиндрических координат ребрами бесконечно малого криволинейного параллелепипеда являются

$$dl_1 = \rho d\varphi, \quad dl_2 = \rho d\varphi, \quad dl_3 = dz.$$

Сравнение с формулами (2.9)<sup>\*)</sup> показывает, что

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1.$$

Для сферических координат

$$dl_1 = dr, \quad dl_2 = r d\theta, \quad dl_3 = r \sin \theta d\varphi$$

и, следовательно,

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r \sin \theta.$$

Таким образом, выражения  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  в цилиндрических и сферических координатах имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Сделаем несколько замечаний относительно уравнения (2.9). Прежде всего заметим, что дифференциальная форма закона Кулона, выраженная уравнением  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$ , отличается от интегральной формы  $\oint \mathbf{D} ds = \sum_i 4\pi e_i$  тем, что последняя остается справедливой и

в том случае, когда закон Кулона в исходной форме  $\mathbf{D} = \frac{e}{r^2} \mathbf{r}$  видоизменен вблизи  $r=0$ , в то время как первая форма требует его действительности всюду, в том числе на сколь угодно малых расстояниях. Полагая для указанной цели  $D = \frac{e}{r^2} f(r)$ , где  $f(r) = 1$  при  $r \gg \lambda$  и произвольна при  $r \lesssim \lambda$  ( $\lambda$  — характерная длина, отражающая линейную протяженность области, в которой закон Кулона видоизменяется), находим

$$\mathbf{D} ds = \frac{e}{r^2} f(r) ds = e f(r) d\Omega,$$

откуда

$$\oint_S \mathbf{D} ds = e \oint_S f(r) d\Omega = e \oint_S d\Omega = 4\pi e,$$

если поверхность  $s$  расположена всеми своими точками на расстояниях от зарядов, больших величины  $\lambda$ . В то время как равенство

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} d\tau = 4\pi \int_V \rho d\tau$$

справедливо только в случае осуществления закона Кулона всюду.

Мы получили уравнение (2.9), основываясь на выражении  $E = \frac{e}{\epsilon r^2}$ , где было предположено, что  $\epsilon = \text{const}$ . В итоге мы получили математическую форму связи между  $\mathbf{D}$  и  $\rho$  [формула (2.9)], которая не

теряет смысла и в том случае, когда среда неоднородна, т. е.  $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$ . Это дает основание для предположения, что найденная связь между  $\mathbf{D}$  и  $\rho$  имеет место и для неоднородных сред. В этом предположении заключено обобщение непосредственных исходных данных опыта.

Далее, вывод (2.9) основывался на экспериментальном факте о взаимодействии зарядов для статического случая. Формально уравнение (2.9) удовлетворяется и при  $\rho$  и  $\mathbf{D}$ , явно зависящих от времени. Поскольку же не имеется никаких особых указаний против применимости этого уравнения в случае изменяющихся во времени полей, примем, что это уравнение пригодно и в общем случае, когда поля и заряды зависят от времени.

Правильность сделанных обобщений должна проверяться практическими следствиями, на основе вытекающих из теории результатов.

Можно думать, что переход от точечных зарядов к объемным является только математической процедурой, не вводящей каких-либо физических гипотез. Однако это не так. Переход к непрерывности может быть оправдан, если каждый из точечных зарядов заменяется пространственно протяженным «облачком» с непрерывной пространственной плотностью заряда  $\rho(x, y, z)$ . Такая замена, однако, предполагает, что внутри каждого «облачка» силовая связь между зарядами та же, что и между отдельными «облачками», в то время как исходный опытный факт (закон Кулона) основывался на взаимодействии между отдельными зарядами, заменяя их математическими точками, ничего не предполагая о структуре самих зарядов.

Указанное предположение о сохранении закона Кулона и внутри областей, заменяющих точечные заряды, было использовано при выводе соотношения (2.9), так как требовалось, чтобы равенство

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} d\tau = 4\pi \int_V \rho d\tau$$

имело место для любых (в том числе сколько угодно малых) объемов  $V$ . Таким образом, переход от точечных зарядов к пространственно протяженным связан с весьма радикальной физической гипотезой о сохранении прежней связи зарядов с полем на сколь угодно малых интервалах.

Эта гипотеза приводит к тому, что каждое пространственно протяженное «облако», заменяющее точечный заряд, приобретает собственную потенциальную энергию, обусловленную взаимодействием отдельных элементов заряда между собой. С уменьшением размеров «облачка» собственная энергия вследствие сближения зарядов растет и делает невозможным непрерывный обратный переход от протяженных зарядов к точечным. Точечные заряды включают в себя силовую связь между собой (и следовательно, энергию взаимодействия) только

отдельных точечных зарядов; из этой силовой связи мы исходим как из фундаментального опытного факта. Поскольку экспериментально известно, что закон Кулона является неверным на расстояниях порядка  $10^{-12} \div 10^{-13}$  см, то отсюда следует, что использованная гипотеза, приводящая к установлению соотношения (2.9), также является неверной. Возникает вопрос, в какой мере соотношение  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$  чувствительно к изменению закона Кулона на малых пространственных интервалах? Этот вопрос мы рассмотрим в § 5.

Важно заметить, что рассмотренная физическая гипотеза, связанная с переходом от точечных зарядов к непрерывно протяженным, не является единственной. Переход к непрерывности может быть осуществлен с помощью введения гипотезы о статистическом характере в распределении зарядов.

Если  $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$  обозначает функцию распределения, определяющую вероятное число частиц в элементе фазового объема  $dx dy dz dv_x dv_y dv_z = d\tau dv$

$$dn = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v},$$

то вероятная плотность заряда будет:

$$\rho(x, y, z, t) = e \int_{(\infty)} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v},$$

где  $e$  — заряд каждой частицы. В этом случае дифференциальную связь заряда с полем получим в форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e \int_{(\infty)} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}.$$

Это уравнение имеет уже другой физический смысл. Оно не вводит каких-либо предположений о внутренней структуре заряженных частиц и придает уравнению  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$  статистический характер.

В заключение отметим, что закон Кулона дает возможность установить единицы измерения для всех электрических и для всех магнитных величин в электродинамике.

Именно исходя из соотношений

$$F_e = h \frac{e_1 e_2}{\epsilon r^2}, \quad F_m = k \frac{m_1 m_2}{\mu r^2},$$

где коэффициенты  $h$  и  $k$  зависят от выбора единиц измерения  $e$  и  $m$  и, обратно, полагая, во-первых,  $h = k = 1$ , во-вторых,  $\epsilon$  и  $\mu$  безразмерными коэффициентами, единицы измерения  $e$  и  $m$  будут уже определены по известным единицам измерения  $r$  и  $F$ . Такая система единиц носит название абсолютной или гауссовой системы измерения электромагнитных величин. Размерности обеих величин  $e$  и  $m$  будут:

$$[e] = [m] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}.$$

Единицы измерения напряженностей  $E$  и  $H$  получаются как следствие из формул

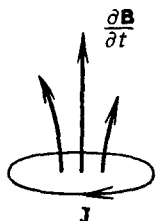
$$E = \frac{F}{e}, \quad H = \frac{F}{m};$$

$$[E] = [H] = M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}.$$

Такая же размерность у  $D$  и  $B$ , поскольку  $D = \epsilon E$ ,  $B = \mu H$ , а  $\epsilon$  и  $\mu$  — безразмерные коэффициенты.

## § 2. Обобщение опытного закона электромагнитной индукции

Опытный закон электромагнитной индукции (Фарадея) является вторым из фундаментальных законов, лежащих в основе электродинамики. Как известно, опыт дает, что в замкнутом проводнике индуцируется электрический ток, когда изменяется поток магнитной индукции, проходящий через поверхность, ограниченную контуром проводника (рис. 6). Количественные соотношения в этом явлении таковы:



$$\mathcal{E} = JR = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int_S B ds, \quad (2.10)$$

Рис. 6.

где  $\mathcal{E}$  — электродвижущая сила индукции,  $J$  — сила индуцируемого тока,  $R$  — сопротивление проводника,  $c$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения величин, фигурирующих в формуле (2.10).

Оказалось, что направление индукционного тока так связано с направлением возрастания потока индукции  $\Phi$ , что составляет с этим направлением левовинтовую систему (см. рис. 6). Поэтому, если пользоваться правовинтовой системой, надо ввести знак минус, участвующий направление индуцируемого тока:

$$JR = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S B ds. \quad (2.11)$$

Как подчеркивалось ранее, закон Кулона для электрических и магнитных зарядов дает возможность установить единицы измерения для электрических и магнитных величин. Размерности силы тока и плотность тока в абсолютной (гауссовой) системе единиц следующие:

$$[J] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}; \quad [j] = M^{1/2} L^{-1/2} T^{-2}.$$

Размерность коэффициента электропроводности  $\sigma$  определяется из формулы  $j = \sigma E$ , откуда  $[\sigma] = T^{-1}$ . Размерность сопротивления  $[R] = \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} \right] = L^{-1} T$ . Для потока магнитной индукции  $[\Phi] = [BS] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$ .

Таким образом, электрические и магнитные величины в формуле (2.11) имеют определенные единицы измерения и, следовательно, коэффициент пропорциональности  $c$  не может быть произвольным. Подставляя размерности величин в правую и левую часть, легко находим размерность этого коэффициента  $[c] = LT^{-1}$ , совпадающую с размерностью скорости. Численное значение коэффициента  $c$ , полученное из опытов по электромагнитной индукции, оказалось равным  $3 \cdot 10^{10}$  см/сек.

Придадим формуле (2.11) другой вид, выразив силу индуцируемого тока (следствие явления) через первопричину — напряжение электрического поля, только при наличии которого по закону

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

и может возникнуть ток в однородном проводнике.

Для элемента длины контура  $dl$

$$dR = \frac{1}{\sigma} \frac{dl}{\Delta S},$$

где  $\Delta S$  — площадь сечения проводника. Тогда

$$J = j \Delta S = \sigma E \Delta S.$$

Следовательно,

$$\mathcal{E} = JR = \oint_L J dR = \oint_L J \frac{dl}{\sigma \Delta S} = \oint_L E dl.$$

Таким образом, электродвижущая сила  $JR$  выражается посредством контурного интеграла (циркуляции) от напряженности электрического поля вдоль всего контура проводника. Экспериментальный результат (2.10) можно поэтому сформулировать так:

$$\oint_L E dl = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S B ds.$$

Считая контур и поверхность  $s$  неподвижными и вводя поэтому производную под знак интеграла, получим:

$$\oint_L E dl = - \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial B}{\partial t} ds. \quad (2.12)$$

Поскольку интегральное соотношение (2.12) уже не содержит в себе ограничивающую специфичность — характеристик проводника, — оно сохраняет свою силу для произвольного контура, проведенного в произвольной среде, включая и вакуум. Очевидно, такое понимание (2.12) есть обобщение самого экспериментального факта, так как исторически индукция токов была открыта по измерению самих токов, а не электрической напряженности поля.

Переход к дифференциальной форме осуществлялся с помощью математической теоремы Стокса, гласящей, что для произвольной дифференцируемой векторной функции  $\mathbf{E}$  имеет место равенство

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} ds.$$

Проекция  $\text{rot } \mathbf{E}$  на нормаль к поверхности  $ds$  определяется формулой

$$\text{rot}_n \mathbf{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{E} ds}{\Delta S};$$

в декартовой системе координат

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Применяя теорему Стокса к соотношению (2.12), имеем:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E} ds = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} ds,$$

а поскольку равенство имеет место для любых пределов интегрирования

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Таким образом, закон электромагнитной индукции представлен в дифференциальной форме. Он указывает, что вихревое электрическое поле всегда связано (создается) изменением во времени вектора магнитной индукции.

В качестве примера вычислим проекции  $\text{rot } \mathbf{a}$  в произвольных ортогональных криволинейных координатах  $q_1, q_2, q_3$ . Определим проекцию  $\text{rot } \mathbf{a}$  на координатную линию  $q_1$ , для этого рассмотрим циркуляцию по бесконечно малому криволинейному прямоугольнику, ортогональному к  $q_1$ . Участок циркуляции по ребру, параллельному  $q_2$ , дает в точке  $q_3$ :

$$\int a dl = a_2 H_2 dq_2,$$

в точке  $q_3 + dq_3$

$$\int a dl = \left\{ a_2 H_2 + \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3} \right\} dq_2;$$

аналогично выясняются циркуляции на участках криволинейного прямоугольника параллельно оси  $q_2$ :

$$\int a dl = \left\{ \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3} \right\} dq_2 dq_3.$$



Деля это выражение на площадь бесконечно малого прямоугольника (см. задачу на стр. 26) со сторонами  $dq_2 dq_3$ , т. е. на

$$ds = H_2 H_3 dq_2 dq_3,$$

получаем:

$$(\text{rot } \mathbf{a})_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3} \right\}$$

и вполне аналогично

$$(\text{rot } \mathbf{a})_2 = \frac{1}{H_3 H_1} \left\{ \frac{\partial (a_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_1} \right\},$$

$$(\text{rot } \mathbf{a})_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (a_1 H_1)}{\partial q_2} \right\}.$$

Можно заметить, что компоненты  $\text{rot } \mathbf{a}$  представляют собой разложение детерминанта:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \mathbf{i} & H_2 \mathbf{j} & H_3 \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 a_1 & H_2 a_2 & H_3 a_3 \end{vmatrix}.$$

В цилиндрических координатах  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = \rho$ ,  $H_3 = 1$ , так как ребрами бесконечно малого параллелепипеда являются  $dq_1 = d\rho$ ,  $dq_2 = \rho d\varphi$ ,  $dq_3 = dz$  и поэтому проекции  $\text{rot } \mathbf{a}$  в цилиндрических координатах есть:

$$\text{rot}_\rho \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z},$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{a} = \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho},$$

$$\text{rot}_z \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho}.$$

В сферических координатах  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$  и, следовательно,  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = r$ ,  $H_3 = r \sin \theta$ . Проекциями  $\text{rot } \mathbf{a}$  в сферических координатах будут:

$$\text{rot}_r \mathbf{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (a_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi},$$

$$\text{rot}_\theta \mathbf{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r},$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta}.$$

Формулы для проекций вихря в криволинейных ортогональных системах координат можно использовать для соответствующей записи второго уравнения электродинамики (2.13) в этих проекциях.

При получении (2.13) были сделаны следующие обобщения:

а) предположено, что (2.13) имеет место для произвольной точки поля, не обязательно связанной с проводником;

б) предположено, что соотношение (2.12) имеет место для произвольной магнитной среды (как неоднородной  $\mu = \mu(x, y, z)$ ,

так и ферромагнитов). Лишь дополнительные экспериментальные факты могут внести ограничения или изменения в соотношение (2.13), так как по своей структуре оно имеет смысл и для пересеченных случаев.

Может возникнуть вопрос о существовании прямой или какой-либо косвенной связи между двумя законами:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho.$$

Поскольку при их получении использованы были независимые экспериментальные факты, пока нет каких-либо даже косвенных указаний на существование связи между ними. Поэтому закон Кулона может быть применен без автоматического изменения закона электромагнитной индукции.

### § 3. Обобщение опытных данных о магнитном поле

Из общего курса физики известно, что прямолинейный ток создает магнитное поле, величина напряженности которого зависит от расстояния  $R$  от прямолинейного тока:

$$H = \frac{2J}{cR}, \quad (2.14)$$

а направление определяется правилом буравчика. Этот простейший закон положим в качестве первого опытного факта о причинах создания магнитного поля. В формуле (2.14)  $H$  и  $J$  измерены в абсолютной системе единиц; стало быть, абсолютная единица напряженности (гаусс) в два раза меньше напряженности поля на расстоянии, равном 1 см от прямолинейного тока силы  $J=c$ . Численное значение постоянной  $c$ , как показывает опыт, совпадает со значением коэффициента  $c$  в законе электромагнитной индукции и равно  $3 \cdot 10^{10}$  см/сек.

Так же, как и прежде, попытаемся представить этот закон в такой форме, которая не содержала бы ограничивающую особенность исходного опытного положения. Для этой цели умножим правую и левую части соотношения (2.14) на  $2\pi R$ :

$$2\pi RH = \frac{4\pi}{c} J.$$

Учитывая, что вектор напряженности магнитного поля направлен по касательным к окружности, получим:

$$\oint_L H dl = \frac{4\pi}{c} J, \quad (2.15)$$

где циркуляция магнитной напряженности берется по кругу, охватывающему прямолинейный ток. Хотя соотношение (2.15) есть иная запись соотношения (2.14), однако в этой записи нет «прямолиней-

ности» контура и нет ограничений на форму траектории, по которой берется циркуляция. Это дает некоторое основание для обобщения соотношения (2.15) на случай произвольных контуров, охватывающих один или несколько токов, с суммарной силой  $J$  и произвольной диэлектрической или магнитной среды, заполняющей пространство между токами.

В таком понимании фундаментальность соотношения (2.15) для электродинамики становится очевидной.

Другой опытный факт, указывающий на иную причину создания магнитного поля, помимо токов проводимости, установлен Максвеллом. В современной экспериментальной физике его нетрудно реализовать в наиболее простейшем случае. Представим себе электрическую цепь с конденсатором. При наличии в начальный момент времени зарядов на пластинках конденсатора в такой цепи появляется электрический ток вследствие разрядки конденсатора (рис. 7). Опыт показывает, что разрыв электрического тока проводимости вследствие разомкнутости цепи не сопровождается, однако, разрывом магнитного поля. Дело происходит так, как если бы магнитное поле продолжало создаваться и внутри конденсатора некоторым током, природа которого уже не может быть связана с током проводимости, поскольку такового нет внутри конденсатора.

По указанной причине необходимо обобщение самого понятия плотности тока, как причины создания магнитного поля. Может быть поставлен опыт, количественно конкретизирующий величину циркуляции магнитного поля по контуру, охватывающему силовые линии электрического поля внутри конденсатора. Как показывает подобный опыт, циркуляция магнитного поля здесь связана с быстротой изменения потока электрической индукции через поверхность, охватываемой контуром, т. е.

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} ds. \quad (2.16)$$

Соотношению (2.16) можно придать форму, вполне аналогичную (2.15). Ввиду неподвижности контура  $L$  и поверхности  $S$  внесем производную под знак интеграла; тогда справа мы будем иметь поток вектора  $\mathbf{j}_{\text{см}}$ :

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j}_{\text{см}} ds, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

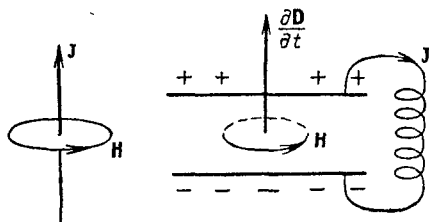


Рис. 7.

Если записать соотношение (2.15) для объемных токов ( $J = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j} ds$ ) так:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j}_{\text{см}} ds, \quad (2.18)$$

то сравнение (2.17) и (2.18) указывает, что, помимо токов проводимости с плотностью  $\mathbf{j}$ , магнитное поле (циркуляция вектора напряженности  $\mathbf{H}$ ) создается также «током смещения» по точно такому же закону.

Объединяя оба исходных факта о причинах создания магнитного поля, можем написать:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}) ds, \quad (2.19)$$

используя формулу Стокса

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{S}} \text{rot } \mathbf{H} ds,$$

приходим к третьему фундаментальному уравнению электродинамики:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.20)$$

связывающему токи проводимости и токи смещения с интенсивностями вихрей магнитного поля.

В цилиндрических координатах уравнение (2.20) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} &= \frac{4\pi}{c} j_\rho + \frac{1}{c} \frac{\partial D_\rho}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} &= \frac{4\pi}{c} j_\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial D_\varphi}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (H_\varphi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{H}_\rho}{\partial \varphi} &= \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial D_z}{\partial t}, \end{aligned}$$

а в сферических координатах

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (H_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} &= \frac{4\pi}{c} j_r + \frac{1}{c} \frac{\partial D_r}{\partial t}, \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} &= \frac{4\pi}{c} j_\theta + \frac{1}{c} \frac{\partial D_\theta}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (H_\theta r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} &= \frac{4\pi}{c} j_\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial D_\varphi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (2.20) связано с законом Кулона через посредство закона сохранения электричества. В самом деле, применив

операцию  $\text{div}$  к правой и левой части уравнения (2.20) и используя векторное тождество  $\text{div rot} \equiv 0$ , имеем:

$$\text{div } \mathbf{j} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D}.$$

Если теперь воспользуемся уравнением  $\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho$ , то получаем правильное уравнение непрерывности:

$$\text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Таким образом, нельзя видоизменять независимо уравнение (2.20) и (2.9), так как они связаны между собою требованием закона сохранения электричества.

#### § 4. Опытный факт об отсутствии магнитных зарядов, аналогичных электрическим

Как показывает опыт в макроскопической физике, нельзя выделить свободных магнитных зарядов, аналогичных свободным электрическим зарядам. Этот факт может быть количественно сформулирован некоторым дополнительным условием. Поскольку заряд в электрическом случае вполне определяется потоком вектора электрической индукции

$$\oint_S \mathbf{D} ds = 4\pi e,$$

то искомое дополнительное условие должно иметь вид

$$\oint_S \mathbf{B} ds = 0 \quad (2.21)$$

или, используя теорему Остроградского,

$$\oint_S \mathbf{B} ds = \int_V \text{div } \mathbf{B} d\tau, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (2.22)$$

Легко убедиться, что условие (2.22) не противоречит уравнению

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.23)$$

Действительно, применяя к левой и правой частям уравнения (2.23) операцию  $\text{div}$ , получим:

$$\text{div rot } \mathbf{E} \equiv 0$$

и, следовательно,

$$\text{div } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

откуда

$$\text{div } \mathbf{B} = f(x, y, z).$$

Таким образом, дополнительное условие (2.22) совместимо с уравнением (2.23), поскольку функция  $f$  — совершенно произвольна. Факт отсутствия магнитных зарядов требует  $f=0$  хотя бы для некоторого начального момента времени, ибо тогда благодаря независимости  $f$  от времени,  $f \equiv 0$  и для любого момента времени.

### § 5. Исходная система уравнений электродинамики

Выпишем теперь в качестве результата основные уравнения электродинамики как в дифференциальной, так и соответственно в интегральной форме:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}) ds, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} ds, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, & \oint_S \mathbf{D} ds &= 4\pi e, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \oint_S \mathbf{B} ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Первое из уравнений — обобщение опытных фактов об источниках вихрей магнитного поля, второе — обобщение закона электромагнитной индукции, третье — обобщение закона Кулона, четвертое выражает опытный факт об отсутствии магнитных зарядов, аналогичных электрическим. Назовем эти уравнения уравнениями поля. Кроме того, имеются еще три уравнения:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}), \quad (2.25)$$

играющие роль уравнений состояния для сред, поскольку в них входят характеристики сред — постоянные  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ .

Запишем уравнения Максвелла в прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах.

Прямоугольные координаты:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{4\pi}{c} j_y + \frac{1}{c} \frac{\partial D_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial D_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 4\pi\rho, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Цилиндрические координаты:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} &= \frac{4\pi}{c} j_\rho + \frac{1}{c} \frac{\partial D_\rho}{\partial t}, & \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} &= \frac{4\pi}{c} j_\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial D_\varphi}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} &= \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial D_z}{\partial t}; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_\rho}{\partial t}, & \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_\varphi}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 4\pi\rho, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Сферические координаты:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (H_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right] &= \frac{4\pi}{c} j_r + \frac{1}{c} \frac{\partial D_r}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} \right] &= \frac{4\pi}{c} j_\theta + \frac{1}{c} \frac{\partial D_\theta}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] &= \frac{4\pi}{c} j_\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial D_\varphi}{\partial t}; \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_r}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} \right] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_\theta}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_\varphi}{\partial t}; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} &= 4\pi\rho, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Сделаем несколько общих замечаний относительно основных уравнений поля и уравнений состояния для сред.

Последняя пара уравнений отличается от первых двух тем, что в них входят производные по времени. В некоторых задачах неизвестными являются 6 величин:  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Тогда первые два уравнения, поскольку их тоже 6, дают возможность при заданных токах определить эти неизвестные, но ввиду того, что уравнения в частных производных допускают разные решения, последние два уравнения выбирают из комплекса решений первых двух именно те, которые совместимы с условиями  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ . По этой причине вторая пара уравнений поля играет роль дополнительных условий, накладываемых общими законами на поле.

Уравнения поля и уравнения для сред — линейные. Поэтому в них автоматически выражен принцип аддитивности в его наиболее общей форме: результирующее поле, создаваемое несколькими источниками, равно сумме полей от каждого источника порознь. Это есть следствие того свойства линейных уравнений, что у них сумма частных решений есть тоже решение.

Обсудим, в какой мере основные законы электродинамики конкретизируют свойства источников поля — зарядов и токов.

В основных уравнениях выражено лишь обстоятельство, что заряд и токи являются характеристиками тех точек пространства, в которых  $\operatorname{div} \mathbf{D} \neq 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{H} \neq 0$ . О каких-либо других свойствах заряда, например об инерционных свойствах, уравнения ответа не дают, поскольку дополнительных условий на поведение зарядов макроскопическая электродинамика не накладывает.

Далее, следует остановиться на вопросе о временной обратимости или необратимости уравнений электродинамики. Как известно, уравнения считаются обратимыми во времени, если входящие в уравнение операторы не меняют знака при изменении  $t$  на  $-t$ .

К типичным необратимым уравнениям физики относится уравнение диффузии  $\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$ , указывающее на односторонний ход процесса во времени: процесс идет только в сторону выравнивания концентраций в пространстве. В противоположность этому, волновое уравнение  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi$  определяет такое движение, при котором значение  $\varphi$  может как уменьшаться, так и возрасть.

Рассмотрим прежде всего общие законы электродинамики в отсутствие проводящих сред ( $\sigma = 0$ ). Легко заметить, что в этом случае основные уравнения не меняют своего вида (остаются инвариантными) при замене или  $t \rightarrow -t$  и одновременно  $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$ , или  $t \rightarrow -t$  и одновременно  $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$  и  $\rho \rightarrow -\rho$ . Необходимость одновременного изменения знака у  $\mathbf{H}$  при изменении знака у  $t$  может быть объяснена тем, что магнитное поле пропорционально первой степени тока; плотность же тока связана со скоростью перемещения зарядов (в случае, если имеются так называемые конвекционные токи:  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ ) и поэтому так же меняет свой знак при изменении  $t$  на  $-t$ . Второй тип инвариантности связывает изменение знака времени со знаком заряда. Природа этого типа инвариантности не уяснена в современной теории. Для проводящих сред ( $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ) инвариантность при замене  $t \rightarrow -t$  нарушается, что математически и отображает необратимость электромагнитных процессов в проводниках, обусловленную наличием в них сопротивления.

В исходных уравнениях в качестве системы отсчета неявно предполагается система, связанная с экспериментальной установкой (лабораторная система отсчета; пробное тело требует для своей фиксации в пространстве систему координат, естественно связанную



с экспериментатором). Вопрос об инвариантности исходных уравнений относительно инерциальных систем рассматривается в релятивистской электродинамике, и здесь мы его касаться не будем.

Остановимся теперь на причине отсутствия симметрии между первым и вторым уравнением электродинамики (в законе электромагнитной индукции отсутствует слагаемое, аналогичное плотности электрического тока). Для выяснения этого вопроса введем плотность пока неизвестного тока  $\mathbf{j}_m$  во второе уравнение электродинамики:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m \right). \quad (2.26)$$

Выясним его физический смысл. Подействовав операцией  $\operatorname{div}$  на (2.26), получим:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_m = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B}. \quad (2.27)$$

Если мы теперь введем плотность свободных магнитных зарядов  $\rho_m$ , вполне аналогичную плотности электрических

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 4\pi \rho_m, \quad (2.28)$$

то тогда плотность тока  $\mathbf{j}_m$  должна обозначать плотность тока свободных магнитных зарядов, поскольку имеет место из (2.27) и (2.28) уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_m = - \frac{\partial \rho_m}{\partial t}. \quad (2.29)$$

Приходим к заключению, что система уравнений электродинамики содержит в себе внутренне непротиворечивую возможность включения свободных магнитных зарядов и соответствующих им токов.

Только опытные факты об отсутствии свободных магнитных зарядов, имеющиеся в настоящее время, ограничивают указанную возможность требованием  $\rho_m = 0$ , а также  $\mathbf{j}_m = 0$ , что и вносит указанную асимметрию в основные уравнения электродинамики.

В заключение этой главы рассмотрим вопрос о чувствительности основных законов электродинамики по отношению к возможному изменению закона Кулона при сближении заряженных частиц. Для ответа на этот вопрос надо было бы исходить из реально существующих законов взаимодействия между элементарными частицами, которые естественно должны переходить в закон Кулона на расстояниях, достаточно больших в сравнении с размерами элементарных частиц. Однако имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные не являются достаточными для указанной цели. Желательно на основании какой-либо общей идеи о характере взаимодействий соответственно обобщить основные уравнения и уже после этого выяснить условия перехода к обычным уравнениям.

На одной такой идее мы и остановимся. Заметим, что закон Кулона для электрического поля есть следствие не только уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

но и уравнения состояния

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}.$$

Видоизменяя только классическое уравнение состояния, мы тем самым меняем закон Кулона не для электрической индукции  $\mathbf{D}$ , а для вектора  $\mathbf{E}$ .

Классическое уравнение состояния  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  указывает, что индукция в какой-либо точке пространства зависит от значения поля  $\mathbf{E}$  только в той же точке и не зависит от значений поля даже в бесконечно близкой окрестности. Если мы хотим отказаться от указанного ограничения, мы должны по аналогии с рассмотрением на стр. 17 ввести связь между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  в виде функционала

$$\mathbf{D} = \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\tau'$$

или вообще

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\tau' + \\ & + \iint K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, + |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|) \mathbf{E}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}'') d\tau' d\tau'' + \dots \end{aligned}$$

Ограничиваясь линейным функционалом и случаем дифференцируемости подинтегральной функции  $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$  вокруг точки  $\mathbf{r}$  (см. стр. 18), можно написать

$$\mathbf{D} = \sum k_{2s} \Delta^{2s} \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (2.30)$$

где

$$\Delta^{2s} = \frac{\partial^{2s}}{\partial x^{2s}} + \frac{\partial^{2s}}{\partial y^{2s}} + \frac{\partial^{2s}}{\partial z^{2s}},$$

$$k_0 = \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\tau',$$

$$k_2 = \frac{1}{6} \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 d\tau'$$

и т. д.; следовательно, имеет место равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\tau';$$

ограничиваясь только первыми двумя числами в (2.30), имеем:

$$4\pi\rho = k_0 \operatorname{div} \mathbf{E} + k_2 \Delta \operatorname{div} \mathbf{E} = \varepsilon (1 \pm r_0^2 \Delta) \operatorname{div} \mathbf{E},$$

где положено, что  $\varepsilon = k_0$  и  $r_0^2 = \frac{k_2}{k_0}$ .

Величина  $r_0^2 = \frac{k_2}{k_0}$  имеет размерность квадрата характерной длины «радиуса действия функциональных связей». Таким образом, условие перехода в обычную теорию будет:

$$r_0^2 \frac{\Delta \operatorname{div} \mathbf{E}}{\operatorname{div} \mathbf{E}} \sim r_0^2 \frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1.$$

Другими словами, если на расстоянии порядка характерной длины  $r_0$  относительные изменения плотности заряда малы, является правильной обычной теория. Уравнение, заменяющее приближенно обычное условие  $4\pi\rho = \operatorname{div} \mathbf{D}$ , позволяет выяснить характер отступления от закона Кулона, благодаря учету нового члена  $r_0^2 \Delta \operatorname{div} \mathbf{E}$ . Полагая  $\rho$  сосредоточенным в одной точке и вводя потенциал  $\varphi$  по формуле  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ , приходим к уравнению

$$\Delta \varphi \pm r_0^2 \Delta \Delta \varphi = 0,$$

которое можно записать в двух равносильных видах:

$$\begin{aligned} \Delta (1 \pm r_0^2 \Delta) \varphi &= 0, \\ (1 \pm r_0^2 \Delta) \Delta \varphi &= 0; \end{aligned}$$

отсюда сразу находим частные решения:

$$\varphi = A \frac{e^{\pm \frac{r}{r_0}}}{r}, \quad \varphi = B \frac{\sin \frac{r}{r_0}}{r} + C \frac{\cos \frac{r}{r_0}}{r}, \quad \varphi = \frac{D}{r}.$$

При этом должно выполняться следующее условие: при  $r \rightarrow 0$  потенциал должен быть конечным, при  $r \rightarrow \infty$  он должен стремиться к нулю. Отсюда находим решение двух видов:

$$\varphi = \frac{e}{r} (1 - e^{-\frac{r}{r_0}}), \quad \varphi = \frac{e}{r} \left(1 - \cos \frac{r}{r_0}\right). \quad (2.31)$$

Эти формулы ясно указывают то изменение закона Кулона, которое обуславливается введением функциональных взаимодействий, а также дают ответ на поставленный вопрос о степени чувствительности основных уравнений электродинамики к изменению закона Кулона на малых пространственных интервалах.

Общий результат можно сформулировать так: основные уравнения макроскопической электродинамики мало чувствительны к изменению закона Кулона на малых интервалах — порядка размеров элементарных частиц. Только в областях пространства с относительно значительным изменением плотности заряда на расстояниях порядка радиуса элементарных частиц необходимо переходить к обобщениям исходных уравнений.

## Задачи

1. Вывести из основных уравнений поля исходные опытные положения: закон Кулона, закон электромагнитной индукции для линейного проводника, магнитное поле прямолинейного тока.

2. Показать, что уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$  может быть выведено из уравнения  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ , принципа сохранения заряда и дополнительного условия, которое требуется определить.

3. Показать, что уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  может быть выведено из уравнения  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  и дополнительного условия, которое требуется определить.

4. Ответить на вопросы: к какой системе координат отнести исходные уравнения; обратимы ли уравнения электродинамики; какова физическая природа асимметрии между первым и вторым уравнением; связано ли первое уравнение прямо или косвенно с законом Кулона?

---

## ГЛАВА III

### ОБЩИЕ СЛЕДСТВИЯ ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

#### § 1. Закон сохранения заряда

Закон сохранения заряда принадлежит к фундаментальным законам как макро-, так и микро-электродинамики. С точки зрения системы уравнений (2.24) он может рассматриваться как следствие первого и третьего основных уравнений электродинамики:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

В самом деле, применив операцию дивергенции к первому уравнению, имеем:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0 = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

но поскольку

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

получаем уравнение непрерывности

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (3.1)$$

Интегрирование по произвольному объему дает:

$$-\frac{\partial e}{\partial t} = \oint_S \mathbf{j} \, ds, \quad e = \int_V \rho \, d\tau. \quad (3.2)$$

Подчеркнем следующее обстоятельство. Основные уравнения теории, в особенности уравнения состояния, обобщаются и уточняются в микроскопической электродинамике; экспериментальные данные о поведении элементарных заряженных частиц требуют иных теорий для своего объяснения, чем классическая электродинамика. Однако закон сохранения электричества остается нерушимым, т. е. оказался более фундаментальным, чем исходные предпосылки рассматриваемой

теории (хотя в ней он получается как следствие основных ее уравнений).

Зададим себе следующий вопрос. Плотность тока входит, помимо закона сохранения заряда, также в уравнение состояния  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . Спрашивается: в какой мере эти соотношения внутренне непротиворечивы? Подставляя для указанной цели выражение  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  в уравнение непрерывности, получим:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{grad} \sigma, \quad (3.3)$$

что в сочетании с соотношением

$$\operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = 4\pi \rho \quad (3.4)$$

приводит к двум уравнениям для определения  $\rho$  и  $\mathbf{E}$  в проводящих средах. Хотя в общем случае двух уравнений недостаточно для определения четырех величин ( $\rho$ ,  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ), сам факт наличия произвола указывает на отсутствие противоречия между (3.2) и (3.3) и на необходимость для решения задачи привлечь систему исходных уравнений, чем мы и будем заниматься в дальнейшем.

Заметим, что в частном случае  $\sigma = \text{const}$ ,  $\epsilon = \text{const}$  имеем:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = 4\pi \frac{\sigma}{\epsilon} \rho, \quad \rho(r, t) = \rho(r, 0) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$\tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}, \quad (3.5)$$

т. е. в проводящей среде плотность заряда экспоненциально убывает со временем в каждой точке пространства, причем с тем большим декрементом затухания, чем больше коэффициент электропроводности и меньше значение диэлектрической постоянной.

На первый взгляд кажется, что формула (3.5) указывает на отсутствие закона сохранения заряда, из которого она выведена, поскольку имеет место монотонная убыль заряда с течением времени в одинаковой мере во всех точках пространства. Однако согласование с законом сохранения действительно имеет место, если учесть, что плотность тока отлична от нуля даже в тех областях пространства, где  $\rho = 0$ .

В самом деле, рассмотрим поток электричества через поверхность  $S$ , проведенную внутри проводящей среды так, что в точках поверхности  $\rho \equiv 0$  (рис. 8).

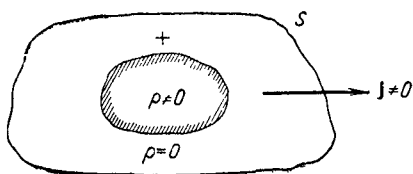


Рис. 8.

Такая поверхность может быть проведена даже в том случае, если внутри этой поверхности  $\rho \neq 0$ , ибо на основании формулы (3.5) заряды рассасываются с течением времени, но так, что объем,

занятый зарядами, не изменяется. Полагая  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  и используя формулу для потока напряженности электрического поля, получим:

$$\oint_S \mathbf{j} \, ds = \sigma \oint_S \mathbf{E} \, ds = \frac{4\pi}{\epsilon} \sigma e(t),$$

где  $e$  — полный заряд внутри объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ . С другой стороны, на основании формулы (3.5) имеем:

$$-\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, d\tau = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \int_V \rho \, d\tau = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} e(t).$$

Таким образом, обнаруживается полное согласование с интегральным законом сохранения. Поток через указанную поверхность отличен от нуля и, действительно, равен изменению заряда, находящегося в объеме, ограниченном выбранной поверхностью.

Определим время релаксации объемных зарядов в проводящей среде с уравнением состояния

$$\mathbf{j} = \int_V K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) \, d\tau'. \quad (3.6)$$

Замечая, что для точек  $\mathbf{r}$ , достаточно удаленных от границы, справедливы равенства

$$\int_{V \rightarrow \infty} K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) \, d\tau' = \int_{(\infty)} K(s) \mathbf{E}(s - \mathbf{r}, t) \, ds,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x(s - \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x'} E_x(s - \mathbf{r}'),$$

имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \int_{(\infty)} K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) \, d\tau'.$$

Используя уравнение непрерывности, а также соотношение  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho$ , приходим к уравнению для определения  $\rho$ :

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{4\pi}{\epsilon} \int_{(\infty)} K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rho(\mathbf{r}', t) \, d\tau'.$$

Полагая  $\rho \sim e^{-\lambda t}$ , получаем:

$$\lambda \rho = \frac{4\pi}{\epsilon} \int_{(\infty)} K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rho(\mathbf{r}', t) \, d\tau'. \quad (3.7)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ .

Имеем:

$$\int_{(\infty)} K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \, d\tau' = 4\pi \int_0^\infty K(s) \frac{\sin ks}{ks} s^2 \, ds.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{(4\pi)^2}{\epsilon} \int_0^\infty K(s) \frac{\sin ks}{ks} s^2 \, ds.$$

Эта формула связывает величину  $\lambda$  с  $k$ . Для малых значений  $k$ , ограничиваясь первыми двумя членами разложения в ряд, получаем:

$$\lambda = \frac{(4\pi)^2}{\epsilon} \sigma (1 - r_0^2 k^2),$$

где введено обозначение

$$r_0^2 = \frac{\frac{1}{6} \int_0^{\infty} K(s) s^4 ds}{\int_0^{\infty} K(s) s^2 ds},$$

$r_0$  назовем «радиусом действия дальних связей» между  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ . При  $k^2 = \frac{1}{r_0^2}$   $\lambda = 0$ . Таким образом, функциональные уравнения состояния приводят к отсутствию релаксации объемных зарядов определенного пространственного периода в проводящей среде.

## § 2. Закон сохранения энергии. Теорема Умова и Пойнтинга

Закон сохранения энергии, связывающий различные формы энергии, автоматически не может быть выведен только из уравнений электродинамики, поскольку последние описывают только электромагнитную форму движения материи. Поэтому надо рассмотреть связь электромагнитной формы движения материи с другими формами движения и убедиться, что законы электродинамики обеспечивают количественное сохранение энергии при переходе одной формы движения в другую. Эта связь может быть получена только из опыта, или из теории, использующей новые предположения, помимо тех, которые заключены в основных уравнениях электродинамики.

Опыт дает следующую известную связь (закон Джоуля—Ленца) между количеством тепла  $Q$ , выделяющимся в проводнике с сопротивлением  $R$  в единицу времени, и проходящим в проводнике током силой  $J$ :

$$Q = J^2 R. \quad (3.8)$$

Выразим эту связь прежде всего в наиболее общей дифференциальной форме, так как соотношение (3.8) справедливо только для проводников цилиндрической формы. Выбираем в произвольной неоднородной среде бесконечно малый цилиндр. Тогда для этого цилиндрика  $R = \frac{l}{\sigma s}$ , а количество выделяющегося в нем тепла в единицу времени равно  $Q = \frac{J^2 l}{\sigma} s = \frac{J^2}{\sigma} V$ . Количество тепла, выделяющегося в единице объема, равно:

$$q = \frac{Q}{V} = \frac{J^2}{\sigma} = \sigma E^2.$$



В теле произвольной формы, где  $\sigma$  может быть функцией координат, имеем:

$$Q = \int_V \frac{j^2}{\sigma} d\tau = \int_V \sigma E^2 d\tau = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} d\tau.$$

Теперь, используя уравнения электродинамики попытаемся найти уравнение, выражающее баланс энергии ( $\mathbf{S}$  — вектор Умова—Пойнтинга):

$$Q = - \frac{\partial W}{\partial t} - \oint_S \mathbf{S} ds, \quad (3.9)$$

что является общим выражением всякого закона преобразования энергии из одной формы в другую: появление энергии, определяемое количеством тепла  $Q$ , равно уменьшению энергии другой формы  $W$  во всем рассматриваемом объеме и потере этой энергии через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем  $V$ .

Для указанной цели выразим количество тепла  $Q$  только через характеристики поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Подставив в выражение

$$Q = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} d\tau$$

плотность тока из уравнения

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

получим:

$$Q = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} d\tau = \frac{c}{4\pi} \int_V \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\tau.$$

На основании векторного тождества

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \equiv \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

имеем:

$$Q = - \frac{c}{4\pi} \int_V \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_V \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\tau,$$

причем здесь использовано уравнение поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Таким образом, окончательно имеем (полагая  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  и  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ):

$$Q = - \oint_S \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\tau - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{8\pi} (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) d\tau. \quad (3.10)$$

Итак, действительно, мы получаем формулу, имеющую вид баланса энергии, что дает право отождествить объемный интеграл

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) d\tau$$

со значением энергии электромагнитного поля, распределенной в пространстве с плотностью

$$w = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2). \quad (3.11)$$

Выражение баланса приводит к введению понятия потока электромагнитной энергии через замкнутую поверхность

$$\oint_S \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] ds.$$

Отсюда поток через единицу поверхности равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (3.12)$$

В частном случае пространственно замкнутой системы, под которой мы будем понимать, по определению, такую систему, на границе которой  $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$  для всего рассматриваемого промежутка времени выражение закона сохранения энергии приобретает вид

$$Q + \frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

т. е. тепло выделяется за счет убыли  $W$ . Именно этот частный случай прямо обосновывает отождествление  $W$  с полной энергией электромагнитной формы движения материи.

В другом частном случае, когда внутри рассматриваемого объема отсутствуют проводящие среды, так что  $Q = 0$ , так как  $\mathbf{j} = 0$ , имеем:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S \mathbf{S} ds,$$

т. е. количество электромагнитной энергии может меняться только за счет потока энергии, проходящей через ограничивающую поверхность. Этот частный случай дает нам право отождествить выражение вектора Умова — Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (3.13)$$

с выражением и представлением потока электромагнитной энергии.

Теорему Умова—Пойнтинга, выраженную формулой (3.10), можно, очевидно, записать так:

$$\int_V \frac{j^2}{\sigma} d\tau = - \int_V \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\tau - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2) d\tau.$$

Ввиду существования равенства для любых объемов интегрирования мы можем сделать переход к дифференциальной форме теоремы:

$$\frac{j^2}{\sigma} = - \operatorname{div} \mathbf{S} - \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}], \quad w = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2). \quad (3.14)$$

Прежде всего ответим на следующий вопрос. Приводит ли макроскопическая электродинамика к однозначному толкованию вектора  $\mathbf{S}$  как потока электромагнитной энергии через единицу поверхности, расположенной перпендикулярно к направлению потока энергии? Ответ на поставленный вопрос обычно дается отрицательным, поскольку интегральная форма баланса, к которой мы пришли, не изменится, если под знаком поверхностного интеграла добавить вихрь произвольного вектора  $\mathbf{A}$ , так как:

$$\oint_S \text{rot } \mathbf{A} \, ds \equiv 0.$$

Таким образом, с помощью теоремы Умова — Пойнтинга поток энергии  $\mathbf{S}$  определяется неоднозначно — с точностью до вихря от произвольного вектора:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] + \text{rot } \mathbf{A}.$$

Часто эта неоднозначность обосновывается физически тем, что якобы на опыте при проверке теоремы всегда приходится иметь дело с замкнутыми поверхностями, не позволяющими поэтому сделать по указанной причине однозначного заключения о потоке энергии через единицу поверхности. В указанной неоднозначности видят часто путь решения следующего парадокса.

В статических полях формально существует вектор  $\frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ , поскольку существуют статические источники как электрического поля, так и магнитного поля (заряды и магниты). Поэтому применение вектора Умова — Пойнтинга к статическим полям приводит к существованию потока электромагнитной энергии в пространстве. Так как в статическом поле  $\mathbf{j} = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , то имеет место циркуляция энергии по замкнутым путям, ибо на основании (3.10)

$$\oint_S \mathbf{S} ds = 0.$$

Поскольку же опыт никогда не указывал на наличие подобных переносов энергии в статических полях, то решение этого противоречия и видят обычно в неоднозначности определения вектора Умова — Пойнтинга. Всегда можно подобрать произвольный вектор так, чтобы вектор  $\frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] + \text{rot } \mathbf{A}$  точно обрелся бы в нуль.

Заметим, что приведенная аргументация о существовании неоднозначности выражения вектора Умова — Пойнтинга не является вполне основательной. Прежде всего ссылка на принципиальную интегральность теории Умова — Пойнтинга не является правильной, так как дифференциальная форма имеет не меньшую общность,

$$\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} = -\text{div } \mathbf{S}^I - \frac{\partial w}{\partial t}$$

и также содержит неоднозначность. Это указывает на то, что природа неоднозначности не обязательно заключается в замкнутости поверхности.

Существует физический пример, позволяющий точно установить, однозначен или неоднозначен вектор Умова — Пойнтинга. Это — случай потенциального потока энергии в поле. Если окажется, что в этом случае вектор

$\frac{c}{4\pi} [\text{ЕН}]$  — потенциален, то, следовательно,  $\text{rot } \mathbf{A} \equiv 0$ , если не потенциален, то  $\text{rot } \mathbf{A} \neq 0$  и должен быть выбран так, чтобы точно скомпенсировать непотенциальную часть вектора  $\frac{c}{4\pi} [\text{ЕН}]$ .

Известно, что для плоских волн вектор Умова — Пойнтинга — потенциален, и в этом случае поток энергии также является потенциальным.

Последний факт экспериментально всегда учитывается, в особенности в так называемом приближении «геометрической оптики», когда длины волн значительно меньше линейных размеров отверстий или диафрагм, выделяющих локализованный световой пучок. В этих случаях никогда не получается конфликта между теоретическим значением потока  $\frac{c}{4\pi} [\text{ЕН}]$  и выражением, например, количества тепла, в которое переходит световой поток, проходя через щель.

Что касается трудности с применением вектора Умова — Пойнтинга к статическим полям, приводящим к циркуляции энергии по замкнутым путям, которая, однако, никогда не наблюдалась, то нужно иметь в виду, что в статическом случае  $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0, \mathbf{j} = 0\right)$  теряет смысл весь вывод теоремы Умова — Пойнтинга, ибо при выводе заранее предполагалось, что  $\mathbf{j} \neq 0$ . Таким образом, мы приходим к заключению, что теория приводит к однозначному выражению вектора потока электромагнитной энергии в виде вектора Умова — Пойнтинга. Кажущаяся неоднозначность продиктована в переменных полях безосновательным отказом от случая потенциальных переносов энергии, а в статических полях — неучетом качественного скачка при переходе от динамического случая к случаю статическому.

### § 3. Теорема единственности решений уравнений электродинамики

Как мы увидим ниже, уравнения электродинамики не принадлежат к какому-нибудь одному типу изученных в математической теории дифференциальных уравнений с частными производными (например, к эллиптическому, гиперболическому или параболическому типу), — они в частных случаях превращаются в них, не исчерпываясь, однако, ими. Поэтому возможны несколько теорем единственности решений, смотря по постановке задачи.

Единственность решений той или другой постановки задачи нужно исследовать каждый раз отдельно. Необходимость анализа теоремы единственности диктуется двумя соображениями: во-первых, эта теорема должна установить степень полноты системы уравнений поля, так как в противном случае потребовались бы новые физические посылы для устранения неоднозначности; во-вторых, имеется практическая потребность в теореме, поскольку только благодаря ей мы получаем гарантию, что решение задачи, полученное тем или иным частным способом, является достаточным. Здесь рассмотрим так называемую смешанную задачу Коши, когда заданы начальные условия для некоторого момента времени и некоторые граничные значения для всего рассматриваемого интервала времени.

Пусть в рассматриваемом объеме  $V$  заданы при  $t=0$  напряженности полей  $\mathbf{E}(x, y, z, 0)$  и  $\mathbf{H}(x, y, z, 0)$ , а на границе заданы тангенциальные составляющие либо  $E_t(x, y, z, 0)$  либо  $H_t(x, y, z, 0)$  для  $0 \leq t \leq T$ . Докажем однозначность решения при указанных условиях. Для этой цели будем исходить из интегральной теоремы Умова — Пойнтинга:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_V \frac{j^2}{\sigma} d\tau - \oint_S \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] ds, \quad (3.15)$$

где  $W = \frac{1}{8\pi} \int_V (\epsilon E^2 + \mu H^2) d\tau$  — существенно положительная величина. Правая часть уравнения может дать нам суждения о знаке производной по времени от  $W$ , откуда мы можем судить и о подинтегральном выражении, т. е. об искомым величинах  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  внутри объема.

Пусть есть два решения указанной задачи:  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ . На основании линейности уравнений поля можно утверждать, что разница этих решений

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 \end{aligned}$$

есть также решения, но с начальными условиями

$$\mathbf{E}' = 0, \mathbf{H}' = 0 \text{ для } t = 0$$

и с граничными условиями:

$$E'_t = 0 \text{ либо } H'_t = 0 \text{ для } 0 \leq t \leq T.$$

Подставим это решение в (3.15); в поверхностном интеграле появится величина

$$[\mathbf{E}'\mathbf{H}']_n = (\mathbf{n} [\mathbf{E}'\mathbf{H}']),$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор к поверхности, ограничивающий рассматриваемый объем. Поскольку циклическая перестановка векторов не изменяет величины скалярного векторного произведения, имеем:

$$(\mathbf{n} [\mathbf{E}'\mathbf{H}']) = (\mathbf{E}'[\mathbf{H}'\mathbf{n}]) = (\mathbf{H}'[\mathbf{n}\mathbf{E}']). \quad (3.16)$$

Второе выражение пропорционально  $E'_t$ , а третье пропорционально  $H'_t$ ; следовательно, на основании граничных условий  $[\mathbf{E}'\mathbf{H}']_n = 0$ . Таким образом, из (3.15) имеем:

$$\frac{\partial W'}{\partial t} = - \int_V \frac{j^2}{\sigma} d\tau \leq 0. \quad (3.17)$$

Далее, так как полная энергия  $W'$  не может быть отрицательной, и на основании начальных условий при  $t=0$  полная энергия равна нулю, следовательно, случай  $\frac{\partial W'}{\partial t} < 0$  отпадает.

Первая возможность  $\frac{\partial W'}{\partial t} > 0$  (рис. 9) исключается условием (3.17), третья возможность  $\frac{\partial W'}{\partial t} < 0$  — положительностью выражения  $W'$  для любого времени и остается, следовательно, только вторая возможность для произвольного  $t \geq 0$ :

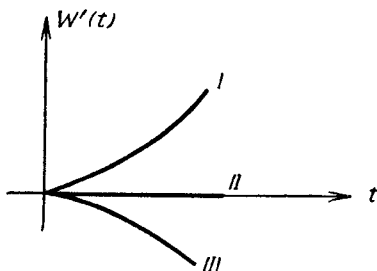


Рис. 9.

$$W' = \frac{1}{8\pi} \int (\epsilon E'^2 + \mu H'^2) d\tau = 0.$$

Это возможно ввиду положительности подинтегрального выражения во всех точках области интегрирования лишь при условии:

$$E' = H' = 0.$$

Таким образом, теорема об однозначности задачи Коши для исходных уравнений доказана.

Важно отметить, что теорема однозначности не требует полного знания всего электромагнитного поля  $E$  и  $H$  на границе, достаточно потребовать знания тангенциальной компоненты только одного (любого) из векторов  $E$  или  $H$ .

#### § 4. Пограничные условия

Исходные уравнения электродинамики имеют место для произвольных неоднородных сред, так как основные постоянные характеризующие среды ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ) могут быть произвольными функциями координат. В случае наличия поверхностей раздела сред удобно говорить о разрыве величин  $\epsilon$ ,  $\mu$  или  $\sigma$ . Однако в случае разрыва  $\epsilon$ ,  $\mu$  или  $\sigma$  лишается смысла дифференциальная форма исходных уравнений, требующая существования производных величин  $D$ ,  $V$ . Для установления поведения векторов на границе можно воспользоваться интегральной формой исходных уравнений, которые сохраняют свое значение и в случае разрыва подинтегральных выражений.

1. Пограничное условие для нормальных составляющих вектора магнитной индукции. Для установления граничных условий используем четвертое интегральное уравнение

$$\oint_S B ds = 0. \quad (3.18)$$

Выбирая за объем цилиндр, частью расположенный в одной среде, частью — в другой, с положительным направлением нормали во вто-

рю среду подсчитаем величину потока магнитной индукции через поверхность, ограничивающую цилиндр (рис. 10)

$$\oint_{\dot{S}} \mathbf{B} ds = B_{2n} S_2 - B_{1n} S_1 + \bar{B} s_{\pi} h = 0.$$

Здесь мы предположили, что цилиндр настолько мал, что можно во всех точках основания цилиндра выбрать одно значение вектора  $\mathbf{B}$ , а именно на верхнем основании  $B_{2n}$  и на нижнем  $B_{1n}$ . Величина  $\bar{B}$  обозначает среднее значение нормальной компоненты на боковой поверхности цилиндра ( $S_{\pi}$  — периметр по сечению цилиндра,  $h$  — высота цилиндра).

Переходя к пределу  $h \rightarrow 0$  и учитывая, что при этом  $S_1 \rightarrow S_2$ , находим:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0. \quad (3.19)$$

Таким образом, нормальные составляющие вектора магнитной индукции на границе произвольных двух сред всегда непрерывны.

Пограничное условие (3.19) представляет условие, в которое вырождается уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

при наличии поверхности раздела. Поэтому это условие иногда называют поверхностной дивергенцией

$$\operatorname{Div} \mathbf{B} = B_{2n} - B_{1n} = 0.$$

2. Пограничное условие для нормальных составляющих вектора электрической индукции. Поскольку, в отличие от предыдущего случая,

$$\oint_{\dot{S}} \mathbf{D} ds = 4\pi e,$$

получим:

$$\oint_{\dot{S}} \mathbf{D} ds = D_{2n} S_2 - D_{1n} S_1 + \bar{D} S_{\pi} h = 4\pi psh,$$

где  $psh$  — есть величина заряда, находящегося в объеме цилиндра. Учтем так называемые поверхностные заряды при помощи условия

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \rho h \rightarrow \sigma,$$

где  $\sigma$ , очевидно, обозначает количество заряда приходящегося на единицу поверхности раздела двух сред.

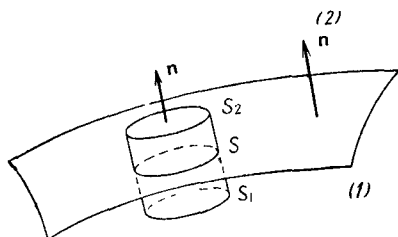


Рис. 10.

Итак, полагая  $h \rightarrow 0$  и, следовательно,  $S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S$ , имеем:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \quad (3.20)$$

т. е. нормальные составляющие вектора электрической индукции непрерывны в отсутствие поверхностных зарядов и при наличии таковых терпят разрыв. Величина разрыва определяется плотностью поверхностных зарядов  $\sigma$ .

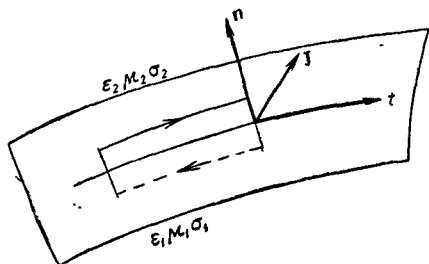


Рис. 11.

3. Пограничные условия для тангенциальных составляющих вектора напряженности поля. Выберем на этот раз контур, частью расположенный в одной среде, частью в другой, с положительным направлением во

второй среде (рис. 11). Используем формулы для циркуляции электрической напряженности поля:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} ds.$$

Тогда, раскрывая левую и правую части, имеем:

$$E_{2t} l_2 - E_{1t} l_1 + \sum \bar{E}_n h = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n l h,$$

где  $\left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n$  обозначает среднее значение величины  $\left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n$  на площадке ограниченной рассматриваемым контуром.

При  $h \rightarrow 0$  части контура, расположенные в разных средах, будут прилегать к поверхности раздела. Участки циркуляции, пропорциональные  $h$ , исчезают, и в результате получается непрерывность тангенциальных компонент напряженности электрического поля на границе двух произвольных сред:

$$E_{2t} - E_{1t} = \text{Rot } \mathbf{E} = 0. \quad (3.21)$$

При этом только предположено, что величина  $\left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n$  является ограниченной, и, следовательно, полученный результат о непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля верен для произвольным образом меняющегося со временем электромагнитного поля, включая и статический случай.

4. Пограничные условия на тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля. Так как

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) ds,$$



то, выбирая контур интегрирования так же, как и в предыдущем случае, имеем:

$$H_{2t}l_2 - H_{1t}l_1 + \sum \bar{H}h = \frac{4\pi}{c} \left( \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial n} \right)_n lh. \quad (3.22)$$

Нужно различать два случая:

а) Случай отсутствия поверхностных токов. Тогда при  $h \rightarrow 0$   $l_2 \rightarrow l_1 \rightarrow l$  все члены, содержащие  $h$ , исчезают, и мы получаем:

$$H_{2t} - H_{1t} = 0, \quad (3.23)$$

т. е. условие непрерывности тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля в случае раздела двух сред.

б) Случай, когда ток проводимости при  $h \rightarrow 0$  отличен от нуля:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ j \rightarrow \infty}} jh = I,$$

где  $I$  — поверхностная плотность тока, проходящего через единицу длины линии на поверхности раздела, проведенной перпендикулярно к направлению тока. Тогда вместо (3.22) мы получаем из (3.23)

$$H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} I, \quad (3.24)$$

причем здесь предположено, что величина  $\left( \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial n} \right)_n$  ограничена, так что ток, содержащий произведение этой величины на  $h$ , при  $h \rightarrow 0$  выпадает из вычислений.

Полученный результат о разрыве тангенциальных компонент напряженности магнитного поля при наличии поверхностных токов особенно очевиден для плоского случая. При наличии поверхностного тока, проходящего по пластине в направлении за плоскость чертежа (рис. 12), поле

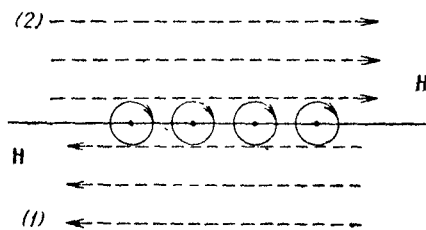


Рис. 12.

вектора  $\mathbf{H}$  одинаково по величине как в первой, так и во второй среде, направлено вдоль плоскости, но по разным направлениям, т. е. имеет место разрыв, величина которого равна  $\frac{4\pi}{c} I$ . Пусть  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{I}_1$  — единичные векторы ортогональной системы координат на поверхности раздела, тогда пограничное условие для тангенциальных составляющих может быть записано в векторной форме:

$$[\mathbf{nH}]_2 - [\mathbf{nH}]_1 = \frac{4\pi}{c} I. \quad (3.25)$$

В самом деле, приняв во внимание, что

$$H_t = Ht_1 = \mathbf{H} [I_1 \mathbf{n}] = I_1 [\mathbf{nH}],$$

где  $I_1 = \frac{I}{l}$ , условие  $H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} I$  можно записать так:

$$I_1 [\mathbf{nH}]_2 - I_1 [\mathbf{nH}]_1 = \frac{4\pi}{c} I_1 l.$$

Сокращая на  $I_1$ , действительно, получаем условие (3.25).

Мы получили четыре граничных условия соответственно четырем основным уравнениям электродинамики. Граничные условия для  $E_n$ ,  $H_n$  и  $D_t$ ,  $B_t$ ,  $j_t$ ,  $j_n$ , а также для компонент векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  получаются как следствие основных четырех пограничных условий.

Так как  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , то для скачка нормальных составляющих вектора  $\mathbf{E}$  при переходе через границу имеем соотношение

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = 4\pi\sigma.$$

Аналогично  $\mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = 0$  или  $\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ .

Воспользовавшись непрерывностью тангенциальных компонент вектора напряженности электрического поля и соотношением  $D_t = \epsilon E_t$ , получаем условие для скачка тангенциальных компонент вектора электрической индукции  $\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ . Аналогично  $\frac{B_{2t}}{B_{1t}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$  (при отсутствии поверхностных зарядов).

Пограничные условия для плотности тока  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  будут следующими:

Для тангенциальных компонент прямо получаем:

$$\frac{j_{2t}}{j_{1t}} = \frac{\sigma_2 E_{2t}}{\sigma_1 E_{1t}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Для нормальных составляющих необходимо воспользоваться законом сохранения электричества

$$\oint_S \mathbf{j} ds = - \frac{\partial e}{\partial t},$$

откуда по аналогии с интегральным соотношением

$$\oint_S \mathbf{D} ds = 4\pi e$$

вытекает условие

$$i_{2n} - j_{1n} = - \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда.

Условие для тангенциальных составляющих вектора поляризации и вектора намагничивания вытекает из определений  $P = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E$  и

$$M = \frac{\mu - 1}{4\pi} H, \text{ откуда, } \frac{P_{2t}}{P_{1t}} = \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_1 - 1}, \quad \frac{M_{2t}}{M_{1t}} = \frac{\mu_2 - 1}{\mu_1 - 1}. \text{ Условия же}$$

для нормальных составляющих вектора поляризации вектора намагничивания мы рассмотрим несколько позже, поскольку прежде полезно установить связь между дивергенциями от этих векторов и плотностью связанных зарядов.

Характерным для всех четырех основных выше установленных пограничных условий является их общность в той мере, как и общность исходных уравнений электродинамики. Общность же следствий, использующих уравнения для сред, меньшая, поскольку, как подчеркивалось, уравнения для сред в большей степени ограничены, чем основные уравнения для поля.

### Задачи

1. Показать, что при релаксации зарядов в проводящей среде ток смещения точно компенсирует ток проводимости, так что магнитное поле в процессе релаксации не создается.

2. Вывести из пограничных условий закон преломления векторов  $E$  и  $D$ ,  $H$  и  $B$  и  $j$  на границе раздела сред.

3. Показать, что количество выделяющегося тепла в цилиндрическом проводе кругового сечения точно соответствует потоку энергии, втекающему в проводник через боковую поверхность, на основании теоремы Умова — Пойнтинга.

---

## ГЛАВА IV

### ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Покажем прежде всего, что электростатику можно выделить из всего многообразия электромагнитных явлений, характеризуемых, как правило, органической связью между электрическими и магнитными явлениями.

Область электростатических явлений определяется, во-первых, требованием независимости всех величин от времени (т. е. равенство нулю всех производных по времени), во-вторых, требованием полного отсутствия движения зарядов (т. е.  $\mathbf{j} = 0$ ).

Исходные уравнения и граничные условия электродинамики в этом случае вырождаются в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H}, & \mathbf{D} &= \epsilon\mathbf{E}, \end{aligned} \right\} (4.1)$$

$$(H_{2t} - H_{1t} = 0, B_{2n} - B_{1n} = 0) \quad (E_{2t} - E_{1t} = 0, D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma).$$

Как видим, уравнения разбиваются на две независимые системы — в одну из них входят только магнитные величины, в другую — только электрические.

Интегральные законы электростатики имеют вид:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0, \quad \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{s} = 0. \quad (4.2)$$

Уравнение состояния для сред записывается в форме  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  или  $\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}$ .

Итак, ввиду полной независимости уравнений для магнитных и электрических величин можно выделить электростатику для обособленного рассмотрения: следует подчеркнуть, что уравнения электростатики не являются какими-то приближениями исходных уравнений поля, а точно соответствуют определенному частному случаю ( $\mathbf{j} \equiv 0$ ).

Таким образом, точные решения уравнений электростатики одновременно являются точными, но частными решениями исходных общих уравнений электродинамики.

### § 1. Свойства электростатического поля в проводящих и диэлектрических средах

Так как по определению электростатики  $\mathbf{j} = 0$ , а в проводящей среде

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

то, следовательно, могут быть два случая:

$$\sigma = 0, \text{ но } \mathbf{E} \neq 0 \text{ (вне проводников),}$$

$$\sigma \neq 0, \text{ но } \mathbf{E} = 0 \text{ (внутри проводников).}$$

Таким образом, электрическое поле внутри проводников отсутствует, а, следовательно, также отсутствует и вектор электрической индукции и вектор поляризации, поскольку эти величины пропорциональны электрической напряженности поля:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} = 0.$$

Замечания. 1. Так как  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{P}$  тождественно обращаются в нуль при любом значении  $\epsilon$ , то, следовательно, нельзя характеризовать проводящую среду (оставаясь в рамках электростатики) определённым значением диэлектрической постоянной. Значение диэлектрической постоянной проводящей среды не может поэтому влиять на какой-либо результат электростатики.

2. Так как  $\mathbf{D} = 0$  во всех точках внутри проводника, то, следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho = 0.$$

В электростатическом случае внутри проводника не могут существовать объёмные заряды.

На границах проводника граничные условия должны быть получены из общих граничных условий для электрического поля

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = 4\pi\sigma, \quad E_{2t} - E_{1t} = 0,$$

но так как внутри проводника  $E_1 = 0$ , то

$$E_{2n} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_2}, \quad E_{2t} = 0. \quad (4.3)$$

Напряженность электрического поля у поверхности проводника направлена нормально к последнему и равна  $\frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$ , где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная среды, окружающей проводник (рис. 13).

В диэлектрических средах определяющим является поведение вектора электрической индукции или вектора поляризации. Установим связь вектора поляризации с плотностью связанных зарядов,

появляющихся в процессе поляризации (связь между  $\mathbf{P}$  и  $\rho_{св}$ ). Так как

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P},$$

то основное уравнение электростатики  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$  можно написать в виде

$$\operatorname{div} (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho,$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}). \quad (4.4)$$

Сравнивая с уравнением для пустоты

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

замечаем, что поле в диэлектрической среде отличается от поля в пустоте дополнительным членом, в правой части изменяющим плотность исходных зарядов. Если в пустоте плотность заряда есть  $\rho$ , то в диэлектрической среде она равна  $\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}$ . Таким образом, величина  $-\operatorname{div} \mathbf{P}$  играет роль дополнительных зарядов, изменяющих поле в сравнении с полем в пустоте. Ранее мы эти заряды назвали связанными, теперь мы можем написать выражение их плотности через вектор поляризации

$$\rho_{св} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (4.5)$$

Отсюда получим интегральное соотношение (используя теорему Остроградского)

$$\oint \mathbf{P} ds = - \int \rho_{св} d\tau. \quad (4.6)$$

Физический смысл соотношения (4.5) очевиден, поскольку истоки вектора поляризации предполагают наличие области возникновения вектора  $\mathbf{P}$ , всегда связанного с зарядом (отрицательного знака), а стоки предполагают наличие области сосредоточивания концов вектора  $\mathbf{P}$ , связанного, по условию положительности направления электрического момента, с зарядом положительного знака (рис. 14).

Диэлектрическая среда в целом не является заряженной, если свободные заряды располагаем вне диэлектрика; поэтому должно быть

$$\int \rho_{св} d\tau = 0, \quad (4.7)$$

где интегрирование ведется по всей области диэлектрика.

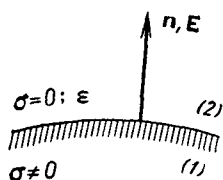


Рис. 13.

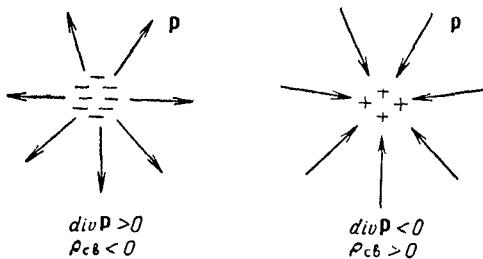


Рис. 14.

Следует ли это условие из исходной системы уравнений электростатики? Выбирая поверхность  $S$  вне диэлектрика ( $P_n = 0$ ), получаем:

$$\oint_S \mathbf{P} ds = 0,$$

и, следовательно, соотношение (4.6) гарантирует выполнение условия (4.7). Каково будет поведение вектора поляризации на границе двух диэлектрических сред? Граничные условия для нормальных составляющих получаются сразу же, исходя из аналогии в структуре интегральных соотношений для вектора электрической индукции и вектора поляризации. Именно, соотношение

$$\oint_S \mathbf{D} ds = 4\pi e$$

привело к условию

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma.$$

Соотношение  $\oint_S \mathbf{P} ds = -e_{св}$  по аналогии должно дать условие

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{св}, \quad (4.8)$$

где, как и ранее, положительная нормаль проведена во вторую среду. В частном случае границы между диэлектриком и вакуумом имеем ( $P_{2n} = 0$ ):

$$P_n = \sigma_{св}. \quad (4.9)$$

Разрыв тангенциальных составляющих на границе двух диэлектрических сред, как мы видели, следует из связи вектора поляризации с напряженностью электрического поля и из условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженности поля  $\mathbf{E}$ , так

как  $\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}$ , то  $\frac{P_{2t}}{P_{1t}} = \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_1 - 1}$ .

## § 2. Потенциальность электростатического поля

Исходное дифференциальное уравнение электростатики

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0$$

всегда имеет решение

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\left( \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right),$$

поскольку

$$\text{rot grad } \varphi \equiv 0.$$

Скалярная функция  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  называется потенциалом. Ясно, что определение потенциала неоднозначное, с точностью до произвольной постоянной.

В качестве примера выразим  $\text{grad } \varphi$  в произвольных криволинейных ортогональных координатах  $q_1, q_2, q_3$  с единичными векторами  $e_1, e_2, e_3$ .

Очевидно, имеем:

$$\text{grad } \varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \text{grad } q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \text{grad } q_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \text{grad } q_3.$$

Ввиду того, что элементарное перемещение вдоль криволинейных осей координат есть

$$dl_i = H_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

то

$$\text{grad } q_i = \frac{1}{H_i} e_i.$$

Отсюда получаем:

$$\text{grad } \varphi = \frac{e_1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{e_2}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{e_3}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}.$$

В частности, для цилиндрических координат ( $H_\rho = 1, H_\varphi = \rho, H_z = 1$ )

$$\text{grad } \psi = e_\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{e_\varphi}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + e_z \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

а для сферических координат ( $H_r = 1, H_\theta = r, H_\varphi = r \sin \theta$ )

$$\text{grad } \psi = e_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{e_\theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{e_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}.$$

Выразим теперь потенциал через напряженность электрического поля. По определению,

$$d\varphi = \text{grad } \varphi d\mathbf{l},$$

где  $d\mathbf{l}$  — бесконечно малое векторное расстояние между точками, отличающимися на потенциал  $d\varphi$ . Так как

$$d\varphi = -E d\mathbf{l},$$

то разность потенциалов между точками  $P_0$  и  $P$ , находящимися на конечном расстоянии, будет:

$$\varphi_P - \varphi_{P_0} = - \int_{P_0}^P E d\mathbf{l}.$$

Поскольку подинтегральное выражение есть полный дифференциал, то последний интеграл не зависит от формы пути, определяясь лишь начальной и конечной точками кривой, по которой ведется интегрирование.

В тех случаях, когда можно положить в бесконечно удаленной точке потенциал равным нулю (как мы увидим ниже, это будет иметь место для всех случаев, когда заряды расположены в ограниченном участке пространства), то

$$\varphi_{(P)} = - \int_{(\infty)}^P E d\mathbf{l} = \int_P^{\infty} E d\mathbf{l}$$



В этом случае потенциал можно интерпретировать как работу поля при перенесении единицы положительного заряда из данной точки в бесконечно удаленную. Для потенциала точечного заряда получим:

$$\varphi = \int_R^{\infty} E dl = \int_R^{\infty} \frac{e}{R^2} dR = -\frac{e}{R} \Big|_R^{\infty} = \frac{e}{R}. \quad (4.10)$$

В этом частном случае мы убедились непосредственным вычислением, что потенциал в бесконечно удаленной точке  $\frac{e}{R} \Big|_{R \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ .

Ввиду аддитивности поля, создаваемого различными источниками, например системой точечных зарядов, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} E &= \sum_i \frac{e_i}{R_i^2} \mathbf{R}_i = \sum_i \mathbf{E}_i, \\ \varphi &= \sum_i \int_P^{\infty} \mathbf{E}_i d\mathbf{l} = \sum_i \frac{e_i}{R_i}; \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

перестановка суммирования и интегрирования законна, по крайней мере, для конечного числа зарядов.

Перейдем теперь к непрерывно распределенным зарядам. Такой переход не может быть автоматически выведен из аддитивных закономерностей, так как обычные правила перехода к интегралам от сумм требуют ограниченности функций, а потенциал любой системы точечных зарядов обращается в бесконечность в каждой из точек, где расположен заряд. Здесь требуется новая физическая и математическая предпосылка — отказ от «точечности» с одновременным сохранением закона Кулона на сколь угодно малых расстояниях.

Полагая  $d\mathbf{e} = \rho d\tau$ , можем ввиду (4.11) для непрерывно распределенных зарядов написать

$$\varphi = \int \frac{\rho d\tau}{R}, \quad (4.12)$$

или в более подробной записи

$$\varphi(x, y, z) = \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}. \quad (4.13)$$

Взяв векторную производную grad от обеих частей равенства (4.13) и учитывая, что  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ , получаем выражение для напряженности электрического поля:

$$\mathbf{E} = - \int \rho \text{grad} \left( \frac{1}{R} \right) d\tau'.$$

Так как для функции  $\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$  имеет место равенство

$$\text{grad} \left( \frac{1}{R} \right) = -\text{grad}' \left( \frac{1}{R} \right),$$

получаем:

$$E = \int_V \rho \text{grad}' \left( \frac{1}{R} \right) d\tau'. \quad (4.14)$$

Представление потенциала и напряженности поля с помощью интегралов (4.13) и (4.14) требуют анализа условий их сходимости, поскольку подинтегральные выражения обращаются в бесконечность, когда точка наблюдения  $x, y, z$  лежит в области интегрирования.

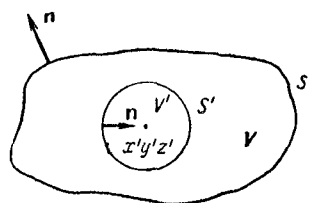


Рис. 15.

Для этой цели окружим точку  $x, y, z$ , находящуюся по условию внутри объема  $V$ , где расположены заряды, сферой некоторого радиуса (рис. 15). Тогда потенциал и напряженность поля от зарядов, расположенных вне сферы, будут являться непрерывными функциями, поскольку, по условию, точка наблюдения расположена вне области интегрирования. Необходимо

показать, что потенциал и напряженность поля, создаваемые зарядами, расположенными внутри сферы, являются ограниченными величинами, причем исчезающими при стягивании сферы в точку. Предполагая, что  $\rho$  имеет верхнюю границу, можно написать для потенциала  $\varphi'$  и напряженности  $E'$  от зарядов, находящихся внутри сферы объема  $V'$ , следующие неравенства:

$$\varphi' = \int_{V'} \frac{\rho d\tau}{R} < \rho_{\text{макс}} \int_{V'} \frac{d\tau}{R} = \rho_{\text{макс}} \int_0^{R_0} \frac{4\pi R^2}{R} dR = \rho_{\text{макс}} 2\pi R_0^2,$$

$$E' \leq \int_{V'} \left| \rho \text{grad} \left( \frac{1}{R} \right) \right| d\tau < \rho_{\text{макс}} \int_{V'} \frac{d\tau}{R^2} = \rho_{\text{макс}} \int_0^{R_0} \frac{4\pi R^2 dR}{R^2} = \rho_{\text{макс}} 4\pi R_0,$$

где  $R_0$  — радиус выделенной сферы.

Таким образом, потенциал и напряженность поля внутри сферы действительно ограничены, причем становятся исчезающе малыми при  $R_0 \rightarrow 0$ .

Следовательно в пределе ( $R_0 \rightarrow 0$ ) интегралы сходятся и, таким образом, потенциал и напряженность поля являются определенными функциями положения как вне, так и внутри источников. Кроме того, фигурирующие здесь интегралы равномерно сходятся<sup>1)</sup> при

<sup>1)</sup> См., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, стр. 326—333, 1951.

условию ограниченности плотности заряда ( $\rho < \rho_{\text{макс}} = C$ ), что гарантирует их непрерывность всюду, включая и точки разрыва функции  $\rho$  (например, на границе области заряженных тел).

### § 3. Потенциалы в диэлектрических средах

Отличая диэлектрическую среду от вакуума наличием связанных зарядов (как объемных, так и поверхностных), можем написать выражение потенциала в диэлектрической среде так:

$$\varphi = \int_V \frac{\rho + \rho_{\text{св}}}{R} d\tau + \int_S \frac{\sigma + \sigma_{\text{св}}}{R} ds, \quad (4.15)$$

где

$$\rho_{\text{св}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \sigma_{\text{св}} = P_{1n} - P_{2n}.$$

В выражение потенциала входит интеграл

$$-\int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{R} d\tau. \quad (4.16)$$

Ввиду векторного тождества

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{P}}{R} \equiv \frac{1}{R} \operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{P} \operatorname{grad} \left( \frac{1}{R} \right).$$

Этот интеграл (благодаря наличию  $\operatorname{div} \frac{\mathbf{P}}{R}$ ) включает поверхностный интеграл. Поэтому при наличии в исходной формуле потенциала (4.15) другого поверхностного интеграла

$$-\int_S \frac{P_{2n} - P_{1n}}{R} ds,$$

содержащего те же аргументы, необходимо их сопоставление. Для этой цели ограничим среду двумя поверхностями:  $S'$  проводится так, чтобы охватить диэлектрическую среду, т. е. проводится в вакууме, так что на поверхности  $S'$  имеет место  $\mathbf{P} = 0$ . Поверхность  $S''$  охватывает все поверхности  $S$  разрыва вектора поляризации (рис. 16). Тогда

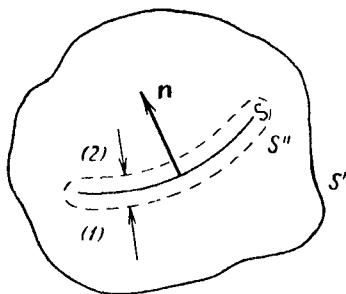


Рис. 16.

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{R} d\tau &= \int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{P}}{R} d\tau - \int_V \mathbf{P} \operatorname{grad} \left( \frac{1}{R} \right) d\tau = \\ &= \int_{S' + S''} \frac{\mathbf{P}}{R} ds - \int_V \mathbf{P} \operatorname{grad} \left( \frac{1}{R} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Учтем, что  $\oint_{S'} \frac{\mathbf{P} ds}{R} = 0$ , так как по условию  $\mathbf{P} = 0$  на поверхности  $S'$

проанализируем оставшийся поверхностный интеграл по  $S''$ . Проведя положительную нормаль к поверхности  $S$  из первой среды во вторую и учтя направление нормалей на охватывающей поверхности  $S''$ , получим:

$$\oint_{S''} \frac{\mathbf{P} ds}{R} = \int_{S''_1} \frac{P_{1n} ds}{R} - \int_{S''_2} \frac{P_{2n} ds}{R},$$

где  $S''_1$  — часть поверхности  $S''$ , проведенной в среде (1) и  $S''_2$  — другая часть поверхности  $S''$ , расположенная во второй среде. Переходя к пределу, будем стягивать поверхность  $S''$  и поверхности разрыва  $S$ , тогда получим:

$$\oint_{S''} \frac{\mathbf{P} ds}{R} = \int_S \frac{P_{1n} - P_{2n}}{R} ds.$$

Заметим, что в исходной формуле для потенциала (4.15) поверхностный интеграл, содержащий нормальные компоненты вектора поляризации, совпадает с только что полученным. Учитывая наличие знака в (4.16), заключаем, что два поверхностных интеграла сокращаются, так что получаем:

$$\varphi = \int_V \frac{\rho d\tau}{R} + \int_S \frac{\sigma ds}{R} + \int_V \mathbf{P} \operatorname{grad} \left( \frac{1}{R} \right) d\tau. \quad (4.17)$$

Таким образом, влияние диэлектрической среды на значение потенциала свелось только к объемному интегралу. Для того чтобы дать физические истолкования его структуре, найдем потенциал диполя ( $\mathbf{p} = e\mathbf{l}$ )

$$\varphi = e \left( \frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) = e \frac{R_+ - R_-}{R_+ R_-} \approx \frac{el \cos \theta}{R^2} = \frac{\mathbf{p} \mathbf{R}}{R^3}.$$

Заметим, что непосредственное дифференцирование приводит к следующим формулам:

$$\operatorname{grad} \frac{1}{R} = -\operatorname{grad}' \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{R}}{R^3},$$

где символ  $\operatorname{grad}$  без штриха обозначает дифференцирование по координатам точки истока, а со штрихом — дифференцирование по точке наблюдения. Таким образом, потенциал диполя имеет вид

$$\varphi = \frac{\mathbf{p} \mathbf{R}}{R^3} = \mathbf{p} \operatorname{grad} \left( \frac{1}{R} \right).$$

Если в элементе объема  $d\tau$  наводится электрический момент  $d\mathbf{p} = \mathbf{P} d\tau$ , то потенциал, создаваемый всеми электрическими распределенными диполями среды, определится так:

$$\varphi = \int_V \mathbf{P} \operatorname{grad} \left( \frac{1}{R} \right) d\tau, \quad (4.18)$$

что точно совпадает с результатом в формуле (4.17).

Выражение для потенциала (4.17) представляется наиболее общим, поскольку мы не специализировали уравнение для сред и не накладывали каких-либо ограничений на характер диэлектрической среды.

По аналогии с непрерывностью напряженности поля

$$E = \int_V \rho \operatorname{grad} \left( \frac{1}{R} \right) d\tau$$

при условии, что  $\rho$  — ограниченная функция, скалярный потенциал в диэлектрической среде будет непрерывной функцией положения, если векторная функция  $\mathbf{P}(x', y', z')$  ограничена всюду в области интегрирования.

#### § 4. Случай разрыва потенциала

Прежде всего рассмотрим ход потенциала в плоском конденсаторе. Так как вне неограниченного плоского конденсатора поле отсутствует, а внутри напряженность равна  $4\pi\sigma$ , то ход функции  $\varphi(x)$

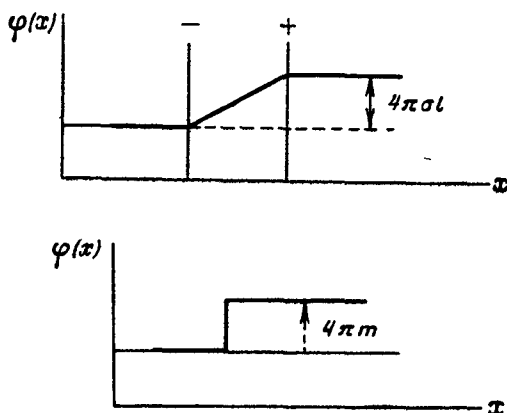


Рис. 17.

представляется ломанной с отрезками, параллельными оси  $x$  вне конденсатора. Изменение потенциала при переходе через конденсатор равно  $4\pi\sigma l$ .

Если теперь

$$\lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ \sigma \rightarrow \infty}} \sigma l = m, \quad (4.19)$$

то ход потенциала в этом случае представляется разрывной функцией (рис. 17). Такой предельный случай носит название двойного электрического слоя.

Физические примеры реализации двойного слоя разнообразны. Например, на границе вакуум — металл имеется двойной слой,

обусловленный частичным выходом электронов из металла. Обобщим результат о разрыве потенциала, полученный лишь для плоского двойного слоя, на двойной слой, расположенный на поверхности произвольной формы.

Элемент поверхности  $ds$  характеризуется электрическим моментом

$$d\mathbf{p} = \sigma ds = m ds,$$

где  $m$  — так называемая мощность двойного слоя. Потенциал, создаваемый этим моментом, равен:

$$d\varphi = \frac{d\mathbf{p}\mathbf{R}}{R^3} = \frac{m ds \mathbf{R}}{R^3} = \frac{m ds \cos \theta}{R^2} = m d\Omega,$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла, под которым видна площадка  $ds$  двойного слоя из точки наблюдения (рис. 18). Для конечного участка поверхности

$$\varphi = \int_S m \frac{ds \mathbf{R}}{R^2} = \int_{\Omega} m d\Omega,$$

где мощность двойного слоя может быть функцией точки на поверхности. Эта формула дает возможность определить скачок потенциала при переходе через двойной слой в наиболее общем случае — произвольной формы двойного слоя.

Рассмотрим два случая: двойной слой на замкнутой и незамкнутой поверхности. Пусть для первого случая точка наблюдения находится внутри и для второго вне двойного слоя, тогда в первом случае

$$\Omega = 4\pi \text{ и } \varphi = 4\pi m \text{ при } m = \text{const},$$

причем  $m > 0$ , если положительные заряды расположены на внутренней части поверхности, и  $m < 0$  в противоположном случае.

Рассмотрение, следовательно, приводит к постоянству потенциала во всех точках внутри замкнутого двойного слоя.

Если точка наблюдения находится вне замкнутой поверхности, то  $\Omega \rightarrow 0$  (см. рис. 5) при уменьшении просвета и, следовательно, потенциал вне замкнутого двойного слоя во всех точках равен нулю.

Рассмотрим теперь незамкнутую поверхность двойного слоя. Если замкнем заданный двойной слой добавлением нового слоя с потенциалом  $\varphi_1$ , то общий потенциал будет  $\varphi'$ :

$$\varphi' = \varphi + \varphi_1.$$

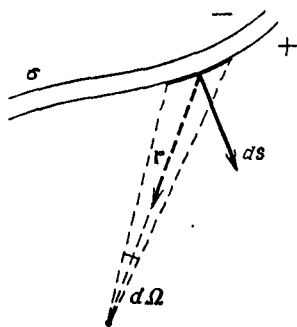


Рис. 18.

Разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$  на основании свойств потенциала, создаваемого замкнутым двойным слоем, равна  $4\pi m$ :

$$\varphi'_I - \varphi'_{II} = \pm 4\pi m$$

или

$$\varphi_I - \varphi_{II} + (\varphi_{I, I} - \varphi_{I, II}) = \pm 4\pi m,$$

где разность  $\varphi_{I, I} - \varphi_{I, II}$  представляет разность потенциалов вспомогательной поверхности. Пусть теперь точки  $A$  и  $B$  сближаются, оставаясь каждая вне и внутри замкнутой поверхности, тогда

$$\varphi_{I, I} - \varphi_{I, II} \rightarrow 0,$$

так что в пределе остается только скачок, создаваемый исходным незамкнутым двойным слоем:

$$\varphi_I - \varphi_{II} = \pm 4\pi m.$$

### § 5. δ-функция в электростатике

Во всех тех случаях, когда приходится иметь дело с конечным изменением физических величин на бесконечно малых интервалах, удобно использовать δ-функцию (так называемую дельта-функцию). Определение δ-функции обычно дается интегральным соотношением

$$\int f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad (4.20)$$

где  $f$  — любая непрерывная функция. Из определения видно, что из всех значений  $f(x)$  δ-функция удерживает только одно, соответствующее  $x=0$ . Это может быть осуществлено, если на любом, сколь угодно малом интервале  $(-\epsilon, +\epsilon)$ , содержащем внутри точку  $x=0$ , имеет место

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x) \delta(x) dx = f(0) \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x) dx = f(0).$$

Таким образом, получается два условия, для того чтобы функция была решением (4.20):

1) сосредоточенность значений δ-функции в нуле

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0; \end{cases}$$

2) нормировка δ-функции на единицу

$$\int \delta(x) dx = 1.$$

Примером  $\delta$ -функции может служить следующее выражение:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^{+K} e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sin Kx}{x},$$

поскольку сосредоточенность функции у нуля будет все большая с увеличением  $K$ . Расстояния от  $x=0$  до точек  $x_n$ , где  $\delta(x)=0$ , определяется условием

$$Kx_n = n\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Следовательно, с ростом  $K$  имеет место  $x_n \rightarrow 0$  для всех конечных значений  $n$ . Условие нормировки выполняется, поскольку

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Kx}{x} dx = 1.$$

Производная от  $\delta$ -функции может быть найдена в явном виде, если распространять правило интегрирования по частям и на  $\delta$ -функцию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x) dx = f(x) \delta(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \delta(x) dx = -f'(0).$$

Отсюда в качестве следствия имеем (рис. 19):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) dx = \delta(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

В то время как  $\delta(x)$ -функция должна быть четной

$$\delta(x) = \delta(-x), \quad (4.21)$$

производная  $\delta(x)$ -функции всегда нечетна:

$$\delta'(x) = -\delta'(-x). \quad (4.22)$$

Запишем в качестве примера применения  $\delta$ -функции результат о распределении зарядов и изменение потенциала и напряженности поля в двойном электрическом слое. Ввиду сосредоточенности как положительных, так и отрицательных зарядов в двойном слое получаем:

$$\rho(x) = \sigma \delta(x+l) - \sigma \delta(x) = \sigma l \delta'(x) = ml \delta'(x).$$

Потенциал при переходе через двойной слой равен нулю для  $x < 0$  и равен  $4\pi m$  для  $x > 0$ , поэтому можно записать потенциал как функцию  $x$  с помощью  $\delta$ -функции:

$$\varphi(x) = 4\pi m \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & \text{для } x < 0 \\ 4\pi m, & \text{для } x > 0. \end{cases}$$



Напряженность электрического поля в двойном слое получаем, дифференцируя  $\varphi(x)$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 4\pi m\delta(x).$$

Заметим, что математические понятия, связанные со строго ограниченными геометрическими образами — разрывы функций, линии, не имеющие толщины, и т. п. не вполне строго адекватны действительности. Скачки имеют в действительности только относительный характер для того круга явлений, в который всегда имеющая место некоторая «протяженность» скачка не является существенной.  $\delta$ -функция, если она понимается не как в пределе строго разрывной, а несколько протяженной, в большей мере отображает действительность. Поэтому имеется основание в непротиворечивом использовании  $\delta$ -функции только при условии ее принципиальной сглаженности. Предельное ее значение только лишь упрощает результаты, делая их более простыми в вычислениях.

Заметим также, что у функций, имеющих разрывы,  $\delta$ -функция отбирает полусумму значений слева и справа от точки разрыва, т. е. в определенном смысле сглаживает разрыв:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x-x')dx' &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{\sin K(x-x')}{x-x'} dx' = \\ &= \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]. \end{aligned}$$

## § 6. Дифференциальные уравнения для потенциалов

Рассмотрим прежде всего поле в вакууме, обусловленное наличием свободных зарядов. Для вакуума основные уравнения электростатики имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= 0, & E_{2t} - E_{1t} &= 0, \\ \operatorname{div} E &= 4\pi\rho, & E_{2n} - E_{1n} &= 4\pi\sigma. \end{aligned}$$

Перейдем от напряженности к потенциалу, положив  $E = -\operatorname{grad} \varphi$ . Тогда уравнение для вихря удовлетворяется, поскольку же

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

получаем дифференциальное уравнение для потенциалов:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Выразим оператор Лапласа в криволинейных ортогональных координатах.

Пользуясь выражениями в криволинейных ортогональных координатах для компонент градиента и для  $\operatorname{div} a$

$$\operatorname{grad}_i \varphi = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i},$$

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right\},$$

находим:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right\}.$$

В частности, в цилиндрических координатах

$$dl^2 = dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2, \quad H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1,$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

а в сферических координатах

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\alpha^2, \quad H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta,$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.$$

К этому дифференциальному уравнению, являющемуся основным в теории потенциала, нужно добавить условие непрерывности потенциала и его производных. Мы видели, что за исключением двойных электрических слоев потенциал на границах раздела заряд — вакуум всегда непрерывен:  $(\varphi)_1 = (\varphi)_2$ . Так как тангенциальные составляющие электрического поля неразрывны, то  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_1 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_2$ . Нормальные же производные могут испытывать скачок

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 = 4\pi\sigma.$$

В диэлектрической среде основные уравнения электростатики

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad E_{2t} - E_{1t} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$$

также дают возможность найти уравнение для потенциала, не предполагая однородности диэлектрической среды. Имеем  $D = E + 4\pi P$ ,  $P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E$ ,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}) = 4\pi(\rho + \rho_{\text{св}}). \quad (4.23)$$

Выразим  $\rho_{\text{св}}$  через  $\rho$ ,  $\varphi$ , и  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \rho_{\text{св}} &= -\operatorname{div} \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \varepsilon \mathbf{E} = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{D} - \varepsilon \mathbf{E} \operatorname{grad} \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} = \\ &= -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho + \varepsilon \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon}. \end{aligned}$$

Подстановка результата в (4.23) дает:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon} + \varepsilon \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

Окончательно получаем следующее дифференциальное уравнение для потенциала в произвольной диэлектрической среде:

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} - \varepsilon \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}. \quad (4.24)$$

В частном случае однородной среды  $\epsilon = \text{const}$  получаем:

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}.$$

Таким образом, потенциал в однородной диэлектрической среде по сравнению с потенциалом в вакууме при том же распределении свободных зарядов уменьшается в  $\epsilon$  раз и соответственно плотность зарядов при одинаковом значении потенциалов должна увеличиться во столько же раз.

Граничные условия на границе раздела диэлектрических сред таковы:

1.  $\varphi_1 = \varphi_2$  (непрерывность потенциала, исключая двойные слои);
2.  $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_2$  (непрерывность тангенциальных составляющих напряженности электрического поля);
3.  $\epsilon_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 - \epsilon_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 = 4\pi\sigma$  (разрыв производных потенциала по нормали к поверхности раздела).

## § 7. Прямая и обратная задачи электростатики

Рассмотрим сначала обратную задачу как наиболее простую: по заданному потенциалу как функции координат определить распределение заряда в каждой точке пространства.

С первого взгляда кажется, что задача всегда разрешима и сводится к процессу дифференцирования, так как

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \rho = \frac{1}{4\pi} \text{div } \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \Delta\varphi,$$

однако это будет верным только в том случае, если нет особенностей в поле (точечных зарядов, двойных электрических слоев), приводящих к неопределенному значению производных в точках разрыва. Для того чтобы это подчеркнуть, рассмотрим следующую задачу. Пусть дано распределение потенциала в виде  $\varphi = \frac{e}{r} e^{-ar}$ , имеющее особенность в точке  $r=0$ , и требуется определить распределение заряда, соответствующее заданному потенциалу. Вначале определим распределение зарядов дифференцированием на основании формулы  $\rho = -\frac{1}{4\pi} \Delta\varphi$ , не обращая внимания на существование особенности, получаем:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{ea^2}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-ar} = -\frac{a^2}{4\pi} \varphi.$$

Заметим, следовательно, что потенциал  $\varphi = \frac{e}{r} e^{-ar}$  удовлетворяет уравнению  $\Delta\varphi + a^2\varphi = 0$ .

На основании полученного выражения для  $\rho$  определим, какой заряд сосредоточен в окрестности  $r=0$

$$e_r = \int_{\frac{4\pi r^3}{3}} \rho d\tau = -\frac{e}{4\pi} a^3 \int_0^r \frac{1}{r'} e^{-ar'} 4\pi r'^2 dr' = e \{e^{-ar} (1 + ar) - 1\}; \quad (4.25)$$

пусть  $r \rightarrow 0$ , тогда и  $e_r \rightarrow 0$ . Таким образом, в особой точке нет точечного заряда. Применим, однако, для решения этой же задачи определения заряда в особенности интегральную форму основного уравнения электростатики:

$$\oint_S E ds = 4\pi e, \quad E_n = E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = e \left( \frac{a}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{-ar}.$$

Интегрируя по сфере с особенностью в центре находим:

$$\oint_S E_n ds = E_r 4\pi r^2 = 4\pi e (ar + 1) e^{-ar},$$

стягивая сферу к особенности  $r \rightarrow 0$ , получаем:

$$e_{r \rightarrow 0} = e.$$

Таким образом, в особенности расположен точечный заряд, равный  $e$ , что противоречит результату, полученному на основании дифференциального уравнения.

Этот пример указывает, что для решения обратной задачи нельзя ограничиться дифференциальным уравнением — в местах особен-  
ности оно теряет смысл и может приводить к неправильным заключениям о действительном распределении зарядов. Дифференциальное уравнение может выявить только непрерывное распределение зарядов, но не выявляет, точечных зарядов. В рассмотренном выше примере полный заряд непрерывного распределения находится из (4.25) при  $r \rightarrow \infty$

$$e_{r \rightarrow \infty} = -e.$$

Таким образом, решение задачи таково: точечный заряд окружен атмосферой непрерывного распределения отрицательного заряда с полным зарядом атмосферы, равным  $-e$ . В целом система, воспроизводимая приведенным выше потенциалом, нейтральна (рис. 20).

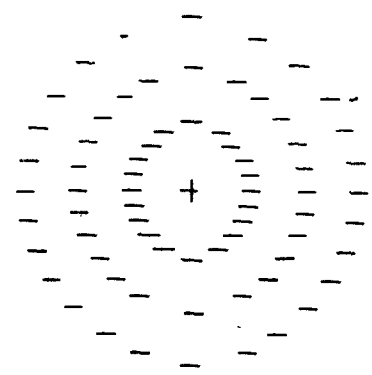


Рис. 20.

В целом система, воспроизводимая приведенным выше потенциалом, нейтральна (рис. 20).

В прямой задаче электростатики требуется по заданному распределению зарядов определить распределение потенциала. Рассмотрим два метода решения этой задачи.

Метод сведения дифференциального уравнения к интегральному, пользуясь интегральными формулами Грина.

В известной формуле Грина

$$-\int_V (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \nabla \psi) d\tau = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds, \quad (4.26)$$

имеющей место для двух произвольных, но дважды дифференцируемых функций, или в другой форме

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d\tau = \oint_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds \quad (4.27)$$

(получающейся из предыдущей). Положим  $\Delta \varphi = -4\pi\rho$ , а  $\psi = \frac{1}{r}$ ; функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \psi = 0$  всюду, за исключением точки  $r=0$ . Выделяя сферой  $S'$  особенность функций  $\psi$ , можем написать:

$$-\int_{V_1} \frac{1}{r} \Delta \varphi d\tau = \int_{S+S'} \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} ds. \quad (4.28)$$

Интеграл по поверхности  $S'$  сводится к виду

$$\frac{1}{r^2} \oint_{S'} \varphi ds + \frac{1}{r} \oint_{S'} \frac{\partial \varphi}{\partial r} ds,$$

причем здесь мы учли разный знак при дифференцировании по нормали  $n$  и по радиусу  $r$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2}.$$

Применим теорему о среднем для определения правой части (4.28) при стягивании сферы к точке:

$$\frac{1}{r^2} \oint_{S'} \varphi ds + \frac{1}{r} \oint_{S'} \frac{\partial \varphi}{\partial r} ds = \frac{1}{r^2} \bar{\varphi} 4\pi r^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} 4\pi r^2.$$

В пределе  $r \rightarrow 0$  получаем  $4\pi\varphi$ , причем учтена ограниченность  $\varphi$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$  во всех точках рассматриваемого объема. Таким образом,

формулу Грина со вспомогательной функцией  $\psi = \frac{1}{r}$  можно написать так:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Delta \varphi}{r} d\tau - \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} ds. \quad (4.29)$$

Пока мы не конкретизировали функцию  $\varphi$ , она только должна обладать производными до второго порядка включительно. Пусть теперь  $\varphi$  есть потенциал, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}.$$

Тогда

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon} \int_V \frac{\rho d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} ds. \quad (4.30)$$

Поскольку искомая функция входит под знак поверхностного интеграла, то мы свели задачу решения дифференциального уравнения  $\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}$  к интегральному. Если, однако, известно значение  $\varphi$  на границе и значение производной по нормали к границе, то уравнение (4.29) может рассматриваться как решение дифференциального уравнения при указанных условиях на границе.

С другой стороны, если ограничить себя определенным классом функций, наложив требование о характере убывания функции  $\varphi$  при  $r \rightarrow \infty$ , то интегральное уравнение сразу дает решение задачи, если эти требования гарантируют исчезновение поверхностного интеграла и если, конечно, эти требования не будут противоречить полученному решению.

Такой путь решения интегрального уравнения осуществим, В самом деле, предположим, что потенциал убывает в бесконечности как  $\frac{1}{r}$ , тогда, удаляя каждую точку поверхности  $S$  в бесконечность, получаем для первого члена в выражении под знаком поверхностного интеграла

$$\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \sim \frac{1}{r^2}$$

и для второго

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sim \frac{1}{r^2}.$$

Ввиду того, что при росте  $r$  поверхность увеличивается как  $r^2$ , а подынтегральное выражение в поверхностном интеграле убывает как  $\frac{1}{r^2}$ , приходим к заключению, что условие, накладываемое на решение, устраняет поверхностный интеграл и мы получаем решение для бесконечной области:

$$\varphi = \int \frac{\rho d\tau}{r}. \quad (4.31)$$

Согласованность поставленных требований с полученным решением

сразу проверяется, поскольку для зарядов, расположенных в конечной области пространства, асимптотический ход потенциала при удалении точки наблюдения в бесконечность

$$\varphi = \int \frac{\rho d\tau}{r} \rightarrow \frac{1}{r_0} \int \rho d\tau = \frac{e}{r_0}$$

действительно убывает как  $\frac{1}{r_0}$ .

Важно подчеркнуть, что потенциал вида (4.31) требует обязательного распределения зарядов в конечных областях пространства, поэтому выражение (4.31) не эквивалентно исходной формуле (4.30), содержащей поверхностный интеграл, которая не предполагает указанного ограничения. С точки зрения общих уравнений электростатики формула (4.31) выполняется при дополнительном условии о свойстве поля в бесконечности и, таким образом, включает новую предпосылку помимо тех, которые содержатся в основных уравнениях электродинамики (постулат о локализации зарядов).

### § 8. Метод решения дифференциального уравнения для потенциала с помощью интеграла Фурье

Если ограничиться такими задачами, в которых заранее известно, что функции  $\varphi$  и  $\rho$  интегрируемы во всем пространстве, причем

$$\int |\varphi| d\tau < \infty, \quad \int |\rho| d\tau < \infty,$$

то разложение этих функций в интеграл Фурье сводит задачу решения дифференциального уравнения к системе алгебраических уравнений для амплитуд Фурье. В самом деле, полагая

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad \rho = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \rho_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (4.32)$$

где амплитуды Фурье  $\varphi_{\mathbf{k}}$  и  $\rho_{\mathbf{k}}$  равны

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \varphi e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad \rho_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \rho e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r},$$

и подставляя выражения (4.32) в уравнение  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ , получаем:

$$\int \varphi_{\mathbf{k}} \Delta e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} = -4\pi \int \rho_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k},$$

или

$$\int \varphi_{\mathbf{k}} (-k^2) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} = -4\pi \int \rho_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}.$$

Умножим обе части последнего уравнения на  $e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}$  и проинтегрируем по  $\mathbf{r}$ . Если считать, что функции удовлетворяют условиям

перестановки пределов интегрирования, то приходим к следующему интегралу:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x - k'_x)x} dx \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_y - k'_y)y} dy \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_z - k'_z)z} dz = \\ & = \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \delta(k_z - k'_z) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned}$$

В связи с этим уравнение приобретает вид

$$\int \varphi_{\mathbf{k}}(-k^2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k} = -4\pi \int \rho_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d\mathbf{k}.$$

Далее, на основании основного свойства  $\delta$ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

получим:

$$\varphi_{\mathbf{k}'}(-k'^2) = -4\pi\rho_{\mathbf{k}}.$$

Итак, окончательно

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi}{k^2} \rho_{\mathbf{k}},$$

Таким образом, неизвестные амплитуды Фурье потенциала выражаются через амплитуды Фурье распределения зарядов, которые могут считаться известными. На основании исходной формулы Фурье получаем решение задачи в виде интеграла

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{4\pi\rho_{\mathbf{k}}}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (4.33)$$

Например, для случая точечного заряда  $\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r})$

$$\rho_{\mathbf{k}} = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \int \delta(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}},$$

$$\varphi = \frac{4\pi e}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} d\mathbf{k}.$$

В сферической системе координат

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} d\mathbf{k} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{k^2} k^2 dk \int_0^{\pi} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \cos \theta} \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} dk \int_{-1}^{+1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}x} dx, \end{aligned}$$



где обозначено  $x = \cos \theta$ , получаем:

$$J = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin kr}{kr} dk = \frac{2\pi^2}{r}$$

и окончательно

$$\varphi = \frac{e}{r}.$$

### § 9. Краевые задачи электростатики

Рассмотрим задачу о распределении потенциала в пространстве при наличии заряженных проводников.

Поскольку

$$\varphi_P - \varphi_{P_0} = - \int_{P_0}^P E dl$$

и в проводниках  $E = 0$ , то внутри проводников и на их поверхности  $\varphi = \text{const}$ . На поверхности проводника, как мы видели ранее,  $E_n = 4\pi\sigma$ , а так как  $E = -\text{grad } \varphi$ , то  $\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , т. е. поверхностная плотность заряда выражается через производную потенциала по нормали к поверхности проводника. Вне проводников потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0.$$

В первой краевой задаче электростатики задается потенциал на каждом из проводников  $\varphi_i$ . Требуется определить потенциал всюду и вне проводников путем решения уравнения  $\Delta \varphi = 0$ . Во второй краевой задаче задан заряд на каждом из проводников

$$e_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds;$$

вне проводников потенциал удовлетворяет уравнению  $\Delta \varphi = 0$ .

Теорема о единственности этих задач имеет практическое значение. Действительно, найдя каким-либо специальным методом частное решение задачи, мы будем иметь гарантию, на основании теорем однозначности, что это решение и есть искомое решение, поскольку других не существует.

Докажем единственность решения первой задачи. Пусть имеется два решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , удовлетворяющие уравнению Лапласа и одним и тем же граничным условиям. Тогда разность этих решений  $\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2$  также удовлетворяет тому же уравнению  $\Delta \varphi' = 0$  и граничным условиям  $\varphi' = 0$  на поверхности каждого из проводников.

Докажем, что  $\varphi' \equiv 0$ . В формуле Грина:

$$\int_V (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \nabla \psi) d\tau = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds$$

положим  $\varphi = \psi = \varphi'$ . Тогда

$$\int_V (\nabla \varphi')^2 d\tau = \oint_S \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds,$$

где поверхностный интеграл распространен по поверхности всех проводников. Так как на поверхности каждого проводника  $\varphi' = 0$ , то

$$\int_V (\nabla \varphi')^2 d\tau = 0.$$

Далее, может быть только  $(\nabla \varphi')^2 \geq 0$ , а поскольку интеграл от этой величины равен нулю, то, следовательно,

$$(\nabla \varphi')^2 = 0,$$

откуда

$$\varphi' = \text{const.}$$

На поверхности проводников  $\varphi' = 0$ , следовательно, и всюду  $\varphi' \equiv 0$ , что и требовалось доказать.

Докажем теперь единственность решения второй краевой задачи. Пусть имеется два решения этой задачи, удовлетворяющие граничным условиям

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = e_i$$

и уравнению

$$\Delta \varphi = 0.$$

Следовательно, разность этих решений  $\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2$  удовлетворяет нулевым граничным условиям

$$\oint_{S_i} \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds = 0$$

и уравнению

$$\Delta \varphi' = 0.$$

Применяя опять интегральную формулу и используя условие, что потенциал на поверхности проводников постоянен, находим:

$$\int_V (\nabla \varphi')^2 d\tau = \oint_S \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds = \varphi' \oint_S \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds.$$

Но на основании граничного условия  $\oint_S \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds = 0$  получаем:

$$(\nabla \varphi')^2 = 0,$$

отсюда

$$\varphi' = \text{const};$$

таким образом, решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  могут отличаться только на постоянную. Если потребовать сохранения нормировки для потенциала (в какой-либо точке потенциал должен иметь раз навсегда выбранное значение), то

$$\varphi_1 \equiv \varphi_2.$$

Рассмотрим некоторые приложения теорем единственности.

1. Существование емкости уединенного проводника. Только при условии независимости отношения заряда к потенциалу от величины заряда  $\frac{e}{\varphi} = \frac{e'}{\varphi'} = C$  понятие емкости имеет смысл. Поэтому нужно показать, что законы электростатики предусматривают эту независимость. Положим, что во второй задаче

$$\Delta \varphi = 0, \quad -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = e$$

заряд увеличен в  $m$  раз. Покажем, что автоматически и потенциал  $\varphi$  увеличится в  $m$  раз, т. е. если  $e' = me$ , то  $\varphi' = m\varphi$ . Действительно;  $\varphi'$  удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию, поскольку  $\varphi$  удовлетворяет этому условию. Следовательно,  $\varphi'$  есть решение второй задачи, а так как решение второй краевой задачи может быть только единственным, то, следовательно, увеличение заряда в  $m$  раз изменяет потенциал также в  $m$  раз, чем и обосновывается понятие емкости.

2. Существование электростатической защиты. Покажем, что из законов электростатики вытекает независимость распределения поля внутри полой металлической полости от распределения зарядов вне полости.

На поверхности внутри металлического слоя, охватывающего полость, справедливо соотношение

$$\oint_S \mathbf{E} ds = 4\pi e = 0,$$

так как  $\mathbf{E} = 0$  внутри проводника. Следовательно, индуцированный на поверхности заряд всегда равен полному заряду  $\sum e_i$ , находящемуся внутри полости, но противоположен по знаку, т. е. равен  $-\sum e_i$ . Обозначим поверхностную плотность зарядов на внутренней поверхности

через  $\sigma$ , тогда указанный результат можно записать так:

$$\oint_S \sigma ds = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = -\sum e_i.$$

Таким образом, неизменной остается величина

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = -\sum e_i \quad (4.34)$$

— заряд на внутренней поверхности металлической полости. Поскольку эти условия совпадают с условиями единственности второй задачи, то последнее обстоятельство определяет независимость поля внутри замкнутой полости металлической поверхности от зарядов вне этой поверхности.

### § 10. Энергия электростатического поля

Из общего выражения энергии электромагнитного поля следует, что в случае отсутствия магнитного поля энергия равна:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E^2 d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \mathbf{D} d\tau, \quad (4.35)$$

причем интегралы распространены по всей области пространства, где  $\mathbf{E} \neq 0$ . Особо характерным для выражения энергии (4.35) является непрерывное распределение энергии в пространстве с плотностью

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}.$$

В электростатике, оказывается, можно дать для энергии другое выражение, характеризующее пространственную локализацию энергии только в тех областях, где находятся заряды. Для этой цели выразим энергию непосредственно через объемные и поверхностные заряды, воспользовавшись основными уравнениями электростатики:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

а также векторным тождеством

$$\text{div } \varphi \mathbf{D} \equiv \varphi \text{ div } \mathbf{D} + \mathbf{D} \text{ grad } \varphi.$$

Получим:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{D} \text{ grad } \varphi d\tau = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int (\varphi \text{ div } \mathbf{D} - \text{div } \varphi \mathbf{D}) d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \text{ div } \mathbf{D} d\tau - \frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi \mathbf{D} ds = \\ &= \frac{1}{2} \int \varphi \rho d\tau - \frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi \mathbf{D} ds. \quad (4.36) \end{aligned}$$

Рассмотрим поверхностный интеграл. Поверхность  $S$  должна ограничивать все поле и места разрыва вектора  $\mathbf{D}$  (двойной слой исключаем), т. е. заряженные поверхности.

Для зарядов, сосредоточенных в конечной области пространства, поверхностный интеграл по бесконечно удаленной поверхности  $S$  исчезает, поскольку для этого случая

$$\varphi \sim \frac{1}{r}, \quad D \sim \frac{1}{r^2}, \quad S \sim r^2$$

и, следовательно,

$$\oint_{S \rightarrow \infty} \varphi \mathbf{D} ds \rightarrow 0.$$

Интеграл по поверхности  $S'$ , ограничивающей поверхности разрыва вектора  $\mathbf{D}$ , при стягивании этой поверхности к поверхности разрыва выражается через значения нормальных компонент на этой поверхности:

$$\oint_{S'} \varphi \mathbf{D} ds = \int_S \varphi (D_{1n} - D_{2n}) ds = - \int_S \varphi 4\pi \sigma ds.$$

Таким образом,

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi d\tau + \frac{1}{2} \int \sigma \varphi ds. \quad (4.37)$$

Особенность этого выражения заключается в том, что интегралы в (4.37) в отличие от исходной формы (4.35) распространены только на пространственные области, содержащие заряды, так как в других областях пространства подинтегральные выражения исчезают. Поэтому с точки зрения (4.37) можно говорить о пространственной локализации электростатической энергии.

Таким образом, можно получить две различные физические интерпретации. Вторая физическая интерпретация сводится к утверждению о том, что электростатическая энергия есть энергия взаимодействия зарядов. Действительно, поскольку

$$\varphi = \int \frac{\rho d\tau}{r},$$

то для объемно распределенных зарядов получаем:

$$W = \frac{1}{2} \iint_V \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') d\tau d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.38)$$

Ввиду того что заряды могут быть разделены пространством, не содержащим зарядов, вторая точка зрения допускает взаимодействие через области пространства, не содержащие энергии [см. (4.37)]. Эта точка зрения носит название «принципа дальнего действия» в отличие от «принципа ближнего действия», согласно которому такая возможность

исключается. Точка зрения, лежащая в основе «принципа дальнего действия», если ее понимать как утверждение о возможности взаимодействия через «ничто», для диалектического материализма неприемлема, так как отрывает материю от пространства.

Попробуем разобраться, действительно ли выражения (4.35) и (4.37) совершенно математически эквивалентны, как это часто утверждается. Прежде всего заметим, что выражение для энергии (4.35) мы получили из теоремы Умова—Пойнтинга, не предполагающей какой-либо закон взаимодействия между зарядами (при выводе этой теоремы были использованы только два первых уравнения поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

формулы же (4.37) и (4.38) основываются на уравнениях электростатики. Поэтому можно говорить только о конкретизации выражения (4.35) при новых дополнительных условиях на поле, заключенных в уравнениях электростатики и, вообще говоря, не содержащихся в выражении (4.35). Кроме того, при переходе от (4.35) к (4.37) мы опустили поверхностный интеграл  $\oint \varphi \mathbf{D} ds$  и этим ограничились определенным типом поля, достаточно быстро убывающего с расстоянием. Конечно, важно, что это условие не находится в конфликте с полной системой уравнений электростатики, но и не менее важно, что оно не является автоматическим следствием этих законов, поскольку при установлении условий  $\varphi \sim \frac{1}{r}$ ,  $D \sim \frac{1}{r^2}$  мы требовали сосредоточенности зарядов в конечной области пространства — факт, который не может считаться следствием этих законов. Поэтому о математической эквивалентности можно говорить только с учетом этих двух обстоятельств. Отметим, что вопрос о локализации энергии связан с вопросом о пространственной локализации заряда. Отбрасывание поверхностного интеграла может рассматриваться как условие пространственной локализации заряда и это же условие приводит к локализации энергии в зарядах.

Приходим к следующему заключению: а) формулы (4.35) и (4.37) математически не эквивалентны; б) физический факт о пространственной локализации энергии в областях, где имеются заряды, мы, строго говоря, не вывели, а ввели с помощью дополнительного принципа локализации зарядов только в конечных областях пространства. Другими словами, пространственная локализация зарядов привела к пространственной локализации энергии.

Следует отметить, что формула (4.38) не находится в соответствии со статистической механикой, описывающей поведение многих частиц, взаимодействующих между собой по произвольному центральному закону. В самом деле, в классической статистической механике вводится функция распределения  $D(q_1 \dots q_N, p_1 \dots p_N)$ , зависящая от координат  $q_1 \dots q_N$  и импульсов  $p_1 \dots p_N$  всех частиц и нормированная на единицу. С помощью этой функции вычисляются средние величины. Для аддитивных величин, т. е. имеющих вид  $\sum_{i=1}^N \omega(q_i p_i)$ , например плотность, кинетическая энергия и т. п., имеем:

$$\bar{W} = \int \sum_{i=1}^N W(q_i p_i) D(q_1 \dots q_N, p_1 \dots p_N) dq_1 dp_1 \dots dq_N dp_N. \quad (4.39)$$

Для одинаковых частиц функция  $D(q_1 \dots q_N, p_1 \dots p_N)$  должна быть симметричной при перестановке координат (и импульсов) частиц. Поэтому интегрирование в (4.39) дает:

$$\bar{W} = N \int W(q, p) f(q, p) dq dp,$$

где  $f(q, p) = \int D(q_1 \dots q_N, p_1 \dots p_N) dq_2 dp_2 \dots dq_N dp_N$  — функция распределения одной частицы. Для так называемых бинарных величин, имеющих вид  $\sum_{i \neq j} W(q_i p_i q_j p_j)$  (например, потенциальная энергия взаимодействия между частицами), имеем:

$$\bar{W} = \int \sum_{i \neq j} W(q_i p_i q_j p_j) D(q_1 \dots q_N, p_1 \dots p_N) dq_1 dp_1 \dots dq_N dp_N$$

или

$$\bar{W} = \frac{N(N-1)}{2} \int W(q_1 p_1 q_2 p_2) f(q_1 p_1 q_2 p_2) dq_1 dp_1 dq_2 dp_2,$$

где множитель  $\frac{N(N-1)}{2}$  обозначает число сочетаний из  $N$  элементов по два. Функция  $f(q_1 p_1 q_2 p_2)$  есть функция распределения пары частиц. В случае если бинарная величина  $W(q_1 q_2)$  не зависит от импульсов частиц, а зависит только от их координат, можно перейти к новой функции распределения:

$$\rho(q_1 q_2) = \int f(q_1 p_1 q_2 p_2) dp_1 dp_2.$$

Тогда

$$\bar{W} = \frac{N(N-1)}{2} \int W(q_1 q_2) \rho(q_1 q_2) dq_1 dq_2.$$

В случае закона Кулона среднее значение потенциальной энергии электростатических сил взаимодействия системы частиц выражается формулой

$$\bar{W} = \frac{N(N-1)}{2} e^2 \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (4.40)$$

Сравним эту формулу с формулой, получаемой в электростатике

$$\bar{W}_{\text{эл}} = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2;$$

здесь  $\rho$  обозначает пространственную плотность заряда. Для удобства сравнения с формулой (4.40) введем плотность местоположения частиц, нормированную на единицу:  $\rho(\mathbf{r}) = eN\rho^+(\mathbf{r})$ ,  $\int \rho^+(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1$ , тогда

$$W_{\text{эл}} = \frac{N^2}{2} e^2 \int \frac{\rho^+(\mathbf{r}_1) \rho^+(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (4.41)$$

Замечаем, что формулы (4.40) и (4.41) даже для  $N \gg 1$  существенно различны, так как  $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \neq \rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2)$ . Решение задачи о причинах несоответствия заключается в разной модели частиц в электродинамике и статистической механике. Именно статистическая механика предполагает, что частицы — строго точечные, и «непрерывный» способ описания достигается посредством

введения ансамблей состояний с помощью функций распределения. Формулы же электростатики основываются на переходе от энергии точечных частиц

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_{\substack{j \\ (j \neq i)}} \frac{e^2}{|r_i - r_j|}$$

к объемно-распределенным зарядам, т. е. вводятся не точечные, а протяженные частицы. Приходим к заключению, что электродинамический метод введения непрерывности принципиально отличается от статистического. В статистической физике вероятность местоположения одной из частиц в объеме  $d\tau_1$  зависит от того, есть ли другая частица в объеме  $d\tau_2$ . Имеет место статистическая зависимость в вероятностях положения частиц в пространственно разобщенных объемах ( $\rho(1, 2) d\tau_1 d\tau_2 \neq \rho(1) \rho(2) d\tau_1 d\tau_2$ ). В электродинамике совершен переход от точечных зарядов к протяженным, при этом предположено, что распределение плотности заряда в каждом «облачке», заменяющем точки, осуществляется не зависимо от распределения заряда в других «облачках».

Рассмотрим теперь несколько частных случаев общего выражения энергии в электростатике.

Энергия системы заряженных проводников. Поскольку потенциал на поверхности каждого проводника имеет постоянное значение, а объемная плотность заряда внутри проводников равна нулю, то

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{S_i} \sigma \varphi ds = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma ds = \frac{1}{2} \sum_i e_i \varphi_i. \quad (4.42)$$

В итоге получается, что энергия системы проводников определяется только зарядом и потенциалом каждого проводника (причем явно не зависит от распределения зарядов).

Для изолированного проводника

$$W = \frac{1}{2} e\varphi,$$

или, вводя емкость проводника  $C = \frac{e}{\varphi}$ ,

$$W = \frac{1}{2} C\varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C}.$$

Таким образом, емкость проводника определяет величину энергии проводника при заданном заряде.

Если под конденсатором, по определению, будем понимать систему проводников, обеспечивающих наличие области пространства, поле в которой не будет зависеть от расположения внешних зарядов, то понятие емкости введем как отношение  $\frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2}$ , где  $\varphi_1 - \varphi_2$  представляет разность потенциалов между внутренним проводником



и внешним, играющим роль электростатической защиты. Для энергии конденсатора имеем:

$$W = \frac{1}{2} (e_1\varphi_1 - e_2\varphi_2) = \frac{1}{2} e (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C}.$$

От формы проводящих поверхностей зависит только коэффициент  $C$  — емкость конденсатора.

Собственная энергия и энергия взаимодействия. Рассмотрим два наэлектризованных тела. Поскольку в каждой точке пространства  $E = E_1 + E_2$ , то

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 d\tau = \frac{1}{8\pi} \int E_1^2 d\tau + \frac{1}{8\pi} \int E_2^2 d\tau + \frac{1}{4\pi} \int E_1 E_2 d\tau. \quad (4.43)$$

В то время как напряженность поля является аддитивной функцией полей, создаваемых каждым отдельным источником, энергия системы зарядов складывается из энергии каждого отдельного заряда плюс энергия взаимодействия:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi} \int \text{grad } \varphi_1 \cdot \text{grad } \varphi_2 d\tau. \quad (4.44)$$

Рассмотрим энергию взаимодействия на простейшем случае энергии взаимодействия точечного заряда с заданным внешним полем. Пусть  $\varphi_1$  — потенциал внешнего поля,  $\varphi_2$  — потенциал заряженной точки. Преобразуем (4.44), используя формулу Грина

$$\int_V (\varphi_1 \Delta \varphi_2 + \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2) d\tau = \oint_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} ds.$$

Так как  $\Delta \varphi_2 = 0$  во всех точках, за исключением области, ограниченной сферой  $S$ , содержащей точечный заряд, то в выражении энергии взаимодействия

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi} \int \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 d\tau = \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} ds - \int_V \varphi_1 \Delta \varphi_2 d\tau$$

(где  $V$  — объем всего поля, за исключением объема выделенной сферы) выпадает второй член, и мы имеем:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi} \varphi_1 \oint_S \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} ds = -\frac{1}{4\pi} \varphi_1 \oint_S \frac{\partial \varphi_2}{\partial n'} ds = \frac{1}{4\pi} \varphi_1 \oint_S E ds$$

(где  $n' = -n$ ,  $-\frac{\partial \varphi_2}{\partial n'} = E$ ).

Поскольку, однако,  $\oint_S E ds = 4\pi e$ , имеем окончательно:

$$W_{12} = e\varphi,$$

где  $\varphi$  — потенциал внешнего поля в месте нахождения точечного заряда. Обобщая этот результат на систему зарядов во внешнем поле, имеем:

$$W_{12} = \sum_i e_i \varphi_i. \quad (4.45)$$

Хотя форма (4.45) близка к форме (4.42), однако смысл этих выражений, очевидно, существенно различен. Энергия системы проводников включает как собственную энергию, так и энергию взаимодействия. В формуле же (4.45) значение потенциала  $\varphi_i$  не содержит в себе потенциала, создаваемого каждым зарядом  $e_i$  рассматриваемой системы.

В случае если система точечных зарядов занимает область пространства, внутри которого потенциал внешнего поля сил меняется лишь медленно, энергию взаимодействия можно представить в более удобном виде. Пусть точка  $x, y, z$  выбрана внутри объема системы. Тогда

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum e_i \varphi(x + \xi_i, y + \eta_i, z + \zeta_i) = \\ &= \sum e_i \left[ \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \xi_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \eta_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \zeta_i + \dots \right] = \\ &= \varphi \sum e_i + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sum e_i \xi_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sum e_i \eta_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \sum e_i \zeta_i + \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \sum e_i \xi_i^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \sum e_i \eta_i^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \sum e_i \zeta_i^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \sum e_i \xi_i \eta_i + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \sum e_i \xi_i \zeta_i + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \sum e_i \eta_i \zeta_i + \dots \end{aligned} \quad (4.46)$$

Коэффициенты при первых производных представляют собою не что иное как компоненты электрического момента системы:

$$p_x = \sum e_i \xi_i, \quad p_y = \sum e_i \eta_i, \quad p_z = \sum e_i \zeta_i.$$

Это определение электрического момента относительно произвольной точки не противоречит данному ранее ( $\mathbf{p} = e\mathbf{l}$ , где  $\mathbf{l}$  — вектор расстояния, проведенный из центра тяжести отрицательных зарядов к центру тяжести положительных). В самом деле, для центра тяжести положительных зарядов мы имеем:

$$\mathbf{R}^{(+)} = \frac{\sum e_i^{(+)} \mathbf{r}_i}{\sum e_i^{(+)}}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum e_i \mathbf{r}_i = \sum e_i^{(+)} \mathbf{r}_i - \sum e_i^{(-)} \mathbf{r}_i = \\ &= \mathbf{R}^{(+)} \left\{ \sum e_i^{(+)} \right\} - \mathbf{R}^{(-)} \left\{ \sum e_i^{(-)} \right\}. \end{aligned}$$

В случае, если система зарядов в целом нейтральна

$$\sum e_i^{(+)} = \sum e_i^{(-)} = e,$$

получаем:

$$\mathbf{p} = e (\mathbf{R}^{(+)} - \mathbf{R}^{(-)}) = e\mathbf{a}.$$

Следует отметить, что без условия нейтральности выражение электрического момента

$$\mathbf{p} = \sum e_i \mathbf{r}_i$$

зависит от положения системы координат. Действительно, полагая  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$ , имеем:

$$\mathbf{p}' = \sum e_i \mathbf{r}'_i = \sum e_i \mathbf{r}_i + \mathbf{a} \sum e_i;$$

только в случае

$$\sum e_i = 0$$

определение электрического момента не зависит от выбора системы отсчета. Первые два члена энергии взаимодействия, следовательно, имеют вид

$$W_{12} = \varphi \sum e_i + \mathbf{p} \operatorname{grad} \varphi = \varphi \sum e_i - \mathbf{p} \mathbf{E}.$$

Для нейтральной системы получаем:

$$W_{12} = -\mathbf{p} \mathbf{E},$$

если ограничиться первым неисчезающим членом разложения.

В третьем члене выявляется роль асимметрии в распределении зарядов более высокого порядка, чем та, которая может быть охарактеризована электрическим моментом. Эта асимметрия характеризуется матрицей из 9 коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} \sum e_i \xi_i^2 & \sum e_i \xi_i \eta_i & \sum e_i \xi_i \zeta_i \\ \sum e_i \eta_i \xi_i & \sum e_i \eta_i^2 & \sum e_i \eta_i \zeta_i \\ \sum e_i \zeta_i \xi_i & \sum e_i \zeta_i \eta_i & \sum e_i \zeta_i^2 \end{vmatrix},$$

из которых различными являются только 6 коэффициентов. Система с распределением зарядов, характеризуемая третьим членом разложения, в (4.46) носит название квадруполь, а все последующие члены разложения более высокого порядка называются мультиполями.

Простейшая форма распределения точечных зарядов, приводящая к первым четырем членам разложения, схематически представлена на рис. 21.

Рассмотрим собственную энергию и энергию взаимодействия точечных зарядов между собой.

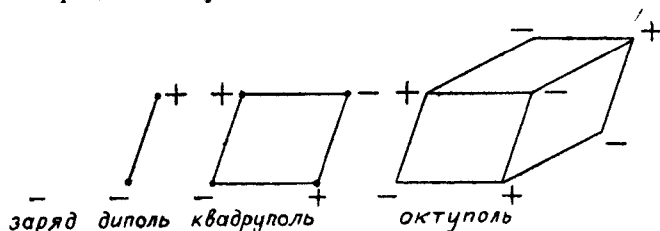


Рис. 21.

Поскольку  $W_{12} = e_1\varphi$ , то энергия взаимодействия двух зарядов равна ( $\varphi = \frac{e_2}{r_{12}}$ ):

$$W_{12} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}}.$$

Собственная энергия каждого из зарядов с радиусом  $a$  будет зависеть от характера распределения заряда по шару. Для зарядов, расположенных равномерно по поверхности,

$$W_{11} = \frac{1}{2} \int \sigma \varphi ds = \frac{1}{2} \varphi \int \sigma ds = \frac{e^2}{2a},$$

равномерно по объему

$$W_{11} = \frac{1}{2} \int \frac{\rho \rho' d\tau d\tau'}{|r - r'|} = \frac{1}{8\pi} \int E^2 d\tau = \frac{3}{5} \frac{e^2}{a},$$

для общего случая — какого-либо другого закона распределения — можно считать

$$W_{11} = \alpha \frac{e^2}{a},$$

где  $\alpha$  — численный коэффициент, различный для разного закона распределения.

Таким образом, полная энергия двух заряженных тел с заданным радиусом  $a$  равна:

$$W = \alpha \frac{e^2}{a} + \alpha \frac{e^2}{a} + \frac{e_1 e_2}{r_{12}}. \quad (4.47)$$

В этой записи есть, очевидно, непоследовательность — третий член имеет место только для точечного представления исходных зарядов;

однако при  $r_{12} \gg a$  поправка будет мала. Переход к точечным зарядам ( $a \rightarrow 0$ ) дает

$$W = \infty + \infty + \frac{e_1 e_2}{r_{12}},$$

т. е. получили, что собственная энергия точечного заряда бесконечно велика. Этот факт имеет для современной электродинамики принципиальное значение, так как указывает, что точечный образ приводит к прямым трудностям. Точку нельзя наделить конечной количественной величиной энергии, могущей подвергаться изменениям в зависимости от внешних условий. Трудности теории особо остро выступают в вопросах динамики точечных заряженных частиц, так как напряженности полей ( $E$  и  $H$ ), создаваемые точечными зарядами, в точке нахождения каждой частицы обращаются в бесконечность. Поэтому, например, точное значение сил (включая собственное поле частицы) в месте, занимаемом самой точечной частицей, теряет смысл<sup>1)</sup>. Указанное обстоятельство препятствует объединению электродинамики с механикой «материальных точек». Возможные пути преодоления указанной трудности мы рассмотрим в микроскопической теории во второй части курса.

Заметим, что формула (4.47) указывает на отсутствие непрерывного перехода между основными дифференциальными уравнениями электродинамики и исходными посылками теории. В самом деле, мы исходили из точечного закона Кулона, который в своей основе не содержал какой-либо собственной энергии, а только конечную энергию взаимодействия, переход же к точкам, исходя из непрерывного распределения зарядов, привел, как мы видели, к существованию нового качества — к собственной энергии заряженных частиц. Причина отсутствия непрерывного перехода заключается в том, что сам переход от точек к континууму имеет скачкообразный характер. Этот переход, как отмечалось ранее, связан с введением нового фактора — эффекта взаимодействия между отдельными элементами, составляющими заряд протяженной частицы. Этот эффект при переходе от протяженного образа к точечному простым уменьшением размеров частицы естественно не устраняется, а только увеличивается, что и указывает на отсутствие непрерывного перехода.

<sup>1)</sup> Точнее, значение силы в месте нахождения точечной частицы неопределенно; оно зависит от того, по какому закону совершается переход к пределу в формуле

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} E(r + \Delta r, t \mp \Delta t).$$

По этому поводу см., например, Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, 1947.

### § 11. Силы в макроскопической электростатике

По аналогии с определением напряженности поля мы можем ввести выражение сил, действующих на заряды в вакууме:

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{E} d\tau = \int_V \mathbf{f} d\tau, \quad (4.48)$$

где  $\mathbf{f}$  — сила, действующая на единицу заряженного объема.

Выясним возможность сведения объемной силы (4.48) к поверхностным силам типа:

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{T}^n ds.$$

Для этой цели выразим подынтегральное выражение в (4.48) только через поле  $\mathbf{E}$ . Так как  $\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}$ , то

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau.$$

Вспользуемся векторным тождеством

$$A_x \operatorname{div} \mathbf{A} - [\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{A}]_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( A_x^2 - \frac{A^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (A_x A_y) + \frac{\partial}{\partial z} (A_x A_z).$$

Другие компоненты вектора  $\mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{A} - [\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{A}]$  получаются циклической перестановкой. В результате имеем:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( E_x^2 - \frac{E^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \right\}, \\ f_y &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (E_y E_x) + \frac{\partial}{\partial y} \left( E_y^2 - \frac{E^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (E_y E_z) \right\}, \\ f_z &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (E_z E_x) + \frac{\partial}{\partial y} (E_z E_y) + \frac{\partial}{\partial z} \left( E_z^2 - \frac{E^2}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Введем матрицу

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

с элементами

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left( E_i E_k - \frac{E^2}{2} \delta_{ik} \right), \quad (4.49)$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Очевидно,

$$T_{ik} = T_{ki}.$$

В микроэлектродинамике, в наиболее общем случае (не трехмерных, а четырехмерных образований), мы убедимся, что элементы  $T_{ik}$  составляют тензор второго ранга. Элементы тензора определяются при помощи определенного закона преобразований — линейного и ортогонального, к которому, в частности, принадлежит операция поворота систем координат.

Введем векторы  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$  с компонентами

$$(T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}), (T_{yx}, T_{yy}, T_{yz}), (T_{zx}, T_{zy}, T_{zz})$$

соответственно. Тогда

$$f_x = \operatorname{div} T_x, \quad f_y = \operatorname{div} T_y, \quad f_z = \operatorname{div} T_z.$$

Эти три выражения можно записать в виде одной формулы, вводя понятия дивергенции тензора ( $\operatorname{div} T$ ) как вектора с компонентами  $\operatorname{div} T_x$ ,  $\operatorname{div} T_y$ ,  $\operatorname{div} T_z$ , тогда

$$\mathbf{f} = \operatorname{div} T. \quad (4.50)$$

Используя для каждой из компонент вектора  $\mathbf{f}$  теорему о преобразовании объемного интеграла от дивергенции к поверхностному интегралу, имеем:

$$F_x = \int_V f_x d\tau = \oint_S T_x ds \quad \text{и т. д.}$$

Вводя, далее, понятие проекции тензора на нормаль как вектор  $T^n$  с компонентами:

$$\begin{aligned} T_x^n &= T_{xx}n_x + T_{xy}n_y + T_{xz}n_z = (T_x \mathbf{n}), \\ T_y^n &= T_{yx}n_x + T_{yy}n_y + T_{yz}n_z = (T_y \mathbf{n}), \\ T_z^n &= T_{zx}n_x + T_{zy}n_y + T_{zz}n_z = (T_z \mathbf{n}), \end{aligned}$$

где  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  — проекции единичного вектора нормали к поверхностному элементу  $ds$ , можем записать окончательно

$$\mathbf{F} = \int_V \rho E d\tau = \oint_S T^n ds. \quad (4.51)$$

Таким образом, доказана возможность сведения электростатических объемных сил к поверхностным силам и найдено выражение плотности поверхностных сил.

Важно отметить, что направление поверхностных сил не совпадает с направлением нормали к поверхности. В общем случае отличны от нуля как нормальные, так и тангенциальные компоненты. Поэтому о давлении можно говорить только в частном случае отсутствия тангенциальных компонент поверхностной силы. Тензор с элементами (4.49) носит по указанной причине название тензора натяжений

электрического поля; в более общем случае переменного поля (см. микроскопическую электродинамику) он называется тензором натяжений электромагнитного поля.

Покажем, что сам факт сведения объемных сил к поверхностным гарантирует выполнение в электростатике третьего закона Ньютона о равенстве действия и противодействия. Разделим пространство произвольной поверхностью на две системы I и II. Тогда сила, с которой вторая система действует на первую, равна:

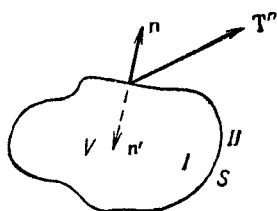


Рис. 22.

$$F_{I, II} = \oint_S T^n ds,$$

а сила, с которой действует первая система на вторую, равна:  $F_{II, I} = \oint_S T'^n ds$ .

Поскольку нормали  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$  отличаются лишь знаком (рис. 22), а поверхность одна и та же, подинтегральные выражения отличаются только знаком. Возможных разрывов напряженности электрического поля всегда можно избежать надлежащим выбором поверхности  $S$  ввиду произвольности ее проведения. Таким образом,

$$F_{I, II} + F_{II, I} = 0.$$

Рассмотрим в качестве примера натяжение на поверхности заряженного проводника. На поверхности проводника

$$E = 4\pi\sigma\mathbf{n}.$$

Поэтому имеется только давление (касательные компоненты силы отсутствуют). В самом деле, исходя из общей формулы

$$\mathbf{F} = \oint_S T^n ds,$$

выберем оси координат к элементу поверхности так, чтобы вектор  $\mathbf{n}$  имел компоненты  $(1, 0, 0)$ ; тогда члены в  $T^n$ :  $T_{xy}$  и  $T_{xz}$  исчезают, так как содержат произведения  $E_x E_y$  и  $E_x E_z$ . Остается

$$(T_x \mathbf{n}) = T_{xx}, \quad (T_y \mathbf{n}) = 0, \quad (T_z \mathbf{n}) = 0,$$

где

$$T_{xx} = \frac{1}{4\pi} \left( E_x^2 - \frac{E^2}{2} \right) = \frac{1}{8\pi} E_x^2 = \frac{1}{8\pi} E^2.$$

Так как давление определяется как сила, действующая на единицу поверхности, имеем окончательно:

$$p = T_{xx} = \frac{1}{8\pi} E^2 = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma E. \quad (4.52)$$



Итак, приходим к следующим выводам. Давление на поверхность проводника численно равно плотности электростатической энергии у поверхности. Давление на поверхности проводника равно только половине произведения напряженности электрического поля на заряд единицы поверхности. Причина последнего обстоятельства заключается в неоднзначности значения поля на самой поверхности ввиду разрыва: в ближайшей окрестности внутри проводника поле равно нулю, а вне поверхности оно равно  $E = 4\pi\sigma$ . Естественно, что в этих случаях значение функции получается равным полусумме ее предельных значений, т. е.  $E = \frac{0 + 4\pi\sigma}{2} = 2\pi\sigma$ . В самом деле, в случае

напряженности поля на границе металла мы имеем  $E_x = 4\pi\sigma \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi$ .

На самой границе  $E_0 = 4\pi\sigma \int_{-\infty}^0 \delta(\xi) d\xi$ , поскольку же  $\delta(\xi) = \delta(-\xi)$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) d\xi = 1$ , получается, что  $\int_{-\infty}^0 \delta(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} \delta(\xi) d\xi = \frac{1}{2}$ . Другими словами, при условии сглаженности распределения зарядов на поверхности металла средняя напряженность поля по всей области сглаживания равна половине максимального значения поля на границе.

Рассмотрим теперь выражение сил в диэлектрической среде. Выше мы видели, что потенциал в диэлектрической среде может быть выражен через потенциал непрерывно распределенных электрических моментов самой среды. Подсчитаем величину силы, действующей на диэлектрическую среду, исходя из этого обстоятельства. В неоднородном электрическом поле сила, действующая на диполь, может быть подсчитана так (рис. 23):

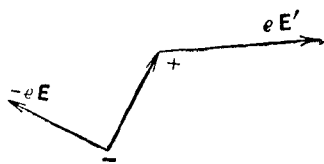


Рис. 23.

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E}' - \mathbf{E}) = e l \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l} = (\mathbf{p} \text{ grad}) \mathbf{E}, \quad (4.53)$$

где обозначено

$$(\mathbf{p} \text{ grad}) = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Используя векторное тождество

$$\text{grad}(\mathbf{pE}) \equiv (\mathbf{p} \text{ grad}) \mathbf{E} + [\mathbf{p} \text{ rot} \mathbf{E}]$$

и свойство потенциальности электростатического поля

$$\text{rot} \mathbf{E} = 0,$$

получим:

$$\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{pE}), \quad (4.54)$$

или в развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} F_x &= p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ F_y &= p_x \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ F_z &= p_x \frac{\partial E_x}{\partial z} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial z} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}; \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

здесь мы учли, что  $p_x, p_y, p_z$  не зависят, по определению, от  $x, y, z$ . Теперь совершим переход к непрерывному распределению электрического момента. Электрический момент малого объема есть

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P} d\tau.$$

Введем плотность силы

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\tau}.$$

Тогда получим:

$$f_x = P_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + P_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + P_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \text{и т. д.} \quad (4.56)$$

На основании связи поляризации с полем

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}$$

окончательно имеем:

$$\mathbf{f} = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \text{grad } E^2. \quad (4.57)$$

Формула (4.57) указывает на независимость силы, действующей на диэлектрик, от направления напряженности поля  $\mathbf{E}$ . Это объясняется тем, что при изменении направления на противоположное электрическая поляризация также меняет знак, и поэтому направление действующей силы остается прежним. Эта сила всегда направлена в сторону возрастания плотности электрической энергии (диэлектрик всегда втягивается в конденсатор). Необходимо отметить два обстоятельства. Прежде всего переход от формулы (4.55) к формуле (4.56), связанный с введением непрерывности в распределении электрических моментов, вносит нечто новое. Если до этого перехода коэффициенты при производных в (4.55) не зависели от координат, то после перехода коэффициенты в (4.56) оказались функциями точек, поскольку и  $\mathbf{E}$  и  $\epsilon$  в общем случае — функции координат.

Заметим также, что формула (4.57) не учитывает явлений электрострикции, для учета которых требуется конкретизация связи поляризации с упругими свойствами диэлектрических сред.

## Задачи

1. Определить распределение потенциала и напряженность поля для равномерно заряженного плоского слоя, цилиндра, шара и эллипсоида.
  2. Определить распределение потенциала для ребристого плоского слоя, цилиндра, шара (и эллипсоида), предполагая ребристость малой.
  3. Определить распределение потенциала в кристаллической решетке, предполагая, что заряд ионов кристалла задан в виде тройкопериодического ряда Фурье.
  4. Показать, что в пространстве, где отсутствуют заряды, потенциал не может принимать максимальных или минимальных значений.
-

## ГЛАВА V

### ОСНОВЫ МАГНИТОСТАТИКИ

#### § 1. Физические и математические основы магнитостатики

Электростатические явления были выделены из всего комплекса электромагнитных явлений условиями  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ . Область магнитостатических явлений выделяется условиями:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{j} \neq 0;$$

тогда из общих законов имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{array} \right\} \text{I}, \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho \\ \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \end{array} \right\} \text{II.} \quad (5.1)$$

Отсюда заключаем, что если известно  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x, y, z)$ , то система I, по крайней мере при  $\mu = \text{const}$ , достаточна для определения  $\mathbf{H}$ , поскольку известны вихри поля и его источники. Плотность тока входит однако в систему II. Возникает вопрос, достаточна ли совокупность систем I и II для определения величин во всех точках как вне, так и внутри проводников в случае заданных токов? Ответ должен быть отрицательным, в чем можно убедиться на следующих трех примерах:

1) Используем для наших условий теорему Умова—Пойнтинга

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = Q + \oint_S \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] ds.$$

Для замкнутой системы, на границах которой (по определению замкнутой системы в электродинамике) исчезает поле, имеем:

$$\oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}] ds = 0.$$

Кроме того, в магнитостатике, по определению,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ . Таким образом, из теоремы Умова—Пойнтинга получаем:

$$Q = \int_V \frac{j^2 d\tau}{\sigma} = 0,$$

что противоречит, однако, другому условию магнитостатики

$$j \neq 0.$$

Таким образом, условие стационарности  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  и наличие постоянного во времени электрического тока  $j \neq 0$  являются требованиями противоречивыми, указывающими на недостаточность исходных предпосылок магнитостатики. Причина указанного противоречия заключается в том, что баланс энергии учитывает потерю энергии за счет выделения тепла в проводниках, в то же время исходные уравнения не включают источников, поддерживающих постоянство токов. Поэтому возникает задача о дополнении исходной схемы учетом стационарно действующих источников электрического тока.

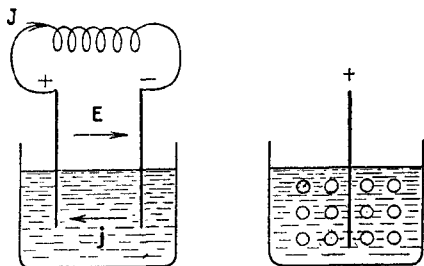


Рис. 24.

2) Рассмотрим, как направлено электрическое поле и электрический ток в разных точках электрической цепи в случае электрического элемента (рис. 24). Во внешней цепи электрическое поле совпадает с направлением электрического тока

$$j = \sigma E,$$

в пространстве же между электродами электрическое поле направлено от положительно заряженного электрода к отрицательному. Электрический ток между электродами направлен в противоположную сторону вследствие замкнутости электрической цепи:

$$\operatorname{div} j = 0.$$

Таким образом, здесь имеет место противоречие: направление тока и электрического поля внутри элемента не соответствует уравнению состояния

$$j = \sigma E.$$

Причина этого противоречия та же, что и в первом случае, — противоречие относится к области, занятой источником тока, последний же не учитывается в исходных уравнениях.

3) Рассмотрим распределение пространственного заряда в электролите, индуцированного помещенным в электролит зарядом. Наличие теплового движения не позволяет ионам электролита под влиянием сил электрического взаимодействия полностью скомпенсировать заряд пластины. Поэтому в электролите должно существовать некоторое стационарное распределение объемного заряда, обусловленное разницей концентраций положительных и отрицательных ионов, т. е. внутри электролита  $E \neq 0$ . Между тем электролит — проводящая среда, для которой имеет место соотношение

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Поскольку же замкнутой цепи нет, то  $\mathbf{j} = 0$ , а следовательно  $E = 0$ , т. е. опять возникает противоречие.

Таким образом, приходим к результату о необходимости изменения соотношения  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , учетом действия источников, поддерживающих постоянно электрический ток, или же инородных причин, компенсирующих действие сил электрической природы.

Для этого будем считать, что, помимо электрического поля  $E(x, y, z)$ , на заряды действует поле другой природы  $E^{\text{стор}}(x, y, z)$ . Назовем это поле полем сторонних сил, так что ток в общем случае определяется суммарным действием двух полей

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}).$$

Такое обобщение прежнего уравнения для сред не требует обязательного физического уточнения природы сторонних сил. Подобная задача ставится в микроскопической теории. Полем сторонних сил могут быть описаны действия различных источников тока: источники химической природы (электрические элементы), термоэлектродвижущие силы и т. д.

С учетом указанного обобщения электрические свойства изотропных сред могут быть охарактеризованы не тремя, как ранее, а четырьмя функциями:

$$\epsilon = \epsilon(x, y, z), \quad \mu = \mu(x, y, z), \quad \sigma = \sigma(x, y, z),$$

$$E^{\text{стор}} = E^{\text{стор}}(x, y, z).$$

Это обобщение устраняет рассмотренные выше противоречия.

В теореме Умова—Пойнтинга добавляется новый член, связанный с работой сторонних сил.

В самом деле, теорема Умова—Пойнтинга, записанная в форме

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} d\tau - \oint_S \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}] ds, \quad (5.2)$$

не требует конкретизации уравнения состояния  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E})$ , так как при выводе (5.2) приходится пользоваться только лишь двумя уравнениями поля:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Полагая

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{E}^{\text{стор}},$$

имеем:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_V \frac{j^2}{\sigma} d\tau + \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}^{\text{стор}} d\tau - \oint_S \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}] ds. \quad (5.3)$$

Новый член  $\int_V \mathbf{j} \mathbf{E}^{\text{стор}} d\tau$  должен отображать работу сторонних сил, например в частном случае стационарного режима,  $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ , и  $\oint_S \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}] ds = 0$ , количество выделяющегося тепла в системе равно работе сторонних сил:

$$Q = \int_V \frac{j^2}{\sigma} d\tau = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}^{\text{стор}} d\tau.$$

Во втором и третьем случаях противоречия снимаются самим фактом обобщения уравнения состояния.

Докажем теперь основное свойство поля сторонних сил — непотенциальность этого поля, чем оно существенно отличается от электростатического поля.

Для магнитостатических задач в каждой точке пространства  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ . Поэтому силовые линии тока всегда замкнутые. Выделим тонкую замкнутую трубку тока, состоящую из пучка замкнутых силовых линий вектора плотности тока  $\mathbf{j}$ . Рассмотрим циркуляцию полного поля  $\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}$  по всей трубке. На основании потенциальности электростатического поля  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$ . Следовательно, используя соотношение  $\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}$ , имеем:

$$\oint_L (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}) d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}^{\text{стор}} d\mathbf{l} = \oint_L \frac{\mathbf{j}}{\sigma} d\mathbf{l}.$$

Так как

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma} d\mathbf{l} = \frac{J}{\Delta S} \frac{1}{\sigma} d\mathbf{l} = J dR,$$

где  $dR$  — элемент сопротивления трубки тока длины  $dl$ , получаем окончательно:

$$\oint_L \mathbf{E}^{\text{стоп}} dl = JR. \quad (5.4)$$

Эта формула указывает, что для существования тока ( $J \neq 0$ ) необходимо, чтобы поле сторонних сил было непотенциальным, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{E}^{\text{стоп}} \neq 0.$$

В частности, поле сторонних сил не может быть электростатическим полем.

В заключение сделаем следующее замечание. Мы видели, что в магнитостатике необходимо привнесение поля сторонних сил неэлектростатического происхождения. Без этого дополнительного поля невозможно существование стационарного тока, а следовательно и стационарного магнитного поля. Таким образом, магнитостатика есть, по крайней мере, теория трех полей — электростатического, магнитостатического и стационарного поля сторонних сил. Поскольку макроскопическая теория не претендует на вскрытие природы одного из трех полей, содержащихся в ней, постольку нельзя говорить о примате электрических явлений над магнитными, хотя это довольно часто необоснованно делают.

## § 2. Основные задачи магнитостатики

В магнитостатике возможна постановка двух основных задач: 1) определение электростатического поля по заданному полю сторонних сил ( $\mathbf{E}^{\text{стоп}} = \mathbf{E}^{\text{стоп}}(x, y, z)$ ); 2) определение магнитного поля по заданному распределению токов в однородной магнитной среде.

Рассмотрим первую задачу. Из уравнения

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

следует

$$\text{div } \mathbf{j} = 0,$$

но

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стоп}}).$$

Отсюда получаем уравнение для определения  $\mathbf{E}$ :

$$\text{div } \sigma \mathbf{E} = -\text{div } \sigma \mathbf{E}^{\text{стоп}}.$$

Мы имеем еще дополнительное условие:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0$$

или

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Таким образом, для потенциала электростатического поля имеем уравнение:

$$\Delta \varphi + \frac{1}{\sigma} \text{grad } \sigma \cdot \text{grad } \varphi = \frac{1}{\sigma} \text{div } \sigma \mathbf{E}^{\text{стоп}}, \quad (5.5)$$



которое дает возможность определить распределение потенциала, если известно  $E^{\text{стоп}}(x, y, z)$  и  $\sigma(x, y, z)$ .

Рассмотрим частный случай  $\sigma = \text{const}$ . Тогда

$$\Delta\varphi = \text{div } E^{\text{стоп}}. \quad (5.6)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{div } E^{\text{стоп}}}{r} d\tau \quad (5.7)$$

(для тех случаев, когда источники сил распределены в конечной области пространства). Значение потенциала дает возможность определить плотность непрерывного распределения зарядов. Для среды с  $\epsilon = \text{const}$  уравнение (5.1) дает:

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}$$

и, таким образом,

$$\rho = -\frac{\epsilon}{4\pi} \text{div } E^{\text{стоп}}. \quad (5.8)$$

Физически это соотношение означает, что в тех местах пространства, где имеется расходямость поля сторонних сил, возникают объемные электрические заряды.

Важно подчеркнуть стационарность зарядов даже при наличии электропроводящей среды. В рассмотренном ранее случае проводящей среды без сторонних сил всегда имеет место рассасывание этих зарядов по закону

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}.$$

Заметим, что выражение потенциала (5.7) указывает на отсутствие какого-либо влияния самой металлической среды на распределение потенциала. Подчеркнем, что этот результат обусловлен специфичностью закона Ома ( $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ ). В тех случаях, когда связь между плотностью тока и полем задается в виде линейного функционала (см. стр. 17—18)

$$\mathbf{j} = \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\tau' = \sigma\mathbf{E} + \sigma_2\Delta\mathbf{E} + \sigma_4\Delta^2\mathbf{E} + \dots$$

$$\left( \sigma = \int K d\tau', \quad \sigma_2 = \frac{1}{6} \int K \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 d\tau', \dots \right)$$

проявляется и влияние среды, если не ограничиваться только первым членом разложения. Коэффициент  $\sigma_2$  может иметь как положительное, так и отрицательное значение, смотря по тому, являются ли ядра  $K$  монотонно или осцилляторно убывающими. Удерживая два члена разложения и пользуясь условием  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , получаем:

$$\mathbf{j} = \sigma(1 \pm r_0^2\Delta)\mathbf{E} + \sigma E^{\text{стоп}}, \quad r_0^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma},$$

$$\sigma(1 \pm r_0^2\Delta)\text{div } \mathbf{E} = -\sigma \text{div } E^{\text{стоп}},$$

где  $\text{E}^{\text{стор}}$  обозначает плотность тока, обусловленную действием сторонних сил. Воспользовавшись потенциальностью поля, получаем новое уравнение для потенциала

$$\Delta\varphi \pm r_0^2 \Delta\varphi = \text{div E}^{\text{стор}}.$$

Частные решения, соответствующие сосредоточенному полю, имеют вид

$$\frac{\text{const}}{r}, \quad \frac{\text{const}}{r} e^{-\frac{r}{r_0}}, \quad \frac{\text{const}}{r} \sin \frac{r}{r_0},$$

где во втором решении  $\frac{\sigma_2}{\sigma} = -|r_0|^2$ , а в третьем  $\frac{\sigma_2}{\sigma} = r_0^2$ . Постоянная  $r_0$  характеризует среду.

Во втором решении проявляется эффект «экранирования» потенциала проводящей средой, в третьем потенциал осцилляторно убывает от «точечного» источника.

Перейдем к рассмотрению второй задачи магнитостатики. Поскольку по условию  $\mu = \text{const}$ , можно написать в качестве исходных уравнений:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Для решения системы (5.9) введем вспомогательный вектор  $\mathbf{A}$  (векторный потенциал):

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (5.10)$$

Тогда уравнение  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  автоматически удовлетворяется, так как  $\text{div rot} \equiv 0$ . Подстановка в первое из уравнений (5.9) дает:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}. \quad (5.11)$$

Соотношение (5.10) неоднозначно определяет вектор  $\mathbf{A}$ , так как оно не изменяет своего вида при добавлении к векторному потенциалу  $\mathbf{A}$  градиента произвольной скалярной функции  $\psi$

$$\mathbf{A} + \text{grad } \psi = \mathbf{A}'. \quad (5.12)$$

Воспользуемся этой неоднозначностью векторного потенциала для упрощения уравнения (5.11). Докажем, что если векторный потенциал  $\mathbf{A}$  таков, что  $\text{div } \mathbf{A} \neq 0$ , то всегда можно подобрать такую скалярную функцию, что  $\text{div } \mathbf{A}' = 0$ , где  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \psi$ . В самом деле, действуя на обе части соотношения (5.12) операцией дивергенции, имеем:

$$\text{div } \mathbf{A}' = \text{div } \mathbf{A} + \text{div grad } \psi = \text{div } \mathbf{A} + \Delta\psi.$$

Вопрос о существовании функции  $\psi$  с указанным выше свойством сводится к вопросу, имеет ли это уравнение решение, если  $\text{div } \mathbf{A} \neq 0$ , но  $\text{div } \mathbf{A}' = 0$ .

Уравнение относительно  $\psi$

$$\Delta\psi = -\text{div } \mathbf{A}$$

имеет уже изученный ранее вид. Это уравнение имеет, по крайней мере, одно решение

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}}{r} d\tau \quad (5.13)$$

и, таким образом, действительно можно найти такое  $\psi$ , чтобы всегда

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' = 0.$$

Поэтому будем просто всегда считать, что вводимый векторный потенциал подчиняется условию  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Тогда уравнение для определения векторного потенциала

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}$$

упрощается

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j} \quad (5.14)$$

или в компонентах

$$\Delta A_x = -\frac{4\pi\mu}{c} j_x, \quad \Delta A_y = -\frac{4\pi\mu}{c} j_y, \quad \Delta A_z = -\frac{4\pi\mu}{c} j_z.$$

Ввиду полной аналогии этих уравнений с уравнением для скалярного потенциала  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$  имеем:

$$A_x = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{j_x d\tau}{r} \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\mathbf{j} d\tau}{r}. \quad (5.15)$$

Как мы уже говорили ранее, это решение имеет место при условии пространственной ограниченности источников (в данном случае распределения плотности тока). Формула (5.15) решает поставленную задачу об определении поля по заданному распределению токов, поскольку магнитная индукция  $\mathbf{B}$  определяется дифференцированием векторного потенциала, а напряженность магнитного поля отличается от  $\mathbf{B}$  на постоянный множитель  $\frac{1}{\mu}$ .

Применим теперь полученное решение задачи об определении магнитного поля по заданным токам к случаю линейного проводника. В формуле (5.15) имеется выражение  $\mathbf{j} d\tau$ . В каждом сечении линейного проводника, ввиду малости сечения, плотность тока является приблизительно постоянным вектором по сечению. Поэтому

$$\mathbf{j} d\tau = \frac{J}{\Delta S} \Delta S d\mathbf{l}_1 = J d\mathbf{l}_1.$$

Полагая  $d\mathbf{l} = dl\mathbf{j}_1$ , где  $\mathbf{j}_1$  — единичный вектор вдоль тока, имеем:

$$\mathbf{j}d\tau = Jd\mathbf{l}.$$

Так как полный ток  $J$  одинаков в различных сечениях проводника то из (5.15) получаем:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu J}{c} \oint_L \frac{d\mathbf{l}}{R}, \quad (5.16)$$

где интегрирование свелось от объемного интеграла по всему объему проводника только к контурному интегралу вдоль линейного тока.

Формула (5.16) позволяет вычислить векторный потенциал всюду в пространстве (за исключением точек, лежащих на самом контуре) по заданной форме контура линейного тока. На самом контуре под-интегральное выражение в (5.16) имеет особенность, что указывает на необходимость в этом случае пользоваться общей формулой (5.15).

По заданному векторному потенциалу выразим вектор магнитной индукции  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  явно через характеристики линейного проводника. Имеем:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot} \frac{\mu J}{c} \oint_L \frac{d\mathbf{l}}{r} = \frac{\mu J}{c} \oint_L \text{rot} \frac{d\mathbf{l}}{r},$$

где  $\text{rot}$  обозначает пространственное дифференцирование по координатам точки наблюдения  $(x, y, z)$ .

Замечая, что для произвольных вектора  $\mathbf{a}$  и скалярной функции  $u$  имеет место векторное тождество

$$\text{rot } u \mathbf{a} \equiv u \text{rot } \mathbf{a} + [\text{grad } u, \mathbf{a}]$$

и что в нашем случае  $\mathbf{a} = d\mathbf{l}$ , причем  $\text{rot } d\mathbf{l} \equiv 0$ , так как  $d\mathbf{l}$  не зависит от точки наблюдения, получаем:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu J}{c} \oint_L \left[ \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) d\mathbf{l} \right].$$

Далее, учитывая, что

$$\text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус вектора, проведенный к точке наблюдения, имеем окончательно:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu J}{c} \oint_L \left[ \frac{d\mathbf{l} \mathbf{r}}{r^3} \right]. \quad (5.17)$$

Эта формула позволяет вычислить магнитную индукцию по заданной геометрической форме линейного тока.

Отсюда можно придти к дифференциальной формулировке магнитной индукции, создаваемой элементом линейного тока длины  $dl$  (рис. 25)

$$dB = \frac{\mu J}{c} \frac{[dlr]}{r^3},$$

или для абсолютных величин

$$|dB| = \frac{\mu J}{c} \frac{dl \sin \theta}{r^2}.$$

Заметим, что переход от интегральной формы (5.17) к дифференциальной неоднозначен, так как интегральная форма не меняется от прибавления к подынтегральному выражению градиента от произвольной функции, поскольку  $\oint_L \text{grad } \psi dl = 0$ .

Исторически этот дифференциальный закон был положен в основу электродинамики Ампера, исходящей из представлений о дальнедействии. Таким образом, помимо неполноты этого закона для электродинамики, в основу теории было положено нечто такое, что не может непосредственно быть проверено на опыте, так как в этой области явлений оперируют с замкнутыми токами, рассмотрение же незамкнутых токов выводит нас из схемы магнитостатики.

Рассмотрим теперь вопрос об эквивалентности поля замкнутого линейного тока и поля двойного магнитного слоя, расположенного на произвольной поверхности, охватываемой контуром тока, с подходяще подобранной величиной для мощности двойного слоя.

Как мы видели, потенциал и напряженность электрического двойного слоя равны:

$$\varphi = m \int_S \frac{dsr}{r^3} \quad E = m \oint_L \frac{[dsr]}{r^3}$$

для всех точек, кроме точек самой поверхности, на которой расположен двойной слой. Сравнение с выражением магнитного поля замкнутого тока

$$H = \frac{J}{c} \oint_L \frac{[dsr]}{r^3}$$

выявляет количественную эквивалентность магнитного поля замкнутого тока и поля магнитного листка, если положить мощность двойного слоя равной:

$$m = \frac{J}{c}.$$

Необходимо иметь в виду, что утверждение об эквивалентности условно по следующим причинам: 1) поля замкнутого линейного тока

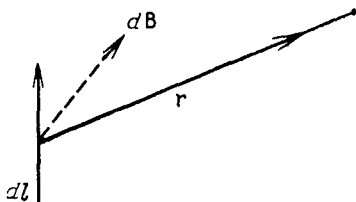


Рис. 25.

и магнитного листка указанной мощности совпадают только для точек, не лежащих на выделенной поверхности; 2) эквивалентность имеет место только в идеальном случае линейных токов; 3) поле магнитного листка имеет потенциал, в то время как поле тока непотенциально. Только условным приемом — запретом пресечения площади, ограниченной контуром тока — можно ввести требование потенциальности и для магнитного поля тока.

Потенциал двойного слоя, выражается так:

$$\varphi = m \int d\Omega = m \int \frac{r ds}{r^3},$$

где  $\Omega$  — телесный угол, под которым контур двойного слоя виден из точки наблюдения. Для расстояний  $r$ , значительно превышающих линейные размеры контура, имеем:

$$\varphi = m \frac{r}{r^3} \int_S ds = \frac{m S n r}{r^3},$$

где обозначено

$$S n = \int_S ds.$$

При указанном условии потенциал двойного слоя определяется полным моментом слоя, так как

$$m S n = \sigma_m S l = \mathbf{p}_m,$$

где  $\mathbf{p}_m$  — полный магнитный момент двойного слоя.

Поскольку  $m = \frac{J}{c}$ , можно характеризовать магнитное поле замкнутого тока на расстояниях, превышающих линейные размеры контура, магнитным моментом контура  $\mathbf{p}_m = \frac{J S n}{c}$ , так что потенциал и напряженность поля определяются в этом случае выражениями:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\mathbf{p}_m \mathbf{r}}{r^3}, \\ \mathbf{H} &= \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

что вполне аналогично выражениям для потенциала и напряженности электрического поля, создаваемого электрическим моментом.

### § 3. Влияние магнитной среды на магнитное поле, вызываемое токами

В магнитном отношении среды разделяют на следующие группы: парамагнетики, для которых  $\mu > 1$ , диамагнетики с  $\mu < 1$ , ферромагнетики, характеризующиеся нелинейной зависимостью  $\mathbf{B}$  от  $\mathbf{H}$  или  $\mathbf{M}$  от  $\mathbf{H}$  и, наконец, сверхпроводники с особым поведением в магнитном поле.

Для пара- и диамагнетиков имеет место уравнение состояния  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , в случае однородных сред ( $\mu = \text{const}$ ) мы можем отобразить свойства магнитного поля в таких средах двумя равносильными группами уравнений поля:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}, \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0, & \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Уже сам вид этих уравнений определяет один важный результат: в однородной магнитной среде напряженность магнитного поля, создаваемого токами, не зависит от магнитной проницаемости среды. Величина же магнитной индукции  $\mathbf{B}$  увеличивается в  $\mu$  раз в сравнении со значением для вакуума, при том же распределении плотности тока.

Отметим, что этот результат получен при весьма сильном ограничивающем предположении: магнитная проницаемость должна быть одинаковой во всех точках пространства, включая и точки внутри проводящих сред, где имеются токи.

Наличие ферромагнитных сред вносит большие физические и математические осложнения. Во-первых, основное свойство ферромагнетиков — достижение насыщения уже в малых полях — отображается в уравнении состояния  $\mathbf{B} = B(\mathbf{H})$  нелинейной зависимостью  $\mathbf{B}$  от  $\mathbf{H}$ . Во-вторых, для поликристаллических ферромагнетиков имеет место явление гистерезиса, связанное с необратимым характером процесса намагничивания благодаря переходу части энергии магнитного поля в тепло. Наконец, ряд явлений, сопровождающих процесс намагничивания: магнитострикция, возникновение внутренних натяжений и других, еще более усложняют задачу. Поэтому поставим себе задачу, выяснить лишь некоторые общие свойства поведения магнитных сред в магнитном поле, не конкретизируя вида уравнения состояния. Специальный случай сверхпроводников рассмотрим позже.

Уравнения состояния могут быть выражены двояким образом. Так как  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$ , то под уравнением состояния можно понимать или связь между  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{H}$ :  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ , или между  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{B}$ :  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B})$ .

Оказывается возможным выразить и уравнение поля или в терминах только  $\mathbf{H}$ , или в терминах только  $\mathbf{B}$ . В самом деле, уравнения магнитостатики могут быть представлены в виде двух систем:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \text{div } \mathbf{H} &= -4\pi \text{div } \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H}), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + c \text{rot } \mathbf{M}), \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Конкретный вид уравнений состояния, как всегда в макроскопической электродинамике, должен быть заимствован из опыта.

Мы имеем, таким образом, две замкнутых возможности описания магнитных явлений. Предполагая однозначную разрешимость уравнений состояния относительно  $\mathbf{H}$  или  $\mathbf{B}$ , эти два способа равноправны, поскольку, разрешив одну систему, с помощью  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$  можем перевести результат на язык другой системы. Однако механизм влияния магнитной среды на магнитную индукцию с одной стороны и на магнитное поле существенно разный. С точки зрения первой системы уравнений механизм влияния среды на поле  $\mathbf{H}$  заключается в появлении отличной от нуля дивергенции вектора  $\mathbf{H}$ , играющих роль, аналогичную связанным электрическим зарядам:

$$\rho_{св} = -\operatorname{div} \mathbf{P}.$$

По аналогии можем ввести представление о фиктивных магнитных зарядах

$$\rho_m = -\operatorname{div} \mathbf{M}, \quad (5.19)$$

отличающихся от свободных зарядов  $\rho$  тем, что для  $\mathbf{B}$  имеет место всегда условие

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} d\tau = \oint_S \mathbf{B} ds = 0,$$

т. е. никогда нельзя выделить из объема намагниченной среды магнитных зарядов одного знака.

С точки зрения второй системы механизм влияния магнитной среды на вектор магнитной индукции иной. В уравнениях выступает дополнительный член ( $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ ), изменяющий интенсивность вихрей магнитной индукции. Так как дополнительный член входит аддитивно с плотностью токов проводимости, можно говорить о наличии связанных токов, возникающих в магнитной среде, или о молекулярных токах, плотность которых определяется соотношением

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M},$$

так как тогда

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{мол}}).$$

В макроскопической электродинамике оба представления законны, так как они отвечают на разные вопросы. Первая система отвечает на вопрос о причинах влияния среды на напряженность поля, т. е. на силу, действующую на единицу магнитного заряда, помещенную в игольчатую полость, вторая же система определяет влияние среды на силу, действующую уже в дискообразной полости.

Недостаточность макроэлектродинамики в этом пункте заключается в том, что близкие по идее опыты требуют столь разной



физической картины. Здесь возникает вопрос: что является физической первоосновой — «молекулярные токи» или «магнитные заряды». В микроскопической электродинамике этот вопрос решается в пользу первых.

Рассмотрим в качестве иллюстрации механизм изменения  $\mathbf{B}$  в однородной парамагнитной среде. Для этого необходимо знать распределение молекулярных токов  $\mathbf{j}_{\text{мол}}$ , вихри которых и обуславливают наличие изменения  $\mathbf{B}$  в среде по сравнению с пустотой.

Представим себе прямолинейный ток, пространство вокруг которого заполнено парамагнетиком. Ограничим пространство, заполненное парамагнетиком, цилиндром некоторого радиуса. Поскольку  $\text{div } \mathbf{j}_{\text{мол}} \equiv 0$ , ток необходимо представлять замкнутым в произвольно малой пространственной области. Уподобляя каждый элементарный ток линейному контуру, мы можем приписать каждому элементарному току магнитный момент  $\frac{J_s}{c}$ .

В немагнитной среде моменты распределены хаотически и в целом не возникает вектора намагничивания, а следовательно, и токов. При наличии магнитного поля происходит ориентация магнитных моментов вдоль поля. На рис. 26, а показана картина распределения элементарных токов в плоскости, проходящей через заданный ток.

Для точек вдали от границы элементарные токи компенсируют друг друга. Только на границах — на поверхности проводника и на поверхности цилиндра — возникают некомпенсируемые молекулярные токи, причем на поверхности проводника они направлены вдоль тока, а на поверхности цилиндра — в противоположном направлении.

Поверхностные токи на внутренней поверхности цилиндра не создают поля, поскольку поле внутри цилиндра, по поверхности которого течет ток, равно нулю. Молекулярный ток у поверхности проводника увеличивает ток проводимости и, следовательно, увеличивает магнитную индукцию в среде в сравнении с пустотой. Эта картина находится в согласии с количественными соотношениями. Для парамагнетиков

$$\mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{H}$$

и, следовательно, для плотности молекулярного тока имеем:

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} = c \text{rot } \mathbf{M} = c \frac{\mu - 1}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H} + c \left[ \text{grad } \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{H} \right];$$

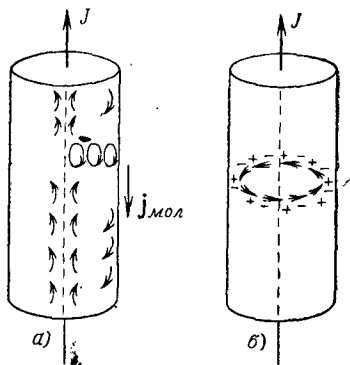


Рис. 26.

это указывает на то, что молекулярные токи возникают или в областях неоднородности среды, где вектор  $\text{grad } \mu$  не равен нулю и не параллелен  $\mathbf{H}$ , или там, где есть токи проводимости  $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H}$ . Тот факт, что магнитное поле  $\mathbf{H}$ , возбуждаемое токами в однородном магнетике, не зависит от наличия магнитной среды, интерпретируется уже другой физической картиной. Механизм влияния среды на поле  $\mathbf{H}$  заключается в возникновении связанных магнитных зарядов. Однако магнитные диполи среды, ориентируясь вдоль замкнутых силовых линий  $\mathbf{H}$ , не создают дополнительного поля, так как заряды диполей, расположенных в виде замкнутых цепочек (см. рис. 26, б), компенсируют друг друга. Имеем:

$$\rho_{\text{св}} = -\text{div } \mathbf{M} = -\frac{\mu-1}{4\pi} \text{div } \mathbf{H} + \mathbf{H} \text{ grad } \frac{\mu-1}{4\pi},$$

в однородной среде  $\text{div } \mathbf{H} = 0$  и, следовательно, получаем, что  $\rho_{\text{св}} = 0$  не только в однородной среде, но и на границах среды, где векторы  $\mathbf{H}$  и  $\text{grad } \mu$  взаимно перпендикулярны.

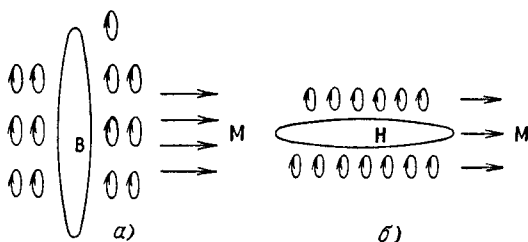


Рис. 27.

В пространстве вне цилиндра, так как для  $\mathbf{B}$  молекулярные токи, текущие в разных направлениях, полностью компенсируют друг друга, нет причин изменения  $\mathbf{B}$ , а поскольку же  $\text{div } \mathbf{M} = 0$ , то во всех точках пространства вектор  $\mathbf{H}$  также не изменится.

Почему, с точки зрения представления о молекулярных токах, для измерения магнитной индукции требуется выделять дискообразную полость, в то время как для измерения  $\mathbf{H}$  — игольчатую полость вдоль направления силовых линий? Для ответа на этот вопрос рассмотрим распределение молекулярных токов в среде при наличии этих полостей.

При наличии дискообразной полости (рис. 27, а) элементарные токи компенсируют друг друга и не создают дополнительного поля. Поэтому наличие дискообразной полости не вызывает каких-либо новых токов в среде. Именно с этим фактом связано использование дискообразной полости для измерения  $\mathbf{B}$ .

Другой результат получается для игольчатой полости (рис. 27, б). На поверхности игольчатой полости возникают некомпенсируемые

молекулярные поверхностные токи. Направление магнитной индукции внутри полости, создаваемое этими дополнительными токами, обратно направлению магнитной индукции в среде.

Плотность молекулярных токов находится из граничного условия на поверхностях для тангенциальных составляющих вектора намагничивания

$$M_{2t} - M_{1t} = \frac{1}{c} J_{\text{мол}}.$$

Для вакуума (полости)  $M = 0$  и, следовательно,

$$J_{\text{мол}} = cM_t = cM.$$

Но в цилиндре с поверхностными токами  $J$ , текущими перпендикулярно оси цилиндра, имеется дополнительная магнитная индукция, равная:

$$B' = H = \frac{4\pi}{c} J = 4\pi M.$$

Полное значение величины индукции в игольчатой полости равно:

$$B - B' = B - 4\pi M = H,$$

так как  $B - 4\pi M$  совпадает с  $H$  на основании их определения.

Таким образом, мы видим, что игольчатая полость приспособлена не для измерения  $B$ , а для измерения  $H$ .

Рассмотрим теперь частный случай задачи о распределении магнитной индукции в пространстве при наличии заданных токов и постоянных магнитов, для которых вектор намагничивания можно считать приближенно не зависящим от поля.

Итак, пусть известно  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0(x, y, z)$  и  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0(x, y, z)$ . Требуется определить  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$ . Из условия

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

находим:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A},$$

причем, как и прежде, положим

$$\text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Уравнение магнитостатики имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_0 + c \text{rot } \mathbf{M}_0).$$

Подстановка в последнее уравнение  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  и  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  дает:

$$\Delta \mathbf{A} = - \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_0 + c \text{rot } \mathbf{M}_0), \quad (5.20)$$

откуда

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}_0 + c \text{rot } \mathbf{M}_0}{R} d\tau. \quad (5.21)$$

Таким образом, поставленная задача определения поля по заданным токам и заданным постоянным магнитам решается формулой (5.21).

Пусть теперь токи и постоянные магниты сосредоточены в конечной области пространства, наблюдение же магнитного поля производится в точках, расстояние до которых велико по сравнению с линейными размерами области, занятой источниками поля.

Тогда разложим функцию

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}}$$

в ряд по степеням  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \xi_i \xi_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left( \frac{1}{r} \right) - \dots$$

Используем это разложение в интегральном выражении векторного потенциала, ограничиваясь первыми двумя членами разложения, тогда получим:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}_\pi d\tau - \frac{1}{c} \int \left\{ \xi \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right\} \mathbf{j}_\pi d\tau \quad (\mathbf{j}_\pi = \mathbf{j}_0 + c \operatorname{rot} \mathbf{M}_0). \quad (5.22)$$

Для замкнутых токов, с которыми только и приходится иметь дело в магнитостатике,

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_\pi = 0,$$

и первый член исчезает. В самом деле, разобьем токи на замкнутые трубки тока. Для элемента длины  $d\mathbf{l}$  такой трубки

$$\mathbf{j}_\pi d\tau = J_k d\mathbf{l},$$

тогда (суммирование проведено по замкнутым трубкам тока, на которые разбит весь ток)

$$\int \mathbf{j}_\pi d\tau = \sum_k J_k \oint_{L_k} d\mathbf{l} = 0,$$

поскольку всегда

$$\oint_L d\mathbf{l} = 0.$$

Преобразуем второй член в правой части (5.22):

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{c} \int \left\{ \xi \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right\} \mathbf{j}_\pi d\tau = -\frac{1}{c} \sum_k J_k \oint_{L_k} \left\{ \xi \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right\} d\mathbf{l}.$$

Воспользуемся векторным тождеством

$$\left\{ \xi \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right\} d\mathbf{l} \equiv \frac{1}{2} \left[ [\xi d\mathbf{l}] \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right] + \frac{1}{2} d \left\{ \xi \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \xi \right\}.$$

Замечаем, что циркуляция от полного дифференциала исчезает, так что

$$\mathbf{A} = - \sum_{(k)} \frac{J_k}{2c} \oint_{L_k} [\xi d\mathbf{l}] \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right).$$

Поскольку

$$\operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

$$\mathbf{A} = - \sum_{(k)} \frac{J_k}{2c} \oint_{L_k} [\xi d\mathbf{l}] \left( - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\left[ \sum_{(k)} \frac{J_k}{2c} \oint_{L_k} [\xi d\mathbf{l}] \mathbf{r} \right]}{r^3},$$

или

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathfrak{M} \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (5.23)$$

где

$$\mathfrak{M} = \sum_{(k)} \frac{J_k}{2c} [\xi d\mathbf{l}].$$

Переходя обратно к непрерывно распределенным объемным токам с плотностью  $\mathbf{j}$ , т. е. полагая

$$J_k d\mathbf{l} = \mathbf{j} d\tau,$$

получим:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2c} \int_V [\xi \mathbf{j}] d\tau. \quad (5.24)$$

Эта величина, характеризующая распределение токов в системе, определяет по формуле (5.23) векторный потенциал в точках на больших расстояниях от системы.

При аналогичных условиях скалярный потенциал системы определяется выражением

$$\varphi = \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{r^3},$$

где  $\mathbf{p}$  — вектор электрического момента системы:

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r} \rho d\tau,$$

причем

$$\int_V \rho d\tau = 0.$$

Поэтому по аналогии введем вектор магнитного момента  $\mathfrak{M}$  (5.24)

при условии

$$\int \mathbf{j} d\tau = 0.$$

Таким образом, первый исчезающий член в разложении векторного потенциала в точках, достаточно далеко расположенных от источников, выражается через величину магнитного момента этих источников по формуле

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathfrak{M}\mathbf{r}]}{r^3}. \quad (5.25)$$

Сравним теперь выражение (5.24) для магнитного момента с выражением магнитного момента линейного замкнутого контура

$$\mathbf{p}_m = \frac{J}{c} \mathbf{S} = \frac{J}{c} \int \mathbf{ds}.$$

Для линейного тока объемный интеграл в (5.24) преобразуется к контурному, если учесть, что  $\int \mathbf{j} d\tau = J d\mathbf{l}$

$$\mathfrak{M} = \frac{J}{2c} \oint_L [\xi d\mathbf{l}].$$

Поскольку теперь  $\frac{1}{2} [\xi d\mathbf{l}]$  есть не что иное, как площадь, образуемая векторами  $\xi$  и  $d\mathbf{l}$ , имеем:

$$d\mathbf{s} = \frac{1}{2} [\xi d\mathbf{l}]$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{M} = \frac{J}{2c} \oint_L [\xi d\mathbf{l}] = \frac{J}{c} \int \mathbf{ds} = \frac{J}{c} \mathbf{S} = \mathbf{p}_m. \quad (5.26)$$

Таким образом, формула для магнитного момента (5.24) содержит в себе прежний результат как частный случай.

Проверим, что вектор намагничивания, а также магнитный момент произвольной системы не зависят от координат, поскольку они характеризуют внутренние свойства системы.

Для этого покажем, что  $\mathfrak{M}$  не изменяется при переносе начала координат, т. е. при преобразовании  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  — произвольный вектор смещения системы координат относительно начального положения. Тогда

$$\mathfrak{M}' = \frac{1}{2c} \int_V [(\mathbf{r} + \mathbf{a}), \mathbf{j}] d\tau = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}\mathbf{j}] d\tau + \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{a}\mathbf{j}] d\tau.$$

Возникающий дополнительный член

$$\int_V [\mathbf{a}\mathbf{j}] d\tau = \left[ \mathbf{a} \int_V \mathbf{j} d\tau \right]$$

равен нулю на основании условия замкнутости токов:

$$\int_V \mathbf{j} d\tau = 0.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M},$$

что и должно было получиться в случае внутренне непротиворечивой теории.

Перейдем от непрерывно распределенных токов к одному или нескольким точечным зарядам, движение которых создает ток. Для этой цели выразим  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  через  $\delta$ -функцию

$$\rho = \sum e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad \mathbf{j} = \sum e_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)).$$

Подставляя выраженную таким образом плотность тока в формулу магнитного момента, получим:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}\mathbf{j}] d\tau = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \sum e_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))] d\tau = \frac{1}{2c} \sum e_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i].$$

Полученное выражение не удовлетворяет, однако, свойствам инвариантности относительно смещения системы координат, поскольку

$$\sum [a\mathbf{v}_i] \neq 0.$$

Таким образом, приходим к результату, что переход от интеграла к сумме, от непрерывности к дискретности в магнитостатике также связан с качественным скачком. В данном случае меняются скачком инвариантные свойства величины магнитного момента системы.

В связи с этим выясним, возможно ли путем усреднения во времени процесса движения точечных частиц получить непрерывно распределенный в пространстве ток.

Рассмотрим случай периодического движения заряженных частиц, например по кругу с некоторым периодом. Тогда можно было бы предположить, что величина магнитного момента от совокупности движущихся точечных зарядов  $\frac{1}{2c} \sum e_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i]$  после усреднения во времени соответствует «макрореличине»

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}\mathbf{j}] d\tau.$$

Однако это не так, ибо это приводило бы к результату, что из неинвариантной величины относительно смещения системы координат можно было бы процессом временного усреднения получить величину, инвариантную относительно того же преобразования координат. Помимо того, это означало бы, что для исходных неусредненных во времени величин нельзя было бы вводить магнитный момент и, следовательно, основная характеристика магнитных свойств теряла бы смысл для времен, меньших времени усреднения. Опыт, однако, не дает нам указаний о потере магнитных свойств для достаточно малых времен. Из этого факта необходимо сделать заключение, что физическую природу объединения непрерывности и дискретности в электродинамике нельзя видеть в движении точечных зарядов и усреднении процесса движения во времени.

### § 4. Магнитное поле в сверхпроводниках

К одному из наиболее важных экспериментальных фактов относится эффект экранирования магнитного поля сверхпроводниками. Опыт показывает, что силовые линии магнитного поля, проходящие внутри нормального металла ( $\mu \sim 1$ ), помещенного во внешнее магнитное поле, при достижении критической температуры перехода в сверхпроводящее состояние сразу исчезают внутри сверхпроводника (рис. 28); глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник примерно равна  $5 \cdot 10^{-6}$  см, а в остальной области сверхпроводника магнитное поле практически равно нулю. Вблизи поверхности в области существования магнитного поля циркулируют

сверхпроводящие поверхностные токи, энергия которых не растрчивается на джоулево тепло.

Ясно, что классические уравнения состояния  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  не могут отобразить указанного явления. Возникает вопрос: возможно ли такое уравнение состояния, которое правильно отобразило бы эффект экранирования и его исчезновение при критической температуре?

Современные теории сверхпроводимости разде-

ляют электрический ток в сверхпроводниках на две компоненты — нормальный ток  $\mathbf{j}_n$  и сверхпроводящий ток  $\mathbf{j}_s$ , так что  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s$ . Для нормального тока полагают обычное уравнение состояния. Иное должно иметь место для сверхпроводящего тока  $\mathbf{j}_s$ . Заметим, что алгебраической связи между  $\mathbf{j}_s$  и  $\mathbf{H}$  быть не может, так как  $\mathbf{H}$  — аксиальный вектор, а  $\mathbf{j}_s$  — полярный. Если ограничиться линейной дифференциальной связью, содержащей производные по координатам не выше первой, то представляются две возможности:

$$\text{rot } \mathbf{H} \sim \mathbf{j}_s \text{ и } \text{rot } \mathbf{j}_s \sim \mathbf{H}.$$

Первое соотношение входит в уравнение электродинамики и нового ничего не даст. Поэтому следует проанализировать второе соотношение между током и магнитным полем.

Предположим уравнение состояния для сверхпроводников в форме

$$\text{rot } \mathbf{j}_s = \int_V K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\tau', \quad (5.27)$$

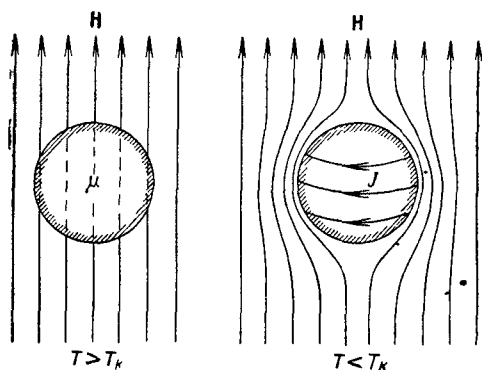


Рис. 28.



где о свойствах ядра  $K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  мы должны сделать заключение из опыта, сопоставляя следствия, получаемые из (5.27) с опытом.

Комбинируя (5.27) с уравнениями магнитостатики  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s$  и  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ , находим:

$$-\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \int_V K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (5.28)$$

Это уравнение и должно определять поведение магнитного поля в сверхпроводниках. Для выявления свойств этого уравнения рассмотрим плоскую границу сверхпроводника. Пусть ось  $z$  направлена внутрь проводника, а ось  $x$  — параллельно плоскости раздела. Будем искать решение в виде экспоненциально убывающего поля ( $H_x(z) = e^{-pz}$ ,  $H_y = H_z = 0$ ). Для точек  $\mathbf{r}$ , достаточно удаленных от границы, можем заменить в интеграле пределы бесконечными. Тем самым предполагается, что ядро  $K$  достаточно быстро убывает с ростом  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Подстановка дает:

$$\begin{aligned} \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) e^{-pz'} dx' dy' dz' &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(z - z') e^{-pz'} dz' = \\ &= \int_{-\infty}^z \bar{K}(z - z') e^{-pz'} dz' + \int_z^{\infty} \bar{K}(z' - z) e^{-pz'} dz' = I \\ (\bar{K} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dx' dy'). \end{aligned}$$

Вводя новые переменные: в первом интеграле  $z - z' = s$ , во втором  $z' - z = s$ , получаем

$$I = \int_0^{\infty} \bar{K}(s) e^{-p(z-s)} ds + \int_0^{\infty} \bar{K}(s) e^{-p(s+z)} ds.$$

Подставляем функцию  $e^{-pz}$  в левую часть уравнения (5.28). Сокращая на множитель  $e^{-pz}$  слева и справа, получаем условие разрешимости уравнения (5.28) в следующем виде:

$$p^2 = -\frac{4\pi}{c} \int_0^{\infty} \bar{K}(s) (e^{ps} + e^{-ps}) ds. \quad (5.29)$$

Это уравнение дает возможность вычислить величину  $p$ , связанную с глубиной проникновения  $\delta$  магнитного поля в сверхпроводник  $\delta = \frac{1}{p}$ , если конкретизовать вид ядра  $\bar{K}$ .

Для того чтобы уравнение (5.29) имело решение, необходимо  $\bar{K}(s) < 0$  и чтобы функция  $\bar{K}(s)$  убывала с ростом  $s$  не медленнее, чем экспонента. Введем понятие интенсивности дальних связей

$\lambda = -\frac{4\pi}{c} \int_0^{\infty} \bar{K}(s) ds$ . Тогда уравнению (5.29) можно придать вид

$$p^2 = \lambda \int_0^{\infty} \bar{K}^+(s) (e^{ps} + e^{-ps}) ds, \quad (5.30)$$

где ядро  $\bar{K}^+$  нормировано на единицу:

$$\int_0^{\infty} \bar{K}^+(s) ds = 1.$$

Уравнение (5.30) имеет решение, если только  $\lambda$  не превышает некоторого критического значения. В самом деле, правая часть, рассматриваемая как функция  $p$ , монотонно возрастает и при достаточно большом значении  $\lambda$  будет расположена вне параболы  $p^2$ , что и будет указывать на отсутствие решения у уравнения (5.30) при достаточно большом  $\lambda$ .

Найдем критическое значение  $\lambda$  в трех простейших случаях.

1. Предположим, что ядро  $\bar{K}^+$  таково, что интеграл в (5.30) сходится, если  $p$  не превышает некоторого максимального значения  $p_{\text{макс}}$  и расходится при  $p > p_{\text{макс}}$ . Ядро вида  $e^{-\alpha s}$  будет удовлетворять этому условию, причем  $p_{\text{макс}} = \alpha$ . В этом случае

$$\lambda = \frac{p^2}{\int_0^{\infty} \bar{K}^+(s) (e^{ps} + e^{-ps}) ds} < \frac{p^2}{\int_0^{\infty} \bar{K}^+(s) ds} < p_{\text{макс}}^2.$$

2. Предположим, что  $\bar{K}^+(s) = \delta(s - s_0)$ . Тогда максимальное значение определяется решением трансцендентного уравнения

$$p^2 = \lambda (e^{ps_0} + e^{-ps_0}).$$

3. Предположим, что ядро настолько быстро убывает с ростом  $s$ , что можно ограничиться первыми тремя членами в разложении гиперболического косинуса в ряд по степеням  $ps$ . Тогда

$$p^2 = 2\lambda (1 + r_0^2 p^2); \quad r_0^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \bar{K}^+(s) s^2 ds,$$

откуда

$$p^2 = \frac{2\lambda}{1 - 2\lambda r_0^2}.$$

Критическое значение

$$\lambda = \frac{1}{2r_0^2}.$$

В итоге приходим к заключению, что уравнение состояния

$$\operatorname{rot} \mathbf{j}_s = \int_V K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\tau'$$

при весьма общих предположениях о свойствах ядра  $K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  передает экспоненциальное убывание магнитного поля в сверхпроводнике и предусматривает существование критического значения величины, определяющей переход из сверхпроводящего состояния в нормальное, при котором исчезает эффект экранирования магнитного поля сверхпроводником.

Заметим, что функциональное уравнение можно представить в виде соотношения между  $\operatorname{rot} \mathbf{j}_s$  и  $\mathbf{H}$  в одной и той же точке пространства. Разложим  $\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \mathbf{H}(\mathbf{r} - (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$  в ряд Тейлора по степеням  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Тогда аналогично результатам гл. I, § 3 получим:

$$\int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\tau' = -\lambda(1 + r_0^2 \Delta) \mathbf{H} \quad (5.31)$$

(если ограничиться первыми двумя неисчезающими членами разложения), где

$$-\lambda = \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\tau' = 4\pi \int_0^\infty K(R) R^2 dR.$$

Таким образом, в этом приближении уравнение состояния принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{j}_s = -\lambda(1 + r_0^2 \Delta) \mathbf{H}. \quad (5.32)$$

В случае  $r_0 = 0$  мы приходим к известному уравнению Лондона

$$\operatorname{rot} \mathbf{j} = -\lambda \mathbf{H}. \quad (5.33)$$

Вместо уравнения (5.28) в приближении (5.31) мы получаем

$$\Delta \mathbf{H} = \lambda(1 + r_0^2 \Delta) \mathbf{H}, \quad (5.34)$$

или

$$\Delta \mathbf{H} - p^2 \mathbf{H} = 0, \quad (5.35)$$

$$p^2 = \frac{\lambda}{1 - \lambda r_0^2}. \quad (5.36)$$

Это уравнение наиболее просто передает экспоненциальное убывание поля в сверхпроводнике, если  $\lambda r_0^2 < 1$ , и уничтожение этого эффекта при условии  $\lambda r_0^2 > 1$ .

### § 5. Энергия поля для магнитоэстатических явлений

Общее выражение магнитной энергии в магнитоэстатике имеет вид

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{H} \mathbf{B} d\tau, \quad (5.37)$$

причем интегрирование распространено по всей области пространства, где  $\mathbf{H} \neq 0$ . При некоторых условиях это выражение может быть сведено к энергии взаимодействия токов. В самом деле, полагая  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , имеем:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{A} d\tau = \frac{1}{8\pi} \int_V \text{div} [\mathbf{H}\mathbf{A}] d\tau + \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{H} d\tau, \quad (5.38)$$

где

$$\text{div} [\mathbf{H}\mathbf{A}] \equiv \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{H}.$$

Поскольку для пространственно ограниченной системы токов потенциал и напряженность поля в бесконечности асимптотически изменяются как

$$A \sim \frac{1}{r^2}, \quad H \sim \frac{1}{r^3},$$

то мы можем опустить интеграл

$$\int_{V \rightarrow \infty} \text{div} [\mathbf{H}\mathbf{A}] d\tau = \oint_{S \rightarrow \infty} [\mathbf{H}\mathbf{A}] ds; \quad (5.39)$$

выражение  $[\mathbf{H}\mathbf{A}]$  убывает быстрее, чем растет поверхность при удалении ее в бесконечность.

Учитывая, что  $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ , выражение (5.38) дает:

$$W = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{A} \mathbf{j} d\tau. \quad (5.40)$$

Полученное выражение в отличие от исходного (5.37) указывает на пространственную локализацию энергии только в тех объемах, где находятся токи, поскольку интегрирование в (5.40) можно ограничить только областями пространства, где  $\mathbf{j} \neq 0$ .

Так как теперь

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\mathbf{j} d\tau}{r},$$

то

$$W = \frac{\mu}{2c} \int_V \int_V \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}' d\tau d\tau'}{r}, \quad (5.41)$$

т. е. с точки зрения указанного представления магнитная энергия сводится к энергии взаимодействия между отдельными объемами токов.

В связи с переходом от формулы (5.38) к формуле (5.40) или (5.41) следует иметь в виду те замечания, которые были сделаны в аналогичном случае в электростатике. Строго говоря, мы не вывели картину локализации, а ввели ее с помощью условия о поверхностном интеграле. Поэтому равенство нулю поверхностного интеграла можно рассматривать как определение локализации (сосредоточенности) всех электродинамических величин.

Выразим магнитную энергию для системы линейных токов. Для этого разобьем всю область, занятую токами, на замкнутые трубки тока  $J_k$ . Полагая, как и прежде,  $\mathbf{j}d\tau = J_k d\mathbf{l}$  для каждого участка трубки, можем написать

$$W = \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^n J_k \oint_{L_k} \mathbf{A} d\mathbf{l},$$

где криволинейный интеграл берется по замкнутому контуру линейного тока. Поскольку

$$\oint_{L_k} \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_{S_k} \mathbf{B} ds = \Phi_k,$$

где  $\Phi_k$  — поток магнитной индукции через поверхность  $k$ -го контура, имеем:

$$W = \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^n J_k \Phi_k. \quad (5.42)$$

В частном случае одного линейного проводника

$$W = \frac{1}{2c} J \Phi. \quad (5.43)$$

Итак, магнитная энергия определяется силой тока в проводнике и потоком магнитной индукции через поверхность, ограниченную самим контуром линейного тока.

Выразим магнитную энергию через конфигурацию проводников посредством введения коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции. Для этой цели разобьем каждый ток на сумму замкнутых токов

$$\mathbf{j}d\tau = \sum_{k=1}^n \mathbf{j}_k d\tau_k.$$

Тогда

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \frac{\mathbf{j}_i d\tau_i}{r},$$

$$W = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{A} \mathbf{j} d\tau = \frac{1}{2c} \sum_{(k)} \int_V \mathbf{A} \mathbf{j}_k d\tau_k = \frac{\mu}{2c^2} \sum_{(k)} \sum_{(i)} \int_{V_k} \int_{V_i} \frac{\mathbf{j}_k \mathbf{j}_i d\tau_k d\tau_i}{r},$$

Для одного проводника

$$W = \frac{\mu}{2c^2} \int_V \int_V \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}' d\tau d\tau'}{r}.$$

Введем коэффициент

$$L_{11} = \frac{\mu}{j^2} \int_V \int_V \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}'}{r} d\tau d\tau',$$

не зависящий от общей силы тока, поскольку, например, увеличение силы тока  $J$  в два раза (без изменения конфигурации проводника) увеличивает плотность тока также в два раза и, следовательно, не изменяет  $L_{11}$ . Величина  $L_{11}$  зависит только от сечения, длины и конфигурации проводника. Выраженная с помощью этого коэффициента энергия проводника пропорциональна квадрату общей силы тока, протекающего в нем:

$$W = \frac{1}{2c^2} L_{11} J^2. \quad (5.44)$$

Коэффициент  $L_{11}$  является мерой магнитной энергии проводника при заданной силе тока.

В связи с ролью этого коэффициента в квазистационарных электромагнитных явлениях (которые мы рассмотрим в следующей главе) этот коэффициент получил название коэффициента самоиндукции. Иногда численное вычисление этого коэффициента может быть упрощено использованием выражения магнитной энергии в общей форме

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} \mathbf{B} d\tau.$$

В таком случае

$$L_{11} = \frac{c^2}{4\pi j^2} \int \mathbf{H} \mathbf{B} d\tau.$$

Для системы проводников общая энергия магнитного поля выражается билинейной формой относительно сил токов в проводниках. Действительно, имеем:

$$W = \frac{\mu}{2c^2} \sum_k \sum_i \int_V \int_V \frac{\mathbf{j}_k \mathbf{j}_i}{r} d\tau_k d\tau_i. \quad (5.45)$$

Введем коэффициент

$$L_{ki} = \frac{\mu}{j_k j_i} \int_V \int_V \frac{\mathbf{j}_k \mathbf{j}_i}{r} d\tau_k d\tau_i,$$

который для случая  $k=i$  совпадает с коэффициентом самоиндукции, тогда формула (5.45) сводится к билинейной форме

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_k \sum_i L_{ki} J_k J_i.$$

Например, для частного случая двух проводников имеем:

$$W = \frac{1}{2c^2} (L_{11}J_1^2 + 2L_{12}J_1J_2 + L_{22}J_2^2).$$

Здесь первый и последний члены представляют собственную магнитную энергию проводников; средний же член выражает магнитную энергию взаимодействия двух проводников. Коэффициент  $L_{12}$  называется коэффициентом взаимной индукции. Коэффициент взаимной индукции допускает переход к линейным токам. Полагая

$$j_1 d\tau_1 = J_1 d\mathbf{l}_1, \quad j_2 d\tau_2 = J_2 d\mathbf{l}_2,$$

получаем:

$$L_{12} = \frac{\mu}{J_1 J_2} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r} = \mu \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r}.$$

Переход к линейным токам в коэффициенте самоиндукции не имеет смысла

$$L_{11} = L_{22} = \lim_{l \rightarrow 2} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r} = \infty,$$

так как собственная магнитная энергия линейных токов бесконечно велика. Это обстоятельство находится в полной аналогии с электростатикой, где переход от протяженных зарядов к точечным также приводил к появлению расходящихся выражений в величине собственной электростатической энергии точечных зарядов.

Электродинамика, оперирующая с дифференциальными уравнениями, является теорией пространственно протяженных источников поля, не допускающих непрерывного перехода к точечным зарядам и линейным токам. Сам же факт протяженности источников вносится в теорию извне. Именно, делается предположение, что законы, имеющие место для пространственно разобщенных точек, сохраняются без изменения для бесконечно близких точек внутри источников поля.

Поэтому неудивительно, что это предположение не устраняется при обратном переходе от протяженных объектов к точечным простым приемам стягивания протяженных тел к точечным.

Установим теперь связь коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции с потоками магнитной индукции. Магнитная энергия системы токов может быть выражена как через потоки магнитной индукции, так и через коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции:

$$W = \frac{1}{2c} \sum_k J_k \Phi_k,$$

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_k J_k \sum_i L_{ki} J_i.$$

Сравнение этих двух выражений дает искомую связь:

$$\Phi_k = \frac{1}{c} \sum_i L_{ki} J_i. \quad (5.46)$$

В частном случае одного изолированного проводника имеем:

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon} LJ, \quad (5.47)$$

т. е. коэффициент самоиндукции может быть охарактеризован величиной потока магнитной индукции, пронизывающего контур проводника и рассчитанного на единицу силы тока в последнем.

Установленная связь дает возможность вычислять величину коэффициентов в тех случаях, когда соответствующие потоки магнитной индукции могут быть вычислены заранее.

### Задачи

1. Решить простейшие задачи о распределении магнитного поля в случае заданных токов в пластине, для сплошного и полого цилиндра, внутри соленоида, по оси кругового тока.

2. Определить распределение магнитного поля и тока в сверхпроводящей пластине и цилиндре, если внешнее магнитное поле в обоих случаях направлено вдоль образующих.

3. Вычислить магнитный момент равномерно вращающегося заряженного шара, если плотность заряда и плотность массы предполагаются внутри шара постоянными.

4. Определить характер изменения в скорости капиллярных волн на поверхности парамагнитной жидкости под влиянием внешнего магнитного поля.

---



## ГЛАВА VI

### КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

#### § 1. Область квазистационарных явлений

Из всей области электромагнитных явлений можно выделить так называемую квазистационарную область явлений, в которой для некоторых величин  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  и для других  $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ .

В отличие от магнитостатики и электростатики, где производные по времени от всех величин равны нулю, при выделении квазистационарной области, очевидно, поступают непоследовательно, что оправдывается определенными критериями приближения и результативностью практического применения в широкой области явлений. В частности, электротехника переменных токов относится целиком к области квазистационарных явлений.

С точки зрения общей теории возможны два допущения:

$$\frac{\partial D}{\partial t} \neq 0, \text{ но } \frac{\partial B}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{\partial D}{\partial t} = 0, \text{ но } \frac{\partial B}{\partial t} \neq 0.$$

Первое допущение теоретически возможно для случая аномально больших значений диэлектрической постоянной сред и не нашло еще приложений. Исследуем условия, когда допустимо второе предположение.

Для этого рассмотрим области внутри проводящих сред и выясним, при каких условиях в случае переменных во времени полей можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости.

Напомним выражения для этих токов

$$j_{см} = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t},$$
$$j_{пр} = \sigma E.$$

Оценим их максимальные значения в случае монохроматических полей  $E = E_0 \cos \omega t$ . Тогда

$$\frac{(J_{\text{см}})_{\text{макс}}}{(J_{\text{пров}})_{\text{макс}}} = \frac{\frac{\varepsilon}{4\pi} \left( \frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{макс}}}{\sigma E_{\text{макс}}} = \frac{\varepsilon \omega}{4\pi \sigma}.$$

Таким образом, если

$$\frac{\varepsilon \omega}{4\pi \sigma} \ll 1, \quad (6.1)$$

или

$$\omega \ll \frac{4\pi \sigma}{\varepsilon},$$

то можно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости.

Для чистых металлов  $\sigma \sim 10^{17}$  CGSE; полагая  $\varepsilon \sim 1$ , получаем  $\omega \ll 10^{17}$  1/сек. Следовательно, пренебрегать токами смещения допустимо вплоть до ультрафиолетовых длин волн. Следует, однако, иметь в виду, что поскольку уравнение состояния мы использовали, исходя из статических представлений, нет оснований (в макроскопической теории) распространять их до столь большой области частот, они могут рассматриваться справедливыми лишь для небольших частот, где инерцию среды при процессах поляризации можно не принимать в расчет. Поэтому произведенную оценку области квазистационарных явлений можно считать только ориентировочной, требующей своего уточнения.

Дадим теперь второй критерий квазистационарности для диэлектрических сред, а именно выясним, в каких случаях можно не учитывать ток смещения в областях пространства, окружающих источник.

Как известно из общего курса физики, токи смещения обуславливают распространение электромагнитного поля от источников, в которых сосредоточены переменные во времени заряды и токи. Пренебречь токами смещения, это значит не учитывать распространение электромагнитных волн. При каких частотах это законно? Предположим, в точке источника создается гармонически меняющееся во времени поле

$$E = E_0 e^{i\omega t}.$$

Тогда на расстоянии  $r$  от источника поле будет определяться его значением в точке источника в предшествующий момент времени, поскольку требуется время  $\frac{r}{c}$  для распространения поля от места своего возникновения до рассматриваемой точки. Следовательно, зависимость от времени поля на расстоянии  $r$  от источника имеет вид

$$E \sim e^{i\omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}.$$

Таким образом, квазистационарная область выделяется условием, определяющим, когда можно пренебречь эффектом запаздывания. Имеем

$$e^{i\omega(t - \frac{r}{c})} = e^{i\omega t} \left( 1 - \frac{i\omega}{c} r + \dots \right).$$

Очевидно, эффектом запаздывания можно пренебречь при условии

$$\frac{\omega R}{c} = \frac{2\pi r}{\lambda} \ll 1. \tag{6.2}$$

Таким образом, во всей области пространства вокруг источника, линейные размеры которой малы по сравнению с длиной излучаемой волны, можно пренебречь токами смещения. В этой области значения всех электромагнитных величин можно считать меняющимися во времени синхронно, без сдвига фаз.

### § 2. Уравнения для квазистационарной области явлений

Очевидно, в рассматриваемом случае уравнения электродинамики принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, & \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \tag{6.3}$$

$$(\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стоп}})).$$

По сравнению с электростатикой и магнитостатикой, новым здесь является учет электромагнитной индукции

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

или в интегральной форме

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} ds.$$

Прежде всего выясним, можно ли при помощи этих уравнений найти  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , если заданы распределения зарядов и токов.

На основании  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ , здесь также можно положить  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , с дополнительным условием  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , поскольку уравнения магнитостатики вошли в схему уравнений теории без каких-либо изменений; изменения претерпели только уравнения электростатики.

Далее,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

т. е.

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

откуда

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi$$

или

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (6.4)$$

Наличие производной векторного потенциала в выражении электрического поля отображает непотенциальность электрического поля в квазистационарной области явлений. Для того чтобы определить распределение потенциала и его связь с зарядами, воспользуемся соотношением

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} &= \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{grad} \varepsilon = 4\pi\rho = \\ &= \varepsilon \operatorname{div} \left( -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \left( -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \operatorname{grad} \varepsilon, \end{aligned}$$

или (так как  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ )

$$\Delta \varphi + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \operatorname{grad} \varepsilon = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho. \quad (6.5)$$

Таким образом, уравнение для скалярного потенциала не получилось изолированным от векторного потенциала. Только для однородной среды, когда

$$\operatorname{grad} \varepsilon = 0,$$

получается прежняя связь

$$\Delta \varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Рассмотрим теперь уравнение  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ . При  $\mu = \operatorname{const}$  можно написать

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

или

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (6.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

При  $\mu = \mu(x, y, z)$ , полагая  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ , удобно первое уравнение записать в форме

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + c \text{rot } \mathbf{M})$$

или

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{мол}}),$$

где

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} = c \text{rot } \mathbf{M}.$$

Тогда

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{мол}}) = -\frac{4\pi}{c} \left( \mathbf{j} + c \text{rot } \frac{\mu - 1}{4\pi\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right), \quad (6.7)$$

где использовано соотношение

$$\mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu} \mathbf{B} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu} \text{rot } \mathbf{A}.$$

В отличие от скалярного потенциала векторный потенциал выражается только через токи. Таким образом, система уравнений (6.5) и (6.7) дает возможность по заданным токам и зарядам определить электрическое и магнитное поля, как в однородной, так и в неоднородной среде.

### § 3. Квазистационарные явления в линейных проводниках

Рассмотрим квазистационарные явления в линейных проводниках, как замкнутых, так и разомкнутых, с включенными в них сосредоточенными электродвижущими силами.

Представим уравнение состояния

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стоп}})$$

в интегральной форме для линейного проводника.

Для перехода от объемных проводников к линейным положим, как и прежде,

$$(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стоп}}) d\mathbf{l} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} d\mathbf{l} = \frac{J}{\sigma \Delta S} d\mathbf{l} \mathbf{j}_1 = J dR,$$

где  $dR$  обозначает сопротивление элемента длины  $d\mathbf{l}$  линейного проводника. Интегрирование по контуру проводника  $L_k$  дает:

$$\oint_{L_k} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стоп}}) d\mathbf{l} = \oint_{L_k} J_k dR_k = J_k R_k.$$

Поскольку теперь  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$  и, следовательно,

$$\oint_{L_k} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \oint_{L_k} A d\mathbf{l},$$

получаем:

$$J_k R_k = \mathcal{E}_k^{\text{стоп}} - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \oint_{L_k} A d\mathbf{l}, \quad (6.8)$$

где величина  $\mathcal{E}_k^{\text{стоп}} = \oint_{L_k} \mathbf{E}^{\text{стоп}} d\mathbf{l}$  называется электродвижущей силой.

Вводя поток индукции

$$\oint_{L_k} A d\mathbf{l} = \int_{S_k} \text{rot } A ds = \int_{S_k} \mathbf{B} ds = \Phi_k \quad (6.9)$$

и используя связь потока индукции с коэффициентами самоиндукции и взаимоиндукции

$$\Phi_k = \frac{1}{c} \sum_i L_{ik} J_i,$$

получаем окончательно:

$$J_k R_k = \mathcal{E}_k^{\text{стоп}} - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \sum_i L_{ik} J_i. \quad (6.10)$$

Таким образом, по заданным сторонним силам, сопротивлению и коэффициентам индукции проводников можно определять токи в каждом из проводников путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.10).

Для случая двух проводников  $n=2$  имеем из (6.10):

$$J_1 R_1 = \mathcal{E}_1^{\text{стоп}} - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{11} J_1 + L_{12} J_2),$$

$$J_2 R_2 = \mathcal{E}_2^{\text{стоп}} - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{21} J_1 + L_{22} J_2).$$

Легко заметить, что если заданы  $J_k = J_k(0)$  при  $t=0$  и  $\mathcal{E}_k^{\text{стоп}}(t)$  при  $t \geq 0$ , то значения токов определяются для произвольного момента  $t$ .

Необходимо отметить два обстоятельства в наших рассуждениях. Это, во-первых, отказ от дифференциальной формулировки задачи. Именно переход к интегральной форме уменьшает число неизвестных, так как распределение скалярного потенциала выпало из вычислений, ибо для замкнутых контуров

$$\oint_{L_k} \text{grad } \varphi d\mathbf{l} = 0.$$

Во-вторых, переход к линейным и замкнутым токам свел задачу от четырех переменных  $x, y, z, t$  к функциям только от одной переменной  $t$ .

Важно отметить, что при некоторых условиях можно от ограничения строгой замкнутостью токов отказаться и ввести в рассмотрение незамкнутые токи, оставаясь попрежнему в области квазистационарных явлений.

Для контура с самоиндукцией, сопротивлением и емкостью, выбирая линию интегрирования вдоль линейного проводника от точки 1 до точки 2 (рис. 29), можно написать:

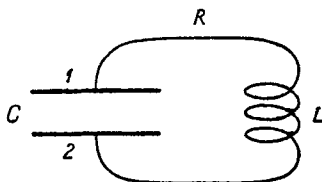


Рис. 29.

$$\int_1^2 J dR = \int_1^2 E dl + \int_1^2 E^{\text{стоп}} dl.$$

Так как  $E = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$ , то

$$\int_1^2 E dl = - \int_1^2 \text{grad } \varphi dl - \frac{1}{c} \int_1^2 \frac{dA}{dt} dl.$$

При этом заметим, что

$$- \int_1^2 \text{grad } \varphi dl = - \int_1^2 \frac{d\varphi}{dl} dl = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Далее,

$$\int_1^2 \frac{dA}{dt} dl = \frac{d}{dt} \int_1^2 A dl.$$

Предположим, что щель в контуре, обусловленная наличием емкости столь мала, что мало изменяет картину распределения магнитного поля, так что приближенно можно считать для векторного потенциала цепь замкнутой, т. е.

$$\int_1^2 A dl \approx \oint_L A dl.$$

Основанием для такого приближения является непрерывность векторного потенциала при переходе из проводника в вакуум при условии, что проводник имеет магнитную проницаемость, близкую к единице. Тогда

$$\oint_L A dl = \int_S B ds = \Phi = \frac{1}{c^2} LJ,$$

где  $L$  — коэффициент самоиндукции цепи. Разомкнутость цепи мы учитываем наличием конечной разности потенциалов на концах цепи  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Эту разность потенциалов выразим через заряд и емкость  $C$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{e}{C},$$

где знак учитывает выбранное нами направление обхода контура, совпадающее с направлением тока. Поскольку теперь

$$J = -\frac{de}{dt}, \quad e = -\int_0^t J dt$$

имеем, подставляя выражения отдельных частей в формулу (6.10) и полагая  $n = 1$ :

$$RJ = -\frac{1}{C} \int_0^t J dt - \frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} + \mathcal{E}_{\text{стоп}},$$

или

$$\frac{1}{c^2} L \frac{dJ}{dt} + RJ + \frac{1}{C} \int_0^t J dt = \mathcal{E}_{\text{стоп}}. \quad (6.11)$$

Таким образом, мы получили уравнение, дающее возможность определить токи в разомкнутом контуре при заданных начальных условиях и заданных сторонних электродвижущих силах.

При составлении уравнения использовано начальное условие  $e = 0$  при  $t = 0$ . Мы можем освободиться от этого ограничения, продифференцировав один раз уравнение (6.11) по времени

$$L' \frac{d^2 J}{dt^2} + R \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C} J = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{стоп}}, \quad (6.12)$$

где  $\frac{1}{c^2} L = L'$ .

При решении задач электродинамики с начальными условиями часто приходится пользоваться методом Лапласа — Меллина. Поэтому изложим основы этого метода на примере решения уравнения (6.11), предполагая известными другие элементарные способы решения уравнения (6.12).

Метод решения уравнений с помощью интеграла Фурье

$$J(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_{\omega} e^{i\omega t} d\omega; \quad J_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} J(t) e^{-i\omega t} dt$$

приспособлен для класса функций с интегрируемым квадратом

$$\int_{-\infty}^{\infty} J^2(t) dt < \infty.$$



В случае, когда, например, в начальный момент в цепь включена электродвижущая сила, в дальнейшем не меняющаяся с течением времени

$$\mathcal{E}^{\text{стоп}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0, \\ \mathcal{E}_0^{\text{стоп}} & \text{для } t \geq 0, \end{cases}$$

это условие не выполняется

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}^{\text{стоп}}(t)|^2 dt = \infty,$$

так что для подобных случаев метод Фурье непригоден.

Идея излагаемого метода заключается в представлении неизвестных функций с помощью интеграла Лапласа

$$J_p = \int_0^{\infty} J(t) e^{-pt} dt$$

(для сходимости интеграла необходимо  $\text{Re } p > 0$  ( $p = a + ib$ )) и в замене дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений для  $J(t)$  алгебраическими уравнениями для  $J_p$ . Преобразование Лапласа — Меллина

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} J_p e^{pt} dp & (t \geq 0), \\ J(t) &= 0 & (t < 0) \end{aligned} \quad (6.13)$$

дает возможность от вспомогательной функции  $J_p$  перейти к искомой  $J$ .

В формуле преобразования (6.13) интеграл берется по бесконечно прямой параллельной мнимой оси и отстоящей от нее на величину  $\sigma_0$ . Величина  $\sigma_0$  вводится, чтобы сделать интеграл сходящимся. В окончательный результат интегрирования  $\sigma_0$  явно не входит. Этот метод, как видно из формул преобразования, применим только для специальных функций, поведение которых в «прошлом» строго предопределено:

$$J(t) = 0 \quad \text{для } t < 0.$$

Будем решать уравнение

$$L' \frac{dJ}{dt} + RJ + \frac{1}{C} \int_0^t J(t) dt = \mathcal{E}^{\text{стоп}}(t)$$

при условии

$$J(0) = 0, \quad \mathcal{E}^{\text{стоп}}(t) = 0 \quad \text{при } t < 0$$

и

$$\mathcal{E}^{\text{стоп}}(t) = \mathcal{E}_0^{\text{стоп}} = \text{const} \quad \text{при } t \geq 0,$$

что соответствует включению в контур с емкостью, самоиндукцией и сопротивлением постоянной электродвижущей силы.

Умножим правую и левую часть на  $e^{-pt}$  и интегрируем от 0 до  $\infty$ . Тогда появятся следующие интегралы:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{dJ}{dt} dt = e^{-pt} J(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} J(t) dt = -J(0) + pJ_p,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} J(t) dt = J_p,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t J(\tau) d\tau = I.$$

Изменим порядок интегрирования в последнем интеграле. Вместо того чтобы вначале интегрировать по  $\tau$  от 0 до  $t$ , а потом по  $t$

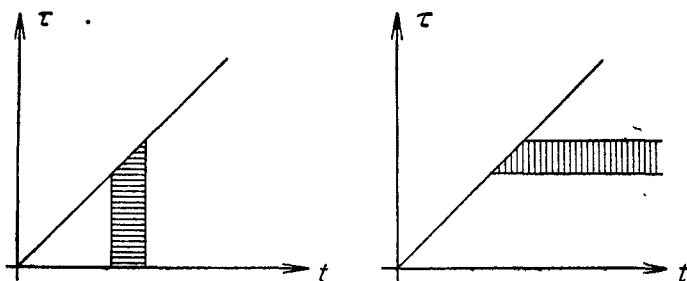


Рис. 30.

от 0 до  $\infty$  (рис. 30), мы можем интегрирование по площади, ограниченной абсциссой и прямой  $\tau = t$ , произвести вначале от  $\tau = t$  до  $\infty$ , меняя  $t$ , а потом по  $\tau$  от нуля до бесконечности

$$I = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t J(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} J(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} dt.$$

Последний интеграл мы можем написать так:

$$\int_0^{\infty} J(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-p(t-\tau)} dt.$$

В результате получаем:

$$I = J_p \int_0^{\infty} e^{-p\tau} d\tau = J_p \frac{1}{p}.$$

Остается свободный член в исходном уравнении

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \mathcal{E}^{\text{стоп}}(t) dt.$$

По условию,  $\mathcal{E}^{\text{стоп}} = \mathcal{E}_0^{\text{стоп}} = \text{const}$  для  $t \geq 0$ . Поэтому

$$I_1 = \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_0^{\text{стоп}}.$$

Итак, уравнение для  $J_p$  имеет вид:

$$\left( L'p + R + \frac{1}{C} \frac{1}{p} \right) J_p = \frac{1}{p} \mathcal{E}_0^{\text{стоп}}.$$

Таким образом, исходное уравнение сведено к алгебраическому уравнению относительно неизвестной  $J_p$ , решение которого есть:

$$J_p = \frac{\mathcal{E}_0^{\text{стоп}}}{ap^2 + bp + c},$$

где обозначено

$$a = L', \quad b = R, \quad c = \frac{1}{C}.$$

Окончательное решение получается при помощи обратного преобразования

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}_0^{\text{стоп}}}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{e^{pt}}{ap^2 + bp + c} dp.$$

Для использования теоремы о вычетах находим корни подинтегрального выражения, обращаемые знаменатель в нуль:

$$ap^2 + bp + c = a(p - p_1)(p - p_2); \quad p_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Таким образом, теорема о вычетах дает:

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}_0^{\text{стоп}}}{a} \left( \frac{e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} + \frac{e^{p_2 t}}{p_2 - p_1} \right) = \frac{\mathcal{E}_0^{\text{стоп}}}{a(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Необходимо различать два случая:

$$\frac{b^2}{4a^2} > \frac{c}{a} \quad \text{и} \quad \frac{b^2}{4a^2} < \frac{c}{a}.$$

Случай

$$\frac{b^2}{4a^2} > \frac{c}{a}$$

или

$$\frac{R^2}{4L'C} > \frac{1}{L'C}$$

соответствует наличию большого сопротивления цепи. Здесь

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}_0^{\text{стоп}}}{a \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}} e^{-\frac{b}{2a}t} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} t \right). \quad (6.14)$$

Включение постоянной электродвижущей силы приводит к аperiodическому изменению тока. В частном случае отсутствия разрыва цепи, т. е. полагая емкость  $C \rightarrow \infty$ , имеем:

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}_0^{\text{стоп}}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Случай  $\frac{b^2}{4a^2} < \frac{c}{a}$ , или  $\frac{R^2}{4L} < \frac{1}{L'C}$ , соответствует достаточно малому сопротивлению. Тогда

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}_0^{\text{стоп}}}{a \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}} e^{-\frac{b}{2a}t} \sin \left( \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} t \right).$$

В цепи возникают затухающие колебания. Для предельного случая  $R \rightarrow 0$  период незатухающих колебаний  $T$  равен:

$$T = 2\pi \sqrt{L'C}, \quad (6.15)$$

что совпадает с известным результатом.

#### § 4. Энергия и силы в области квазистационарных явлений

Составим баланс энергии для системы линейных проводников при наличии в них переменных токов столь малых частот, что можно считать рассматриваемое явление квазистационарным.

Для тепловой энергии, выделяющейся в проводниках в единицу времени, имеем:

$$Q = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} d\tau = \int_V \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} d\tau. \quad (6.16)$$

Для линейных проводников мы должны положить

$$j = \frac{J}{\Delta S}, \quad dR = \frac{dl}{\sigma \Delta S}$$

и, таким образом,

$$\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} d\tau = \frac{J^2}{(\Delta S)^2 \sigma} \Delta S dl = J^2 dR,$$

где  $dR$  — сопротивление элемента длины  $dl$  линейного проводника,  $\Delta S$  — площадь его поперечного сечения.

Если имеется в наличии только два линейных проводника, то, разбивая интеграл в (6.16) на два интеграла по объему каждого из проводников, имеем:

$$Q = \int_V \frac{J_1^2 d\tau}{\sigma_1} + \int_V \frac{J_2^2 d\tau}{\sigma_2} = J_1^2 \oint_{L_1} dR_1 + J_2^2 \oint_{L_2} dR_2 = J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2.$$

Для работы  $P$  сторонних сил, которые предполагаются в каждом из проводников, мы имели ранее:

$$P = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}^{\text{стор}} d\tau.$$

Переходя и здесь к двум линейным проводникам и заменяя  $\mathbf{j} d\tau$  на  $J dl$ , получаем:

$$\begin{aligned} P &= \int_{V_1} \mathbf{j}_1 \mathbf{E}_1^{\text{стор}} d\tau + \int_{V_2} \mathbf{j}_2 \mathbf{E}_2^{\text{стор}} d\tau = \\ &= J_1 \oint_{L_1} E_1^{\text{стор}} dl + J_2 \oint_{L_2} E_2^{\text{стор}} dl = J_1 \mathcal{E}_1^{\text{стор}} + J_2 \mathcal{E}_2^{\text{стор}}, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{E}_1^{\text{стор}}$  и  $\mathcal{E}_2^{\text{стор}}$  — электродвижущие силы в каждом из проводников.

Рассмотрим теперь магнитную энергию при квазистационарном режиме

$$W = \frac{1}{8\pi} \int H B d\tau = \frac{1}{2c^2} (L_{11} J_1^2 + 2L_{12} J_1 J_2 + L_{22} J_2^2).$$

Учтем возможность перемещения проводников, причем будем считать, что перемещения происходят бесконечно медленно. В таком случае остается в силе вся схема электродинамики, развитая для поля неподвижных тел.

Обозначим через  $A$  работу сил взаимодействия между проводниками в единицу времени. Как следствие закона сохранения энергии должно быть:

$$P = Q + \frac{\partial W}{\partial t} + A, \tag{6.17}$$

т. е. в общем случае работа сторонних сил обуславливает выделение тепловой энергии в проводниках  $Q$ , изменение магнитной энергии  $\frac{\partial W}{\partial t}$  и работу за счет сил взаимодействия между проводниками  $A$ .

Пусть положения проводников определяются обобщенными координатами  $q_1, \dots, q_n$ . Тогда работа за счет сил взаимодействия за время  $dt$  равна:

$$A dt = \sum_{i=1}^n Q_i dq_i,$$

где  $Q_i = Q_i(q_1 \dots q_n, J_1 \dots J_n)$  — обобщенные силы. Таким образом, наша задача заключается в определении обобщенных сил, исходя из выражения баланса энергии, при условии, что нам известны все входящие туда члены, кроме  $A$ . Мы нашли

$$P - Q = J_1 \mathcal{E}_1^{\text{стор}} + J_2 \mathcal{E}_2^{\text{стор}} - J_1^2 R_1 - J_2^2 R_2.$$

Основываясь на основном законе изменения сил токов в линейных проводниках в области квазистационарных явлений

$$\mathcal{E}_1^{\text{стор}} = J_1 R_1 + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{11} J_1 + L_{12} J_2),$$

$$\mathcal{E}_2^{\text{стор}} = J_2 R_2 + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{12} J_1 + L_{22} J_2),$$

получаем:

$$\begin{aligned} P - Q &= J_1 \left[ J_1 R_1 + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{11} J_1 + L_{12} J_2) \right] + \\ &+ J_2 \left[ J_2 R_2 + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (L_{12} J_1 + L_{22} J_2) \right] - J_1^2 R_1 - J_2^2 R_2 = \\ &= \frac{1}{c^2} \left( L_{11} J_1 \frac{dJ_1}{dt} + L_{12} J_1 \frac{dJ_2}{dt} + L_{12} J_2 \frac{dJ_1}{dt} + L_{22} J_2 \frac{dJ_2}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + J_1^2 \frac{dL_{11}}{dt} + J_1 J_2 \frac{dL_{12}}{dt} + J_1 J_2 \frac{dL_{12}}{dt} + J_2^2 \frac{dL_{22}}{dt} \right). \end{aligned}$$

Сравнивая выражение для  $P - Q$  с выражением магнитной энергии

$$W = \frac{1}{2c^2} (L_{11} J_1^2 + 2L_{12} J_1 J_2 + L_{22} J_2^2),$$

получаем:

$$P - Q = \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_L + 2 \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_J, \quad (6.18)$$

где  $\left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_L$  — производная магнитной энергии по времени при условии постоянства коэффициентов самоиндукции и взаимоиндукции,  $\left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_J$  — при условии постоянства токов.

Воспользуемся теперь уравнением баланса энергии:

$$P - Q = \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_L + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_J + A.$$

Подставим сюда соотношение (6.18); тогда получим:

$$A = \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_J. \quad (6.19)$$

Работа сил взаимодействия между токами равна изменению магнитной энергии системы при условии постоянства сил токов в ней.

Теперь найдем выражение для обобщенных сил. Имеем:

$$dA = \sum Q_i dq_i,$$

$$(dW)_J = \sum \left( \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)_J dq_i.$$

Сравнивая выражения в правых частях, получаем:

$$Q_i = \left( \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)_J. \quad (6.20)$$

Обобщенная сила, действующая на линейный ток в квазистационарной области электромагнитных явлений, равна производной магнитной энергии по соответствующей обобщенной координате при условии постоянства сил электрических токов во всех проводниках системы.

Важно отметить, что здесь силы направлены в сторону возрастания энергии (положительный знак у производной), в то время как в механике силы направлены всегда в сторону убыли потенциальной энергии системы:

$$Q_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (6.21)$$

Например, два одноименных заряда отталкиваются, два тока, направленные в одинаковую сторону, притягиваются (рис. 31). Причина указанного обстоятельства заключается в существенно отличной природе стационарных токов, как характеристик взаимодействующих систем по сравнению с характеристиками в классической механике. В последней характеристиками взаимодействующих систем являются заряды и массы тел, которые считаются раз навсегда заданными. Такое задание не противоречит закону сохранения энергии, поскольку совершенно не рассматриваются процессы, связанные с изменением этих индивидуальных характеристик взаимодействующих систем, а учитываются только изменения их положения в пространстве. В электродинамике же поддержка постоянства токов требует затраты работы сторонних сил, а изменение токов связано с появлением индукционных токов, для компенсации которых необходима дополнительная работа сторонних сил. Этим и обуславливается существенная разница формул (6.20) и (6.21). Если бы работа сторонних сил шла только на компенсацию потери энергии за счет перехода в тепло, то

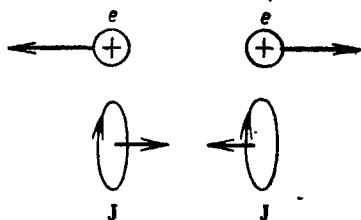


Рис. 31.

индивидуальных характеристик взаимодействующих систем, а учитываются только изменения их положения в пространстве. В электродинамике же поддержка постоянства токов требует затраты работы сторонних сил, а изменение токов связано с появлением индукционных токов, для компенсации которых необходима дополнительная работа сторонних сил. Этим и обуславливается существенная разница формул (6.20) и (6.21). Если бы работа сторонних сил шла только на компенсацию потери энергии за счет перехода в тепло, то

$$P = Q$$

и баланс энергии привел бы нас к результату, аналогичному механике

$$A = -\frac{\partial W}{\partial t} = -\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_L - \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_J.$$

Именно изменение индивидуальных характеристик взаимодействующих систем при их перемещениях радикально отличает законы взаимодействия токов от тех, которые имеют место в механике.

Рассмотрим частный случай тока во внешнем магнитном поле (рис. 32), считаясь заданным. Положим, что силы токов в источнике и в подвижном контуре при перемещении остаются постоянными; контур при перемещении не деформируется; только одна

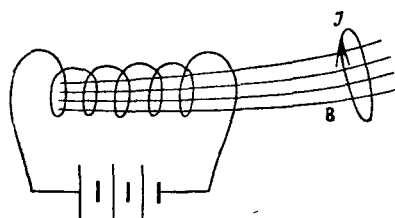


Рис. 32.

из обобщенных координат определяет положение подвижного контура. Эти предположения гарантируют неизменность собственной магнитной энергии каждого из проводников. Поэтому при перемещениях может меняться только энергия взаимодействия

$$W_{12} = \frac{1}{c^2} L_{12} J_1 J_2,$$

отсюда

$$Q = \frac{J_2}{c} \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{c} L_{12} J_1 \right).$$

Замечая, что

$$\frac{1}{c} L_{12} J_1 = \Phi_{12} = \Phi,$$

где  $\Phi$  — магнитный поток через второй контур, индуцированный первым контуром, имеем:

$$Q = \frac{J}{c} \frac{d}{dq} \Phi,$$

т. е. обобщенная сила, действующая на контур, перемещающийся в заданном магнитном поле, выражается через изменение потока магнитной индукции, обусловленного изменением положения контура.

Для подсчета  $\frac{d\Phi}{dq}$  рассмотрим два бесконечно мало отличающихся положения контура. Пусть  $dq$  — вектор перемещения контура. Тогда разность потоков магнитной индукции между первоначальным и последующим положением определяется потоком через боковую поверхность (Б.П.), вычерчиваемую контуром тока при перемещении

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \int_{\text{Б.П.}} \mathbf{B} ds = \int_{\text{Б.П.}} \mathbf{B} [dq dl].$$



Поскольку  $\Delta q$  для всех точек контура предполагается одинаковым, то

$$\Delta\Phi = \Delta q \oint_L [d\mathbf{B}],$$

но из выражения обобщенной силы имеем:

$$d\Phi = Q \frac{c}{J} dq = \frac{c}{J} F dq.$$

Сравнение дает

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c} \oint_L [d\mathbf{B}]. \quad (6.22)$$

Направление силы, действующей на элемент тока  $d\mathbf{l}$ , перпендикулярно к этому элементу и направлению магнитной индукции  $\mathbf{B}$  внешнего поля в точке элемента  $d\mathbf{l}$ . Переходя от линейных токов к объемно распределенным

$$J d\mathbf{l} = \mathbf{j} d\tau,$$

получим:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int_V [\mathbf{j}\mathbf{B}] d\tau.$$

Следовательно, на каждый элемент объема  $d\tau$  проводника действует сила  $d\mathbf{F}$ , равная:

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}] d\tau. \quad (6.23)$$

Отметим, что выражение силы, действующей со стороны магнитного поля на ток, представляет собой один из фундаментальных результатов электродинамики. Нами он получен как следствие основных уравнений и принципа сохранения полной энергии при перемещении токов. При изложении магнитных явлений этот закон может быть положен в основу теории.

В случае движения точечных зарядов можно выразить плотность тока через  $\delta$ -функцию:

$$\mathbf{j} = \sum_i e_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)).$$

Тогда

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int_V \left[ \sum_i e_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \mathbf{B} \right] d\tau,$$

что дает ввиду сосредоточенности  $\delta$ -функций:

$$\mathbf{F} = \sum_i \frac{e_i}{c} [\mathbf{v}_i(t) \mathbf{B}].$$

Сила, действующая на один движущийся заряд, таким образом, равна:

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (6.24)$$

Это выражение лежит в основе классической микроскопической электродинамики. Заметим также, что основное выражение для силы, действующей на ток, содержит не  $\mathbf{H}$ , а  $\mathbf{B}$ . Таким образом, с этой точки зрения магнитная индукция является более первичным свойством поля, чем  $\mathbf{H}$ . Связь между силой, действующей на ток, и магнитной индукцией дает новый по сравнению с прежним определением (см. гл. I) способ экспериментального определения магнитной индукции посредством измерения сил, действующих на токи со стороны магнитного поля.

### § 5. Скин-эффект. Аномальный скин-эффект при низких температурах

Выясним распределение переменного электрического поля внутри металла. При постоянном электрическом поле в однородном цилиндрическом проводнике плотность тока имеет постоянное значение по сечению проводника. Легко заметить, что при возрастании общего тока с течением времени возникающее вихревое электрическое поле всегда направлено так, что у краев проводника оно увеличивает первоначальный ток, а в центре проводника уменьшает его. В самом деле, если ток увеличивается, то увеличивается и поток магнитной индукции через контур, показанный на рис. 33. Циркуляция по этому контуру должна составлять левовинтовую систему с направлением изменения потока индукции и поэтому действительно увеличивает исходный ток у краев и уменьшает его в центре.

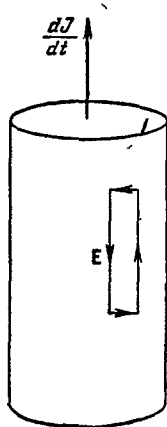


Рис. 33.

Учитывая, что в однородном проводнике  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ , находим, дифференцируя по времени первое уравнение электродинамики и пользуясь вторым уравнением

$$\frac{1}{\mu} \text{rot} (-c \text{rot } \mathbf{E}) = \frac{c}{\mu} \Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

или

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}.$$

Поскольку  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , то, предполагая, что поле  $\mathbf{E}$  монохроматически зависит от времени  $\mathbf{E} \sim e^{i\omega t}$ , имеем:

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2 \epsilon\mu}{c^2} \mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma i\omega}{c^2} \mathbf{E}. \quad (6.25)$$

Предполагая, что мы имеем дело с плоской границей металла и что напряженность поля направлена параллельно плоскости раздела, можем положить, что существуют только компонента  $E_x$ , зависящая от глубины  $z$  проникновения поля внутрь металла. Будем искать решение уравнения (6.25) в виде  $E_x(z) = E_x(0) e^{-pz}$ , для определения  $p$  получаем характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{\omega^2 \epsilon_1 \mu}{c^2} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \mu \sigma. \quad (6.26)$$

Поскольку обычно глубина проникновения  $\delta = \frac{1}{\text{Re } p}$  значительно меньше длины волны  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ , второй член слева можно опустить, так как

$$|p|^2 \gg \frac{\omega^2 \epsilon_1 \mu}{c^2}.$$

Пренебрежение этим членом соответствует квазистационарному приближению, так как его происхождение обязано учету тока смещения. В квазистационарном приближении исходное уравнение (6.25) приобретает вид

$$\Delta E = \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (6.27)$$

Полагая в характеристическом уравнении (6.26)  $p = n + ix$ , находим:

$$n^2 = x^2, \quad 2nx = \frac{4\pi \omega \mu \sigma}{c^2}.$$

Таким образом, решению можно придать вид

$$E_x(z) = E_x(0) e^{-nz} \cos(\omega t - xz), \quad x = n. \quad (6.28)$$

Введем, по определению, понятие глубины проникновения  $\delta$  как расстояние от границы, при котором напряженность поля убывает в  $e$  раз,

$$\delta = \frac{1}{n} = \frac{c}{\sqrt{4\pi \omega \mu \sigma}}.$$

С увеличением частоты, электропроводности и магнитной проницаемости глубина проникновения уменьшается.

Для меди ( $\sigma \sim 5 \cdot 10^{17}$  CGSE,  $\mu \sim 1$ ) получаем:

$$\text{при } \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 10^3 \frac{1}{\text{сек}} \quad \delta \sim 2 \text{ мм},$$

$$\text{при } \nu = 10^5 \frac{1}{\text{сек}} \quad \delta \sim 0,2 \text{ мм},$$

$$\text{при } \nu = 10^7 \frac{1}{\text{сек}} \quad \delta \sim 0,02 \text{ мм}.$$

Решение задачи в виде (6.28) указывает на существование затухающих волн с коэффициентом затухания, равным волновому числу. Это значит, что на расстоянии, равном длине волны  $\lambda = \frac{2\pi}{n}$ , практически происходит полное затухание, так как амплитуда поля уменьшается в  $e^{-2\pi}$  раз. По указанной причине говорить о волнах можно лишь условно.

Очевидно, что эта условность представлений о волнах отображает ту важную особенность, что для области квазистационарных явлений распространение поля не является характерным, так как мы опустили ток смещения, являющийся необходимым элементом распространения.

Заметим, что указанная условность представлений о волнах имеет место и для так называемых тепловых и диффузионных волн, так как уравнения, описывающие эти процессы

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T \quad \text{и} \quad \frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n,$$

того же математического типа, как и уравнения (6.27).

Принципиальное отличие подобных уравнений (уравнений параболического типа) от волновых уравнений (уравнений гиперболического типа) заключается в том, что если в гиперболических уравнениях затухание волн может не зависеть от характеристик распространения волн, например от длины волны, и может даже отсутствовать, как, например, в случае непоглощающей диэлектрической среды с типичным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi,$$

то для параболических уравнений, как видели выше, коэффициент затухания равен волновому числу.

Определим теперь сопротивление  $R$ , приходящееся на единицу длины проводника. Пусть  $Q$  — количество тепла, выделяющееся по всей толще проводника. Выбрав за объем цилиндр с площадью сечения, равной единице, имеем:

$$\bar{Q} = \int_0^{\infty} j E dz = \sigma E_x^2(0) \int_0^{\infty} e^{-2nz} \overline{\cos^2(\omega t - \kappa z)} dz = \frac{\sigma E_x^2(0)}{4n},$$

где черта сверху обозначает усреднение по времени. Полный ток  $J$ , приходящийся на 1 см, равен:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \sigma E dz = \sigma E_x(0) \int_0^{\infty} e^{-nz} \cos(\omega t - \kappa z) dz = \\ &= \frac{\sigma E_x(0)}{n^2 + \kappa^2} (n \sin \omega t - \kappa \cos \omega t), \end{aligned}$$

отсюда

$$\bar{J}^2 = \frac{1}{2} \sigma^2 E_x^2(0) \frac{1}{n^2 + \kappa^2}.$$

Определяя «скиновое сопротивление» отношением  $\frac{\bar{Q}}{j_s} = R$ , получаем  $R = \frac{n^2 + x^2}{2nc}$ . Обычно вводится так называемая «скиновая проводимость»  $\Sigma$ :

$$\Sigma = \frac{1}{R} = \frac{2nc}{n^2 + x^2}. \quad (6.29)$$

Как мы видели ранее,  $n = x = \sqrt{\frac{2\pi\mu\omega\sigma}{c^2}}$  и, следовательно,

$$\Sigma = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\mu\omega}} \cdot \sqrt{\sigma},$$

т. е. «скиновая проводимость» пропорциональна корню квадратному из коэффициента удельной проводимости с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от природы металла (при  $\mu \sim 1$ ).

В последние годы благодаря освоению техники получения сантиметровых радиоволн было сделано несколько важных экспериментальных открытий. К их числу принадлежат новые данные, указывающие на аномальный ход основных зависимостей скин-эффекта при низких температурах и высоких частотах. «Скиновая проводимость»  $\Sigma$  по рассмотренной выше теории увеличивается пропорционально корню квадратному из коэффициента электропроводности с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от природы металла. Опыты, произведенные при фиксированной частоте  $\omega = 10'' \frac{1}{\text{сек}}$  и при различных температурах до  $10^\circ \text{K}$  и ниже, показали, что  $\Sigma$  при больших значениях  $\sqrt{\sigma}$  стремится к насыщению, величина которого зависит от природы вещества. На рис. 34 приведены характерные кривые для серебра, золота, свинца. В области малых значений  $\sqrt{\sigma}$  экспериментальные точки хорошо укладываются на прямолинейном отрезке кривой в полном соответствии с классической теорией скин-эффекта. Для больших значений  $\sqrt{\sigma}$  имеет место насыщение. Исключение составляет ртуть, для которой «скиновая проводимость» продолжает возрастать с увеличением коэффициента электропроводности.

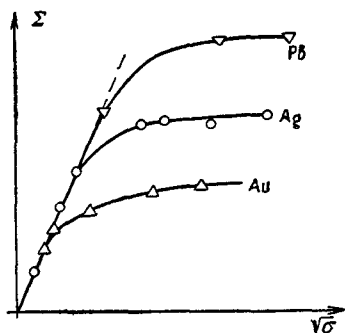


Рис. 34.

В связи с этим возникает вопрос: какие физические факторы, не учтенные в классической теории скин-эффекта, определяют характер новых закономерностей?

Очевидно, учет тока смещения не может изменить классического результата, так как роль второго члена в уравнении (6.26) ничтожна

и для новых опытных данных. При  $\omega \sim 10^{10} \frac{1}{\text{сек}} \sigma \sim 10^{20}$  CGSE,  $\delta \sim 10^{-3}$  см, тогда как длина волны, соответствующая частоте  $10^{10} \frac{1}{\text{сек}}$ , равна приблизительно 20 см и, следовательно,  $\delta \ll \lambda$ . Поэтому  $p^2 \gg \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2}$ . Поскольку указанные аномалии скин-эффекта имеют место

и для полей с небольшими амплитудами, ясно, что учет нелинейности соответствует совсем другим опытным данным и к явлению аномального скин-эффекта не имеет прямого отношения.

Далее заметим, что получение закона Ома  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  основывалось на предположении о функциональной связи между  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ :  $\mathbf{j} = f(\mathbf{E})$ . Это предположение молчаливо допускает, что плотность тока не зависит от значения поля в других точках пространства. Как указывалось в гл. I, при наличии такой зависимости закон Ома должен быть заменен связью, соответствующей функционалу

$$\mathbf{j} = \int_V K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\tau', \quad (6.30)$$

где ядро  $K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  определяет интенсивность связи между значением плотности тока в точке  $\mathbf{r}$  и значением поля в точке  $\mathbf{r}'$ . В частном случае связей только в бесконечно близких точках, когда можно положить  $K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \sigma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , где  $\delta$  — дельта-функция, линейный функционал переходит в обычный закон Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\tau' = \sigma \mathbf{E}.$$

Поскольку малые сопротивления при низких температурах должны способствовать эффективности «дальних связей», положим в основу аномальной теории скин-эффекта связь между  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  в виде (6.30), где ядро  $K$  должно определиться из опыта. Тогда вместо уравнения (6.25) получим уже новое уравнение:

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} \mathbf{E} = \frac{4\pi i \omega \mu}{c^2} \int_V K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (6.31)$$

Для плоского случая будем и здесь искать решение в виде  $E_x(z) = E_x(0) e^{-pz}$ ,  $E_y = E_z = 0$ . Подставляя в уравнение (6.31) вместо  $E_x$  функцию  $e^{-pz}$ , получим для точек, достаточно удаленных от границы в сравнении с радиусом сферы действия функциональных связей (полагая  $V \rightarrow \infty$ ):

$$\begin{aligned} \left( p^2 + \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} \right) e^{-pz} &= \\ &= \frac{4\pi i \omega \mu}{c^2} \left[ \int_{-\infty}^z K^+(z - z') e^{-pz'} dz' + \int_z^{\infty} K^+(z' - z) e^{-pz'} dz' \right] \\ (K^+(z - z')) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dy' dx'. \end{aligned}$$

Вводя новые переменные интегрирования: в первом интеграле  $z - z' = s$ , во втором  $z' - z = s$  и замечая, что

$$\int_{-\infty}^z K^+(z - z') e^{-pz'} dz' = e^{-pz} \int_0^{\infty} K^+(s) e^{ps} ds,$$

$$\int_z^{\infty} K^+(z' - z) e^{-pz'} dz' = e^{-pz} \int_0^{\infty} K^+(s) e^{-ps} ds,$$

получаем после сокращения на  $e^{-pz}$  характеристическое уравнение для определения  $p$ :

$$p^2 + \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} = \frac{4\pi i \omega \mu}{c^2} \int_0^{\infty} K^+(s) (e^{ps} + e^{-ps}) ds. \quad (6.32)$$

Как видим, это уравнение отлично от прежнего

$$p^2 + \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} = \frac{4\pi i \omega \mu}{c^2} \sigma$$

и, следовательно, по-другому характеризует явление.

Характер зависимости  $p$  от  $\sigma$  мы можем выяснять приближенно, решая уравнение (6.32). Разлагая подинтегральную функцию в ряд Тейлора, удержим член, который отсутствует в обычной теории скин-эффекта. Тогда имеем:

$$p^2 + \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} = \frac{4\pi i \omega \mu}{c^2} (\sigma + \sigma_2 p^2), \quad (6.33)$$

где

$$\sigma = 2 \int_0^{\infty} K^+(s) ds, \quad \sigma_2 = \int_0^{\infty} K^+(s) s^2 ds.$$

Коэффициент  $\sigma_2$  включает новый параметр размерности квадрата длины

$$r_0^2 = \frac{\int_0^{\infty} K^+(s) s^2 ds}{2 \int_0^{\infty} K^+(s) ds}.$$

Величина  $r_0$  определяет пространственную «протяженность дальних связей» между исходными величинами  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ .

Таким образом, новый коэффициент  $\sigma_2 = r_0^2 \sigma$ , и мы имеем из (6.33), опуская член  $\frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2}$ :

$$p^2 = \frac{i\sigma_\omega}{1 - i\sigma_\omega r_0^2},$$

где обозначено

$$\sigma_\omega = \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \sigma.$$

Разбивая  $p$  на действительную и мнимую части  $p = n + ix$ , находим следующие уравнения для определения  $n$  и  $x$ :

$$n^2 - x^2 = - \frac{\sigma_\omega^2 r_0^2}{1 + \sigma_\omega^2 r_0^4}, \quad (6.34)$$

$$2nx = \frac{\sigma_\omega}{1 + \sigma_\omega^2 r_0^4}.$$

Для малых значений  $\sigma$ , полагая  $\sigma_\omega r_0^2 \ll 1$ , получаем:  $n^2 - x^2 = 0$ ,  $2nx = \sigma_\omega$ , т. е.

$$n = x = \sqrt{\frac{2\pi\omega\mu\sigma}{c^2}},$$

что совпадает с результатом классической теории. В крайнем неклассическом случае  $\sigma_\omega r_0^2 \gg 1$

$$n^2 - x^2 = - \frac{1}{r_0^2}, \quad 2nx = \frac{1}{\sigma_\omega r_0^4}$$

и

$$n = \frac{1}{2\sigma_\omega r_0^2}, \quad x = \frac{1}{r_0}.$$

Подсчитаем теперь «скиновую проводимость». На основании формулы (6.28), справедливой и для  $n \neq x$ , получаем в классическом случае прежний результат:  $\Sigma = \frac{\sigma}{n} \sim \sqrt{\sigma}$ , а в крайнем неклассическом случае

$$\Sigma = \frac{2n\sigma}{n^2 + x^2} = \frac{\sigma}{\sigma_\omega r_0} = \frac{c^2}{4\pi\omega r_0 \mu},$$

т. е. здесь  $\Sigma$  не зависит от коэффициента электропроводности  $\sigma$ . Последний результат вполне соответствует новым экспериментальным данным об аномальной зависимости скинковой проводимости от  $\sqrt{\sigma}$  при низких температурах и больших частотах.

Заметим, что структура поля в неклассическом случае существенно отлична от результата классической теории. При  $\sigma_\omega r_0^2 \gg 1$   $n \ll x$ , т. е. преобладает периодическая структура поля, на которую накладывается относительно слабое затухание. Величина периода совпадает с величиной радиуса действия «дальних связей».

Порядок  $r_0$  можно оценить, полагая  $\sigma_\omega r_0^2 \sim 1$ ; для  $\omega \sim 10^{10} \frac{1}{\text{сек}}$ ,  $\sigma \sim 10^{30}$  получаем  $r_0 \sim 10^{-5}$  см.



## ЗАДАЧИ

1. Найти распределение электрического поля в цилиндрическом проводе в случае нормального скин-эффекта и подсчитать количество выделившегося тепла на единицу длины провода.

2. Определить количество тепла, выделяющегося в единицу времени в толстой пластинке при аномальном скин-эффекте, беря за уравнение состояния  $j = \sigma(1 + r_0^2 \Delta) E$ .

3. В однородном магнитном поле находится заряженный по объему шарик. При изменении магнитного поля по величине возникает вихревое электрическое поле. Вычислить момент сил, действующий на шарик.

---

## ГЛАВА VII

### ПРОБЛЕМА ИЗЛУЧЕНИЯ

#### § 1. Общие замечания

Как мы видели, см. гл. II, исходные уравнения электродинамики обратимы во времени. Излучение же есть необратимое явление, подобное необратимому процессу перехода тепла от более нагретого тела к менее нагретому. Поэтому решение проблемы излучения должно быть связано с дополнительной физической гипотезой. Выявление и анализ этой гипотезы необходимо рассмотреть в этой главе.

В электростатических и магнитостатических задачах электромагнитное поле рассматривается только совместно с источниками — зарядами и токами, так как оно органически связано с этими источниками и не может существовать без них. По другому обстоит дело в случае переменных во времени полей. Здесь возникшее поле может «отпочковаться» от источников и, таким образом, получает полную самостоятельность существования, что указывает на новую форму движения материи.

Основной задачей в проблеме излучения является определение свойств поля излучения в зависимости от характеристик источников — переменных во времени зарядов и токов.

Получаемые здесь результаты являются не только основой многочисленных приложений в радиофизике, но служили и служат основой теоретических обобщений в атомной физике, оптике и ядерной физике.

#### § 2. Дифференциальные уравнения для потенциалов

Поставим задачу определения векторного и скалярного потенциалов по заданным источникам поля — зарядам и токам, не накладывая ограничений на быстроту изменения этих величин во времени.

Сама возможность введения потенциалов  $A$  и  $\varphi$  не очевидна, поскольку ранее мы ограничивались статическими или квазистати-

ческими явлениями. Поэтому проанализируем возможность введения  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ . Поскольку всегда

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (7.1)$$

мы можем и здесь положить

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (7.2)$$

или

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (7.3)$$

Выражением (7.2) векторный потенциал определяется неоднозначно:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \operatorname{grad} \psi, \quad (7.4)$$

где  $\psi$  — произвольная функция координат и времени.

Подстановка вектора магнитной индукции в уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

дает

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется, если положить

$$\mathbf{E} = - \operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7.5)$$

так же, как и в области квазистационарных явлений.

Выявим, как отражается на скалярном потенциале произвол в выборе векторного потенциала. Заменяя  $\mathbf{A}$  через  $\mathbf{A}'$  по формуле (7.4), имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= - \operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \psi = \\ &= - \operatorname{grad} \left( \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = - \operatorname{grad} \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}, \end{aligned}$$

т. е. скалярный потенциал также определен неоднозначно:

$$\varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (7.6)$$

Таким образом, преобразования потенциалов  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  по формулам (7.4) и (7.6) оставляют неизменными напряженности полей. Это свойство уравнений поля носит название «калибровочной инвариантности».

Естественно в дальнейшем воспользоваться неоднозначностью потенциалов с целью выразить задачу определения  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  в наиболее простейшем виде.

В случае однородной среды  $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$  уравнение электродинамики, выраженное через потенциалы, имеет вид

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{A} \equiv \frac{1}{\mu} (\text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}) = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

или

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left( \text{div } \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}. \quad (7.7)$$

Аналогично, уравнение

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

имеет вид

$$\text{div} \left( -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho$$

или

$$\Delta \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (7.8)$$

Полученные уравнения для потенциалов дают возможность определить по заданным токам и зарядам скалярный и векторный потенциалы, поскольку имеется четыре уравнения для четырех неизвестных функций  $\varphi$ ,  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ .

Вследствие имеющегося произвола в выборе потенциалов наложим на них дополнительное условие

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (7.9)$$

Покажем, что надлежащим выбором произвольной функции  $\psi$ , определяющей неоднозначность выбора потенциалов, можно всегда добиться выполнения условия (7.9).

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}' + \text{grad } \psi, \\ \varphi' &= \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Действуя оператором  $\text{div}$  на первое и оператором  $\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t}$  на второе из соотношений (7.10), получим после вычитания:

$$\Delta \psi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \text{div } \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left( \text{div } \mathbf{A}' + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right).$$

Предположим, что  $\text{div } \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \neq 0$ . Тогда, если уравнение

$$\Delta \psi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \text{div } \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (7.11)$$

имеет хотя бы одно частное решение для  $\psi$ , то это будет указывать, что существует такая функция  $\psi$ , что

$$\text{div } \mathbf{A}' + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0.$$

В данной главе мы убедимся в разрешимости уравнения (7.11); поэтому можем считать заранее, что условие (7.9) выполнено. Используя условие, накладываемое на потенциалы, находим:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}, \quad \Delta \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho. \quad (7.12)$$

Полученные уравнения для потенциалов совместно с условием

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (7.13)$$

подлежат подробному обсуждению при рассмотрении проблемы излучения.

Отметим, что эти уравнения обобщают ранее полученные для статического случая, переходя в них при условии

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

Отметим также, что эти уравнения принадлежат к дифференциальным уравнениям гиперболического типа и называются неоднородными волновыми уравнениями. Они позволяют найти распределение потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ , если известны токи и заряды как функции координат и времени.

### § 3. Частные решения уравнений для потенциалов

Часто используемый так называемый истокообразный способ получения частного решения заключается в следующем. Найдем решение от сосредоточенного в малом объеме источника. На основании аддитивности потенциалов как и полей для получения решения от пространственного непрерывного распределения источников нужно будет просуммировать (проинтегрировать) потенциалы от разных объемов источника.

Поскольку уравнения для проекций векторного потенциала вполне аналогичны уравнению для скалярного потенциала, достаточно рассмотреть только последнее уравнение.

Ввиду изотропности пространства вокруг одного сосредоточенного источника будем искать сферически симметричное решение, т. е. положим

$$\varphi = \varphi(r).$$

Для всех точек вне источника

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}.$$

Полагая

$$\varphi = \frac{u(r)}{r},$$

где  $u(r)$  — новая неизвестная функция, имеем после подстановки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Решение такого однородного волнового уравнения имеет вид

$$u(r, t) = g\left(t - \frac{r}{v}\right) + f\left(t + \frac{r}{v}\right),$$

где  $g$  и  $f$  — произвольные, дважды дифференцируемые функции от аргументов  $t - \frac{r}{v}$  и  $t + \frac{r}{v}$ .

Таким образом, сферически симметричное решение для потенциала от сосредоточенного источника имеет вид

$$\varphi = \frac{g\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} + \frac{f\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r}. \quad (7.14)$$

В полученном решении функции  $g$  и  $f$  не связаны с амплитудой источника, т. е. с находящимся в нем зарядом  $\rho d\tau$ . Установим эту связь, используя то обстоятельство, что поскольку исходные законы электродинамики переходят в статические законы, когда  $v \rightarrow \infty$ , то и точные решения уравнений электродинамики должны переходить в статические решения при том же предельном переходе.

Полагая, например,  $f=0$ ,  $v \rightarrow \infty$ , имеем из (7.14):

$$\varphi = \frac{g(t)}{r},$$

но в статике

$$d\varphi_{ст} = \frac{\rho d\tau}{\epsilon r},$$

следовательно,

$$g(t) = \frac{1}{\epsilon} \rho(t) d\tau,$$

или

$$g\left(t - \frac{r}{v}\right) = \frac{1}{\epsilon} \rho\left(t - \frac{r}{v}\right) d\tau.$$

Полагая  $g=0$ , аналогично имеем:

$$f\left(t + \frac{r}{v}\right) = \frac{1}{\epsilon} \rho\left(t + \frac{r}{v}\right) d\tau.$$

Итак, полученное решение имеет вид

$$d\varphi = \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right) d\tau}{\epsilon r} \quad (7.15)$$

или

$$d\varphi = \frac{\rho\left(t + \frac{r}{v}\right) d\tau}{\epsilon r}, \quad (7.16)$$

Первое решение представляет собою сферическую волну, распространяющуюся от источника, второе — сферическую волну, сходящуюся к источнику (рис. 35). Первое решение указывает, что значение потенциала в момент времени  $t$  и на расстоянии  $r$  от источника определяется значением плотности зарядов, возбуждающих эту волну в момент времени, предшествующий наблюдению  $t - \frac{r}{v}$ , где  $\frac{r}{v}$  — время, необходимое для распространения поля от источника до точки наблюдения. Второе решение характеризуется значением потенциала в момент времени, опережающий наблюдаемое время  $t$  на тот же интервал времени  $\frac{r}{v}$ . Поэтому для первого решения заряд играет роль источника распространения поля, для второго заряд является местом стока поля. Первое решение называется запаздывающим, второе — опережающим решением.

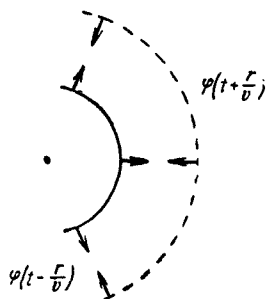


Рис. 35.

Помимо выражений (7.15) и (7.16), существуют более общие решения. В самом деле, положим:

$$d\varphi = C_1 \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right) d\tau}{\epsilon r} + C_2 \frac{\rho\left(t + \frac{r}{v}\right) d\tau}{\epsilon r}, \quad (7.17)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные. Это есть решение волнового уравнения, поскольку (7.17) есть сумма частных решений того же уравнения; оно переходит в статическое при условии

$$C_1 \frac{\rho d\tau}{\epsilon r} + C_2 \frac{\rho d\tau}{\epsilon r} = \frac{\rho d\tau}{\epsilon r},$$

если

$$C_1 + C_2 = 1.$$

В частном случае решением задачи является полусумма запаздывающего и опережающего решения

$$d\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)}{\epsilon r} + \frac{\rho\left(t + \frac{r}{v}\right)}{\epsilon r} \right) d\tau.$$

Поскольку для запаздывающего решения поле распространяется от источника, к нему не возвращаясь, излучение поля отображается запаздывающим решением. Для опережающего решения заряд является местом стока поля и, следовательно, опережающие потенциалы могут описывать процессы поглощения.

Отыщем теперь решения от протяженных источников, учитывая принцип аддитивности действий отдельных объемов источника. Для запаздывающего скалярного потенциала имеем:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \frac{\rho \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r} d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \frac{\rho \left( x', y', z', t - \frac{r}{v} \right) dx' dy' dz'}{\sqrt{(t-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (7.18)$$

и вполне аналогично для векторного потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\mathbf{j} \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r} d\tau. \quad (7.19)$$

Подобным же образом для опережающих потенциалов имеем:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \frac{\rho \left( t + \frac{r}{v} \right)}{r} d\tau, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\mathbf{j} \left( t + \frac{r}{v} \right)}{r} d\tau. \quad (7.20)$$

В заключение можно сделать следующие выводы. Исходные положения электродинамики дают возможность объяснить процесс изучения поля при помощи специальных частных, но точных решений исходных уравнений в виде запаздывающих потенциалов.

Однако объяснение излучения не является полным, так как метод получения решения в виде запаздывающих потенциалов не выявляет условий выбора именно этих частных решений, а не других. Такие условия должны существовать, поскольку излучение в виде запаздывающих потенциалов представляет необратимое явление, исходные же уравнения обратимы во времени.

Сама постановка вопроса — по заданным зарядам и токам определить поле излучения — еще не предопределяет однозначный ответ, так как задача решается неоднозначно: имеются решения в виде опережающих потенциалов; кроме того, в такой постановке задачи отсутствует учет обратного влияния самого излучения на распределение и величину зарядов и токов. Однако теория не включает в себя динамического описания этого влияния и поэтому не в состоянии без привлечения новых понятий и допущений устранить эти недостатки.

В свете сказанного очевидно, что важно выяснить основания выбора того или иного частного решения. Для этой цели мы должны рассмотреть более последовательно методы решения неоднородных волновых уравнений.



**§ 4. Метод решения неоднородного волнового уравнения, опирающийся на формулу Грина. Формула Кирхгофа**

Этот метод заключается в сведении неоднородного волнового уравнения к интегральному уравнению, содержащему интегралы от неизвестной функции и ее производных по некоторой ограничивающей объем поверхности.

Ограничимся рассмотрением скалярного уравнения

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho,$$

поскольку уравнения для компонент векторного потенциала вполне аналогичны.

Используем формулу Грина

$$\int_V (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi) d\tau = \oint_S \left( \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) ds,$$

имеющей место для двух произвольных, дважды дифференцируемых функций  $\varphi$  и  $\psi$ . Выберем за функцию  $\psi$  частное решение волнового уравнения в виде сферической волны, сходящейся к стoku в начале координат

$$\psi = \frac{f\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r},$$

где

$$f(t + t') = \delta(t + t'), \quad t' = \frac{r}{v}$$

всюду, за исключением начала координат, где имеется особенность.

За функцию  $\varphi$  примем искомое решение исходного неоднородного волнового уравнения. Проанализируем левую часть формулы Грина

$$A(t) = \int_V (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi) d\tau = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \int_V \rho\psi d\tau + \frac{1}{v^2} \int_V \left( \psi \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \varphi \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \right) d\tau,$$

где за объем  $V$  примем объем между внешней поверхностью  $S$  и сферой  $S'$  с центром в особенности с координатами  $x', y', z'$  (рис. 36). Используя свойства  $\delta$ -функции, содержащейся в вспомогательной функции  $\psi$ , и тождество

$$\psi \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \varphi \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \left( \psi \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial t} \right),$$

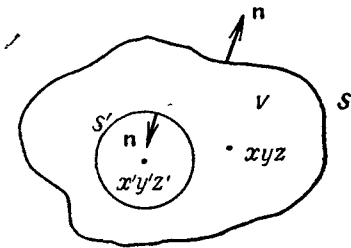


Рис. 36.

имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(t) dt = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V \frac{1}{r} \delta(t+t') \rho(x, y, z, t) d\tau + \\ + \frac{1}{v^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\tau = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \int_V \frac{\rho(x, y, z, -t')}{r} d\tau + \\ + \left[ \frac{1}{v^2} \int_V \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\tau \right]_{-\infty}^{+\infty},$$

поскольку

$$\delta(t+t') \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, \quad \frac{d}{dt} \delta(t+t') \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0;$$

второй интеграл в правой части исчезает, и мы получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(t) dt = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \int_V \frac{\rho(x, y, z, -t')}{r} d\tau.$$

Перейдем к рассмотрению поверхностного интеграла в формуле Грина. Интегрирование распространяется по поверхностям  $S$  и  $S'$ . Обозначим

$$B(t) = \oint_{S'} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS',$$

причем за поверхность  $S'$  выберем сферу.

Имеем:

$$\oint_{S'} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \oint_{S'} \frac{1}{r} \delta\left(t + \frac{r}{v}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{1}{r} \delta\left(t + \frac{r}{v}\right) \oint_{S'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds,$$

так как на поверхности сферы  $r = \text{const}$ . По теореме о среднем

$$\oint_{S'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds' = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} \oint_{S'} ds' = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} 4\pi r^2,$$

где  $\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}$  — значение  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , взятое в некоторой из точек сферы. Переходим теперь к пределу, стягивая сферу к точке особенности функции  $\psi$ . Полагая, что  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  есть непрерывная функция во всех точках объема и что в  $\delta$ -функции еще не осуществлен переход к пределу

(понимаем  $\delta$ -функцию размытой — без особенностей; см. замечание на стр. 73) так, чтобы имело место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 0} \delta \left( t + \frac{r}{v} \right) r = 0,$$

получаем:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{S'} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds' = \lim_{r \rightarrow 0} \delta \left( t + \frac{r}{v} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} 4\pi r^2 = 0.$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} - \int_{S'} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds' &= \oint_{S'} \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \delta \left( t + \frac{r}{v} \right) \right) ds' = \\ &= \left\{ -\frac{1}{r^2} \delta \left( t + \frac{r}{v} \right) + \frac{1}{r} \delta' \left( t + \frac{r}{v} \right) \frac{1}{v} \right\} \oint_{S'} \varphi ds' = \\ &= \left\{ -\frac{1}{r^2} \delta \left( t + \frac{r}{v} \right) + \frac{1}{r} \delta' \left( t + \frac{r}{v} \right) \frac{1}{v} \right\} \bar{\varphi} 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Переходя и здесь к пределу  $r \rightarrow 0$  и используя опять те же предположения, получим:

$$- \oint_{S'} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds' = -4\pi \varphi(x', y', z', t) \delta(t).$$

Итак,

$$B(t) = -4\pi \varphi(x', y', z', t) \delta(t).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(t) dt = -4\pi \varphi(x', y', z', 0).$$

Объединим результат анализа левой и правой частей формулы Грина:

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi}{\varepsilon} \int_V \frac{\rho(x, y, z, -t')}{r} d\tau &= -4\pi \varphi(x', y', z', 0) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \oint_{S'} \left\{ \frac{\delta \left( t + \frac{r}{v} \right)}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \delta \left( t + \frac{r}{v} \right) \right) \right\} ds. \end{aligned}$$

Полученное соотношение представляет другую форму исходного дифференциального уравнения, и поскольку неизвестная функция стоит под знаком интеграла, это соотношение играет роль

интегрального уравнения. Упростим правую часть, воспользовавшись свойствами  $\delta$ -функции. Имеем выражения:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t+t')}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dt = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{t=-t'}; \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \delta(t+t') \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dt = - [\varphi]_{t=-t'} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right); \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} \delta \left( t + \frac{r}{v} \right) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \frac{1}{r} \delta' \left( t + \frac{r}{v} \right) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{r}{v} \right) dt = \\ & = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{t=-t'} \frac{1}{vr} \frac{\partial r}{\partial n}. \end{aligned}$$

Здесь допущена следующая непоследовательность: мы переставили порядок интегрирования по  $t$  и по поверхности сферы, что недопустимо ввиду наличия под знаком интеграла функции, имеющей особенность (содержащей  $\delta$ -функцию). Однако, как мы уже подчеркивали ранее, приходится в таких случаях  $\delta$ -функцию понимать как размытую функцию, удовлетворяющую необходимым условиям непрерывности. Возникающая здесь ситуация характерна для всех методов, использующих  $\delta$ -функцию. Вычисления достигают цели, если только в конце вычислений совершать предельный переход к истинной  $\delta$ -функции.

Окончательно, таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(x', y', z', 0) = & \frac{1}{v} \int_V \frac{\rho(x, y, z, -t')}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{t=-t'} - \right. \\ & \left. - [\varphi]_{t=-t'} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{t=-t'} \frac{1}{vr} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} ds. \end{aligned}$$

От значения функции в момент  $t=0$  мы можем перейти к любому моменту времени  $t$ , производя вычисления не со вспомогательной функцией  $\delta[t + (t' + 0)]$ , а с функцией  $\delta(t + t' - \tau)$ . Поэтому сместим начало отсчета

$$\begin{aligned} 0 & \rightarrow 0 + t, \\ -t' & \rightarrow -t' + t = t - \frac{r}{v}. \end{aligned}$$

Заметим в связи с этим, что исходное волновое уравнение инвариантно относительно смещения начала отсчета времени (содержит производную по времени), как и все произведенное вычисление.

Полученная формула может быть записана так:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{v} \int_V \frac{\rho(x', y', z', t - \frac{r}{v})}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{t \rightarrow t - \frac{r}{v}} - \left[ \varphi \right]_{t \rightarrow t - \frac{r}{v}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{t - \frac{r}{v}} \frac{1}{vr} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} ds, \quad (7.21)$$

где введено обозначение

$$[\varphi]_{t - \frac{r}{v}} = \varphi \left( x, y, z, t - \frac{r}{v} \right),$$

т. е. функции  $\varphi$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  взяты для запаздывающего момента времени  $t - \frac{r}{v}$ .

Обсудим полученный результат. Строго говоря, соотношение (7.21) не есть еще решение, поскольку неизвестная функция стоит под знаком поверхностного интеграла.

Совершенно аналогичную формулу мы получим, если при вычислении выберем за вспомогательную функцию не  $\frac{\delta \left( t + \frac{r}{v} \right)}{r}$ , а  $\frac{\delta \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r}$ , только всюду вместо запаздывающего аргумента  $t - \frac{r}{v}$  появится опережающий  $t + \frac{r}{v}$ , а член, содержащий производную по времени, изменит знак.

Преимущество изложенного метода заключается в том, что интегральное уравнение выявляет условия, при которых можно ограничиться запаздывающими потенциалами. Для этого необходимо опустить поверхностный интеграл. Обычное рассуждение для обоснования такой существенной процедуры заключается в следующем. Если мы выберем поверхность перед фронтом волны, распространяющейся от источника, то на такой поверхности поле должно отсутствовать, и поэтому можно положить

$$[\varphi]_t = 0; \quad \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_t = 0; \quad \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_t = 0;$$

значения этих величин для предыдущего момента времени  $t - \frac{r}{v}$  также будут равны нулю, поскольку фронт волны, не достигнув этой поверхности к моменту  $t$ , тем более не достигает ее в момент  $t - \frac{r}{v}$ , что и обеспечивает равенство нулю всего поверхностного интеграла. Следует подчеркнуть, что такое объяснение мало убедительно, так как то, что нужно объяснить — сам факт излучения и наличие фронта как следствие теории, здесь предполагается и кладется

в основу, а не выводится. Будет точнее считать, что существование поверхности, на которой поля отсутствуют для любого момента времени, является необходимым условием для появления излучения. Отметим, что это условие радикально, так как требуется не приближительное равенство нулю полей на границе, а точное их исчезновение. В самом деле, если предположить, что поля на выбранной поверхности не равны нулю, хотя и имеют малые значения, то каждая точка поверхности может быть рассматриваема как центр излучения новых волн, которые при соответствующем соотношении фаз колебаний могут дать внутри рассматриваемого объема большую амплитуду вследствие фокусировки и, таким образом, сильно смогут исказить в этой точке тот результат, который получается при точном приравнении поверхностного интеграла к нулю.

Таким образом, мы приходим к результату, что решение проблемы излучения требует дополнительной гипотезы, не содержащейся в рамках исходных законов электродинамики. Эта гипотеза, в частности, требует строгого отсутствия флуктуаций поля в конечных областях пространства, поскольку, как указывалось, требуется точное исчезновение полей на границе, которая может перемещаться с течением времени.

Является важным выяснение вопроса, при каких начальных условиях можно использовать только запаздывающие потенциалы.

Классический вывод формулы (7.21) явно не вскрывает этих условий. Кроме того, в методе замаскировано условие, ведущее к выделению направления оси времени, поскольку, как подчеркивалось ранее, волновое уравнение симметрично относительно знака  $u$  времени, а решение же в виде запаздывающих потенциалов предопределило односторонне протекающий процесс.

Для устранения указанных недостатков используем другой метод решения волнового уравнения.

### § 5. Запаздывающие и опережающие потенциалы как решения задачи Коши

Будем искать решение волнового уравнения

$$\Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho \quad (7.22)$$

методом разложения всех фигурирующих в уравнении функций в ряды по некоторой замкнутой системе нормированных и ортогональных функций

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= \sum_k \varphi_k(t) \Phi_k(x, y, z); \\ \rho(x, y, z, t) &= \sum_k \rho_k(t) \Phi_k(x, y, z), \end{aligned} \quad (7.23)$$

составляющие вектора  $\mathbf{k}$ , т. е.  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ , могут принимать только значения, пропорциональные целочисленным (как положительным, так и отрицательным) значениям  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ . Функции  $\Phi_{\mathbf{k}}$  зависят только от координат и удовлетворяют условиям нормировки и ортогональности

$$\int_V \Phi_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}'}^+ d\tau = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} 0, & \mathbf{k} \neq \mathbf{k}', \\ 1, & \mathbf{k} = \mathbf{k}'. \end{cases} \quad (7.24)$$

Амплитуды разложения  $\varphi_{\mathbf{k}}(t)$ ,  $\rho_{\mathbf{k}}(t)$  зависят только от времени. Физически подобные разложения реальны, поскольку существуют приборы, дающие возможность измерять амплитуды подобных разложений. Так, например, спектральные аппараты разлагают функции в интеграл Фурье с экспериментально измеряемыми амплитудами.

Выберем за функции  $\Phi_{\mathbf{k}}$  плоские монохроматические волны:

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

$$\left( k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} n_z \right);$$

здесь  $L$  — искусственно вводимый параметр, определяющий линейные размеры пространственной области. В конечном результате мы должны положить  $L \rightarrow \infty$ . Такие функции  $\Phi_{\mathbf{k}}$  удовлетворяют условиям нормировки и ортогональности:

$$\int_{L^3} \Phi_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}}^+ d\tau = \int_{L^3} \frac{1}{L^3} d\tau = 1,$$

$$\int_{L^3} \Phi_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}'}^+ d\tau = \frac{1}{L^3} \int_0^L e^{i(k_x - k'_x)x} dx \cdot \int_0^L e^{i(k_y - k'_y)y} dy \cdot \int_0^L e^{i(k_z - k'_z)z} dz =$$

$$= \frac{1}{L} \frac{e^{i(k_x - k'_x)L} - 1}{i(k_x - k'_x)} \cdot \frac{1}{L} \frac{e^{i(k_y - k'_y)L} - 1}{i(k_y - k'_y)} \cdot \frac{1}{L} \frac{e^{i(k_z - k'_z)L} - 1}{i(k_z - k'_z)}.$$

Поскольку, далее,  $e^{i(k_x - k'_x)L} = e^{i \frac{2\pi}{L} (n_x - n'_x)L} = 1$ , так как  $n_x$  и  $n'_x$  по условию целые числа, и  $n_x \neq n'_x$ , находим:

$$\int_V \Phi_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}'}^+ d\tau = 0 \quad (\text{для } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}').$$

Замечаем, что использованные функции  $\Phi_{\mathbf{k}}$  суть решения краевой

задачи

$$\Delta \Phi_{\mathbf{k}} + k^2 \Phi_{\mathbf{k}} = 0, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

с граничными условиями

$$\Phi_{\mathbf{k}}(x, y, z) = \Phi_{\mathbf{k}}(x + L, y + L, z + L).$$

Эти условия являются условиями трехмерной периодичности с периодом  $L$ . Тот факт, что использованные функции являются решением краевой задачи указанного типа, гарантирует замкнутость системы функций  $\Phi_{\mathbf{k}}$  и, следовательно, возможность разложения произвольной функции  $\varphi$  с интегрируемым квадратом

$$\int_{L^3} \varphi \varphi^+ d\tau < \infty$$

в ряд по указанным функциям.

Теперь займемся преобразованием дифференциального уравнения в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд  $\varphi_{\mathbf{k}}(t)$ .

Подставив предполагаемое решение в виде ряда в исходное волновое уравнение, получаем:

$$\sum_{\mathbf{k}} (\ddot{\varphi}_{\mathbf{k}} + k^2 v^2 \varphi_{\mathbf{k}}) \Phi_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{4\pi}{\varepsilon} v^2 \rho_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}}.$$

Умножим это уравнение справа и слева на  $\Phi_{\mathbf{k}}^+$  и проинтегрируем по объему  $L^3$ :

$$\sum_{\mathbf{k}} (\ddot{\varphi}_{\mathbf{k}} + k^2 v^2 \varphi_{\mathbf{k}}) \int_{L^3} \Phi_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}}^+ d\tau = \sum_{\mathbf{k}} \frac{4\pi v^2}{\varepsilon} \rho_{\mathbf{k}}(t) \int_{L^3} \Phi_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}}^+ d\tau.$$

Учитывая условие ортогональности и нормировки, получим:

$$\ddot{\varphi}_{\mathbf{k}} + k^2 v^2 \varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi v^2}{\varepsilon} \rho_{\mathbf{k}}, \quad (7.25)$$

т. е. получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных амплитуд  $\varphi_{\mathbf{k}}$ .

Таким образом, в излагаемом методе определение поля в каждой точке пространства и времени свелось к определению амплитуд  $\varphi_{\mathbf{k}}$  как функций времени.

Уравнению (7.25) можно дать следующую физическую трактовку: поле представляет собой бесконечную счетную совокупность несвязанных осцилляторов с разными частотами (рис. 37)

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = k^2 v^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) v^2,$$



где все  $n_x, n_y, n_z$  целые как положительные, так и отрицательные числа. Источники заряда для скалярного потенциала и токи для векторного потенциала играют роль внешней силы, действующей на осцилляторы.

Такая физическая трактовка приводит к наличию многих решений волнового уравнения в зависимости от начальных условий. Если, например, в начальный момент времени осцилляторы поля не возбуждены  $\varphi_k(0) = 0$ , поле отсутствует, то наличие внешней силы поведет к возникновению их колебаний и как следствие к появлению поля в окружающем источнике пространстве, т. е. к излучению. Если же в начальный момент времени осцилляторы возбуждены, то наличие внешней силы приведет к перераспределению амплитуд колебаний осцилляторов и в этом случае ясно, что ограничиться только одними запаздывающими потенциалами без привлечения решений однородного уравнения явно недостаточно.

Может случиться, что возбужденные осцилляторы в начальный момент времени будут терять энергию колебаний за счет поглощения ее источником; такой процесс должен описываться скорее опережающим решением, чем запаздывающим. Уточним эту картину путем решения системы (7.25). Общее решение уравнений осциллятора, если в начальный момент заданы  $\varphi_k$  и  $\dot{\varphi}_k$  при  $t = t_0$ , как известно, имеет вид

$$\varphi_k(t) = A_k \cos kvt + B_k \sin kvt + \int_{t_0}^t \frac{4\pi v^2}{\varepsilon} \rho_k(\tau) \frac{\sin kv(t-\tau)}{kv} d\tau, \quad (7.26)$$

где члены с  $\cos kvt$  и  $\sin kvt$  обозначают свободные колебания осциллятора, а член с интегралом — вынужденные колебания. Амплитуды  $A_k$  и  $B_k$  определяются из двух начальных условий на амплитуду осциллятора и скорость ее изменения. В случае, если задается состояние движения осциллятора не в начальный момент времени, а в некоторый конечный момент  $t = t_1$ , причем подлежит исследованию весь процесс для  $t \leq t_1$ , то решение имеет вполне аналогичный вид, где только  $t_0$  заменяется на  $t_1$

$$\varphi_k(t) = A_k \cos kvt + B_k \sin kvt + \int_{t_1}^t \frac{4\pi v^2}{\varepsilon} \rho_k(\tau) \frac{\sin kv(t-\tau)}{kv} d\tau. \quad (7.27)$$

Важно отметить, что при определенных условиях каждое из решений ( $t > t_0$  и  $t < t_1$ ) может быть продолжено на всю область оси времени, но это продолжение требует аналитичности всех фигурирую-

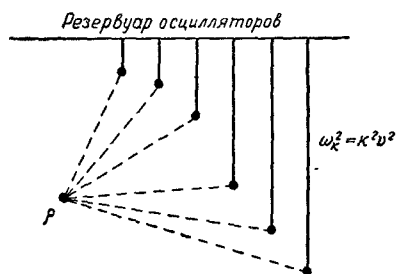


Рис. 37.

щих в уравнении функций; это является настолько сильно ограничивающим условием, что желательно его не вводить и рассматривать решения (7.26) и (7.27) как самостоятельные решения, приспособленные для различных целей.

Легко проверить непосредственной подстановкой, что, помимо указанных двух решений, имеются и другие. Например, решения

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{t_0}^t \frac{4\pi v^2}{\varepsilon} \rho_k(\tau) \frac{\sin kv(t-\tau)}{kv} d\tau + \int_{t_1}^t \frac{4\pi v^2}{\varepsilon} \rho_k(\tau) \frac{\sin kv(t-\tau)}{kv} d\tau \right\}$$

являются аналогом полусуммы запаздывающих и опережающих потенциалов. Последнее решение в случае  $t_0 \rightarrow -\infty$ ,  $t_1 \rightarrow +\infty$  удобно для выявления периодических процессов с невыделенным начальным моментом времени.

Рассмотрим частный случай начальных условий:

$$\varphi_k(t_0) = 0, \quad \dot{\varphi}_k(t_0) = 0$$

для любого значения  $k$ . Эти условия будут удовлетворены, если в выражении (7.26)  $A_k = B_k = 0$ . Тогда

$$\varphi_k(t) = \int_{t_0}^t \frac{4\pi v^2}{\varepsilon} \rho_k(\tau) \frac{\sin kv(t-\tau)}{kv} d\tau.$$

Следовательно,

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_k \Phi_k \int_{t_0}^t \frac{4\pi v^2}{\varepsilon} \rho_k(\tau) \frac{\sin kv(t-\tau)}{kv} d\tau \quad \text{для } t \geq t_0.$$

Аналогично

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_k \Phi_k \int_{t_1}^t \frac{4\pi v^2}{\varepsilon} \rho_k(\tau) \frac{\sin kv(t-\tau)}{kv} d\tau \quad \text{для } t \leq t_1,$$

если, конечно, теперь заданы условия  $\dot{\varphi}_k(t_1) = 0$  и  $\dot{\varphi}_k(t_1) = 0$ .

Наша задача заключается в преобразовании полученных выражений, если это окажется возможным, к обычному виду запаздывающего и опережающего потенциалов.

Перейдем от суммирования к интегрированию. Разобьем все члены суммы на группы с настолько близкими значениями  $k$ , что сумму членов в каждой группе можно считать пропорциональной числу членов группы  $\Delta n$ , так что суммирование по  $k$   $\left( \sum_k \dots \right)$  преобразуется к суммированию по  $n$  с учетом веса  $\Delta n$   $\left( \sum_n \Delta n \dots \right)$ , т. е.

производится суммирование уже по отдельным группам, причем под символом  $\Delta \mathbf{n}$  подразумевается

$$\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z.$$

При  $L \rightarrow \infty$  значения  $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$  могут быть как угодно малыми и, следовательно, можно положить:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{n} &\rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d\mathbf{k}, \\ \sum_{\Delta \mathbf{n}} (\dots)_{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{n} &\rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int (\dots)_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Выразим амплитуду  $\rho_{\mathbf{k}}(t)$  непосредственно через функцию  $\rho(x, y, z, t)$ :

$$\rho(x, y, z, t) = \sum_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}}(t) \Phi_{\mathbf{k}}(x, y, z).$$

Для этого умножим справа и слева на  $\Phi_{\mathbf{k}}^+$  и интегрируем, тогда получим:

$$\rho_{\mathbf{k}}(t) = \int_{L^3} \rho(x', y', z', t) \Phi_{\mathbf{k}}^+(x', y', z') dx' dy' dz',$$

причем здесь мы опять воспользовались условием нормировки и ортогональности. Конкретизируем вид функций  $\Phi_{\mathbf{k}}$ :

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= \\ &= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \left(\frac{1}{L^{3/2}}\right)^2 \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} \int_{t_0}^t d\tau \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \rho(x', y', z', \tau) \times \\ &\quad \times \frac{\sin k\nu(t-\tau)}{k\nu} dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить указанный интеграл, переставим порядок интегрирования по  $\mathbf{k}$  и  $\tau$ . Тогда задача сводится к вычислению интеграла

$$D = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{\sin k\nu(t-\tau)}{k\nu} d\mathbf{k}. \quad (7.28)$$

В сферической системе координат

$$d\mathbf{k} = k^2 \sin \theta dk d\theta d\varphi,$$

$$D = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\sin k\nu(t-\tau)}{k\nu} k^2 dk \int_0^\pi e^{i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \cos \theta} \sin \theta d\theta.$$

Далее,

$$\int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \sin \theta d\theta = \int_{-1}^{+1} e^{iaz} dz = 2 \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2ia} = 2 \frac{\sin a}{a},$$

следовательно,

$$D = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \sin kv (t - \tau) \sin k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \frac{dk}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (7.29)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \sin kv (t - \tau) \sin k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos kv \left( t - \tau - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v} \right) - \cos kv \left( t - \tau + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v} \right) \right\}, \end{aligned}$$

имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \int_0^\infty \cos kv x dk &= \frac{1}{v} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon kv} \cos kv x dk = \\ &= \frac{1}{v} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{\pi}{v} \delta(x); \end{aligned}$$

здесь сделана подстановка:  $x = t - \tau - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}$ .

Несобственному интегралу от  $\cos$  в полубесконечном промежутке мы придали здесь смысл предельного выражения от сглаженной функции путем введения множителя  $e^{-\varepsilon kv}$ . Такая операция, как мы подчеркивали ранее, соответствует физическому требованию — понимать все особенности в электродинамике как только предельные от сглаженных функций.

Таким образом, окончательно исследуемый интеграл ( $D(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - \tau)$ ) выражается через  $\delta$ -функции так:

$$\begin{aligned} D &\doteq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty e^{ik(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \frac{\sin kv(t - \tau)}{kv} dk = \\ &= \frac{1}{4\pi v^2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left\{ \delta \left( t - \tau - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v} \right) - \delta \left( t - \tau + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\delta \left( t - \tau - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v} \right)$$

имеет особенность, лежащую в прошлом относительно момента  $t$ :

$$\tau = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v},$$

тогда как вторая  $\delta$ -функция

$$\delta \left( t - \tau + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v} \right)$$

имеет особенность в будущем относительно  $t$ :

$$\tau = t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}.$$

Итак, имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) = \\ = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x', y', z', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right) d\tau dx' dy' dz' \quad (t > t_0), \end{aligned} \quad (7.30)$$

здесь мы опустили вторую из  $\delta$ -функций, поскольку ее особенность лежит вне области интегрирования, и следовательно, окончательно:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho\left(x', y', z', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' dz',$$

т. е. мы пришли к обычной форме запаздывающего потенциала. Для

$$\varphi = \int_{t_1}^t \int \frac{\rho(x', y', z', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - \tau + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right) d\tau dx' dy' dz'$$

удерживается, наоборот, только функция с особенностью, лежащей в момент времени, больший момента  $t$ , что и приводит к обычной форме опережающего потенциала.

В итоге приходим к следующим выводам.

Общая форма запаздывающих потенциалов получается только как решение задачи Коши с начальными условиями

$$\varphi(x, y, z, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

и для  $t \geq 0$ , т. е. отсутствие поля излучения в начальный момент времени во всем пространстве, включая и пространство, занятое источником, дает решение в форме запаздывающих потенциалов. Ценность полученного результата заключается в выяснении конкретных (весьма жестких) условий, при которых в качестве решения получается излучение.

Опережающими потенциалами нужно пользоваться в тех случаях, когда в конечный момент времени гарантируется полное отсутствие полей во всех точках пространства:

$$\varphi(x, y, z, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

причем решение получается для  $t \leq 0$ .

Условие, обеспечивающее решение волнового уравнения в виде запаздывающих потенциалов, заключается в физической выделяемости начального момента времени, так как необходимо, чтобы поле

полностью отсутствовало в начальный момент времени во всех точках пространства, включая и точки, где находятся источники. Последнее условие реализуется, если при  $t < 0$  в пространстве отсутствуют заряды и токи и только для  $t \geq 0$  создаются переменные со временем источники поля за счет включения электродвижущих сил.

В технических и лабораторных условиях именно такая постановка задачи об излучении чаще всего возникает. Другое положение имеет место в микроскопической физике, где обычно не имеют возможности распорядиться зарядами и токами в атомах. Однако и здесь при известных условиях требование об отсутствии поля в начальный момент времени может быть понято. Если допустить, что заряды и токи в системе состоят аддитивно из двух частей — статической части, зависящей только от координат и не зависящей от времени, и собственно переменной части:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{\text{ст}}(x, y, z) + \delta\rho(x, y, z, t), \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}_{\text{ст}}(x, y, z) + \delta\mathbf{j}(x, y, z, t), \end{aligned}$$

тогда для потенциалов соответственно можно положить:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{\text{ст}}(x, y, z) + \delta\varphi(x, y, z, t), \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A}_{\text{ст}}(x, y, z, t) + \delta\mathbf{A}(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Если при  $t \leq 0$   $\delta\rho$  и  $\delta\mathbf{j}$  равным нулю, то и  $\delta\varphi$  и  $\delta\mathbf{A}$  равны нулю во всем пространстве при  $t = 0$ . Таким образом, условия излучения естественно реализуются в постановке задачи о переменном поле, которое создается возмущениями в стационарном распределении зарядов и токов. Это, однако, трудно понять в модели точечных зарядов с заданными пространственными траекториями движения. Квантовомеханическая задача об излучении как раз сводится к задаче возмущений в заданном непрерывном стационарном распределении зарядов и токов.

## § 6. Излучение от электрического и магнитного момента

Рассмотрим две типичные задачи на определение поля излучения, когда в качестве источника излучения выбрана система, характеризующаяся или электрическим моментом, например открытая линейная антенна (рис. 38, а), или магнитным моментом, например рамочная антенна (рис. 38, б). Предположим, что в обоих случаях возбуждается переменный ток

$$J = J_0 \cos \omega t,$$

причем антенна предполагается настолько короткой, что ток считается неизменным по всей ее длине. Такая антенна носит название элементарной антенны.

В первом случае электрический момент  $p = e(t)l$  будет изменяться за счет изменения заряда на одном из концов антенны (поскольку длина антенны фиксирована), причем, очевидно,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{de}{dt} l = Il.$$

Производная по времени электрического момента выражается непосредственно через заданный ток  $i$ , таким образом, электрический момент может быть положен в основу характеристики излучения.

Этот частный случай мы можем обобщить, вводя представление о распределении электрического момента в области, занятой источником. Предположим, что в каждой точке источника известен вектор поляризации  $\mathbf{P}(x, y, z, t)$ . Тогда электрический момент  $d\mathbf{p}$  элемента объема  $d\tau$  равен:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}d\tau.$$

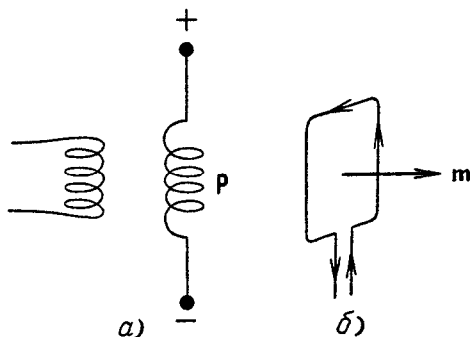


Рис. 38.

Полное излучение может быть охарактеризовано полным электрическим моментом системы:

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{P}d\tau,$$

однако это верно только при определенных условиях, которые необходимо будет выяснить.

Если задана рамка, то такая система, очевидно, не имеет электрического момента, так как электрический ток в этом случае можно считать замкнутым. Переменное поле, возбужденное рамкой, может быть охарактеризовано переменным по времени магнитным моментом  $\mathbf{m}$ :

$$\mathbf{m} = \frac{J}{c} \mathbf{sn},$$

поскольку ток  $J$  и векторная площадь рамки  $\mathbf{sn}$  считаются заданными.

Обобщая этот случай, можно считать заданным распределение в источнике вектора намагничивания

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M}d\tau, \quad \mathbf{m} = \int_V \mathbf{M}d\tau.$$

Итак, решим задачу определения поля излучения в первом случае по заданному вектору поляризации  $\mathbf{P}(x, y, z, t)$  и во втором

случае по заданному вектору намагничивания  $\mathbf{M}(x, y, z, t)$ . Исходными могут служить уравнения для потенциалов, лежащие в основе решения проблемы излучения:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho, \\ \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0;\end{aligned}\tag{7.31}$$

через эти потенциалы определяются поля

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Неудобство непосредственного применения этих формул заключается в несколько иной характеристике источников — через заряды и токи, тогда как в приведенной выше постановке задачи заданы вектор поляризации или вектор намагничивания. Поэтому прежде всего введем эти величины в исходные уравнения теории. Вспомним связь между зарядами и токами, с одной стороны, и вектором поляризации и вектором намагничивания, с другой:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_{\text{св}},\tag{7.32}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{j}_{\text{св}}$$

для первого случая и

$$\rho = 0,$$

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}\tag{7.33}$$

для второго случая.

Таким образом, для первого случая

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi &= 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}, \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

и для второго случая

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi &= 0, \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} &= -4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0,\end{aligned}$$

где  $\varphi$  можно положить тождественно равным нулю.



Сведем эти два типа уравнений практически к одному, вводя новый неизвестный вектор — электрический поляризационный потенциал  $\Pi_e$  и магнитный поляризационный потенциал  $\Pi_m$ .

Пусть для первого случая

$$\varphi = -\operatorname{div} \Pi_e, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi_e}{\partial t}, \quad (7.34)$$

тогда подстановка дает:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Pi_e &= 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Pi_e &= -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left\{ \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Pi_e + 4\pi \mathbf{P} \right\} &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Pi_e + 4\pi \mathbf{P} \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда видим, что эти два уравнения можно свести к одному

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Pi_e = -4\pi \mathbf{P}. \quad (7.35)$$

При этом условии на потенциалы

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \operatorname{div} \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi_e}{\partial t} - \frac{1}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \Pi_e}{\partial t} \equiv 0$$

тождественно удовлетворяется.

Для второго случая положим:

$$\varphi \equiv 0, \quad \mathbf{A} = \operatorname{rot} \Pi_m;$$

тогда подстановка дает:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Pi_m &= -4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \Pi_m &\equiv 0, \end{aligned}$$

или

$$\operatorname{rot} \left\{ \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Pi_m + 4\pi \mathbf{M} \right\} = 0.$$

Полученное уравнение удовлетворяется уравнением того же типа, как и для первого случая

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Pi_m = -4\pi \mathbf{M}, \quad (7.36)$$

где только вместо вектора поляризации стоит вектор намагничивания.

Проблема излучения решается, как мы видели, при помощи за-  
паздывающих потенциалов. Следовательно, поле излучения опреде-  
лено выражениями:

$$\Pi_e = \int_V \frac{P(x', y', z', t - \frac{r}{c})}{r} d\tau', \quad \Pi_m = \int_V \frac{M(x', y', z', t - \frac{r}{c})}{r} d\tau'.$$

С помощью поляризационных потенциалов напряженности полей  
определяются только процессом дифференцирования. Именно, для  
первого случая

$$\left. \begin{aligned} E &= -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = \left( \text{grad div} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Pi_e, \\ H &= \text{rot } A = \text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi_e}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

и для второго случая

$$\left. \begin{aligned} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi_m, \\ H &= \text{rot } A = \text{rot rot } \Pi_m. \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

Заметим, что второй случай принципиально отличается от первого  
тем, что для него поле всюду, включая и области пространства,  
занятого источником — чисто вихревое, так как дивергенции всех  
векторов, характеризующих поле, точно равны нулю:

$$\text{div } E = \text{div } H = 0,$$

в то время как в первом случае:

$$\text{div } E \neq 0, \quad \text{div } H = 0.$$

Однако в пространстве вне источника форма записей в этих двух  
случаях вполне симметрична, а именно:

$$\Delta \Pi_{e, m} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi_{e, m}}{\partial t^2},$$

причем для первого случая

$$\left. \begin{aligned} E &= (\text{grad div} - \Delta) \Pi_e = \text{rot rot } \Pi_e, \\ H &= \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \Pi_e}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

а для второго случая

$$\left. \begin{aligned} H &= \text{rot rot } \Pi_m, \\ E &= -\frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \Pi_m}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (7.40)$$

В обоих случаях поле вихревое; кроме того, напряженность электрического поля в первом случае совпадает с напряженностью магнитного поля, во втором случае, если одинаковы поляризаационные потенциалы, напряженность магнитного поля отличается лишь знаком от соответствующей напряженности электрического поля. Этой симметрией можно воспользоваться для определения поля в одном из случаев, если известно поле в другом. Например, найдя распределение поля от электрического диполя, мы автоматически находим распределение поля вокруг магнитного диполя, переставляя местами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  с последующим изменением знака у напряженности электрического поля.

Определим теперь в качестве важного примера поле вокруг электрического вибратора при упрощающих условиях  $r \gg l$  и  $\lambda \gg l$ , где  $l$  — линейные размеры области, занятой источником,  $\lambda$  — длина излучаемой волны.

Первое из этих условий является ограничением на пространственную область решения, второе — на характер колебательных процессов в самой излучающей системе.

Используя первое из условий, можем написать:

$$\mathbf{H}_e = \int_V \frac{\mathbf{P}(x', y', z', t - \frac{r}{c})}{r} d\tau' \approx \frac{1}{r_0} \int_V \mathbf{P}(x', y', z', t - \frac{r}{c}) d\tau',$$

где  $r_0$  — расстояние от точки наблюдения до некоторой фиксированной точки источника. Для того чтобы воспользоваться вторым из условий, предположим, что изменение по времени вектора поляризации осуществляется по закону

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0(x', y', z') e^{i\omega t}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}(x', y', z', t - \frac{r}{c}) = \mathbf{P}_0(x', y', z') e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}.$$

Тогда расстояние до любой точки источника можно записать в виде

$$r = r_0 + \delta r,$$

где  $\delta r$ , очевидно, не превышает линейных размеров источника.

Отсюда имеем:

$$e^{i\omega(t - \frac{r_0}{c} - \frac{\delta r}{c})} = e^{i\omega(t - \frac{r_0}{c})} \left( 1 - i\omega \frac{\delta r}{c} + \dots \right).$$

Если

$$\frac{\omega \delta r}{c} \approx \frac{2\pi l}{\lambda} \ll 1,$$

то можно ограничиться только первым членом разложения. Тогда

$$\begin{aligned}\Pi_e &= \frac{1}{r_0} \int_V \mathbf{P}(x', y', z', t - \frac{r}{c}) d\tau' \approx \\ &\approx \frac{1}{r_0} \int_V \mathbf{P}(x', y', z', t - \frac{r_0}{c}) d\tau' = \frac{1}{r_0} \mathbf{p}(t - \frac{r_0}{c}),\end{aligned}$$

где  $\mathbf{p}$  — полный электрический момент системы. Совершенно аналогичный результат имеет место и для магнитного вектора поляризации. Таким образом, получаем при условии  $r \gg l$ ,  $\lambda \gg l$

$$\Pi_e = \frac{\mathbf{p}(t - \frac{r}{c})}{r}, \quad \Pi_m = \frac{\mathbf{m}(t - \frac{r}{c})}{r},$$

т. е. поляризационные потенциалы представляют собой сферические волны, распространяющиеся от источника, как центра излучения.

Вычислим теперь поля

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \Pi_e, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \Pi_e}{\partial t}.$$

В сферической системе координат для произвольного вектора имеем:

$$\text{rot}_r \mathbf{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\varphi) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right],$$

$$\text{rot}_\theta \mathbf{a} = \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right],$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{a} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right].$$

Для нашего случая, выбирая сферическую систему (рис. 39) с началом в центре вибратора и направляя полярную ось сферической

системы параллельно направлению электрического момента  $\mathbf{a} = \mathbf{p}$ , имеем:

$$\Pi_r = \Pi \cos \theta,$$

$$\Pi_\theta = -\Pi \sin \theta,$$

$$\Pi_\varphi = 0$$

$$\left( \Pi = \frac{p(t - \frac{r}{c})}{r} \right).$$

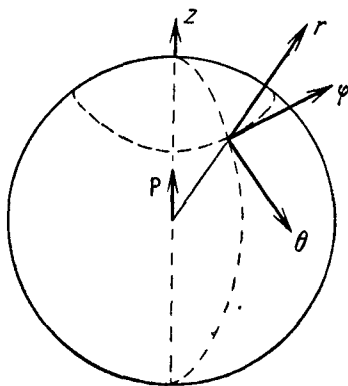


Рис. 39.

Вектор  $\Pi$  не имеет составляющей по  $\varphi$  и, кроме того, он не меняется при изменении  $\varphi$  вследствие симметрии системы относительно направления электрического момента  $\mathbf{p}$ , поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_r \Pi &= 0, \\ \operatorname{rot}_\theta \Pi &= 0, \\ \operatorname{rot}_\varphi \Pi &= \frac{1}{r} \left[ -\frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \Pi) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \Pi) \right] = -\sin \theta \frac{\partial \Pi}{\partial r}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$H_r = 0, \quad H_\theta = 0, \quad H_\varphi = -\sin \theta \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial r},$$

т. е. напряженность магнитного поля всегда направлена по параллелям.

Составим проекции  $\mathbf{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Pi$  в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \operatorname{rot}_\varphi \Pi) = -\frac{2 \cos \theta}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \operatorname{rot}_\varphi \Pi) = \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right), \\ E_\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Другими словами, напряженность электрического поля всегда лежит в плоскости меридиана. Следовательно, векторы электрического и магнитного поля осциллятора всегда перпендикулярны.

Конкретизируем полученные выражения для напряженности полей в предположении монохроматических колебаний осциллятора

$$\Pi = \mathbf{p}_0 \frac{e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r},$$

где  $\mathbf{p}_0$  — постоянный вектор, направленный по оси осциллятора. Здесь мы предположили, что с течением времени меняется только величина, но не направление вектора  $\Pi$ .

В указанном случае, производя дифференцирование, имеем:

$$\begin{aligned} H_r = H_\theta = 0, \quad H_\varphi &= \frac{i\omega}{c} \sin \theta \left( \frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c} \right) \Pi, \\ E_r &= 2 \cos \theta \left( \frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} \right) \Pi, \\ E_\theta &= \sin \theta \left( \frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Pi, \quad E_\varphi = 0. \end{aligned} \tag{7.41}$$

Отдельные члены в полученных выражениях для напряженности полей убывают с увеличением расстояния от осциллятора неодинаково

быстро; встречаются члены, по разному зависящие от  $r$ . Новым в сравнении со статическим случаем является появление членов, убывающих обратно пропорционально первой степени расстояния, что характерно для сферических волн  $\sim \frac{1}{r} e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}$ ; при переходе к статическому случаю эти члены исчезают, так как они содержат  $\omega$ , а в статическом случае  $\omega = 0$ .

Имеется зависимость от азимута  $\theta$ . В направлении оси осциллятора  $\theta = 0$  магнитная напряженность полностью исчезает. В этом направлении радиальная компонента электрического поля максимальна, а остальные две равны нулю.

Рассмотрим два крайних случая — поле вблизи вибратора и поле вдали от него. За меру сравнения необходимо выбрать характерную длину, входящую в указанную задачу в качестве параметра  $\frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$ , где  $\lambda$  — длина излучаемых волн.

Таким образом, под близкой зоной будем понимать область пространства вокруг осциллятора, где  $r \ll \lambda$ . Под дальней зоной, которую называют волновой зоной, будем понимать область, где  $r \gg \lambda$ . Для близкой зоны, опуская члены, содержащиеся  $\lambda$  в знаменателе, имеем:

$$H_{\varphi} = \frac{i\omega}{c} \sin \theta \frac{p(t - \frac{r}{c})}{r^2}. \quad (7.42)$$

В том же приближении

$$p(t - \frac{r}{c}) = p_0 e^{i\omega t} \left(1 - \frac{i\omega r}{c} + \dots\right) \approx p_0 e^{i\omega t} = p(t).$$

Следовательно,

$$H_{\varphi} = \frac{i\omega}{c} \sin \theta \frac{p(t)}{r^2}.$$

Поскольку для монохроматических колебаний

$$i\omega p(t) = \frac{\partial p}{\partial t},$$

имеем:

$$H_{\varphi} = \frac{\sin \theta}{cr^2} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Для линейной антенны  $\frac{dp}{dt} = Jl$ , где  $l$  — длина антенны,  $J$  — сила тока в антенне. Следовательно,

$$H_{\varphi} = \frac{\sin \theta}{cr^2} Jl,$$

или в векторной форме, учитывая, что  $H_r = H_{\theta} = 0$ ,

$$\mathbf{H} = \frac{J}{c} \frac{[\mathbf{lr}]}{r^3}.$$

Но это есть именно то выражение магнитного поля, создаваемого элементом длины  $l$  тока с силой тока, равной  $J$ , которые мы получили ранее для статического и квазистатического случаев.

Для напряженности электрического поля в близкой зоне

$$E_r = 2 \cos \theta \frac{p(t)}{r^3},$$

$$E_\theta = \sin \theta \frac{p(t)}{r^3},$$

что совпадает с электростатическим полем электрического момента. Итак, поле колеблющегося со временем осциллятора в близкой зоне совпадает с квазистационарным полем с точностью до членов порядка  $\frac{r}{\lambda}$ .

Рассмотрим теперь поведение поля в волновой зоне. В этом случае в общих выражениях мы должны удержать только члены, наименее убывающие с расстоянием, т. е. члены с  $\frac{1}{r}$ :

$$\left. \begin{aligned} H_\varphi &= \frac{(i\omega)^2}{c^2} \sin \theta \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{\sin \theta}{c^2 r} \frac{\partial^2 p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t^2}, \\ E_\theta &= \frac{(i\omega)^2}{c^2} \sin \theta \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{\sin \theta}{c^2 r} \frac{\partial^2 p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} (7.43)$$

$$H_r = H_\theta = E_r = E_\varphi = 0.$$

Отсюда можно сделать следующие выводы.

В волновой зоне имеются сферические волны, распространяющиеся от источника.

Напряженности электрического и магнитного поля перпендикулярны друг к другу, к радиус-вектору  $r$ , проведенному от осциллятора к данной точке поля, т. е. электромагнитные волны поперечны.

Напряженности электрического поля одинаковы по амплитуде и колеблются в одинаковой фазе.

Определим величину и направление вектора Умова — Пойнтинга в волновой зоне. Поскольку  $E \perp r$ ,  $H \perp r$ , то вектор  $S = \frac{c}{4\pi} [EH]$  параллелен  $r$ . Далее, так как  $E \perp H$  и  $|E| = |H|$ , то

$$|S| = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi} E^2 = \frac{c}{4\pi} H^2.$$

Установим связь величины вектора Умова — Пойнтинга с плотностью электромагнитной энергии в волновой зоне. Имеем:

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) = \frac{1}{4\pi} E^2 = \frac{1}{4\pi} H^2.$$

Следовательно,

$$\mathbf{S} = c\omega \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Эта зависимость наиболее просто интерпретирует смысл вектора Умова — Пойнтинга как потока электромагнитной энергии со скоростью  $c$ .

Выясним зависимость потока энергии от угла  $\theta$ . Используя выражение для полей в волновой зоне (7.43), имеем:

$$S = \frac{\sin^2 \theta}{4\pi c^3 r^2} \left| \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right|^2. \quad (7.44)$$

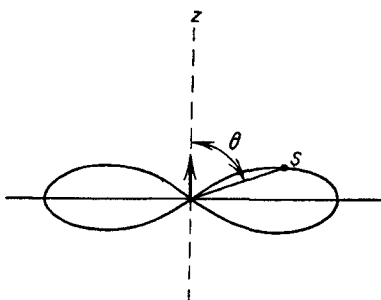


Рис. 40.

Полярная диаграмма этой зависимости (рис. 40) наглядно указывает, что в направлении оси осциллятора энергия не излучается. Излучение максимально в направлении, перпендикулярном к оси осциллятора.

Полную энергию, излучаемую осциллятором в единицу времени во всех направлениях, мы получим, проинтегрировав вектор Умова — Пойнтинга по сфере с радиусом  $r$

$$\Sigma = \oint_S \mathbf{S} ds = \frac{c}{4\pi} \frac{\left| \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right|^2}{c^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta.$$

Замечая, что

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3},$$

получаем:

$$\Sigma = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right|^2, \quad (7.45)$$

т. е. полная энергия излучения определяется квадратом второй производной по времени от электрического момента системы.

Введем величину полной энергии, усредненной по периоду колебаний поля. Полагая  $p = p_0 \cos \omega t$ , имеем:

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{T} \int_0^T \Sigma(t) dt = \frac{2\omega^4}{3c^3} p_0^2 \overline{\cos^2 \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)},$$

Далее, так как

$$\overline{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{2},$$

то окончательно:

$$\bar{\Sigma} = \frac{\omega^4}{3c^3} p_0^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \frac{p_0^2}{3c^3}. \quad (7.46)$$



Излучаемая энергия зависит от частоты вибратора или длины излучаемых волн. В формуле (7.46) проявляется характерная зависимость от длины волны  $\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$ .

Рассмотрим теперь поле, создаваемое переменным магнитным моментом или рамочной антенной. Как ранее было отмечено, ввиду симметрии полей, создаваемых электрическим и магнитным моментом, от одного случая можно перейти к другому, переставляя для этого напряженности полей с последующим изменением знака. Именно для электрического диполя мы имели:

$$\begin{aligned} H_{\varphi} &= \frac{i\omega}{c} \sin \theta \left( \frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c} \right) \Pi_e, \\ E_r &= 2 \cos \theta \left( \frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} \right) \Pi_e, \\ E_{\theta} &= \sin \theta \left( \frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Pi_e \\ &\quad \left( \Pi_e = \frac{p \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right). \end{aligned} \tag{7.47}$$

Производя перестановку  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$  и меняя в последующем знак у напряженности электрического поля, получим:

$$\begin{aligned} E_{\varphi} &= -\frac{i\omega}{c} \sin \theta \left( \frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c} \right) \Pi_m, \\ H_r &= 2 \cos \theta \left( \frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} \right) \Pi_m, \\ H_{\theta} &= \sin \theta \left( \frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Pi_m, \end{aligned} \tag{7.48}$$

где

$$\Pi_m = \frac{m \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r}.$$

Эти формулы и определяют напряженности полей переменного магнитного момента.

Итак, можно сделать выводы.

Электрическое поле всегда направлено по параллелям и исчезает при переходе к статическому случаю  $\omega = 0$ .

Магнитное поле всегда лежит в плоскостях меридианов и (в полной аналогии с полем электрического диполя) в ближней зоне ( $r \ll \lambda$ ) совпадает с полем магнитного диполя:

$$H_r = 2 \cos \theta \frac{m(t)}{r^3}, \quad H_{\theta} = \sin \theta \frac{m(t)}{r^3},$$

или элементарной рамки, поскольку

$$m = \frac{JS}{c}.$$

В волновой зоне

$$\begin{aligned} E_{\varphi} &= \frac{\omega^2}{c^2} \sin \theta \frac{m \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} = - \frac{\sin \theta}{c^2 r} \frac{\partial^2 m \left( t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t^2}, \\ H_{\theta} &= - \frac{\omega^2}{c^2} \sin \theta \frac{m \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} = \frac{\sin \theta}{c^2 r} \frac{\partial^2 m \left( t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (7.49)$$

здесь выражения отличаются от соответствующих выражений в случае для электрического диполя разными направлениями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (рис. 41).

Следует еще сделать ряд замечаний.

Расчет был проведен в предположении одинаковости тока по всей длине линейной или рамочной антенны. Если длина антенны

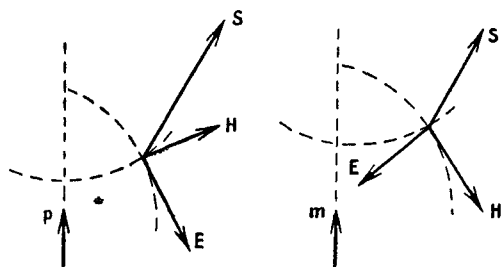


Рис. 41.

сравнима с длиной волны, ток нельзя считать одинаковым по величине по всей длине антенны, что имеет место в большинстве практических случаев. Однако, используя принцип аддитивности полей от разных элементов источника, можно, мысленно разделяя систему на большее число элементарных антенн и пользуясь полученными выше результатами, получить поле излучения для антенн конечной длины.

Учет конечности размеров поперечных сечений антенн в тех задачах, где это необходимо, несколько изменяет саму постановку вопроса об излучении. В этом случае необходимо решение задачи о распределении токов в проводнике при заданных сторонних электродвижущих силах и решение волновых уравнений, которое удовлетворяло бы условию непрерывности тангенциальной компоненты поля при переходе через поверхность.

Решение всей проблемы излучения, включая и частные случаи излучения осциллятора и рамочной антенны, было дано при прене-

брежении обратным действием излучения на источник. Наличие обратного действия следует уже из факта уноса энергии осциллятора излучаемыми электромагнитными волнами. Учет обратного действия требует конкретизации динамических законов, действующих в самом источнике. Эти законы, как правило, требуют учета новых физических факторов, помимо тех, которые учитываются в макроскопической электродинамике. Этот вопрос будет обсуждён во второй части (микроскопическая электродинамика).

### § 7. Излучение дипольных волн. «Игольчатое» излучение

Рассмотрим некоторые свойства излучения диполей, периодически расположенных на прямой линии. Будем предполагать, что размеры диполей малы в сравнении с длиной волны излучения. Тогда вектор поляризации можно выразить следующим образом:

$$P = \sum_n p_n(t) \delta(x - nd) \delta(y) \delta(z),$$

где суммирование произведено по всем диполям в единице объема,  $d$  — расстояние между диполями. Поляризационный потенциал

$$\Pi = \int_V \frac{P\left(t - \frac{r}{c}\right) dt}{r},$$

характеризующий поле излучения, на основании свойств  $\delta$ -функций выразится через сумму поляризационных потенциалов, создаваемых каждым диполем:

$$\Pi = \sum_n \frac{1}{r_n} p_n\left(t - \frac{r_n}{c}\right). \quad (7.50)$$

На расстояниях от цепочки длиной  $l$ , для которых  $r_n \gg l$ , можно рассматривать  $\frac{1}{r_n}$  как медленно меняющуюся функцию расстояния и вынести за знак суммы.

Система рассматриваемых диполей с переменными во времени электрическими моментами характеризуется совокупностью собственных частот колебаний. Каждый изолированный диполь колеблется с частотой  $\omega_0$ , но наличие связи между ними поведет к расщеплению собственной частоты несвязанных осцилляторов, поэтому произвольное распределение электрических моментов вдоль рассматриваемой цепочки можно представить в виде совокупности «волн поляризации» или дополнительных волн вида

$$p_n(k) = p_n e^{i(\omega t - kx)}, \quad (7.51)$$

где  $k$  — волновое число дипольных волн,  $\lambda_k$  — их длина волны:

$\lambda_k = \frac{2\pi}{k}$ ,  $\xi = nd$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . В (7.51) мы предположили, что электрические моменты колеблются вдоль цепочки. Дисперсионное уравнение для дипольных волн, т. е. зависимость  $\omega = f(k)$ , можно определить при конкретизации характера силовой связи между отдельными диполями.

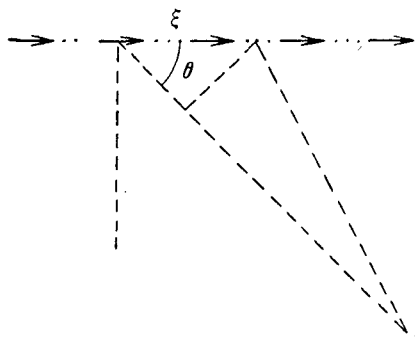


Рис. 42.

Не конкретизируя дисперсионного уравнения, постараемся выяснить свойства излучения дипольных волн. Для этой цели подставим (7.51) в (7.50). На больших расстояниях от цепочки можно приближенно положить  $r_n = r - \xi \cos \theta$ , где  $\xi = nd$ ,  $\theta$  —

угол между цепочкой и направлением к точке наблюдения (рис. 42). В результате получаем:

$$\Pi = \frac{p_0 e^{i\omega t - i\frac{\omega}{c}r}}{r} \sum_n e^{-i\left(\frac{\omega}{c} \cos \theta + k\right) nd}.$$

Если длина волны излучения  $\lambda \gg d$ , то можно сумму заменить интегралом, так как в этом случае можно ввести физический бесконечно малый интервал  $\Delta \xi$ , удовлетворяющий условию

$$\lambda \gg \Delta \xi \gg d, \quad \Delta n = \frac{\Delta \xi}{d},$$

где  $\Delta n$  — число диполей в указанном интервале, и считать, что выражение  $e^{-i\left(\frac{\omega}{c} \cos \theta + k\right) nd}$  непрерывно меняется при перемещении вдоль цепочки диполей

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{p_0 e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(\frac{\omega}{c} \cos \theta + k\right) d\xi} d\xi = \\ &= \frac{p_0 e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r} \frac{2\pi}{d} \delta\left(\frac{\omega}{c} \cos \theta + k\right), \end{aligned} \quad (7.52)$$

где через  $\delta$  обозначена  $\delta$ -функция Дирака. Появление этой функции указывает на то, что только при условии  $\frac{\omega}{c} \cos \theta + k = 0$  излучение отлично от нуля. Таким образом, приходим к результату, что из всех дипольных волн, могущих распространяться в рассматри-

ваемой цепочке диполей, для излучения существенна только одна дипольная волна, для которой имеет место определенное соотношение между частотой дипольной волны, волновым числом и углом наблюдения  $\theta$ :

$$\frac{\omega}{c} \cos \theta - k = 0. \quad (7.53)$$

Этот факт указывает на наличие «игольчатого излучения» от системы диполей. В принципиальном отличии от излучения одного диполя, где нет подобных избранных направлений, при которых излучение только и отлично от нуля, для появления игольчатого излучения необходимо выполнение двух условий. Размеры излучающей системы должны быть велики в сравнении с длиной излучаемой волны и необходимо выполнение условия излучения (7.53).

При наблюдении перпендикулярно к цепочке  $\theta = \frac{\pi}{2}$  условие излучения (7.53) вырождается в требование  $k = 0$  или  $\lambda_k = \infty$ . Такое требование означает, что оптически активной частотой колебания является частота, которая отвечает особому случаю, когда все диполи цепочки колеблются синхронно.

Для углов наблюдения  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  условие излучения накладывает требование на фазовую скорость дипольных волн:

$$\cos \theta = -\frac{kc}{\omega} = -\frac{c}{v_\phi},$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k},$$

где  $v_\phi$  — фазовая скорость дипольной волны. Поскольку абсолютное значение  $\cos \theta$  не превышает единицы, для излучения необходимо, чтобы фазовая скорость дипольных волн превышала скорость света. Если окружающая среда характеризуется значениями  $\epsilon$  и  $\mu$ , отличными от вакуумных значений, то это требование означает, что  $v_\phi > \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ .

От рассмотрения излучения бегущих дипольных волн в бесконечной цепочке диполей перейдем к излучению стоячих волн в цепочке длины  $l$ .

Излучение каждого элемента длины  $\Delta\xi$ , значительно меньшее длины волны излучения  $\lambda$ , можно рассматривать, суммируя напряженности полей от каждого отдельного диполя без учета сдвига фаз излучения. Напряженности полей в волновой зоне определяются формулами (7.43). Следовательно, суммарное поле от совокупности  $\Delta n$  диполей на длине  $\Delta\xi = d\Delta n$  есть:

$$dE_\theta = dH_\varphi = -\frac{\sin \theta}{rc^2} \left( \frac{d^2 p}{dt^2} \right) \frac{1}{d} d\xi = \omega^2 \frac{\sin \theta}{rc^2} p_0(\xi) e^{i\omega t} \frac{1}{d} d\xi$$

или, интегрируя по всем элементам вдоль цепочки с учетом запаздывания ( $t \rightarrow t - \frac{r}{c}$ )

$$E_{\theta} = H_{\varphi} = \frac{\omega^2}{c^2} e^{i\omega t} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p_0(\xi) \frac{\sin \theta}{r} e^{-i\frac{\omega}{c} r} d\xi. \quad (7.54)$$

Предполагая, что наблюдение ведется далеко от цепочки, можно вынести  $\frac{\sin \theta}{r}$  из-под знака интеграла; по этой же причине произведем замену

$$r = r_0 - \xi \cos \theta,$$

где  $r_0$  — расстояние, отсчитываемое от середины цепочки. Тогда

$$E_{\theta} = H_{\varphi} = \frac{\omega^2}{c^2} e^{i\omega(t - \frac{r_0}{c})} \sin \theta \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p_0(\xi) e^{-i\frac{\omega}{c} \xi \cos \theta} d\xi.$$

На концах цепочки нужно потребовать, чтобы величина, аналогичная электрическому току  $\frac{dp}{dt} = J(\xi)$ , равнялась нулю, т. е.

$$i\omega p_0(\xi) = J_0(\xi) \Big|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = 0.$$

Этому условию можно удовлетворить, полагая

$$J_0(\xi) = i\omega p_0 \sin \frac{\pi n}{l} \xi \quad \text{при четном } n,$$

$$J_0(\xi) = i\omega p_0 \cos \frac{\pi m}{l} \xi \quad \text{при нечетном } m.$$

Интегралы в (7.54) легко вычисляются:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \sin \frac{\pi n}{l} \xi e^{-i\frac{\omega}{c} \xi \cos \theta} d\xi &= \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \sin \frac{\pi n}{l} \sin \left( \xi \frac{\omega}{c} \cos \theta \right) d\xi = \\ &= \frac{\frac{\pi n}{l}}{\left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{c} \cos \theta \right)^2} 4 \sin \left( \frac{\omega}{2c} l \cos \theta \right), \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \cos \frac{\pi m}{l} \xi e^{-i\frac{\omega}{c} \xi \cos \theta} d\xi = \frac{\frac{\pi m}{l}}{\left( \frac{\pi m}{l} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{c} \cos \theta \right)^2} 4 \cos \left( \frac{\omega}{2c} l \cos \theta \right).$$

Следовательно, окончательно получаем при четном  $n$ :

$$E_{\theta} = H_{\varphi} = -2i\omega p_0 \frac{e^{i\omega t - i\frac{\omega}{c}r_0}}{c^2 r_0} \sin \theta \frac{\frac{\pi n}{l}}{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \cos \theta\right)^2} \sin\left(\frac{\omega}{2c} l \cos \theta\right), \quad (7.55)$$

при нечетном  $n$  получается аналогичное выражение, только с заменой  $\sin\left(\frac{\omega}{2c} l \cos \theta\right)$  на  $\cos\left(\frac{\omega}{2c} l \cos \theta\right)$ .

Мы видим, что в отличие от излучения диполя появляется дополнительная зависимость от углов, определяющаяся типом дипольных колебаний, длиной цепочки и дисперсионным уравнением дипольных волн, связывающих  $\omega$  и  $k = \frac{\pi n}{l}$ .

От рассмотрения излучения дипольных волн мы можем перейти к излучению конечного линейного прямолинейного проводника (конечной антенны). В самом деле, и для проводника имеет место следующая связь между током и вектором поляризации:  $\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ , где теперь только плотность тока  $\mathbf{j}$  обозначает ток проводимости или для единицы длины проводника  $J = \frac{\partial p}{\partial t}$ . Поэтому формулу (7.54) можно считать законной и для линейного проводника. Дисперсионное уравнение для линейных проводников в пустоте, если опустить потери на джоулево тепло, есть  $\omega = kc$ . Поэтому формула (7.55) дает, полагая  $\frac{\pi n}{l} = k = \frac{\omega}{c}$ :

$$E_{\theta} = H_{\varphi} = -2ip_0 \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right)} \sin\left(\frac{\pi n}{2} \cos \theta\right)}{cr_0 \sin \theta}$$

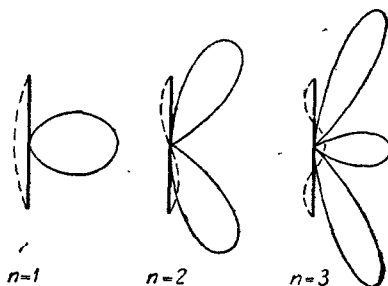


Рис. 43.

для четного  $n$  и аналогичное выражение для нечетного  $m$ .

В этом специальном случае замечаем, что излучение зависит только от типа возбужденных колебаний, но не от длины антенны.

На рис. 43 представлена полярная диаграмма интенсивности излучения от линейной антенны конечной длины для различных тонов колебаний.

### Задачи

1. Доказать, что разность между запаздывающим и опережающим потенциалами есть решение однородного волнового уравнения.
  2. Доказать, что выражение для запаздывающего потенциала с поверхностным интегралом математически эквивалентно выражению для опережающего потенциала с соответствующим поверхностным интегралом.
  3. Вычислить вектор Умова — Пойнтинга и проанализировать распределение интенсивности излучения по углам для случая излучения от антенны конечной длины.
  4. Разложить поляризационный потенциал в ряд по степеням  $\frac{1}{c}$  и обсудить физический смысл отдельных членов разложения.
-



## Г Л А В А VIII

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

#### § 1. Плоские волны в неограниченной однородной непроводящей среде

Рассмотрим прежде всего простейший случай — однородной непроводящей среды

$$\varepsilon = \text{const}, \quad \mu = \text{const}, \quad \sigma = 0.$$

Из уравнения непрерывности

$$\text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

с учетом, что  $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стат}}) \equiv 0$ , следует

$$\rho = \rho(x, y, z), \tag{8.1}$$

т. е. плотность зарядов не может меняться с течением времени и, следовательно, создает только статические поля. Поэтому мы имеем право отвлечься от статических зарядов, поскольку нас интересуют закономерности распространения переменного электромагнитного поля. При указанных условиях

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0.$$

Дифференцируя первое из уравнений по времени, имеем:

$$\text{rot } \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{E} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Но так как

$$\begin{aligned} \text{rot rot} &\equiv \text{grad div} - \Delta, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 0, \end{aligned}$$

то

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{8.2}$$

Совершенно аналогичным образом получаем:

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (8.3)$$

Таким образом, напряженности электрического и магнитного полей удовлетворяют волновому уравнению с одной и той же постоянной скоростью распространения

$$v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon \mu}.$$

Сам факт получения волновых уравнений из общих законов электродинамики указывает на то, что исходные посылки электродинамики гарантируют распространение вихревого электромагнитного поля, если оно существовало в некоторый заданный момент времени, причем скорость распространения определяется только свойствами среды и не зависит от способа возбуждения поля. Основными физическими факторами, обеспечивающими возможность распространения, являются токи смещения и электромагнитная индукция. В отсутствие токов смещения ( $\varepsilon = 0$ ) или электромагнитной индукции ( $\mu = 0$ ) получаются уравнения Лапласа:

$$\Delta \mathbf{E} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} = 0,$$

которые принципиально отличаются от волновых уравнений уже тем, что для поля, всюду ограниченного по амплитуде, а в бесконечности убывающего, имеется только тривиальное решение уравнений Лапласа:

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{H} = 0.$$

Таким образом, законы электростатики требуют органической связи поля с источниками. В противоположность этому волновое уравнение имеет отличные от нуля решения, убывающие в бесконечность и ограниченные всюду. Следовательно, это уравнение допускает самостоятельное существование поля без источников.

Рассмотрим частное решение уравнений электродинамики в случае плоских волн, для которых, по определению, в каждой точке плоского сечения, перпендикулярного направлению распространения, напряженности поля имеют одинаковое значение.

Предположим, что поле меняется только вдоль одного направления, так что напряженности поля суть функции только одной координаты. Такое предположение должно оправдаться самим фактом возможности получения такого решения. Выберем ось  $x$  координатной системы в направлении распространения волн, тогда по условию все производные по  $y$  и  $z$  будут равны нулю, а производные по  $x$  отличны от нуля. В таком случае трехмерные волновые уравнения вырождаются в одномерные:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0,$$

общее решение которых имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{g}\left(t - \frac{x}{v}\right) + \mathbf{f}\left(t + \frac{x}{v}\right), \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

где  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{f}$  — произвольные векторные функции. Первое слагаемое правой части представляет собой волну, распространяющуюся со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$  в положительном направлении без изменения своей формы. Второе слагаемое не зависит от первого и представляет волну, распространяющуюся в обратном направлении оси  $x$ .

Для того чтобы найти связь между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в рассматриваемом случае, нужно обратиться к исходным уравнениям:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0$$

или

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}, & 0 &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}, & \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}, & \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получатся следующие результаты:

1. Составляющие поля по оси  $x$  постоянны во времени и пространстве, т. е.  $E_x = \text{const}$ ,  $H_x = \text{const}$ . Это значит, что переменное поле может быть только поперечным, векторы напряженности которого должны лежать в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения.

2. Уравнения распадаются на две независимые пары, в которых связаны  $E_z$  с  $H_y$  и  $E_y$  с  $H_z$ . Это указывает, что в неограниченном пространстве поляризация волн может быть произвольной, так как вследствие линейности уравнений произвольные линейные комбинации найденных пар решений есть также решения.

3. Определим теперь компоненты  $\mathbf{H}$  по заданным компонентам  $\mathbf{E}$ . Предположим, например,

$$E_z = g\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

тогда

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{du}{dx} = \frac{\partial E_z}{\partial t} \left(-\frac{1}{v}\right) = -\frac{V_{\epsilon\mu}}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

Но из уравнений поля имеем:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t},$$

поэтому

$$\frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = - \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

или

$$\sqrt{\epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial t} = - \sqrt{\mu} \frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

Следовательно, окончательно:

$$\sqrt{\epsilon} E_z = - \sqrt{\mu} H_y. \quad (8.4)$$

Напомним, что не зависящие от времени части поля мы не учитывали с самого начала.

Таким образом, компонента  $E_z$  определяет только компоненту  $H_y$ , аналогично  $E_y$  определяет  $H_z$ , причём

$$\frac{|E|}{|H|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

Второе уравнение из пары, т. е.

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t},$$

полученным решением автоматически удовлетворится, в самом деле,

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = - \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\epsilon}{c} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial H_y}{\partial x}.$$

Рассмотрим теперь поток энергии. Вектор Умова — Пойнтинга в плоской волне по модулю равен

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} E_z H_y = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_z^2,$$

а поскольку плотность энергии

$$w = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\epsilon E^2}{4\pi},$$

имеем:

$$|\mathbf{S}| = v \frac{\epsilon E_z^2}{4\pi} = v w.$$

Таким образом, значение потока энергии определяется скоростью распространения поля и плотностью электромагнитной энергии аналогично полученному для волновой зоны осциллятора.

Поскольку в вакууме  $v = c$  ( $\epsilon = \mu = 1$ ), можем ввести понятие показателя преломления как отношение скорости света в вакууме к скорости света в среде:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (8.5)$$

Этот результат представляет один из основных результатов электромагнитной теории света. Для большинства прозрачных тел  $\mu \sim 1$  и, следовательно,  $n \approx \sqrt{\epsilon}$ .

Ниже мы перечисляем результаты, которые послужили основанием для рассмотрения теории световых волн как раздела общей электродинамики.

1. Совпадение экспериментально измеренной скорости света в вакууме с константой  $c$  в электродинамике, исторически определенной на основе совершенно других явлений — как отношение электростатических единиц к магнитным единицам.

2. Отсутствие продольных компонент поля в электромагнитных волнах, т. е. факт поперечности электромагнитных волн.

3. Для достаточно длинных волн соотношение  $n \approx \sqrt{\epsilon}$  удовлетворительно согласуется с экспериментом. Наблюдаемые отклонения объясняются уравнениями состояния, как отмечалось уже ранее.

В случае плоских монохроматических волн

$$E_z = E_z^0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

или

$$E_z = \operatorname{Re} e^{i\omega \left( t - \frac{x}{v} \right)},$$

из соображений удобства применяют часто запись в комплексной форме

$$E_z = E_z^0 e^{i\omega \left( t - \frac{x}{v} \right)} = E_z^0 e^{i\omega t - ikx}, \quad k = \frac{\omega}{v}.$$

В векторной форме при наличии произвольного направления распространения плоская монохроматическая волна изобразится так:

$$\mathbf{E} = E^0 e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Подстановка в волновое уравнение дает:

$$\Delta \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}, \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \mathbf{E},$$

отсюда

$$\omega^2 = k^2 v^2. \quad (8.6)$$

Таким образом, волновое уравнение накладывает ограничение на функциональную зависимость  $\omega = \omega(k)$ . Зависимость  $\omega = \omega(k)$  носит название дисперсионного уравнения. Это уравнение характеризует законы распространения волн в средах.

Величина  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$  указывает число волн, укладывающихся в 2π сантиметров, и называется волновым числом. Совместно с циклической частотой  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  эти две величины являются основными характеристиками плоских монохроматических волн.

Соотношение (8.6) выражает наиболее простую линейную зависимость между  $\omega$  и  $k$ .

Фазовая и групповая скорости определяются соотношениями

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k}, \quad v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Легко видеть, что в случае линейного дисперсионного уравнения для электромагнитных волн в пустоте или однородном диэлектрике обе скорости равны друг другу и не зависят от частоты:

$$v_{\text{ф}} = v_{\text{гр}} = v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Удобно использовать следующую комплексную форму для амплитуды  $E^0$ :

$$E^0 = \text{Re} E^0 \cdot e^{i\varphi}.$$

В такой форме записи фаза  $\varphi$  выделена в явном виде. Для плоских монохроматических волн имеют место следующие равенства:

$$\text{rot } E = i[\mathbf{k}E], \quad \text{div } E = i(\mathbf{k}E),$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = i\omega E.$$

Таким образом, уравнения для поля имеют вид

$$[\mathbf{k}H] = \frac{\epsilon}{c} \cdot \omega E,$$

$$[\mathbf{k}E] = -\frac{\mu}{c} \cdot \omega H,$$

$$(\mathbf{k}E) = 0, \quad (\mathbf{k}H) = 0.$$

Последние два уравнения указывают на поперечность волн по отношению к направлению распространения  $\mathbf{k}$ , т. е.  $E \perp \mathbf{k}$ ,  $H \perp \mathbf{k}$ ; первые два уравнения связывают  $E$  и  $H$  между собой.

Более общее решение исходных уравнений для вакуума или однородной непроводящей среды мы можем получить суммированием частных решений в виде плоских монохроматических волн. Поскольку на частоту и волновое число накладывается ограничение в виде дисперсионного уравнения  $\omega = vk$ , решения в виде суперпозиции пло-

ских монохроматических волн можно написать в следующих эквивалентных формах:

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k},$$

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\omega} e^{i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\omega,$$

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} e^{i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \delta(\omega - k\nu) d\omega d\mathbf{k}$$

$$(d\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z).$$

Для того чтобы вектор  $\mathbf{E}$  имел физический смысл, необходимо потребовать

$$\omega(k) = -\omega(-k), \quad \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^*, \quad \mathbf{E}_{\omega} = \mathbf{E}_{-\omega}^*,$$

где звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину.

При этих условиях, объединяя подинтегральные выражения с  $+\mathbf{k}$  и  $-\mathbf{k}$ , имеем:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}_{-\mathbf{k}} e^{i\omega(-k)t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 2\text{Re}(\mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}).$$

Заметим, что для монохроматических волн последние два из уравнений электродинамики

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

являются следствием первых двух

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} i\omega \mathbf{E},$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} i\omega \mathbf{H},$$

так как

$$\text{div rot} \equiv 0.$$

Это обстоятельство непосредственно ясно из того, что самим требованием монохроматичности мы исключили поля, не зависящие от времени, для которых  $\text{div } \mathbf{E} \neq 0$ .

## § 2. Распространение волн в неограниченной однородной проводящей среде

Выясним характер распространения монохроматических колебаний в среде, для которой

$$\sigma = \text{const}, \quad \epsilon = \text{const}, \quad \mu = \text{const}.$$

Используя уравнения:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\end{aligned}$$

и полагая в них  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \sim e^{i\omega t}$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{i\omega}{c} \left( \epsilon + \frac{4\pi\sigma}{i\omega} \right) \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{i\omega}{c} \mathbf{H}.\end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Замечаем, что отличие проводящей среды от случая идеального непроводящего диэлектрика заключается в том, что вместо диэлектрической постоянной фигурирует величина

$$\epsilon + \frac{4\pi\sigma}{i\omega} = \epsilon_{\omega}. \quad (8.8)$$

Эту величину, поскольку она заменяет в рассматриваемом случае диэлектрическую постоянную, можно назвать комплексной диэлектрической постоянной.

При использовании  $\epsilon_{\omega}$  уравнения по форме совпадают с уравнениями для диэлектрической среды:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{i\omega}{c} \epsilon_{\omega} \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{i\omega}{c} \mathbf{H}.\end{aligned} \quad (8.9)$$

Поэтому результаты, полученные ранее, автоматически переносятся на рассматриваемый случай, но только с заменой диэлектрической постоянной  $\epsilon$  комплексной диэлектрической постоянной  $\epsilon_{\omega}$ . Уравнение второго порядка получим, беря  $\operatorname{rot}$  от одного из уравнений и пользуясь другим,

$$-\frac{c}{i\omega} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \epsilon_{\omega} \mathbf{E},$$

или

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\omega} \mathbf{E} = 0$$

и аналогично

$$\Delta \mathbf{H} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\omega} \mathbf{H} = 0.$$

Будем искать решения в виде плоской монохроматической волны, но только с комплексным волновым числом

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}^0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_r - i\mathbf{k}_i.\end{aligned}$$



Подстановка в волновое уравнение приводит к дисперсионному уравнению

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_\omega.$$

Исследуем ограничения, вносимые этим уравнением на действительную и мнимую части волнового числа. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} k_r^2 - k_i^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon, \\ 2(k_r k_i) &= -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Очевидно, поле можно записать в следующей форме:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 e^{-(k_i r)} e^{i(\omega t - k_r r)}.$$

Отсюда видно, что действительная часть комплексного волнового вектора определяет плоскость равных фаз

$$(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \text{const},$$

а мнимая часть — плоскость равных амплитуд

$$(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \text{const},$$

причем, поскольку

$$(\mathbf{k}, \mathbf{k}_i) = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{2\pi\sigma}{\omega} = k_i k_r \cos \rho,$$

дисперсионное уравнение не приводит само по себе к однозначному выводу относительно взаимной ориентации плоскостей равных фаз и равных амплитуд — в решении имеется произвол (3 неизвестных,  $k_r$ ,  $k_i$ ,  $\rho$ , и только два уравнения для их определения).

Рассмотрим частный случай  $\rho = 0$ , когда плоскости равных амплитуд совпадают с плоскостями равных фаз. Тогда имеется возможность определить  $k_r$  и  $k_i$  отдельно.

Удобно ввести новые неизвестные  $n$  и  $\chi$ :

$$k_r = \frac{\omega}{c} n,$$

$$k_i = \frac{\omega}{c} \chi, \quad k_r - ik_i = \frac{\omega}{c} (n - i\chi) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_\omega},$$

откуда

$$\epsilon_\omega = (n - i\chi)^2.$$

Соотношения (8.10) приобретают вид:

$$n^2 - \chi^2 = \epsilon,$$

$$n\chi = \sigma T,$$

где  $T$  — период колебаний,

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} n^2 &= -\frac{\epsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \sigma^2 T^2}, \\ \kappa^2 &= +\frac{\epsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \sigma^2 T^2}; \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

поскольку  $n$  и  $\kappa$  по условию действительны, необходимо удержать в обоих выражениях перед корнем только один знак (+).

Выбирая ось  $z$  в направлении распространения, имеем:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 e^{-\frac{\omega}{c} \kappa z} \cdot e^{i\omega(t - \frac{nz}{c})}.$$

Величина  $\kappa$  характеризует быстроту убывания амплитуды; величина  $n$  называется показателем преломления и определяет фазовую скорость распространения:

$$v_{\Phi} = \frac{c}{n}.$$

Определяя глубину проникновения как расстояние  $z = d$ , на котором поле убывает в  $e$  раз, имеем:

$$d = \frac{c}{\omega \kappa}. \quad (8.12)$$

В итоге приходим к следующим результатам:

1. Наличие проводимости  $\sigma \neq 0$  приводит к не равному нулю коэффициенту поглощения  $\kappa$ .

Таким образом, причину поглощения электромагнитной энергии в средах является наличие в них отличной от нуля электропроводности; наоборот, при  $\sigma = 0$  всегда  $\kappa = 0$ .

Для металлов  $\sigma \sim 10^{17}$  CGS E,  $\epsilon \sim 1$  для длинных волн. Таким образом, для длин волн в пустоте в 1 микрон ( $T \sim 3,3 \cdot 10^{-18}$  сек)

$$\sigma T \sim 10^3,$$

т. е.  $\sigma T \gg \epsilon$ ; поэтому приближенно

$$n = \kappa = \sqrt{\sigma T}.$$

Глубина проникновения для меди  $\sigma \sim 5 \cdot 10^{17}$  1/сек определяется примерно следующими значениями:

$$\begin{aligned} \text{при } \lambda = 1 \text{ см} & \quad d \sim 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ мм}, \\ \text{при } \lambda = 100 \text{ м} & \quad d \sim 2,4 \text{ мм}, \\ \text{при } \lambda = 10 \text{ км} & \quad d \sim 24 \text{ мм}. \end{aligned}$$

2. Поскольку

$$[\mathbf{kH}] = -\frac{\varepsilon_\omega \omega}{c} \mathbf{E},$$

$$[\mathbf{kE}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{H},$$

волны поперечны

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{H} \perp \mathbf{k}$$

и взаимно перпендикулярны  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ , причем векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{k}$  образуют правовинтовую систему.

Вводя единичный вектор в направлении распространения  $k_1$  и учитывая соотношение

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_\omega},$$

имеем:

$$[\mathbf{k}_1 \mathbf{H}] = -\sqrt{\varepsilon_\omega} \mathbf{E}.$$

Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $z$  с  $E_x \neq 0$  и  $H_y \neq 0$

$$[\mathbf{k}_1 \mathbf{H}] = -H_y$$

и, следовательно,

$$H_y = \sqrt{\varepsilon_\omega} E_x = (n - i\kappa) E_x = \sqrt{n^2 + \kappa^2} e^{i\delta} E_x,$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\kappa}{n}.$$

Поскольку  $\kappa$  для металлов велико, можно сделать вывод, что по абсолютной величине напряженность магнитного поля значительно превышает величину электрического поля. В связи с этим плотность магнитной энергии

$$w_H = \frac{H^2}{8\pi} = \frac{n^2 + \kappa^2}{8\pi} E^2$$

значительно превышает плотность электрической.

### § 3. Отражение и преломление волн на плоской границе раздела двух сред

Перейдем теперь к рассмотрению распространения электромагнитных волн в неоднородной среде. Прежде всего рассмотрим простейший случай неоднородности — наличие плоской границы между двумя изотропными, однородными и непоглощающими средами. Для простоты будем решать задачу для монохроматических полей. Отметим, что монохроматические поля  $e^{i\omega t}$  и для произвольной не зависящей от времени неоднородности являются решением уравнений электродинамики вследствие линейности и однородности этих уравнений.

Для условий, в которых длина волн значительно превышает толщину переходного слоя, можно считать границу бесконечно тонкой и использовать пограничные условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей.

Падающую волну будем считать плоской и заданной в форме

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^0 e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

с комплексным значением амплитуд  $\mathbf{E}^0$  и  $\mathbf{H}^0$ , которые учитывают фазу волны, причем

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{H}, \quad |\mathbf{H}| = \sqrt{\varepsilon} |\mathbf{E}|, \quad |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{v};$$

магнитную проницаемость для всех известных прозрачных тел можно положить равной единице. Проведем ось  $z$  перпендикулярно к плоскости раздела в направлении падающей волны и параллельно перпендикуляру, направленному из первой среды во вторую. Проведем ось  $y$  перпендикулярно к падающему лучу и в направлении к наблюдателю (рис. 44).

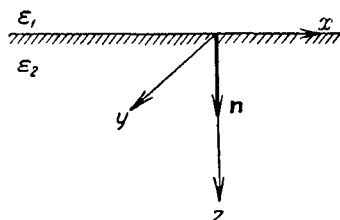


Рис. 44.

Из граничных условий в плоскости раздела

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad H_{1t} = H_{2t},$$

имеющих место для любой точки этой плоскости и для любого момента времени, следует сам факт нали-

чия поля во второй среде, когда на плоскость раздела из первой среды падает электромагнитная волна. Однако удовлетворить двум условиям, предполагая наличие только одной плоской волны, невозможно, так как равенства

$$H_{1t} = \sqrt{\varepsilon_1} E_{1t}, \quad H_{2t} = \sqrt{\varepsilon_2} E_{2t}$$

сразу можно удовлетворить только при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , что тривиально.

Поэтому для решения задачи нужно предположить существование, кроме падающей плоской волны, еще, по крайней мере, двух плоских волн — отраженной и преломленной. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \text{падающая волна} & \quad \mathbf{E}^{\text{п}} = \mathbf{E}_0^{\text{п}} e^{i\omega^{\text{п}} t - i\mathbf{k}^{\text{п}} \mathbf{r}}, \\ \text{отраженная волна} & \quad \mathbf{E}^{\text{отр}} = \mathbf{E}_0^{\text{отр}} e^{i\omega^{\text{отр}} t - i\mathbf{k}^{\text{отр}} \mathbf{r}}, \\ \text{преломленная волна} & \quad \mathbf{E}^{\text{пр}} = \mathbf{E}_0^{\text{пр}} e^{i\omega^{\text{пр}} t - i\mathbf{k}^{\text{пр}} \mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Представляют интерес следующие задачи. Определение частот отраженных и преломленных волн; определение направлений этих волн; определение соотношения амплитуд волн; определение изменения фаз при отражении и преломлении.

Для определения соотношения частот в падающей, отраженной и преломленной волнах воспользуемся граничным условием

$$E_{01t}^n e^{i\omega^n t} - ik^n r + E_{01t}^{отр} e^{i\omega^{отр} t} - ik^{отр} r = E_{02t}^{пр} e^{i\omega^{пр} t} - ik^{пр} r. \quad (8.13)$$

Так как это условие должно выполняться при любом  $t$  и в любых точках плоскости раздела, то

$$\begin{aligned} \omega^n &= \omega^{отр} = \omega^{пр}, \\ k_x^n &= k_x^{отр} = k_x^{пр}, \\ k_y^n &= k_y^{отр} = k_y^{пр}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Если вектор волнового числа падающей волны лежит в плоскости  $x, z$ , то  $k_y^n = 0$  и, следовательно,

$$k_y^{отр} = k_y^{пр} = 0,$$

т. е. волновые векторы всех трех волн лежат в одной плоскости, которую удобно назвать плоскостью падения.

Вводя углы падения  $\varphi$ , отражения  $\varphi'$  и преломления  $\psi$  (все три угла изменятся в пределах от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ ), имеем (рис. 45):

$$k_x^n = k^n \sin \varphi, \quad k_x^{отр} = k^{отр} \sin \varphi', \quad k_z^{пр} = k^{пр} \sin \psi.$$

Далее, учитывая соотношения

$$k^n = \frac{\omega}{v_1}, \quad k^{отр} = \frac{\omega}{v_1}, \quad k^{пр} = \frac{\omega}{v_2},$$

получим:

$$\frac{\sin \varphi}{v_1} = \frac{\sin \varphi'}{v_1} = \frac{\sin \psi}{v_2}. \quad (8.15)$$

Отсюда

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}. \quad (8.16)$$

Знание абсолютных величин векторов  $k^n$ ,  $k^{отр}$ ,  $k^{пр}$  и их составляющих по оси  $x$  даёт возможность определить их составляющую по оси  $z$

$$k_z^n = \frac{\omega}{v_1} \cos \varphi, \quad k_z^{отр} = -\frac{\omega}{v_1} \cos \varphi', \quad k_z^{пр} = \frac{\omega}{v_2} \cos \psi.$$

Определим теперь фазы всех трех волн в плоскости раздела  $z=0$ . Имеем:

$$(\omega t - k^n r)_{z=0} = (\omega t - k^{отр} r)_{z=0} = (\omega t - k^{пр} r)_{z=0},$$

т. е. в плоскости раздела все три волны имеют одинаковые фазы.

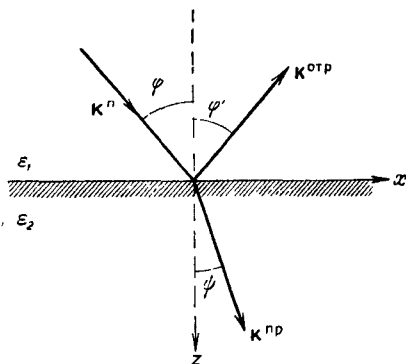


Рис. 45.

Таким образом, предположение о существовании трех плоских монохроматических волн и учет линейного граничного условия дают возможность вывести все элементарные законы отражения и преломления электромагнитных волн.

Перейдем к выяснению соотношений между амплитудами всех трех волн.

Целесообразно разложить вектор напряженности электрического поля у всех трех волн на два взаимно перпендикулярных вектора, причем один из них лежит в плоскости падения:

$$\begin{aligned} E^n &= A_p + A_s, \\ E^{\text{отр}} &= R_p + R_s, \\ E^{\text{пр}} &= D_p + D_s, \end{aligned}$$

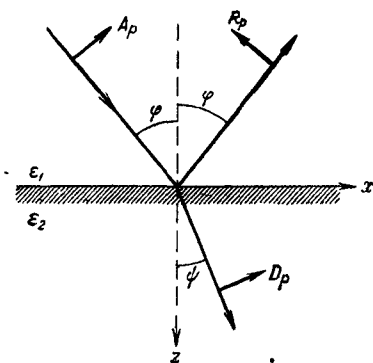


Рис. 46.

индексы  $p$  и  $s$  относятся соответственно к компонентам, лежащим в плоскости падения и перпендикулярно к ней (рис. 46). Тогда:

$$\begin{aligned} E_x^n &= A_p \cos \varphi, & E_x^{\text{отр}} &= -R_p \cos \varphi, & E_x^{\text{пр}} &= D_p \cos \varphi, \\ E_y^n &= A_s, & E_y^{\text{отр}} &= R_s, & E_y^{\text{пр}} &= D_s, \\ E_z^n &= -A_p \sin \varphi, & E_z^{\text{отр}} &= -R_p \sin \varphi, & E_z^{\text{пр}} &= -D_p \sin \varphi. \end{aligned}$$

Напряженность магнитного поля выражается через напряженность электрического поля по формуле

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

или

$$[\mathbf{kE}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}.$$

Поскольку

$$\mathbf{k} = k_1 \mathbf{k}, \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon},$$

$$\sqrt{\varepsilon} [\mathbf{k}_1 \mathbf{E}] = \mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix},$$

то для каждой из волн имеем:

$$\begin{aligned} H_x &= -\sqrt{\varepsilon} E_y \cos \varphi, \\ H_y &= \sqrt{\varepsilon} (E_x \cos \varphi - E_z \sin \varphi), \\ H_z &= \sqrt{\varepsilon} E_y \sin \varphi. \end{aligned}$$

С точностью до фазового множителя падающая, отраженная и преломленная волны имеют соответственно следующие компоненты напряженностей полей:

$$\begin{aligned}
 E^{\text{п}}(A_p \cos \varphi, A_s, -A_p \sin \varphi), \\
 H^{\text{п}}(-\sqrt{\varepsilon_1} A_s \cos \varphi, \sqrt{\varepsilon_1} A_p, \sqrt{\varepsilon_1} A_s \sin \varphi), \\
 E^{\text{отр}}(-R_p \cos \varphi, R_s, -R_p \sin \varphi), \\
 H^{\text{отр}}(\sqrt{\varepsilon_1} R_s \cos \varphi, \sqrt{\varepsilon_1} R_p, \sqrt{\varepsilon_1} R_s \sin \varphi), \\
 E^{\text{пр}}(D_p \cos \psi, D_s, -D_p \sin \psi), \\
 H^{\text{пр}}(-\sqrt{\varepsilon_2} D_s \cos \psi, \sqrt{\varepsilon_2} D_p, \sqrt{\varepsilon_2} D_s \sin \psi).
 \end{aligned}$$

Граничные условия, выраженные через  $A$ ,  $R$  и  $D$ , имеют вид

$$\left. \begin{aligned}
 (A_p - R_p) \cos \varphi &= D_p \cos \psi, \\
 A_s + R_s &= D_s, \\
 \sqrt{\varepsilon_1} (A_s - R_s) \cos \varphi &= \sqrt{\varepsilon_2} D_s \cos \psi, \\
 \sqrt{\varepsilon_1} (A_p + R_p) &= \sqrt{\varepsilon_2} D_p.
 \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

Здесь мы опустили фазовый множитель, поскольку, как было показано, в плоскости раздела фазы всех трех волн одинаковы.

Граничные условия дают нам четыре уравнения для четырех неизвестных:  $R_p$ ,  $R_s$ ,  $D_p$ ,  $D_s$  (амплитуды падающей волны  $A_p$  и  $A_s$  считаются заданными). Решение этих элементарных уравнений имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
 R_p &= \frac{\text{th}(\varphi - \psi)}{\text{th}(\varphi + \psi)} A_p, & D_p &= \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)} A_p, \\
 R_s &= -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} A_s, & D_s &= \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)} A_s.
 \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

В случае нормального падения  $\varphi = \psi = 0$  формулы приводят к неопределенности, так как для амплитуд получаются решения вида  $\frac{0}{0}$ . Проще всего в этом случае возвратиться к исходным уравнениям (6.17), полагая в них  $\varphi = \psi = 0$  ( $\cos \varphi = \cos \psi = 1$ ). Тогда:

$$\begin{aligned}
 A_p - R_p &= D_p, & \sqrt{\varepsilon_1} (A_s - R_s) &= \sqrt{\varepsilon_2} D_s, \\
 A_s + R_s &= D_s, & \sqrt{\varepsilon_1} (A_p + R_p) &= \sqrt{\varepsilon_2} D_p,
 \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} D_p &= \frac{2}{n_{12} + 1} A_p, \\ D_s &= \frac{2}{n_{12} + 1} A_s, \\ R_p &= \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} A_p, \\ R_s &= -\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} A_s \\ &\left( n_{12} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

Как видим, в случае нормального падения направления  $p$  и  $s$  эквивалентны, т. е. теряет смысл понятие плоскости падения. Далее, при  $n_{12} > 1$  направления векторов электрической напряженности в падающей и отраженной волнах противоположны

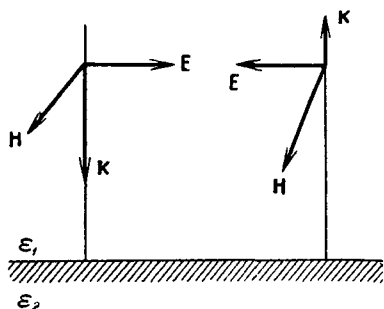


Рис. 47.

$$\begin{aligned} E^n &= A_p e^{i\omega t - ikz}, \\ E^{\text{отр}} &= -A_p \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} e^{i\omega t - ikz \pm \pi}, \end{aligned}$$

что соответствует сдвигу фазы на  $\pi$  (рис. 47). Таким образом, при падении на оптически более плотную среду ( $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ) фаза вектора электрической напряженности меняется на полволны

$$\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta z, \quad \Delta z = \frac{\lambda}{2}.$$

Далее, при  $n_{12} < 1$  фазы векторов электрической напряженности падающей и отраженной волн одинаковы, но фазы векторов магнитной напряженности сдвинуты на  $\pi$ .

Под коэффициентом отражения  $r$  понимают отношение квадратов амплитуд отраженной и падающей волн; пользуясь (8.19), имеем:

$$r = \left( \frac{R}{A} \right)^2 = \left( \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2. \quad (8.20)$$

Очевидно, что чем больше различаются  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_1$ , тем ближе коэффициент отражения к единице и, следовательно, тем ближе рассматриваемый случай к случаю полного отражения. Наличие сильного отражения от сред с большей диэлектрической постоянной обусловлено наличием больших токов смещения на границе оптически более плотной среды, вызывающих соответственно большие вторичные поля излучения, определяющие амплитуду отраженной и преломленной волн.



При нормальном падении амплитуда проходящей волны никогда в нуль не обращается

$$D = \frac{2}{n_{12} + 1} A,$$

т. е. никогда не достигается полное внутреннее отражение. По иному обстоит дело при наклонном падении волн на плоскость раздела. Из закона преломления

$$\sin \psi = \frac{\sin \varphi}{n_{12}}$$

следует, что в случае  $n_{12} > 1$  при любом  $\varphi$  существует действительное значение для  $\psi$ , но при  $n_{12} < 1$  существует такой предельный угол  $\varphi_0$ , при котором

$$\sin \varphi_0 = n_{12},$$

и, следовательно,  $\sin \psi = 1$ , т. е.  $\psi = 90^\circ$ , так что возникает «скользящий» луч. При больших углах падения не существует действительного значения  $\psi$ , так что волны возвращаются в первую среду; это и есть случай полного внутреннего отражения.

Найдем распределение поля при полном внутреннем отражении. Полученные ранее формулы для отражения и преломления справедливы при любых значениях  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , поскольку граничные условия и уравнения поля не накладывают каких-либо ограничений на их значения. Но если  $\varphi$  таково, что

$$\sin \psi = \frac{\sin \varphi}{n_{12}} > 1 \quad \text{при} \quad n_{12} < 1,$$

то этому соотношению можно удовлетворить комплексным значением  $\psi$ . Для выяснения физического смысла комплексности угла  $\psi$  определим амплитуду и фазу проходящей волны. Имеем:

$$\begin{aligned} E_x &= D_p \cos \psi e^{i\omega \left( t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{v_2} \right)}, \\ E_y &= D_s, \\ E_z &= -D_p \sin \psi e^{i\omega \left( t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{v_2} \right)}. \end{aligned}$$

Сделаем подстановку

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{\sin \varphi}{n_{12}}, \\ \cos \psi &= \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n_{12}^2} - 1}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Тогда получим:

$$E_x = D_p (\pm i) \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n_{12}^2} - 1} e^{i\omega \left( t - \frac{x \sin \varphi}{v_2 n_{12}} \right)} e^{\pm z \frac{\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n_{12}^2} - 1}}{v_2}}$$

и аналогично для других компонент.

Замечая, что

$$v_2 n_{12} = v_2 \frac{v_1}{v_2} = v_1, \quad i = e^{i \frac{\pi}{2}},$$

и требуя конечности значений поля, всюду имеем, удерживая только один знак и переходя к действительной форме:

$$E_x = D_p \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n_{12}^2} - 1} e^{-xz} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x \sin \varphi}{v_1} \right) + \frac{\pi}{2} \right], \quad (8.22)$$

$$x = \frac{\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n_{12}^2} - 1}}{v_2}.$$

Поле, определяемое соотношением (8.22), представляет собою волновой процесс, распространяющийся во второй среде вдоль границы раздела, оси  $x$ , с экспоненциально убывающей амплитудой вглубь среды в положительном направлении оси  $z$ . Поскольку составляющая электрического поля по оси  $x$  не исчезает, волны не поперечны. Здесь мы впервые встречаемся с фактом, что в неоднородных средах электромагнитная энергия может распространяться в виде электромагнитных волн, имеющих продольную составляющую.

Таким образом, результат о поперечности электромагнитных волн справедлив, вообще говоря, только в однородных средах. В § 5 этой главы мы выясним особо важную роль продольно-поперечных волновых процессов в задаче о направленных электромагнитных волнах.

Скорость распространения вдоль границы определяется скоростью распространения в первой среде, хотя распространение фактически происходит во второй среде.

Глубина затухания этих волн определяется соотношением

$$d = \frac{1}{\alpha} = \frac{v_2}{\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n_{12}^2} - 1}} = \frac{v_1}{\omega \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}. \quad (8.23)$$

Если значение корня

$$\sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2} \approx 1,$$

то

$$d = \frac{v_1}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi},$$

т. е. глубина проникновения имеет порядок величины длины волны падающих волн. Для того чтобы применить формулы (8.18) к рассматриваемому случаю полного внутреннего отражения, выразим их

только через  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  с последующей заменой их с помощью (8.21), тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} R_p &= \frac{n_{12}^2 \cos \varphi + i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{n_{12}^2 \cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}} A_p, \\ R_s &= \frac{\cos \varphi + i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{\cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}} A_s. \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

Отсюда мы видим, что действительная часть  $R_p$  и  $R_s$  совпадает с действительной частью  $A_p$  и  $A_s$ , так как действительные части множителей при  $A_p$  и  $A_s$  точно равны единице:

$$|R_p| = |A_p|, \quad |R_s| = |A_s|.$$

Поскольку же

$$r = \frac{R_p^2 + R_s^2}{A_p^2 + A_s^2}, \quad (8.25)$$

то при полном внутреннем отражении  $r = 1$ , т. е. весь поток энергии в падающей волне возвращается обратно в первую среду, что и должно быть, поскольку мы совершенно не учитываем поглощение, а поле во второй среде только экспоненциально затухает, не распространяясь вглубь среды. Детально вопрос о полном внутреннем отражении впервые разобрал А. Эйхенвальд в 1908 г.

#### § 4. Свойства направленных поперечных волн

В практических приложениях электродинамики особо важную роль играют способы осуществления направленной передачи электромагнитной энергии на расстояния. Возникающие здесь вопросы разнообразны и трудны. В какой мере наличие проводников, например двух- или трехпроводной линии передачи, может способствовать созданию направленного потока энергии? Какова структура поля в этих случаях? При изменении линий какая доля энергии останется связанной с траекторией линии, а какая будет излучена, и т. д.

Остановимся только на двух важных вопросах.

Во-первых, выясним основные особенности распространения, когда совокупность проводников имеет такую конфигурацию и характеристики электропроводности, которые обеспечивают направленность распространения поперечных электромагнитных волн. Во-вторых, решим эту же задачу для случая, когда у электромагнитного поля имеется продольная составляющая вдоль направления распространения.

Связанность направления распространения поперечного электромагнитного поля с траекторией провода можно качественно уяснить из следующих соображений. Ввиду наличия токов проводимости, значительно превышающих токи смещения в проводниках, большая

часть магнитных силовых линий охватывает токи проводимости, т. е. линии передачи, а не токи смещения, как это имеет место в однородной среде. Так как мы сейчас рассматриваем случай поперечных волн, электрические силовые линии должны лежать в плоскости сечения и не иметь продольной составляющей (рис. 48). Поэтому электрические силовые линии не могут окружать магнитные силовые

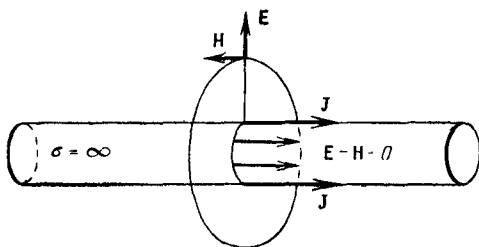


Рис. 48.

линии, не имея продольной составляющей, они должны исходить из проводников или на них заканчиваться. Таким образом, как магнитное, так и электрическое поля органически связаны с траекторией проводника.

Для количественного рассмотрения введем следующие упрощения, не конкретизируя форму сечения

проводов и их число; будем считать, однако, все провода параллельными; будем решать задачу в приближении идеальных проводников  $\sigma = \infty^1$ ). Теория скин-эффекта, а также рассмотрение электромагнитных волн в металлах дает для глубины проникновения следующую формулу:

$$d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\mu\sigma}},$$

при  $\sigma \rightarrow \infty$  пространство в проводнике, куда проникает поле, стягивается к поверхности, так что поле внутри идеальных проводников обращается в нуль.

Далее, окружающую проводники среду будем считать однородной  $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\sigma = 0$ .

Направляя ось  $z$  вдоль проводников, найдем значения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  во всем пространстве. Для магнитного поля всегда имеет место соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t - \frac{r}{v})}{r} dt'.$$

Ток проводимости  $\mathbf{j}$  направлен по проводам, так что

$$j_x = j_y = 0.$$

Отсюда следует

$$A_x = A_y = 0, \quad A_z \neq 0,$$

т. е. векторный потенциал во всех точках среды, окружающей проводники, направлен в сторону распространения тока (параллелен про-

<sup>1)</sup> По поводу учета конечной проводимости см. работу М. А. Леонтовича в сборнике «Исследования по распространению радиоволн». М.—Л., 1948.

водникам). Внутри проводников  $\mathbf{A} = 0$ , поскольку внутри идеальных проводников  $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$ .

Исключая точки самой поверхности проводников, по которой циркулируют поверхностные токи, имеем:

$$\Delta A_z - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Решения этого уравнения мы должны искать в виде волнового процесса, распространяющегося вдоль оси  $z$ :

$$A_z = F(x, y) f\left(t - \frac{z}{v}\right). \quad (8.26)$$

Волновое уравнение можно записать так:

$$\Delta_{x,y} A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0.$$

Подстановка выражения (8.26) тождественно обращает в нуль разность последних двух членов

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} \equiv 0.$$

Таким образом, в плоскости сечения проводников поле удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta_{x,y} A_z = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A_z = 0, \quad (8.27)$$

т. е. оно должно иметь такую же структуру, как и в статическом случае.

Найдем по векторному потенциалу напряженность магнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial F}{\partial y} f\left(t - \frac{z}{v}\right), \\ H_y &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial F}{\partial x} f\left(t - \frac{z}{v}\right), \\ H_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

Найдем напряженность электрического поля. Из условия, связывающего потенциалы

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

имеем для нашего случая:

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = - \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

но, поскольку

$$\begin{aligned} A_z &= F(x, y) f\left(t - \frac{z}{v}\right), \\ \frac{\partial A_z}{\partial z} &= - \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t} F(x, y). \end{aligned}$$

Отсюда получаем соотношение, связывающее производные по времени векторного и скалярного потенциалов,

$$-\frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = -\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

После интегрирования этого уравнения и отбрасывания не существенной здесь постоянной интегрирования получаем:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} A_z$$

и

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Мы опустили постоянную интегрирования, произвольным образом зависящую от координат, но не от времени, так как соответствующее поле есть статическое поле при постоянном распределении зарядов и токов, что мы исключили самим видом предполагаемого решения  $(f(t - \frac{z}{v}))$ .

По скалярному и векторному потенциалам определяется напряжение электрического поля

$$\left. \begin{aligned} E &= -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \\ E_x &= -\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\partial F}{\partial x} f\left(t - \frac{z}{v}\right), \\ E_y &= -\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\partial F}{\partial y} f\left(t - \frac{z}{v}\right), \\ E_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

Итак, можно сделать следующие общие выводы.

Существует поле, распространяющееся вдоль проводников.

В случае идеальных проводников это поле поперечное; в пространстве вокруг проводников скорость распространения поля вдоль направления проводников определяется свойствами окружающей среды, т. е.

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

причем в приближении идеальных проводников совершенно не зависит от их конфигурации и размеров. В плоскости сечения поле удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. в случае идеальных проводников точные законы электродинамики для переменного поля приводят к уравнению электростатики и магнитостатики в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения.

Таким образом, в данном случае нельзя трактовать статические поля только как предельные случаи переменных полей.

Векторы напряженностей электрического и магнитного полей взаимно перпендикулярны, поскольку на основании (8.28) и (8.29) имеем:

$$E_x H_x + E_y H_y = (\mathbf{E}\mathbf{H}) = 0.$$

Амплитуды напряженностей магнитного и электрического полей относятся друг к другу так же, как и в неограниченном диэлектрике. Действительно, из (8.28) и (8.29) имеем:

$$(H_x^2 + H_y^2) \mu = (E_x^2 + E_y^2) \epsilon$$

и, следовательно,

$$\sqrt{\epsilon} |\mathbf{E}| = \sqrt{\mu} |\mathbf{H}|.$$

Эти результаты имеют место для произвольной конфигурации сечения проводников. При решении задачи мы не использовали пограничных условий, необходимых для решения уравнений Лапласа.

Представляет интерес частный случай распространения электромагнитных волн в кабеле, состоящем из двух коаксиальных цилиндрических проводников. В случае идеально проводящих стенок поле сосредоточено только в пространстве между цилиндрами. На основании общего рассмотрения векторы напряженностей электрического и магнитного полей расположены в плоскости сечения  $(x, y)$  и удовлетворяют в этой плоскости уравнению Лапласа. Из соображения аксиальной симметрии кабеля напряженности полей должны быть в цилиндрических координатах функциями только радиуса. В результате имеем:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) = 0,$$

откуда

$$r \frac{\partial F}{\partial r} = C, \quad \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{C}{r}.$$

Силовые линии электрического поля на поверхности идеального проводника должны быть направлены по нормали к поверхности. Можно утверждать на основании симметрии задачи, что во всем пространстве между обкладками кабеля остается направленной по радиусам, т. е. отлична от нуля, только составляющая  $E_r(r)$ . Общее рассмотрение, проведенное выше, показывает, что магнитное поле перпендикулярно электрическому и, следовательно, отлична от нуля только составляющая  $H_\alpha(r)$  (рис. 49).

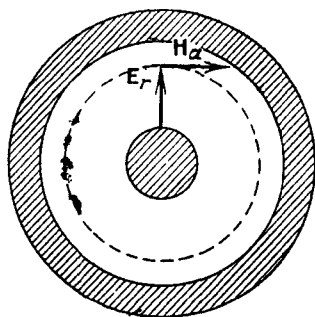


Рис. 49.

Таким образом,

$$E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\partial F}{\partial r} f\left(t - \frac{z}{v}\right) = \\ = \frac{C}{r} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} f\left(t - \frac{z}{v}\right).$$

Из граничных условий для идеального проводника

$$\epsilon E_r = 4\pi\sigma$$

непосредственно определяется плотность поверхностных зарядов на поверхностях внутреннего ( $r_1$ ) и внешнего ( $r_2$ ) цилиндров

$$\sigma_1 = \frac{\epsilon E_1}{4\pi} = \frac{\epsilon C}{4\pi r_1} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} f\left(t - \frac{z}{v}\right), \\ \sigma_2 = \frac{\epsilon E_2}{4\pi} = -\frac{\epsilon C}{4\pi r_2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} f\left(t - \frac{z}{v}\right).$$

Рассматривая заряд, приходящийся на единицу длины каждого из цилиндров

$$x = 2\pi r\sigma,$$

видим, что заряды на внутренней и на внешней поверхностях равны друг другу, но противоположны по знаку. Важно иметь в виду, что поверхностные заряды движутся вдоль кабеля со скоростью распространения электромагнитных колебаний в диэлектрической среде, заполняющей пространство между цилиндрами кабеля.

Определим теперь ток в кабеле. Поскольку  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$  и

$$H_\alpha = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_r,$$

имеем:

$$H_\alpha = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{C}{r} f\left(t - \frac{z}{v}\right).$$

Воспользуемся интегральным соотношением

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J_1,$$

где интеграл взят по контуру, охватывающему внутренний провод. В правой части отсутствует ток смещения, так как продольные компоненты электрического поля равны нулю. Интегрирование по окружности дает:

$$2\pi r_1 H_\alpha = \frac{4\pi}{c} J_1$$

и, следовательно,

$$J_1 = c \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{C}{2} f\left(t - \frac{z}{v}\right).$$



Для контура, охватывающего оба цилиндра, должно быть

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} (J_1 + J_2) = 0,$$

так как контур интегрирования можно провести внутри идеально проводящих стенок второго цилиндра.

Из проведенного выше рассмотрения можно сделать следующие выводы.

В каждый данный момент времени, в каждом сечении кабеля токи, протекающие по внутреннему и внешнему цилиндрам, равны между собой, но противоположны по направлению. Эти токи распространяются вдоль кабеля со скоростью света в диэлектрической среде, находящейся внутри кабеля.

В заключение выясним, каково будет поле внутри кабеля при отсутствии внутреннего провода. Удаляя внутренний провод, мы тем самым полагаем, что заряды  $e_1$  и токи  $J_1$  обращаются в нуль. Но согласно только что установленной закономерности  $e_1 = -e_2$ ,  $J_1 = -J_2$  это означает, что отсутствуют заряды и токи на внешнем цилиндре, а следовательно, и во всем рассматриваемом пространстве. Поскольку же на поверхности, ограничивающей полый цилиндр, поле равно нулю, а зарядов и токов внутри не существует, поле тождественно равно нулю всюду. Последний результат основан на том, что уравнение Лапласа приводит только к нулевым решениям для полей, если на поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем, поле равно нулю. Заметим однако, что уравнение Лапласа, полученное для поведения поля в сечении, основано на предпосылке о поперечности электромагнитного поля. Полученный результат поэтому можно сформулировать следующим образом.

В полых металлических цилиндрах с идеальной проводимостью стенок, внутри которых отсутствуют заряды и токи, не могут распространяться только поперечные электромагнитные поля. В следующем параграфе мы покажем, что в этих случаях могут распространяться продольно-поперечные поля, обязательно имеющие продольную вдоль направления распространения составляющую либо у вектора  $\mathbf{E}$ , либо у вектора  $\mathbf{H}$ .

Рассмотрение электромагнитного поля в кабеле показывает, в частности, ограниченность обычного суждения об «отпочковании» поперечного поля от источников. Это является верным в неограниченной однородной среде. В рассмотренном же случае мы видим, что поперечное поле аналогично электростатическому в смысле его органической связи со стенками цилиндра. Если на поверхности, охватывающей объем, в котором нет зарядов и токов, поле равно нулю, то оно тождественно равно нулю в любой точке объема в полном соответствии с электростатическим случаем.

### § 5. Распространение направленных продольно-поперечных волн

Развитие современной радиофизики поставило задачу о передаче электромагнитной энергии сантиметровых и более коротких волн по заданной траектории, без заметного искажения спектра волн. Эта задача решается путем использования полых металлических труб (волноводов). Поглощение электромагнитных волн в трубах происходит на внутренней металлической поверхности и поэтому является только поверхностным эффектом, в отличие от рассмотренного ранее случая передачи волн вдоль проводов.

В § 4 мы пришли к результату, что в полых цилиндрах с идеально проводящими стенками не могут распространяться поперечные волны. Рассмотрим теперь распространение в подобных цилиндрах продольно-поперечных волн. Под этим названием мы будем понимать электромагнитные волны, имеющие компоненту вдоль оси своего распространения. Если отлична от нуля продольная компонента электрического поля, будем называть такие волны *E*-волнами, если же отлична от нуля продольная компонента магнитного поля, будем называть *H*-волнами.

С фактом существования продольно-поперечных волн мы уже встретились при рассмотрении полного внутреннего отражения. Граница раздела двух сред играла роль направляющей плоскости, вдоль которой распространялись волны (убывающие вглубь оптически менее плотной среды). Эти волны имели продольную составляющую в направлении распространения. В полых металлических трубах продольно-поперечные волны являются единственными возникающими типами волн. Центральным вопросом теории является вопрос о граничных условиях. Из граничных условий, которые предоставляются общей теорией

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} &= 4\pi\sigma, & H_{2t} - H_{1t} &= \frac{4\pi}{c} I, \\ E_{2t} - E_{1t} &= 0, & H_{2n} - H_{1n} &= 0 \\ (\mu_1, \mu_2 \sim 1, \varepsilon_1 \sim 1), \end{aligned}$$

первые два условия не могут быть использованы, так как поверхностные заряды и поверхностные токи неизвестны и должны быть определены решением задачи. В последних двух уравнениях требуется знание поля внутри металлических стенок, которое также требует решения всей задачи в целом. Сильное упрощение достигается предположением об идеальной проводимости стенок волновода, коэффициент электропроводности для которых полагают равным бесконечности. Как это уже следует из теории скин-эффекта, глубина проникновения поля в металле уменьшается с увеличением коэффициента электропроводности. В пределе *E* и *H* внутри идеальных проводников отсутствуют, и мы имеем в качестве возможного граничного

условия

$$E_t \Big|_s = 0.$$

Решение задачи показывает, что это одно условие является достаточным для определения  $E$  и  $H$  внутри волновода.

Для двух особо типичных способов возбуждения волн (либо линейной антенной, либо рамкой) имеют место уравнения для поляризационных потенциалов

$$\Delta \Pi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \begin{cases} -4\pi P, \\ -4\pi M. \end{cases}$$

Напряженности полей  $E$  и  $H$  определяются через вектор  $\Pi$  следующим образом:

для  $E$ -волн

$$E = -\text{grad div } \Pi_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2}, \quad H = \text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi_e}{\partial t};$$

для  $H$ -волн

$$E = -\text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi_m}{\partial t}, \quad H = \text{rot rot } \Pi_m.$$

Используем следующие упрощения задачи. Будем считать проводящий полый цилиндр бесконечно длинным с неизменным сечением вдоль всей его длины. Будем, далее, предполагать отсутствие каких-либо источников в волноводе<sup>1)</sup>, то есть ограничимся рассмотрением только собственных электромагнитных волн в цилиндре. Для монохроматических волн с неизменным направлением поляризационного потенциала вдоль направления распространения (оси  $z$ ) можем написать:

$$\Pi_z = \Psi(x, y) e^{i\omega t - ikz},$$

где неизвестные пока функции  $\Psi$  ( $\Psi_e$  и  $\Psi_m$ ) точек сечения волновода должны быть определены решением задачи.

Подстановка предполагаемого решения в однородное волновое уравнение для поляризационного потенциала приводит в обоих случаях к одному и тому же уравнению для определения функции  $\Psi$ :

$$\Delta_r \Psi_{e,m} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \Psi_{e,m} = 0.$$

Удобно ввести на поверхности волновода местную систему координат  $\mathbf{z}_1, \mathbf{n}_1, \mathbf{s}_1$ , где  $\mathbf{z}_1$  — единичный вектор, направленный в сторону направления распространения,  $\mathbf{n}_1$  — единичный вектор, перпендикулярный к поверхности,  $\mathbf{s}_1$  — единичный вектор по касательной к поверхности, лежащей в плоскости сечения (рис. 50). Тогда требова-

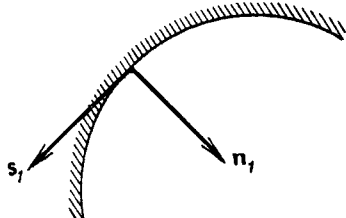


Рис. 50.

<sup>1)</sup> См. по этому поводу А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ 27, вып. 11 и 12 (1947).

ние отсутствия тангенциальной составляющей равносильно условию

$$E_{s_1} = 0, \quad E_{z_1} = 0 \quad \text{на границе}$$

или

$$E_{s_1} = -ik e^{-ikz} \frac{\partial \Psi_e}{\partial s} = 0 \quad \text{на границе,}$$

$$E_{z_1} = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) e^{-ikz} \Psi_e = 0.$$

Очевидно, что оба условия выполняются, если всюду на поверхности волновода

$$\Psi_e = 0.$$

Таково граничное условие для **E**-волн.

Во второй задаче

$$\mathbf{E} = -i \frac{\omega}{c} \operatorname{rot} \Pi_m = -i \frac{\omega}{c} \begin{vmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{z}_1 \\ \frac{\partial}{\partial n_1} & \frac{\partial}{\partial s_1} & \frac{\partial}{\partial z_1} \\ 0 & 0 & \Pi_{zm} \end{vmatrix}$$

и, следовательно,

$$E_s = -i \frac{\omega}{c} \frac{\partial \Pi_m}{\partial n}, \quad E_z \equiv 0.$$

Требование отсутствия тангенциальной составляющей электрического поля  $E_t$  на границе равносильно в рассматриваемом случае условию

$$\frac{\partial \Pi_{zm}}{\partial n} = 0 \quad \text{на границе,}$$

но

$$\Pi_m = \Pi_{zm} = \Psi_m(x, y) e^{i\omega t - ikz},$$

следовательно,

$$\frac{\partial \Psi_m}{\partial n} = 0 \quad \text{на границе.}$$

Итак, имеем следующие уравнения и граничные условия: для **E**-волн

$$\Delta_r \Psi_e + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \Psi_e = 0, \quad (8.30)$$

$$\Psi_e = 0 \quad \text{на границе,}$$

для **H**-волн

$$\Delta_r \Psi_m + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \Psi_m = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi_m}{\partial n} = 0 \quad \text{на границе.} \quad (8.31)$$

Задача определения **E**-волн представляет собой первую классическую краевую задачу: по заданному значению функции на границе и уравнению колебаний определить функцию внутри области;

задача определения Н-волн представляет собой вторую классическую краевую задачу: по заданной нормальной производной функции на границе и уравнению колебаний определить значение функции внутри области.

Важно отметить, что если бы мы потребовали для Е-волн уничтожения на поверхности не только тангенциальных составляющих, но и нормальных<sup>1)</sup>

$$E_n = \frac{\partial^2 \Pi_{ze}}{\partial n \partial z} = -ik \frac{\partial \Psi}{\partial n} e^{-ikz} = 0 \quad \text{на границе,}$$

мы пришли бы к задаче колебаний с граничными условиями  $\Psi = 0$  и  $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$ . Однако эта задача имеет решением только  $\Psi = 0$  во всей области. Таким образом, одна из особенностей Е волн заключается в том, что они сопровождаются зарядами на поверхности проводника ( $E_n = 4\pi\sigma \neq 0$ ).

Для Н-волн требование

$$E_n = \frac{\partial^2 \Pi_{zm}}{\partial s \partial n} = -in \frac{\partial \Psi_m}{\partial s} e^{-ikz} = 0 \quad \text{на границе}$$

не противоречит граничному условию задачи, поэтому, смотря по решению,  $E_n$  может быть как отличной от нуля, так и равной нулю; в то же время тангенциальная компонента магнитного поля вдоль волновода на границе обязательно должна быть отлична от нуля. Действительно,

$$H_z = \frac{\partial^2 \Pi_{zm}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \Pi_{zm} = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \Psi_m e^{-ikz},$$

обращение этой величины в нуль привело бы или к условию  $\Psi_m = 0$  на границе, что вместе с граничным условием задачи  $\frac{\partial \Psi_m}{\partial n} = 0$  дало бы только решение  $\Psi_m \equiv 0$ , или к условию  $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2$ , что приводит к уравнению Лапласа

$$\Delta_r \Psi_m = 0,$$

которое вместе с пограничным условием  $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$  опять-таки дает в качестве решения  $\Psi_m \equiv 0$ .

Разрешимость задач (8.30) и (8.31) для произвольных форм сечений, нахождение дискретного спектра собственных значений, при которых задачи имеют решения, — все это составляет содержание соответствующих разделов математики.

Определим вид спектра, т. е. значения величин  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2$  и структуру волн в сечении для двух особо важных случаев — волноводов прямоугольного и круглого сечений.

<sup>1)</sup> В дальнейших формулах множитель  $e^{i\omega t}$  для простоты записи опущен.

Волновод прямоугольного сечения. Для Е-волн решение имеет вид

$$\Psi_{nm} = \sin \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi m}{b} y,$$

где  $n$  и  $m$  — целые числа,  $a$  и  $b$  — линейные размеры прямоугольного сечения волновода (рис. 51). Это решение удовлетворяет граничному условию

$$\Psi_{nm} \Big|_{\substack{x=a, 0 \\ y=b, 0}} = 0.$$

Подстановка в уравнение приводит к следующему условию на частоты (или волновые числа):

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2.$$

Это условие может быть названо дисперсионным уравнением по аналогии с условием для случая неограниченной среды, в которое это условие переходит при  $a \rightarrow b \rightarrow \infty$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2.$$

Для Н-волн аналогично имеем:

$$\Psi_{nm} = \cos \frac{\pi n}{a} x \cos \frac{\pi m}{b} y,$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2.$$

Таким образом, имеется бесконечное счетное множество волн каждого типа, соответствующих всем комбинациям целых чисел  $n$  и  $m$ , причем для Е-волн ни одно из чисел не может быть равным нулю, в противном случае поля тождественно обращаются в нуль, но для

Н-волн одно из чисел, но не оба вместе, может равняться нулю, поскольку  $\Psi$  в этом случае не обращается в нуль и в то же время не является постоянной.

Дисперсионное уравнение приводит к существованию минимальной частоты, начиная с которой возможно распространение волнового процесса в волноводе. Перепишем дисперсионное уравнение так:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \omega_0^2,$$

где

$$\omega_0^2 = c^2 \left\{ \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 \right\},$$

для  $\omega > \omega_0$  распространение имеет место, поскольку  $k^2 > 0$  и, следовательно,  $k$  — действительное число, для  $\omega^2 < \omega_0^2$   $k^2 < 0$  и  $k$  ста-

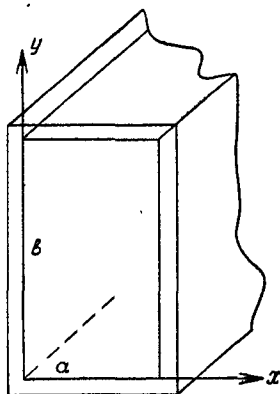


Рис. 51.

новится мнимым числом, т. е. появляется монотонное убывание амплитуд в направлении распространения.

Минимальная критическая частота определяется поперечными размерами волновода

$$\alpha_0^2 = c^2 \left\{ \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \right\} \quad (n = 1, m = 1).$$

Если в неограниченном пространстве фазовая скорость электромагнитных волн не зависела от длины волны

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{k} = c = \frac{d\omega}{dk} = v_{\text{гр}},$$

то в рассматриваемом случае

$$v_{\Phi}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{1}{k^2} \left\{ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{b} \right)^2 \right\},$$

т. е.  $v_{\Phi}$  зависит от волнового числа и всегда превышает скорость света в вакууме. Далее,

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \frac{1}{k^2} \left[ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{b} \right)^2 \right]}},$$

так что имеет место простое соотношение  $v_{\Phi} v_{\text{гр}} = c^2$ .

Рассмотрим основные особенности структуры поля в поперечном сечении. Для Е-волн отлична от нуля нормальная составляющая электрического поля к поверхности проводника, так как из общей формулы

$$E_n = \frac{\partial^2 \Pi_{ze}}{\partial n \partial z}$$

следует:

$$E_x \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = -ike^{-ikz} \cos \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi m}{b} y \cdot \frac{\pi n}{a} \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} \neq 0,$$

$$E_y \Big|_{\substack{y=0 \\ y=b}} = -ike^{-ikz} \sin \frac{\pi n}{a} x \cos \frac{\pi m}{b} y \cdot \frac{\pi m}{b} \Big|_{\substack{y=0 \\ y=b}} \neq 0.$$

Таким образом, силовые линии электрического поля начинаются и кончаются на поверхности проводника. При этом на стенках волновода обязательно индуцируются поверхностные электрические заряды, а поскольку силовые линии электрического поля имеют продольную составляющую, заряды меняют знаки в направлении оси волновода. Таким образом, линии электрического поля, начинаясь на поверхности волновода с положительным зарядом, изгибаются в направлении вдоль волновода и заканчиваются на проводнике с отрицательным зарядом (рис. 52).

Магнитное поле всегда перпендикулярно к электрическому и, поскольку оно не имеет продольной составляющей, силовые линии магнитного поля расположены в плоскости, перпендикулярной к оси волновода.

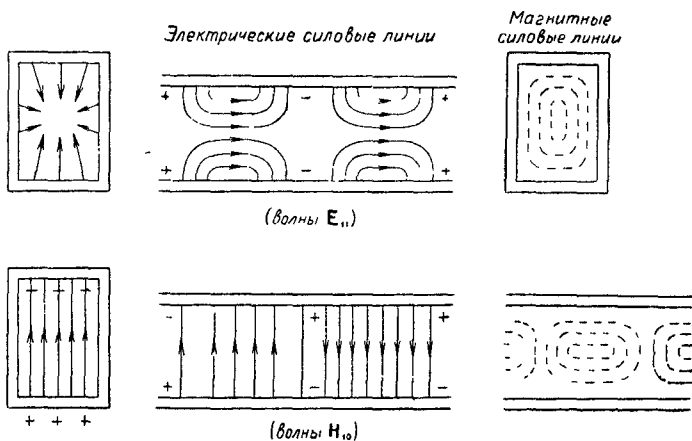


Рис. 52.

На поверхности волновода тангенциальная компонента магнитного поля, лежащая в плоскости сечения, отлична от нуля

$$H_s = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}_s \Pi_e = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} n_1 & s_1 & z_1 \\ \frac{\partial}{\partial n} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \Pi_{ez} \end{vmatrix} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Pi_{ez}}{\partial n \partial t},$$

$$H_s \Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{i\omega}{c} e^{-ikz} \cos \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi m}{b} y \cdot \frac{\pi n}{a} \Big|_{x=0}^{x=a} \neq 0,$$

$$H_s \Big|_{y=0}^{y=b} = \frac{i\omega}{c} e^{-ikz} \sin \frac{\pi n}{a} x \cos \frac{\pi m}{b} y \cdot \frac{\pi m}{b} \Big|_{y=0}^{y=b} \neq 0.$$

Таким образом, имеется скачок тангенциальных составляющих магнитного поля у границы. Величина скачка определяет плотность поверхностного тока в направлении оси волновода.

Для  $H$ -волн рассмотрим распределение поля в случае волны наиболее простого типа, т. е. при  $n=1$ ,  $m=0$ . В этом случае

$$\Psi_{10} = \cos \frac{\pi}{a} x$$



и, следовательно,

$$H_z = \frac{\partial^2 \Pi_{zm}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \Pi_{zm} = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \Psi_m e^{-ikz} = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \cos \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-ikz},$$

$$H_x = \frac{\partial^2 \Pi_{zm}}{\partial x \partial z} = ik \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \frac{\pi}{a} e^{-ikz}, \quad H_y = \frac{\partial^2 \Pi_{zm}}{\partial y \partial z} = ik \frac{\partial \Psi_m}{\partial y} = 0,$$

$$E_z = -i \frac{\omega}{c} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \Pi_{zm} \end{vmatrix} = 0, \quad E_x = 0,$$

$$E_y = i \frac{\omega}{c} \frac{\partial \Pi_{zm}}{\partial x} = -i \frac{\omega}{c} \sin \frac{\pi}{a} x \frac{\pi}{a} e^{-ikz}.$$

У электрического поля имеется только одна составляющая  $E_y$ , так что силовые линии электрического поля идут параллельно оси  $y$ , индуцируя на верхнем и нижнем основаниях волновода противоположные по знаку заряды (рис. 52). Эти заряды равны по величине, поскольку

$$E_y \Big|_{x=0} = E_y \Big|_{x=a} \quad (E_n = 4\pi\sigma).$$

Магнитное поле образует замкнутые силовые линии, окружающие вертикальные токи электрического смещения. На стенках отлична от нуля только продольная составляющая магнитного поля, индуцирующая поверхностную плотность тока, циркулирующего только по периферии сечения проводника. Токи вдоль волновода отсутствуют, так как  $H_x = 0$  у стенок, а  $H_y$  равно нулю всюду.

Волновод круглого сечения. Для волновода круглого сечения исходные уравнения для обоих типов волн имеют вид

$$\Delta_r \Psi_e + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \Psi_e = 0, \quad \Psi_e = 0 \quad \text{на границе,} \quad \Pi_e = \Pi_{ze} = \Psi_e e^{-ikz};$$

$$\Delta_r \Psi_m + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \Psi_m = 0, \quad \frac{\partial \Psi_m}{\partial n} = 0 \quad \text{на границе,} \quad \Pi_m = \Pi_{zm} = \Psi_m e^{-ikz}.$$

Задачу удобно решать в цилиндрической системе координат  $r$  и  $\varphi$ , в которой двухмерный оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \Psi = 0$$

имеет решение с разделяющимися переменными:

$$\Psi(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi).$$

Подстановка дает для  $\Phi$  уравнение:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n^2\Phi = 0.$$

Чтобы интеграл этого уравнения учитывал периодичность решения

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi),$$

должно быть

$$e^{in\varphi} = e^{in(\varphi + 2\pi)},$$

что имеет место, если  $n$  — произвольное целое число.

Для радиальной функции получаем бесселево уравнение:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{n^2}{r^2} R + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) R = 0.$$

Это уравнение, как известно из математики, имеет решение, выражающееся через цилиндрические функции порядка  $n$ :

$$R = AJ_n \left( r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \right) + BN_n \left( r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \right),$$

где  $J$  — функция Бесселя и  $N$  — функция Неймана.

Так как при  $r \rightarrow 0$  функция  $N$  стремится к бесконечности, то для нашей задачи необходимо положить  $B = 0$ .

Таким образом, решение для  $\Psi$  в обоих случаях имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi(r, \varphi) &= AJ_n \left( r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \right) \{ e^{in\varphi} + b e^{-in\varphi} \} = \\ &= a \cos(n\varphi + b) J_n \left( r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \right). \end{aligned}$$

Граничные условия здесь следующие:

$$\Psi_e(r, \varphi) \Big|_{r=a} = 0, \quad \frac{d\Psi_m}{dr} \Big|_{r=a} = 0.$$

Они приводят к условиям:

$$J_n \left( a \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \right) = 0 \quad (\text{для Е-волн}),$$

$$J'_n \left( a \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \right) = 0 \quad (\text{для Н-волн}).$$

Функция Бесселя  $J_n(x)$  имеет бесчисленное число значений  $x$ , при которых она или ее производная становится равной нулю; эти корни приводят к дисперсионному уравнению, связывающему частоту  $\omega$  и волновое число  $k$ .

Если  $\nu_{nl}$  есть  $l$ -й корень бесселевой функции порядка  $n$ , то дисперсионное уравнение для  $E$ -волн имеет вид

$$a \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} = \nu_{nl} \quad \text{или} \quad \omega^2 = c^2 k^2 + c^2 \frac{\nu_{nl}^2}{a^2};$$

для  $H$ -волн аналогично имеем:

$$\omega^2 = c^2 k^2 + c^2 \frac{\nu'_{nl}}{a^2},$$

где  $\nu'_{nl}$  — корень уравнения  $J'_n(x) = 0$ . Целое число  $n$  определяет собственную функцию, зависящую от угла  $\varphi$  и, следовательно, изменение поля вдоль окружности, целое число  $l$  — радиальную собственную функцию и, следовательно, изменение поля по радиусу.

Наименьшее значение частоты соответствует первому корню функции Бесселя нулевого порядка, равному 2,405. Корни уравнения  $J'_n(x) = 0$  лежат выше соответствующих корней  $J_n(x) = 0$ ; поэтому  $E_{01}$ -волна имеет наименьшую частоту из всех возможных  $E$ -волн в волноводе. Наименьший корень  $J'_n(x) = 0$  имеет место при  $n = 1$ ,  $l = 1$ ; он равен 1,84; поэтому  $H_{11}$  имеет наименьшую критическую частоту из всех возможных  $H$ -волн.

Для  $E$ -волн простейшую структуру имеет волна с  $n = 0$  и  $l = 1$ . Для нее имеем:

$$E_r = \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial r \partial z} = -ik \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -ika \cos bJ'_0 \left( r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \right),$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \varphi} = 0,$$

$$E_z = \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z^2} = k^2 e^{-ikz} \Psi = -k^2 a \cos bJ_0 \left( r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \right).$$

Поле такой волны не зависит от угла  $\varphi$ . Электрические силовые линии в плоскости сечения направлены по радиусам, выходя из

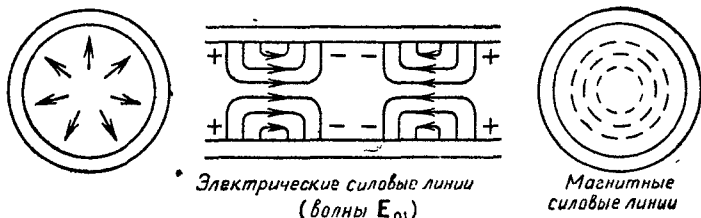


Рис. 53.

плоскости сечения в окрестности центра. Магнитные силовые линии целиком расположены в плоскостях сечения и направлены по окружностям (рис. 53).

Для Н-волны с  $n=0$  и  $l=1$  имеем:

$$E_r = i \frac{\omega}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_m}{\partial \varphi} = 0, \quad H_r = i \frac{\omega}{c} \frac{\nu'_{01}}{a} e^{-ikz} J'_0 \left( \frac{\nu'_{01}}{a} r \right),$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_m}{\partial r} = i \frac{\omega}{c} e^{-ikz} J'_0 \left( \frac{\nu'_{01}}{a} r \right) \frac{\nu'_{01}}{R},$$

$$H_z = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \Pi_m = \left( \frac{\nu'_{01}}{a} \right)^2 e^{-ikz} J'_0 \left( \frac{\nu'_{01}}{a} r \right),$$

$$E_z = 0,$$

$$H_\varphi = 0,$$

где  $\nu_{01}$  — наименьший корень уравнения  $J'_0(x) = 0$  ( $x = 3,83$ ). Здесь поле также не зависит от угла  $\varphi$ . Магнитные силовые линии в плоскости сечения направлены по радиусам, выходя, однако, из плоскости сечения при перемещении к границе проводника, а также

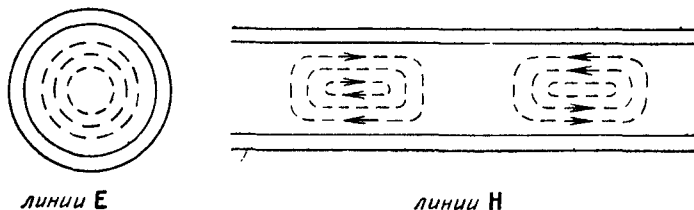


Рис. 54.

к центру трубы. Составляющая  $H_z$  у стенок трубы имеет конечное значение

$$J_0 \left( \frac{3,83}{a} a \right) \neq 0.$$

Электрические силовые линии направлены по окружностям и расположены только в плоскостях сечения (рис. 54). В этом случае индуцированных зарядов на стенке не возникает, однако органическая связь со стенками поля не нарушается, так как существуют поверхностные токи.

Список опечаток

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
11	15 св.	постигается	достигается
27	9 "	$\frac{\partial (p\alpha p)}{\partial p}$	$\frac{\partial (p\alpha p)}{\partial p}$
39	8 "	$\frac{\partial H_0}{\partial r}$	$\frac{\partial H_0}{\partial \varphi}$
80	11 "	$R_K$	$R_K'$
90	14 сл	$+\frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2}$	$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right.$
"	13 "	$\Sigma e_i r_i^2 i + \dots$	$\Sigma e_i r_i^2 i\} + \dots$
142	12 св.	$R^2$	$R_2$
202	2 "	$n^2 = -\frac{\epsilon}{2}$	$n^2 = +\frac{\epsilon}{2}$
"	3 "	$x^2 = +\frac{\epsilon}{2}$	$x^2 = -\frac{\epsilon}{2}$
223	10 "	$c^2 + \frac{1}{k^2} \left\{ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{b} \right)^2 \right\}$	$c^2 \left\{ 1 + \frac{1}{k^2} \left[ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{b} \right)^2 \right] \right\}$
"	13 "	$c^2 +$	$1 +$