

**Н. Н. ВОЙТОВИЧ  
Б. З. КАЦЕНЕЛЕНБАУМ  
А. Н. СИВОВ**

**ОБОБЩЕННЫЙ  
МЕТОД  
СОБСТВЕННЫХ  
КОЛЕБАНИЙ  
В ТЕОРИИ  
ДИФРАКЦИИ**

Н. Н. ВОЙТОВИЧ, Б. З. КАЦЕНЕЛЕНБАУМ,  
А. Н. СИВОВ

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД  
СОБСТВЕННЫХ  
КОЛЕБАНИЙ  
В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

С дополнением  
М. С. АГРАНОВИЧА

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА  
ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва 1977

530.1  
В 65  
УДК 530.1

**Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции,**  
Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов.  
С дополнением М. С. Аграновича, Главная редакция физико-математической литературы, Изд-во «Наука», Монография, 1977 г.

Книга содержит изложение нового метода решения широкого класса задач дифракции и рассеяния (акустика, электродинамика, уравнение Шредингера). Изложен формальный аппарат различных вариантов метода, основанного на разложении дифрагированного поля в ряд по собственным функциям однородных задач, в которых собственным значением выбирается не частота. Строгой математической трактовке этого подхода посвящено дополнение, где средствами функционального анализа исследованы свойства важнейших из рассмотренных в книге спектральных задач. Метод особенно эффективен для анализа резонансных систем, в частности — открытых резонаторов и волноводов. Он позволяет представить решение в бесконечной области в виде ряда (спектр дискретен), частично суммировать нерезонансный фон, широко применять вариационный аппарат и т. д. Решен ряд новых задач.

Рис. 27, табл. 6, библи. 107 назв.

*Николай Николаевич Войтович, Борис Захарович Каценеленбаум,  
Алексей Николаевич Сивов*

**ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ**

С дополнением М. С. Аграновича

М., 1977 г., 416 стр. с илл.

Редактор В. Д. Козлов

Техн. редактор Л. В. Лихачева. Корректор Т. С. Вайсберг

Сдано в набор 4.07.1977 г. Подписано к печати 21.11.1977 г. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Физ. печ. л. 13. Условн. печ. л. 21,84. Уч.-изд. л. 20,75. Тираж 3900 экз. Т-20724.  
Цена книги 2 р. 30 к. Заказ № 654.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени  
Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета  
Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 20.

В 20402-165  
053(02)-77 106-77

© Главная редакция  
физико-математической литературы  
издательства «Наука», 1977

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
Введение . . . . .	7
§ 1. Идея метода; содержание книги . . . . .	7
§ 2. Метод собственных частот ( <i>k</i> -метод) . . . . .	17
Глава I. Собственное значение в уравнении ( <i>e</i> -метод) . . . . .	24
§ 3. Диэлектрическое тело в закрытом резонаторе с идеальными стенками . . . . .	25
§ 4. Диэлектрическое тело в резонаторе с поглощающими стенками, в открытом резонаторе или в пустоте . . . . .	33
§ 5. Неоднородный диэлектрик, первая поляризация . . . . .	42
§ 6. Неоднородный диэлектрик, вторая поляризация . . . . .	58
§ 7. Квантовомеханическая задача об упругом рассеянии на квазистационарном уровне . . . . .	66
§ 8. Диэлектрическое тело, уравнения Максвелла . . . . .	71
Глава II. Собственное значение в граничных условиях . . . . .	85
§ 9. Собственное значение в граничном условии импедансного типа ( <i>ω</i> -метод) . . . . .	87
§ 10. Собственное значение в граничных условиях сопряжения ( <i>ρ</i> -метод); металлические и полупрозрачные поверхности . . . . .	97
§ 11. Собственное значение в граничных условиях сопряжения ( <i>ρ</i> -метод); диэлектрические тела . . . . .	109
§ 12. Собственное значение в условиях сопряжения общего вида . . . . .	117
§ 13. Собственное значение в условиях на бесконечности ( <i>s</i> -метод) . . . . .	125
§ 14. Металлические и полупрозрачные поверхности; уравнения Максвелла . . . . .	138
Глава III. Вариационный аппарат . . . . .	146
§ 15. Собственное значение в уравнении . . . . .	147
§ 16. Собственное значение в граничных условиях . . . . .	159

§ 17. Многопараметрические задачи . . . . .	176
§ 18. Уравнения Максвелла . . . . .	188
<b>Глава IV. Применение к конкретным задачам . . . . .</b>	<b>200</b>
§ 19. Методические примеры . . . . .	202
§ 20. Рассеяние на квазистационарном уровне . . . . .	219
§ 21. Диэлектрическое тело в закрытом или в открытом резонаторе ( $\epsilon$ -метод, $E$ -поляризация) . . . . .	227
§ 22. Открытый резонатор из пары металлических пластин ( $\rho$ -метод) . . . . .	232
§ 23. Открытый резонатор с полупрозрачными стенками, образующими замкнутую поверхность; вытекающие волноводные волны ( $\rho$ -метод) . . . . .	239
§ 24. Двумерный металлический резонатор произвольной формы с малым отверстием; связь двух резонаторов ( $H$ -поляризация, $\rho$ -метод) . . . . .	249
§ 25. Двумерный металлический резонатор произвольной формы с малым отверстием ( $E$ -поляризация, $\rho$ -метод) . . . . .	258
§ 26. Открытый резонатор из диэлектрика с большой диэлектрической проницаемостью ( $E$ -поляризация, $\rho$ -метод) . . . . .	265
§ 27. Открытый резонатор с полупрозрачными стенками, образующими замкнутую границу ( $E$ -поляризация, $s$ -метод) . . . . .	269
§ 28. Волновод с продольной щелью, вытекающие волны ( $E$ -поляризация, $s$ -метод) . . . . .	276
§ 29. Обзор литературы . . . . .	280
<b>Литература . . . . .</b>	<b>286</b>

**ДОПОЛНЕНИЕ. М. С. Агранович. Спектральные свойства задач дифракции . . . . .**

§ 30. Введение . . . . .	289
§ 31. Системы векторов и несамосопряженные операторы в гильбертовом пространстве . . . . .	297
§ 32. Пространства С. Л. Соболева . . . . .	311
§ 33. Псевдодифференциальные операторы . . . . .	316
§ 34. Эллиптические псевдодифференциальные операторы и граничные задачи . . . . .	326
§ 35. Признаки базисности . . . . .	335
§ 36. Скалярная задача со спектральным параметром в условии сопряжения . . . . .	347

§ 37. Другие скалярные задачи со спектральным параметром в граничных условиях . . . . .	361
§ 38. Скалярная задача со спектральным параметром в уравнении . . . . .	370
§ 39. $s$ -метод . . . . .	380
§ 40. Векторные задачи со спектральным параметром в граничных условиях . . . . .	390
<b>Заключительные замечания . . . . .</b>	<b>409</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>413</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Метод собственных колебаний обычно трактуется как законченный метод решения задач дифракции, почти не имеющий явных точек соприкосновения с каким-либо другим методом. В этой книге авторы показывают, что его можно рассматривать как один из вариантов некоторого более общего метода, в котором в качестве собственного значения вспомогательной однородной задачи выбирается не обязательно частота. Во многих задачах дифракции — в первую очередь при исследовании открытых резонаторов — естественными и наиболее эффективными являются другие варианты этого общего метода. В них однородная задача формулируется так, что собственными значениями являются другие физические параметры.

Большая часть книги содержит изложение формального аппарата этих вариантов (главы I—II), построение стационарных функционалов (глава III) и примеры применения этих вариантов к конкретным задачам (глава IV).

Дополнение посвящено строгой математической трактовке и обоснованию аппарата, построенного в главах I—II. Для этой цели здесь привлекаются средства некоторых разделов функционального анализа. Такой контакт классической математической физики с функциональным анализом оказывается взаимно полезным; можно надеяться, что он будет интересен и для физиков, и для математиков.

Большая часть результатов первых четырех глав получена тремя авторами практически совместно. Однако каждый из них более подробно разрабатывал определенный круг вопросов. Н. Н. Войтович написал §§ 15—21; Б. З. Каценеленбаум написал §§ 1—8; А. Н. Сивов написал §§ 9—14, 23—25, 27, 28; §§ 22, 26, 29 написаны совместно. Дополнение написал М. С. Агранович.

## ВВЕДЕНИЕ

### § 1. Идея метода; содержание книги

1. В теории дифракции для решения внутренних задач широко применяется метод собственных колебаний. Он состоит в том, что поле, возникающее при возбуждении замкнутого объема (т. е. решение неоднородной задачи), ищется в виде ряда по некоторым вспомогательным функциям — собственным функциям этого объема. Эти функции являются собственными функциями вспомогательной однородной задачи, соответствующими различным значениям собственной частоты. Они образуют полную и ортогональную систему. Метод особенно эффективен для резонаторов с малыми потерями и при частоте, близкой к одной из собственных частот.

Обобщенный метод собственных колебаний, основы которого излагаются в этой книге, также состоит в *представлении решения стационарной задачи дифракции в виде ряда* по некоторой ортогональной системе функций. Он также эффективен в первую очередь вблизи резонанса. Он применим и для открытых резонаторов и вообще для любых задач дифракции на ограниченных телах. Его основная идея состоит в том, что в качестве собственных функций используются решения однородной задачи, в которой собственным значением является, вообще говоря, не частота (как в обычном методе), а *какой-либо электродинамический параметр* — например, диэлектрическая проницаемость некоторого вспомогательного тела, занимающего тот же объем, что и тело, на котором происходит дифракция. Какая именно величина принимается в качестве собственного значения однородной задачи, зависит от вида задачи дифракции; в книге излагается несколько вариантов метода. Во всех изложенных вариантах *собственные функции* соответствуют

вещественной частоте; в частности, для незамкнутых систем они удовлетворяют условию излучения, и дифрагированное поле (т. е. разность между полным полем и падающим) может быть разложено в ряд по этим функциям без прибавления интеграла по непрерывному спектру. В обычном методе — методе собственных частот, который мы рассматриваем как частный случай обобщенного, — амплитуды слагаемых ряда для поля обратно пропорциональны разности собственной частоты и частоты источников (т. е. частоты, участвующей в задаче дифракции), и резонанс проявляется в том, что при близости этих частот амплитуда одного из слагаемых становится много больше других. В других вариантах амплитуды обратно пропорциональны разности между собственным значением того параметра, который играет эту роль в данном варианте, и значением этого параметра в задаче дифракции. Собственное значение есть функция частоты. Например, в методе, в котором собственным значением является импеданс поверхности тела, резонанс наступает вблизи частоты, при которой это собственное значение близко к истинному значению импеданса, и при этом возрастает амплитуда соответствующего члена ряда.

При решении конкретных задач какой-либо вариант обобщенного метода обычно оказывается в некоторых отношениях проще, чем метод собственных частот. Если задача сводится к трансцендентному уравнению, то уравнение это во всех методах одинаково, однако решать его не относительно частоты, а относительно какого-либо другого параметра обычно проще. В некоторых методах достаточно бывает лишь вычислить левую часть уравнения — эта величина при правильно записанном уравнении сама уже есть искомое собственное значение, т. е. полностью определяет резонансную кривую. Для систем с потерями часто удается избежать вычислений в комплексной области. Например, если диэлектрическая проницаемость тела комплексна, то целесообразно применять метод, в котором собственным значением является именно величина диэлектрической проницаемости — это собственное значение вещественно (если в задаче дифракции нет других потерь, кроме диэлектрических) и находится из вещественного уравнения. Ана-

логичные соотношения справедливы для вариационного аппарата. Для собственных значений во всех вариантах обобщенного метода существуют стационарные функционалы, и, например, применение метода Ритца приводит к одним и тем же трансцендентным уравнениям, из которых собственные значения обобщенного метода находят обычно проще, чем собственную частоту.

Для задач, сводящихся к интегральным уравнениям, существует какой-либо вариант обобщенного метода, при котором ядро имеет особенно простой вид и собственное значение входит множителем в ядро (а не в аргументы специальных функций, как собственная частота). Если задача дифракции сводится к неоднородному интегральному уравнению, то соответствующее однородное интегральное уравнение второго рода обычно может трактоваться как уравнение для собственных функций одного из обобщенных методов. Основной результат теории в этой ситуации состоит в том, что собственные значения этих уравнений имеют простой физический смысл; зная их, можно полностью исследовать окрестность резонансной частоты.

В предлагаемой книге с единой точки зрения сформулированы различные возможности, которые возникают в методе собственных колебаний при его обобщениях.

2. Проиллюстрируем некоторые черты обобщенного метода на примере упоминавшегося варианта, в котором собственным значением является импеданс поверхности; подробно этот аппарат изложен в § 9. Пусть решается простейшая двумерная скалярная задача дифракции (внутренняя или внешняя) на круговом цилиндре радиуса  $a$ . Искомое поле  $U(r, \varphi)$  должно удовлетворять граничному условию  $U(a, \varphi) = 0$ , волновому уравнению с правой частью (возбуждающие токи), а если решается внешняя задача — то еще и условию излучения. Собственные функции и собственные значения упомянутого варианта обобщенного метода для этой задачи можно выписать в явном виде.

Для внутренней задачи собственными функциями будут функции (ср. с собственными функциями (2.11) для того же объема в методе собственных частот)

$$u_n(r, \varphi) = J_n(kr) \cos n\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.1)$$

(для простоты записи мы ограничились четными по  $\varphi$  функциями).

Временная зависимость принята в форме  $\exp(i\omega t)$ . Частоту мы будем характеризовать волновым числом  $k = \omega/c$  и эту величину будем называть частотой.

На поверхности тела ( $r = a$ ) функции (1.1) ортогональны друг другу. Каждая из них удовлетворяет импедансному условию (граничному условию третьего рода)

$$u_n - \omega_n \frac{\partial u_n}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0. \quad (1.2)$$

Числа  $\omega_n$  и рассматриваются как собственные значения, которым соответствуют собственные функции (1.1). В этом простом примере их легко найти:

$$\omega_n = \frac{J_n(ka)}{kJ'_n(ka)}. \quad (1.3)$$

Решение задачи дифракции записывается в виде

$$U(r, \varphi) = U^0(r, \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n(r, \varphi). \quad (1.4)$$

Здесь  $U^0$  — поле тех же источников в отсутствие цилиндра (тела, на котором происходит дифракция), т. е. в пустоте. Как и всюду далее, в ряд разлагается не  $U$ , а  $U - U^0$ .

Ряд (1.4) удовлетворяет неоднородному волновому уравнению; почленно он не удовлетворяет граничному условию для  $U$  при  $r = a$ . Коэффициенты  $A_n$  находятся из требования, чтобы этому условию удовлетворял весь ряд. Так как при  $r = a$  функции  $u_n$  ортогональны, то для  $A_n$  получатся явные выражения. Мы запишем их в виде

$$A_n = - \frac{\int_0^{2\pi} U^0(a, \varphi) \cos n\varphi d\varphi}{\pi(1 + \delta_{0n}) k \omega_n J'_n(ka)}, \quad (1.5)$$

подчеркнув зависимость  $A_n$  от  $\omega_n$ . Коэффициенты  $A_n$  обратно пропорциональны  $\omega_n$ , т. е. содержат в знаменателе  $J_n(ka)$ ; при приближении частоты к корням этого знаменателя наступает резонанс.

В том же виде (1.4) с теми же  $u_n$  (1.1) и  $\omega_n$  (1.3) решается задача дифракции и в том случае, если искомое поле должно при  $r = a$  удовлетворять импедансному условию

$$U - \omega \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0, \quad (1.6)$$

где  $\omega$  — заданное число. Тогда  $A_n$  содержит в знаменателе  $\omega - \omega_n$ , и резонанс соответствует малому значению этой разности.

Аппарат не усложняется и для внешних задач. Собственные функции должны, как и искомое решение, удовлетворять условию излучения, и при принятой у нас временной зависимости они будут равны

$$u_n(r, \varphi) = H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi. \quad (1.7)$$

Соответственно изменится и явный вид  $\omega_n$ . Собственные значения  $\omega_n$  станут комплексными:

$$\omega_n = \frac{H_n^{(2)}(ka)}{kH_n^{(2)'}(ka)}. \quad (1.8)$$

Это обусловлено тем, что в системе есть потери на излучение, и потому  $\omega_n$  ни при какой частоте не обращается в нуль, а  $A_n$  — в бесконечность.

Функционал

$$W(u) = \frac{\int_S u^2 ds}{\int_V [-(\nabla u)^2 + k^2 u^2] dV} \quad (1.9)$$

(где  $V$  и  $S$  — рассматриваемая область и ее граница) стационарен на функциях (1.1) и равен на них  $-\omega_n$  по (1.3); интегрирование производится по внутренности круга. Для внешней задачи он стационарен на функциях (1.7) и равен на них (1.8); интегрирование производится по внешности круга, и в интеграле следует полагать  $\text{Im } k = +0$ . Стационарность (1.9) позволяет использовать прямые методы для вычисления  $\omega_n$  и тем самым для определения резонансной кривой, описываемой зависимостью величины  $1/|\omega_n(k) - \omega|$  от частоты  $k$ .

В этой задаче все полученные результаты тривиальны и могут быть, разумеется, найдены просто разделением переменных. Решая задачу о дифракции на цилиндре или о возбуждении цилиндрического резонатора этим методом, пользуются рядами типа (1.4). В этом варианте (§ 9) обобщенного метода собственных колебаний такие ряды используются и в том случае, когда каждая функция  $u_n$  не является произведением функций от одной координаты — основным является то, что  $u_n$  удовлетворяет волновому уравнению и граничному условию (1.2).

3. Во всех вариантах метода, описанных в книге, решение задачи дифракции (т. е. решение неоднородного уравнения) ищется в виде ряда типа (1.4), и различные варианты отличаются тем, как вводятся собственные функции  $u_n$ , т. е. решением каких однородных задач они являются. И уравнение, и граничные условия для  $u_n$  должны быть однородными. Если уравнение для  $u_n$  будет отличаться от уравнения для  $U$  только отсутствием правой части, а граничные условия для  $u_n$  будут теми же, что и для  $U$ , то  $u_n$  будут, вообще говоря, тождественно равны нулю. Для того чтобы получить систему  $u_n$ , надо изменить либо уравнение, либо граничные условия и ввести в них некоторый свободный параметр, который будет играть роль собственного значения.

Во втором параграфе Введения и в первой главе изложен аппарат, в котором изменена левая часть уравнения, а граничные условия для  $u_n$  совпадают с условиями для  $U$ . Во второй главе  $u_n$  удовлетворяют уравнению с неизменной левой частью, но граничные условия для  $u_n$  отличны от условий для  $U$ .

Соответственно либо уравнение, либо граничное условие для  $U$  будет выполняться не почленно, а только всем рядом. Из этого требования и вычисляются коэффициенты  $A_n$ . Существенно, что если  $A_n$  находится из условия на  $S$ , то  $u_n$  ортогональны (вещественно-ортогональны) на  $S$  (как в примере предыдущего пункта), а если  $A_n$  находится из условия в объеме  $V$ , то  $u_n$  ортогональны именно в  $V$ .

4. Во втором параграфе излагается обычный метод, т. е. метод собственных частот. Из всех требований, налагаемых на искомое решение задачи дифракции, функ-

ции  $u_n$  в этом методе не удовлетворяют условию — частота равна частоте источников; частота является собственным значением. Метод этот общеизвестен и излагается для того, чтобы создать единую картину всего аппарата.

Имея в виду, что частота всюду характеризуется у нас волновым числом  $k$ , и вынося в название метода ту букву, которая является собственным значением, мы называем этот метод  $k$ -методом.

В первой главе изложен метод, в котором роль собственного значения играет диэлектрическая проницаемость. Метод применим к задаче дифракции на диэлектрическом теле. Функции  $u_n$  удовлетворяют однородному волновому уравнению, в котором диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  тела заменена на собственное значение  $\epsilon_n$ . Функции  $u_n$  ортогональны при интегрировании по телу, а коэффициенты  $A_n$  содержат в знаменателе разность  $\epsilon - \epsilon_n$ . Если в системе нет никаких потерь или есть только диэлектрические потери, т. е. потери, обязанные комплексности  $\epsilon$ , то  $\epsilon_n$  вещественны. Для открытых резонаторов и вообще для задач дифракции, в которых есть потери на излучение,  $\text{Im } \epsilon_n > 0$ , т. е.  $\epsilon_n$  является диэлектрической проницаемостью некоторого активного (выделяющего энергию под действием поля) тела. Аппарат  $\epsilon$ -метода легко обобщается на задачи дифракции на неоднородных диэлектрических телах. В частности, этот метод применим и к квантовомеханической задаче рассеяния на потенциальном поле, которая коротко рассмотрена в § 7 и 20.

5. Во второй главе вводятся функции  $u_n$ , которые удовлетворяют правильному уравнению (т. е. однородному уравнению с  $\epsilon$  и  $k$  задачи дифракции) и неправильному (т. е. не тому же, что  $U$ ) граничному условию. Для различных задач дифракции удобно по-разному вводить эти граничные условия, определяющие  $u_n$  и содержащие собственные значения. В § 9 изложен вариант, намеренный в п. 2: функции  $u_n$  не удовлетворяют условию (1.6) для  $U$ , а удовлетворяют условию (1.2), в котором  $\omega_n$  — собственное значение. Функции  $u_n$  ортогональны на поверхности  $S$ , коэффициенты  $A_n$  содержат в знаменателе разность  $\omega - \omega_n$ . Если в системе нет потерь или потери вызваны только комплексностью  $\omega$ , то



$\omega_n$  вещественно, как в (1.3); в открытых системах  $\text{Im } \omega_n > 0$ , как в (1.8).

В одном из двух вариантов  $\rho$ -метода (§ 10) на поверхности металлического тела, на котором происходит дифракция, ставится условие, состоящее в том, что скачок нормальной производной  $u_n$  пропорционален функции  $u_n$ ; сама она на  $S$  непрерывна. Собственным значением является коэффициент пропорциональности  $\rho_n$ . В этом методе  $u_n$  удовлетворяет особенно простому интегральному уравнению на  $S$ :

$$-\rho_n u_n = \int_S G u_n dS, \quad (1.10)$$

где ядро  $G$  — функция Грина свободного пространства. Метод применим и к задачам дифракции на диэлектрических телах.

Во втором варианте  $\rho$ -метода (§ 11) нормальная производная функции  $u_n$  непрерывна на  $S$ , скачок испытывает сама  $u_n$ ; скачок этот пропорционален нормальной производной, и коэффициент пропорциональности  $\bar{\rho}_n$  является собственным значением задачи. Метод, изложенный в § 12, является обобщением  $\omega$ - и  $\rho$ -методов; между значениями  $u_n$  и ее нормальной производной с обеих сторон поверхности устанавливаются линейные соотношения. Этот метод применим к задачам дифракции при весьма общих граничных условиях для  $u$  на  $S$ , условиях типа неанзотропной полупрозрачной решетки.

В методе, изложенном в § 13, собственные значения вводятся через условия для собственных функций на бесконечности. Этот метод удобен для решения задач дифракции с потерями только на излучение.

Особенность всех методов главы II по сравнению с методами главы I состоит в том, что ряды типа (1.4) в случае разделения переменных имеют на один индекс суммирования меньше; например, в двумерной задаче сумма (1.4) — однократная, а в одномерной задаче ряд (1.4) сводится к одному слагаемому. Это «уменьшение размерности рядов» существенно упрощает конкретные вычисления и в общем случае тела произвольной формы.

6. В третьей главе выводятся *стационарные функционалы для собственных значений*, имеющие примерно такой же вид, как (1.9) или как известный функционал

релеевского типа для квадрата собственной частоты в незаполненном резонаторе:

$$K(u) = \frac{\int_V (\nabla u)^2 dV}{\int_V u^2 dV}. \quad (1.11)$$

Каждый из этих функционалов стационарен на собственных функциях соответствующих однородных задач и дает на них  $\epsilon_n$ ,  $\rho_n$  или  $\bar{\rho}_n$  точно так же, как (1.11) дает  $k_n^2$ , а (1.9) дает  $-\omega_n$ .

Оказывается, что между всеми этими функционалами существует простая связь. Покажем, например, как можно получить (1.9) из (1.11). Рассмотрим простейший случай — внутренняя задача, на замкнутой поверхности должно выполняться условие (1.6) с заданным  $\omega$ . Запишем функционал типа (1.11), который был бы стационарен на классе функций, от которых не требуется выполнения граничного условия (1.6). Для этого достаточно в числитель функционала (1.11) прибавить соответствующий поверхностный интеграл, т. е. заменить (1.11) на

$$K(u) = \frac{\int_V (\nabla u)^2 dV - \frac{1}{\omega} \int_S u^2 dS}{\int_V u^2 dV}. \quad (1.12)$$

Если теперь в (1.12) заменить обозначения  $K(u)$  на  $k^2$ , а  $\omega$  — на  $W(u)$  и разрешить это соотношение относительно  $W(u)$ , то получится (1.9). Эта формальная процедура, обоснованная в третьей главе, соответствует соотношению между однородными задачами в  $k$ -методе (собственное значение есть  $k_n^2$ ,  $\omega$  есть параметр задачи) и в  $\omega$ -методе ( $k^2$  есть параметр задачи,  $\omega_n$  — собственное значение). Во всех вариантах обобщенного метода стационарные функционалы могут быть получены из некоторого уравнения, содержащего параметры  $k^2$ ,  $\epsilon$ ,  $\omega$ ,  $\rho$ ,  $\bar{\rho}$ , если разрешать это уравнение относительно соответствующего параметра и рассматривать правую часть как функционал.

7. Четвертая глава содержит применение развитого аппарата к задачам, решение которых другими методами потребовало бы значительно больших усилий или было бы практически невозможно. Только первый параграф (и частично второй) содержат методические, иллюстративные примеры.

Первые два пункта последнего параграфа главы содержат литературные ссылки. Книга написана по материалам работ авторств (в частности — неопубликованным), но многие идеи, и часто в близкой форме, были известны ранее или публиковались независимо. Этот параграф содержит изложение соответствующих работ и сопоставление их с материалом книги. Список общих электродинамических и математических работ, использованных в книге, сделан весьма кратким. Третий пункт содержит соображения о некоторых возможных путях развития метода.

8. Математическое обоснование аппарата, развитого в главах I и II, связано с привлечением некоторых разделов современного функционального анализа. В Дополнении, написанном М. С. Аграновичем, кратко изложены необходимые сведения из этих разделов и на этой основе проведено исследование свойств операторов, связанных с важнейшими из рассмотренных в книге задач. Эти операторы — несамосопряженные (что связано с сущностью исследуемых задач), и особенностью применяемого в книге аппарата является использование рядов по собственным функциям этих несамосопряженных операторов. Однако эти операторы, как показано в Дополнении, очень близки к самосопряженным. Это позволило доказать, что дифрагированное поле допускает разложение в нужные ряды, причем при правильном способе их суммирования они быстро сходятся и их можно почленно дифференцировать. В Дополнении указана также асимптотика собственных значений и выведены априорные оценки для решений рассматриваемых задач. Подробнее содержание Дополнения объяснено в § 30.

Чтобы не утяжелять формальный аппарат, мы будем считать собственные значения простыми, исключая, в частности, появление присоединенных функций. Общий случай, как показано в Дополнении, не намного сложнее.

## § 2. Метод собственных частот (*k*-метод).

В этом параграфе на простейшей скалярной задаче мы изложим *известный метод решения задачи возбуждения закрытых резонаторов*. Описанные в последующих главах методы могут рассматриваться как обобщение метода этого параграфа, что и подчеркнуто в названии монографии.

1. Пусть ищется функция  $U$ , являющаяся решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = f \quad (2.1)$$

в ограниченной области  $V$  и удовлетворяющая на границе этой области  $S$  условию

$$U|_S = 0. \quad (2.2a)$$

Введем в рассмотрение систему функций  $u_n$ , удовлетворяющих однородному уравнению

$$\Delta u_n + k_n^2 u_n = 0 \quad (2.3)$$

и граничному условию

$$u_n|_S = 0. \quad (2.4a)$$

В неоднородной задаче (2.1), (2.2a)  $k$  — заданная величина. В однородной задаче (2.3), (2.4a)  $k_n$  — собственное значение. Существует счетное множество таких собственных значений (собственных частот), при которых эта задача имеет ненулевые решения — собственные функции.

Собственные значения задачи (2.3), (2.4a) вещественны. Это следует из первой формулы Грина

$$\int_V (u \Delta v + \nabla u \nabla v) dV = \int_S u \frac{\partial v}{\partial N} dS. \quad (2.5)$$

В (2.5) и всюду дальше  $N$  — внешняя для  $V$  нормаль к  $S$ . Если применить (2.5) к  $u = u_n^*$ ,  $v = u_n$ , заменить  $\Delta u_n$  по (2.3) и учесть, что поверхностный интеграл, согласно (2.4a), равен нулю, то для  $k_n^2$  получится веще-

ственное представление через собственную функцию

$$k_n^2 = \frac{\int |\nabla u_n|^2 dV}{\int |u_n|^2 dV}. \quad (2.6)$$

Функции, соответствующие различным значениям  $k_n$ , ортогональны между собой в вещественном смысле при интегрировании по объему:

$$\int u_n u_m dV = 0 \quad (n \neq m). \quad (2.7)$$

Это легко получить из второй формулы Грина

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_S \left( u \frac{\partial v}{\partial N} - v \frac{\partial u}{\partial N} \right) dS, \quad (2.8)$$

примененной к  $u = u_n$ ,  $v = u_m$ . Левая часть, согласно (2.3), равна

$$(k_n^2 - k_m^2) \int u_n u_m dV, \quad (2.9)$$

а правая вследствие (2.4а) равна нулю.

При граничном условии (2.4а) функции  $u_n$  всегда можно сделать вещественными; поэтому очевидно, что из (2.7) следует также и эрмитова ортогональность

$$\int u_n u_m^* dV = 0 \quad (n \neq m). \quad (2.10)$$

Индекс  $n$  во всех этих формулах — обобщенный и представляет собой три индекса в трехмерных задачах, два индекса — в двумерных (при разделении переменных). Если  $V$  есть круг радиуса  $a$  (двумерная задача), то собственные функции имеют вид (ограничимся четными по  $\varphi$  функциями)

$$u_n = J_m(k_{mq}r) \cos m\varphi \quad (m = 0, 1, \dots; q = 1, 2, \dots), \quad (2.11)$$

а собственные значения  $k_{mq}$  находятся из уравнения

$$J_m(k_{mq}a) = 0. \quad (2.12a)$$

При других значениях  $k_{mq}$  нет функций, одновременно удовлетворяющих уравнению (2.3) (и, в частности, конечных при всех  $r \leq a$ ) и условию (2.4а).

При построении систем функций  $u_n$  не принимается во внимание вид функции  $f$ , т. е. характер возбуждения в задаче дифракции (2.1), (2.2а). Эта система собственных функций как бы подготавливается заранее для любой задачи о возбуждении области, ограниченной поверхностью  $S$  с граничным условием (2.2а). Зная  $u_n$  и числа  $k_n$ , можно затем решение задачи (2.1), (2.2а) записать в виде

$$U = \sum_n A_n u_n. \quad (2.13)$$

В трехмерных задачах в (2.13) подразумевается трехкратное суммирование. Ряд (2.13) почленно удовлетворяет граничному условию (2.2а), а удовлетворение уравнению (2.1) достигается выбором коэффициентов  $A_n$ . Подставляя (2.13) в (2.1) и применяя почленно оператор  $\Delta$  (что допустимо, так как  $U$  и  $u_n$  удовлетворяют одинаковым граничным условиям), получим, используя ортогональность (2.7),

$$A_n = \frac{1}{k^2 - k_n^2} \cdot \frac{\int f u_n dV}{\int u_n^2 dV}. \quad (2.14)$$

Это — основная формула метода собственных колебаний. Вместе с (2.13) она дает решение задачи (2.1), (2.2а) при любом возбуждении  $f$ .

2. Аппарат не изменится, если дифракционное поле должно удовлетворять не граничному условию (2.2а), а условию

$$\frac{\partial U}{\partial N} \Big|_S = 0. \quad (2.2б)$$

Тогда и собственные функции  $u_n$  должны быть иными — они должны удовлетворять тому же условию

$$\frac{\partial u_n}{\partial N} \Big|_S = 0; \quad (2.4б)$$

иными будут и собственные числа  $k_n$ , но по-прежнему будут равны нулю поверхностные интегралы в (2.5) и (2.8), а потому сохранятся и все остальные формулы. Например, для круга собственными функциями будут

такие же функции Бесселя (2.11), но  $k_{mq}$  будет находиться не из (2.12а), а из уравнения

$$J'_m(k_{mq}a) = 0. \quad (2.12б)$$

Некоторые изменения возникают, если  $U$  должно удовлетворять на  $S$  граничному условию третьего рода

$$U + \omega \frac{\partial U}{\partial N} \Big|_S = 0, \quad (2.2в)$$

где  $\omega$  не зависит от частоты. Этому же условию, с тем же импедансом  $\omega$ , должны быть подчинены и собственные функции

$$u_n + \omega \frac{\partial u_n}{\partial N} \Big|_S = 0. \quad (2.4в)$$

Собственные функции, соответствующие различным  $k_n$ , по-прежнему ортогональны в смысле (2.7) — это следует из обращения в нуль правой части (2.8) при подстановке (2.4в). Однако ортогональность (2.10), вообще говоря, не будет иметь места, она сохранится только, если  $\text{Im } \omega = 0$ .

Если волновое уравнение для  $U$  отличается от (2.1), например, имеет вид

$$\Delta U + k^2 \epsilon U = f \quad (2.15)$$

(где  $\epsilon$  может быть функцией координат), то однородному уравнению с тем же  $\epsilon$  должны подчиняться и собственные функции  $u_n$ . Они будут ортогональны, но не в смысле (2.7), а в смысле формулы

$$\int \epsilon u_n u_m dV = 0, \quad (2.16)$$

которую легко получить из (2.8). Соответственно изменится и формула для коэффициентов:

$$A_n = \frac{1}{k^2 - k_n^2} \frac{\int f u_n dV}{\int \epsilon u_n^2 dV}, \quad (2.17)$$

и выражение для  $k_n^2$ :

$$k_n^2 = \frac{\int |\nabla u_n|^2 dV}{\int \epsilon |u_n|^2 dV}, \quad (2.18)$$

из которого следует, в частности, что  $k_n^2$  вещественны только при  $\text{Im } \epsilon = 0$ .

Ничего принципиально нового не возникает и для электродинамических задач. Мы не будем приводить формулы для коэффициентов разложения полей  $E$  и  $H$  по собственным векторным функциям — они есть во всех учебниках; существенно лишь, что эти коэффициенты также имеют характерный знаменатель  $k^2 - k_n^2$ .

3. Весь этот аппарат применим при любых частотах и любых комплексных  $\epsilon$  и  $\omega$ . Однако более всего этот аппарат эффективен, когда в ряде (2.13) для полного поля один член много больше остальных, так что поле  $U$  задачи дифракции близко к полю одного из собственных колебаний. Это имеет место для систем с малыми потерями ( $\text{Im } k_n$  мало) и при частоте возбуждающих токов  $k$ , близкой к  $\text{Re } k_n$  (модуль одного из знаменателей  $k^2 - k_n^2$  мал). При этих условиях, т. е. вблизи резонанса высокочастотной системы, для того, чтобы узнать структуру поля дифракции, достаточно найти поле одного собственного колебания, а частотная зависимость почти полностью задается одним комплексным числом — собственной частотой этого колебания. Иными словами, метод собственных колебаний особенно удобен тогда, когда решение задачи (2.1) (или (2.15)), (2.2) дается приближенной одночленной формулой

$$U \sim \frac{c_n}{k^2 - k_n^2} u_n. \quad (2.19)$$

Возбуждающие токи  $f$  входят только в коэффициент пропорциональности  $c_n$  этой формулы.

Другие варианты обобщенного метода собственных колебаний сохраняют это свойство метода собственных частот.

4. Метод собственных частот не может быть непосредственно перенесен на системы типа открытых резонаторов, т. е. на внешние задачи дифракции. Легко показать, что его *собственные функции должны возрастать на бесконечности*. Действительно, применим (2.5) к области, ограниченной сферой радиуса  $r_0$  ( $kr_0 \gg 1$ ) и поверхностью  $S$ , на которой, для простоты, примем условие (2.2а) или (2.2б). На сфере поле  $u_n$  и его нормаль-

ная производная должны иметь вид

$$u_n \simeq \frac{e^{-ik_n r}}{r} \Phi_n(\theta, \varphi), \quad \frac{\partial u_n}{\partial r} \simeq -ik_n \frac{e^{-ik_n r}}{r} \Phi_n(\theta, \varphi) \quad (2.20)$$

(в двумерной задаче надо в знаменателе  $r$  заменить на  $\sqrt{r}$  и  $\Phi_n(\theta, \varphi)$  на  $\Phi_n(\varphi)$ ). Полагая  $k_n = k'_n + ik''_n$  и взяв мнимую часть от равенства (2.5), в котором подставлено  $u = u_n^*$ ,  $v = u_n$ , получим

$$k''_n \int |u_n|^2 dV = e^{2k''_n r_0} \int |\Phi_n|^2 d\Omega, \quad (2.21)$$

где  $\Omega$  — телесный угол,  $d\Omega = \sin \theta d\varphi d\theta$ .

Если бы было  $k''_n = 0$ , то слева был бы нуль, т. е. в асимптотической записи (2.20) должно было бы быть  $\Phi_n(\theta, \varphi) = 0$ , а отсюда следует, что  $u_n \equiv 0$ . Не может быть, очевидно, и  $k''_n < 0$ , ибо правая часть (2.21) неотрицательна. Таким образом, для всех собственных функций  $\text{Im } k_n > 0$ , и все они неограниченно возрастают при удалении от тела на бесконечность. Например, для внешности цилиндра радиуса  $a$  с граничным условием (2.2а) собственные частоты  $k_{mq}$  являются корнями уравнения

$$H_m^{(2)}(k_{mq}a) = 0, \quad (2.22)$$

и на больших расстояниях собственные функции возрастают как

$$\exp(k''_{mq}r) / \sqrt{r} \quad (k''_{mq} > 0).$$

В задачах дифракции рассеянное поле должно удовлетворять условию излучения, т. е. при  $r \rightarrow \infty$  должно иметь вид

$$u \simeq \frac{e^{-ikr}}{r} \Phi(\theta, \varphi) \quad (2.23)$$

(с заменой  $1/r$  на  $1/\sqrt{r}$  в двумерных задачах). Поэтому полное поле не может возрастать, и разложение его в ряд (2.13) по возрастающим собственным функциям однородной задачи (2.3), (2.4) невозможно. Это

обстоятельство давно известно. Для того чтобы сохранить ряды типа (2.13) и основное их достоинство — формулу (2.19), надо к ним прибавить интеграл по непрерывному спектру. Тогда в высокочастотных системах и при частотах, близких к резонансным, вблизи тела будет справедливо (2.19), а вдали от тела интеграл компенсирует экспоненциальное возрастание всех слагаемых в (2.13).

В обобщенном методе удается и для внешних задач дифракции сохранить дискретное представление поля.

### § 3. Диэлектрическое тело в закрытом резонаторе с идеальными стенками

1. Ищется функция  $U$ , удовлетворяющая внутри конечной области  $V^+$  уравнению

$$\Delta U + k^2 \epsilon U = f \text{ в } V^+, \quad (3.1a)$$

вне области  $V^+$  (т. е. в  $V^-$ ) (рис. 3.1) уравнению

$$\Delta U + k^2 U = f \text{ в } V^-, \quad (3.1б)$$

на границе  $S_\epsilon$  диэлектрика условиям

$$U^+ - U^- |_{S_\epsilon} = 0, \quad \frac{\partial U^+}{\partial N} - \frac{\partial U^-}{\partial N} |_{S_\epsilon} = 0 \quad (3.1в)$$

(где  $N$  — внешняя нормаль к  $S_\epsilon$ ,  $U^+$  и  $U^-$  — значения  $U$  по обе стороны  $S_\epsilon$ ) и на границе резонатора  $S$  условию

$$U |_S = 0. \quad (3.1г)$$

Здесь диэлектрическая проницаемость тела  $\epsilon$  может быть, вообще говоря, комплексным числом.

Обозначим через  $U^0$  поле, удовлетворяющее во всем резонаторе уравнению

$$\Delta U^0 + k^2 U^0 = f \quad (3.2a)$$

и граничному условию на  $S$

$$U^0 |_S = 0. \quad (3.2б)$$

Иными словами,  $U^0$  — поле тех же источников в отсутствие диэлектрического тела.

Будем искать решение задачи дифракции (3.1a) — (3.1г) в виде ряда

$$U = U^0 + \sum_n A_n u_n, \quad (3.3)$$

где  $u_n$  — собственные функции следующей вспомогательной однородной задачи:

$$\Delta u_n + k^2 \epsilon u_n = 0 \text{ в } V^+, \quad (3.4a)$$

$$\Delta u_n + k^2 u_n = 0 \text{ в } V^-, \quad (3.4б)$$

## Глава I

### СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ В УРАВНЕНИИ ( $\epsilon$ -МЕТОД)

Идея метода, развитого в этой главе, состоит в том, что в качестве собственного значения однородных задач, которые порождают систему собственных функций, берется диэлектрическая проницаемость. Дифрагированное поле представляется в виде ряда по этим собственным функциям. Собственное значение  $\epsilon_n$  есть диэлектрическая проницаемость вспомогательного тела, занимающего ту же область, что и тело, на котором происходит дифракция. Истинная диэлектрическая проницаемость не входит в однородную задачу. Поэтому, в частности, на собственных значениях никак не скажется комплексность истинного  $\epsilon$ . Собственные значения вещественны, если в задаче нет других потерь, кроме диэлектрических. Если же, например, есть излучение, то метод сохраняется, дифрагированное поле по-прежнему представимо в виде ряда по собственным функциям, но собственные значения — комплексны. Знак мнимой части собственного значения положителен — это соответствует тому, что во вспомогательной однородной задаче тело является активным, в нем выделяется энергия, компенсирующая потери. Далее в этой главе приведены обобщения на случай дифракции на неоднородном теле и на векторные задачи, описываемые уравнениями Максвелла. В § 7 весь этот аппарат применен к решению квантовомеханической задачи об упругом рассеянии на потенциальном поле.

Исследованию математических аспектов  $\epsilon$ -метода для «первой поляризации», посвящен § 38 Дополнения.

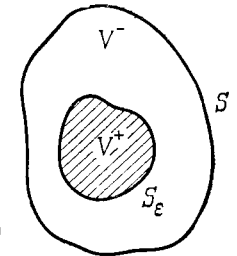


Рис. 3.1.

$$u_n^+ - u_n^- |_{S_\epsilon} = 0, \quad \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \Big|_{S_\epsilon} = 0, \quad (3.4в)$$

$$u_n |_S = 0. \quad (3.4г)$$

Собственным значением однородной задачи является число  $\epsilon_n$ .

Задача (3.4а)—(3.4г) имеет самостоятельный физический смысл. Она описывает собственное колебание — т. е. поле, существующее без источников, — *происходящее с частотой задачи дифракции* в некоторой вспомогательной системе диэлектрических и металлических тел. Сравнение (3.4) с (3.1) показывает, что эта система состоит из того же резонатора и диэлектрического тела той же формы. В отличие от системы, для которой решается задача дифракции, диэлектрическая проницаемость тела  $\epsilon_n$  в однородной задаче не равна, вообще говоря,  $\epsilon$ . Поэтому однородная задача при некоторых значениях  $\epsilon_n$  имеет нетривиальное решение (при заданном  $k$ ).

Особенность этого метода введения собственных функций состоит, в частности, в том, что *вне диэлектрического тела собственные функции удовлетворяют тому же уравнению, что и дифрагированное поле  $U - U^0$* .

Сравним (3.4) с соответствующей однородной задачей в  $k$ -методе. Для (3.1) в этом методе поле  $U$  разлагалось бы по собственным функциям, удовлетворяющим уравнениям

$$\Delta u_n + k_n^2 \epsilon u_n = 0 \quad \text{в } V^+, \quad (3.5а)$$

$$\Delta u_n + k_n^2 u_n = 0 \quad \text{в } V^- \quad (3.5б)$$

и тем же граничным условиям (3.4в, г). Здесь собственным значением является  $k_n^2$ .

Собственные функции задач (3.4) и (3.5) различны, так как в (3.5б) в отличие от (3.4б) входит собственное значение  $k_n^2$ , а не истинная частота  $k$ . Иными словами, в  $k$ -методе вспомогательное поле  $u_n$  не только внутри тела, но и вне его удовлетворяет уравнению, отличному от уравнения для  $U - U^0$  (точнее — имеющему другие коэффициенты). Именно это обстоятельство не позво-

ляет перенести  $k$ -метод (без привлечения непрерывного спектра) на открытые задачи.

2. Покажем, что собственные функции задачи (3.4) ортогональны в смысле

$$\int_{V^+} u_n u_m dV = 0 \quad (n \neq m). \quad (3.6)$$

Здесь интеграл взят только по объему диэлектрического тела, а не по всему объему резонатора, как в условиях ортогональности в  $k$ -методе.

Для доказательства (3.6) умножим (3.4а) и (3.4б) на  $u_m$ , такие же уравнения, написанные для  $u_m$ , — на  $u_n$ , вычтем одно из другого и проинтегрируем по всему объему. Применяя формулу Грина (2.8), получим

$$\begin{aligned} (\epsilon_n - \epsilon_m) \int_{V^+} u_n u_m dV + \int_{S_\epsilon} \left( u_n^+ \frac{\partial u_m^+}{\partial N} - u_m^+ \frac{\partial u_n^+}{\partial N} \right) dS + \\ + \int_S \left( u_n \frac{\partial u_m}{\partial N} - u_m \frac{\partial u_n}{\partial N} \right) dS - \\ - \int_{S_\epsilon} \left( u_n^- \frac{\partial u_m^-}{\partial N} - u_m^- \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \right) dS = 0. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Учитывая граничные условия на  $S$  и на  $S_\epsilon$ , мы сразу получим (3.6). Мы приняли, что собственные значения простые; более общий случай рассмотрен в параграфе 31.

Собственные значения  $\epsilon_n$  вещественны. Для доказательства этого достаточно записать выражение, аналогичное (3.7), с заменой  $u_m$  на  $u_n^*$ . Собственные функции  $u_n$  вещественны (с точностью до постоянного множителя), и наряду с (3.6) в задаче (3.4) имеет место и эрмитова ортогональность

$$\int_{V^+} u_n u_m^* dV = 0 \quad (n \neq m). \quad (3.8)$$

Однако, так как ниже будут рассмотрены задачи, для которых (3.8) не имеет места, то и в этом параграфе мы будем пользоваться ортогональностью в форме (3.6).

3. Ряд (3.3) при любых  $A_n$  удовлетворяет почленно уравнению (3.1б) и условиям (3.1в), (3.1г). Коэффициенты  $A_n$  должны быть найдены из требования, чтобы разложение (3.3) удовлетворяло (3.1а) внутри диэлектрика. Подставляя (3.3) в (3.1а), производя почленное дифференцирование и используя уравнение (3.4а) для  $u_n$  и уравнение (3.2а) для  $U^0$ , получим

$$\sum_n A_n (\epsilon - \epsilon_n) u_n = (1 - \epsilon) U^0 \text{ в } V^+. \quad (3.9)$$

Умножая (3.9) на  $u_m$  и интегрируя по  $V^+$ , получим, согласно (3.6), искомое выражение для коэффициентов разложения

$$A_n = \frac{1 - \epsilon}{\epsilon - \epsilon_n} \frac{\int_{V^+} U^0 u_n dV}{\int_{V^+} u_n^2 dV}. \quad (3.10а)$$

Можно получить для  $A_n$  формулу, содержащую непосредственно заданные источники  $f$ , а не создаваемое ими в отсутствие диэлектрика поле  $U^0$ , как в (3.10а). Для этого следует использовать тождество

$$\int_{V^+} U^0 u_n dV = \frac{1}{k^2 (1 - \epsilon_n)} \int_V u_n f dV. \quad (3.11)$$

Для того чтобы его доказать, воспользуемся равенством

$$U^0 \Delta u_n - u_n \Delta U^0 = -u_n f + k^2 (1 - \epsilon_n) U^0 u_n \text{ в } V^+, \quad (3.12а)$$

вытекающим из (3.2а) и (3.4а), и равенством

$$U^0 \Delta u_n - u_n \Delta U^0 = -u_n f \text{ в } V^-, \quad (3.12б)$$

вытекающим из (3.2а) и (3.4б). Проинтегрировав (3.12а) по  $V^+$ , (3.12б) по  $V^-$ , преобразовав результат по формуле Грина, как в (3.7), и используя условия (3.2б) и (3.4г) на металле и непрерывность полей  $U^0$  и  $u_n$  и их

нормальных производных на границе диэлектрика, получим (3.11). Подставив (3.11) в (3.10а), получим

$$A_n = \frac{1}{\epsilon - \epsilon_n} \frac{1 - \epsilon}{k^2 (1 - \epsilon_n)} \frac{\int_V u_n f dV}{\int_{V^+} u_n^2 dV}. \quad (3.10б)$$

Заметим, что в числителе (3.10б) в отличие от (3.10а) интегрирование производится по всему объему  $V$ .

4. Формулы (3.3) и (3.10) вместе с (3.2) и (3.4) дают формальное решение задачи дифракции (3.1). Это решение имеет примерно ту же структуру, что и решение в  $k$ -методе, однако в  $k$ -методе не производится выделение слагаемого  $U^0$ . В  $\epsilon$ -методе при представлении поля вне тела, т. е. в  $V^-$ , слагаемое  $U^0$  надо выделять, так как множество функций  $u_n$  в  $V^-$ , вообще говоря, недостаточно, чтобы разлагать по нему любое поле. Однако внутри тела, в  $V^+$ , поле  $U^0$ , согласно (3.9), разложимо в ряд по  $u_n$ . Поэтому *внутри тела* можно вместо ряда (3.3), в котором выделен член  $U^0$ , пользоваться рядом

$$U = \sum_n B_n u_n. \quad (3.13)$$

Выражение для  $B_n$  через  $A_n$  легко найти из (3.3) и (3.9):

$$B_n = \frac{1 - \epsilon_n}{1 - \epsilon} A_n. \quad (3.14)$$

Поле внутри диэлектрика проще всего исследовать по формуле (3.13), подставив в (3.14) выражение (3.10б), т. е. вычисляя  $B_n$  по формуле

$$B_n = \frac{1}{\epsilon - \epsilon_n} \frac{1}{k^2} \frac{\int_V u_n f dV}{\int_{V^+} u_n^2 dV}. \quad (3.15)$$

Решение в форме (3.13), (3.15) не содержит поля  $U^0$ . Для того частного случая, когда все источники расположены внутри диэлектрика (в  $V^+$ ), можно и в  $V^-$  выделять слагаемого  $U^0$ .



5. Сравним полученное решение с решением, получающимся по  $k$ -методу. В  $k$ -методе коэффициенты разложения имеют множитель

$$(k^2 - k_n^2)^{-1}, \quad (3.16a)$$

определяющий частотную зависимость различных слагаемых ряда. Этот множитель описывает резонансные свойства системы. В изложенном выше простейшем варианте  $\epsilon$ -метода резонансные свойства описываются множителем

$$(\epsilon - \epsilon_n)^{-1} \quad (3.16б)$$

в (3.10) и (3.15). Собственные значения  $\epsilon_n$  задачи (3.4) зависят от частоты  $k$ . Если частота такова, что одно из  $\epsilon_n$  близко к истинному  $\epsilon$ , то соответствующее слагаемое в (3.3) и (3.13) становится доминирующим, а поле  $U$  — близким к собственной функции  $u_n$ . Вблизи источника поле может иметь особенности, которые в (3.3) передаются членом  $U^0$ , так что во всем пространстве поле при частоте, близкой к резонансной, примерно равно сумме  $U^0 + A_n u_n$ .

Вблизи резонанса и (3.16a), и (3.16б) одинаково хорошо передают частотную зависимость полей, и в этом смысле их графики с равным правом можно назвать резонансными кривыми. Мы вернемся к этому вопросу в конце следующего параграфа. Рассматриваемые как функции  $k$ , множители (3.16a) и (3.16б), вообще говоря, различны. Там, где это различие существенно, т. е. вдали от резонанса, частотная зависимость полного поля не описывается простой функцией (3.16a) или (3.16б).

Собственные значения  $\epsilon_n$  и  $k_n$  обоих методов связаны между собой. Если тела, на которых происходит дифракция, не имеют потерь (т. е.  $\text{Im } \epsilon = 0$ ), то  $k_n$  вещественны и каждое  $k_n$  совпадает с корнем одного из уравнений

$$\epsilon - \epsilon_n(k) = 0. \quad (3.17a)$$

Дифференцируя левые части уравнений (3.4a), (3.4б) по  $k^2$  и комбинируя получившиеся уравнения с (3.4a),

(3.4б), легко получить, что

$$\frac{d\epsilon_n}{dk^2} = -\frac{1}{k^2} \left( \epsilon_n + \frac{\int_{V^-} u_n^2 dV}{\int_{V^+} u_n^2 dV} \right), \quad (3.18)$$

так что  $\epsilon_n(k)$  при положительных  $\epsilon_n$  монотонно убывает с ростом  $k$ . Поскольку при  $k \rightarrow 0$   $\epsilon_n \rightarrow \infty$ , а при  $k \rightarrow \infty$   $\epsilon_n \rightarrow 0$ , то при  $\epsilon > 0$  уравнение (3.17a) имеет точно один корень, которому мы выше приписали тот же индекс  $n$ .

Можно продолжить  $\epsilon_n(k)$  в плоскость комплексного переменного  $k$ , тогда эта связь  $\epsilon_n$  и  $k_n$  сохранится и при комплексном  $\epsilon$ . Формула (3.17a) удобна тем, что позволяет вблизи резонанса заменить  $\epsilon_n$  —  $\epsilon$  первым членом ряда Тейлора

$$\epsilon_n - \epsilon = (k - k_n) \left. \frac{d\epsilon_n}{dk} \right|_{k=k_n}, \quad (3.19)$$

и частотная зависимость знаменателя  $A_n$  будет определяться множителем  $1/(k - k_n)$ , как и в  $k$ -методе.

6. Однородная задача (3.4) не содержит истинного  $\epsilon$ . Тем самым, решая (3.4) и, в частности, определяя  $\epsilon_n(k)$ , мы находим одновременно резонансные кривые для тела данной формы со всевозможными значениями диэлектрической проницаемости. В частности — и это весьма существенно для численных расчетов, — если  $\epsilon$  в задаче дифракции комплексно, т. е. дифракция происходит на поглощающем диэлектрическом теле, то это никак не осложнит решение однородной задачи. Другими словами, *несмотря на наличие потерь*, наиболее сложная часть расчетов — *определение собственного значения — производится с вещественными величинами*. Наличие потерь и конечная добротность резонатора проявятся лишь в том, что в (3.16б)  $\epsilon$  будет комплексно и знаменатель ни при одной вещественной частоте не обратится в нуль. Максимум резонансного множителя (3.16б) будет равен  $1/\text{Im } \epsilon$  и достигается при  $k$ , являющемся корнем вещественного уравнения

$$\epsilon_n(k) - \text{Re } \epsilon = 0. \quad (3.17б)$$

В  $k$ -методе конечная добротность приводит к комплексности  $k_n$ , которое находится из задачи с комплексными  $\epsilon$ , т. е. из задачи, более сложной для расчетов.

В задачах о закрытых системах  $k$ -метод имеет определенное преимущество перед  $\epsilon$ -методом. Преимущество это состоит в том, что, найдя одно число  $k_n$ , можно по (3.16а) сразу определить всю резонансную кривую (по частоте) при  $k$ , близких к  $k_n$ . В  $\epsilon$ -методе для этого надо найти функцию  $\epsilon_n(k)$ . Впрочем, именно для резонансных условий это усложнение  $\epsilon$ -метода не очень значительно, так как при выполнении (3.19) достаточно вычислить  $\epsilon_n(k)$  для двух значений  $k$ , затем исключить  $\frac{d\epsilon_n}{dk}$ , найти  $k_n$  и пользоваться той же формулой (3.16а).

С другой стороны, в  $\epsilon$ -методе, найдя одно число  $\epsilon_n$ , можно сразу найти всю зависимость поля от  $\epsilon$ , т. е. резонансную кривую по диэлектрической проницаемости при  $\epsilon$ , близких к  $\epsilon_n$ . В  $k$ -методе для этого понадобилось бы найти  $k_n$  в зависимости от  $\epsilon$ ; аналогично предыдущему, это потребует вычисления  $k_n$  для двух значений  $\epsilon$ .

Если заданное  $k$  совпадает с собственной частотой незаполненного резонатора, то возникает дополнительная трудность, состоящая в том, что  $U^0$  не существует (обращается в бесконечность). При приближении  $k$  к этой собственной частоте одна из собственных функций  $u_n$  становится пропорциональной  $U^0$ , а соответствующее собственное значение  $\epsilon_n$  стремится к единице. Коэффициент  $A_n$  в (3.3) при этой функции стремится к бесконечности, как видно из (3.10б). Ряд (3.3) приобретает неопределенную форму  $\infty - \infty$ . Если пользоваться представлением (3.13), то, согласно (3.15), в  $V^+$  эта неопределенность не возникает. Для того чтобы и в  $V^-$  избавиться от этого постороннего резонанса, можно, например, иначе вводить  $U^0$ . При этом оказывается необходимым изменить и постановку однородной задачи, чтобы сохранить возможность разложения (3.3). Можно определить  $U^0$  как решение уравнения

$$\Delta U^0 + k^2 \epsilon U^0 = f \quad \text{в } V, \quad (3.20)$$

т. е. как поле, создаваемое теми же источниками  $f$  в полностью заполненном резонаторе. При этом  $u_n$  должно

удовлетворять уравнениям

$$\Delta u_n + k^2 \epsilon u_n = 0 \quad \text{в } V^+, \quad (3.21a)$$

$$\Delta u_n + k^2 \epsilon_n u_n = 0 \quad \text{в } V^- \quad (3.21b)$$

и прежним условиям на  $S_\epsilon$  и металле. Эти функции будут ортогональны при интегрировании по  $V^-$ , и формулы для  $A_n$  и  $B_n$  будут несколько отличны от (3.10) и (3.15). Возможны и другие определения  $U^0$  и  $u_n$ .

#### § 4. Диэлектрическое тело в резонаторе с поглощающими стенками, в открытом резонаторе или в пустоте

1. Пусть теперь в резонаторе есть какие-либо потери, не связанные с комплексностью  $\epsilon$ . В этом пункте мы рассмотрим изменения, которые вносит в  $\epsilon$ -метод наличие потерь в стенках замкнутого резонатора. Для наших целей можно характеризовать потери в стенках комплексным импедансом  $\omega$ , т. е. заменить условие (3.1г) или условие  $\left. \frac{\partial U}{\partial N} \right|_S = 0$  условием

$$U + \omega \left. \frac{\partial U}{\partial N} \right|_S = 0 \quad (4.1)$$

(нормаль направлена в стенку), где  $\text{Im } \omega < 0$ . Этому же условию должны быть подчинены поле  $U^0$

$$U^0 + \omega \left. \frac{\partial U^0}{\partial N} \right|_S = 0, \quad (4.2)$$

и собственные функции однородной задачи (3.4) (вместо (3.4г)):

$$u_n + \omega \left. \frac{\partial u_n}{\partial N} \right|_S = 0. \quad (4.3)$$

При таком введении  $U^0$  и  $u_n$  весь аппарат предыдущего параграфа полностью сохраняется. Единственное, но весьма существенное, отличие от задачи дифракции без потерь в стенках состоит в том, что поставленная *однородная задача не является* теперь *самосопряженной* и собственные значения комплексны, а ортогональность собственных функций имеет место только в форме (3.6). Ситуация здесь такая же, как в  $k$ -методе при наличии

любых потерь. Заметим, что если потери происходят только в стенках резонатора, то удобнее применить другой вариант обобщенного метода (§ 9), в котором однородная задача будет самосопряженной и определенные собственных значений можно будет производить, оставаясь в вещественной области.

Легко связать мнимую часть  $\epsilon_n$  с мнимой частью импеданса  $\omega$ . Из уравнений (3.4а), (3.4б), написанных для  $u_n$  и  $u_n^*$ , и граничных условий на поверхности диэлектрика, производя примерно те же преобразования, что и при выводе (3.7), можно получить

$$k^2 (\epsilon_n - \epsilon_n^*) \int_{V+} |u_n|^2 dV = 2i \operatorname{Im} \int_S u_n \frac{\partial u_n^*}{\partial N} dS. \quad (4.4)$$

Используя (4.3), получим

$$\operatorname{Im} \epsilon_n = - \operatorname{Im} \omega \frac{\int_S |u_n|^2 dS}{k^2 |\omega|^2 \int_{V+} |u_n|^2 dV}. \quad (4.5)$$

Если в стенках резонатора есть потери ( $\operatorname{Im} \omega < 0$ ), то

$$\operatorname{Im} \epsilon_n > 0. \quad (4.6)$$

Знак мнимой части  $\epsilon_n$  противоположен знаку мнимой части диэлектрической проницаемости тел, обладающих диэлектрическими потерями. Этот результат имеет простой физический смысл. Как и в параграфе 3, однородная задача для  $u_n$  в резонаторе с потерями описывает незатухающие собственные колебания в некоторой вспомогательной системе (диэлектрическое тело в резонаторе). Поскольку в этой системе, согласно (4.3), есть потери, то собственные колебания возможны лишь при условии, что в диэлектрике происходит выделение энергии. Это и означает, что мнимая часть  $\epsilon_n$  должна быть положительной. При этом, разумеется, выполняется баланс энергии — энергия, выделяемая в теле (левая часть (4.4)), равна энергии, поглощаемой в стенках.

Существует лишь дискретный набор комплексных чисел  $\epsilon_n$ , при которых собственные колебания происходят на заданной частоте  $k$  и потери в стенках с заданным  $\omega$

компенсируются выделением энергии в активном диэлектрике (см. § 38).

Если считать, что  $\operatorname{Im} \epsilon_n(k)$  медленно меняется с частотой, то резонансный множитель (3.16б) достигает максимума на частоте, являющейся корнем уравнения

$$\operatorname{Re} \epsilon_n(k) - \operatorname{Re} \epsilon = 0, \quad (4.7)$$

где мы для общности считаем, что  $\epsilon$  может быть комплексным. Этот максимум равен

$$(\operatorname{Im} \epsilon_n - \operatorname{Im} \epsilon)^{-1}. \quad (4.8)$$

Знаки обоих слагаемых в знаменателе (4.8) противоположны:  $\operatorname{Im} \epsilon_n > 0$ ,  $\operatorname{Im} \epsilon \leq 0$ , так что знаменатель не обращается в нуль.

В п. 6 § 3 и п. 1 § 4 были исследованы два случая применения  $\epsilon$ -метода к задачам дифракции. В первом случае потери происходят в диэлектрическом теле, т. е.  $\epsilon$  комплексно. Тогда однородная задача самосопряженная и  $\epsilon_n$  вещественно. Во втором случае потери происходят не в диэлектрике, и однородная задача — несамосопряженная,  $\epsilon_n$  комплексно. Аналогично и во всех остальных вариантах метода мы будем иметь дело всегда с одним из двух случаев: либо потери определяются комплексностью только того параметра в задаче дифракции, который в однородной задаче является собственным значением; либо существуют еще и другие потери. В первом случае соответствующая однородная задача всегда может быть сделана самосопряженной. Во втором случае — задача несамосопряженная, собственные значения комплексны. Физически это всегда означает, что однородная задача соответствует наличию какой-либо активной области, в которой происходит выделение энергии, компенсирующее потери.

2. Пусть теперь дифракция происходит на диэлектрическом теле, расположенном в пустоте или в открытом резонаторе. *Рассеянное поле  $U - U^0$  должно при этом удовлетворять условию излучения.* Применение для решения этой задачи метода собственных частот, как мы уже упоминали в § 2, приводит к осложнениям, вызванным тем, что рассеянное поле удовлетворяет уравнению с вещественной частотой  $k$ , а собственные функции  $k$ -ме-

тогда вне тела во всей бесконечной области удовлетворяют условию с комплексной частотой  $k_n$ ;  $\text{Im } k_n > 0$ .

В этом отношении изложенные ниже варианты обобщенного метода имеют преимущества по сравнению с  $k$ -методом, в них возможен прямой перенос формального аппарата на открытые задачи при сохранении дискретного представления для поля всюду. Это связано с тем, что во всех однородных задачах этих вариантов в качестве частоты колебаний сохранена частота истинного источника задачи дифракции, входящая как вещественный параметр в задачи о собственных элементах.

Модификация  $\epsilon$ -метода для открытых задач по существу сводится лишь к *введению в однородную задачу условия излучения*. Проведем этим методом формальное построение решения задачи дифракции на диэлектрическом теле в пустоте.

Математическая формулировка задачи дифракции состоит в следующем. Нужно найти функцию  $U$ , удовлетворяющую в области  $V^+$  (внутренность диэлектрического тела) уравнению

$$\Delta U + k^2 \epsilon U = f, \quad (4.9)$$

в бесконечной области  $V^-$  уравнению

$$\Delta U + k^2 U = f, \quad (4.10)$$

на границе диэлектрика  $S_\epsilon$  условиям

$$U^+ - U^- |_{S_\epsilon} = 0, \quad \frac{\partial U^+}{\partial N} - \frac{\partial U^-}{\partial N} |_{S_\epsilon} = 0 \quad (4.11)$$

и на бесконечности условию излучения (2.23), если источники расположены на конечных расстояниях. При падении на тело плоской волны условие излучения накладывается на рассеянное поле.

Решение поставленной задачи всюду по-прежнему ищется в виде ряда (3.3), где  $U^0$  — поле тех же источников  $f$  в пустоте (первичное, или падающее, поле), т. е.  $U^0$  во всем объеме удовлетворяет уравнению

$$\Delta U^0 + k^2 U^0 = f. \quad (4.12)$$

Функции  $u_n$ , по которым ведется разложение дифрагированного поля  $U - U^0$ , должны удовлетворять урав-

нениям (3.4а, б) и граничным условиям (3.4в) непрерывности поля и его нормальной производной на  $S_\epsilon$ .

Потребуем, наконец, чтобы каждая функция  $u_n$  удовлетворяла условиям излучения на бесконечности. Собственными значениями сформулированной однородной задачи являются числа  $\epsilon_n$ .

Так как каждая собственная функция удовлетворяет вне тела тому же уравнению, что и рассеянное поле, то условие излучения для ряда (3.3) выполняется по-членно. В § 38 показано, что оно выполнено и для суммы ряда.

Физический смысл однородной задачи состоит в том, что она описывает происходящие с излучением, но не затухающие собственные колебания с истинной частотой  $k$ . Они существуют без источников (т. е. правая часть волнового уравнения для них равна нулю) в системе с той же геометрией, что и в задаче дифракции, но с диэлектрической проницаемостью тела  $\epsilon_n$ , отличной от  $\epsilon$ . Поэтому однородная задача при фиксированной частоте  $k$  имеет нетривиальное решение лишь при некоторых значениях  $\epsilon_n$ .

Используя уравнения для  $u_n$  и  $u_n^*$ , граничные условия на  $S_\epsilon$  и асимптотическое представление поля  $u_n$  на больших расстояниях, легко показать, что мнимая часть собственного значения должна быть положительна, т. е. вновь должно выполняться (4.6). Действительно, согласно условиям излучения, вдали от тела  $u_n$  должно иметь вид, аналогичный (2.20), но с заменой  $k_n$  на  $k$ :

$u_n \simeq \frac{e^{-ikr}}{r} \Phi_n(\varphi, \theta)$ . Произведя в (4.4) интегрирование по бесконечно удаленной сфере, получим справа  $2ik \int |\Phi_n|^2 d\Omega$ . Поэтому  $\text{Im } \epsilon_n$  положительна.

Это свойство  $\epsilon_n$  имеет такое же простое физическое объяснение, как и для резонатора с импедансными стенками: незатухающие собственные колебания при наличии излучения могут существовать лишь в том случае, если они поддерживаются энергией, выделяющейся во вспомогательном теле.

Вернемся к формальному представлению решения задачи дифракции. Из постановки однородной задачи следует, что ряд (3.3) с произвольными коэффициентами  $A_n$

удовлетворяет уравнению (4.10) вне тела, граничным условиям на  $S_e$  (по определению,  $U^0$  и его нормальная производная непрерывны на  $S_e$ ) и условию излучения. Коэффициенты  $A_n$  находятся из того же уравнения (3.9), необходимого для выполнения волнового уравнения внутри тела, и имеют тот же вид (3.10). Внутри тела можно не выделять слагаемое  $U^0$ , т. е. пользоваться рядом (3.13), где  $B_n$  даны в (3.14) и, например, (3.15).

Формальный аппарат полностью сохранится, если помимо диэлектрического тела в дифракции участвуют какие-либо металлические поверхности  $S$  (например, диэлектрическое тело помещено в открытый резонатор) с граничным условием, скажем,  $U|_S = 0$  или  $\frac{\partial U}{\partial N}|_S = 0$ , и условием на кромках. При этом тем же условиям на  $S$  и на кромках должны удовлетворять собственные функции  $u_n$  и поле  $U^0$ .

3. Проиллюстрируем аппарат на простом примере — двумерном открытом резонаторе в виде кругового диэлектрического цилиндра с большим значением диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . В таком резонаторе, как известно, существуют высокочастотные «запертые» колебания. В нашей записи это означает, что существуют такие собственные колебания, т. е. решения системы (3.4), удовлетворяющие также условию излучения, для которых знаменатель в (3.16б) мал. Мы предположим, что  $\epsilon \gg 1$ , а  $ka$  порядка единицы. Тогда для исследования резонанса нам надо искать собственные значения  $\epsilon_n$  с большим модулем ( $|\epsilon_n| \gg 1$ ).

Мы ограничимся исследованием однородной задачи и множителя (3.16б), т. е. характеристик резонатора, которые не зависят от вида возбуждения (см. также § 26). Однородная задача для цилиндра в пустоте обычным образом сводится к трансцендентному уравнению. Запишем поле собственного колебания, т. е. собственную функцию, внутри цилиндра в виде

$$u_n^+ = A_n J_m(k \sqrt{\epsilon_n} r) \cos m\varphi, \quad (4.13a)$$

а вне цилиндра — в виде

$$u_n^- = B_n H_m^{(2)}(kr) \cos m\varphi. \quad (4.13б)$$

Здесь  $n$  есть совокупность азимутального индекса  $m$  и радиального индекса  $q$ , определяющего номер корня трансцендентного уравнения (4.14). На границе диэлектрика, при  $r = a$ , должны выполняться условия непрерывности функции и ее нормальной производной, что приводит к трансцендентному уравнению

$$\frac{ka \sqrt{\epsilon_n} J'_m(ka \sqrt{\epsilon_n})}{J_m(ka \sqrt{\epsilon_n})} = \frac{ka H_m^{(2)'}(ka)}{H_m^{(2)}(ka)}. \quad (4.14)$$

Такое же точно уравнение мы получили бы и в  $k$ -методе, но в нем неизвестной величиной (собственной частотой) была бы величина  $k$ , а вместо  $\epsilon_n$  стояло бы  $\epsilon$ . Из уравнения (4.14) легче находить  $\epsilon_n$ , так как при этом правая часть (4.14) есть постоянное число. Мы будем рассматривать собственные функции, соответствующие невысокому азимутальному номеру  $m$ , т. е. колебания, при которых стоячая волна состоит из двух волн почти строго радиального направления.

Можно было бы найти и так называемые колебания «шепчущей галереи», состоящие из волны, обтекающей цилиндрическую поверхность изнутри и отражающейся от границы под скользким углом. Вовне эти колебания убывают очень быстро, примерно экспоненциально. Такие колебания существуют и при небольших  $|\epsilon|$ , но больших  $ka$ . Их анализ — тоже на основе (4.14) — несколько более громоздок, так как требует применения асимптотики Дебая для цилиндрических функций.

Начнем с определения  $\epsilon_n$ . При больших  $|ka \sqrt{\epsilon_n}|$  из (4.14) следует, что  $ka \sqrt{\epsilon_n}$  близко к корню функции  $J'_m$ . Обозначим  $q$ -й корень через  $\mu_{mq}$  ( $J'_m(\mu_{mq}) = 0$ ) и положим

$$ka \sqrt{\epsilon_n} = \mu_{mq} + x \quad (\mu_{mq} \gg 1). \quad (4.15)$$

Из (4.14) следует, что  $|x| \ll 1$ . Мы ограничимся вычислением этой величины в старшем (по  $1/\mu_{mq}$ ) порядке, что достаточно для грубого определения резонансных условий и для определения добротности. Подставляя (4.15) в (4.14) и отбрасывая члены порядка  $(m/\mu_{mq})^2$ ,

найдем  $x = -c/\mu_{mq}$ , где через  $c$  обозначена правая часть (4.14):

$$c = \frac{kaH_m^{(2)'}(ka)}{H_m^{(2)}(ka)}. \quad (4.16)$$

Таким образом, искомое выражение для больших по модулю собственных значений есть

$$\epsilon_n = \frac{\mu_{mq}^2}{k^2 a^2} - \frac{2c}{k^2 a^2} + O\left(\frac{1}{\mu_{mq}}\right). \quad (4.17)$$

Формула (3.166) совместно с (4.17) позволяет проследить, как зависимость амплитудного множителя от  $k$  при фиксированном  $\epsilon$ , так и зависимость от  $\epsilon$  при фиксированном  $k$ . Обе кривые, дающие эти зависимости, можно называть резонансными кривыми. Они характеризуются добротностями и резонансными значениями соответственно частоты и диэлектрической проницаемости. Начнем с обычной резонансной кривой ( $\epsilon = \text{const}$ ).

Резонансная частота  $\tilde{k}_n$ , при которой амплитудный множитель (3.166) максимален, приближенно удовлетворяет уравнению (4.7); она равна вещественной части собственной частоты  $k_n$ , вводимой в  $k$ -методе,  $\tilde{k}_n = \text{Re } k_n$ . Определение  $\tilde{k}_n$  из (4.14) сложнее, чем определение  $\epsilon_n$ . В более грубом, чем (4.17), приближении непосредственно из (4.17) получаем

$$\tilde{k}_n = \frac{\mu_{mq}}{a} \cdot \text{Re } \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (4.18)$$

Максимальное значение множителя (4.8) приближенно равно

$$\left(-\frac{2 \text{Im } c}{k^2 a^2} - \text{Im } \epsilon\right)^{-1}. \quad (4.19)$$

Оба слагаемых в знаменателе (4.19) положительны. Амплитуда при резонансе не обращается в бесконечность, так как есть потери на излучение (первое слагаемое в знаменателе (4.19)) и потери в диэлектрике (если  $\text{Im } \epsilon \neq 0$  — второе слагаемое знаменателя). Полуширина  $\delta k$  резонансной кривой находится из уравнения

$$|\text{Re } \epsilon_n(\tilde{k}_n + \delta k) - \text{Re } \epsilon_n(\tilde{k}_n)| = \text{Im } \epsilon_n(\tilde{k}_n) - \text{Im } \epsilon. \quad (4.20)$$

Определяя добротность по частоте  $Q_k$  обычной формулой

$$Q_k = \frac{\tilde{k}_n}{2 \delta k}, \quad (4.21)$$

получим

$$Q_k = \frac{\tilde{k}_n \left| \frac{d}{dk} \text{Re } \epsilon_n(k) \right|}{2 [\text{Im } \epsilon_n(\tilde{k}_n) - \text{Im } \epsilon]}. \quad (4.22)$$

Для (4.17) — в том же приближении, в котором записано (4.18), — последняя формула дает

$$Q_k = \frac{\pi}{4} [J_m^2(\tilde{k}_n a) + N_m^2(\tilde{k}_n a)] \cdot \mu_{mq}^2. \quad (4.23)$$

В этой формуле для простоты принято  $\text{Im } \epsilon = 0$  и в явном виде выписано  $\text{Im } c$ . Добротность  $Q_k$  рассматриваемых колебаний имеет порядок диэлектрической проницаемости тела.

Исследуем теперь положение и ширину резонансной кривой при постоянной частоте. Согласно (4.17), резонанс имеет место при

$$\text{Re } \epsilon = \frac{\mu_{mq}^2}{k^2 a^2} - \frac{2 \text{Re } c}{k^2 a^2}. \quad (4.24)$$

Максимальное значение множителя (3.166) опять приближенно равно (4.19). Полуширину резонансной кривой определим, подобно (4.20), как такое значение  $\delta \text{Re } \epsilon$ , при котором вещественная часть знаменателя равна мнимой:

$$|\delta \text{Re } \epsilon| = \text{Im } \epsilon_n - \text{Im } \epsilon. \quad (4.25)$$

Введем добротность по диэлектрической проницаемости  $Q_\epsilon$  формулой

$$Q_\epsilon = \frac{\text{Re } \epsilon}{2 \delta \text{Re } \epsilon}. \quad (4.26)$$

Подставляя (4.17), получим в старшем порядке

$$Q_\epsilon = \frac{1}{2} Q_k. \quad (4.27)$$

Добротности  $Q_\epsilon$  и  $Q_k$  различны, так как описывают полуширины резонансных кривых в двух разных опытах — при фиксированной частоте ( $Q_\epsilon$ ) и при фикси-

рованной диэлектрической проницаемости ( $Q_k$ ). Сравнивая (4.22) и (4.26), имеем (в старшем порядке)

$$\frac{Q_k}{Q_e} = \left| \frac{d \operatorname{Re} \epsilon_n(k)}{d \ln k} \right|_{k=\bar{k}_n}. \quad (4.28)$$

Согласно (4.17),  $\epsilon_n \sim k^{-2}$ , и добротность по диэлектрической проницаемости оказывается в два раза ниже, чем добротность по частоте.

### § 5. Неоднородный диэлектрик, первая поляризация

Аппарат, развитый в §§ 3, 4 для задачи дифракции на диэлектрическом теле с постоянной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , в этом и следующем параграфах будет обобщен на задачу о дифракции на теле, в котором  $\epsilon$  есть *функция координат*,  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$ . Собственным значением однородной задачи будет теперь не сама *диэлектрическая проницаемость вспомогательного тела*  $\epsilon_n$ , которая тоже оказывается функцией точки, а некоторое число, входящее в  $\epsilon_n$ . Вид функции  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  зависит от вида функции  $\epsilon(\mathbf{r})$  — подобно тому, как для  $\epsilon = \text{const}$  форма тела во вспомогательной однородной задаче повторяла форму тела в основной задаче дифракции. Результаты §§ 3, 4 являются частными случаями результатов этого параграфа.

В первом пункте мы дадим простейшее решение для  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$ , применяя, как и в §§ 3, 4, аппарат дифференциальных уравнений. В п. 2 эти результаты будут еще раз получены с использованием аппарата функции Грина и интегральных уравнений. В пп. 3—5 будет дано более общее решение поставленной задачи. В п. 6 мы приведем вывод этих решений методами теории функций.

В этом параграфе мы не будем подробно обсуждать полученные результаты, так как физический анализ общей ситуации, когда  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$ , практически совпадает с анализом случая  $\epsilon = \text{const}$ .

1. Ищется поле  $U(\mathbf{r})$ , удовлетворяющее уравнению

$$\Delta U + k^2 \epsilon U = f, \quad \epsilon = \epsilon(\mathbf{r}). \quad (5.1)$$

Будем считать, что  $\epsilon$  есть непрерывная функция координат, равная единице вне некоторого конечного объ-

ема. Это позволит нам не вводить в рассмотрение поверхности, на которых должны выполняться условия непрерывности (4.11). Однако это предположение не содержит ограничений. Разрывную функцию  $\epsilon(\mathbf{r})$  можно рассматривать как предел непрерывных функций. При этом, как известно, условия (4.11) появляются как предельная форма уравнения (5.1) — при дополнительном требовании, чтобы  $U$  и  $\frac{\partial U}{\partial N}$  не обращались в бесконеч-

ность. Решения для разрывного  $\epsilon(\mathbf{r})$ , т. е. решения, удовлетворяющие (4.11), являются поэтому пределом полученных в этом параграфе решений. Так как в решения для непрерывного  $\epsilon(\mathbf{r})$  не войдут градиенты  $\epsilon(\mathbf{r})$ , то все полученные ниже формулы непосредственно справедливы и для разрывных  $\epsilon$ , когда должно выполняться и (5.1), и (4.11). Этот же общий прием, часто существенно сокращающий выкладки, мы применим и в §§ 6 и 8. В электродинамике практический интерес представляет именно этот случай разрывного  $\epsilon$ .

Строго говоря, в электродинамике уравнение (5.1) имеет место только для двумерных задач. Если  $\epsilon$  не зависит от  $z$  (и, в частности, если границы раздела, т. е. разрыва  $\epsilon$ , являются цилиндрическими поверхностями, параллельными оси  $z$ ) и от  $z$  не зависят также источники  $f$ , то, как известно, существуют два класса решений задач дифракции с  $\partial/\partial z \equiv 0$ . В первом классе ( $E$ -поляризация) отличны от нуля компоненты  $E_z$ ,  $H_x$ ,  $H_y$ , во втором ( $H$ -поляризация) — компоненты  $H_z$ ,  $E_x$ ,  $E_y$ . Для  $U = E_z$  в задачах первого класса выполняется двумерный вариант уравнения (5.1). Уравнения и условия на границе раздела диэлектрика, рассмотренные в §§ 3, 4, также справедливы для  $U = E_z$  в двумерном случае для  $E$ -поляризации. Волновое уравнение (6.1), которое мы рассмотрим в следующем параграфе, описывает тоже двумерную задачу для  $H$ -поляризации ( $U = H_z$ ). Трехмерные электродинамические задачи приводят к уравнениям для полей, более сложным, чем (5.1) или приведенные в следующем параграфе (6.1), и к граничным условиям, более сложным, чем (4.11). При этом удобнее оперировать с уравнениями первого порядка, т. е. непосредственно с уравнениями Максвелла; соответствующий аппарат будет развит в § 8.

Однако скалярный аппарат значительно нагляднее и проще, и на нем можно изучить основные черты всего метода. Он не упрощается для двумерных задач, поэтому мы (5.1) и (6.1) будем рассматривать в трехмерном случае.

Кроме того, эти уравнения описывают также трехмерную акустическую задачу распространения звуковых волн в неоднородной среде. Если скорость звука  $c$  есть функция точки, а плотность среды  $\rho$  постоянна, то волновое уравнение для давления  $U$  имеет вид (5.1), где

$$k^2 \epsilon(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (5.2)$$

Если меняются и  $\rho$  и  $c$ , причем таким образом, что  $\rho c^2 = \text{const}$ , то уравнение для давления имеет вид (6.1), где  $\epsilon$  надо заменить на  $\rho$ . В общем случае и в акустике удобнее оперировать с уравнениями первого порядка.

Уравнение (5.1) в § 7 рассматривается как стационарное уравнение Шредингера.

Мы одновременно будем рассматривать задачи о закрытом резонаторе без потерь, когда на некоторой замкнутой поверхности должно выполняться либо (3.1г), либо равенство нулю нормальной производной, и о закрытом резонаторе с потерями (когда должно выполняться (4.1)), и об открытом резонаторе, когда  $U$  удовлетворяет условию излучения (2.23), и о диэлектрическом теле в пустоте, когда условие излучения есть единственное, кроме (5.1), требование, накладываемое на  $U$ .

Введем поле  $U^0$ , создаваемое теми же источниками в отсутствие диэлектрического тела,

$$\Delta U^0 + k^2 U^0 = f, \quad (5.3)$$

и поля  $u_n$ , удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u_n + k^2 \epsilon_n(\mathbf{r}) u_n = 0. \quad (5.4)$$

Как  $U^0$ , так и  $u_n$  должны удовлетворять упомянутым граничным условиям (на поверхности  $S$  и на бесконечности). Функции  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  должны быть далее определены, причем таким образом, чтобы сохранить основные осо-

бенности метода — явные выражения и резонансный характер коэффициентов разложения

$$U = U^0 + \sum_n A_n u_n. \quad (5.5)$$

Ряд для  $U$  удовлетворяет граничным условиям почленно, и  $A_n$  будут найдены из требования, чтобы (5.5) удовлетворяло уравнению (5.1).

Условия ортогональности для собственных функций находятся из (5.4). Умножая (5.4) на  $u_m$ , а то же уравнение, записанное для  $u_m$ , — на  $u_n$ , вычитая, интегрируя по всему пространству и учитывая, что граничные условия для всех  $u_n$  одинаковы, так что интегралы типа

$$\int \left( u_n \frac{\partial u_m}{\partial N} - u_m \frac{\partial u_n}{\partial N} \right) dS, \quad (5.6)$$

взятые по  $S$  и по бесконечно удаленной сфере, равны нулю, получим

$$\int (\epsilon_n - \epsilon_m) u_n u_m dV = 0. \quad (5.7)$$

Подставим ряд (5.5) в (5.1). Простые преобразования, использующие уравнения (5.3) и (5.4), дают разложение  $U^0$  в ряд по  $u_n$ :

$$\sum_n A_n (\epsilon - \epsilon_n) u_n = (1 - \epsilon) U^0. \quad (5.8)$$

Как и (3.9), это разложение справедливо только там, где  $\epsilon \neq 1$ . Функции  $\epsilon_n$  должны быть равны единице там, где  $\epsilon = 1$ , т. е. вне тела.

Умножим (5.8) на  $u_m$  и проинтегрируем по всему объему (фактически — по объему тела). Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений для  $A_n$ :

$$\sum_n A_n \int (\epsilon - \epsilon_n) u_n u_m dV = \int (1 - \epsilon) U^0 u_m dV. \quad (5.9)$$

Заметим уже здесь, что в п. 3 мы из (5.8) получим другую систему уравнений для  $A_n$ , и это приведет нас к другой системе функций  $\epsilon_n$ , а потому и к другим функциям  $u_n$  и коэффициентам  $A_n$ .

Потребуем теперь, чтобы матрица коэффициентов слева в (5.9) была диагональной (т. е. чтобы для  $A_n$



были явные выражения). Согласно (5.7), для этого функции  $\epsilon_n$ ,  $\epsilon_m$  должны быть связаны с функцией  $\epsilon$  таким образом, чтобы разности  $\epsilon_n - \epsilon_m$  и  $\epsilon - \epsilon_n$  были пропорциональны друг другу; коэффициент пропорциональности не должен зависеть от  $r$ :

$$\epsilon - \epsilon_n = \lambda_{nm} (\epsilon_n - \epsilon_m). \quad (5.10)$$

Этому функциональному уравнению удовлетворяет решение

$$\epsilon_n = \gamma + \sigma_n (\epsilon - \gamma), \quad (5.11)$$

дающее выражение для  $\epsilon_n(r)$  через функцию  $\epsilon(r)$ , произвольную функцию  $\gamma(r)$  и число  $\sigma_n$ , играющее роль собственного значения. Согласно (5.11), все слагаемые в левой части (5.8) содержат множитель  $\epsilon - \gamma$ , правая часть равна нулю при  $\epsilon = 1$ , так что вне тела  $\gamma$  должно быть равно единице

$$\gamma = 1 \quad \text{при} \quad \epsilon = 1. \quad (5.12)$$

В остальном функция  $\gamma(r)$  произвольна, она лишь не должна совпадать с  $\epsilon(r)$ . Любому ее выбору соответствует своя система собственных функций  $u_n$  и собственных значений  $\sigma_n$ . В этом пункте мы примем  $\gamma \equiv 1$ , а возможные обобщения ( $\gamma \neq 1$ ) рассмотрим в п. 4. Таким образом, во вспомогательных задачах, порождающих систему собственных функций  $u_n$  и собственных значений  $\sigma_n$ , диэлектрическая проницаемость есть

$$\epsilon_n(r) = 1 + \sigma_n [\epsilon(r) - 1]. \quad (5.13)$$

Задача предыдущих двух параграфов ( $\epsilon(r) = \text{const}$ ) получится отсюда как частный случай, и для этого случая собственные значения  $\epsilon_n$  связаны с собственными значениями  $\sigma_n$  очевидной формулой

$$\epsilon_n = 1 + \sigma_n (\epsilon - 1). \quad (5.14)$$

Легко обобщается и формула (4.6) для знака мнимой части собственного значения при отличных от нуля недиэлектрических потерях. Повторяя выкладки, приведенные к (4.4), но интегрируя по всему объему, мы справа при наличии потерь в стенках или на излучение получим положительную величину, умноженную на  $i$ , а слева —

тот же интеграл, что и в (4.4), в котором только  $\epsilon_n - \epsilon_n^*$  стоит под знаком интеграла. Если для простоты записи принять, что  $\epsilon$  вещественно и  $\epsilon > 1$ , то из этого равенства получится, что  $\text{Im} \sigma_n > 0$ , что и является искомым обобщением формулы (4.6).

Из (5.9) получается явное выражение для коэффициентов разложения дифрагированного поля

$$A_n = \frac{1}{\sigma_n - 1} \frac{\int (\epsilon - 1) U^0 u_n dV}{\int (\epsilon - 1) u_n^2 dV}. \quad (5.15)$$

Резонансные условия соответствуют частотам, для которых при каком-нибудь  $n$  выполняется равенство

$$\sigma_n(k) - 1 = 0. \quad (5.16)$$

Оно обобщает равенство (3.17), а для  $d\sigma_n/dk^2$  легко получить выражение типа (3.18).

Как и в (3.10б), можно исключить из формулы для  $A_n$  поле  $U^0$  и выразить  $A_n$  непосредственно через возбуждающие источники  $f$ . Формула

$$\int (\epsilon_n - 1) U^0 u_n dV = -\frac{1}{k^2} \int i u_n dV, \quad (5.17)$$

обобщающая (3.11), получается непосредственно из уравнений для  $U^0$  (5.3) и  $u_n$  (5.4). Выкладки для непрерывного  $\epsilon(r)$  проще, чем для разрывного, для которого надо отдельно интегрировать по  $V^+$  и по  $V^-$  и учитывать граничные условия на  $S_\epsilon$ . Подставляя (5.13), получим слева в (5.17) именно тот интеграл, который стоит в числителе (5.15). Таким образом, искомым аналогом формулы (3.10б) имеет вид

$$A_n = \frac{1}{\sigma_n (1 - \sigma_n)} \cdot \frac{\int u_n f dV}{k^2 \int (\epsilon - 1) u_n^2 dV}. \quad (5.18)$$

Наконец, внутри тела, при  $\epsilon \neq 1$ ,  $U^0$  разложимо, согласно (5.8), в ряд по  $u_n$

$$U^0 = \sum_n A_n (\sigma_n - 1) u_n, \quad (5.19)$$

и полное поле можно представить тоже в виде ряда по  $u_n$ :

$$U = \sum_n B_n u_n, \quad (5.20a)$$

$$B_n = \sigma_n A_n. \quad (5.20b)$$

Формулы (5.19), (5.20) являются очевидным обобщением формул (3.9) и (3.14).

2. В этом пункте мы получим те же результаты, что и в п. 1, используя другой аппарат; это позволит нам с несколько иной точки зрения подойти к основным формулам (5.13) и (5.15).

Дифрагированное поле  $U-U^0$ , согласно (5.1) и (5.3), удовлетворяет соотношению

$$\Delta(U - U^0) + k^2(U - U^0) = -k^2(\epsilon - 1)U \quad (5.21)$$

и тому же граничному условию, что  $U$  и  $U^0$ . Левая часть здесь есть оператор Гельмгольца в отсутствие диэлектрика. Введем функцию Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$  этого же оператора, т. е. удовлетворяющее тем же граничным условиям решение уравнения

$$\Delta G + k^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \quad (5.22)$$

для резонатора без диэлектрика, возбуждаемого  $\delta$ -источником. Если, кроме диэлектрика, других тел нет, то  $G$  — функция Грина пустоты, удовлетворяющая условию излучения. Для двух- и трехмерных задач соответственно  $G$  в этом случае равно

$$G = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|), \quad G = \frac{-1}{4\pi} \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}. \quad (5.23)$$

Умножая (5.22) на  $U(\mathbf{r}) - U^0(\mathbf{r})$ , а (5.21) — на  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$  и интегрируя по  $\mathbf{r}$ , получим

$$U(\mathbf{r}_1) - U^0(\mathbf{r}_1) = -k^2 \int [\epsilon(\mathbf{r}) - 1] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) U(\mathbf{r}) dV. \quad (5.24)$$

Это известное интегральное уравнение для  $U(\mathbf{r})$  используется, например, для обоснования приближенного метода Борна, состоящего (если ограничиваться одной итерацией) в замене справа под интегралом неизвестной функции  $U(\mathbf{r})$  на  $U^0(\mathbf{r})$ .

Согласно (5.24), поле  $U - U^0$  истокообразно представлено через ядро  $-k^2(\epsilon - 1)G$ . Введем *собственные функции этого ядра*

$$u_n = -\sigma_n k^2 \int (\epsilon - 1) G u_n dV. \quad (5.25)$$

Легко установить три свойства этих функций, следующие непосредственно из (5.25).

Функция  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$  симметрична относительно своих аргументов, поэтому она удовлетворяет граничным условиям не только как функция  $\mathbf{r}$ , но и как функция  $\mathbf{r}_1$ . Следовательно, этому же условию удовлетворяет и  $u_n$ .

Функции  $u_n$  ортогональны с весом  $\epsilon - 1$ :

$$\int (\epsilon - 1) u_n u_m dV = 0 \quad (n \neq m). \quad (5.26)$$

И наконец, третье свойство собственных функций  $u_n$ , определенных уравнением (5.25), мы получим, применив к (5.25) оператор  $\Delta + k^2$  в переменных  $\mathbf{r}_1$ . Имея в виду, что  $G$  как функция  $\mathbf{r}_1$  удовлетворяет тому же уравнению (5.25), получим

$$(\Delta + k^2) u_n(\mathbf{r}_1) = -\sigma_n k^2 \int [\epsilon(\mathbf{r}) - 1] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) u_n(\mathbf{r}) dV. \quad (5.27)$$

Следовательно,  $u_n$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta u_n + k^2 [1 + \sigma_n(\epsilon - 1)] u_n = 0 \quad (5.28)$$

и правильному граничному условию, т. е. является решением задачи о свободных колебаниях тела с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  (5.13).

Для нахождения коэффициентов в (5.5) подставим это разложение в (5.24):

$$\sum_n A_n \left(1 - \frac{1}{\sigma_n}\right) u_n = -k^2 \int (\epsilon - 1) U^0 G dV. \quad (5.29)$$

Умножим это равенство на  $(\epsilon - 1) u_m$ , проинтегрируем по объему и воспользуемся ортогональностью (5.26). В возникшем справа интеграле изменим порядок интегрирования и еще раз используем (5.25). Тогда для  $A_n$  найдем выражение (5.15). Формула (5.18) для  $A_n$  полу-

чится, если в (5.29) вместо  $U^0$  подставить его выражение через функцию Грина

$$U^0 = \int Gf dV \quad (5.30)$$

(которое легко получается из (5.3) и (5.22)) и вновь переставить порядок интегрирования.

Как и следовало ожидать, аппарат интегральных уравнений приводит к тем же вспомогательным задачам, в которых диэлектрическая проницаемость определяется формулой (5.13), и к тем же формулам для коэффициентов разложения, что и аппарат дифференциальных уравнений. Мы привели здесь способ, основанный на (5.24), для того, чтобы проиллюстрировать один из основных приемов, используемых в обобщенном методе собственных колебаний для построения системы собственных функций. Прием этот состоит в том, чтобы свести решение задачи дифракции к интегральному уравнению (например, типа (5.24)), а затем ввести собственные функции соответствующего интегрального оператора (типа (5.25)). Этот способ будет использован и во второй главе.

3. Формула (5.11) — не единственный вид диэлектрической проницаемости  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  вспомогательных тел, который дает явное выражение для  $A_n$ . Из (5.8) и *при другом выборе функций*  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  можно получить систему линейных уравнений для  $A_n$ , также имеющую диагональную матрицу, но отличную от (5.9).

Умножим (5.8) на  $\frac{\epsilon_m}{\epsilon} u_m$  и проинтегрируем по всему объему. Тогда система уравнений для  $A_n$  примет вид

$$\sum_n A_n \int \epsilon_n \epsilon_m \left( \frac{1}{\epsilon_n} - \frac{1}{\epsilon} \right) u_n u_m dV = \int \epsilon_m \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right) u_m U^0 dV. \quad (5.31)$$

Матрица этой системы будет, согласно (5.7), диагональной, если множитель под интегралом слева будет пропорционален  $\epsilon_n - \epsilon_m$ , т. е. если

$$\frac{1}{\epsilon_n} - \frac{1}{\epsilon} = \lambda_{nm} \left( \frac{1}{\epsilon_m} - \frac{1}{\epsilon_n} \right). \quad (5.32)$$

Числа  $\lambda_{nm}$  отличны от коэффициентов пропорциональности в (5.10).

Одно из решений функционального уравнения (5.32) есть

$$\frac{1}{\epsilon_n} = 1 + \bar{\sigma}_n \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right). \quad (5.33)$$

Разумеется, и здесь вместо единицы можно вводить произвольную функцию  $\gamma(\mathbf{r})$ , удовлетворяющую (5.12), но мы не будем выписывать соответствующих формул (ср. (6.11)).

Приняв (5.33), мы получим для  $A_n$  явное выражение

$$A_n = \frac{1}{\bar{\sigma}_n - 1} \cdot \frac{\int \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \epsilon_n u_n U^0 dV}{\int \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \epsilon_n u_n^2 dV}, \quad (5.34)$$

тоже имеющее резонансный знаменатель  $\bar{\sigma}_n(k) - 1$ .

В некотором отношении выбор функции  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  (5.33) для диэлектрической проницаемости вспомогательного тела является для уравнения (5.1) менее естественным, чем функции (5.13) или (5.11). Условия ортогональности (5.7) для (5.13) записываются в форме (5.26), не содержащей  $\epsilon_n$  и  $\epsilon_m$ . Для (5.33) такая запись не существует, а это значит, по-видимому, что (5.33) не может быть получено из интегрального уравнения Фредгольма, как (5.11). Мы увидим в следующем параграфе, что выбор  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  в форме (5.33) является в этом смысле естественным для другой формы волнового уравнения.

Результаты (5.33) и (5.34) мы привели для того, чтобы проиллюстрировать различные возможности построения систем собственных функций. При некоторых видах функции  $\epsilon(\mathbf{r})$  уравнение (5.4) легче решать с  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  по (5.33), а не по (5.13).

4. Рассмотрим, наконец, какие возможности выбора  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  возникают, если *не полагать* в (5.11)  $\gamma(\mathbf{r})$  *единицей*, как в (5.13). При  $\gamma \neq 1$  условие ортогональности будет не (5.26), а

$$\int (\epsilon - \gamma) u_n u_m dV = 0 \quad (n \neq m), \quad (5.35)$$

выражение для коэффициентов  $A_n$  по-прежнему получается из (5.9) и имеет вид

$$A_n = \frac{1}{\sigma_n - 1} \cdot \frac{\int (\epsilon - 1) u_n U^0 dV}{\int (\epsilon - \gamma) u_n^2 dV}, \quad (5.36)$$

что обобщает (5.15). Разложение  $U^0$  внутри тела, согласно (5.8), (5.11) и (5.35), будет иметь вид

$$U^0 = \sum_n A_n (\sigma_n - 1) \frac{\epsilon - \gamma}{\epsilon - 1} u_n. \quad (5.37)$$

Интересный вариант метода получается при следующем специальном выборе функции  $\gamma(\mathbf{r})$ : положим внутри тела

$$\gamma(\mathbf{r}) = c \cdot \epsilon(\mathbf{r}), \quad (5.38)$$

где число  $c$  ( $c \neq 1$ ) несущественно для дальнейшего; вне тела должно выполняться (5.12). Тогда, согласно (5.11),  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  во вспомогательной задаче (5.4) тоже пропорционально  $\epsilon(\mathbf{r})$  (в точках, где  $\epsilon(\mathbf{r}) \neq 1$ ). Коэффициент пропорциональности равен  $c + \sigma_n(1 - c)$  и может рассматриваться вместо  $\sigma_n$  как собственное значение. Обозначим его через  $\overline{k_n^2}/k^2$ :

$$\epsilon_n = \frac{\overline{k_n^2}}{k^2} \epsilon \quad (\epsilon \neq 1), \quad (5.39)$$

подчеркнув этим, что получившийся при (5.38) вариант  $\epsilon$ -метода в некотором отношении близок к  $k$ -методу. Действительно, уравнение для собственных функций  $u_n$  при (5.39) совпадает (но только внутри тела, т. е. там, где  $\epsilon(\mathbf{r}) \neq 1$ ) с уравнением в  $k$ -методе:

$$\Delta u_n + \overline{k_n^2} \epsilon(\mathbf{r}) u_n = 0. \quad (5.40a)$$

Отличие методов состоит в том, что в  $k$ -методе это же уравнение сохраняется и вне тела, при  $\epsilon = 1$ , а в  $\epsilon$ -методе  $u_n$  при  $\epsilon = 1$  удовлетворяют уравнению

$$\Delta u_n + k^2 u_n = 0, \quad (5.40б)$$

не содержащему собственного значения  $\overline{k_n^2}$ .

Этот вариант  $\epsilon$ -метода (5.39) может трактоваться как прямое перенесение метода, основанного на формулах (3.4a), (3.4б), на случай дифракции на неоднородном диэлектрическом теле. Однако более простым является, по-видимому, вариант (5.13), ибо в варианте (5.39)  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  описывается двумя различными формулами при  $\epsilon \neq 1$  и при  $\epsilon = 1$ , что неудобно, если  $\epsilon(\mathbf{r})$  непрерывно меняется до значения единица.

Условия ортогональности для (5.39) имеют вид

$$\int_{V^+} \epsilon u_n u_m dV = 0 \quad (n \neq m), \quad (5.41)$$

где подчеркнуто, что интеграл взят по области, где  $\epsilon \neq 1$ . Выражения для коэффициентов разложения  $A_n$  (5.36) после исключения  $\sigma_n$  примут вид

$$A_n = \frac{k^2}{\overline{k_n^2} - k^2} \cdot \frac{\int (\epsilon - 1) u_n U^0 dV}{\int_{V^+} \epsilon u_n^2 dV}, \quad (5.42)$$

очень похожий на (3.10a). Резонанс наступает при условии, когда мал или равен нулю знаменатель  $\overline{k_n^2} - k^2$ .

5. Как и в п. 2, аппарат с  $\gamma \neq 1$  может быть построен методом интегрального уравнения. Для этого надо функцию Грина определить не по (5.22), а формулой

$$\Delta G + k^2 \gamma G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \quad (5.43)$$

и соответствующими граничными условиями. Уравнение (5.24) примет вид

$$U = \int f G dV - k^2 \int (\epsilon - \gamma) U G dV, \quad (5.44)$$

и если определить  $\sigma_n$  и  $u_n$  как собственные значения и собственные функции интегрального уравнения

$$u_n = -\sigma_n k^2 \int (\epsilon - \gamma) G u_n dV, \quad (5.45)$$

то для  $u_n$  получится дифференциальное уравнение (5.4) с той же функцией  $\epsilon_n$  (5.11), т. е. (5.45) порождает

те же  $u_n$ ,  $\sigma_n$ , что и (5.4), (5.11). Однако при этом выделенное перед рядом в (5.5) слагаемое

$$U^0 = \int f G dV \quad (5.46)$$

будет удовлетворять не уравнению (5.3), а другому уравнению

$$\Delta U^0 + k^2 \gamma U^0 = f, \quad (5.47)$$

следующему из (5.43), т. е. будет *полем, возникающим при дифракции поля заданных источников на теле, диэлектрическая проницаемость которого есть  $\gamma(r)$* . Коэффициенты  $A_n$  будут иметь вид

$$A_n = \frac{1}{\sigma_n - 1} \frac{\int (\epsilon - \gamma) u_n U^0 dV}{\int (\epsilon - \gamma) u_n^2 dV}. \quad (5.48)$$

При этом, как оказывается, может быть снято условие (5.12). Это выражение можно преобразовать, подобно (5.15), к виду, аналогичному (5.18), т. е. содержащему не  $U^0$ , а непосредственно источники  $f$ :

$$A_n = \frac{1}{\sigma_n (1 - \sigma_n)} \frac{\int u_n f dV}{k^2 \int (\epsilon - \gamma) u_n^2 dV}. \quad (5.49)$$

Кажущееся противоречие между этими результатами и результатами предыдущего пункта ((5.47) отлжно от (5.3) и (5.48) — от (5.36)) связано с тем, что  $U^0$  в (5.36) и (5.48) — различные функции. Разность между этими функциями представляет собой поле, источники которого расположены в области, где  $\gamma \neq 1$ , и поэтому может быть разложена всюду в ряд по  $u_n$ .

При выборе функций  $u_n$  и  $\epsilon_n(\mathbf{r})$ , задаваемых формулой (5.11) при  $\gamma \neq 1$ , выделение  $U^0$  по (5.47), т. е. как решение задачи дифракции на теле с диэлектрической проницаемостью, также равной  $\gamma$ , является более естественным, чем выделение  $U^0$  по (5.3), т. е. для другого  $\epsilon$ . С этим связана и возможность преобразования  $A_n$  к форме (5.49), и существование простого интегрального уравнения (5.44).

6<sup>1</sup>). Ряды (5.5) и (5.20) формально можно получить и методами теории функций. Такой подход позволит установить связь между возможностью представления решения задачи дифракции (5.1) в виде разложений (5.5), (5.20) и поведением этого решения при больших по модулю значениях диэлектрической проницаемости тела.

Рассмотрим вместо (5.1) более общее уравнение

$$\Delta U + k^2 [1 + \sigma(\epsilon - 1)] U = f \quad (5.50)$$

с теми же граничными условиями. Решение этого уравнения зависит от  $\sigma$ ; мы будем его обозначать  $U(\sigma)$ . При  $\sigma = 1$  оно переходит в решение  $U$  задачи дифракции (5.1), т. е.  $U(1) = U$ . При  $\sigma = 0$   $U(\sigma)$  переходит в поле тех же источников в отсутствие диэлектрика,  $U(0) = U^0$ .

Нас будет интересовать зависимость  $U(\sigma)$  от  $\sigma$  во всей плоскости комплексной переменной  $\sigma$ . В этом рассмотрении координаты точки наблюдения предполагаются фиксированными параметрами. Функция  $U(\sigma)$  мероморфна по  $\sigma$ , т. е. единственными ее особенностями в любой конечной части комплексной плоскости могут быть лишь полюсы. Полюсы  $\sigma_n$  функции  $U(\sigma)$  совпадают с собственными значениями задачи (5.4) (при  $\epsilon_n(\mathbf{r})$ , определяемой формулой (5.13)).

Пусть нам известны полюсы  $\sigma_n$  функции  $U(\sigma)$  и вычеты в них

$$c_n = \lim_{\sigma \rightarrow \sigma_n} (\sigma - \sigma_n) U(\sigma). \quad (5.51)$$

В некоторых случаях знание чисел  $\sigma_n$  и  $c_n$  оказывается достаточным для того, чтобы восстановить функцию  $U(\sigma)$ . Пусть существует последовательность расширяющихся контуров, на которых  $|U(\sigma)| \rightarrow 0$  не медленнее, чем  $1/|\sigma|$  (в дальнейшем, описывая поведение  $|U(\sigma)|$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ , мы будем опускать упоминание об этих контурах). Тогда имеет место разложение

$$U(\sigma) = \sum_n \frac{c_n}{\sigma - \sigma_n}. \quad (5.52)$$

Если функция  $|U(\sigma)|$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$  ограничена, то

$$U(\sigma) = U(0) + \sum_n \frac{\sigma}{\sigma_1} \frac{c_n}{\sigma - \sigma_n}. \quad (5.53)$$

<sup>1</sup>) Этот пункт содержит результаты А. Д. Шатрова и написан им.

Эти представления известны в литературе как разложения Миттаг-Леффлера мероморфной функции на простейшие дроби.

Найдем вычеты  $c_n$ . Представим функцию  $f$ , входящую в (5.50), в виде суммы двух слагаемых

$$f = \frac{(\varepsilon - 1) u_n \int f u_n dV}{\int (\varepsilon - 1) u_n^2 dV} + \tilde{f}. \quad (5.54)$$

Очевидно, что

$$\int \tilde{f} u_n dV = 0. \quad (5.55)$$

Решение неоднородного уравнения (5.50) также разобьется на два слагаемых. В силу условия (5.55) слагаемое, соответствующее  $\tilde{f}$ , остается конечным при  $\sigma \rightarrow \sigma_n$  и не дает вклада в  $c_n$ . Слагаемое, соответствующее первому члену в (5.54), равно

$$\frac{1}{\sigma - \sigma_n} \frac{u_n \int f u_n dV}{k^2 \int (\varepsilon - 1) u_n^2 dV}, \quad (5.56)$$

откуда для  $c_n$  получим выражение через собственную функцию

$$c_n = \frac{u_n \int f u_n dV}{k^2 \int (\varepsilon - 1) u_n^2 dV}. \quad (5.57)$$

Ряд (5.52) при  $\sigma = 1$  переходит в (5.20), а ряд (5.53) — в ряд (5.5). Таким образом, для справедливости (5.5) достаточно ограниченности  $|U(\sigma)|$ , а для справедливости (5.20) достаточно, чтобы  $|U(\sigma)| = O(1/|\sigma|)$ .

Если источник и точка наблюдения экранированы друг от друга материалом с диэлектрической проницаемостью, отличной от единицы, то  $|U(\sigma)| = O(1/|\sigma|)$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$  и разложения (5.52), а следовательно, и (5.20) — справедливы. Для нижней полуплоскости это очевидно, поскольку уход в нижнюю полуплоскость означает, что диэлектрик обращается в металл. Анализ простых задач, допускающих аналитическое решение, пока-

зывает, что в этом случае  $|U(\sigma)|$  убывает и в верхней полуплоскости.

Если источник и точка наблюдения расположены вне диэлектрика (и не заэкранированы этим телом), то  $U(\sigma)$  стремится к постоянному значению, отличному от нуля. Поэтому (5.52) не имеет места, а справедливо (5.53) и, следовательно, (5.5). Однако можно написать и другое разложение  $U(1)$ , имея в виду, что если  $U(\sigma)$  достаточно быстро стремится к  $U(\infty)$ , то для  $U(\sigma) - U(\infty)$  справедливо разложение (5.52) и

$$U(1) = U(\infty) + \sum_n \frac{c_n}{1 - \sigma_n}. \quad (5.58)$$

Этот ряд отличается от (5.5) тем, что выделено не поле источников в пустоте, а их поле в присутствии металлического тела, заменяющего диэлектрик, на котором происходит дифракция. Ряд (5.58) сходится хуже, чем (5.5).

Отдельно должен быть рассмотрен случай, когда диэлектрическое тело имеет внутреннюю полость, ограниченную поверхностью  $S$ , и одна из собственных частот этой полости, соответствующая граничному условию  $U|_S = 0$ , совпадает с  $k$ . Тогда, если источник и точка наблюдения расположены внутри полости, то  $|U(\sigma)| \rightarrow \infty$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ . Скорость роста функции  $|U(\sigma)|$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$  зависит от поведения  $\varepsilon$  в окрестности поверхности  $S$ . Максимальная скорость роста, равная  $|\sigma|^{1/2}$ , имеет место, если граница  $S$  характеризуется скачком диэлектрической проницаемости. Для тела с  $\varepsilon = \text{const}$  этот закон возрастания можно понять следующим образом. Полагая в (5.50) величину  $\sigma$  мнимым числом с  $\text{Im } \sigma < 0$ , мы заменяем диэлектрик металлом с проводимостью, пропорциональной  $|\sigma|$ . Известно, что добротность закрытого резонатора пропорциональна корню квадратному из проводимости стенок. При этом для  $U(1)$  справедливо более сложное, чем (5.52) или (5.53), представление

$$U(1) = U(0) + \left. \frac{dU(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} + \sum_n \frac{1}{\sigma_n} \frac{c_n}{1 - \sigma_n}, \quad (5.59)$$

в котором выделенное поле уже не имеет простого физического смысла.

### § 6. Неоднородный диэлектрик, вторая поляризация

В этом параграфе  $\varepsilon$ -метод применяется к решению дифференциального уравнения

$$\nabla \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla U \right) + k^2 U = f, \quad \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}), \quad (6.1)$$

с условием излучения на бесконечности и какими-либо условиями (первого, второго или третьего рода) на поверхности  $S$ .

В первых трех пунктах этого параграфа мы будем считать  $\varepsilon(\mathbf{r})$  непрерывной функцией (равной единице вне некоторого конечного объема). Лишь в четвертом пункте будет рассмотрена задача, в которой  $\varepsilon(\mathbf{r})$  — разрывная функция, так что существует некоторая поверхность  $S_\varepsilon$ , на которой должны выполняться граничные условия

$$U^+ - U^-|_{S_\varepsilon} = 0, \quad (6.2a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U^+}{\partial N} - \frac{\partial U^-}{\partial N} \Big|_{S_\varepsilon} = 0 \quad (6.2b)$$

и вне которой  $\varepsilon = 1$ . Эти граничные условия являются, как известно, предельной формой уравнения (6.1) на поверхности разрыва  $\varepsilon(\mathbf{r})$ . Решения, полученные из (6.1) для непрерывного  $\varepsilon(\mathbf{r})$ , в пределе, при  $|\nabla \varepsilon| \rightarrow \infty$  на  $S_\varepsilon$ , удовлетворяют на  $S_\varepsilon$  условиям (6.2). Поэтому достаточно рассматривать задачи с непрерывным  $\varepsilon(\mathbf{r})$ , а для тел с границей раздела переходить к пределу при  $|\nabla \varepsilon| \rightarrow \infty$  в окончательных формулах. Этот подход приводит к более простым выкладкам, чем при введении границы  $S_\varepsilon$  с (6.2) с самого начала, ибо позволяет не рассматривать отдельно интегралы в  $V^+$  и в  $V^-$ .

1. Повторим для уравнения (6.1) построения § 5 с соответствующими модификациями. Введем собственные функции  $u_n(\mathbf{r})$  уравнением

$$\nabla \left( \frac{1}{\varepsilon_n} \nabla u_n \right) + k^2 u_n = 0, \quad \varepsilon_n = \varepsilon_n(\mathbf{r}) \quad (6.3)$$

с соответствующими граничными условиями на металле и на бесконечности. Вид функций  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$  будет найден ниже.

Найдем для  $u_n$  условия ортогональности, аналогичные (5.7). Для этого умножим (6.3) на  $u_m$ , вычтем такое же выражение с перестановкой индексов и проинтегрируем по объему. Воспользуемся тождеством

$$u_m \nabla \left( \frac{1}{\varepsilon_n} \nabla u_n \right) = - \frac{1}{\varepsilon_n} \nabla u_n \nabla u_m + \nabla \left( \frac{1}{\varepsilon_n} u_m \nabla u_n \right). \quad (6.4)$$

Интегралы по поверхности, возникающие при интегрировании последнего слагаемого, имеют вид (5.6) и равны нулю. Интегралы по бесконечно удаленной сфере исчезают, так как  $u_n$  и  $u_m$  удовлетворяют условиям излучения, а  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$ , как мы далее увидим, подчиняется условию

$$\varepsilon_n(\mathbf{r}) = 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon(\mathbf{r}) = 1. \quad (6.5)$$

Таким образом, искомая связь между двумя собственными функциями  $u_n$  и  $u_m$ , соответствующая двум вспомогательным диэлектрическим проницаемостям  $\varepsilon_n$  и  $\varepsilon_m$ , — условие ортогональности — имеет вид

$$\int \left( \frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_m} \right) \nabla u_n \nabla u_m dV = 0. \quad (6.6)$$

Введем  $U^0$  уравнением (5.3) и представим решение задачи (6.1) в виде ряда (5.5). Граничные условия и волновое уравнение вне тела выполняются рядом (5.5) почленно. Коэффициенты  $A_n$  находятся из требования, чтобы (6.1) выполнялось внутри тела, т. е. в области, где  $\varepsilon \neq 1$ . Подставив (5.5) в (6.1), получим формулу, аналогичную (5.8):

$$\sum_n A_n \nabla \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) \nabla u_n \right] = \nabla \left[ \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \nabla U^0 \right]. \quad (6.7)$$

Из нее, в частности, следует требование (6.5).

Затем можно двумя различными способами получить систему линейных уравнений для  $A_n$ , приводящую к различным выражениям для  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$  и для  $A_n$ . Первый из них (п. 2) соответствует п. 1 § 5, второй (п. 3) — п. 3 § 5.

2. Умножим (6.7) на  $u_m$  и проинтегрируем по объему, пользуясь (6.4). Возникающие при интегрировании поверхностные интегралы равны нулю вследствие (6.5). При этом получится система

$$\sum_n A_n \int \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) \nabla u_n \nabla u_m dV = \int \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \nabla U^0 \nabla u_n dV. \quad (6.8)$$

Ее матрица будет диагональной, если *подынтегральная функция в коэффициентах будет пропорциональна подынтегральной функции в условиях ортогональности*, т. е. если будет выполняться (5.32). Тогда  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  можно выразить через  $\epsilon(\mathbf{r})$  и собственное значение  $\sigma_n$  ввести формулой

$$\frac{1}{\epsilon_n(\mathbf{r})} = 1 + \sigma_n \left( \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} - 1 \right) \quad (6.9)$$

(ср. (5.33)). При этом условия ортогональности, как и в (5.26), могут быть записаны в виде, не содержащем  $\epsilon_n$  и  $\epsilon_m$ :

$$\int \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \nabla u_n \nabla u_m dV = 0 \quad (n \neq m). \quad (6.10)$$

Можно было бы ввести произвольную функцию  $\gamma(\mathbf{r})$ , удовлетворяющую (5.12), и записать более общее решение функционального уравнения (5.32):

$$\frac{1}{\epsilon_n} = \frac{1}{\gamma} + \sigma_n \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\gamma} \right). \quad (6.11)$$

В частности, полагая  $\gamma$  пропорциональной  $\epsilon$  (при  $\epsilon \neq 1$ ), т. е. принимая (5.38), мы получили бы, что  $\epsilon_n$  пропорционально  $\epsilon$  (5.39), так что волновое уравнение для  $u_n$  внутри тела имело бы вид, аналогичный (5.40а):

$$\nabla \left( \frac{1}{\epsilon} \nabla u_n \right) + \overline{k_n^2} u_n = 0. \quad (6.12)$$

Собственное значение в этом варианте опять обозначено, как и в конце п. 4 предыдущего параграфа, через  $\overline{k_n^2}$ . Как и в предыдущем параграфе, (6.12) не отличается от уравнения для собственных функций в  $k$ -методе, но  $u_n$  подчиняется ему только внутри тела, т. е. там, где  $\epsilon \neq 1$ , а вне тела  $u_n$  удовлетворяет уравнению (5.40б). В  $k$ -методе  $u_n$  и вне тела описывалось бы уравнением (6.12), содержащим  $\overline{k_n^2}$ .

Мы не будем выписывать условия ортогональности, выражения для  $A_n$  и т. д. для более общего решения (6.11) и ограничимся анализом для простейшего вида функции  $\epsilon_n(\mathbf{r})$ , даваемого (6.9).

Мнимая часть диэлектрической проницаемости  $\epsilon_n$  в среднем по телу неотрицательна, как и в задачах пре-

дыдущего параграфа. Действительно, умножая (6.3) на  $u_n^*$  и пользуясь опять (6.4), легко получить

$$\frac{1}{\epsilon_n} |\nabla u_n|^2 = k^2 |u_n|^2 + \nabla \left( \frac{1}{\epsilon_n} u_n^* \nabla u_n \right). \quad (6.13)$$

Вычитая это выражение из комплексно сопряженного и интегрируя по объему, получим справа мнимую часть интеграла  $\int u_n \frac{\partial u_n^*}{\partial N} dS$ , взятого по импедансной поверхности и по бесконечно удаленной сфере. Эта величина всегда неотрицательна (и равна нулю для закрытого резонатора без потерь), и поэтому

$$\int \frac{\text{Im } \epsilon_n}{|\epsilon_n|^2} |\nabla u_n|^2 dV \geq 0. \quad (6.14)$$

Физический смысл этого свойства диэлектрической проницаемости вспомогательных тел был нами рассмотрен в § 4.

Амплитуды  $A_n$  при выборе  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  по (6.9) равны

$$A_n = \frac{1}{\sigma_n - 1} \cdot \frac{\int \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \nabla U^0 \nabla u_n dV}{\int \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right) (\nabla u_n)^2 dV}. \quad (6.15)$$

Резонансный знаменатель имеет тот же вид  $\sigma_n(k) - 1$ , что и в (5.15).

Как и выше, можно и в этой задаче исключить из выражения (6.15) поле  $U^0$ , выразив его через создающие это поле источники  $f$ . Аналог формулы (5.17), который при этом надо использовать, получается интегрированием формулы

$$\nabla \left[ u_n \nabla U^0 - \frac{1}{\epsilon_n} U^0 \nabla u_n \right] - \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_n} \right) \nabla u_n \nabla U^0 = u_n f, \quad (6.16)$$

легко выводимой из (6.1) и (6.4), и имеет вид

$$\int \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_n} \right) \nabla u_n \nabla U^0 dV = - \int f u_n dV. \quad (6.17)$$



Используя теперь (6.9), получим искомую формулу, подобную (5.18), т. е. содержащую не  $U^0$ , а  $f$ :

$$A_n = \frac{1}{\sigma_n(1 - \sigma_n)} \cdot \frac{\int u_n f dV}{\int \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) (\nabla u_n)^2 dV}. \quad (6.18)$$

Внутри тела (т. е. при  $\epsilon \neq 1$ ) можно разложить  $U^0$  в ряд по  $u_n$ , т. е. представить решение  $U$  в виде (3.13) и тем самым полностью исключить  $U^0$  из формул. Коэффициент разложения  $U^0$  в ряд по  $u_n$  легко получить непосредственно, пользуясь условием ортогональности (6.10). Он отличается от  $A_n$  (6.15) отсутствием первого множителя, так что и для этой поляризации справедливы формулы (5.19) и (5.20).

Формулы этого пункта можно также получить, заменив дифференциальное уравнение (6.1) интегральным и повторяя рассуждения второго пункта § 5. Уравнение (6.1) можно записать в форме

$$\Delta(U - U^0) + k^2(U - U^0) = \nabla \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \nabla U \right], \quad (6.19)$$

и, вводя функцию Грина в отсутствие диэлектрика уравнением (5.22), получить интегральное (точнее — интегродифференциальное) уравнение

$$U(\mathbf{r}_1) - U^0(\mathbf{r}_1) = - \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \nabla \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \nabla U \right] dV. \quad (6.20)$$

Функции  $u_n$  можно ввести как *собственные функции однородного уравнения*, соответствующего уравнению (6.20):

$$u_n = -\sigma_n \int G \nabla \left[ \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \nabla u_n \right] dV. \quad (6.21)$$

Легко проверить, что эти функции удовлетворяют тому же уравнению (6.3) с диэлектрической проницаемостью (6.9), т. е. совпадают с  $u_n$ , введенными выше. Условия ортогональности (6.10) при этом не содержат  $\epsilon_n$  и  $\epsilon_m$ . Аппарат дифференциальных уравнений в этой задаче проще, чем аппарат уравнений (6.20), так как (6.20) в отличие от (5.24) имеет сложный вид.

3. Получим теперь из (6.7) другую систему уравнений для  $A_n$ , отличную от (6.8). Это приведет нас к иному виду функций  $\epsilon_n(\mathbf{r})$ , тоже обеспечивающих диагональность матрицы этой системы.

Введем функции  $\tilde{u}_m$ , определив их уравнением

$$\nabla \tilde{u}_m = \frac{\epsilon}{\epsilon_m} \nabla u_m. \quad (6.22)$$

Умножим (6.7) на  $\tilde{u}_m$  и проинтегрируем по всему объему. После преобразования по (6.4) функция  $\tilde{u}_m$  войдет в подынтегральное выражение только под знаком  $\nabla$ , система уравнений для  $A_n$  будет, согласно (6.22), содержать только  $u_n$ , а функции  $\tilde{u}_n$  не будут участвовать в дальнейших преобразованиях. Система эта имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_n A_n \int \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_n} \right) \frac{\epsilon}{\epsilon_m} \nabla u_n \nabla u_m dV = \\ = \int \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{\epsilon}{\epsilon_m} \nabla U^0 \nabla u_m dV. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Для того чтобы она стала диагональной, функции  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  должны, согласно (6.6), удовлетворять функциональному уравнению

$$\frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon_n - \epsilon_m} = \lambda_{nm} \left( \frac{1}{\epsilon_n} - \frac{1}{\epsilon_m} \right), \quad (6.24)$$

Это уравнение совпадает с (5.10), и его решение имеет вид

$$\epsilon_n = 1 + \bar{\sigma}_n(\epsilon - 1), \quad (6.25)$$

где  $\bar{\sigma}_n$  — введенное иначе, чем  $\sigma_n$ , собственное значение задачи. Здесь мы опять не стали вводить произвольную функцию  $\gamma(\mathbf{r})$ . Выбор диэлектрической проницаемости вспомогательной задачи в виде (6.25) является для уравнения (6.1) менее естественным, чем (6.9). При (6.25) условие ортогональности содержит  $\epsilon_n$ ,  $\epsilon_m$ ; не удастся, по-видимому, построить интегральный или интегродифференциальный оператор с собственными значениями  $\bar{\sigma}_n$  и собственными функциями  $u_n$ ; не удастся ряд преобразований, произведенных с собственными функциями, полученными при выборе  $\epsilon_n$  по (6.9). Однако

формальное построение ряда (5.5) возможно, и коэффициенты

$$A_n = \frac{1}{\bar{\sigma}_n - 1} \cdot \frac{\int \frac{\epsilon - 1}{\epsilon_n} \nabla U^0 \nabla u_n dV}{\int \frac{\epsilon - 1}{\epsilon_n^2} (\nabla u_n)^2 dV} \quad (6.26)$$

имеют ту же структуру, что и коэффициенты (6.15).

4. Перейдем теперь к предельному случаю, когда  $\epsilon(\mathbf{r})$  имеет разрыв на некоторой границе  $S_\epsilon$ . На ней должны выполняться условия (6.2). Для того чтобы не усложнять запись, мы предположим, что внутри тела диэлектрическая проницаемость постоянна,  $\epsilon(\mathbf{r}) = \text{const} \neq 1$ , вне тела она равна единице. Таким образом, в этом пункте ищется решение уравнений

$$\frac{1}{\epsilon} \Delta U + k^2 U = f \quad \text{в } V^+, \quad (6.27a)$$

$$\Delta U + k^2 U = f \quad \text{в } V^- \quad (6.27б)$$

с граничными условиями (6.2) на  $S_\epsilon$  и обычными условиями на металле и на бесконечности. Эта задача отличается от задачи §§ 3, 4 граничным условием для нормальной производной на  $S_\epsilon$ , т. е. различием в формулах (3.1в) и (6.2б).

Уравнения (6.3) для  $u_n$  внутри ( $V^+$ ) и вне тела ( $V^-$ ) совпадают с (3.4а, б). При этом  $\epsilon_n$  (6.9) тоже постоянно в  $V^+$  и равно единице в  $V^-$ , т. е. испытывает скачок на  $S_\epsilon$ . Граничные условия для  $u_n$  на  $S_\epsilon$  являются предельной формой уравнения (6.3), т. е. имеют вид

$$u_n^+ - u_n^- \Big|_{S_\epsilon} = 0, \quad \frac{1}{\epsilon_n} \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \Big|_{S_\epsilon} = 0. \quad (6.28)$$

В задаче дифракции этого пункта диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  входит не только в уравнение (6.27а), но и в граничное условие (6.2). Согласно (6.28), *собственное значение однородной задачи  $\epsilon_n$  также входит не только в уравнение (3.4а), но и в граничное условие. Поэтому однородная задача для  $u_n$ , как и выше, описывает свободное колебание тела с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_n$ .*

Собственное значение  $\epsilon_n$  однородной задачи (3.4а, б), (6.28) связано с собственным значением  $\sigma_n$  более общей задачи (6.1) уравнением (6.9), в котором теперь  $\epsilon_n$  и  $\epsilon$  — числа, а

$$\sigma_n = \frac{\epsilon}{\epsilon_n} \frac{\epsilon_n - 1}{\epsilon - 1}. \quad (6.29)$$

Решение задачи дифракции (6.27), (6.2) мы будем искать, как обычно, в форме (5.5), где  $U^0$  (поле тех же источников в отсутствие диэлектрика) должно удовлетворять уравнению (5.3), а на  $S_\epsilon$  должно быть непрерывно вместе со своей нормальной производной (т. е. не удовлетворять условию (6.2б)).

В основных формулах этого параграфа переход к  $|\nabla \epsilon| \rightarrow \infty$  производится элементарно, т. е. не требует раскрытия никаких неопределенностей, так как формулы не содержат  $\nabla \epsilon$ , а  $\nabla u_n$  и  $\nabla u_m$  входят только под знак интеграла, причем они конечны всюду, включая, согласно первому из уравнений (6.28), поверхность  $S_\epsilon$ .

Условия ортогональности (6.6) имеют вид

$$\int_{V^+} \nabla u_n \nabla u_m dV = 0 \quad (n \neq m). \quad (6.30)$$

Коэффициенты  $A_n$  (6.15) равны, согласно (6.29),

$$A_n = \frac{\epsilon_n (\epsilon - 1)}{\epsilon_n - 1} \frac{\int_{V^+} \nabla U^0 \nabla u_n dV}{\int_{V^+} (\nabla u_n)^2 dV}. \quad (6.31)$$

Эту формулу можно, разумеется, получить также из формулы (6.26), соответствующей другому виду  $\epsilon_n(\mathbf{r})$  (6.25). Для  $\epsilon(\mathbf{r}) = \text{const}$  в обоих вариантах будет  $\epsilon_n(\mathbf{r}) = \text{const}$ , так что собственные функции  $u_n$  для (6.9) и для (6.25) совпадают. Если в (6.26) подставить, согласно (6.25),

$$\bar{\sigma}_n = \frac{\epsilon_n - 1}{\epsilon - 1}, \quad (6.32)$$

то (6.15) перейдет в (6.31).

Если числитель (6.31) выразить через интеграл от возбуждающих источников по (6.17), то получится аналог формулы (6.18), не содержащий  $U^0$ :

$$A_n = \frac{\epsilon_n^2 (\epsilon - 1)}{(\epsilon_n - 1)(\epsilon - \epsilon_n)} \frac{\int u_n dV}{\int_{V^+} (\nabla u_n)^2 dV}. \quad (6.33)$$

Она имеет тот же смысл, что и формула (3.106).

Подставив выражение (6.29) в (5.20), можно выразить через  $\epsilon_n$  также и коэффициент разложения в  $V^+$  полного поля в ряд по  $u_n$ .

Разумеется, основные формулы этого пункта — (6.30), (6.31), (6.33) — можно было бы получить, исходя непосредственно из уравнений (6.27) и граничных условий (6.2) для искомого поля и из уравнений (3.4а, б) и граничных условий (6.28) для  $u_n$ , однако выкладки при этом получились бы более громоздкими.

### § 7. Квантовомеханическая задача об упругом рассеянии на квазистационарном уровне

Рассматриваемая здесь задача является квантовомеханическим аналогом рассмотренной в § 5 задачи о дифракции на теле с переменной диэлектрической проницаемостью. В математическом плане аналогия обеих задач не нарушается тем обстоятельством, что диэлектрическая проницаемость  $\epsilon(\mathbf{r})$ , эквивалентная потенциальному полю  $U(\mathbf{r})$ ,

$$\epsilon = 1 - \frac{U}{k^2} \quad (7.1)$$

зависит от частоты — частота является постоянным параметром, одинаковым во всех уравнениях.

Квантовомеханическая теория рассеяния несколько проще теории дифракции, так как здесь падающее поле есть всегда плоская волна, а рассеянное поле ищется только на больших расстояниях от тела. В наиболее интересном случае — резонансном рассеянии на квазистационарном уровне — квантовомеханическая задача соот-

ветствует электродинамической задаче об объеме, приповерхностный слой которого имеет большие отрицательные  $\epsilon(\mathbf{r})$ . В сумме в (5.5) для внешнего поля один член становится доминирующим, а остальные слагаемые малы; искомая диаграмма рассеяния выражается при этом простой формулой.

Излагаемый ниже дискретный аппарат отличается от применяемого в теории рассеяния метода Штурма характером вспомогательной задачи (собственные функции удовлетворяют правильным условиям на бесконечности, собственное значение не является постоянной связи) и тем, что в ряд разлагается не все решение. Именно это и позволяет при рассеянии на квазистационарном уровне получить явные выражения для полей и диаграмм рассеяния и указать эффективный вычислительный аппарат при любой форме барьера.

Диаграмма рассеяния может быть определена и с помощью другого варианта обобщенного метода собственных колебаний —  $s$ -метода (§ 13); это будет сделано в § 20. Однородная задача  $s$ -метода совпадает по существу с известной в квантовой механике задачей определения матрицы рассеяния. Для сферически-симметричного потенциала эта последняя задача может быть решена численно либо прямым интегрированием дифференциального уравнения, либо с помощью интегрального уравнения  $s$ -метода. В § 20 будет проведено сравнение численных результатов, полученных двумя методами, с целью иллюстрации точности приближенных формул.

Настоящий параграф и § 20 написаны так, что их можно читать независимо от остального материала. В них мало ссылок на другие параграфы и повторены некоторые основные формулы. Временная зависимость принята в форме  $\exp(-i\omega t)$ , т. е. не так, как во всей книге.

1. Нерелятивистская стационарная задача об упругом рассеянии пучка частиц с энергией  $k^2$  на потенциале  $U(\mathbf{r})$  состоит в нахождении решения трехмерного уравнения Шредингера

$$\Delta \Psi + (k^2 - U) \Psi = 0, \quad (7.2)$$

всюду конечного и удовлетворяющего асимптотическому

условию

$$\Psi|_{r \rightarrow \infty} \simeq e^{ikz} + \Phi(\varphi, \theta) \frac{e^{ikr}}{kr}, \quad (7.3)$$

где  $\Phi(\varphi, \theta)$  — искомая диаграмма рассеяния.

Как обычно в квантовой механике, мы ограничимся определением функции  $\Phi(\varphi, \theta)$ , т. е. исследуем ситуацию, когда и источник и точка наблюдения находятся в бесконечности. Тот же аппарат может быть применен и для нахождения функции Грина уравнения Шредингера.

Мы ниже всюду будем считать, что вне некоторой сферы конечного радиуса  $U(\mathbf{r}) \equiv 0$ , так что эквивалентное тело занимает конечный объем. По-видимому, аппарат может быть обобщен и на потенциалы, асимптотически стремящиеся к нулю при  $r \rightarrow \infty$ .

2. Введем систему функций  $\psi_n$  уравнением

$$\Delta \psi_n + [k^2 - U_n(\mathbf{r})] \psi_n = 0 \quad (7.4)$$

с условием конечности при  $r = 0$ , условием

$$\psi_n|_{r \rightarrow \infty} \simeq \Phi_n(\varphi, \theta) \frac{e^{ikr}}{kr} \quad (7.5)$$

(где функции  $\Phi_n$  находятся одновременно с  $\psi_n$ , т. е. не заданы) и вспомогательным потенциалом

$$U_n(\mathbf{r}) = \sigma_n U(\mathbf{r}) + (1 - \sigma_n) \bar{U}(\mathbf{r}). \quad (7.6)$$

В этой однородной задаче роль собственного значения играет  $\sigma_n$  ( $\sigma_n = \sigma'_n + i\sigma''_n$ ).

Вещественная функция  $\bar{U}(\mathbf{r})$  может быть выбрана, вообще говоря, произвольно, лишь бы задача с таким потенциалом не имела резонансов. Чтобы соответствующие этой функции слагаемые в дальнейших разложениях наиболее полно вбирали в себя нерезонансный фон, удобно взять в каждом из направлений

$$\bar{U}(\mathbf{r}) = \begin{cases} U_{\max}, & r \leq r_m(\varphi, \theta), \\ U(r), & r > r_m(\varphi, \theta), \end{cases} \quad (7.7)$$

где  $r_m(\varphi, \theta)$  — радиальная координата точки, в которой потенциал  $U$  максимален на данном луче, а  $U_{\max}$  — зна-

чение этого максимума. Обозначим через  $\bar{\Psi}$  (и соответственно  $\bar{\Phi}$ ) решение задачи (7.2), (7.3) с заменой  $U$  на  $\bar{U}$ .

Собственные функции  $\psi_n$  ортогональны в смысле

$$\int (U - \bar{U}) \psi_n \psi_m dV = 0 \quad (n \neq m). \quad (7.8)$$

Функции  $\psi_n$  и  $\bar{\Psi}$  связаны равенством

$$\int (U - \bar{U}) \psi_n \bar{\Psi} dV = -\frac{\sigma''_n}{\sigma_n} \int (U - \bar{U}) |\psi_n|^2 dV \cdot \Phi_n(\pi), \quad (7.9)$$

легко получаемым из соответствующих уравнений с учетом того, что все условия на бесконечности содержат одно и то же вещественное число  $k$ . Здесь принята нормировка

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\Phi_n|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi, \quad (7.10)$$

и через  $\Phi_n(\pi)$  обозначено значение собственной диаграммы в направлении на падающую волну.

Решение задачи (7.2), (7.3) будем искать в виде ряда

$$\Psi = \bar{\Psi} + \sum_n A_n \psi_n. \quad (7.11)$$

Диаграммы  $\Phi$ ,  $\bar{\Phi}$  и  $\Phi_n$  связаны очевидным соотношением

$$\Phi = \bar{\Phi} + \sum_n A_n \Phi_n. \quad (7.12)$$

Функция  $\Psi$ , представленная в виде (7.11), удовлетворяет условию (7.3) почленно при любых значениях коэффициентов  $A_n$ . Эти коэффициенты можно определить из требования, чтобы  $\Psi$  удовлетворяла уравнению (7.2). Подставив (7.11) в (7.2) и воспользовавшись ортогональностью (7.8) и тождеством (7.9), получим

$$A_n = \frac{\sigma''_n}{1 - \sigma_n} \cdot \frac{\int (U - \bar{U}) |\psi_n|^2 dV}{\sigma_n \int (U - \bar{U}) \psi_n^2 dV} \cdot \Phi_n(\pi). \quad (7.13)$$

Формулы (7.11)—(7.13) дают искомое решение задачи. Если на внешней части барьера  $U(\mathbf{r})$  выбрано достаточно близким к  $U(\mathbf{r})$ , то вдали от резонанса (квазистационарного уровня)

$$|\sigma_n''| \ll |1 - \sigma_n'|, \quad (7.14)$$

так что все коэффициенты  $A_n$  малы, и решение хорошо описывается первым слагаемым в (7.11), (7.12). В резонансных условиях, вблизи некоторого значения  $k = k_*$ , среди собственных значений есть одно (скажем,  $\sigma_m$ ), для которого (7.14) не выполняется. Соответствующий коэффициент  $A_m$  не мал, ряд сводится к одному члену, а зависимость поля от  $k$  определяется в основном видом функции

$$\lambda_m(k) = \frac{1 - \sigma_m'}{\sigma_m''}. \quad (7.15)$$

Корень  $k_*$  уравнения  $\lambda_m(k) = 0$  является центром резонансной кривой, т. е. квазистационарным уровнем (вещественным). Ширина резонанса  $2\delta k$  (полоса значений  $k$ , в которой рассеянное поле сильно зависит от энергии) определяется скоростью изменения функции  $\lambda_m(k)$  на квазистационарном уровне

$$\delta k = \left\{ \frac{d\lambda_m}{dk} \Big|_{k=k_*} \right\}^{-1}. \quad (7.16)$$

3. Эффективность изложенного аппарата определяется тем, как фактически находится величина  $\sigma_m$  и, в конечном счете, функция  $\lambda_m(k)$ . Основное вычислительное достоинство предлагаемого метода состоит в том, что для определения  $\sigma_m$  можно непосредственно применить простой вариационный аппарат. То обстоятельство, что  $\psi_n$  не возрастают на бесконечности, позволяет выписать комплекснозначный функционал

$$R(\psi) = \frac{\int [(k^2 - U)\psi^2 - (\nabla\psi)^2] dV}{\int (U - \bar{U})\psi^2 dV}, \quad (7.17)$$

стационарный на собственных функциях задачи (7.4), (7.5) и принимающий в стационарных точках значения  $\sigma_n$ . Интеграл в числителе понимается здесь как предел

при  $\text{Im } k \rightarrow +0$ . Допустимые функции для (7.17) должны быть всюду непрерывными и иметь в асимптотике ту же зависимость (7.5) от  $r$ , что и собственные функции.

Может оказаться удобным не требовать от допустимых функций непрерывности на поверхности  $S$  разрыва потенциала (если такая поверхность есть). Чтобы сохранить при этом стационарные свойства функционала, достаточно в числителе (7.17) добавить интеграл

$$\int_S (\psi^- - \psi^+) \left( \frac{\partial\psi^-}{\partial N} + \frac{\partial\psi^+}{\partial N} \right) dS, \quad (7.18)$$

где знаками «+» и «-» обозначены предельные значения функций по разные стороны поверхности разрыва. Нормаль считается направленной из «-» в «+».

4. Мы выше исходили из дифференциальной формулировки задачи для  $\psi_n$ . Однако легко показать, что функции  $\psi_n$  являются также решениями однородного интегрального уравнения, ядро которого пропорционально функции Грина, соответствующей потенциалу  $\bar{U}(\mathbf{r})$ . Точнее, если  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta G + (k^2 - \bar{U})G = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (7.19)$$

и условию (7.5), то при принятом выборе  $\bar{U}_n(\mathbf{r})$  имеет место

$$\psi_n = -\sigma_n \int (U - \bar{U}) G \psi_n dV. \quad (7.20)$$

Это уравнение — оно совпадает с уравнением Липмана — Швингера в так называемом методе искаженных волн — является при вещественных  $k$  несамосопряженным. Система функций  $\psi_n$ , порождаемых этим ядром, безусловно не полна, их асимптотика содержит только уходящие волны. По ним нельзя разложить, например, функции  $e^{ikz}$  или  $\bar{\Psi}$ . Однако разность  $\Psi - \bar{\Psi}$ , асимптотика которой содержит тоже лишь уходящие волны, представима через это ядро (см. (7.11)).

### § 8. Диэлектрическое тело, уравнения Максвелла

Перенесение развитого выше аппарата на уравнения Максвелла производится почти автоматически. Как и в скалярном случае, решение строится в виде рядов по

собственным функциям однородных задач; коэффициенты в этих рядах имеют резонансный характер. Свойства собственных функций выводятся непосредственно из уравнений, которыми они определены. В общем случае неоднородного диэлектрика для того, чтобы получить явные выражения для коэффициентов, диэлектрическая проницаемость в однородных задачах должна быть определенным образом связана с истинной диэлектрической проницаемостью и т. д.

Существуют, однако, обстоятельства, специфические именно для векторной задачи. Как известно, в закрытых резонаторах, применяя обычный  $k$ -метод, надо к этим рядам добавлять еще градиентные члены, источником которых является дивергенция токов. Ряды, получающиеся в других вариантах обобщенного метода, не требуют включения этих членов — они уже содержатся в выделенном слагаемом (поле тех же источников в отсутствие тела или в присутствии другого тела). Разумеется, это справедливо и для рядов, описывающих поле в открытом резонаторе.

Выше мы всюду, связывая два решения волновых уравнений, при преобразовании объемных интегралов в поверхностные пользовались формулой

$$\operatorname{div}(\alpha \mathbf{A}) = \alpha \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{grad} \alpha. \quad (8.1)$$

Аналогом этой формулы теперь будет формула

$$\operatorname{div}[\mathbf{A}\mathbf{B}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (8.2)$$

с помощью которой устанавливается связь между двумя решениями уравнений Максвелла. Примером такой связи является лемма Лоренца, и многие из приведенных ниже преобразований представляют собой аналог выкладок, приводящих к этой лемме.

В пп. 1, 2 будут рассмотрены задачи дифракции на теле с постоянным  $\epsilon$ , т. е. аппарат §§ 3, 4 будет перенесен на уравнения Максвелла. Мы опустим физический анализ, приведенный при рассмотрении скалярной задачи. В пп. 3, 4 мы рассмотрим неоднородный диэлектрик. Из результатов пп. 3, 4 следуют все формулы пп. 1, 2. Можно было бы, как в § 6, сразу начинать с неоднородного диэлектрика, а для однородного — переходить к пределу в окончательных формулах пп. 3, 4; этот путь

приводит к менее громоздким выкладкам. Однако принятый нами характер изложения дает решение задачи п. 1 (практически наиболее интересной) логически более простым путем.

1. Ищется решение задачи о дифракции поля, создаваемого заданными токами  $\mathbf{j}^{(e)}$  и  $\mathbf{j}^{(m)}$  на теле, занимающем объем  $V^+$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью, равной единице. Искомые поля  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  удовлетворяют в  $V^+$  уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - ik\epsilon \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (8.3a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + ik\mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(m)}, \quad (8.3b)$$

вне тела, в области  $V^-$ , уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - ik\mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (8.4a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + ik\mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(m)}, \quad (8.4b)$$

а на границе  $S_\epsilon$  тела — условиям непрерывности

$$E_t^+ - E_t^- = 0, \quad H_t^+ - H_t^- = 0, \quad (8.5)$$

где  $t$  — любое тангенциальное к границе  $S_\epsilon$  направление. Если в поле есть еще какие-либо тела, например, металлические или импедансные поверхности  $S$ , то на них  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  удовлетворяют условию  $E_t = 0$  или условию Леонтовича. Если диэлектрик не находится в замкнутом резонаторе, то  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  удовлетворяют еще условию излучения

$$E_\theta = H_\varphi = \Phi_1(\theta, \varphi) \frac{e^{-ikR}}{kR} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{kR}\right) \right], \quad (8.6)$$

$$H_\theta = -E_\varphi = \Phi_2(\theta, \varphi) \frac{e^{-ikR}}{kR} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{kR}\right) \right],$$

а если  $\mathbf{j}^{(e)}$ ,  $\mathbf{j}^{(m)}$  находятся на бесконечности — то условию излучения удовлетворяют поля  $\{\mathbf{E} - \mathbf{E}^0, \mathbf{H} - \mathbf{H}^0\}$ , где  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$  определены ниже (8.7). Этим условиям удовлетворяют все вводимые ниже поля, и мы не будем каждый раз это специально оговаривать.

Введем поле  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ , создаваемое теми же источниками в отсутствие диэлектрического тела, т. е. во всем пространстве  $V^+ + V^-$  удовлетворяющее уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^0 - ik \mathbf{E}^0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (8.7a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^0 + ik \mathbf{H}^0 = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(m)}. \quad (8.7b)$$

Разумеется,  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$  удовлетворяет и условиям (8.5) на  $S_e$ .

Собственные функции  $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$  мы определим как поля, удовлетворяющие в  $V^+$  однородным уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}_n - ik \mathbf{e}_n = 0, \quad (8.8a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}_n + ik \mathbf{h}_n = 0, \quad (8.8b)$$

в  $V^-$  — однородным уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}_n - ik \mathbf{e}_n = 0, \quad (8.9a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}_n + ik \mathbf{h}_n = 0, \quad (8.9b)$$

граничным условиям на  $S_e$ :

$$e_{nt}^+ - e_{nt}^- = 0, \quad h_{nt}^+ - h_{nt}^- = 0, \quad (8.10)$$

и условиям (8.6). Поле  $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$  описывает собственные колебания тела, занимающего объем  $V^+$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_n$ , происходящие на заданной частоте  $k$ . Собственными значениями задачи (8.8) — (8.10) являются числа  $\epsilon_n$ .

Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям  $\epsilon_n$ , ортогональны в смысле

$$\int_{V^+} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m dV = 0 \quad (n \neq m). \quad (8.11)$$

Для доказательства надо сперва умножить первое из уравнений (8.8) на  $\mathbf{e}_m$ , второе — на  $\mathbf{h}_m$  и сложить, затем вычесть из полученной строчки такую же, с перестановкой индексов  $n$  и  $m$ . Полученное равенство, согласно (8.2), можно записать в виде

$$ik (\epsilon_n - \epsilon_m) \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m = \operatorname{div} \{[\mathbf{e}_n \mathbf{h}_m] - [\mathbf{e}_m \mathbf{h}_n]\}. \quad (8.12)$$

Интегрируя эту строчку по  $V^+$ , мы слева получим интеграл (8.11), а справа — поверхностный (по  $S_e$ ) интеграл

$$\int \{[\mathbf{e}_n \mathbf{h}_m]_N - [\mathbf{e}_m \mathbf{h}_n]_N\} dS, \quad (8.13)$$

в котором поля взяты по внутренней стороне  $S_e$ . Произведем затем такую же процедуру с уравнениями (8.9). Так как они не содержат  $\epsilon_n$ , то в  $V^-$  поля  $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$  и  $\{\mathbf{e}_m, \mathbf{h}_m\}$  связаны более простым, чем (8.12), соотношением: левая часть равенства (8.12) в  $V^-$  равна нулю. Интегрируя это соотношение по  $V^-$ , мы получим два поверхностных интеграла (8.13) — по  $S_e$  и по бесконечно удаленной сфере (а также и по  $S$ , если есть еще какие-либо тела). Интегралы по бесконечно удаленной сфере исчезнут вследствие условия излучения, будут равны нулю также и интегралы по  $S$ . Следовательно, равен нулю и интеграл (8.13), взятый по внешней стороне поверхности  $S_e$ . Он содержит только тангенциальные к  $S_e$  компоненты полей, а они, согласно (8.10), непрерывны на  $S_e$ ; поэтому этот интеграл, взятый по внутренней стороне  $S_e$ , тоже равен нулю, т. е. действительно имеет место ортогональность (8.11).

Мнимая часть  $\epsilon_n$  неотрицательна, т. е. выполняется условие (4.6). Для того чтобы в этом убедиться, надо уравнения (8.8) и сопряженные уравнения, относящиеся к тому же  $n$ , умножить соответственно на  $\{\mathbf{e}_n^*, -\mathbf{h}_n^*\}$ ,  $\{\mathbf{e}_n, -\mathbf{h}_n\}$  и сложить. Получим равенство, аналогичное (8.12):

$$(\epsilon_n - \epsilon_n^*) |\mathbf{e}_n|^2 = \frac{1}{ik} \operatorname{div} \{[\mathbf{h}_n \mathbf{e}_n^*] + [\mathbf{h}_n^* \mathbf{e}_n]\}. \quad (8.14)$$

Его надо проинтегрировать по  $V^+$ , а аналогичное уравнение в  $V^-$  (с нулевой левой частью) — по  $V^-$  и воспользоваться (8.10). Тогда получим

$$\operatorname{Im} \epsilon_n k \int_{V^+} |\mathbf{e}_n|^2 dV = \operatorname{Re} \int [\mathbf{e}_n^* \mathbf{h}_n]_N dS. \quad (8.15)$$

Правая часть, при интегрировании по бесконечно удаленной сфере или по импедансной поверхности, положительна. Она равна потерям на излучение или на импедансной поверхности. Отсюда следует, что (4.6)

справедливо и для векторного случая. Собственные значения  $\epsilon_n$  вещественны только для тел, помещенных в закрытый резонатор без потерь в стенках.

2. Будем искать решение задачи (8.3), (8.6) в виде рядов

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \sum_n A_n \mathbf{e}_n, \quad (8.16a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \sum_n A_n \mathbf{h}_n. \quad (8.16b)$$

В отличие от рядов, применяемых (для закрытых резонаторов) в обычном  $k$ -методе, коэффициенты в обоих рядах (8.16) одинаковы. Действительно, если подставить (8.16a) в (8.3б) и воспользоваться (8.7) и (8.8), то получится разложение (8.16б).

При любых коэффициентах эти ряды удовлетворяют уравнению (8.3б) в  $V^+$ , обоим уравнениям (8.4) в  $V^-$  и граничным условиям (8.5) и (8.6). Коэффициенты  $A_n$  находятся из требования, чтобы (8.16) удовлетворяло уравнению (8.3a) в  $V^+$ . Подставляя (8.16) в (8.3a), получим

$$\sum_n A_n (\epsilon_n - \epsilon) \mathbf{e}_n = (\epsilon - 1) \mathbf{E}^0 \quad \text{в } V^+. \quad (8.17)$$

Отсюда, согласно (8.11), получается искомое явное выражение для коэффициентов  $A_n$ :

$$A_n = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon_n - \epsilon} \frac{\int_{V^+} \mathbf{E}^0 \mathbf{e}_n dV}{\int_{V^+} (\mathbf{e}_n)^2 dV}. \quad (8.18)$$

Эта формула аналогична (3.10a).

Как и в § 3, можно преобразовать числитель (8.18) таким образом, чтобы в  $A_n$  входило не поле  $\mathbf{E}^0$ , а создающие его токи  $\mathbf{j}^{(e)}$ ,  $\mathbf{j}^{(m)}$ . Для этого надо умножить уравнения (8.7) на  $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$ , уравнения (8.8) — на  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ , вычесть вторую пару из первой и полученное равенство

$$\begin{aligned} ik(\epsilon_n - 1) \mathbf{E}^0 \mathbf{e}_n = \\ = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)} \mathbf{e}_n - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(m)} \mathbf{h}_n + \operatorname{div} \{[\mathbf{e}_n \mathbf{H}^0] - [\mathbf{E}^0 \mathbf{h}_n]\} \end{aligned} \quad (8.19)$$

проинтегрировать по  $V^+$ . Затем надо проделать ту же процедуру с уравнениями (8.7) и (8.9). В результате получается равенство, аналогичное (8.19), но с нулевой левой частью, и его надо проинтегрировать по  $V^-$ . Повторяя рассуждения, приведенные после (8.13), мы убеждаемся, что поверхностные интегралы выпадают, и для интеграла, стоящего в числителе (8.18), получим

$$\int_{V^+} \mathbf{E}^0 \mathbf{e}_n dV = \frac{1}{ik(\epsilon_n - 1)} \frac{4\pi}{c} \int (\mathbf{j}^{(e)} \mathbf{e}_n - \mathbf{j}^{(m)} \mathbf{h}_n) dV. \quad (8.20)$$

Интеграл, стоящий справа, взят по всему пространству.

Произведем, наконец, преобразование рядов (8.16) к виду, не содержащему выделенных слагаемых  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ . В  $V^-$  такое преобразование, вообще говоря (т. е. при любом положении источников), невозможно, но в  $V^+$  поле  $\mathbf{E}^0$  разлагается по  $\mathbf{e}_n$ ; таким разложением является формула (8.17). Подставляя это разложение в (8.16a), получим, аналогично (3.13), (3.14), формулы

$$\mathbf{E} = \sum_n B_n \mathbf{e}_n, \quad (8.21a)$$

$$B_n = \frac{1 - \epsilon_n}{1 - \epsilon} A_n. \quad (8.21b)$$

Таким путем можно получить формулу для полного поля в  $V^+$ , вообще не содержащую  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ . Согласно (8.16a), (8.18), (8.20) и (8.21), это разложение для  $\mathbf{E}$  имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{1}{ik} \frac{4\pi}{c} \sum_n \frac{1}{\epsilon_n - \epsilon} \frac{\int (\mathbf{j}^{(e)} \mathbf{e}_n - \mathbf{j}^{(m)} \mathbf{h}_n) dV}{\int_{V^+} (\mathbf{e}_n)^2 dV} \mathbf{e}_n. \quad (8.22)$$

Заметим, наконец, что в  $V^+$  и для  $\mathbf{H}$  можно получить ряд, не содержащий выделенного члена  $\mathbf{H}^0$ . Для этого надо к (8.17) применить оператор  $\operatorname{rot}$  и использовать (8.7б) и (8.8б). Подставляя полученный ряд для  $\mathbf{H}^0$  в (8.16б), будем иметь

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{ik} \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(m)} \frac{1}{\epsilon - 1} + \sum_n B_n \mathbf{h}_n. \quad (8.23)$$



3. Пусть теперь *диэлектрическая проницаемость тела есть непрерывная функция координат*, равная единице вне конечного объема. Ищется решение уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - ik\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (8.24a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + ik\mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(m)}. \quad (8.24б)$$

Поле  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$  определено по-прежнему уравнениями (8.7). Как и в скалярных задачах, требование непрерывности  $\varepsilon(\mathbf{r})$  может быть в окончательных выражениях снято, так как граничные условия (8.5) являются предельной формой уравнений (8.24) на поверхности разрыва  $\varepsilon(\mathbf{r})$ .

Собственные функции  $\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n$ , по которым будет разлагаться дифрагированное поле  $\{\mathbf{E} - \mathbf{E}^0, \mathbf{H} - \mathbf{H}^0\}$ , определим, как поля собственных колебаний вспомогательных тел с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$ , т. е. подчиним  $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$  уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}_n - ik\varepsilon_n(\mathbf{r}) \mathbf{e}_n = 0, \quad (8.25a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}_n + ik\mathbf{h}_n = 0. \quad (8.25б)$$

Функции  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$  будут ниже определены по тому же методу, что и в §§ 5, 6.

Условия ортогональности для двух собственных функций следуют сразу из (8.12) при интегрировании по всему пространству. Правая часть после интегрирования дает нуль, так что

$$\int (\varepsilon_n - \varepsilon_m) \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m dV = 0. \quad (8.26)$$

Функции  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$  комплексны, с положительной в среднем мнимой частью. Точнее, из (8.14) следует, что

$$\int \operatorname{Im} \varepsilon_n |\mathbf{e}_n|^2 dV > 0. \quad (8.27)$$

Решение задачи дифракции мы будем искать в виде рядов (8.16). Уравнение (8.24б) удовлетворяется этими рядами почленно (при любых коэффициентах  $A_n$ ), а

уравнение (8.24a) дает, аналогично (8.17),

$$\sum_n A_n (\varepsilon_n - \varepsilon) \mathbf{e}_n = (\varepsilon - 1) \mathbf{E}^0. \quad (8.28)$$

Эта формула отличается от (8.17) только тем, что в ней  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_n$  суть функции от  $\mathbf{r}$ . Формулы (8.26) и (8.28) являются основой последующих преобразований.

4. В этом пункте мы получим *две различные системы уравнений для двух систем  $A_n$* , умножая (8.28) на две различные системы функций и интегрируя по всему объему. потребовав, чтобы матрицы этих систем были диагональными, мы найдем два вида функций  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$ . Первый из этих двух способов соответствует основному решению § 5, второй — основному решению § 6.

Умножим сначала (8.28) на  $\mathbf{e}_m$  и проинтегрируем по всему объему. Получим для  $A_n$  систему

$$\sum_n A_n \int (\varepsilon_n - \varepsilon) \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m dV = \int (\varepsilon - 1) \mathbf{E}^0 \mathbf{e}_m dV. \quad (8.29)$$

Для того чтобы матрица этой системы была диагональной, функции  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$  должны, согласно (8.26), удовлетворять функциональному уравнению (5.10). Мы ограничимся решениями этого уравнения в простейшей форме (5.13). Возможные обобщения, получающиеся при использовании более общего решения (5.11), (5.12) с произвольной функцией  $\gamma(\mathbf{r})$ , могут быть найдены по методу § 5. Как и в скалярном случае, рассмотренном в § 7, такие обобщения особенно эффективны при выборе в качестве  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$  поля, получающегося при дифракции на теле с диэлектрической проницаемостью  $\gamma(\mathbf{r})$ .

Если  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$  определены формулами (5.13) с собственными значениями  $\sigma_n$ , то для  $A_n$  получается явное выражение

$$A_n = \frac{1}{\sigma_n - 1} \frac{\int (\varepsilon - 1) \mathbf{E}^0 \mathbf{e}_n dV}{\int (\varepsilon - 1) (\mathbf{e}_n)^2 dV}, \quad (8.30)$$

аналогичное (5.15). Для задачи, рассмотренной в начале этого параграфа, (8.30) переходит в (8.18).

Формула для  $A_n$ , не содержащая  $\mathbf{E}^0$ , получается из (8.30), если проинтегрировать (8.19) по всему

пространству; как всегда в задачах с непрерывным  $\varepsilon(\mathbf{r})$ , дивергентные члены выпадают сразу, и не надо отдельно рассматривать интегралы по  $V^+$  и по  $V^-$ . Подставляя результат интегрирования в (8.30) и используя (5.13), получим формулу

$$A_n = \frac{1}{(\sigma_n - 1) \sigma_n} \frac{4\pi}{ikc} \frac{\int (j^{(e)} e_n - j^{(m)} h_n) dV}{\int (\varepsilon - 1) (e_n)^2 dV}, \quad (8.31)$$

аналогичную (5.18). Наконец, внутри тела, там, где  $\varepsilon \neq 1$ , можно подставить в (8.16a) вместо  $E^0$  его разложение (8.28). Тогда для  $E$  получится ряд

$$E = \sum_n A_n \sigma_n e_n, \quad (8.32)$$

аналогичный (5.20) и обобщающий (8.21). Применяя к (8.32) операцию  $\text{rot}$ , мы для  $H$  получим ряд типа (8.23).

Используем теперь второй способ получения системы уравнений для  $A_n$ . Для этого надо умножить (8.28) на  $\varepsilon_m e_m$ . Чтобы подчеркнуть равноправность обоих методов этого пункта, введем предварительно *индукцию*  $d_n$ , определив ее формулой

$$d_n = \varepsilon_n e_n. \quad (8.33)$$

Тогда основные формулы (8.26) и (8.28) примут вид

$$\int \left( \frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_m} \right) d_n d_m dV = 0, \quad (8.34)$$

$$\sum_n A_n \left( \frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon} \right) d_n = \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) E^0. \quad (8.35)$$

Умножив (8.35) на  $d_m$  и проинтегрировав, мы получим систему уравнений для  $A_n$ , аналогичную (6.8). Она будет иметь явное решение, если  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$  удовлетворяют функциональному уравнению (5.32). Мы опять ограничимся для  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$  решением (6.9), не вводя функцию  $\gamma(\mathbf{r})$ .

При таком выборе  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$  для  $A_n$  получится формула

$$A_n = \frac{1}{\sigma_n - 1} \frac{\int \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) E^0 d_n dV}{\int \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) (d_n)^2 dV}. \quad (8.36)$$

Эта формула аналогична (6.15). Для  $\varepsilon(\mathbf{r})$ , равного  $\text{const}$  в  $V^+$ , из нее, в частности, снова следует (8.18).

Для того чтобы найти для  $A_n$  выражение, не содержащее  $E^0$ , надо подставить в (8.19) выражение  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$  из (6.9) и проинтегрировать по объему. При этом слева получится тот же интеграл, который входит в (8.36), дивергентный член, как обычно, выпадает, и для  $A_n$  получится выражение

$$A_n = \frac{1}{(1 - \sigma_n) \sigma_n} \frac{4\pi}{ikc} \frac{\int (j^{(e)} e_n - j^{(m)} h_n) dV}{\int \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) (d_n)^2 dV}, \quad (8.37)$$

аналогичное (6.18) и имеющее ту же структуру, что (8.31).

Разлагая  $E^0$  по (8.35) (в тех точках, где  $\varepsilon \neq 1$ ), мы получим разложение полного поля

$$E = \frac{1}{\varepsilon} \sum_n A_n \sigma_n d_n, \quad (8.38)$$

аналогичное (8.32).

5. Рассмотрим теперь кратко возможные способы применения метода к задаче о дифракции на теле, имеющем *отличную от единицы магнитную проницаемость*  $\mu$ .

Если во всем пространстве  $\varepsilon \equiv 1$ , то весь аппарат, описанный выше для  $\mu \equiv 1$ ,  $\varepsilon \neq 1$ , сохранится с очевидной заменой  $\varepsilon_n$  на  $\mu_n$ , формул (5.13), (5.33) — на формулы

$$\mu_n = 1 + \sigma_n (\mu - 1), \quad \frac{1}{\mu_n} = 1 + \bar{\sigma}_n \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right), \quad (8.39)$$

и  $e_n$  в формулах типа (8.11), (8.15) — на  $h_n$ ,  $h_n$  на  $-e_n$ . Этот аппарат естественно назвать  $\mu$ -методом.

Пусть теперь в теле и  $\varepsilon \neq 1$ , и  $\mu \neq 1$ . Мы ограничимся сначала простейшим способом решения, последовательно применив  $\varepsilon$ -метод и  $\mu$ -метод. Во-первых, надо повторить все построения этого параграфа, включив  $\mu$  в уравнения (8.7), определяющие  $\{E^0, H^0\}$ , и в уравнения (8.8), (8.9), или соответственно (8.25), определяющие  $\{e_n, h_n\}$ . Другими словами, определим  $\{E^0, H^0\}$  как поле тех же источников, однако не в пустоте, а в присутствии того же тела, в котором  $\varepsilon$  принято равным единице, а  $\mu$  имеет истинное значение. Поля  $\{e_n, h_n\}$  — поля

собственных колебаний тел с параметрами  $\epsilon_n, \mu$ . Тогда все формулы, дающие разложение  $\{E, H\}$  в ряд, и выражения для коэффициентов этого ряда сохраняются.

Само поле  $\{E^0, H^0\}$  является при этом решением некоторой задачи дифракции. Аналогичное положение было, например, в задаче о диэлектрическом теле в присутствии металлической поверхности  $S$  (§ 4). Там  $\{E^0, H^0\}$  было полем дифракции на одной этой поверхности, без тела. Решение исходной задачи дифракции на двух телах ( $\epsilon$  и  $S$ ) было представлено в виде двух частей — решения  $\{E^0, H^0\}$  неоднородной задачи для одного тела ( $S$ ) и суммы решений  $\{\epsilon_n, h_n\}$  однородных задач для обоих тел. Рассматриваемую сейчас задачу можно назвать задачей о  $(\epsilon, \mu)$ -теле; здесь ситуация такая же, но вместо  $S$  участвует то же тело с магнитной проницаемостью  $\mu$ .

Поле  $\{E^0, H^0\}$  в свою очередь можно найти  $\mu$ -методом. В итоге полное поле будет состоять из поля тех же источников в пустоте и двух рядов. В первом ряде собственные функции описывают собственные колебания тел с параметрами  $1, \mu_n$ . Во втором ряде собственные функции относятся к телу с параметрами  $\epsilon_n, \mu$ . В нем (и только в нем) содержится резонансный член, амплитуда которого имеет знаменатель  $(\epsilon_n - \epsilon)$ . Если в первом ряде тоже окажется большое слагаемое («посторонний резонанс»), то оно может быть исключено способом, упомянутым в § 3.

Для описания процедуры последовательного применения нескольких методов может оказаться полезной такая запись: будем обозначать символом  $(\epsilon, \mu)$  поле, возникающее при дифракции на теле с этими параметрами, а через  $(\epsilon_n, \mu)$  поле собственных колебаний. Тогда поле заданных источников в пустоте есть  $(1, 1)$ , и символическая запись всей предложенной процедуры есть

$$(\epsilon, \mu) = (1, 1) + \sum_n (1, \mu_n) + \sum_n (\epsilon_n, \mu). \quad (8.40)$$

Можно было бы к этой же  $(\epsilon, \mu)$ -задаче применить оба метода в другой последовательности. Тогда решение имело бы вид

$$(\epsilon, \mu) = (1, 1) + \sum_n (\epsilon_n, 1) + \sum_n (\epsilon, \mu_n). \quad (8.41)$$

Резонансный член опять содержится в последней сумме. Он будет отличаться от резонансного члена в последней сумме в (8.40). А именно, в (8.41) слагаемые второй суммы описывают собственные колебания тела (тело сравнения) с истинным  $\epsilon$  и с  $\mu = \mu_n$ , содержащим собственное значение. В (8.40) тело сравнения имеет истинное  $\mu$ , а собственное значение входит в  $\epsilon_n$ .

Можно было бы иначе формулировать однородные задачи, вводя в одну из них собственное значение в  $\mu_n$  (оставляя  $\epsilon$  равным истинной функции  $\epsilon(r)$ ), а в другой — наоборот. В такой симметричной записи решение примет вид

$$(\epsilon, \mu) = (1, 1) + \sum_n (\epsilon_n, \mu) + \sum_n (\epsilon, \mu_n). \quad (8.42)$$

При этом резонансные члены возникнут в обеих суммах одновременно. Такой метод (для другой задачи с двумя параметрами) использован ниже в § 12.

Различные разложения приводят, таким образом, к различным резонансным членам — обстоятельство, с которым мы еще неоднократно будем встречаться. Если назвать резонансной кривой частотную зависимость множителей типа (для простоты записи принято  $\epsilon, \mu = \text{const}$ )

$$\frac{1}{\epsilon_n(k) - \epsilon}, \quad \frac{1}{\mu_n(k) - \mu}, \quad (8.43)$$

то они будут различными в разных методах. Подробнее вопрос о резонансных кривых одной и той же задачи в разных методах мы обсудим в § 19, здесь лишь заметим, что обе функции в (8.43) одинаково хорошо описывают окрестность резонанса в высокочастотных системах. Во всех случаях следует применять тот метод, который удобнее всего для вычислений, в первую очередь для вычисления собственных значений. Если, например, собственные значения находятся прямо из трансцендентного уравнения, то выбор метода (8.40), (8.41) или (8.42) определяется тем, как входят в трансцендентное уравнение  $\epsilon$  и  $\mu$ . Если из уравнения легче найти  $\epsilon$ , чем  $\mu$ , то надо применять (8.40); и т. д.

\* \* \*

В этой главе обобщенный метод собственных колебаний применен к задачам о дифракции на диэлектрических телах, в том числе — на телах с диэлектрической проницаемостью, зависящей от координат. Схема построения решения во всех случаях примерно одинакова. Сначала вводятся уравнения для собственных функций и устанавливаются условия ортогональности этих функций. Для тел с постоянной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  собственным значением является проницаемость  $\epsilon_n$  тел той же формы (тел сравнения), в которых возможны незатухающие колебания на заданной частоте источников. Для тел с переменным  $\epsilon(\mathbf{r})$  тела сравнения тоже имеют переменные  $\epsilon_n(\mathbf{r})$ . Вид этих функций находится из требования, чтобы для амплитуд в разложении дифрагированного поля по собственным функциям получалось явное выражение. Затем приводятся несколько различных видов формул для этих амплитуд, в частности, формула, содержащая не падающее поле, а возбуждающие токи. Для точек внутри тела даны формулы для разложения полного поля по собственным функциям. Аппарат применен также к квантовомеханическим задачам рассеяния.

## Г л а в а II

СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ  
В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Общим во всех вариантах обобщенного метода, излагаемых в этой главе, является введение собственных значений в граничные условия однородных задач, а не в уравнения (как это имело место в  $k$ - и  $\epsilon$ -методах). Для этого на поверхности вспомогательного тела, имеющего ту же форму, что и в исходной задаче, вместо истинных граничных условий задачи дифракции ставятся какие-либо *вспомогательные* условия, содержащие параметр, играющий роль собственного значения. Например, в  $\omega$ -методе (§ 9) на границе тела ставится условие импедансного типа, и собственными значениями соответствующей однородной задачи являются те значения импеданса  $\omega_n$  вспомогательного тела, при которых существуют нетривиальные решения на заданной частоте. Во всех методах этой главы каждая собственная функция обязана удовлетворять тому же уравнению, что и дифрагированное поле (т. е. однородному уравнению с истинной частотой), и тем же условиям на бесконечности (кроме варианта, изложенного в § 13). Поэтому представление искомого поля в виде разложения (5.5) удовлетворяет почленно уравнению задачи дифракции и условиям излучения (если таковые накладываются) при любых коэффициентах  $A_n$ . Эти коэффициенты определяются из оставшегося условия, состоящего в том, чтобы искомое поле удовлетворяло истинным граничным условиям. При этом используются имеющие здесь место соотношения ортогональности.

Отличительной чертой всех этих вариантов является *ортогональность* собственных функций *по поверхности*,

на которой устанавливаются вспомогательные граничные условия, и связанное с этим (по сравнению с  $\epsilon$ - или  $k$ -методом) уменьшение размерности рядов в представлении истинного поля (для двумерных задач суммы однократные, и т. д.). Это обстоятельство можно объяснить тем, что в  $\epsilon$ - и  $k$ -методах в однородной задаче условия истинной задачи нарушаются в некотором объеме (собственные функции удовлетворяют здесь иному, чем дифрагированное поле, уравнению). При этом ортогональность имеет место именно по этому объему, а ряды обладают размерностью задачи дифракции. В вариантах этой главы условия истинной задачи не выполняются лишь на поверхности; при этом ортогональность получается именно по этой поверхности, и размерность рядов на единицу меньше. Разумеется, любой ряд можно простой заменой нумерации членов записать как однократный, однако в конкретных задачах понятие размерности ряда обычно не вызывает недоразумений.

Если в задаче дифракции нет других потерь, кроме, быть может, потерь на поверхности тела, то однородная задача (она не зависит от истинных граничных условий) будет, как правило, самосопряженной, а собственные значения — вещественными. В общем случае однородная задача несамосопряженная, собственные значения комплексны, причем знак их мнимых частей соответствует выделению с поверхности вспомогательного тела энергии, расходуемой на поддержание незатухающих колебаний, происходящих с истинной частотой, в отсутствие истинных источников. Вспомогательные граничные условия в таком случае описывают некую *активную* (т. е. с отрицательными потерями) *пленку*, излучающую пропорционально квадрату поля на ней и имеющую форму границы тела.

Коэффициенты разложения  $A_n$  в этих методах, так же как и в методах главы I, имеют резонансный характер. Резонанс наступает в тех случаях, когда одно из собственных значений (например, как функция частоты) близко к значению спектрального параметра в задаче дифракции. Например, в случае дифракции на теле с импедансным условием  $U + \omega \frac{\partial U}{\partial N} = 0 \Big|_S$  это происходит, когда собственный импеданс  $\omega_n$  близок к истин-

ному  $\omega$ . При этом соответствующая амплитуда разложения велика и уже один член ряда хорошо описывает дифрагированное поле.

Как и в первой главе, мы начнем с исследования скалярных задач, а перенесение аппарата на уравнения Максвелла коротко изложим в § 14.

### § 9. Собственное значение в граничном условии импедансного типа ( $\omega$ -метод<sup>1)</sup>)

Рассматриваемый в этом параграфе метод применим к задачам дифракции на телах или поверхностях (они могут быть и незамкнутыми) с импедансными граничными условиями и, в частности, условиями исчезновения на границе тела либо поля, либо его нормальной производной. Границы тел мы полагаем конечными. Метод равно пригоден для исследования и закрытых, и открытых систем.

Начнем с применения  $\omega$ -метода к задачам дифракции на телах с замкнутыми границами.

1. Пусть ищется функция  $U(\mathbf{r})$ , удовлетворяющая в области  $V$  уравнению

$$\Delta U + k^2 U = f \quad (9.1)$$

и на ее границе  $S$  импедансному условию

$$U + \omega \frac{\partial U}{\partial N} = 0 \quad (9.2)$$

( $N$  — направление внешней по отношению к рассматриваемой области нормали). Если  $V$  — бесконечная область, то дифрагированное поле должно удовлетворять еще условию излучения (2.23).

Импеданс  $\omega$  в общем случае — комплексное число. Его мнимая часть характеризует поглощение энергии в стенках ( $\text{Im } \omega \leq 0$ ). Если эти потери отсутствуют, то  $\omega$  вещественно. Это имеет место, например, в случае, когда поверхность тела представляет собой частотериодическую гофру. Граничные условия первого и второго рода (для идеального металла)  $U = 0 \Big|_S$  и  $\frac{\partial U}{\partial N} = 0 \Big|_S$

<sup>1)</sup> Вопросам математического обоснования  $\omega$ -метода посвящен § 37 Дополнения.

являются предельными случаями (9.2) с  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$  соответственно.

Решение поставленной задачи, как и ранее, будем искать в виде ряда (5.5):

$$U = U^0 + \sum_n A_n u_n. \quad (9.3)$$

Здесь  $U^0$  по-прежнему есть поле источников  $f$  в пустоте

$$\Delta U^0 + k^2 U^0 = f, \quad (9.4)$$

а функции  $u_n$ , по которым раскладывается дифрагированное поле, суть собственные функции однородной задачи. Эти функции должны удовлетворять в области  $V$  уравнению для дифрагированного поля

$$\Delta u_n + k^2 u_n = 0, \quad (9.5)$$

граничным условиям импедансного типа на границе  $S$ , в которые введено собственное значение:

$$u_n + \omega_n \frac{\partial u_n}{\partial N} = 0 \Big|_S, \quad (9.6)$$

и если система открытая, то условиям излучения.

Условие (9.6) можно ставить на части поверхности тела. Тогда  $U^0$  и  $u_n$  должны на остальной части поверхности удовлетворять истинным граничным условиям. Если дифракция происходит не только на поверхности  $S$ , то одинаковые дополнительные условия на других поверхностях или телах должны быть сформулированы как в задаче дифракции (9.1), (9.2), так и в задачах (9.4) — (9.6), определяющих поля  $U^0$  и  $u_n$ . При введении  $U^0$  можно считать, что имеются еще какие-либо тела, расположенные вне  $V$ . Например, если решается задача о возбуждении закрытого резонатора, то  $U^0$  может не удовлетворять условию излучения, а быть решением задачи о возбуждении другого, большего резонатора. Формальный аппарат не изменится также, если  $U^0$  будет создано не только источниками  $f$ , участвующими в задаче дифракции, но еще какими-либо источниками, расположенными вне  $V$ . Произвол в выборе  $U^0$  может ока-

заться полезным, например, если известно решение задачи дифракции на теле, близком к исследуемому.

Величины  $\omega_n$  имеют размерность длины. Мы назовем их *собственными импедансами*. Они играют роль собственных значений однородной задачи. Физический смысл этой задачи состоит в том, что она описывает возможные лишь при определенных значениях собственных импедансов  $\omega_n$  незатухающие собственные колебания тела, происходящие на частоте  $k$  задачи дифракции в отсутствие истинных источников. Как уже говорилось, однородная задача будет самосопряженной (а собственные импедансы — вещественными) и в том случае, когда в исходной задаче присутствуют потери — но лишь в стенках тела (на границе  $S$ ). Если в исходной задаче помимо потерь в стенках имеются еще и другие потери (например, на излучение), то однородная задача будет несамосопряженной, собственные импедансы комплексными, причем

$$\text{Im } \omega_n > 0. \quad (9.7)$$

Это условие, которое легко может быть получено, если применить теорему Грина к области  $V$  для функций  $u_n$  и  $u_n^*$ , означает выделение с поверхности тела энергии (пропорциональной квадрату поля), расходуемой на поддержание незатухающих колебаний. Граничное условие (9.6) при этом описывает некоторую непрозрачную активную пленку на поверхности тела, являющуюся источником этой энергии.

Введенные таким образом собственные функции и их нормальные производные ортогональны по поверхности  $S$ . Для того чтобы в этом убедиться, достаточно применить вторую формулу Грина к области  $V$  для функций  $u_n$  и  $u_m$ . Возникающий при этом интеграл по поверхности  $S$  всегда будет равен нулю

$$\int_S \left( u_n \frac{\partial u_m}{\partial N} - u_m \frac{\partial u_n}{\partial N} \right) dS = 0. \quad (9.8)$$

Для открытых систем при доказательстве надо воспользоваться условиями излучения. Исключая теперь из (9.8) по (9.6) либо функции, либо их производные, получаем,

при отсутствии вырождения ( $\omega_n \neq \omega_m$ ),

$$\int_S u_n u_m dS = 0 \quad (n \neq m), \quad (9.9)$$

$$\int_S \frac{\partial u_n}{\partial N} \frac{\partial u_m}{\partial N} dS = 0 \quad (n \neq m). \quad (9.10)$$

Найденные условия ортогональности позволяют обычным образом определить коэффициенты  $A_n$  из оставшегося невыполненным требования, чтобы искомое поле удовлетворяло граничному условию (9.2):

$$U^0 + \sum_n A_n u_n + \omega \left( \frac{\partial U^0}{\partial N} + \sum_n A_n \frac{\partial u_n}{\partial N} \right) = 0 \Big|_S. \quad (9.11)$$

Умножая (9.11) на  $u_m$ , интегрируя по  $S$  и используя при этом (9.9), получаем

$$A_n = \frac{1}{\omega_n - \omega} \frac{\int_S \left( U^0 + \omega \frac{\partial U^0}{\partial N} \right) \frac{\partial u_n}{\partial N} dS}{\int_S \left( \frac{\partial u_n}{\partial N} \right)^2 dS}. \quad (9.12)$$

Для частного случая, когда искомое поле должно удовлетворять условию  $U = 0|_S$ , в (9.12) достаточно положить  $\omega = 0$  и тогда

$$A_n = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{\int_S U^0 \frac{\partial u_n}{\partial N} dS}{\int_S \left( \frac{\partial u_n}{\partial N} \right)^2 dS}. \quad (9.13)$$

Если же на  $S$  должна исчезать нормальная производная полного поля (это соответствует предельному переходу  $\omega \rightarrow \infty$ ), удобнее предварительно в (9.12) внести другой знаменатель, тогда

$$A_n = \omega_n \frac{\int_S u_n \frac{\partial U^0}{\partial N} dS}{\int_S u_n^2 dS}. \quad (9.14)$$

Собственные импедансы  $\omega_n$  являются согласно (9.5) функциями  $k$ . Резонанс наступает, когда один из собственных импедансов близок к значению истинного импеданса задачи дифракции, т. е. когда  $\omega_n(k)$  близко к  $\omega$ , и, в частности, для условий

$$U = 0|_S \quad \text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial N} = 0 \Big|_S, \quad (9.15)$$

когда  $\omega_n$  мало или велико соответственно.

Для закрытых резонаторов без потерь ( $\text{Im } \omega = 0$ ) корни уравнения

$$\omega_n(k) - \omega = 0 \quad (9.16)$$

вещественны. Поэтому здесь имеют место бесконечные резонансы на частотах, равных этим корням. Эти резонансные частоты совпадают с собственными частотами в  $k$ -методе. Для резонаторов с поглощающими стенками ( $\text{Im } \omega < 0$ ) резонансы конечны, корни (9.16) комплексны и совпадают с комплексными собственными частотами в  $k$ -методе. Для открытых систем резонансы всегда конечны (мнимые части  $\omega_n$  и  $\omega$  имеют разные знаки), и корни (9.16) также комплексны.

2. В этом пункте мы рассмотрим обобщение  $\omega$ -метода на задачи о *телах с переменным импедансом*. Если импеданс является функцией точки  $s$  на поверхности тела  $S$  ( $\omega = \omega(s)$ ), т. е. если вместо (9.2) должно выполняться граничное условие

$$U + \omega(s) \frac{\partial U}{\partial N} = 0 \Big|_S, \quad (9.17)$$

то во вспомогательной задаче импеданс  $\omega_n$  также должен быть функцией  $s$ , подобно тому, как в  $\epsilon$ -методе для  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$  диэлектрическая проницаемость вспомогательного тела  $\epsilon_n$  является функцией  $\mathbf{r}$ . В соответствии с этим положим

$$u_n + \omega_n(s) \frac{\partial u_n}{\partial N} = 0 \Big|_S, \quad (9.18)$$

где  $\omega_n(s)$  — функция точки  $s$ , зависящая от  $\omega(s)$  и содержащая некий числовой параметр, который мы примем за собственное значение. Вид функции  $\omega_n(s)$ , необходимый для формулировки однородной задачи,

определяется из такого же требования, из которого в § 5 были получены функции  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$  (5.33) или (5.11), т. е. из требования, чтобы система линейных алгебраических уравнений для  $A_n$  была диагональной. Эта система получается при подстановке (9.3) в граничное условие (9.17), умножении на  $u_m$  и интегрировании по  $S$  и имеет вид (ср. (5.31))

$$\sum_n A_n \int_S \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{w_n} \right) u_n u_m dS = - \int_S \left( \frac{1}{w} U^0 + \frac{\partial U^0}{\partial N} \right) u_m dS. \quad (9.19)$$

Ее нужно сопоставить с условием ортогональности, получающимся из (9.8) при подстановке (9.18) — это условие обобщает (9.9):

$$\int_S \left( \frac{1}{w_n} - \frac{1}{w_m} \right) u_n u_m dS = 0. \quad (9.20)$$

Очевидно, что если  $w(s)$  и  $w_n(s)$  будут удовлетворять функциональному уравнению (5.32) (с заменой  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_n$  на  $w$ ,  $w_n$ ), то система (9.19) станет диагональной. Решение этого уравнения для  $w_n(s)$  имеет тот же вид (5.33), что и для  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$ . Оно содержит собственное значение и, кроме того, еще произвольную функцию.

Можно, как и в § 5, использовать другое условие ортогональности, обобщающее не (9.9), а (9.10), написать для  $A_n$  другую систему линейных уравнений и диагонализировать ее, связав  $w_n(s)$  с  $w(s)$  формулой, аналогичной (5.11). Разумеется, собственные значения и собственные функции, а потому и коэффициенты  $A_n$ , будут при этом другими. Мы не будем выписывать соответствующих формул; в более общем виде это сделано в § 12. Упомянем только один частный случай, получающийся при специальном выборе функции, входящей в  $w_n(s)$ . Аналогично (5.39) можно определить  $w_n(s)$  формулой

$$(w_n(s) = \lambda_n w(s), \quad (9.21)$$

где  $\lambda_n$  — собственное значение. При таком выборе функций  $w_n(s)$  собственные функции  $u_n$  согласно (9.20) будут ортогональны с весом  $1/w(s)$ , а коэффициенты  $A_n$  будут иметь резонансный знаменатель  $\lambda_n - 1$ .

Для бесконечно тонких экранов (т. е. тел с незамкнутыми границами) как поле в задаче дифракции, так и собственные функции однородных задач должны удовлетворять еще условиям конечности энергии вблизи кромок, которые, как известно, равносильны требованию, чтобы интегралы

$$\int_V |u|^2 dV, \quad \int_V |\nabla u|^2 dV \quad (9.22)$$

не обращались в бесконечность. Все предыдущие рассуждения этого параграфа сохраняются, но если понимать интегралы по  $S$ , как интегралы по одной стороне поверхности, то вид формул несколько изменится. Например, для первого граничного условия (9.15) в формулу (9.13) вместо  $\partial u_n / \partial N$  войдет  $\partial u_n^- / \partial N - \partial u_n^+ / \partial N$ , а вместо  $(\partial u_n / \partial N)^2$  войдет  $(\partial u_n^- / \partial N)^2 + (\partial u_n^+ / \partial N)^2$ , где  $\partial u^\pm / \partial N$  — значения производной на разных сторонах  $S$ , а  $N$  направлено из «—» в «+». Это очевидное обобщение можно получить, либо дополнив сначала  $S$  до замкнутой поверхности и потребовав, чтобы на дополнении  $u_n$  и  $\partial u_n / \partial N$  были непрерывны (а на обеих сторонах  $S$  удовлетворяли (9.6)), либо произведя предельный переход от тела без кромок (рис. 9.1) к незамкнутой поверхности.

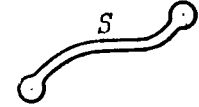


Рис. 9.1.

3. В качестве алгоритма для нахождения собственных элементов вспомогательных однородных задач метода могут быть использованы интегральные уравнения (с простыми ядрами) для собственных функций. Они оказываются распространенными по поверхности  $S$ , т. е. по области, где устанавливается вспомогательное граничное условие, и тем самым имеют размерность на единицу меньше размерности соответствующей однородной задачи. Для тел с замкнутыми границами эти уравнения получаются особенно просто. Выведем их, например, для внешней задачи (9.5), (9.6). Для этого применим вторую теорему Грина к области  $V$ , записанную для собственной функции  $u_n$  и для функции Грина  $G$  точечного источника в пустоте (5.23). Так как и  $u_n$  и  $G$  удовлетворяют условиям излучения, то возникающий



в формуле интеграл по бесконечно удаленной сфере выпадает. Заменяя в интеграле по  $S$ , согласно (9.6),  $\frac{\partial u_n}{\partial N}$  на  $-\frac{1}{w_n} u_n$ , мы получаем выражение для собственной функции  $u_n$  в любой точке области  $V$  через ее значения на границе тела  $S$ . Для того чтобы получить искомое уравнение, достаточно теперь опустить точку наблюдения  $r$  на поверхность  $S$  (надо иметь в виду, что при этом потенциал двойного слоя дает выброс, равный  $\frac{1}{2} u_n$ ). В результате этой процедуры мы получим *интегральное уравнение* второго рода, в котором собственное значение  $w_n$  входит *сомножителем* в одно из слагаемых ядра:

$$\frac{1}{2} u_n(r) = \int_S u_n(r') \left( \frac{\partial G}{\partial N_{r'}}(r, r') + \frac{1}{w_n} G(r, r') \right) dS_{r'}. \quad (9.23)$$

Здесь  $N$  — направление нормали, внешней к области  $V$ .

Соответствующее уравнение для внутренней задачи отличается тем, что  $G$  есть вещественная функция —  $G = -\frac{\cos k|r-r'|}{4\pi|r-r'|}$  для пространственной задачи и  $G = \frac{1}{4} N_0(k|r-r'|)$  для двумерной. Как мы отмечали выше, собственные значения  $w_n$  при этом вещественны.

В случае незамкнутых экранов  $S$  для собственных функций также можно получить интегральные уравнения второго рода по  $S$ . Однако мы не будем здесь их приводить, так как они имеют сложные ядра и применение их для отыскания собственных элементов затруднительно.

4<sup>1</sup>). Как и в  $\epsilon$ -методе, основные результаты  $w$ -метода можно формально получить из *аппарата теории функций*. Рассмотрим, например, задачу п. 1. Введем (для этого пункта) обозначение для дифрагированного поля  $v = U - U^0$ . Поле  $v$  удовлетворяет однородному волновому уравнению и граничному условию на  $S$ :

$$\frac{\partial v}{\partial N} + \frac{1}{w} v = g, \quad (9.24)$$

<sup>1</sup>) Этот пункт содержит результаты А. Д. Шатрова и написан им.

где  $g = -\frac{\partial U^0}{\partial N} - \frac{1}{w} U^0$ . Функция  $g$  играет здесь роль внешней силы, т. е. функции  $f$  исходной задачи. Введем функцию  $v(\alpha)$  однородным волновым уравнением (9.5) и граничным условием на  $S$ :

$$\frac{\partial v(\alpha)}{\partial N} + \alpha v(\alpha) = g. \quad (9.25)$$

Функция  $v(\alpha)$  переходит в  $v$  при  $\alpha = \frac{1}{w}$ . Она имеет полюсы в точках  $\alpha_n = \frac{1}{w_n}$ , где  $w_n$  — собственные числа задачи (9.5), (9.6).

Найдем вычет  $c_n$  функции  $v(\alpha)$  в полюсе  $\alpha_n$ . Представим  $g$  в виде

$$g = u_n \frac{\int_S g u_n dS}{\int_S u_n^2 dS} + \tilde{g} \quad (9.26)$$

так, чтобы для  $\tilde{g}$  было справедливо условие  $\int_S \tilde{g} u_n dS = 0$ .

Функция  $v(\alpha)$  также разобьется на два слагаемых; то из них, которое содержит  $\tilde{g}$ , остается конечным при  $\alpha \rightarrow \alpha_n$  и не войдет в  $c_n$ . Второе слагаемое равно

$$\frac{1}{\alpha - \alpha_n} \cdot \frac{u_n \int_S g u_n dS}{\int_S u_n^2 dS}. \quad (9.27)$$

Таким образом, для  $c_n$  имеем

$$c_n = \frac{u_n \int_S g u_n dS}{\int_S u_n^2 dS} = - \frac{\alpha_n u_n \int_S g \frac{\partial u_n}{\partial N} dS}{\int_S \left( \frac{\partial u_n}{\partial N} \right)^2 dS}. \quad (9.28)$$

Предположим, что в комплексной плоскости  $\alpha$  существует последовательность расширяющихся контуров, на которых  $v(\alpha)$  убывает не медленнее, чем  $1/|\alpha|$ . Тогда

$$v(\alpha) = \sum_n \frac{c_n}{\alpha - \alpha_n}. \quad (9.29)$$

Подставляя сюда  $c_n$ , получим

$$v(\alpha) = \sum_n \frac{\alpha_n u_n}{\alpha_n - \alpha} \cdot \frac{\int_S g \frac{\partial u_n}{\partial N} dS}{\int_S \left(\frac{\partial u_n}{\partial N}\right)^2 dS}. \quad (9.30)$$

Полагая здесь  $\alpha = 1/\omega$ , придем к разложению (9.3) с коэффициентами (9.12).

При  $|\alpha| \rightarrow \infty$  граничное условие (9.25) принимает предельную форму  $v|_S = 0$ . Поэтому предположение о том, что  $v(\alpha) = O(1/|\alpha|)$  при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  (при котором только и выполняется (9.29)), выполняется всегда, за исключением особого случая закрытого резонатора, в котором одна из собственных частот, соответствующая граничному условию  $u|_S = 0$ , совпадает с  $k$  (т. е. одно из собственных значений  $\omega_n$  задачи (9.5), (9.6) равно нулю). При этом  $v(\alpha)$  не стремится к нулю при  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , и для того, чтобы применить разложение (9.29), надо предварительно вычесть из  $v(\alpha)$  величину  $v_1 = \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} v(\alpha)$ .

Если обозначить через  $U_0$  существующее в этом случае решение однородного волнового уравнения с граничным условием  $v|_S = 0$ , то

$$v_1 = U_0 \frac{\int_S g \frac{\partial U_0}{\partial N} dS}{\int_S \left(\frac{\partial U_0}{\partial N}\right)^2 dS}. \quad (9.31)$$

Эта величина формально совпадает с общим членом ряда (9.30) при  $\alpha_n = \infty$ . Разность  $v(\alpha) - v_1$  должным образом стремится к нулю при  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , и к ней уже можно

применить разложение (9.29). В результате для  $v(\alpha)$  получится тот же ряд (9.30), но в сумму надо будет включать не только члены, соответствующие полюсам  $\alpha_n$ , но и слагаемое (9.31).

### § 10. Собственное значение в граничных условиях сопряжения ( $\rho$ -метод); металлические и полупрозрачные поверхности<sup>1)</sup>

Мы рассмотрим здесь два дополняющих друг друга варианта обобщенного метода, позволяющих строить решения задач дифракции на замкнутых и незамкнутых металлических поверхностях; в § 11 эти методы будут применены к задачам дифракции на диэлектрических телах. Их отличие от  $\omega$ -метода состоит, в частности, в том, что во вспомогательной однородной задаче на поверхности рассматриваемого тела ставятся граничные условия, имеющие смысл *условий сопряжения*; в применении к задачам о телах с замкнутыми границами это означает установление связи между внутренним и внешним объемами, а для тел с незамкнутыми границами (бесконечно тонкие экраны) — связи между полями на разных сторонах экрана. Эти условия могут трактоваться как описывающие границу тела в виде полупрозрачной пленки, в то время как применяемые в  $\omega$ -методе импедансные граничные условия означают полную изоляцию (экранировку) рассматриваемой области от остального объема, т. е. описывают непрозрачную пленку, повторяющую форму тела. Таким образом, вспомогательная однородная задача  $\rho$ -метода ставится для всего пространства (в случае замкнутых границ одновременно для внутренней и внешней областей). Поэтому ее собственные элементы позволяют строить решения как внутренней, так и внешней задач дифракции, а собственные значения, как функции частоты, содержат информацию о резонансах обеих задач.

Достоинством первого из упомянутых вариантов  $\rho$ -метода для металлических тел является наличие весьма

<sup>1)</sup> Изучение математических аспектов первого варианта  $\rho$ -метода проводится в § 36, а второго варианта — в § 37 Дополнения.

простого интегрального уравнения второго рода для собственных функций, распространенного по поверхности тела.

1. Изложим вначале применение  $\rho$ -метода для задач дифракции на замкнутых металлических поверхностях. Мы не будем подразделять задачи на внешние и внутренние, поскольку они имеют общий формальный аппарат построения решения. Сформулируем задачу дифракции. Нужно найти функцию  $U(\mathbf{r})$ , удовлетворяющую вне некоторой замкнутой поверхности  $S$  уравнению

$$\Delta U + k^2 U = f, \quad (10.1)$$

где  $f$  — заданные сторонние источники, условию излучения на бесконечности и граничному условию на  $S$ :

$$U = 0|_S, \quad (10.2a)$$

либо

$$\frac{\partial U}{\partial N} = 0|_S. \quad (10.2b)$$

Область вне  $S$  может быть бесконечной (дифракция на теле конечного объема, в частности, возбуждение открытого резонатора), и тогда это — внешняя задача, или конечной (возбуждение закрытого резонатора) — внутренняя задача; в последнем случае условие излучения опускается.

Будем искать решение этой задачи в виде

$$U = U^0 + \sum_n A_n u_n, \quad (10.3)$$

где  $U^0$  по-прежнему имеет смысл падающего поля, а элементы разложения  $u_n$  суть собственные функции вспомогательной однородной задачи, которая ставится теперь для всего пространства, т. е. одновременно для внешней ( $V^-$ ) и внутренней ( $V^+$ ) областей. Она состоит в том, что вместо металлической поверхности  $S$  рассматривается полупрозрачная пленка той же формы, что и  $S$ , на которой должна осуществляться определенная связь между граничными значениями внутренних и внешних полей. Двум вариантам  $\rho$ -метода соответствуют два типа граничных условий однородной задачи, каждый из которых предназначен для решения своей задачи дифракции: либо с условием (10.2a), либо с условием (10.2b).

А именно, для задачи дифракции с условием  $U|_S = 0$  в однородной задаче на  $S$  должны выполняться граничные условия

$$u_n^+ - u_n^- = 0|_S, \quad \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} - \frac{u_n}{\rho_n} = 0|_S. \quad (10.4a)$$

Если же в задаче дифракции поле должно удовлетворять условию (10.2b), то для вспомогательной задачи нужно принять

$$\frac{\partial \tilde{u}_n^+}{\partial N} - \frac{\partial \tilde{u}_n^-}{\partial N} = 0|_S, \quad \tilde{u}_n^+ - \tilde{u}_n^- + \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial N} = 0|_S. \quad (10.4b)$$

Знаки «плюс» и «минус» обозначают две стороны поверхности  $S$ ; нормаль  $N$  направлена из «минуса» в «плюс». Метод, в котором вспомогательная задача ставится с условиями (10.4a), мы называем первым вариантом, а с условиями (10.4b) — вторым вариантом  $\rho$ -метода. Собственные функции обоих вариантов (разумеется, они различны) обязаны также удовлетворять вне  $S$  однородному волновому уравнению

$$\Delta u_n + k^2 u_n = 0 \quad (10.5)$$

и условиям излучения. Роль собственных значений однородных задач играют коэффициенты пропорциональности  $\rho_n$  и  $\tilde{\rho}_n$  в граничных условиях (10.4a), (10.4b).

Легко показать, что вспомогательные задачи описывают системы, в которых с поверхности пленки  $S$  происходит выделение энергии, компенсирующей потери на излучение. Иными словами, полупрозрачная пленка является активным излучающим элементом, и именно благодаря этому обстоятельству при определенных значениях  $\rho$  и  $\tilde{\rho}$  возможны незатухающие колебания, происходящие с заданной частотой  $k$  (т. е. нетривиальные решения однородных задач). Собственные значения должны иметь положительную мнимую часть. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно записать баланс энергии однородных задач. Его запись получится, если применить теорему Грина для функций  $u_n$  и  $u_n^*$  к областям  $V^+$  и  $V^-$ , вычтем результаты и воспользуемся в одном случае (10.4a), а в другом (10.4b). Тогда получим для

I варианта

$$\frac{\operatorname{Im} \rho_n}{|\rho_n|^2} \cdot \int_S |u_n|^2 dS = \operatorname{Im} \int_{S_\infty} u_n \frac{\partial u_n^*}{\partial N} dS, \quad (10.6a)$$

а для II варианта —

$$\frac{\operatorname{Im} \bar{\rho}_n}{|\bar{\rho}_n|^2} \cdot \int_S \left| \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial N} \right|^2 dS = \operatorname{Im} \int_{S_\infty} \bar{u}_n \frac{\partial \bar{u}_n^*}{\partial N} dS. \quad (10.6b)$$

Так как интегралы по бесконечно удаленной сфере  $S_\infty$ , стоящие в правых частях (10.6a), (10.6b), равные потерям на излучения, положительны, то отсюда и следует

$$\operatorname{Im} \rho_n > 0, \quad \operatorname{Im} \bar{\rho}_n > 0. \quad (10.7)$$

Собственные функции I варианта и нормальные производные собственных функций II варианта ортогональны при интегрировании по замкнутой поверхности  $S$ . Эти свойства просто доказать, если применить вторую теорему Грина (2.8) для двух функций с разными номерами  $n$  и  $m$  к внутреннему ( $V^+$ ) и внешнему ( $V^-$ ) объемам, вычесть результаты и воспользоваться тем, что собственные функции удовлетворяют условиям излучения (при этом интеграл по бесконечно удаленной сфере выпадает). Тогда, согласно граничным условиям I варианта (10.4a), будем иметь

$$\int_S u_n u_m dS = 0 \quad (n \neq m), \quad (10.8a)$$

а использование (10.4b) дает

$$\int_S \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial N} \cdot \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial N} dS = 0 \quad (n \neq m). \quad (10.8b)$$

Условия ортогональности дают возможность получить явные одночленные выражения для коэффициентов разложения  $A_n$  в представлении искомого поля (10.3). Действительно, для задачи дифракции с граничным условием (10.2a) нужно потребовать

$$U^0 + \sum_n A_n u_n = 0|_S. \quad (10.9a)$$

Умножая это равенство на  $u_m$ , интегрируя затем по  $S$ , используя при этом (10.8a) и вводя обозначение  $v_n = \left( \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \right)|_S$ , получаем

$$A_n = - \frac{\int_S U^0 v_n dS}{\rho_n \cdot \int_S v_n^2 dS}. \quad (10.10a)$$

Для задачи дифракции с исчезающей на  $S$  нормальной производной должно быть

$$\frac{\partial U^0}{\partial N} + \sum_n A_n \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial N} = 0|_S. \quad (10.9b)$$

Используя здесь ортогональность (10.8b), находим

$$A_n = \frac{1}{\bar{\rho}_n} \cdot \frac{\int_S \frac{\partial U^0}{\partial N} \bar{v}_n dS}{\int_S \bar{v}_n^2 dS}, \quad (10.10b)$$

где введено обозначение  $\bar{v}_n = (\bar{u}_n^+ - \bar{u}_n^-)|_S$ .

Преобразовав интегралы, стоящие в числителях (10.10a), (10.10b), можно записать формулы для  $A_n$ , содержащие вместо падающего поля непосредственно источники  $f$ . Для этого нужно применить к  $V^+$  и  $V^-$  теорему Грина (2.8) для функций  $U^0$  и  $u_n$  и вычесть результаты, воспользовавшись условиями излучения, граничными условиями (10.4a) либо (10.4b) и тем, что, по определению,  $U^0$  и  $\frac{\partial U^0}{\partial N}$  непрерывны на  $S$ . Тогда для числителей (10.10a), (10.10b) получим соответственно

$$\int_S U^0 v_n dS = \int_V u_n f dV, \quad (10.10в)$$

$$\int_S \frac{\partial U^0}{\partial N} \bar{v}_n dS = - \int_V \bar{u}_n f dV. \quad (10.10г)$$

Применяя  $\rho$ -метод к задачам дифракции на металлических телах с замкнутыми границами, нужно иметь в

виду, что однополные задачи ставятся для всего пространства и их собственные элементы могут быть использованы для решения как внутренних, так и внешних задач. Поэтому собственные значения могут обращаться точно в нуль (что означает бесконечный резонанс) на частотах, являющихся резонансными для внутренней области. При решении внешней задачи эти бесконечные резонансы не имеют, разумеется, физического смысла, и в выражении для поля (10.3) их нет, так как на этих частотах оказывается равным нулю числитель соответствующего коэффициента Фурье. Однако это свидетельствует о том, что корни уравнений  $\rho_n(k) = 0$ , либо  $\bar{\rho}_n(k) = 0$  могут не иметь никакого отношения к резонансным свойствам открытого резонатора и что частотная зависимость  $A_n$  может еще определяться видом коэффициентов Фурье. В задачах о бесконечно тонких

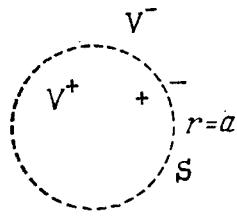


Рис. 10.1.

экранах, т. е. о телах без внутренней полости, к которым также применим  $\rho$ -метод, это обстоятельство не имеет места, и поэтому малость модуля  $\rho_n$  или  $\bar{\rho}_n$  в этом случае всегда означает близость к истинному резонансу. Проиллюстрируем свойства функций  $u_n$ ,  $\bar{u}_n$  и чисел  $\rho_n$  и  $\bar{\rho}_n$  на примере задачи о круге (цилиндр радиуса  $a$  либо с условием  $U = 0|_S$ , либо с условием  $\frac{\partial U}{\partial N} = 0|_S$  (рис. 10.1)). При этом решение (10.3) представляет собой разложение, получающееся обычным методом разделения переменных. Для этого случая имеем следующие выражения для собственных функций I варианта внутри и вне:

$$u_n = H_n^{(2)}(ka) J_n(kr) \cos n\varphi \quad (r \leq a), \quad (10.11)$$

$$u_n = H_n^{(2)}(kr) J_n(ka) \cos n\varphi \quad (r \geq a), \quad (10.12)$$

а собственные значения равны

$$\rho_n = \frac{i\pi a}{2} H_n^{(2)}(ka) J_n(ka). \quad (10.15a)$$

Собственные функции и собственные значения II варианта для этого же случая равны

$$\bar{u}_n = H_n^{(2)'}(ka) J_n(kr) \cos n\varphi \quad (r < a), \quad (10.13)$$

$$\bar{u}_n = H_n^{(2)}(kr) J_n'(ka) \cos n\varphi \quad (r > a), \quad (10.14)$$

$$\bar{\rho}_n = \frac{i\pi a k^2}{2} \cdot H_n^{(2)'}(ka) J_n'(ka). \quad (10.15b)$$

Мы ограничились здесь для простоты записи только четными по  $\varphi$  решениями. С ростом  $n$  множитель  $\frac{1}{\rho_n}$  растет, как  $n$ , необходимое для сходимости ряда (10.3) убывание коэффициентов  $A_n$  обеспечивается быстрым убыванием коэффициента Фурье, т. е. числителя (10.10a). Например, для внешней задачи, если падает плоская волна  $U^0 = \exp(-ikr \cos \varphi)$ , то  $A_n \sim \frac{1}{H_n^{(2)}(ka)}$  и при  $n \gg ka$

коэффициенты  $A_n$  убывают с ростом  $n$  экспоненциально.

Собственные значения  $\rho_n$ , описывающие одновременно внешнюю и внутреннюю задачи, как уже говорилось, обращаются в нуль на резонансных частотах для внутренней полости цилиндра; в нашем примере — при корнях уравнения  $J_n(ka) = 0$ ,  $J_n'(ka) = 0$ . В выражении для поля (10.3) эти лишние для внешней задачи резонансы отсутствуют — согласно (10.10), (10.12), (10.14), на этих частотах обращается в нуль числитель  $A_n$ , и соответствующая собственная функция не принимает участия в формировании дифрагированного поля.

2. Применение I варианта для металлических тел можно трактовать как построение решения *интегрального уравнения первого рода*. Действительно, как известно, решение задачи (10.1), (10.2a) удовлетворяет соотношению

$$U = U^0 - \int_S \frac{\partial U}{\partial N} G dS, \quad (10.16)$$

где  $G$  — функция Грина пустоты (5.23). В частности, на поверхности тела  $S$ , согласно (10.2a),

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial N} G dS = U^0. \quad (10.17)$$

Это — известное интегральное уравнение первого рода для  $\frac{\partial U}{\partial N} \Big|_S$ , т. е. для тока. Воспользуемся им для построения системы функций  $u_n$ .

Введем некоторую систему функций  $v_n$  на  $S$  интегральным уравнением второго рода

$$-\rho_n v_n = \int_S v_n G dS. \quad (10.18)$$

(Далее будет показано, что функции  $v_n$  и собственные значения  $\rho_n$  совпадают с введенными выше.) Ядро  $G$  симметрично, но не эрмитово, поэтому условия ортогональности имеют вид

$$\int_S v_n v_m dS = 0 \quad (n \neq m). \quad (10.19)$$

Разложим  $\frac{\partial U}{\partial N}$  в ряд по  $v_n$ :

$$\frac{\partial U}{\partial N} = \sum_n A_n v_n; \quad (10.20)$$

из (10.17) с учетом (10.19) получим для  $A_n$  выражение

$$A_n = -\frac{1}{\rho_n} \cdot \frac{\int_S U^0 v_n dS}{\int_S v_n^2 dS}, \quad (10.21)$$

совпадающее с (10.10а).

Определим теперь функции  $u_n$  во всей области (не только на  $S$ ) формулой

$$u_n = -\int_S v_n G dS. \quad (10.22)$$

Эти функции удовлетворяют волновому уравнению (10.5) и условию излучения. На  $S$  они, разумеется, не удовлетворяют (10.2а). Согласно (10.22) и (10.18), на  $S$

$$u_n = \rho_n v_n. \quad (10.23)$$

Наконец, согласно (10.16), (10.20) и (10.22), формальное решение задачи (10.1), (10.2а) дается рядом (10.3) с коэффициентами (10.21).

Легко видеть, что определения функций  $u_n$ ,  $v_n$  и чисел  $\rho_n$ , данные в этом и в предыдущем пунктах, полностью равносильны. Действительно, согласно определению (10.22), функции  $u_n$ , помимо того, что они удовлетворяют волновому уравнению и условиям излучения, имеют еще граничные свойства потенциала простого слоя, так как ядро  $G$  обладает той же особенностью при  $|r - r'| \rightarrow 0$ , что и ядра  $\ln |r - r'|$ , или  $-\frac{1}{|r - r'|}$ , соответственно для двумерной и трехмерной задач. Следовательно, значения  $u_n$  по обе стороны  $S$  совпадают, а нормальные производные испытывают скачок, пропорциональный функции  $v_n$ , которая, согласно (10.23), равна  $u_n/\rho_n$ . Таким образом, для функций  $u_n$  на  $S$  выполнены и граничные условия (10.4а).

Интегральное уравнение (10.18) для собственных функций I варианта, разумеется, может быть получено и непосредственно из дифференциальной постановки однородной задачи. Для этого достаточно записать известное выражение для решения волнового уравнения через разрывы функции и ее нормальной производной на контуре  $S$  и воспользоваться граничными условиями (10.4а).

Для собственных функций II варианта, используя указанный способ, также можно получить интегральное уравнение второго рода по поверхности  $S$ , однако оно имеет более сложный вид.

Действительно, граничные значения любой функции  $u$  (удовлетворяющей во всем пространстве волновому уравнению (10.5) и условию излучения) и ее нормальной производной удовлетворяют на замкнутой поверхности  $S$  соотношениям

$$u^+ - u^- = 2 \int_S \left[ (u^+ + u^-) \frac{\partial G}{\partial N} - \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} + \frac{\partial u^-}{\partial N} \right) G \right] dS, \quad (10.24)$$

$$u^+ + u^- = 2 \int_S \left[ (u^+ - u^-) \frac{\partial G}{\partial N} - \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \right) G \right] dS. \quad (10.25)$$

Для того чтобы получить эти формулы, нужно применить теорему Грина (2.8) к внешней ( $V^+$ ) и к внутрен-

ней ( $V^+$ ) областям для функции  $u$  и функции Грина пустоты  $G$ , опустить в каждом случае точку наблюдения на  $S$  (воспользовавшись при этом свойствами потенциалов простого и двойного слоев), а затем сложить и вычесть результаты. Используя в (10.24), (10.25) граничные условия (10.46), будем иметь

$$-\frac{1}{\bar{\rho}_n} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial N_r} = 2 \int_S \left[ (\tilde{u}_n^+ + \tilde{u}_n^-) \frac{\partial G}{\partial N_{r'}} - 2 \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial N_{r'}} G \right] dS_{r'}, \quad (10.26)$$

$$\tilde{u}_n^+ + \tilde{u}_n^- = -\frac{2}{\bar{\rho}_n} \int_S \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial N_{r'}} \frac{\partial G}{\partial N_{r'}} dS_{r'}. \quad (10.27)$$

Подставляя выражение для  $\tilde{u}_n^+ + \tilde{u}_n^-$  из (10.27) в (10.26) и меняя в первом слагаемом справа порядок интегрирования, получаем упомянутое интегральное уравнение для нормальной производной собственной функции  $\tilde{u}_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial N_r}(r) = \\ = \int_S \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial N_{r'}} \left[ \int_S \frac{\partial G}{\partial N_{r'}}(r'', r') \frac{\partial G}{\partial N_{r''}}(r, r'') dS_{r''} + \bar{\rho}_n G \right] dS_{r'}. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Точки  $r, r', r''$  принадлежат поверхности  $S$ .

3. С помощью однородных задач  $\rho$ -метода легко построить решения задач дифракции, в которых вместо граничных условий (10.2а), (10.2б) на границе областей  $V^+$  и  $V^-$  ставятся условия сопряжения вида

$$U^+ - U^- = 0|_S, \quad (10.29а)$$

$$\frac{\partial U^+}{\partial N} - \frac{\partial U^-}{\partial N} - \frac{U}{\rho} = 0|_S \quad (10.29б)$$

или условия

$$\frac{\partial U^+}{\partial N} - \frac{\partial U^-}{\partial N} = 0|_S, \quad (10.30а)$$

$$U^+ - U^- + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial U}{\partial N} = 0|_S, \quad (10.30б)$$

где  $\rho$  и  $\bar{\rho}$  — заданные постоянные величины. Условия подобно типа имеют место в тех случаях, когда в задаче

дифракции граница  $S$  является не сплошной металлической поверхностью, а какой-либо полупрозрачной пленкой. К задаче с такими граничными условиями сводится, например, задача дифракции, если поверхность  $S$  есть достаточно плавно изогнутая частопериодическая решетка из металлических лент. В этом случае числа  $\rho$  и  $\bar{\rho}$  являются параметрами решетки, т. е. характеризуют относительные размеры проводников. Если проводники решетки идеальные, то эти параметры вещественны:

$$\rho = -\frac{p}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi q}{2}, \quad (10.31а)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\pi}{2p} \cdot \frac{1}{\ln \cos \frac{\pi q}{2}}. \quad (10.31б)$$

Здесь  $p$  — период,  $q$  — коэффициент заполнения решетки.

Для граничных условий (10.29) при построении решения нужно использовать I вариант, а для условий (10.30) — II вариант. При этом ряд (10.3) в первом случае почленно удовлетворяет (10.29а), а во втором — (10.30а). Напомним, что в представлении (10.3)  $U^0$  есть поле источников в пустоте, и поэтому оно непрерывно на  $S$  вместе со своей нормальной производной.

Условия (10.29б), (10.30б) дают при использовании ортогональности (10.8а), (10.8б) соответственно

$$A_n = \frac{\rho_n}{\rho - \rho_n} \frac{\int_S U^0 u_n dS}{\int_S u_n^2 dS}, \quad (10.32а)$$

$$A_n = \frac{\bar{\rho}_n}{\bar{\rho} - \bar{\rho}_n} \frac{\int_S \frac{\partial U^0}{\partial N} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial N} dS}{\int_S \left( \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial N} \right)^2 dS}. \quad (10.32б)$$

Знаменатели в этих формулах не могут обращаться точно в нуль, так как  $\rho$  и  $\bar{\rho}$  вещественны (либо, при наличии потерь в проводниках, обладают отрицательными мнимыми частями), а собственные значения имеют, как

было показано, положительные мнимые части. И это отсутствие бесконечных резонансов естественно, поскольку в данном случае задача дифракции относится к открытому резонатору. Максимальные значения амплитуд  $A_n$  практически обратно пропорциональны мнимым частям собственных значений, они получаются при частотах, равных корням уравнений:

$$\rho - \operatorname{Re} \rho_n(k) = 0, \quad (10.33a)$$

либо

$$\bar{\rho} - \operatorname{Re} \bar{\rho}_n(k) = 0. \quad (10.33b)$$

Эти частоты являются резонансными.

Легко обобщить полученные результаты на случай, когда  $\rho$  и  $\bar{\rho}$  в условиях (10.29), (10.30) являются функциями координаты на поверхности  $S$  (т. е.  $\rho = \rho(s)$ ,  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(s)$ ). Такая ситуация возникнет в задаче дифракции, если поверхность  $S$ , на которой происходит дифракция, имеет переменную прозрачность, например, является ленточной решеткой с переменным коэффициентом заполнения. В этом случае (как и в  $\omega$ -методе при  $\omega = \omega(s)$ )  $\rho_n$  и  $\bar{\rho}_n$  в условиях однородных задач (10.4) также являются функциями  $s$ , а роль собственных значений играет некий параметр, входящий в эти функции. Возможный вид функций  $\rho_n(s)$  и  $\bar{\rho}(s)$  определяется формулами типа (5.11), (5.33). Подробнее более общая задача будет рассмотрена в § 12.

Применение описанного выше метода для задач дифракции на незамкнутых поверхностях не встречает принципиальных трудностей. В этом случае оказываются справедливыми все полученные здесь формулы, кроме интегрального уравнения (10.28) для II варианта. Заменяющее его уравнение оказывается сложнее, и мы его приводить не будем. Формулы типа (10.10), (10.32) изменятся таким же образом, как и соответствующие формулы § 9; эти формулы можно получить, например, предельным переходом от очень тонкого тела (рис. 9.1). Напомним, наконец, о том, что в  $\rho$ -методе для незамкнутых поверхностей малость собственных значений всегда свидетельствует об истинном резонансе.

При постановке задач о незамкнутых телах надо также требовать выполнения условия конечности энергии вблизи острых кромок.

### § 11. Собственное значение в граничных условиях сопряжения ( $\rho$ -метод); диэлектрические тела

1. Применим  $\rho$ -метод к решению задачи дифракции на теле с параметрами  $\epsilon, \mu$  (не зависящими от координат). Требуется найти поле, удовлетворяющее внутри тела (область  $V^+$ , рис. 11.1) и вне его ( $V^-$ ) уравнениям

$$\Delta U^+ + k^2 \epsilon \mu U^+ = f^+ \quad \text{в } V^+, \quad (11.1)$$

$$\Delta U^- + k^2 U^- = f^- \quad \text{в } V^-, \quad (11.2)$$

условию излучения на бесконечности и условиям сопряжения на границе областей  $S$ :

$$U^+ - U^- = 0|_S, \quad (11.3a)$$

$$\eta \frac{\partial U^+}{\partial N} - \frac{\partial U^-}{\partial N} = 0|_S. \quad (11.3b)$$

В двумерной задаче электродинамики  $\eta = 1/\epsilon$  для  $H$ -поляризации ( $U = H_z$ ) и  $\eta = 1/\mu$  для  $E$ -поляризации ( $U = E_z$ ). В акустике  $\eta$  — величина, обратная плотности тела. Метод этого параграфа можно было бы развить и для трехмерных задач электродинамики, подобно тому, как в § 14 это сделано для других вариантов.

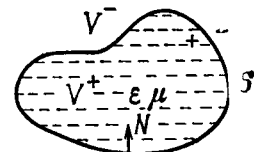


Рис. 11.1.

Решение этой задачи дифракции всюду представим в виде суммы двух рядов

$$U^\pm = U_\pm^0 + \sum_n A_n u_n^\pm + \sum_n B_n \tilde{u}_n^\pm. \quad (11.4)$$

Здесь  $U_-^0$  — поле источников  $f^-$  в пустоте,  $U_+^0$  — поле источников  $f^+$  в свободном пространстве с параметрами  $\epsilon$  и  $\mu$ . Функции  $U_+^0$  и  $U_-^0$  «не знают» границы  $S$  и удовлетворяют во всем пространстве уравнениям (11.1) и (11.2), т. е.

$$\Delta U_+^0 + k^2 \epsilon \mu U_+^0 = f^+, \quad (11.5)$$

$$\Delta U_-^0 + k^2 U_-^0 = f^-. \quad (11.6)$$



Таким образом,  $U_+^0$  и  $U_-^0$  — различные и определенные всюду (в  $V^+ + V^-$ ) функции. Из такого определения  $U^0$ , очевидно, следует, что  $U_+^0 = 0$  при  $f^+ = 0$  и  $U_-^0 = 0$  при  $f^- = 0$ .

Функции  $u_n$  и  $\tilde{u}_n$ , по которым разлагается поле  $U = U^0$ , суть собственные функции двух вспомогательных однородных задач, отличающихся друг от друга условиями сопряжения на  $S$ . Функции  $u_n$  удовлетворяют на  $S$  обобщенным условиям I варианта

$$u_n^+ - u_n^- = 0|_S, \quad (11.7a)$$

$$\eta \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} - \frac{u_n}{\rho_n} = 0|_S, \quad (11.7b)$$

а функции  $\tilde{u}_n$  — обобщенным условиям II варианта

$$\eta \frac{\partial \tilde{u}_n^+}{\partial N} - \frac{\partial \tilde{u}_n^-}{\partial N} = 0|_S, \quad (11.8a)$$

$$\tilde{u}_n^+ - \tilde{u}_n^- + \frac{1}{\tilde{\rho}_n} \frac{\partial \tilde{u}_n^+}{\partial N} = 0|_S. \quad (11.8b)$$

Помимо этих граничных условий функции  $u_n$  и  $\tilde{u}_n$  должны удовлетворять однородным уравнениям

$$\Delta u_n^+ + k^2 \epsilon \mu u_n^+ = 0 \text{ в } V^+, \quad (11.9a)$$

$$\Delta u_n^- + k^2 \mu u_n^- = 0 \text{ в } V^- \quad (11.9b)$$

и условиям излучения на бесконечности.

Величины  $\rho_n$  в задаче (11.7), (11.9) и  $\tilde{\rho}_n$  в задаче (11.8), (11.9) являются собственными значениями. Доказательство формул (10.7) мы отнесем в конец параграфа.

Функции  $u_n$  и  $\tilde{u}_n$  отличаются от введенных в § 10 тем, что удовлетворяют в  $V^+$  волновому уравнению с  $\epsilon$  и  $\mu$ , и эти параметры входят также в граничные условия.

Применяя вторую формулу Грина (2.8) к  $V^+$  и к  $V^-$  и пользуясь при этом граничными условиями (11.7) либо (11.8) и условиями излучения, легко убедиться в том, что собственные функции  $u_n$  и нормальные производные

функций  $\tilde{u}_n$  ортогональны в смысле

$$\int_S u_n u_m dS = 0 \quad (n \neq m), \quad (11.10)$$

$$\int_S \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial N} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial N} dS = 0 \quad (n \neq m). \quad (11.11)$$

Эти условия позволяют получить явные выражения для коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  разложения (11.4). Действительно, подчиним искомое поле в виде ряда (11.4) граничным условиям задачи дифракции (11.3) (уравнениям в  $V^+$  и  $V^-$  и условиям излучения ряд (11.4) удовлетворяет почленно). Так как функции  $\tilde{u}_n$  удовлетворяют условию (11.3a), а функции  $u_n$  — условию (11.3b), то коэффициенты  $A_n$  и функции  $u_n$  не будут присутствовать в уравнении, получающемся при удовлетворении (11.3a), а функции  $\tilde{u}_n$  и коэффициенты  $B_n$  соответственно при удовлетворении условию (11.3b), и мы получим две независимые системы уравнений для искомых амплитуд

$$U_+^0 - U_-^0 + \sum_n B_n (\tilde{u}_n^+ - \tilde{u}_n^-) = 0|_S, \quad (11.12)$$

$$\eta \frac{\partial U_+^0}{\partial N} - \frac{\partial U_-^0}{\partial N} + \sum_n A_n \left( \eta \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \right) = 0|_S. \quad (11.13)$$

Используя граничные условия для однородных задач, умножив затем (11.12) на  $\frac{\partial \tilde{u}_m^+}{\partial N}$ , а (11.13) на  $u_m$  и проинтегрировав результаты по  $S$ , получим, согласно условиям ортогональности (11.10), (11.11):

$$A_n = \rho_n \frac{\int_S \left( \frac{\partial U_-^0}{\partial N} - \frac{\partial U_+^0}{\partial N} \right) \eta u_n dS}{\int_S u_n^2 dS}, \quad (11.14)$$

$$B_n = \tilde{\rho}_n \frac{\int_S (U_+^0 - U_-^0) \frac{\partial \tilde{u}_n^+}{\partial N} dS}{\int_S \left( \frac{\partial \tilde{u}_n^+}{\partial N} \right)^2 dS}. \quad (11.15)$$

Таким образом, резонанс возникает, когда модули собственных значений  $\rho_n$  и  $\bar{\rho}_n$ , например, как функции частоты, становятся большими величинами. Как всегда, при этом условия однородных задач становятся близкими к условиям истинной задачи. Резонансные частоты обеих задач одинаковы, ибо граничные условия истинной задачи получаются из (11.7) и (11.8) при  $|\rho_n| \rightarrow \infty$ ,  $|\bar{\rho}_n| \rightarrow \infty$ , так как при этих предельных переходах обе однородные задачи для  $u_n$  и для  $\bar{u}_n$  совпадают. Напомним, что в задачах предыдущего параграфа резонанс наступал при  $\rho_n \rightarrow 0$ ,  $\bar{\rho}_n \rightarrow 0$ .

Запись формул (11.14), (11.15) не изменится, если искомое поле должно удовлетворять еще каким-либо условиям, например, если на некоторой поверхности должно быть  $U = 0$  (резонатор, состоящий из диэлектрического тела и каких-либо металлических экранов в случае  $E$ -поляризации). При этом, разумеется, тем же условиям должны удовлетворять поля  $U_{\pm}^0$  и функции  $u_n, \bar{u}_n$ .

2. Можно искать решение задачи дифракции на диэлектрическом теле (11.1)–(11.3) в виде ряда по собственным функциям *только одной однородной задачи*, а именно, либо в виде

$$U^{\pm} = U_{\pm}^0 + \sum_n A_n u_n^{\pm}, \quad (11.16)$$

либо в виде

$$U^{\pm} = U_{\pm}^0 + \sum_n B_n \bar{u}_n^{\pm}, \quad (11.17)$$

где  $u_n$  и  $\bar{u}_n$  те же функции, что и в п. 1. Однако определение  $U_{\pm}^0$  будет теперь значительно более сложным. Например, если источники  $f$  расположены вне тела (в области  $V^-$ ), то в этой области  $U_-^0$  можно, как и в предыдущем пункте, полагать равным полю этих источников в отсутствие тела (падающим полем); при этом  $U_+^0$  должно удовлетворять внутри тела (в  $V^+$ ) уравнению

$$\Delta U_+^0 + k^2 \epsilon \mu U_+^0 = 0. \quad (11.18)$$

Однако при использовании представления искомого поля в виде (11.16)  $U_+^0$  должно совпадать на границе  $S$  с известным полем  $U_-^0$ :

$$U_+^0 - U_-^0 = 0|_S; \quad (11.19)$$

(нормальные производные  $\frac{\partial U_+^0}{\partial N}$  и  $\frac{\partial U_-^0}{\partial N}$ , разумеется, при этом не равны между собой на  $S$ ). Таким образом, нахождение  $U_+^0$  для (11.16) представляет собой задачу Дирихле. Если же использовать разложение (11.17), то для определения  $U_+^0$  на границе  $S$  оказывается заданной нормальная производная

$$\frac{\partial U_+^0}{\partial N} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial U_-^0}{\partial N} = 0|_S. \quad (11.20)$$

В этом случае  $U_+^0 - U_-^0 \neq 0|_S$  и нахождение  $U_+^0$  для (11.17) есть задача Неймана. Ничего не изменится, если все источники сосредоточены в  $V^+$ . В этом случае определения  $U_+^0$  и  $U_-^0$  поменяются местами, т. е. известными функциями будут  $U_-^0$ , а отыскание  $U_+^0$  будет сводиться к задаче Дирихле (Неймана), только теперь для внешней области. При одновременном присутствии источников в обеих областях *требуется*, вообще говоря, *знание решений двух задач Дирихле (Неймана)*. При этом  $U^0$  в каждой из областей представляет собой сумму двух слагаемых: поля источников данной области при отсутствии границы и решения задачи Дирихле (Неймана), соответствующей источникам, расположенным вне этой области.

При таком определении  $U^0$  для ряда (11.16) почленно выполнено истинное условие (11.3а), а для ряда (11.17) — условие (11.3б). Поэтому, подчиняя (11.16) условию (11.3б), а (11.17) — условию (11.3а) и пользуясь соответствующей ортогональностью (11.10) или (11.11), мы получим для  $A_n$  и  $B_n$  те же выражения (11.14), (11.15). Однако эти коэффициенты являются коэффициентами Фурье другого ряда (не (11.4)), и функция  $U^0$  в (11.14), (11.15) имеет другой смысл.

Заметим, что в некоторых случаях решение указанных выше задач Дирихле или Неймана можно не производить. Например, если возбуждение внешнее и нас интересует только поле вне тела, то искать  $U_+^0$  не надо, так как с помощью формулы Грина (2.8) эта функция может быть исключена из выражений для амплитуд.

Соответствующие формулы имеют вид

$$A_n = \rho_n \frac{\int_S \left( u_n \frac{\partial U_-^0}{\partial N} - \eta U_-^0 \frac{\partial u_n^+}{\partial N} \right) dS}{\int_S u_n^2 dS}, \quad (11.21)$$

$$B_n = \bar{\rho}_n \eta \frac{\int_S \left( \bar{u}_n^+ \frac{\partial U_-^0}{\partial N} - U_-^0 \frac{\partial \bar{u}_n^-}{\partial N} \right) dS}{\int_S \left( \frac{\partial \bar{u}_n^-}{\partial N} \right)^2 dS}. \quad (11.22)$$

Здесь  $U_-^0$  и  $\frac{\partial U_-^0}{\partial N}$  — поле и его нормальная производная, созданные на  $S$  источниками в отсутствие тела.

3. Можно показать, что собственные функции однородной задачи (11.7), (11.9) удовлетворяют на  $S$  системе однородных интегральных уравнений. Записанная, например, для случая  $\eta = 1$  ( $\mu = 1$ ,  $E$  — поляризация), эта система имеет вид

$$u_n(r) = \int_S \left[ u_n(r') \left( \frac{\partial F}{\partial N_{r'}} - \frac{1}{\rho_n} G^- \right) - v_n(r') F \right] dS_{r'}, \quad (11.23)$$

$$v_n(r) = \int_S \left[ u_n(r') \left( \frac{\partial^2 F}{\partial N_r \partial N_{r'}} - \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial G^-}{\partial N_r} \right) - v_n(r') \frac{\partial F}{\partial N_r} \right] dS_{r'} + \frac{1}{2\rho_n} \cdot u_n(r), \quad (11.24)$$

где  $v_n = \frac{\partial u_n^+}{\partial N}$ ,  $F = G^+ - G^-$ , а  $G^+$  и  $G^-$  — функции Грина точечного источника в свободном пространстве с волновыми числами  $k\sqrt{\epsilon}$  и  $k$  соответственно. Возможность записать эти уравнения связана с существованием интегральных уравнений (также по поверхности тела) для исходной задачи дифракции.

Отметим, что собственные функции  $u_n$ , введенные в этом параграфе, при произвольном  $\epsilon$  дают по (10.3), (10.10a) также и решение внешней и внутренней задач дифракции на металлическом теле с граничным условием (10.2a). Однако наиболее простое для задач диф-

ракции на металлических телах интегральное уравнение (10.18) получается из (11.23) при  $\epsilon = 1$  ( $F \equiv 0$ ). Собственные функции  $\bar{u}_n$  позволяют решать задачу дифракции на металлических телах с условиями (10.2б). Разумеется, при  $\epsilon = \mu = 1$  собственные элементы сформулированных в этом параграфе однородных задач совпадают с введенными в § 10 при решении задач на металлических телах.

4. Проиллюстрируем формулы этого параграфа на примере задачи дифракции на круговом диэлектрическом цилиндре радиуса  $a$  с проницаемостью  $\epsilon$  ( $\mu \equiv 1$ ) при условиях непрерывности поля и его нормальной производной ( $\eta = 1$ ) на границе. Собственные функции и собственные значения однородных задач (11.7), (11.9) и (11.8), (11.9) равны соответственно

$$u_n = H_n^{(2)}(ka) J_n(k\sqrt{\epsilon}r) \cos n\varphi \quad (r \leq a), \quad (11.25a)$$

$$u_n = J_n(k\sqrt{\epsilon}a) H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi \quad (r \geq a), \quad (11.25б)$$

$$\bar{u}_n = H_n^{(2)'}(ka) J_n(k\sqrt{\epsilon}r) \cos n\varphi \quad (r < a), \quad (11.26a)$$

$$\bar{u}_n = \sqrt{\epsilon} J_n'(k\sqrt{\epsilon}a) H_n^{(2)'}(kr) \cos n\varphi \quad (r > a), \quad (11.26б)$$

$$\rho_n = \frac{J_n(k\sqrt{\epsilon}a) H_n^{(1)}(ka)}{k(J_n(k\sqrt{\epsilon}a) H_n^{(1)'}(ka) - \sqrt{\epsilon} J_n'(k\sqrt{\epsilon}a) H_n^{(2)}(ka))}, \quad (11.27)$$

$$\bar{\rho}_n = \frac{k\sqrt{\epsilon} J_n'(k\sqrt{\epsilon}a) H_n^{(2)'}(ka)}{J_n(k\sqrt{\epsilon}a) H_n^{(2)'}(ka) - \sqrt{\epsilon} J_n'(k\sqrt{\epsilon}a) H_n^{(2)}(ka)}. \quad (11.28)$$

Если на цилиндр падает плоская волна ( $U_-^0 = e^{-ikr \cos \varphi}$ ), то для коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  в представлениях (11.16) и (11.17) легко получить следующие формулы:

$$A_n = \frac{(\sqrt{\epsilon} J_n(ka) J_n'(k\sqrt{\epsilon}a) - J_n'(ka) J_n(k\sqrt{\epsilon}a)) \cdot 2(-i)^n}{C_n(ka, \epsilon) (1 + \delta_{0n}) J_n(k\sqrt{\epsilon}a)}, \quad (11.29)$$

$$B_n = \frac{(\sqrt{\epsilon} J_n(ka) J_n'(k\sqrt{\epsilon}a) - J_n'(ka) J_n(k\sqrt{\epsilon}a)) \cdot 2(-i)^n}{C_n(ka, \epsilon) (1 + \delta_{0n}) J_n'(k\sqrt{\epsilon}a)}, \quad (11.30)$$

где

$$C_n(ka, \epsilon) = J_n(k\sqrt{\epsilon}a) H_n^{(2)'}(ka) - \sqrt{\epsilon} J_n'(k\sqrt{\epsilon}a) H_n^{(2)}(ka).$$

При этом решение задачи Дирихле для (11.16) и Неймана для (11.17) будут даваться соответственно выражениями

$$U_+^0 = \frac{J_0(ka)}{J_0(k\sqrt{\varepsilon}a)} \cdot J_0(k\sqrt{\varepsilon}r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{J_n(k\sqrt{\varepsilon}a)} \cdot J_n(k\sqrt{\varepsilon}r) \cos n\varphi, \quad (11.31)$$

$$U_+^0 = \frac{J_0'(ka)}{J_0'(k\sqrt{\varepsilon}a)} \cdot J_0(k\sqrt{\varepsilon}r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n'(ka)}{J_n'(k\sqrt{\varepsilon}a)} \cdot J_n(k\sqrt{\varepsilon}r) \cos n\varphi. \quad (11.32)$$

Мы показали, что оба ряда (11.16) и (11.17) с равным правом могут быть использованы при решении задачи дифракции на диэлектрическом теле. Эти представления в некотором отношении дополняют друг друга. Действительно, на частоте, при которой, например, становится неразрешимой задача Дирихле (в данном простом примере при  $k$ , удовлетворяющих уравнению  $J_n(k\sqrt{\varepsilon}a) = 0$ ), применение разложения (11.16) становится неудобным, так как это приводит к необходимости раскрывать в ряде для внутреннего поля неопределенность типа  $\infty - \infty$ . В этом случае почти всегда целесообразно использовать представление (11.17). И наоборот, при неразрешимости задачи Неймана (т. е. в нашем примере при частотах, являющихся корнями уравнения  $J_n'(k\sqrt{\varepsilon}a) = 0$ ) следует использовать разложение (11.16) по функциям  $u_n$ .

5. В п. 1 было упомянуто, что  $\text{Im } \rho_n > 0$ ,  $\text{Im } \bar{\rho}_n > 0$ . Докажем первое из этих неравенств; доказательство второго производится аналогично. Применим первую формулу Грина (2.5) к области  $V^+$  для функций  $u_n$  и  $u_n^*$ ; поменяв их затем местами, будем иметь

$$\int_S u_n^+ \frac{\partial u_n^{+*}}{\partial N} dS = - \int_{V^+} u_n \Delta u_n^* dV - \int_{V^+} |\nabla u_n|^2 dV, \quad (11.33)$$

$$\int_S u_n^{+*} \frac{\partial u_n^+}{\partial N} dS = - \int_{V^+} u_n^* \Delta u_n dV - \int_{V^+} |\nabla u_n|^2 dV. \quad (11.34)$$

Если теперь разделить равенство (11.33) на  $\varepsilon^*$ , а (11.34) — на  $\varepsilon$  и вычесть результаты, то первые слагаемые справа исчезнут (согласно уравнениям для  $u_n$  и  $u_n^*$ ), и мы будем иметь (при  $\mu \equiv 1$ )

$$\int_S \left( u_n^+ \frac{1}{\varepsilon^*} \frac{\partial u_n^{+*}}{\partial N} - u_n^{+*} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_n^+}{\partial N} \right) dS = \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^*} \right) \int_{V^+} |\nabla u_n|^2 dV. \quad (11.35)$$

Применение второй формулы Грина (2.8) к области  $V^-$  для тех же функций дает

$$\int_S \left( u_n^- \frac{\partial u_n^{-*}}{\partial N} - u_n^{-*} \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \right) dS = - \int_{S_\infty} \left( u_n^- \frac{\partial u_n^{-*}}{\partial N} - u_n^{-*} \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \right) dS. \quad (11.36)$$

Вычитая (11.36) из (11.35) и пользуясь при этом граничными условиями (11.7), найдем

$$\frac{\text{Im } \rho_n}{|\rho_n|^2} \cdot \int_S |u_n|^2 dS = - \frac{\text{Im } \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \int_{V^+} |\nabla u_n|^2 dV + \text{Im} \int_{S_\infty} u_n^- \frac{\partial u_n^{-*}}{\partial N} dS. \quad (11.37)$$

Слагаемые, стоящие справа в (11.37), представляют собой сумму диэлектрических потерь в теле и потерь на излучение, они положительны. Отсюда и следует, что  $\text{Im } \rho_n > 0$ .

## § 12. Собственное значение в условиях сопряжения общего вида

1. Излагаемый в этом параграфе метод дает решение задач дифракции на поверхностях с *граничными условиями более общего вида*, встречающихся в электродинамике и акустике. В предельных случаях эти условия переходят в крайевые условия рассмотренных выше методов этой главы; в этом смысле аппарат, развиваемый здесь, можно расценивать как обобщение этих методов.

Сформулируем задачу дифракции. Нужно найти поле, удовлетворяющее всюду вне поверхности  $S$  волновому уравнению

$$\Delta U + k^2 U = f, \quad (12.1)$$

условиям излучения на бесконечности и граничным условиям на поверхности  $S$  (которую мы будем считать замкнутой):

$$U^+ - U^- - \alpha \left( \frac{\partial U^+}{\partial N} + \frac{\partial U^-}{\partial N} \right) = 0 \Big|_S, \quad (12.2a)$$

$$U^+ + U^- - \beta \left( \frac{\partial U^+}{\partial N} - \frac{\partial U^-}{\partial N} \right) = 0 \Big|_S. \quad (12.2b)$$

Такие граничные условия описывают, например, дифракцию на частых (период мал по сравнению с длиной волны) металлических решетках, выполненных из телесных проводников. В этом случае  $\alpha$  и  $\beta$  — параметры, характеризующие относительные размеры проводников и форму их поперечного сечения; они вещественны, если проводники идеальные.

Переход граничных условий (12.2a), (12.2b) в предельные формы очевиден: граничные условия для сплошного идеального экрана ( $U|_S = 0$  либо  $\frac{\partial U}{\partial N}|_S = 0$ ) следуют из них при  $\alpha = \beta = 0$  либо при  $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} = 0$  соответственно; импедансные условия получаются при  $\alpha = \beta = w$  (для этого случая граничные условия (12.2) распадаются на условия для  $V^+$  и для  $V^-$ , и эти области оказываются развязанными); условия для полупрозрачной поверхности (10.29) получаются при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2\rho$ , условия (10.30) — при  $\frac{1}{\beta} = 0$ ,  $\alpha = -\frac{1}{2\rho}$ , наконец, условия непрерывности поля и производной — при  $\alpha = \frac{1}{\beta} = 0$ .

Решение поставленной задачи дифракции представим в виде суммы двух рядов

$$U = U^0 + \sum_n A_n u_n + \sum_n B_n \tilde{u}_n. \quad (12.3)$$

Здесь  $U^0$  — поле истинных источников  $f$  в пустоте, а  $u_n$  и  $\tilde{u}_n$  — собственные функции двух вспомогательных од-

нородных задач, которые отличаются лишь формулировкой граничных условий на  $S$ . Для функций  $u_n$  сохраним условие истинной задачи (12.2a), а коэффициент перед разностью производных в (12.2b) будем считать собственным значением, т. е.

$$u_n^+ - u_n^- - \alpha \left( \frac{\partial u_n^+}{\partial N} + \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \right) = 0 \Big|_S, \quad (12.4a)$$

$$u_n^+ + u_n^- - \beta_n \left( \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \right) = 0 \Big|_S. \quad (12.4b)$$

Для функций  $\tilde{u}_n$ , наоборот, сохраним истинное условие (12.2b), а собственное значение введем через (12.2a):

$$\tilde{u}_n^+ - \tilde{u}_n^- - \alpha_n \left( \frac{\partial \tilde{u}_n^+}{\partial N} + \frac{\partial \tilde{u}_n^-}{\partial N} \right) = 0 \Big|_S, \quad (12.5a)$$

$$\tilde{u}_n^+ + \tilde{u}_n^- - \beta \left( \frac{\partial \tilde{u}_n^+}{\partial N} - \frac{\partial \tilde{u}_n^-}{\partial N} \right) = 0 \Big|_S. \quad (12.5b)$$

Кроме того, собственные функции обеих задач должны удовлетворять во всем пространстве однородным уравнениям

$$\Delta u_n + k^2 u_n = 0, \quad (12.6)$$

$$\Delta \tilde{u}_n + k^2 \tilde{u}_n = 0 \quad (12.7)$$

и условиям излучения на бесконечности.

Применяя формулу Грина (2.8), записанную для собственных функций разных номеров  $n$  и  $m$ , к внутреннему и внешнему объемам, вычитая результаты и исключая, согласно граничным условиям, например, нормальные производные, получим условия ортогональности для первой однородной задачи (12.4), (12.6) в виде

$$\int_S \psi_n \psi_m dS = 0 \quad (n \neq m) \quad (12.8)$$

и для второй (12.5), (12.7):

$$\int_S \varphi_n \varphi_m dS = 0 \quad (n \neq m), \quad (12.9)$$

где

$$\psi_n = u_n^+ + u_n^-, \quad \varphi_n = \tilde{u}_n^+ - \tilde{u}_n^-.$$

Таким образом, ортогональными при интегрировании по  $S$  оказываются суммы предельных значений  $u_n$  по разным сторонам поверхности  $S$  и скачки  $\tilde{u}_n$  на  $S$ .

Легко видеть, что все однородные задачи рассмотренных нами ранее поверхностных методов следуют, как частные случаи, из однородных задач данного метода. Действительно, постановка I варианта  $\rho$ -метода получается, если в (12.4) положить  $\alpha = 0$  (при этом  $\rho_n = \beta_n/2$ ), II вариант  $\rho$ -метода следует, если в (12.5) положить  $1/\beta = 0$  (при этом  $\tilde{\rho}_n = -\frac{1}{2\alpha_n}$ ); наконец, для получения  $\omega$ -метода достаточно, например, в (12.4) принять за собственное значение  $\omega_n$  оба коэффициента перед суммой и разностью производных.

Найдем коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$ . Для этого подчиним разложение (12.3) граничным условиям (12.2). Так как собственные функции  $u_n$ , по определению, удовлетворяют (12.2а), а  $\tilde{u}_n$  — условию (12.2б), то в уравнении для коэффициентов, получающемся из (12.2а), не будут присутствовать  $A_n$ , а в уравнении, получающемся из (12.2б), не будут присутствовать  $B_n$ . Используя еще (12.5а) и (12.4б), получим

$$\sum_n B_n \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n}\right) \varphi_n = 2\alpha \frac{\partial U^0}{\partial N} \Big|_S, \quad (12.10)$$

$$\sum_n A_n \left(1 - \frac{\beta}{\beta_n}\right) \psi_n = -2U^0 \Big|_S. \quad (12.11)$$

Умножая (12.10) на  $\varphi_m$ , а (12.11) на  $\psi_m$ ; интегрируя по  $S$  и пользуясь при этом условиями ортогональности (12.8), (12.9), найдем

$$A_n = \frac{2\beta_n}{\beta - \beta_n} \frac{\int_S U^0 \psi_n dS}{\int_S \psi_n^2 dS}, \quad (12.12)$$

$$B_n = \frac{2\alpha\alpha_n}{\alpha_n - \alpha} \cdot \frac{\int_S \frac{\partial U^0}{\partial N} \varphi_n dS}{\int_S \varphi_n^2 dS}. \quad (12.13)$$

Все сказанное об условиях резонанса в §§ 9—10 для  $\omega$ - и  $\rho$ -методов полностью относится и к рассматриваемому случаю. А именно, резонанс происходит, когда собственные значения, например, как функции частоты, становятся близкими к значениям соответствующих параметров в задаче дифракции, т. е. когда  $\beta_n(k)$  близко к  $\beta$  и  $\alpha_n(k)$  близко к  $\alpha$ . Так как в системе имеются потери на излучение, то резонансы всегда конечны; собственные значения имеют положительную мнимую часть (доказательство этого факта проводится примерно так же, как и § 10), и поэтому уравнения

$$\beta_n(k) - \beta = 0, \quad (12.14)$$

$$\alpha_n(k) - \alpha = 0 \quad (12.15)$$

не имеют вещественных корней, так как  $\text{Im } \alpha, \text{Im } \beta \leq 0$ . Положительность мнимых частей собственных значений, как и раньше, означает выделение энергии с поверхности  $S$ , компенсирующей потери на излучение, без чего невозможны были бы незатухающие колебания.

2. Можно искать решение задачи дифракции (12.1), (12.2) в виде разложения по собственным функциям только одной однородной задачи, т. е. либо в виде

$$U = U^0 + \sum_n A_n u_n, \quad (12.16)$$

либо в виде

$$U = U^0 + \sum_n B_n \tilde{u}_n. \quad (12.17)$$

Однако в этом случае  $U^0$  не будет столь простым полем (т. е. полем источников  $f$  в свободном пространстве); оно должно будет удовлетворять на  $S$  сложным граничным условиям. Действительно, подставляя разложение (12.16) в (12.2а), а (12.17) в (12.2б), получим, что  $U^0$  для первого представления должно удовлетворять на  $S$  условию

$$U_+^0 - U_-^0 - \alpha \left( \frac{\partial U_+^0}{\partial N} + \frac{\partial U_-^0}{\partial N} \right) = 0 \Big|_S, \quad (12.18)$$

а для второго

$$U_+^0 + U_-^0 - \beta \left( \frac{\partial U_+^0}{\partial N} - \frac{\partial U_-^0}{\partial N} \right) = 0 \Big|_S. \quad (12.19)$$

Выполнение этих условий можно обеспечить, выбирая  $U^0$  следующим образом. Если источники  $f$  расположены только в  $V^-$ , то в этой области  $U_-^0$  можно считать полем этих источников в пустоте, т. е. известной функцией. Тогда определение  $U_+^0$  будет, очевидно, представлять собой третью краевую задачу для однородного уравнения

$$\Delta U_+^0 + k^2 U_+^0 = 0 \quad (12.20)$$

с неоднородным краевым условием (для  $U^0$  в (12.16)):

$$U_+^0 - \alpha \frac{\partial U_+^0}{\partial N} = U_-^0 + \alpha \frac{\partial U_-^0}{\partial N} \Big|_S, \quad (12.21)$$

и соответственно (для  $U^0$  в (12.17)):

$$U_+^0 - \beta \frac{\partial U_+^0}{\partial N} = -U_-^0 - \beta \frac{\partial U_-^0}{\partial N} \Big|_S. \quad (12.22)$$

Справа в (12.21), (12.22) стоят заданные функции. При расположении источников только в  $V^+$  мы будем иметь третью краевую задачу для внешней области; при этом  $U_+^0$  будет известным полем этих источников в свободном пространстве. Если же источники находятся везде, то  $U^0$  в каждой из областей есть сумма двух слагаемых, одно из которых есть поле источников данной области в пустоте, а другое — решение третьей краевой задачи, соответствующей источникам, находящимся за пределами данной области.

Можно определить  $U^0$  и иначе. Если источники поля находятся, например, в  $V^-$ , то можно положить  $U_+^0$  равным тождественному нулю. Тогда, согласно (12.21) или (12.22),  $U_-^0$  будет представлять собой решение задачи дифракции для уравнения

$$\Delta U_-^0 + k^2 U_-^0 = f \quad (12.23)$$

с импедансным граничным условием на  $S$ ,

$$U_-^0 + \alpha \frac{\partial U_-^0}{\partial N} = 0 \Big|_S, \quad (12.24)$$

или, соответственно, с условием

$$U_-^0 + \beta \frac{\partial U_-^0}{\partial N} = 0 \Big|_S. \quad (12.25)$$

После нахождения  $U^0$  коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  определяются подстановкой (12.16) в (12.26) и (12.17) в (12.2а) с использованием соответствующих условий ортогональности. При этом для коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  получаются формулы (12.12) и (12.13), но только в них  $U^0$  и  $\frac{\partial U^0}{\partial N}$  имеют, разумеется, другой смысл.

3. Не представляет труда обобщить полученные здесь результаты на тот случай, когда в истинных граничных условиях (12.2а), (12.2б)  $\alpha$  и  $\beta$  — функции от координат границы  $S$ , т. е. если  $\alpha = \alpha(s)$ ,  $\beta = \beta(s)$ . Физически это означает, что поверхность, на которой происходит дифракция, имеет переменную прозрачность. Это может быть, например, решетка, выполненная с переменным шагом или переменным коэффициентом заполнения.

В этом случае и  $\alpha_n$ , и  $\beta_n$  в граничных условиях для однородных задач также должны быть функциями от точки  $s$  на поверхности, а роль собственного значения будет играть числовой параметр, входящий в эти функции. Если положить

$$\frac{1}{\beta_n} = \gamma(s) + \sigma_n \left( \frac{1}{\beta(s)} - \gamma(s) \right), \quad (12.26)$$

$$\frac{1}{\alpha_n} = \gamma(s) + \tilde{\sigma}_n \left( \frac{1}{\alpha(s)} - \gamma(s) \right), \quad (12.27)$$

где  $\gamma(s)$  — произвольная, вообще говоря, функция (ее можно принять пропорциональной  $\frac{1}{\beta(s)} \left( \frac{1}{\alpha(s)} \right)$ ), не равная  $\frac{1}{\beta(s)} \left( \frac{1}{\alpha(s)} \right)$ , а  $\sigma_n$  и  $\tilde{\sigma}_n$  — собственные значения соответствующих задач, то условия ортогональности собственных функций содержат вес:

$$\int_S \left( \frac{1}{\beta} - \gamma \right) \psi_n \psi_m dS = 0 \quad (n \neq m), \quad (12.28)$$

$$\int_S \left( \frac{1}{\alpha} - \gamma \right) \varphi_n \varphi_m dS = 0 \quad (n \neq m), \quad (12.29)$$

а коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  в разложениях (12.3), (12.16), (12.17) будут даваться выражениями

$$A_n = \frac{2}{\sigma_n - 1} \frac{\int_S \frac{1}{\beta} U^0 \psi_n dS}{\int_S (1/\beta - \gamma) \varphi_n^2 dS}, \quad (12.30)$$

$$B_n = \frac{2}{1 - \bar{\sigma}_n} \frac{\int_S \frac{\partial U^0}{\partial N} \varphi_n dS}{\int_S (1/\alpha - \gamma) \varphi_n^2 dS}. \quad (12.31)$$

Из этих формул видно, что резонансные эффекты проявляются при близости собственных значений к единице; резонансы также конечны, и можно доказать, что мнимые части  $\sigma_n$  и  $\bar{\sigma}_n$  соответствуют выделению энергии.

4. Запишем, наконец, *интегральные уравнения* для введенных в этом параграфе собственных функций. Это легко сделать, воспользовавшись соотношениями (10.24), (10.25), связывающими суммы и разности полей и их нормальных производных на замкнутой поверхности  $S$ . Подставляя в эти соотношения граничные условия (12.4), (12.5), мы получим систему двух однородных интегральных уравнений второго рода, распространенных по поверхности  $S$ :

$$\varphi = 2 \int_S \left( \psi \frac{\partial G}{\partial N} - \frac{1}{\alpha} \varphi G \right) dS, \quad (12.32)$$

$$\psi = 2 \int_S \left( \varphi \frac{\partial G}{\partial N} - \frac{1}{\beta} \psi G \right) dS. \quad (12.33)$$

Здесь  $\psi$  и  $\varphi$ , как и в (12.9), — суммы и разности предельных значений собственных функций по разные стороны  $S$ ;  $G$  — функция Грина пустоты. Полагая в этих уравнениях либо  $\alpha = \alpha_n$ , либо  $\beta = \beta_n$ , мы получим интегральные уравнения либо для однородной задачи (12.5), (12.7), либо для задачи (12.4), (12.6). Из этой же системы, в частности, следуют интегральные уравнения

для  $\omega$ - и  $\rho$ -методов, сформулированных для задач о телах с замкнутыми границами.

Заметим, наконец, что для задач дифракции на телах с незамкнутыми границами остаются справедливыми все полученные в этом параграфе результаты и формулы, кроме интегральных уравнений для собственных функций (12.32), (12.33), которые оказываются в этом случае сложнее. Кроме того, при постановке задачи дифракции для таких поверхностей надо еще вводить условие конечности энергии вблизи острых кромок.

### § 13. Собственное значение в условиях на бесконечности ( $s$ -метод)<sup>1)</sup>

Излагаемый в этом параграфе вариант метода применим при решении задач *дифракции в открытых системах*. В нем вспомогательная однородная задача оказывается вещественной и может быть сведена к *вещественному интегральному уравнению*, если в задаче дифракции присутствуют только потери на излучение. Это связано со следующей закономерностью, уже обсуждавшейся для закрытых задач. А именно, при наличии потерь только одного типа соответствующую вспомогательную задачу всегда можно сделать вещественной, если вводить собственное значение именно в той области, где эти потери присутствуют, точнее, если вводить собственное значение через параметр задачи дифракции, ответственный за эти потери. В рассматриваемом варианте собственное значение однородной задачи (которая соответствует задаче дифракции с потерями только на излучение) мы введем через условия для собственной функции на бесконечности. Физический смысл этих условий состоит в том, что существует как сходящаяся из бесконечности собственная волна, так и рассеянная телом собственная волна. Угловые зависимости сходящейся и расходящейся волн, определяемые формой и свойствами облучаемого тела, должны совпадать (с точностью до комплексного сопряжения). В качестве собственных значений принимаются отношения амплитуд рассеянных и проходящих

<sup>1)</sup> Вопросы математического обоснования  $s$ -метода рассмотрены в § 39 Дополнения.



собственных волн. Баланс энергии состоит в равенстве мощностей в каждой паре встречных волн. Таким образом, в отличие от других рассмотренных в этой главе вариантов собственное значение однородной задачи вводятся здесь не через вспомогательные граничные условия на поверхности тела, а через асимптотические условия на сфере бесконечно большого радиуса, внутри которой содержится исследуемое тело.

1.  $s$ -метод может быть применен для решения задач дифракции на телах с различными свойствами. В этом пункте разберем особенности этого метода на примере скалярной задачи, в которой дифракция первичного поля  $U^0$  происходит на некоторой полупрозрачной поверхности  $S$  (не обязательно замкнутой), описываемой параметром  $\rho$ . Пусть нужно найти решение волнового уравнения

$$\Delta U + k^2 U = f, \quad (13.1)$$

удовлетворяющее на поверхности  $S$  граничным условиям

$$U^+ - U^- = 0|_S, \quad (13.2a)$$

$$\frac{\partial U^+}{\partial N} - \frac{\partial U^-}{\partial N} - \frac{U}{\rho} = 0|_S \quad (13.2b)$$

и условиям излучения. Параметр  $\rho$  характеризует прозрачность поверхности  $S$ ; в предельном случае при  $\rho = 0$  условия (13.2) описывают идеальную металлическую поверхность с граничным условием  $U|_S = 0$ .

Функции, по которым мы будем разлагать дифрагированное поле, не являются в этом методе собственными функциями некоторой простой однородной задачи, а выражаются через такие функции. Начнем с того, что сформируем эту однородную задачу.

Рассмотрим нетривиальные решения  $u_n$  однородного волнового уравнения

$$\Delta u_n + k^2 u_n = 0, \quad (13.3)$$

удовлетворяющие на  $S$  условиям задачи дифракции

$$u_n^+ - u_n^- = 0|_S, \quad (13.4a)$$

$$\frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} - \frac{u_n}{\rho} = 0|_S \quad (13.4b)$$

и условию на бесконечности (в трехмерном случае)

$$u_n \simeq \left( \Phi_n^* \frac{e^{ikr}}{kr} + s_n \Phi_n \frac{e^{-ikr}}{kr} \right) \cdot \frac{1}{1 + s_n}. \quad (13.5a)$$

Знак  $\simeq$  имеет тот же смысл, что и при формулировке условия излучения (2.23) в виде  $u \simeq \Phi \frac{e^{-ikr}}{kr}$ . Функции  $\Phi_n$  должны удовлетворять требованию (для полноты постановки задачи)

$$\Phi_n^*(\varphi, \theta) = \Phi_n(\pi + \varphi, \pi - \theta). \quad (13.5b)$$

Для двумерной задачи условие (13.5) должно быть записано в виде

$$u_n \simeq \left( \Phi_n^* \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} + s_n \Phi_n \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}} \right) \cdot \frac{1}{1 + s_n}, \quad (13.6a)$$

причем

$$\Phi_n^*(\varphi) = i\Phi_n(\varphi + \pi). \quad (13.6b)$$

В (13.5), (13.6) угловые зависимости обеих волн не совпадают, а комплексно сопряжены. Числа  $s_n$  являются собственными значениями задачи. Им соответствуют функции  $u_n$ , которые, согласно (13.5), (13.6), представляют собой сумму сходящейся к телу и рассеянной им волн с угловой зависимостью, описываемой функцией  $\Phi_n$ , которая может быть названа *собственной диаграммой рассеяния* тела. Собственные значения  $s_n$ , равные отношению амплитуд расходящихся волн к амплитудам сходящихся, могут при этом рассматриваться как *собственные коэффициенты отражения*. При отсутствии потерь в теле (в нашем случае при вещественном  $\rho$ ) все собственные значения равны по модулю единице, что является следствием того, что однородная задача, как обычно, имеет самостоятельный физический смысл и в ней должен выполняться баланс энергии (мощность, переносимая сходящейся к телу волной, равна мощности, рассеянной телом). Совокупность чисел  $s_n$  образует так называемую матрицу рассеяния.

Сведем однородную задачу (13.3)—(13.6) к интегральному уравнению по контуру тела  $S$ . Как мы покажем, это уравнение будет вещественным, что делает его

наиболее удобным для отыскания собственных элементов и исследования их свойств.

Будем искать  $u_n$  в виде суммы двух потенциалов простого слоя

$$u_n = \int_S v_n (G^* + s_n G) dS. \quad (13.7)$$

Здесь  $G$  — функция Грина пустоты (5.23),  $v_n$  — функция на  $S$ , подлежащая определению. Представление (13.7) обеспечивает выполнение уравнения (13.3), граничного условия (13.4а) (согласно свойству непрерывности потенциала простого слоя при переходе через границу интегрирования) и асимптотическое поведение при  $r \rightarrow \infty$  (13.5) или (13.6). Удовлетворим последнему условию (13.4б). По свойству производных потенциала простого слоя нормальная производная испытывает скачок, равный

$$\frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} = -(1 + s_n) v_n. \quad (13.8)$$

Поэтому, согласно (13.4б),

$$v_n = -\frac{u_n}{\rho(1 + s_n)}. \quad (13.9)$$

Подставляя это в (13.7), получаем выражение для собственной функции  $u_n$  всюду через ее значение на контуре. Опустив точку наблюдения на  $S$ , находим искомое однородное интегральное уравнение второго рода

$$-\rho(1 + s_n)u_n = \int_S u_n (G^* + s_n G) dS. \quad (13.10)$$

Разумеется, это уравнение может быть получено и более стандартным способом: применением во всем пространстве формулы Грина (2.8) к двум функциям:  $u_n$  и  $G^* + s_n G$ . Возникающие при этом интегралы по бесконечно удаленной сфере будут равны нулю вследствие (13.5б), (13.6б).

Рассмотрим свойства уравнения (13.10). Легко видеть, что при отсутствии потерь на  $S$  ( $\text{Im } \rho = 0$ ) собственные значения  $s_n$  равны по модулю единице (разумеется, это следует и из дифференциальной постанов-

ки). Для того чтобы в этом убедиться, достаточно умножить (13.10) на  $u_n^*$ , затем проинтегрировать по  $S$  и выразить из полученного равенства  $s_n$ :

$$s_n = -\frac{\rho \int_S |u_n|^2 dS + \int_S \int_S u_n(p) u_n^*(q) G^*(q, p) dS_p dS_q}{\rho \int_S |u_n|^2 dS + \int_S \int_S u_n(p) u_n^*(q) G(q, p) dS_p dS_q}. \quad (13.11)$$

Если учесть симметрию ядра  $G$ , то очевидно, что числитель и знаменатель в правой части (13.11) комплексно сопряжены, так что  $|s_n| = 1$ . Для  $s_n$  мы введем запись  $s_n = e^{2i\delta_n}$  ( $\text{Im } \delta_n = 0$ ). Нетрудно убедиться также в том, что собственные функции уравнения (13.10), т. е. значения  $u_n$  на  $S$ , можно считать вещественными (как мы и примем). Для этого надо записать уравнение, комплексно сопряженное с (13.10), и воспользоваться тем, что  $s_n^* = 1/s_n$ ; тогда получится, что  $u_n^*$  также удовлетворяет уравнению (13.10), а это означает, что  $u_n$  с точностью до постоянного множителя есть вещественная функция. Указанные свойства имеют следствием вещественность уравнения (13.10). Действительно, умножив обе части (13.10) на  $e^{-i\delta_n}$ , получим уравнение

$$-\rho u_n \cos \delta_n = \int_S u_n \text{Re}(e^{i\delta_n} G) dS, \quad (13.12)$$

которое в трехмерной задаче имеет вид

$$4\pi\rho u_n = \int_S u_n \frac{\cos kR + \lambda_n \sin kR}{R} dS, \quad (13.13а)$$

а для двумерной задачи

$$-4\rho u_n = \int_S u_n (N_0(kR) - \lambda_n J_0(kR)) dS. \quad (13.13б)$$

Здесь  $\lambda_n = \text{tg } \delta_n$  играет роль собственного значения,  $R$  — расстояние между точками наблюдения и интегрирования. Согласно (13.13), продолжение  $u_n$  в пространство также вещественно.

Только в частном случае (падение плоской волны, п. 3) можно разлагать полное поле по  $u_n$ . В общем

случае надо построить *другую систему функций*. Мы используем набор функций, каждая из которых удовлетворяет условию излучения. В качестве этих функций возьмем функции, пропорциональные тому слагаемому в  $u_n$  (13.7) и (13.10), которое удовлетворяет условию излучения. Обозначим их через  $u_n^s$ ; они определены всюду через значения  $u_n$  на контуре тела  $S$  следующим образом:

$$u_n^s = \int_S u_n G dS. \quad (13.14)$$

Согласно этому определению и (13.10), в любой точке пространства справедливо соотношение

$$-\rho(1 + s_n)u_n = u_n^{s*} + s_n u_n^s. \quad (13.15)$$

Используя это соотношение, взятое на  $S$ , либо (что то же) уравнение (13.10), и учитывая при этом симметрию функции Грина  $G$ , можно показать, что для функций  $u_n$  и  $u_n^s$  имеют место следующие условия ортогональности на поверхности тела  $S$ :

$$\int_S (\rho u_n + u_n^s) u_m dS = 0 \quad (n \neq m), \quad (13.16a)$$

которые, согласно (13.15), могут быть переписаны следующим образом:

$$\int_S u_m \operatorname{Im} u_n^s dS = 0 \quad (n \neq m). \quad (13.16b)$$

Перейдем теперь к построению *решения задачи дифракции* (13.1), (13.2). Искомое поле  $U$  представим всюду в виде ряда

$$U = U^0 + \sum_n A_n u_n^s, \quad (13.17)$$

где  $U^0$  — поле источников  $f$  в пустоте:

$$\Delta U^0 + k^2 U^0 = f. \quad (13.18)$$

Как мы увидим в главе IV, при исследовании высокочастотных открытых резонаторов целесообразно использовать имеющуюся во всех вариантах обобщенного

метода возможность брать в качестве  $U^0$  поле, возникающее при дифракции на каком-либо вспомогательном теле. Здесь мы выпишем выражения для  $A_n$  при простейшем определении  $U^0$ .

Согласно определению  $U^0$  и  $u_n^s$ , ряд (13.17) удовлетворяет уравнению (13.1), граничному условию (13.2a) и условиям излучения. Удовлетворим оставшемуся условию (13.2b) и учтем при этом, что, согласно (13.14),

$$\frac{\partial u_n^{s+}}{\partial N} - \frac{\partial u_n^{s-}}{\partial N} = -u_n \Big|_S. \quad (13.19)$$

Тогда получим

$$\sum_n A_n (\rho u_n + u_n^s) = -U^0 \Big|_S. \quad (13.20)$$

Используя условия ортогональности (13.16a), найдем искомые коэффициенты ряда

$$A_n = - \frac{\int_S U^0 u_n dS}{\int_S (\rho u_n + u_n^s) u_n dS}. \quad (13.21a)$$

Учитывая (13.15), эту формулу можно переписать в виде

$$A_n = - \frac{(1 + s_n)}{2i} \cdot \frac{\int_S U^0 u_n dS}{\int_S u_n \operatorname{Im} u_n^s dS}. \quad (13.21b)$$

Отметим, что в выражения (13.21) входят как функции  $u_n^s$ , так и функции  $u_n$ .

Как видно из (13.21), для любого фиксированного номера  $n$  резонанс происходит при частотах, на которых  $\operatorname{Im} u_n^s$  становится малой. При этом, согласно (13.15), функции  $u_n^s$  и  $-\rho u_n$  близки, а это означает (см. (13.19)), что  $u_n^s$  приближенно удовлетворяет истинному граничному условию (13.2b).

Задача дифракции (13.1), (13.2) решена формулами (13.17), (13.18), (13.13), (13.14) и (13.21).

2. Рассмотрим теперь применение  $s$ -метода к задаче *дифракции на диэлектрическом теле*. Пусть задача

состоит в отыскании удовлетворяющего условию излучения решения волнового уравнения

$$\Delta U + k^2 \epsilon U = f, \quad (13.22)$$

где  $\epsilon$  — непрерывная функция координат, отличная от единицы в конечной области. Напомним, что двумерный вариант сформулированной задачи соответствует  $E$ -поляризации ( $U = E_z$ ), а пространственный случай не имеет электродинамического аналога. Собственные функции соответствующей однородной задачи мы определим как нетривиальные решения уравнения

$$\Delta u_n + k^2 \epsilon u_n = 0, \quad (13.23)$$

удовлетворяющие при  $r \rightarrow \infty$  асимптотическому условию (13.5) (либо (13.6)), через которое вводятся собственные значения  $s_n$ . Сведем эту однородную задачу к интегральному уравнению. Будем искать  $u_n$  в виде суммы двух *объемных* потенциалов, в которых интегрирование распространено на область, занятую телом ( $\epsilon \neq 1$ ):

$$u_n = \int v_n (G^* + s_n G) dV, \quad (13.24)$$

где  $G$  — функция Грина пустоты. Это представление обеспечивает выполнение асимптотического условия (13.5), (13.6) при произвольной вещественной (с точностью до постоянного множителя) функции  $v_n$ . Эту функцию мы определим из требования, чтобы  $u_n$  удовлетворяла уравнению (13.23). Применяя к (13.24) оператор  $(\Delta + k^2 \epsilon)$ , получим

$$v_n = -\frac{k^2 (\epsilon - 1)}{1 + s_n} u_n. \quad (13.25)$$

Подставляя это значение  $v_n$  в (13.24), найдем

$$(1 + s_n) u_n = k^2 \int (1 - \epsilon) u_n (G^* + s_n G) dV. \quad (13.26)$$

Выражение (13.26) представляет собой *искомое интегральное уравнение*<sup>1)</sup> для  $u_n$ , если точка наблюдения

<sup>1)</sup> Интегральное уравнение (13.26) имеет собственное значение  $s = -1$ , соответствующие ему собственные функции не содержатся в дифференциальной постановке. Если все источники в задаче дифракции расположены в  $V^-$ , то эти функции не участвуют в разложении (см. § 39 Дополнения).

находится в диэлектрике, и формулу для вычисления  $u_n$  вне тела по ее значениям в области с  $\epsilon \neq 1$ .

При  $\text{Im } \epsilon = 0$  интегральное уравнение (13.26) обладает теми же свойствами, что и уравнение (13.10) при  $\text{Im } \rho = 0$ . А именно, его собственные значения по модулю равны единице, а собственные функции можно считать вещественными. Поэтому (13.26) является вещественным уравнением и переписывается для трехмерной задачи в виде

$$4\pi u_n = k^2 \int (\epsilon - 1) u_n \frac{\cos kR + \lambda_n \sin kR}{R} dV, \quad (13.27a)$$

а для двумерной

$$-4u_n = k^2 \int (\epsilon - 1) u_n (N_0(kR) - \lambda_n J_0(kR)) dV, \quad (13.27b)$$

где  $R$  и  $\lambda_n$  имеют тот же смысл, что и в формулах (13.13).

Введем далее, как и в предыдущем пункте, функции  $u_n^s$ , определив их всюду формулой

$$u_n^s = k^2 \int (1 - \epsilon) u_n G dV, \quad (13.28)$$

так что, согласно (13.26),

$$(1 + s_n) u_n = u_n^{s*} + s_n u_n^s. \quad (13.29)$$

Отметим свойства функций  $u_n^s$ . Очевидно, что все они, согласно определению, удовлетворяют условиям излучения. Легко видеть, применяя оператор  $(\Delta + k^2 \epsilon)$  к (13.28), что функции  $u_n^s$  удовлетворяют дифференциальному соотношению

$$\Delta u_n^s + k^2 \epsilon u_n^s = k^2 (1 - \epsilon) (u_n - u_n^s). \quad (13.30)$$

Наконец, используя симметрию  $G$  в (13.26), можно показать, что для  $u_n$  и  $u_n^s$  имеют место следующие условия ортогональности:

$$\int (\epsilon - 1) (u_n - u_n^s) u_m dV = 0 \quad (n \neq m). \quad (13.31)$$

Если теперь мы представим решение задачи дифракции в виде ряда (13.17), где  $u_n^s$  определяется формулой

(13.28), то условия излучения будут удовлетворяться этим рядом почленно, а подстановка в уравнение (13.22) при учете (13.30) дает

$$\sum_n A_n (\epsilon - 1) (u_n - u_n^s) = (\epsilon - 1) U^0. \quad (13.32)$$

Используя в (13.32) ортогональность (13.31), получим выражение для коэффициентов  $A_n$ :

$$A_n = \frac{\int (\epsilon - 1) U^0 u_n dV}{\int (\epsilon - 1) (u_n - u_n^s) u_n dV}. \quad (13.33a)$$

Используя (13.29), эту формулу можно переписать в виде

$$A_n = -\frac{(1 + s_n)}{2i} \frac{\int (\epsilon - 1) U^0 u_n dV}{\int (\epsilon - 1) u_n \operatorname{Im} u_n^s dV}. \quad (13.33b)$$

Формулы (13.17), (13.18), (13.27), (13.33) дают решение задачи дифракции на диэлектрическом теле.

Из выражений (13.33) следует, что резонанс наступает, когда функции  $u_n^s$  и  $u_n$  становятся близкими ( $\operatorname{Im} u_n^s$  мала); согласно (13.30), это означает, что  $u_n^s$  начинает приближенно удовлетворять уравнению для дифрагированного поля. Таким образом, как и всегда, резонанс проявляется при приближении условий для одной из функций, по которым ведется разложение, к условиям задачи дифракции.

Отметим наконец, что, хотя уравнения (13.26), (13.27) представляют собой интегральные уравнения по объему диэлектрического тела, однако суммы в представлении искомого поля при использовании  $s$ -метода оказываются двойными для трехмерных и однократными для двумерных задач дифракции. Это обстоятельство является следствием введения собственного значения на поверхности (в данном методе на поверхности удаленной сферы).

3. При дифракции плоской волны можно использовать иной способ построения решения, разлагая полное поле не по  $u_n^s$ , а непосредственно по собственным функциям  $u_n$  и не производя выделения первичного поля, т. е.

используя представление

$$U = \sum_n A_n u_n. \quad (13.34)$$

Способ применим как при дифракции на диэлектрическом теле, так и при дифракции на поверхности  $S$ . Поскольку формальное построение решения для этих двух задач по существу одинаково, то мы не будем их разделять, понимая в дальнейшем под функциями  $u_n$  и  $u_n^s$  либо функции, определяемые формулами (13.26), (13.28) (задача о диэлектрике), либо функции (13.10), (13.14) (задача о полупрозрачной поверхности). Отличие представления (13.34) от (13.17) состоит, во-первых, в том, что функции  $u_n$  удовлетворяют условиям задачи дифракции, которым не удовлетворяют функции  $u_n^s$  (в задаче о диэлектрике  $u_n$  удовлетворяют уравнению задачи дифракции, а в задаче о поверхности — истинным граничным условиям; соответствующие функции  $u_n^s$  этим условиям не удовлетворяют), и, во-вторых, в том, что  $u_n$  содержат приходящую волну, а  $u_n^s$  ее не содержат, в то время как при дифракции плоской волны приходящее поле присутствует всюду. Поэтому в (13.34) *нельзя*, а в (13.17) *необходимо выделять*  $U^0$ . Таким образом, если в ряде (13.17), удовлетворяющем условию излучения при любых  $A_n$ , эти коэффициенты находятся из требования выполнения уравнения (или граничных условий) задачи дифракции, то в ряде (13.34), где именно эти требования оказываются выполненными автоматически, коэффициенты  $A_n$  должны быть найдены из требования выполнения условия излучения, т. е. из условия, чтобы на больших расстояниях полное поле представлялось в виде

$$U \simeq e^{-ikz} + \frac{e^{-ikr}}{kr} \Phi(\varphi, \theta), \quad (13.35)$$

где  $\Phi(\varphi, \theta)$  — искомая диаграмма рассеяния.

Коэффициенты  $A_n$  мы будем искать из соотношений между встречными волнами на сфере достаточно большого радиуса, на которой справедливо представление (13.5). Для определения этих коэффициентов нам потребуется ортогональность собственных диаграмм  $\Phi_n$ .

Покажем, что для них имеет место эрмитова ортогональность

$$\int_{\Omega} \Phi_n \Phi_m^* d\Omega = 0 \quad (n \neq m). \quad (13.36)$$

При дифракции на диэлектрическом теле для этого применим формулу Грина (2.8) ко всему пространству для функций  $u_m$  и  $u_n^s$ . Учитывая, что  $u_n^s$  удовлетворяет уравнению (13.30), получим

$$\int_{S_{\infty}} \left( u_m \frac{\partial u_n^s}{\partial N} - u_n^s \frac{\partial u_m}{\partial N} \right) dS = k^2 \int (1 - \varepsilon) (u_n - u_n^s) u_m dV. \quad (13.37)$$

Левая часть, согласно (13.28), (13.29) и асимптотическому условию (13.5a) или (13.6a), пропорциональна  $\int_{\Omega} \Phi_n \Phi_m^* d\Omega$ , а правая равна нулю при  $n \neq m$  по (13.31); отсюда следует справедливость (13.36).

При дифракции на полупрозрачной поверхности  $S$  для доказательства (13.36) формулу Грина (2.8) для  $u_m$  и  $u_n^s$  нужно применить отдельно к  $V^+$  и к  $V^-$ , вычесть результаты и воспользоваться граничными условиями (13.4), (13.19) и непрерывностью  $u_n^s$  на  $S$ . Тогда получим

$$\int_{S_{\infty}} \left( u_m \frac{\partial u_n^s}{\partial N} - u_n^s \frac{\partial u_m}{\partial N} \right) dS = -\frac{1}{\rho} \int_S u_m (\rho u_n + u_n^s) dS, \quad (13.38)$$

откуда, согласно (13.5a) (или (13.6a)), (13.14) и (13.16), следует (13.36).

Приступим теперь к вычислению коэффициентов  $A_n$  и определению искомой диаграммы  $\Phi$ . Проиллюстрируем этот расчет на двумерной задаче. Для трехмерной задачи выпишем в конце пункта лишь окончательные формулы.

Из совпадения представлений для полного поля (13.34) и (13.35) при  $kr \gg 1$  имеем, согласно (13.6a),

$$\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \sum_n \frac{A_n \Phi_n^*}{1 + s_n} + \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}} \sum_n \frac{s_n A_n \Phi_n}{1 + s_n} = e^{-ikr \cos \varphi} + \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}} \Phi. \quad (13.39)$$

Умножая это равенство один раз на  $\Phi_m$ , а второй на  $\Phi_m^*$ , интегрируя по углу и пользуясь ортогональностью (13.36), получим

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \cdot \frac{A_m}{1 + s_m} + \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}} \sum_n \frac{s_n A_n}{1 + s_n} \int_0^{2\pi} \Phi_n \Phi_m d\varphi = \\ = \int_0^{\pi} \Phi_m e^{-ikr \cos \varphi} d\varphi + \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}} \int_0^{2\pi} \Phi \Phi_m d\varphi, \end{aligned} \quad (13.40a)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \sum_n \frac{A_n}{1 + s_n} \int_0^{2\pi} \Phi_n^* \Phi_m^* d\varphi + \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}} \cdot \frac{s_m A_m}{1 + s_m} = \\ = \int_0^{2\pi} \Phi_m^* e^{-ikr \cos \varphi} d\varphi + \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}} \int_0^{2\pi} \Phi \Phi_m^* d\varphi. \end{aligned} \quad (13.40б)$$

Для собственных диаграмм нами принята нормировка  $\int_0^{2\pi} |\Phi_n|^2 d\varphi = 1$ . Первые слагаемые в правых частях (13.40a), (13.40б) могут быть вычислены методом стационарной фазы. Они равны

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Phi_m e^{-ikr \cos \varphi} d\varphi = \\ = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \left( e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \Phi_m(\pi) + e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})} \Phi_m(0) \right) + O\left(\frac{1}{kr}\right), \end{aligned} \quad (13.41a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Phi_m^* e^{-ikr \cos \varphi} d\varphi = \\ = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \left( e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \Phi_m^*(\pi) + e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})} \Phi_m^*(0) \right) + O\left(\frac{1}{kr}\right). \end{aligned} \quad (13.41б)$$

Приравнивая теперь коэффициенты при  $\exp(ikr)$  в (13.40а), получаем формулу для  $A_n$ :

$$A_n = \sqrt{2\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} (1 + s_n) \Phi_n(\pi). \quad (13.42)$$

Если же приравнять коэффициенты при  $\exp(-ikr)$  в (13.40б), учесть при этом (13.6б) и выражение для  $A_n$ , то получим, что коэффициент Фурье разложения диаграммы  $\Phi$  в ряд по  $\Phi_n$  равен  $A_n$ :

$$\int_0^{2\pi} \Phi \Phi_n^* d\varphi = A_n. \quad (13.43)$$

Таким образом,

$$\Phi = \sqrt{2\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_n (1 + s_n) \Phi_n(\pi) \Phi_n(\varphi). \quad (13.44)$$

Последние формулы решают задачу этого пункта.

Для трехмерной задачи формулы для  $A_n$  и  $\Phi$  имеют вид

$$A_n = -2\pi i (1 + s_n) \Phi_n(\varphi, \pi), \quad (13.45)$$

$$\Phi = -2\pi i \sum_n (1 + s_n) \Phi_n(\varphi, \pi) \Phi_n(\varphi, \theta). \quad (13.46)$$

#### § 14. Металлические и полупрозрачные поверхности; уравнения Максвелла <sup>1)</sup>

Обобщение на векторный случай развитых в этой главе методов не встречает принципиальных затруднений. Как и в скалярных задачах, решение строится в виде рядов по собственным функциям некоторых однородных задач, формулировки которых отличаются лишь видом вспомогательных граничных условий на поверхности  $S$ . Собственные значения по-прежнему вводятся через эти вспомогательные условия, а коэффициенты разложения искомого поля находятся из требований вы-

<sup>1)</sup> Математические вопросы изложенного в этом параграфе метода исследуются в § 40 Дополнения.

полнения истинных граничных условий и имеют резонансный характер. Суммы в представлении решения двойные (что связано с ортогональностью собственных функций по поверхности), а не тройные, как в методе собственных частот, и, кроме того, *они не содержат градиентных слагаемых*, так как первичное поле всегда выделяется. Ряды для  $\mathbf{E}$  и для  $\mathbf{H}$  имеют *одинаковые коэффициенты*.

Мы рассмотрим в этом параграфе задачи дифракции на идеальных металлических поверхностях, а также на поверхностях, обладающих импедансными свойствами. Кроме того, будут изложены возможные обобщения на случай полупрозрачных поверхностей. Поверхности  $S$ , на которых происходит дифракция, будем считать замкнутыми (от этого ограничения можно освободиться) и не уходящими на бесконечность.

1. В задаче дифракции на металлическом теле нужно найти решение неоднородных уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - ik\mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (14.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + ik\mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(m)}, \quad (14.2)$$

удовлетворяющее на поверхности тела  $S$  граничным условиям

$$E_t = 0|_S, \quad (14.3a)$$

$$E_\tau = 0|_S, \quad (14.3б)$$

где  $t$  и  $\tau$  — взаимно перпендикулярные орты, тангенциальные к  $S$  и образующие с внешней нормалью к рассматриваемой области  $V$  правую тройку. Если задача внешняя, то поля  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  должны удовлетворять еще условию излучения (8.6).

Для построения решения этой задачи дифракции могут быть использованы различные варианты обобщенного метода. Начнем с *импедансного метода*. Построим, например, решение для внешней задачи (решение внутренней задачи проводится совершенно аналогично). Соответствующая однородная задача, порождающая систему собственных элементов для разложения искомого решения, может быть сформулирована следующим

образом. Собственные значения однородной задачи  $w_n$  мы введем с помощью вспомогательных импедансных граничных условий, которые должны выполняться на  $S$ :

$$e_{nt} - w_n h_{n\tau} = 0|_S, \quad (14.4a)$$

$$e_{n\tau} + w_n h_{nt} = 0|_S. \quad (14.4b)$$

Собственные функции должны удовлетворять в рассматриваемой области однородным уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{h}_n - i k \mathbf{e}_n = 0, \quad (14.5)$$

$$\text{rot } \mathbf{e}_n + i k \mathbf{h}_n = 0 \quad (14.6)$$

и условиям излучения на бесконечности.

Определенные таким образом функции  $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$  оказываются ортогональными в смысле

$$\int_S (e_{nt} e_{mt} + e_{n\tau} e_{m\tau}) dS = 0 \quad (n \neq m), \quad (14.7a)$$

$$\int_S (h_{nt} h_{mt} + h_{n\tau} h_{m\tau}) dS = 0 \quad (n \neq m). \quad (14.7b)$$

Эти условия легко получить, если применить лемму Лоренца

$$\int_S \{[\mathbf{e}_n \mathbf{h}_m]_N - [\mathbf{e}_m \mathbf{h}_n]_N\} dS = 0 \quad (14.8)$$

к внешней области и воспользоваться граничными условиями (14.4) на  $S$  и условиями на бесконечности

Решение задачи дифракции (14.1)–(14.3) будем искать в виде рядов по собственным функциям однородной задачи (14.4)–(14.6), выделяя при этом первичное поле  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ . Его мы определим как поле источников  $\mathbf{j}^{(e)}$ ,  $\mathbf{j}^{(m)}$  в свободном пространстве, не останавливаясь на возможных обобщениях. Если искомое электрическое поле мы запишем в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \sum_n A_n \mathbf{e}_n, \quad (14.9)$$

то, согласно (14.1), (14.2), (14.5), (14.6); магнитное поле будет представляться рядом с теми же коэффициентами

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \sum_n A_n \mathbf{h}_n. \quad (14.10)$$

Представления (14.9), (14.10) при любых коэффициентах почленно удовлетворяют уравнениям задачи дифракции (14.1), (14.2) и условиям излучения. Коэффициенты  $A_n$  находятся из требования, чтобы искомые поля удовлетворяли граничным условиям (14.3)

$$E_t^0 + \sum_n A_n e_{nt} = 0|_S, \quad (14.11a)$$

$$E_\tau^0 + \sum_n A_n e_{n\tau} = 0|_S, \quad (14.11b)$$

откуда, используя (14.4) и условия ортогональности (14.7b), находим

$$A_n = \frac{\int_S (E_t^0 h_{nt} - E_\tau^0 h_{n\tau}) dS}{w_n \int_S (h_{nt}^2 + h_{n\tau}^2) dS}. \quad (14.12)$$

Собственные функции задачи (14.4)–(14.6) позволяют также построить решение задачи дифракции на импедансной поверхности, т. е. в случае, когда вместо (14.3) на  $S$  должны выполняться условия

$$E_t - w H_\tau = 0|_S, \quad (14.13a)$$

$$E_\tau + w H_t = 0|_S. \quad (14.13b)$$

Легко показать, что при этом коэффициенты  $A_n$  в представлениях (14.10), (14.9) будут равны

$$A_n = \frac{\int_S [E_t^0 h_{n\tau} - E_\tau^0 h_{nt} - w (H_t^0 h_{n\tau} + H_\tau^0 h_{nt})] dS}{(w - w_n) \int_S (h_{nt}^2 + h_{n\tau}^2) dS}. \quad (14.14)$$

2. Для незамкнутых поверхностей решение рассмотренных выше задач дифракции можно построить иначе, разлагая дифрагированное поле по собственным функциям не одной, а *двух вспомогательных задач*, отличающихся постановкой граничных условий на  $S$ . А именно, в каждой однородной задаче собственные значения следует ввести только через одно из вспомогательных граничных условий, а другое сохранить таким же, как и



в задаче дифракции (все остальные требования к собственным функциям остаются прежними).

Итак, пусть для первой однородной задачи

$$e_{nt} - \omega_n h_{n\tau} = 0|_S, \quad (14.15a)$$

$$e_{n\tau} + \omega h_{nt} = 0|_S, \quad (14.15b)$$

для второй

$$\tilde{e}_{nt} - \omega \tilde{h}_{n\tau} = 0|_S, \quad (14.16a)$$

$$\tilde{e}_{n\tau} + \tilde{\omega}_n \tilde{h}_{nt} = 0|_S. \quad (14.16b)$$

Собственными значениями первой задачи являются числа  $\omega_n$ , а второй — числа  $\tilde{\omega}_n$ . При этом условия ортогональности для граничных условий (14.15) имеют вид

$$\int_S h_{n\tau} h_{m\tau} dS = 0 \quad (n \neq m), \quad (14.17)$$

а для (14.16)

$$\int_S \tilde{h}_{nt} \tilde{h}_{mt} dS = 0 \quad (n \neq m). \quad (14.18)$$

Для получения (14.17), (14.18) нужно применить лемму Лоренца к рассматриваемому объему, использовать граничные условия и условия излучения.

Искомые поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  представим в виде суммы двух рядов

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \sum_n A_n \mathbf{e}_n + \sum_n B_n \tilde{\mathbf{e}}_n, \quad (14.19)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \sum_n A_n \mathbf{h}_n + \sum_n B_n \tilde{\mathbf{h}}_n. \quad (14.20)$$

Здесь  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$  — по-прежнему падающее поле. Коэффициенты в рядах для  $\mathbf{E}$  и для  $\mathbf{H}$  одинаковы. Эти коэффициенты находятся из требования, чтобы разложения (14.19), (14.20) удовлетворяли граничным условиям задачи дифракции (14.13). Очевидно, что в соответствии с граничными условиями для вспомогательных задач в каждом из граничных условий (14.13) будут участвовать собственные функции только одной однородной задачи. Поэтому система уравнений для коэффициентов

разделится на две независимые системы, и мы получим

$$E_t^0 + \sum_n A_n e_{nt} = \omega \left( H_\tau^0 + \sum_n A_n h_{n\tau} \right) \Big|_S, \quad (14.21)$$

$$E_\tau^0 + \sum_n B_n \tilde{e}_{n\tau} = -\omega \left( H_t^0 + \sum_n B_n \tilde{h}_{nt} \right) \Big|_S, \quad (14.22)$$

откуда, используя граничные условия (14.15), (14.16) и условия ортогональности (14.17), (14.18), найдем коэффициенты разложений

$$A_n = \frac{1}{\omega - \omega_n} \cdot \frac{\int_S (E_t^0 - \omega H_\tau^0) h_{n\tau} dS}{\int_S h_{n\tau}^2 dS}, \quad (14.23)$$

$$B_n = \frac{1}{\tilde{\omega}_n - \omega} \cdot \frac{\int_S (E_\tau^0 + \omega H_t^0) \tilde{h}_{nt} dS}{\int_S \tilde{h}_{nt}^2 dS}. \quad (14.24)$$

Очевидно, что при  $\omega = 0$  ряды (14.19), (14.20) с коэффициентами (14.23), (14.24) дают решение задачи дифракции на металлическом теле.

3. К задачам дифракции на металлических телах и полупрозрачных экранах, а также к задачам о диэлектрических телах может быть применен метод *поверхностного электрического тока*, являющийся обобщением на векторный случай первого варианта р-метода. Этот метод состоит в том, что искомое поле  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  представляется в виде рядов по собственным функциям однородной задачи, в которой на поверхности тела  $S$  должны быть выполнены граничные условия сопряжения

$$e_{nt}^+ - e_{nt}^- = 0|_S, \quad (14.25a)$$

$$e_{n\tau}^+ - e_{n\tau}^- = 0|_S, \quad (14.25b)$$

$$\rho_n^{(e)} (h_{nt}^+ - h_{nt}^-) - e_{n\tau} = 0|_S, \quad (14.26a)$$

$$\rho_n^{(e)} (h_{n\tau}^+ - h_{n\tau}^-) + e_{nt} = 0|_S. \quad (14.26b)$$

Собственные функции  $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$  определены во всем пространстве и должны удовлетворять однородным

уравнениям Максвелла (для задачи о диэлектрике с соответствующими значениями  $\epsilon$  и  $\mu$ ) и условиями излучения. Величины  $\rho_n^{(e)}$  играют роль собственных значений однородной задачи. Обычным образом можно показать, что  $\text{Re } \rho_n^{(e)} > 0$  — это следует и из баланса энергии для однородной задачи. Собственные функции оказываются ортогональными в смысле (14.7а). Для задачи дифракции на полупрозрачном бесконечно тонком экране  $S$  с граничными условиями

$$E_t^+ - E_t^- = 0|_S, \quad (14.27а)$$

$$E_\tau^+ - E_\tau^- = 0|_S, \quad (14.27б)$$

$$\rho^{(e)}(H_t^+ - H_t^-) - E_\tau = 0|_S, \quad (14.28а)$$

$$\rho^{(e)}(H_\tau^+ - H_\tau^-) + E_t = 0|_S \quad (14.28б)$$

коэффициенты рядов (14.9), (14.10) оказываются равными

$$A_n = \frac{\rho_n^{(e)}}{\rho^{(e)} - \rho_n^{(e)}} \cdot \frac{\int_S (E_\tau^0 e_{n\tau} + E_t^0 e_{nt}) dS}{\int_S (e_{nt}^2 + e_{n\tau}^2) dS}. \quad (14.29)$$

Значение  $A_n$  для металлического тела (не обязательно бесконечно тонкого) получается из (14.29) при  $\rho^{(e)} = 0$ .

При дифракции на диэлектрическом теле также легко получить выражения для коэффициентов  $A_n$ , однако в этом случае  $\{E^0, H^0\}$  определяется (как и в скалярном случае) несколько более сложным образом.

Векторным аналогом второго варианта  $\rho$ -метода является метод поверхностного магнитного тока. Он отличается от метода поверхностного электрического тока лишь видом граничных условий однородной задачи: вместо (14.25), (14.26) на  $S$  должны выполняться условия

$$h_{nt}^+ - h_{nt}^- = 0|_S, \quad (14.30а)$$

$$h_{n\tau}^+ - h_{n\tau}^- = 0|_S, \quad (14.30б)$$

$$\rho_n^{(m)}(e_{nt}^+ - e_{nt}^-) + h_{n\tau} = 0|_S, \quad (14.31а)$$

$$\rho_n^{(m)}(e_{n\tau}^+ - e_{n\tau}^-) - h_{nt} = 0|_S. \quad (14.31б)$$

Для собственных значений  $\rho_n^{(m)}$  вновь получается  $\text{Re } \rho_n^{(m)} > 0$ ; ортогональность здесь имеет форму (14.7б).

С помощью этого метода можно строить решения задач дифракции на диэлектрических телах и на полупрозрачных экранах. Заметим, наконец, что, как и в п. 2, можно строить решение различных задач дифракции, разлагая искомое поле в ряд по собственным функциям не одной, а двух однородных задач, в каждой из которых собственное значение вводится через одно (различное для обеих задач) граничное условие, а остальные остаются такими же, как и в истинной задаче.

Обобщая метод п. п. 2, 3 этого параграфа, можно построить решение уравнений дифракции на незамкнутой поверхности с более общими условиями

$$E_t^+ - E_t^- = \alpha(H_\tau^+ + H_\tau^-), \quad E_t^+ + E_t^- = \beta(H_\tau^+ - H_\tau^-),$$

$$E_\tau^+ - E_\tau^- = \tilde{\alpha}(H_t^+ + H_t^-), \quad E_\tau^+ + E_\tau^- = \tilde{\beta}(H_t^+ - H_t^-).$$

Для этого надо рассматривать четыре однородные задачи, в каждой из которых один из коэффициентов  $\alpha, \dots$  заменен собственным значением. Решение находится в виде суммы четырех рядов с коэффициентами, одинаковыми для  $E$  и  $H$ , и т. д. Мы не будем приводить соответствующих формул.

\* \* \*

В этой главе обобщенный метод собственных колебаний применен к задачам дифракции на телах (диэлектрических или металлических) с границами раздела или на экранах общего типа (импедансных, полупрозрачных и т. д.). Задачи для собственных функций содержат спектральный параметр в граничных условиях, и эти функции ортогональны на границах. Условия на бесконечности рассматриваются также как граничные. В задачах о высокочастотных резонаторах нерезонансный фон может быть эффективно просуммирован выбором поля  $U^0$  в виде решения вспомогательной задачи о дифракции на каком-либо более простом теле.

практических вычислениях будет использован метод Ритца. Эта процедура для наших задач строго не обоснована, но в ее пользу говорит опыт проведенных расчетов.

### § 15. Собственное значение в уравнении

В этом параграфе будут получены стационарные функционалы для собственных значений однородных задач, поставленных в первой главе. Мы рассмотрим задачи, возникающие при исследовании закрытых резонаторов, частично заполненных однородным диэлектриком, как с идеальными стенками, так и с потерями в стенках (внутренние задачи), а также при наличии излучения (внешние задачи). Будут рассмотрены также системы с неоднородным диэлектрическим заполнением.

1. Начнем с простейшей однородной задачи, возникающей при исследовании закрытого резонатора, частично заполненного однородным диэлектриком (§ 3). Роль собственного значения в этой задаче играет параметр  $\epsilon$  (диэлектрическая проницаемость), а частота  $k$  считается заданной.

Требуется найти такие значения  $\epsilon$ , при которых существует нетривиальное решение уравнения

$$\Delta u + k^2 \epsilon u = 0 \text{ в } V^+, \quad (15.1a)$$

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } V^- \quad (15.1b)$$

с условием непрерывности функции  $u$  и ее нормальной производной на границе диэлектрика  $S_\epsilon$ :

$$u^+ - u^- |_{S_\epsilon} = 0, \quad (15.2a)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \Big|_{S_\epsilon} = 0, \quad (15.2b)$$

и условием на границе резонатора  $S$ :

$$u |_S = 0. \quad (15.3)$$

Здесь мы будем рассматривать лишь однородные задачи, и поэтому индекс  $n$ , которым отмечается решение однородной задачи в отличие от решения задачи дифракции, в постановке задачи опущен. Это вызвано также и тем, что одно и то же уравнение будет

## Глава III

### ВАРИАЦИОННЫЙ АППАРАТ

Эта глава посвящена вариационным методам решения однородных задач, возникающих в обобщенном методе собственных колебаний. Мы будем рассматривать однородные задачи в дифференциальной постановке и выпишем для них функционалы, стационарные на решениях этих задач. Во внутренних задачах стационарные функционалы того или другого варианта обобщенного метода получаются просто, если известен функционал (удовлетворяющий некоторым дополнительным требованиям) для соответствующей однородной задачи в  $k$ -методе. Результат легко обобщается на внешние задачи. Стационарность функционалов на собственных функциях (и только на них) доказана.

Применение вариационного аппарата к решению однородных интегральных уравнений, возникающих в обобщенном методе, здесь рассматриваться не будет. Этот аппарат общеизвестен; он приводит к функционалам, содержащим двукратные интегралы по рассматриваемой области или по ее границе.

Как и в обычном  $k$ -методе, вариационный аппарат предназначен в основном для поиска собственных значений однородных задач, а для определения собственных функций он менее удобен. Но поскольку при резонансе соответствующее собственное значение является определяющим в амплитуде дифрагированного поля, то для описания резонансных свойств системы достаточно знать лишь собственные значения. Исходя из этого, мы будем рассматривать однородную задачу как задачу на поиск собственных значений. Предполагается, что при

использоваться при рассмотрении различных постановок однородных задач.

Для того чтобы получить стационарный функционал для собственных значений сформулированной задачи, мы будем исходить из функционала для аналогичной задачи в  $k$ -методе и произведем над этим функционалом некоторые преобразования.

В  $k$ -методе рассматривается такая же, как только что сформулированная, однородная задача, с той лишь разницей, что  $\epsilon$  считается заданным, а роль собственного значения играет  $k$ . Известен функционал

$$K(u) = \frac{\int_V (\nabla u)^2 dV}{\int_{V^-} u^2 dV + \epsilon \int_{V^+} u^2 dV} \quad (V = V^+ + V^-), \quad (15.4)$$

стационарный на собственных функциях однородной задачи  $k$ -метода. Точнее, если некоторая непрерывная внутри  $V$  функция  $u$ , удовлетворяющая граничному условию (15.3), отличается от собственной функции  $u_n$  на малую величину порядка  $\mu$ :

$$u = u_n + \mu\phi, \quad (15.5)$$

то

$$K(u) = K(u_n) + O(\mu^2). \quad (15.6)$$

Для закрытых резонаторов можно говорить об экстремальных свойствах функционала, но мы ограничимся лишь стационарностью, поскольку в дальнейшем будут рассматриваться комплексные функционалы, для которых экстремальность не имеет смысла.

При выполнении (15.2а) условие непрерывности производной (15.2б) является для функционала (15.4) естественным, т. е. допустимые функции могут ему не удовлетворять. Если бы вместо (15.3) в однородной задаче стояло условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial N} \right|_S = 0, \quad (15.7)$$

то и это условие тоже не нужно было бы накладывать на допустимые функции.

Стационарные значения функционала (15.4) являются квадратами собственных значений

$$K(u_n) = k_n^2. \quad (15.8)$$

Задачу о стационарности (15.4) можно заменить задачей о стационарности числителя при равенстве знаменателя единице. К получающейся задаче об условной стационарности можно применить метод множителей Лагранжа, состоящий в том, что строится новый функционал, равный сумме числителя (15.4) и знаменателя, умноженного на некоторый множитель. Новый функционал может достигать стационарности лишь при некоторых значениях этого множителя, и эти значения совпадают со значениями функционала (15.4) в стационарных точках. Так как стационарные значения (15.4) равны  $k_n^2$ , то в новом функционале мы сразу обозначим множитель Лагранжа через  $k^2$ .

Таким образом, для определения  $k_n$  надо варьировать функционал

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_{V^-} u^2 dV - k^2 \epsilon \int_{V^+} u^2 dV. \quad (15.9)$$

Он стационарен при  $k = k_n$ , и стационарность достигается на тех же собственных функциях  $u_n$ . В стационарных точках  $L(u)$  принимает нулевые значения.

Хотя (15.9) построен в предположении, что в однородной задаче  $\epsilon$  задано, а собственным значением считается  $k$ , однако он применим и для  $\epsilon$ -метода, т. е. его собственными значениями можно считать  $\epsilon_n$  при заданном  $k$ . Действительно, подставляя в (15.9) вместо  $u$  функцию  $u_n + \mu\phi$  и вычисляя первую вариацию  $\delta L(u)$ , получим (здесь и далее в  $\delta L$  опущен множитель  $\mu$ )

$$\delta L(u) = -2 \left[ \int_{V^-} \phi (\Delta u_n + k^2 u_n) dV + \int_{V^+} \phi (\Delta u_n + k^2 \epsilon u_n) dV \right]. \quad (15.10)$$

Функция  $\phi$  считается непрерывной на  $S_\epsilon$  и равной нулю на  $S$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial N}$  может быть на  $S_\epsilon$  разрывной. Для обращения  $\delta L$  в нуль при произвольных  $\phi$  (условие стационарности) достаточно, чтобы удовлетворялось уравнение (15.1),

независимо от того, какой из входящих в него параметров ( $k$  или  $\epsilon$ ) является собственным значением.

Если бы нам был известен функционал (15.9) и мы хотели найти функционал (15.4) для квадратов собственных значений  $k_n$ , то для этого достаточно было бы приравнять  $L(u)$  нулю, разрешить это уравнение относительно  $k^2$  и рассматривать правую часть как функционал от  $u$ . Аналогично, приравнивая  $L(u)$  нулю и разрешая относительно  $\epsilon$ , получим искомый функционал для  $\epsilon$ -метода

$$E(u) = \frac{\int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_{V^-} u^2 dV}{k^2 \int_{V^+} u^2 dV}. \quad (15.11)$$

Если к (15.11) применить описанный выше метод множителей Лагранжа, то мы придем вновь к (15.9), где роль неопределенного множителя Лагранжа будет играть буква  $\epsilon$ . Таким образом, функционал  $E(u)$  стационарен на собственных функциях однородной задачи (15.1)—(15.3), как задачи на собственные значения  $\epsilon$ . Стационарность (15.11) можно проверить и непосредственно без использования свойств функционала (15.9).

Формально (15.11) можно получить сразу из (15.4), заменяя там  $K(u)$  на  $k^2$ , разрешая относительно  $\epsilon$  и заменяя  $\epsilon$  на  $E(u)$ . Возможность такой формальной процедуры объясняется по существу тем, что на допустимые функции как для (15.4), так и для (15.11) не накладывались никакие ограничивающие условия, содержащие параметры  $k$  или  $\epsilon$ . Это соображение будет использовано и далее в этой главе при построении стационарных функционалов для других вариантов обобщенного метода.

Численные методы можно применять как к (15.4) или (15.11), так и непосредственно к (15.9). При этом, например, метод Ритца удобнее применять сразу к (15.9). Очевидно, что применение метода Ритца к функционалу (15.9) приведет к одному и тому же уравнению как в  $k$ -методе, так и в  $\epsilon$ -методе. Лишь искомой величиной в этом уравнении следует в одном случае считать  $k$ , а в другом  $\epsilon$ .

Из стационарности функционала на собственных функциях однородной задачи, вообще говоря, не следует, что любая функция, на которой этот функционал стационарен, будет собственной функцией задачи; стационарность функционала является лишь *необходимым* условием. Можно, однако, показать, что полученные выше функционалы обладают и свойством достаточности, или, что то же самое, что дифференциальное уравнение однородной задачи является для этих функционалов уравнением Эйлера. Это доказательство мы приведем в § 17 для более общего функционала, из которого (15.9) (и другие функционалы такого типа в этой главе) получается как частный случай. Там же будут выписаны слагаемые, которые нужно добавить к функционалу, чтобы сделать те или другие граничные условия естественными.

2. Вариационный аппарат применим для  $\epsilon$ -метода также и в случае, когда однородная задача описывает систему с потерями. Напомним, что в  $\epsilon$ -методе вспомогательный резонатор (или вспомогательное тело) в однородной задаче электрических потерь не имеет, так что речь идет о потерях в стенках. При этом граничное условие (15.3) должно быть заменено условием импедансного типа

$$u + w \frac{\partial u}{\partial N} \Big|_S = 0 \quad (15.12)$$

с комплексным  $w$ . Вообще говоря,  $w$  может быть переменным на  $S$ . Для однородной задачи с таким условием результат п. 1 сохранится, если в числитель (15.4) и к правой части (15.9), а также в числитель (15.11) дописать некоторый поверхностный интеграл, обеспечивающий стационарность этих функционалов. При этом и допустимые функции должны удовлетворять условию (15.12).

Существует, однако, такой вид этого дополнительного поверхностного интеграла, при котором условие (15.12) является *естественным*. Регулярный метод построения таких поверхностных интегралов будет описан в следующем параграфе. Здесь же мы сразу выпишем нужное дополнительное слагаемое:

$$\int_S \frac{u^2}{w} dS. \quad (15.13)$$

Собственные функции рассматриваемой задачи должны быть комплексными из-за условия (15.12). Это же относится и к допустимым функциям. Получающиеся функционалы комплексны, как комплексны и искомые собственные значения задачи (см. § 4).

3. Применение  $\epsilon$ -метода к внешней задаче дифракции (например, диэлектрическое тело в пустоте) приводит к однородной задаче (15.1), (15.2) и — вместо (15.3) — к условию излучения (2.23) на бесконечности. Возможны и комбинации условия излучения с условиями типа (15.3) или (15.12) и дополнительным условием Майкснера на ребре — для задач с незамкнутыми границами.

Функционал (15.4) теряет смысл для внешних задач, поскольку его стационарность могли бы обеспечивать лишь функции, экспоненциально возрастающие на бесконечности (собственные функции однородной задачи в  $k$ -методе), а для таких функций входящие в (15.4) интегралы расходятся. Нельзя в  $k$ -методе пользоваться и функционалом (15.9). Однако в  $\epsilon$ -методе как функционалом (15.9), так и получающимся из него функционалом (15.11) можно пользоваться также и для внешних задач — с уточнением, которое мы сейчас сформулируем.

Условие излучения (2.23) может быть записано как асимптотическая форма импедансного условия (15.12) при  $\omega = -i/k$ . Поэтому, во-первых, допустимые функции должны удовлетворять условию излучения. Во-вторых, подобно тому, как для задач о резонаторе с импедансом надо к (15.9) добавлять интеграл по поверхности  $S$ , для рассматриваемой в этом пункте задачи надо, как оказывается, добавлять интеграл от  $u \frac{\partial u}{\partial N}$ , взятый по бесконечно удаленной сфере.

Точнее, можно показать, что первая вариация функционала

$$L_R(u) = \int_{V^+} [(\nabla u)^2 - k^2 \epsilon u^2] dV + \\ + \int_{V^-} [(\nabla u)^2 - k^2 u^2] dV + \int_{S_R} u \frac{\partial u}{\partial N} dS \quad (15.14a)$$

(где под  $V^-$  подразумевается область, ограниченная снаружи сферической поверхностью радиуса  $R$ ) на собственной функции однородной задачи имеет порядок  $1/R$ . Поэтому первая вариация функционала

$$L(u) = \lim_{R \rightarrow \infty} L_R(u) \quad (15.14b)$$

равна нулю, т. е.  $L(u)$  является искомым функционалом.

Вычисление его может быть упрощено. Интеграл по  $V^-$  в (15.14a) имеет лишь одно неисчезающее при  $R \rightarrow \infty$  слагаемое. Оно пропорционально  $\exp(-2ikR)$ . Это слагаемое компенсируется интегралом по  $S_R$  и в  $L(u)$  не входит. Структура  $L_R(u)$  такова, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} L_R(u) = \lim_{\text{Im } k \rightarrow -0} L_k(u),$$

где

$$L_k(u) = \int_{V^+} [(\nabla u)^2 - k^2 \epsilon u^2] dV + \int_{V^-} [(\nabla u)^2 - k^2 u^2] dV. \quad (15.14b)$$

Здесь  $V^-$  — бесконечная область и  $\text{Im } k < 0$ . Таким образом, для вычисления  $L(u)$  надо положить  $k$  комплексным ( $\text{Im } k < 0$ ), записать  $L(u)$  без поверхностного интеграла и распространить  $V^-$  до бесконечности. Вычислив интеграл по  $V^-$ , следует затем опять положить  $k$  вещественным. Ниже, вводя функционалы для внешних задач, мы вообще не будем включать в них поверхностные интегралы типа последнего слагаемого в (15.14a) и писать функционалы в форме  $\lim_{R \rightarrow \infty} L_R(u)$ , а будем считать, что интегралы по бесконечной области вычисляются описанным выше приемом.

4. Вернемся к задаче о закрытом резонаторе. В более общем, чем в п. 1, случае, когда  $\epsilon$  является непрерывной во всем замкнутом объеме  $V$  функцией, одним из простейших вариантов однородной задачи (см. § 5, п. 1) является уравнение

$$\Delta u + k^2 \{1 + \sigma [\epsilon(r) - 1]\} u = 0 \quad (15.15)$$

с условием (15.3) на границе  $S$ . Здесь собственным значением считается  $\sigma$  при заданном  $k$ . Очевидно, что (15.15) переходит в уравнение  $k$ -метода для той же исходной задачи дифракции, если положить  $\sigma = 1$  и

считать собственным значением  $k$ . Как и раньше, мы сначала напишем функционал для  $k$ -метода, а затем из него получим функционалы для собственных значений  $\sigma_n$ . Чтобы это можно было сделать, в функционале для  $k_n$  нужно сохранить параметр  $\sigma$ , а не заменять его единицей.

Функционал для  $k$ , как собственного значения задачи (15.15), (15.3), при любом фиксированном  $\sigma$  имеет вид

$$K(u) = \frac{\int_V (\nabla u)^2 dV}{\int_V u^2 dV + \sigma \int_V (\epsilon - 1) u^2 dV}. \quad (15.16)$$

Это легко проверить, рассматривая (15.16) как очевидное обобщение функционала (15.4) или применяя прием, описанный в конце параграфа.

Тем же способом, что и при переходе от (15.4) к (15.9), получим

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \left[ \int_V u^2 dV + \sigma \int_V (\epsilon - 1) u^2 dV \right]. \quad (15.17)$$

Выписав первую вариацию (15.17), можно, аналогично п. 2, проверить непосредственным вычислением, что этот функционал стационарен на собственных функциях независимо от того, какой из параметров ( $k$  или  $\sigma$ ) считается собственным значением. В стационарных точках (15.17) принимает нулевые значения. Разумеется, как для (15.16), так и для (15.17) допустимые функции должны удовлетворять граничному условию (15.3) на  $S$ .

Можно выписать явное выражение функционала для собственных значений  $\sigma_n$  в виде отношения квадратичных функционалов. Для этого, как и раньше, нужно приравнять правую часть (15.17) нулю и разрешить получающееся уравнение относительно  $\sigma$ . В результате получим

$$\Sigma(u) = \frac{\int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV}{k^2 \int_V (\epsilon - 1) u^2 dV}. \quad (15.18)$$

Стационарность (15.18) на собственных функциях нашей однородной задачи, как задачи на собственные значения  $\sigma_n$ , легко проверить непосредственно. Это, однако, не требуется, так как применение к (15.18) метода множителей Лагранжа приводит к (15.17), если множитель Лагранжа обозначить буквой  $\sigma$ .

Заметим, что если  $\epsilon(\mathbf{r})$  является кусочно-непрерывной функцией, а собственные функции должны быть непрерывны вместе со своими нормальными производными на границах разрыва  $\epsilon$ , то все результаты настоящего пункта сохраняются. Допустимые функции по-прежнему должны быть лишь непрерывны во всем рассматриваемом объеме, включая границы разрыва  $\epsilon(\mathbf{r})$ .

Мы не будем подробно останавливаться на случае, когда в стенках резонатора есть потери, так как это усложнение приводит лишь к изменению граничного условия на  $S$ . Это новое условие типа (15.12) не содержит параметра  $\sigma$  и потому может быть наложено на допустимые функции. Как и в п. 3, для этого случая функционал (15.17), а также числители (15.16) и (15.18) должны быть дополнены слагаемым (15.13).

При наличии же излучения (внешняя задача) функционал (15.16) теряет смысл, но для задачи (15.15) с собственным значением  $\sigma$  функционалы (15.17) и (15.18) сохраняются в том же смысле, что и в п. 3. Собственные функции этой задачи должны удовлетворять условию излучения, и это условие должно быть наложено и на допустимые функции.

5. Другим простейшим однородным уравнением, возникающим при применении  $\epsilon$ -метода к задаче с переменным  $\epsilon(\mathbf{r})$ , является уравнение (см. (5.40))

$$\Delta u + \bar{k}^2 \epsilon(\mathbf{r}) u = 0 \text{ в } V^+, \quad (15.19a)$$

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } V^- \quad (15.19b)$$

с собственным значением  $\bar{k}$ . Здесь  $V^-$  — та часть объема, в которой  $\epsilon \equiv 1$ . На границе областей  $V^+$  и  $V^-$  собственные функции этого уравнения должны быть непрерывны вместе со своими нормальными производными, а на границе резонатора — удовлетворять условию (15.3) (для идеального металла) или (15.12) (при наличии потерь в стенках). Для внешних задач условие на

$S$  заменяется условием излучения; в этом случае область  $V^+$  должна оставаться, как и прежде, конечной.

Не повторяя весь путь получения стационарных функционалов для поставленной задачи, выпишем их окончательный вид (при условии (15.3))

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_{V^-} u^2 dV - \bar{k}^2 \int_{V^+} \epsilon u^2 dV, \quad (15.20)$$

$$\bar{K}(u) = \frac{\int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_{V^-} u^2 dV}{\int_{V^+} \epsilon u^2 dV}. \quad (15.21)$$

При условии (15.12) на  $S$  к (15.20), а также к числителю в (15.21) должно быть добавлено слагаемое (15.13).

Оба функционала стационарны на собственных функциях рассматриваемой задачи; стационарность (15.20) имеет место лишь при  $\bar{k}$ , равном собственному значению  $\bar{k}_n$ . В стационарных точках (15.20) принимает нулевые значения, а (15.21) — значения, равные соответствующим  $\bar{k}_n^2$ . Допустимые функции должны удовлетворять всем граничным условиям (для внешних задач — и условию излучения). Может нарушаться лишь условие непрерывности нормальных производных на границах разрыва  $\epsilon(\mathbf{r})$ .

6. Рассмотрим, наконец, однородную задачу, сформулированную в п. 4 § 6 (вторая поляризация). Ограничимся случаем, когда  $\epsilon = \text{const}$  в  $V^+$ . *Собственное значение  $\epsilon$  входит в такой задаче как в уравнение, так и в условие на границе  $S_\epsilon$  диэлектрика.* Как и раньше, начнем со случая закрытого резонатора с идеальными стенками.

Итак, пусть ищется  $\epsilon$ , при котором существует решение уравнения (15.1) с условиями (15.2а) и

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \Big|_{S_\epsilon} = 0 \quad (15.22)$$

на границе  $S_\epsilon$  диэлектрика и условием (15.7) на границе резонатора  $S$ . Последнее условие для всех строящихся здесь функционалов естественно.

Функционал для  $k$ -метода в виде (15.4), из которого мы до сих пор исходили, оказывается теперь непригодным. Он не стационарен на собственных функциях задачи с условием (15.22) даже при дополнительном требовании, чтобы этому условию удовлетворяли допустимые функции. По причинам, которые будут объяснены в конце § 16, никакие дополнительные поверхностные интегралы не обеспечивают стационарности (15.4) на собственных функциях задачи с условием (15.22).

Исходя из соображений, развитых в конце этого пункта, можно построить *другой*, отличный от (15.4), функционал

$$K(u) = \frac{\frac{1}{\epsilon} \int_{V^+} (\nabla u)^2 dV + \int_{V^-} (\nabla u)^2 dV}{\int_V u^2 dV}, \quad (15.23)$$

обладающий стационарными свойствами по отношению к задаче  $k$ -метода с условием (15.22). Это условие не нужно накладывать на допустимые функции — оно является для (15.23) *естественным*, подобно тому, как (15.26) было естественным для (15.4). Это легко проверяется прямым вычислением первой вариации. Класс допустимых функций должен содержать также функции с конечными разрывами нормальной производной на  $S_\epsilon$ , поскольку нормальные производные самих собственных функций разрывны на  $S_\epsilon$ .

Из (15.23) просто выводятся искомые стационарные функционалы  $\epsilon$ -метода для задачи с граничными условиями (15.2а), (15.22) на  $S_\epsilon$ :

$$L(u) = \frac{1}{\epsilon} \int_{V^+} (\nabla u)^2 dV + \int_{V^-} (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV, \quad (15.24)$$

$$E(u) = \frac{\int_{V^+} (\nabla u)^2 dV}{k^2 \int_V u^2 dV - \int_{V^-} (\nabla u)^2 dV}. \quad (15.25)$$

Допустимые функции для этих функционалов должны



удовлетворять на  $S_\varepsilon$  условию (15.2а), и хотя бы часть из них должна иметь разрыв нормальной производной. Эти формулы имеют тот же смысл, что и (15.9), (15.11). Обобщение на внешнюю задачу и на случай, когда есть потери в стенках, такое же, как и для (15.9) и (15.11).

Остановимся вкратце на выводе выражения (15.23). Для этого будем исходить из уравнения с гладкой непрерывной функцией  $\varepsilon(\mathbf{r})$ :

$$\nabla \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla u \right) + k^2 u = 0, \quad (15.26)$$

которое в пределе, для кусочно-постоянной функции  $\varepsilon$ , приводит к граничным условиям (15.2а), (15.22). Для того чтобы получить стационарный функционал для однородной задачи  $k$ -метода с таким уравнением, надо умножить это уравнение на  $u$ , преобразовать произведение  $u$  на дивергенцию по формуле

$$u \nabla \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla u \right) = - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla u)^2 + \nabla \left( \frac{1}{\varepsilon} u \nabla u \right) \quad (15.27)$$

и проинтегрировать по всему объему. Отбросив получающийся при этом интеграл по границе  $S$ , получим функционал

$$K(u) = \frac{\int_V \frac{1}{\varepsilon} (\nabla u)^2 dV}{\int_V u^2 dV}. \quad (15.28)$$

Этот функционал оказывается стационарным на решениях уравнения (15.26). В пределе, для кусочно-постоянной функции  $\varepsilon$ , (15.28) переходит в (15.23). Разумеется, функционал (15.4) можно было бы строить точно так же, т. е. исходя из уравнения

$$\Delta u + k^2 \varepsilon u = 0 \quad (15.29)$$

с непрерывным  $\varepsilon$ .

Приведенное рассуждение не доказывает центрального для этого пункта обстоятельства — что граничное условие (15.22) естественно для функционала (15.23). Однако здесь устанавливается связь этого функционала

именно с этим граничным условием; эта связь состоит в том, что (15.23) и (15.22) получаются предельным переходом из одного и того же уравнения (15.26) (как (15.4) и (15.26) — предельным переходом из (15.29)). Естественность же граничных условий проверяется прямым вычислением первой вариации.

## § 16. Собственное значение в граничных условиях

В этом параграфе будут рассмотрены однородные задачи, содержащие собственное значение в граничном условии. Подобная ситуация встречалась уже в конце предыдущего параграфа. Однако там собственное значение входило как в граничное условие, так и в уравнение. Это уравнение вместе с граничным условием получалось предельным переходом из более общего уравнения, когда спектральный параметр не содержался в граничном условии. Последнее обстоятельство было решающим при построении функционалов — при этом использовался тот же предельный переход. По существу все это было необходимо для получения такого исходного функционала  $k$ -метода, у которого класс допустимых функций не был бы ограничен условиями, содержащими параметр — собственное значение обобщенного метода. Другими словами, граничное условие с параметром должно быть естественным для функционала  $k$ -метода. Только в этом случае возможны формальные преобразования этого функционала.

Здесь мы будем добиваться естественности граничных условий с параметром добавлением к функционалу некоторых поверхностных интегралов, и на поиск этих интегралов будет обращено основное внимание в этом параграфе. После того, как соответствующая форма функционала  $k$ -метода будет найдена, функционалы для обобщенного метода будут получаться формальной процедурой, подробно описанной в предыдущем параграфе. Обобщение на внешние задачи ничем не отличается от описанного в п. 3 того же параграфа.

1. Начнем с однородной задачи  $\omega$ -метода. Один из видов стационарного функционала для этой задачи в случае закрытого резонатора известен давно. Соответствующий функционал  $k$ -метода, из которого этот

известный функционал может быть получен, рассмотрен в п. 2 § 15, где приведено слагаемое (15.13), делающее импедансное граничное условие естественным. Здесь мы приведем вывод этого функционала, чтобы продемонстрировать общий прием, который будет использован в этом параграфе. Этот прием позволяет получить и другой (отличный от упомянутого) функционал для собственных значений  $\omega$ -метода.

Итак, пусть внутри некоторой замкнутой области  $V$  выполняется уравнение

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (16.1)$$

с условием

$$u + \omega \frac{\partial u}{\partial N} \Big|_S = 0 \quad (16.2)$$

на границе  $S$  этой области (нормаль внешняя). Собственным значением этой однородной задачи является  $\omega$ .

Такую же запись имеет соответствующая однородная задача в  $k$ -методе; при этом собственным значением считается  $k$ , а  $\omega$  — заданное число. Найдем такой вид функционала для собственных значений  $k_n$  задачи  $k$ -метода, чтобы условие (16.2) было для этого функционала естественным. Нам будет удобнее здесь работать не с функционалом в виде дроби (типа (15.4)), а сразу с функционалом в виде строчки, получающимся после переименования метода множителей Лагранжа.

Чтобы построить эту строчку, рассмотрим сначала вспомогательное выражение

$$\int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV. \quad (16.3)$$

Легко проверить, что для функций, удовлетворяющих уравнению (16.1), первая вариация функционала (16.3)

равна поверхностному интегралу  $2 \int_S \varphi \frac{\partial u}{\partial N} dS$ .

Будем искать дополнительный поверхностный интеграл, прибавление которого к (16.3) сделает условие (16.2) естественным. Подынтегральная функция этого интеграла должна быть квадратичной и может представлять собой лишь линейную комбинацию выражений

$u^2$ ,  $u \frac{\partial u}{\partial N}$  и  $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)^2$ . Запишем общий вид этого интеграла с неопределенными коэффициентами и потом определим эти коэффициенты из требования стационарности функционала на собственных функциях задачи. Другими словами, будем искать функционал в виде

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV + \int_S \left[ c_1 u^2 + c_2 u \frac{\partial u}{\partial N} + c_3 \left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)^2 \right] dS. \quad (16.4)$$

Первая вариация функционала (16.4) на собственной функции  $u_n$  однородной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \delta L(u_n) &= \\ &= \left(2c_1 - \frac{c_2}{\omega} - \frac{2}{\omega}\right) \int_S \varphi u_n dS + \left(c_2 - \frac{2c_3}{\omega}\right) \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial N} u_n dS. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Здесь  $\varphi$  — произвольная функция, непрерывная внутри  $V$ . В (16.5) уже учтено, что  $u_n$  удовлетворяет уравнению (16.1) и граничному условию (16.2). Для обращения  $\delta L$  в нуль при произвольных на границе  $\varphi$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$  достаточно, чтобы удовлетворялась система уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2c_1 - \frac{1}{\omega} c_2 &= \frac{2}{\omega}, \\ c_2 - \frac{2}{\omega} c_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.6)$$

Одним из решений этой недоопределенной системы является

$$c_1 = \frac{1}{\omega}, \quad c_2 = c_3 = 0. \quad (16.7)$$

Другие возможные решения мы обсудим в п. 3.

Решение (16.7) дает слагаемое, являющееся частным случаем ( $\omega = \text{const}$ ) выражения (15.13). Искомый функционал, соответствующий этому решению, имеет вид

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV + \frac{1}{\omega} \int_S u^2 dS. \quad (16.8)$$

Функционал (16.8) стационарен на собственных функциях однородной задачи  $k$ -метода, если  $k$  принимает значение  $k_n$ . Но он же стационарен и на собственных функциях  $w$ -метода при  $w = w_n$ , поскольку при вычислении  $\delta L$  нигде не конкретизировалось, какой именно из двух параметров ( $k$  или  $w$ ) играет роль собственного значения, а функция  $\varphi$  не подчинялась никаким условиям, содержащим  $w$ . Как и все функционалы такого типа, (16.8) принимает в стационарных точках нулевые значения.

Приравнивая правую часть (16.8) нулю, аналогично тому, как это сделано в предыдущем параграфе, и разрешая полученное равенство относительно  $w$ , получим известный функционал для собственных значений  $w_n$ :

$$W(u) = \frac{\int_S u^2 dS}{k^2 \int_V u^2 dV - \int_V (\nabla u)^2 dV}. \quad (16.9)$$

Стационарность функционала (16.9) следует из того, что метод множителей Лагранжа приводит от (16.9) к (16.8), если множитель Лагранжа обозначить через  $w$ . При таком переходе, правда, появляется дополнительный множитель  $w$ , поэтому случай  $w = 0$  требует некоторых дополнительных оговорок, которые мы сделаем в п. 4.

2. Вернемся к системе уравнений (16.6). Эта система имеет однопараметрическое семейство решений, дающих при подстановке в (16.4) однопараметрическое семейство стационарных функционалов, для которых условие (16.2) естественно. Эти функционалы можно получить и другим, алгебраически эквивалентным, но более наглядным путем. Для этого достаточно к (16.8) дописать слагаемое

$$D \int_S \left( u + w \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 dS \quad (16.10)$$

с произвольным коэффициентом  $D$ . Подынтегральное выражение в (16.10) является *квадратом левой части граничного условия* (16.2), так что его первая вариация будет содержать под интегралом эту левую часть множи-

телем и, следовательно, будет обращаться в нуль на функции, удовлетворяющей (16.2). Таким образом, добавление (16.10) к (16.8) не меняет стационарных свойств последнего. С другой стороны, получающийся таким способом функционал содержит один свободный параметр, так что этот функционал должен совпадать с получающимся из (16.4) подстановкой общего решения системы (16.6).

Выпишем общий вид дополнительных к (16.3) слагаемых с одним, теперь уже произвольным коэффициентом

$$\frac{1}{w} \int_S u^2 dS + D \int_S \left( u + w \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 dS. \quad (16.11)$$

Коэффициент  $D$  может зависеть от  $w$ . Очевидно, что кроме (16.8) ( $D = 0$ ) лишь при  $D = -1/w$  параметр  $w$  будет встречаться в функционале только один раз и лишь в первой степени:

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV - 2 \int_S u \frac{\partial u}{\partial N} dS - w \int_S \left( \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 dS. \quad (16.12)$$

Это позволяет построить помимо (16.2) еще один функционал в виде отношения. Для этого нужно приравнять  $L(u)$  нулю и разрешить получившееся равенство относительно  $w$ :

$$W(u) = \frac{\int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV - 2 \int_S u \frac{\partial u}{\partial N} dS}{\int_S \left( \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 dS}. \quad (16.13)$$

Слагаемое

$$- 2 \int_S u \frac{\partial u}{\partial N} dS - w \int_S \left( \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 dS \quad (16.14)$$

можно было бы использовать и в построениях предыдущего параграфа вместо (15.13) при  $w = \text{const}$ . При

переменном  $\omega(s)$  эту функцию надо внести в (16.14) под знак интеграла.

Для других методов, рассматриваемых в этом параграфе, система алгебраических уравнений, аналогичная (16.6), будет несколько сложнее. Однако одно частное решение такой системы будет, как правило, очевидным. Функционалы, соответствующие другим решениям, будут строиться, как и здесь, прибавлением поверхностных интегралов от квадратов левых частей граничных условий; если граничных условий два, то можно добавлять и интегралы от *перекрестных произведений их левых частей*.

Следует отметить две особенности функционалов с естественными граничными условиями. Во-первых, они могут не быть *положительно определенными* даже для *самосопряженных* задач. Во-вторых, при использовании допустимых функций, удовлетворяющих во всей области или в некоторой ее части уравнению задачи, такие функционалы могут иметь *лишние стационарные точки*; такая ситуация будет подробно рассмотрена в § 17.

3. Если рассматривать (16.8) и (16.12) как функционалы  $k$ -метода, то каждый из них допускает определенный *предельный переход* по  $\omega$ . Так, в (16.8) допустим переход  $\omega \rightarrow \infty$ , что соответствует превращению условия (16.2) в

$$\left. \frac{\partial u}{\partial N} \right|_S = 0. \quad (16.15)$$

При этом последнее слагаемое в (16.8) исчезает, и для естественности условия (16.15) не нужно дописывать к (16.3) никаких интегралов (см. § 15, п. 1). Аналогично, (16.12) допускает переход  $\omega \rightarrow 0$ , что соответствует условию

$$u|_S = 0. \quad (16.16)$$

При этом в функционале остается поверхностное слагаемое

$$-2 \int_S u \frac{\partial u}{\partial N} dS, \quad (16.17)$$

которое, как известно, обеспечивает естественность (16.16).

С другой стороны, функционал (16.8) не допускает перехода  $\omega \rightarrow 0$ , а (16.12) — переход  $\omega \rightarrow \infty$ . Если теперь вернуться к  $\omega$ -методу и рассматривать функционалы (16.8) и (16.12), а также соответствующие им функционалы (16.9) и (16.13), то оказывается, что пара функционалов (16.8) и (16.9) неудобна для поиска очень малых собственных значений  $\omega_n$ ; в частности, в этом случае (16.9) на собственной функции представляет собой отношение малых величин, и это, естественно, затрудняет численные расчеты. Аналогичная ситуация имеет место для функционалов (16.12) и (16.13) при поиске очень больших  $\omega_n$ . Вопрос о том, какими функционалами удобнее пользоваться в каждом конкретном случае, определяется по существу граничным условием исходной задачи дифракции. В частности, если в этой задаче решение должно удовлетворять на границе условию (16.16) (в этом случае с точки зрения резонансных свойств наиболее интересны близкие к нулю  $\omega_n$ ), то лучше пользоваться функционалами (16.12) и (16.13). При граничном условии (16.15), когда интересны очень большие  $\omega_n$ , удобнее функционалы (16.8) и (16.9). Последняя пара функционалов, вероятно, предпочтительнее и при конечном заданном импедансе, поскольку эти функционалы не содержат  $\frac{\partial u}{\partial N}$ .

4. Никаких особенностей не возникает в применении  $\omega$ -метода к системам с диэлектрическими телами и к открытым системам. Пусть некоторая часть резонатора заполнена однородным диэлектриком. Это скажется во вспомогательной задаче  $\omega$ -метода на форме записи уравнения и в появлении дополнительных условий на границе диэлектрика. Построение же стационарных функционалов остается таким же самым; лишь всюду исходное выражение (16.3) нужно заменить на

$$\int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \left( \int_{V^-} u^2 dV + \varepsilon \int_{V^+} u^2 dV \right) \quad (16.18)$$

(при условиях (15.2) на границе диэлектрика) или на

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{V^+} (\nabla u)^2 dV + \int_{V^-} (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV \quad (16.19)$$

(при условиях (15.2а), (15.22)). Смысл  $V^+$  и  $V^-$  тот же, что и в предыдущем параграфе. При этом безразлично, вещественно ли  $\epsilon$ , или нет; при наличии электрических потерь функционалы будут комплексными. Если  $\epsilon$  является функцией координат, то в (16.18) и (16.19) она вводится под знак интеграла.

Обобщение функционалов  $\omega$ -метода на внешние задачи точно такое же, как и в  $\epsilon$ -методе. Допустимые функции должны в этом случае удовлетворять условию излучения, а при вычислении интегралов по бесконечному объему следует считать  $k$  слегка комплексным. Далее в этом параграфе мы не будем специально останавливаться на внешних задачах, так как распространение аппарата на такие задачи не содержит ничего нового по сравнению с изложенным в § 15.

Если в задаче дифракции стенки резонатора обладают переменным импедансом, то в одной из возможных постановок однородной задачи  $\omega$ -метода граничное условие на  $S$  будет иметь вид (см. (9.21)):

$$u + \lambda \omega(s) \frac{\partial u}{\partial N} = 0, \quad (16.20)$$

где  $\omega(s)$  — заданная функция координат. Стационарные функционалы для однородной задачи с таким условием строятся по аналогии с предыдущим, только вместо неизвестных коэффициентов нужно брать неизвестные функции. А именно, будем искать функционал в виде

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV + \int_S \left[ c_1 u^2 + c_2 u \frac{\partial u}{\partial N} + c_3 \left( \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 \right] dS, \quad (16.21)$$

где  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  — некоторые функции координат поверхности. Приравнивание нулю первой вариации (16.21) на собственной функции однородной задачи приводит к системе функциональных уравнений, имеющей ту же запись, что и алгебраическая система (16.6), лишь с заменой  $\omega$  на  $\lambda \omega(s)$ . Повторяя рассуждения первых трех пунктов этого параграфа, мы приходим к двум парам

функционалов

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV + \frac{1}{\lambda} \int_S \frac{u^2}{\omega} dS, \quad (16.22)$$

$$\Lambda(u) = \frac{\int_S \frac{u^2}{\omega} dS}{k^2 \int_V u^2 dV - \int_V (\nabla u)^2 dV} \quad (16.23)$$

и

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV - 2 \int_S u \frac{\partial u}{\partial N} ds - \lambda \int_S \omega \left( \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 dS, \quad (16.24)$$

$$\Lambda(u) = \frac{\int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV - 2 \int_S u \frac{\partial u}{\partial N} dS}{\int_S \omega \left( \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 dS}. \quad (16.25)$$

Свойства этих функционалов аналогичны свойствам функционалов (16.8), (16.9), (16.12) и (16.13). В частности, если  $\omega(s)$  на какой-то части поверхности  $S$  обращается в нуль, то функционалы (16.22) и (16.23) теряют смысл и можно пользоваться лишь функционалами второй пары. Наоборот, если  $\omega(s)$  где-либо обращается в бесконечность, то нужно пользоваться функционалами первой пары.

5. Перейдем к построению функционалов для I варианта  $\rho$ -метода. Пусть всюду внутри резонатора удовлетворяется уравнение (16.1), на замкнутой границе  $S$  — условие (16.16), а на некоторой (возможно, незамкнутой) поверхности  $S_\rho$  внутри резонатора — условия

$$\left\{ \begin{array}{l} u^+ - u^- = 0, \\ \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} - \frac{1}{\rho} u = 0 \end{array} \right. \quad (16.26a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} - \frac{1}{\rho} u = 0 \end{array} \right. \quad (16.26б)$$

(нормаль считается направленной из «—» в «+»). Собственным значением в этой задаче является  $\rho$ . Будем

искать функционал, в котором граничное условие (16.26б) было бы естественным. Условия (16.16) и (16.26а) не содержат параметра  $\rho$  и будут считаться наложенными на допустимые функции. Как и прежде, возьмем за основу выражение (16.3) и добавим к нему всевозможные интегралы по  $S_\rho$  с неопределенными коэффициентами. Точнее, будем искать функционал в виде

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV + \int_{S_\rho} \left[ c_1 u^2 + c_2 u \frac{\partial u^+}{\partial N} + c_3 u \frac{\partial u^-}{\partial N} + c_4 \frac{\partial u^+}{\partial N} \cdot \frac{\partial u^-}{\partial N} + c_5 \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} \right)^2 + c_6 \left( \frac{\partial u^-}{\partial N} \right)^2 \right] dS. \quad (16.27)$$

Варьирование (16.27) около собственной функции  $u_n$  однородной задачи, с учетом уравнения (16.1) для  $u_n$ , а также условий (16.16) и (16.26а) для  $u_n$  и для  $\varphi$ , дает

$$\delta L(u_n) = \int_{S_\rho} \left[ \varphi \left( 2c_1 u_n + c_2 \frac{\partial u_n^+}{\partial N} + c_3 \frac{\partial u_n^-}{\partial N} - 2 \frac{\partial u_n^+}{\partial N} + 2 \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \right) + \frac{\partial \varphi^+}{\partial N} \left( c_4 \frac{\partial u_n^-}{\partial N} + 2c_5 \frac{\partial u_n^+}{\partial N} + c_2 u_n \right) + \frac{\partial \varphi^-}{\partial N} \left( c_4 \frac{\partial u_n^+}{\partial N} + 2c_6 \frac{\partial u_n^-}{\partial N} + c_3 u_n \right) \right] dS. \quad (16.28)$$

Учтем теперь условие (16.26б) для  $u_n$ . Выразим, например,  $\frac{\partial u_n^-}{\partial N}$  через  $u_n$  и  $\frac{\partial u_n^+}{\partial N}$  и приравняем нулю коэффициенты при  $\varphi u_n$ ,  $\varphi \frac{\partial u_n^+}{\partial N}$ ,  $\frac{\partial \varphi^+}{\partial N} u_n$ ,  $\frac{\partial \varphi^+}{\partial N} \cdot \frac{\partial u_n^+}{\partial N}$ ,  $\frac{\partial \varphi^-}{\partial N} u_n$  и  $\frac{\partial \varphi^-}{\partial N} \cdot \frac{\partial u_n^+}{\partial N}$ . Это даст систему линейных уравнений, при удовлетворении которых  $\delta L$  обращается в нуль:

$$\left. \begin{aligned} 2c_1 - \frac{1}{\rho} c_3 = \frac{2}{\rho}, \quad c_4 + 2c_5 = 0, \\ c_2 + c_3 = 0, \quad c_3 - \frac{2}{\rho} c_4 = 0, \\ c_2 - \frac{1}{\rho} c_4 = 0, \quad c_4 + 2c_6 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.29)$$

Полученная система линейно зависима и имеет *однопараметрическое семейство решений*. Одно из таких решений есть

$$c_1 = \frac{1}{\rho}, \quad c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0. \quad (16.30)$$

Подстановка этого решения в (16.27) дает функционал

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV + \frac{1}{\rho} \int_{S_\rho} u^2 dS. \quad (16.31)$$

Напомним, что класс допустимых функций этого функционала охватывает все непрерывные внутри  $V$  (в частности, на  $S_\rho$ ) функции, удовлетворяющие на границе  $S$  условию (16.16) и имеющие производные конечные разрывы нормальной производной на  $S_\rho$ .

Из (16.31) можно, согласно предыдущему, сразу получить функционал для собственных значений  $\rho_n$  в виде отношения

$$P(u) = \frac{\int_{S_\rho} u^2 dS}{k^2 \int_V u^2 dV - \int_V (\nabla u)^2 dV}. \quad (16.32)$$

Семейство функционалов, порождаемое общим решением системы (16.29), получается простым прибавлением к (16.31) поверхностного интеграла от квадрата левой части (16.26б) с произвольным множителем  $D$ :

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV + \frac{1}{\rho} \int_{S_\rho} u^2 dS + D \int_{S_\rho} \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} - \frac{1}{\rho} u \right)^2 dS. \quad (16.33)$$

Коэффициент  $D$  может зависеть от  $\rho$ . При  $D = -\rho$  получается функционал, в котором, как и в (16.31),  $\rho$

встречается всего один раз и лишь в первой степени:

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV - \rho \int_{S_\rho} \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \right)^2 dS + \\ + 2 \int_{S_\rho} u \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \right) dS. \quad (16.34)$$

Из (16.34) получается второй функционал для собственных значений в виде отношения

$$P(u) = \frac{\int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV + 2 \int_{S_\rho} u \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \right) dS}{\int_{S_\rho} \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \right)^2 dS}. \quad (16.35)$$

6. Каждый из функционалов (16.31) и (16.34), рассматриваемый как функционал  $k$ -метода, допускает определенный *предельный переход* по  $\rho$ . Так, в (16.31) можно устремлять  $\rho$  к  $\infty$ , что соответствует превращению условия (16.26б) в условие непрерывности нормальной производной на  $S_\rho$  (исчезновение экрана). При этом последнее слагаемое в (16.31) пропадает; условие непрерывности нормальной производной является естественным для функционала (16.3) без дополнительных поверхностных интегралов, если допустимые функции удовлетворяют (16.26а) (ср. п. 1 § 15).

Соответственно (16.34) допускает предельный переход  $\rho \rightarrow 0$  (металлизация экрана). Граничное условие (16.26б) превращается при этом в (16.16). Оставшийся после такого перехода поверхностный интеграл в (16.34) обеспечивает естественность условия (16.16). Отличие этого слагаемого от (16.17) объясняется тем, что здесь мы рассматриваем обе стороны поверхности  $S_\rho$ , и на обеих сторонах нормальные производные допустимых функций могут быть различны. Объемные интегралы в (16.34) также распространяются на объем по обе стороны поверхности  $S_\rho$ .

По предельному переходу, который допускается в функционале  $k$ -метода, можно указать, для решения какого класса задач дифракции удобнее всего применять соответствующий функционал  $\rho$ -метода. Так, если в истинной задаче дифракции граничным условием на  $S_\rho$  является (16.16) (или близкое к нему с малым  $\rho$ ), то в однородной задаче  $\rho$ -метода наиболее интересны малые собственные значения  $\rho_n$ , и в этом случае предпочтительнее функционалы (16.34) и (16.35). Наоборот, если истинными условиями на  $S_\rho$  являются условия с очень большим  $\rho$ , так что и в однородной задаче интересны очень большие  $\rho_n$ , то лучше пользоваться функционалами (16.31) и (16.32). Эти функционалы предпочтительнее и в случае условий с конечным  $\rho$ , так как они не содержат  $\frac{\partial u}{\partial N}$ .

7. Рассмотрим задачу о *закрытом резонаторе, частично заполненном диэлектриком*. К такой задаче можно применить I вариант  $\rho$ -метода, введя собственное значение  $\rho$  в условия на границе диэлектрика  $S_\rho$ . Для  $E$ - и  $H$ -поляризаций ситуации различны. В случае  $E$ -поляризации на  $S_\rho$  в задаче дифракции должны выполняться условия непрерывности функции и ее нормальной производной (а на границе резонатора  $u|_S = 0$ ). В однородной задаче нужно заменить уравнение (16.1) на (15.1), а на  $S_\rho$  сохранить условия (16.26). Все полученные функционалы  $\rho$ -метода при этом сохраняются с заменой в них слагаемого (16.3) на (16.18). Если  $\epsilon$  есть функция координат, то ее всюду нужно внести под знак интеграла. В соответствии с предыдущим пунктом здесь предпочтительнее функционалы типа (16.31) и (16.32).

Для  $H$ -поляризации (условия (15.2а), (15.22) на  $S_\rho$  и  $\frac{\partial u}{\partial N} \Big|_S = 0$ ) граничные условия однородной задачи  $\rho$ -метода (см. § 11) имеют вид

$$\begin{cases} u^+ - u^- = 0, & (16.36a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} - \frac{1}{\rho} u = 0. & (16.36b) \end{cases}$$

Легко проверить, что и для задачи с такими условиями на  $S_\rho$  первая пара функционалов имеет тот же вид (16.31) и (16.32), лишь с заменой в них слагаемого

(16.3) на (16.19). Эти функционалы пригодны, в частности, для поиска очень больших собственных значений  $\rho_n$  (наиболее интересных при решении соответствующей задачи дифракции). Можно построить и вторую пару функционалов, аналогичную (16.34) и (16.35); для этого в (16.34) и (16.35) нужно, кроме упомянутой выше замены, всюду вместо  $\frac{\partial u^+}{\partial N}$  писать  $\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u^+}{\partial N}$ . Для решения задачи с диэлектриком эти функционалы менее удобны.

8. Построение стационарных функционалов для второго варианта  $\rho$ -метода в принципе такое же, как и для первого варианта. Рассмотрим простейший случай — отсутствие диэлектрика (аналогично п. 5). Однородная задача будет состоять из того же однородного уравнения (16.1), соответствующих условий на границе резонатора  $S$  и граничных условий

$$\begin{cases} \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} = 0, & (16.37a) \\ u^+ - u^- + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial u}{\partial N} = 0 & (16.37б) \end{cases}$$

на некоторой поверхности  $S_{\bar{\rho}}$ . Будем искать функционал, для которого (16.37б) — естественное условие; условие на  $S$ , а также (16.37а) будем накладывать на допустимые функции. Аналогично (16.27), запишем

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV + \int_{S_{\bar{\rho}}} [c_1 (u^+)^2 + c_2 u^+ u^- + c_3 (u^-)^2 + c_4 u^- \frac{\partial u}{\partial N} + c_5 u^+ \frac{\partial u}{\partial N} + c_6 \left( \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2] dS. \quad (16.38)$$

Приравняв нулю вариацию этого функционала на собственной функции и учтя при этом уравнение и условия (16.37) для собственной функции, а также (16.37а) для  $\Phi$ , получим систему линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2c_1 + c_2 = 0, & \quad \frac{2}{\bar{\rho}} c_3 + c_4 = -2, \\ \frac{1}{\bar{\rho}} c_2 + c_5 = 2, & \quad c_4 + c_5 = 0, \\ c_2 + 2c_3 = 0, & \quad \frac{1}{\bar{\rho}} c_4 + 2c_6 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.39)$$

Эти уравнения линейно зависимы, и система (16.39) (как и ранее (16.29)) имеет *однопараметрическое семейство* решений. Одно из таких решений есть

$$c_1 = c_3 = -\bar{\rho}, \quad c_2 = 2\bar{\rho}, \quad c_4 = c_5 = c_6 = 0. \quad (16.40)$$

Подстановка (16.40) в исходный функционал дает

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV - \bar{\rho} \int_{S_{\bar{\rho}}} (u^+ - u^-)^2 dS. \quad (16.41)$$

Из (16.41) для собственных значений  $\bar{\rho}_n$  получается функционал в виде отношения квадратичных функционалов

$$\tilde{P}(u) = \frac{\int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV}{\int_{S_{\bar{\rho}}} (u^+ - u^-)^2 dS}. \quad (16.42)$$

Прибавляя к (16.41) интеграл от квадрата левой части (16.37б) с произвольным коэффициентом, мы получим однопараметрическое семейство функционалов, соответствующих общему решению системы (16.39). Простейший из таких функционалов есть

$$L(u) = \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV + \frac{1}{\bar{\rho}} \int_{S_{\bar{\rho}}} \left( \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 dS + 2 \int_{S_{\bar{\rho}}} \frac{\partial u}{\partial N} (u^+ - u^-) dS. \quad (16.43)$$

Это приводит к функционалу в виде отношения

$$\tilde{P}(u) = \frac{\int_{S_{\bar{\rho}}} \left( \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 dS}{k^2 \int_V u^2 dV - \int_V (\nabla u)^2 dV - 2 \int_{S_{\bar{\rho}}} \frac{\partial u}{\partial N} (u^+ - u^-) dS}. \quad (16.44)$$

Можно показать, что для всех функционалов этого пункта оказывается естественным и условие (16.37а), если в (16.43) и (16.44) под  $\frac{\partial u}{\partial N}$  понимать любую



линейную комбинацию  $a \frac{\partial u^+}{\partial N} + b \frac{\partial u^-}{\partial N}$  ( $a + b = 1$ ). Таким образом, требование непрерывности нормальной производной на  $S_{\bar{\rho}}$  можно не накладывать на допустимые функции. Сами же допустимые функции для этих функционалов должны иметь всевозможные конечные разрывы на  $S_{\bar{\rho}}$ .

Функционал (16.41) допускает предельный переход при  $\bar{\rho} \rightarrow 0$ , а (16.43) — переход при  $\bar{\rho} \rightarrow \infty$ . Соответственно, функционалами (16.41) и (16.42) неудобно пользоваться для отыскания очень больших  $\bar{\rho}_n$ , (16.43) и (16.44) — очень малых  $\bar{\rho}_n$ . Поэтому, в частности, первую пару функционалов следует применять, если в истинной задаче дифракции условие на  $S_{\bar{\rho}}$  имеет вид (16.15), а вторую — при условии непрерывности как функции, так и ее нормальной производной. Например, функционалы типа (16.43) и (16.44) удобны для задач с диэлектриком. Видоизменение функционалов для этих задач такое же, как и в I варианте  $\rho$ -метода.

9. Рассмотрим теперь однородные задачи, возникающие в методе, изложенном в § 12. В этом методе на некоторой поверхности  $S_{\alpha\beta}$  ставятся следующие граничные условия (§ 12):

$$\begin{cases} u^+ - u^- - \alpha \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} + \frac{\partial u^-}{\partial N} \right) = 0, & (16.45a) \\ u^+ + u^- - \beta \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \right) = 0. & (16.45б) \end{cases}$$

Чтобы получить функционал, для которого эти условия были бы естественными, мы должны выписать поверхностные слагаемые в самом общем виде, считая разрывными на  $S_{\alpha\beta}$  как функции, так и их нормальные производные. Такой функционал имеет вид

$$\begin{aligned} L(u) = & \int_V (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_V u^2 dV + \int_{S_{\alpha\beta}} \left[ c_1 (u^+)^2 + c_2 u^+ u^- + \right. \\ & + c_3 (u^-)^2 + c_4 \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} \right)^2 + c_5 \left( \frac{\partial u^-}{\partial N} \right)^2 + c_6 \frac{\partial u^+}{\partial N} \frac{\partial u^-}{\partial N} + \\ & \left. + c_7 u^+ \frac{\partial u^+}{\partial N} + c_8 u^+ \frac{\partial u^-}{\partial N} + c_9 u^- \frac{\partial u^+}{\partial N} + c_{10} u^- \frac{\partial u^-}{\partial N} \right] dS. \end{aligned} \quad (16.46)$$

Написав первую вариацию (16.46) на собственной функции однородной задачи, выразив затем, например,  $u_n^-$  и  $\frac{\partial u_n^-}{\partial N}$  через  $u_n^+$  и  $\frac{\partial u_n^+}{\partial N}$  согласно (16.45), приравняв после этого в вариации нулю коэффициенты при различных комбинациях  $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$ ,  $\frac{\partial \varphi^+}{\partial N}$  или  $\frac{\partial \varphi^-}{\partial N}$  с  $u_n^+$  или  $\frac{\partial u_n^+}{\partial N}$  и решив получившуюся систему линейных уравнений, мы в простейшем случае получим следующие слагаемые:

$$\frac{1}{2\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} (u^+ - u^-)^2 dS, \quad (16.47a)$$

$$\frac{\alpha}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} + \frac{\partial u^-}{\partial N} \right)^2 dS + \int_{S_{\alpha\beta}} (u^+ - u^-) \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} + \frac{\partial u^-}{\partial N} \right) dS \quad (16.47б)$$

и

$$\frac{1}{2\beta} \int_{S_{\alpha\beta}} (u^+ + u^-)^2 dS, \quad (16.48a)$$

$$\begin{aligned} - \frac{\beta}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \right)^2 dS + \\ + \int_{S_{\alpha\beta}} (u^+ + u^-) \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \right) dS. \end{aligned} \quad (16.48б)$$

Для того чтобы получить окончательное выражение для функционала, нужно в (16.46) вместо интеграла по  $S_{\alpha\beta}$  поставить сумму одного из слагаемых (16.47) — любого из двух — и одного из слагаемых (16.48). Комбинируя эти слагаемые, мы будем иметь четыре функционала, в каждом из которых  $\alpha$  и  $\beta$  встречаются только по одному разу и только в первой степени. Каждый из таких функционалов допускает свой предельный переход.

Приравнивая получающиеся функционалы нулю и разрешая равенство относительно интересующего нас параметра ( $\alpha$  или  $\beta$ , в зависимости от формулировки

однородной задачи), можно получить различные функционалы для собственных значений. В качестве примера выпишем два таких функционала

$$A(u) = \frac{\frac{1}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} (u^+ - u^-)^2 dS}{k^2 \int_V u^2 dV - \int_V (\nabla u)^2 dV - \frac{1}{2\beta} \int_{S_{\alpha\beta}} (u^+ + u^-)^2 dS}, \quad (16.49)$$

$$B(u) = \frac{\frac{1}{2} \int_{S_{\alpha\beta}} (u^+ + u^-)^2 dS}{k^2 \int_V u^2 dV - \int_V (\nabla u)^2 dV - \frac{1}{2\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} (u^+ - u^-)^2 dS}. \quad (16.50)$$

Разумеется, класс допустимых функций получающихся функционалов должен, вообще говоря, охватывать функции с произвольными конечными разрывами  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial N}$  на рассматриваемой поверхности.

Функционал (16.46) (с неопределенными коэффициентами) и его вариация имеют самый общий вид для любых граничных условий, линейно связывающих функцию и ее нормальную производную по обе стороны поверхности. Может оказаться, что получающаяся после приравнивания вариации к нулю система линейных уравнений для неопределенных коэффициентов несовместна. Это значит, что нельзя добиться естественности граничного условия лишь за счет поверхностных интегралов. Так обстоит дело, например, если пытаться использовать (16.3) в задачах с условиями (15.22) — там надо было изменить объемный интеграл (что, впрочем, тоже могло быть сделано подбором коэффициентов).

### § 17. Многопараметрические задачи

Однородные задачи различных вариантов обобщенного метода, которые рассматривались в предыдущих параграфах этой главы, содержали как минимум два

параметра — частоту  $k$  и параметр, играющий роль собственного значения в данном варианте обобщенного метода. В некоторых случаях параметров было три — например, при применении  $\epsilon$ -метода к задаче о резонаторе с поглощающими стенками. При рассмотрении таких случаев было видно, что дополнительные параметры не вносят каких-либо новых трудностей в вариационный аппарат. Более того, записанный в соответствующей форме функционал для многопараметрической задачи называется *универсальным* для нескольких методов в том смысле, что его вид не зависит от того, какой из параметров играет роль собственного значения.

В этом параграфе мы рассмотрим задачу, в которой одновременно присутствует несколько параметров, каждый из которых с равным правом может играть роль собственного значения. Из функционала, который будет выписан для такой задачи, как частные случаи, получаются основные из приведенных в этой главе функционалов. Для этого универсального функционала доказываются *прямая и обратная теоремы о стационарности* на собственных функциях той или другой однородной задачи. При этом в доказательстве не будет конкретизироваться, какой из параметров играет роль собственного значения. Вывод такого универсального функционала осуществляется методом неопределенных коэффициентов, подробно описанным в предыдущих параграфах, и здесь мы его не приводим. Для сокращения записи мы включим в этот функционал не все спектральные параметры, используемые в обобщенном методе.

В этом же параграфе отмечены некоторые особенности, проявляющиеся в случае, когда допустимые функции удовлетворяют во всем объеме или в некоторой его части требуемому волновому уравнению. Будут получены также функционалы для  $s$ -метода.

1. Пусть в некотором, не обязательно конечном, объеме  $V$  должно удовлетворяться уравнение

$$\Delta u + k^2 [1 + \sigma(\epsilon - 1)] u = 0, \quad (17.1)$$

где  $\epsilon$  — вообще говоря, кусочно-непрерывная функция координат. Здесь мы рассматриваем одну из возможных

постановок однородной задачи с переменными  $\epsilon$ . Случай кусочно-постоянного  $\epsilon$  естественным образом отсюда вытекает. При бесконечном объеме  $\epsilon$  может быть отличным от единицы лишь в конечной его части.

Пусть, далее, существуют некоторые поверхности, ограничивающие объем  $V$  или содержащиеся внутри его, на которых должны выполняться следующие граничные условия:

а) на замкнутой поверхности  $S_w$

$$u + w \frac{\partial u}{\partial N} = 0, \quad (17.2)$$

б) на поверхности  $S_\rho$

$$\begin{cases} u^+ - u^- = 0, \\ \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} - \frac{1}{\rho} u = 0, \end{cases} \quad (17.3a)$$

$$(17.3b)$$

в) на поверхности  $S_{\bar{\rho}}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} = 0, \\ u^+ - u^- + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial u}{\partial N} = 0. \end{cases} \quad (17.4a)$$

$$(17.4b)$$

Поверхности  $S_\rho$  и  $S_{\bar{\rho}}$  могут быть незамкнутыми. В этом случае на  $u$  накладываются условия Майкснера на ребре.

г) Для внешних задач  $u$  должна удовлетворять условию излучения.

Поверхностей каждого типа может быть несколько, причем на каждой из них параметр может принимать свое значение. Так, например, к поверхностям типа  $S_\rho$  относятся поверхности разрыва  $\epsilon$ , не совпадающие с другими поверхностями; на таких поверхностях должны быть непрерывны  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial N}$  (первая поляризация), что описывается условиями (17.3) при  $\rho = \infty$ .

Для дальнейшего безразлично, какой параметр в этой задаче считается собственным значением. Им может быть любой из параметров, присутствующих в уравнении или граничных условиях; исключение составляет лишь параметр  $k$  для внешних задач.

Поставим в соответствие сформулированной однородной задаче функционал

$$\begin{aligned} L(u) = & \int_V \{(\nabla u)^2 - k^2 [1 + \sigma(\epsilon - 1)] u^2\} dV - \\ & - \int_{S_w} \left[ w \left( \frac{\partial u}{\partial N} \right)^2 + 2u \frac{\partial u}{\partial N} \right] dS + \int_{S_\rho} \left[ \frac{1}{4\rho} (u^+ + u^-)^2 + \right. \\ & \left. + (u^+ - u^-) \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} + \frac{\partial u^-}{\partial N} \right) \right] dS - \bar{\rho} \int_{S_{\bar{\rho}}} (u^+ - u^-)^2 dS. \end{aligned} \quad (17.5)$$

На допустимые функции этого функционала не накладывается никаких ограничивающих условий на  $S_w$ ,  $S_\rho$  и  $S_{\bar{\rho}}$ . На  $S_\rho$  и  $S_{\bar{\rho}}$  допускаются любые конечные разрывы  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial N}$ . Для бесконечных объемов должны удовлетворяться условия излучения.

Функции, разрывные на  $S_{\bar{\rho}}$ , а также функции, имеющие разрывную нормальную производную на  $S_\rho$ , должны быть включены в класс допустимых функций для улучшения сходимости численного процесса.

Покажем, что стационарности функционала (17.5) на некоторой функции  $\bar{u}$  в таком классе допустимых функций необходимо и достаточно для того, чтобы функция  $\bar{u}$  была решением поставленной однородной задачи.

2. Пусть  $\bar{u}$  удовлетворяет всем условиям однородной задачи. Убедимся, что тогда (17.5) стационарен на  $\bar{u}$ . Для этого дадим функции  $\bar{u}$  малое приращение  $\mu\phi$  с произвольной  $\phi$  из класса допустимых функций и вычислим первую вариацию функционала на  $\bar{u}$  (линейные по  $\mu$  члены в выражении  $L(\bar{u} + \mu\phi)$ ). Применяя формулу

Грина (2.5), найдем

$$\begin{aligned} \delta L(\bar{u}) = & -2 \int_V \{ \Delta \bar{u} + k^2 [1 + \sigma(\epsilon - 1)] \bar{u} \} \varphi dV - \\ & -2 \int_{S_\omega} \left( \bar{u} + \omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial N} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial N} dS + \int_{S_\rho} \left\{ \left[ \frac{1}{2\rho} (\bar{u}^+ + \bar{u}^-) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial N} - \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial N} \right) \right] (\varphi^+ + \varphi^-) + (\bar{u}^+ - \bar{u}^-) \left( \frac{\partial \varphi^+}{\partial N} + \frac{\partial \varphi^-}{\partial N} \right) \right\} dS + \\ & + 2 \int_{S_{\bar{\rho}}} \left\{ \left[ \bar{\rho} (\bar{u}^+ - \bar{u}^-) + \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial N} \right] \varphi^- - \right. \\ & \left. - \left[ \bar{\rho} (\bar{u}^+ - \bar{u}^-) + \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial N} \right] \varphi^+ \right\} dS. \quad (17.6) \end{aligned}$$

Для бесконечных объемов мы здесь не выписываем интегралов по бесконечно удаленной сфере, считая, аналогично § 15, п. 3, что интеграл по  $V$  вычисляется при слегка комплексном  $k$ .

Поскольку  $\bar{u}$  удовлетворяет всем условиям однородной задачи, то каждый из интегралов в (17.6) обращается в нуль вследствие какого-либо из этих условий. Следовательно, первая вариация функционала (17.5) на собственной функции  $\bar{u}$  равна нулю, и первая часть утверждения доказана.

Перейдем теперь к доказательству достаточности. Будем считать, что функционал (17.5) стационарен на некоторой функции  $\bar{u}$  в классе допустимых функций, и докажем, что  $\bar{u}$  есть решение задачи (17.1) — (17.4). Стационарность означает, что первая вариация функционала (17.5) равна нулю при любой функции  $\varphi$ . Выберем сначала такую функцию  $\varphi$ , которая обращается в нуль вместе с  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$  на  $S_\omega$ ,  $S_\rho$  и  $S_{\bar{\rho}}$ . При этом в (17.6) исчезают все поверхностные интегралы и из равенства  $\delta L$  нулю следует, что равен нулю первый, объемный интеграл в (17.6). Но поскольку  $\varphi$  произвольно, то это означает, что в объемном интеграле тождественно равно нулю выражение в фигурных скобках, т. е. что  $\bar{u}$  удовлетворяет уравнению (17.1) во всем объеме  $V$ ,

Будем теперь *последовательно* оставлять отличной от нуля лишь одну из пяти следующих функций:  $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$  на  $S_\omega$ ,  $\frac{\partial \varphi^+}{\partial N} + \frac{\partial \varphi^-}{\partial N}$  на  $S_\rho$ ,  $\varphi^+ + \varphi^-$  на  $S_\rho$ ,  $\varphi^-$  на  $S_{\bar{\rho}}$  и  $\varphi^+$  на  $S_{\bar{\rho}}$ . Тогда из равенства  $\delta L$  нулю и произвольности на соответствующей поверхности функции, оставленной ненулевой, получаем, что  $\bar{u}$  удовлетворяет условиям (17.2) — (17.4).

Для бесконечных объемов все сказанное остается в силе, поскольку  $u$  (а следовательно, и  $\bar{u}$ ) удовлетворяет в этом случае условию излучения, и объемный интеграл можно понимать в упомянутом в п. 2 смысле.

3. Функционал (17.5) обладает теми же свойствами, что и аналогичные функционалы в предыдущих параграфах. Легко убедиться простой подстановкой, что в каждой своей стационарной точке, т. е. на каждой собственной функции, этот функционал обращается в нуль. Для построения функционала в виде отношения квадратичных функционалов (уже для конкретного параметра как собственного значения) нужно, как это мы делали ранее, приравнять  $L(u)$  нулю, разрешить полученное равенство относительно интересующего нас параметра и считать это выражение функционалом. Такая процедура, как и прежде, оправдана, поскольку, применяя к полученному функционалу метод множителей Лагранжа, мы приходим опять к (17.5). Таким способом можно поступать с любым из входящих в задачу параметров, так как ни один из них не ограничивает класс допустимых функций. Исключение составляет лишь частота  $k$  во внешних задачах — она содержится в накладываемом на допустимые функции условии излучения, которое не является естественным. Как отмечено в п. 1, в этом случае однородная задача на собственные значения  $k$  не ставится.

Функционал (17.5) можно использовать непосредственно, без перехода к функционалу в виде отношения. При этом смысл (17.5) меняется в зависимости от того, какой параметр играет роль собственного значения. Многие из рассмотренных в предыдущих параграфах функционалов являются частными случаями (17.5).

До сих пор мы считали, что допустимые функции не обязаны удовлетворять никаким граничным условиям, т. е. все условия были для функционала естественными. При решении конкретной однородной задачи некоторые из условий могут быть наложены на допустимые функции — это относится к условиям, которые не содержат параметра, играющего в данной задаче роль собственного значения. Более того, удовлетворение некоторым из условий может существенно упростить функционал, и это нужно всегда делать, если можно легко построить систему таких допустимых функций. Вопрос же об удовлетворении допустимыми функциями однородному уравнению задачи требует специального рассмотрения. Этому вопросу посвящен следующий пункт.

Функционал (17.5) не исчерпывает всех возможностей, имеющих при решении поставленной однородной задачи. К (17.5) можно добавлять (как мы делали это ранее) интегралы по соответствующим поверхностям от квадратов и перекрестных произведений левых частей граничных условий с любыми коэффициентами. Стационарные свойства функционалов при этом не будут, вообще говоря, меняться (см., впрочем, п. 4), а могут измениться лишь допустимые предельные переходы. В той форме, как он здесь выписан, функционал (17.5) допускает основные предельные переходы: к условию (16.16) от (17.2) ( $\omega \rightarrow 0$ ), к (16.15) от (17.4) ( $\bar{\rho} \rightarrow 0$ ), к условию непрерывности  $u$  и  $du/\partial N$  от (17.3) ( $\rho \rightarrow \infty$ ).

4. На практике часто оказывается удобным ограничиться допустимыми функциями, удовлетворяющими в некоторой части  $V_1$  объема уравнению однородной задачи. Следует, однако, иметь в виду, что в таком классе допустимых функций у некоторых из функционалов с естественными граничными условиями могут появиться лишние стационарные точки, т. е. нарушается свойство достаточности. Эти лишние стационарные точки являются на собственных частотах объема  $V_1$ . Если  $V_1$  — незамкнутая часть рассматриваемого объема, а условия на ограничивающих его изнутри поверхностях не содержат искомого собственного значения, то свойство достаточности сохраняется на всех вещественных частотах, поскольку собственные частоты такого объема комплексны.

От лишних стационарных точек можно избавиться, прибавляя к функционалу интегралы от квадратов (или перекрестных произведений, если граничные условия парные) левых частей граничных условий, естественных для функционала. Исключение составляет случай, когда допустимые функции удовлетворяют уравнению во всем объеме  $V$ . В этом случае свойством достаточности обладают функционалы, представляющие собой просто сумму интегралов (с произвольными весовыми коэффициентами) от квадратов левых частей всех граничных условий, которым допустимые функции не удовлетворяют. Для самосопряженных задач эти же функционалы возникают в методе наименьших квадратов. Применение метода Ритца к таким функционалам приводит к матрицам с попарно близкими (сливающимися в пределе) собственными значениями.

Проиллюстрируем отмеченные особенности на примере однородной задачи (15.1) — (15.3)  $\epsilon$ -метода. Если к функционалу (15.9) добавить слагаемое

$$2 \int_{S_e} \frac{\partial u^+}{\partial N} (u^+ - u^-) dS, \quad (17.7)$$

то условия на  $S_e$  будут естественными и допустимые функции должны удовлетворять лишь условию (15.3) на  $S$ . Предположим теперь, что эти функции удовлетворяют еще и требуемому уравнению (15.16) в  $V^-$ . Применяя к этому объему формулу Грина (2.5), получим функционал

$$L(u) = \int_{V^+} [(\nabla u)^2 - k^2 \epsilon u^2] dV + \int_{S_e} \left[ u^- \frac{\partial u^-}{\partial N} + 2 \frac{\partial u^+}{\partial N} (u^+ - u^-) \right] dS, \quad (17.8)$$

первая вариация которого равна

$$\delta L(\bar{u}) = -2 \int_{V^+} (\Delta \bar{u} + k^2 \epsilon \bar{u}) \varphi dV + 2 \int_{S_e} \left[ (\bar{u}^+ - \bar{u}^-) \frac{\partial \varphi^+}{\partial N} - \left( \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial N} - \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial N} \right) \varphi^- \right] dS. \quad (17.9)$$

Как и прежде,  $\delta L$  обращается в нуль на собственной функции задачи, т. е. необходимость всегда имеет место. Однако при некоторых значениях  $k$  из равенства  $\delta L(\bar{u}) = 0$  вовсе не следует, что  $\bar{u}$  есть решение поставленной задачи. Эти значения  $k$  суть собственные частоты объема  $V^-$  с условием  $u|_{S+S_e} = 0$ . Действительно, на этих частотах  $\varphi^-|_{S_e}$  нельзя считать произвольной — она должна удовлетворять условию

$$\int_{S_e} \frac{\partial v}{\partial N} \cdot \varphi^- dS = 0, \quad (17.10)$$

где  $v$  — соответствующая рассматриваемому значению  $k$  собственная функция объема  $V^-$ . Поэтому второе слагаемое в поверхностном интеграле (17.9) обращается в нуль, если

$$\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial N} - \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial N} = A \frac{\partial v}{\partial N} \quad (17.11)$$

с произвольным (не обязательно равным нулю) коэффициентом  $A$ .

Следовательно, стационарность функционалу (17.8) будут доставлять функции, удовлетворяющие (вместо (15.26)) условию (17.11) на  $S_e$  — это и есть лишние стационарные точки.

Легко проверить, что лишние стационарные точки исчезают, если прибавить к (17.8) слагаемое

$$B \int_{S_e} \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \right)^2 dS \quad (17.12)$$

с произвольным коэффициентом  $B \neq 0$ .

Если граница  $S$  отсутствует, а на функцию наложены условия излучения на бесконечности, то ни при каких вещественных частотах не существует функция  $v$  — решение волнового уравнения в  $V^-$  с условием излучения и условием равенства нулю на  $S_e$ . Следовательно, для открытой задачи и функционал (17.8) не имеет лишних стационарных точек.

Отметим, что лишние стационарные точки у функционалов с естественными граничными условиями могут

быть и в  $k$ -методе, если допустимые функции удовлетворяют требуемому уравнению. Правда, такие функции зависят от искомого собственного значения  $k$ , и поэтому пользоваться ими вообще менее удобно.

5. К многопараметрическим можно отнести однородные задачи, возникающие в  $s$ -методе (§ 13). Здесь мы построим функционалы для этого метода и рассмотрим некоторые их свойства. Для простоты ограничимся двумерной задачей.

Для применения вариационного аппарата оказывается удобным несколько видоизменить асимптотические условия (13.6), введя вместо диаграммы  $\Phi_n$  функцию  $\Psi_n$  соотношением

$$\Phi_n(\theta) = \frac{1+s_n}{2s_n} \Psi_n(\theta). \quad (17.13)$$

Тогда условия (13.6) переписутся в виде

$$u_n \simeq \frac{1}{2\sqrt{kr}} [\Psi_n^*(\theta) e^{ikr} + \Psi_n(\theta) e^{-ikr}], \quad (17.14a)$$

$$\Psi_n(\pi + \theta) + is_n \Psi_n^*(\theta) = 0. \quad (17.14b)$$

Рассмотрим однородную задачу  $s$ -метода о диэлектрическом теле, записав уравнение в виде

$$\Delta u + k^2 \epsilon u = 0 \quad (17.15)$$

и потребовав, чтобы вне некоторой конечной области  $\epsilon \equiv 1$ . Будем считать, что допустимые функции во всем рассматриваемом пространстве  $V$  непрерывны вместе со своими производными, а на бесконечности имеют асимптотику

$$u \simeq \frac{1}{2\sqrt{kr}} [\Psi^*(\theta) e^{ikr} + \Psi(\theta) e^{-ikr}] \quad (17.16)$$

с произвольными диаграммами  $\Psi(\theta)$ . Будем искать функционал для такой задачи в виде  $L(u) = \lim_{R \rightarrow \infty} L_R(u)$ ,

где

$$L_R(u) = \int_{V_R} [(\nabla u)^2 - k^2 \epsilon u^2] dV + \int_0^{2\pi} \{c_1 \Psi^2(\theta) + c_2 |\Psi(\theta)|^2 + c_3 [\Psi^*(\theta)]^2 + c_4 \Psi(\theta) \Psi(\pi + \theta) + c_5 \Psi(\theta) \Psi^*(\pi + \theta) + c_6 \Psi^*(\theta) \Psi^*(\pi + \theta)\} d\theta. \quad (17.17)$$

Здесь под  $V_R$  понимается конечная часть рассматриваемой области, ограниченная окружностью достаточно большого радиуса  $R$ .

Вычислим первую вариацию функционала (17.17), полагая  $u = \bar{u} + \mu\phi$ ,  $\Psi = \bar{\Psi} + \mu\eta$ . Применяв формулу Грина к области  $V_R$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \delta L_R = & -2 \int_{V_R} (\Delta \bar{u} - k^2 \epsilon \bar{u}) \phi dV + \int_0^{2\pi} \left\{ \left[ \left( \frac{i}{2} + c_2 \right) \bar{\Psi}^*(\theta) + \right. \right. \\ & + 2c_4 \bar{\Psi}(\pi + \theta) + \left. \left( 2c_1 - \frac{i}{2} e^{-2ikR} \right) \bar{\Psi}(\theta) + \right. \\ & \left. + c_5 \bar{\Psi}^*(\pi + \theta) \right] \eta(\theta) + \left[ \left( c_2 - \frac{i}{2} \right) \bar{\Psi}(\theta) + 2c_6 \bar{\Psi}^*(\pi + \theta) + \right. \\ & \left. + \left( 2c_3 + \frac{i}{2} e^{2ikR} \right) \bar{\Psi}^*(\theta) + c_5 \bar{\Psi}(\pi + \theta) \right] \eta^*(\theta) \right\} d\theta. \quad (17.18) \end{aligned}$$

Из требования, чтобы при произвольном  $\eta(\theta)$  (17.18) обращалось в нуль на собственной функции ( $\Psi$  при этом удовлетворяет (17.146)), получаем систему уравнений для определения  $c_i$ :

$$\left. \begin{aligned} c_2 - 2isc_4 = -\frac{i}{2}, \quad c_2 + 2is^*c_6 = \frac{i}{2}, \\ 2c_1 + is^*c_5 = \frac{i}{2} e^{-2ikR}, \quad 2c_3 - isc_5 = -\frac{i}{2} e^{2ikR}. \end{aligned} \right\} \quad (17.19)$$

Одно из решений этой системы есть

$$\left. \begin{aligned} c_1 = \frac{i}{4} e^{-2ikR}, \quad c_3 = -\frac{i}{4} e^{2ikR}, \\ c_4 = \frac{s^*}{4}, \quad c_6 = \frac{s}{4}, \quad c_2 = c_5 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.20)$$

Подставляя эти коэффициенты в (17.17), преобразовав при этом первый интеграл по формуле Грина (2.5), и переходя к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , мы получим функционал

$$\begin{aligned} L(u) = & - \int_V (\Delta u + k^2 \epsilon u) u dV + \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ s^* \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \Psi(\pi + \theta) d\theta \right]. \quad (17.21) \end{aligned}$$

При вычислении первого интеграла в (17.21) никаких трудностей не возникает, так как при асимптотике (17.16) неинтегрируемые слагаемые в нем сокращаются.

Другие разновидности функционала (соответствующие другим решениям системы (17.19)) получаются из функционала (17.21) прибавлением к нему с произвольными коэффициентами интегралов по углу от квадрата и от квадрата модуля левой части условия (17.146). Нетрудно проверить, что в описанном классе допустимых функций все эти функционалы обладают не только необходимыми, но и достаточными свойствами.

Если же допустимые функции удовлетворяют уравнению (17.15), то необходимыми и достаточными свойствами обладает функционал, представляющий собой интеграл от квадрата (или от квадрата модуля) левой части условия (17.146).

При практической реализации вариационного аппарата в  $s$ -методе удобно представлять допустимые функции вне области, ограниченной той или другой присутствующей в задаче границей, — скажем, вне диэлектрика — в виде

$$\begin{aligned} u = & \sum_{m=0}^{\infty} [J_m(kr) (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) + \\ & + N_m(kr) (C_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta)]. \quad (17.22) \end{aligned}$$

Эти функции удовлетворяют волновому уравнению в пустоте и асимптотическому условию (17.16). При этом

$$\begin{aligned} \Psi(\theta) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} [(A_m + iC_m) \cos m\theta + \\ & + (B_m + iD_m) \sin m\theta] e^{i \frac{\pi}{2} (m + \frac{1}{2})}. \quad (17.23) \end{aligned}$$

Коэффициенты  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  и  $D_m$  можно сразу выбрать так, чтобы удовлетворялось условие (17.146). Для этого необходимо положить

$$A_m = -\lambda C_m, \quad B_m = -\lambda D_m, \quad (17.24)$$

где  $\lambda = \operatorname{tg} \delta$  ( $s = e^{2i\delta}$ ). Подставив (17.24) в (17.22), получим

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} [N_m(kr) - \lambda J_m(kr)] (C_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta). \quad (17.25)$$

При таком представлении остается удовлетворить лишь граничным условиям на присутствующих в задаче поверхностях и уравнению внутри. Для этой цели можно использовать соответствующий функционал из числа полученных нами ранее, считая собственным значением в нем входящее в (17.25)  $\lambda$ .

### § 18. Уравнения Максвелла

В §§ 8 и 14 были поставлены однородные задачи, возникающие при решении векторной задачи дифракции обобщенным методом собственных колебаний. В настоящем параграфе будут построены функционалы, стационарные на решениях этих задач. Мы ограничимся рассмотрением нескольких наиболее характерных вариантов. Как и всюду в этой главе, будем начинать с построения функционалов для  $k$ -метода, стационарных в классе таких функций, на которые не надо налагать условия, содержащие, соответственно, величины  $\epsilon$ ,  $\omega$ ,  $\rho$  или  $\bar{\rho}$ . Из получающихся при этом функционалов искомые функционалы для обобщенного метода найдутся простыми алгебраическими преобразованиями.

1. При построении стационарных функционалов для  $k$ -метода мы, как в последнем пункте § 15, будем исходить из уравнений, в которых  $\epsilon$  предполагается непрерывной функцией координат. Построив функционал для этого случая, мы в нем произведем предельный переход к наиболее интересной задаче, которой мы и ограничимся — задаче о *диэлектрическом теле с постоянной диэлектрической проницаемостью*. Вычисляя затем первую вариацию этого функционала, мы установим условия его стационарности. В этих построениях мы сначала считаем, что все поле заключено в конечном объеме  $V$ , на замкнутой границе  $S$  которого

$$e_t = 0. \quad (18.1a)$$

Здесь  $t$  — любое касательное к  $S$  направление.

Однородная задача состоит в решении системы уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} - ik\epsilon \mathbf{e} = 0 \quad (\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})), \quad (18.2a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} + ik\mathbf{h} = 0. \quad (18.2b)$$

Для построения функционала, дающего собственное значение  $k_n$ , нужно волновое уравнение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{e} - k^2 \epsilon \mathbf{e} = 0 \quad (18.3)$$

умножить скалярно на  $\mathbf{e}$  и проинтегрировать по всему объему. Используя тождество

$$\int_V \varphi \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{e} dV = \int_V \operatorname{rot} \varphi \operatorname{rot} \mathbf{e} dV - \int_S [\varphi \operatorname{rot} \mathbf{e}]_N dS \quad (18.4)$$

для  $\varphi = \mathbf{e}$  и учитывая, что интеграл по  $S$  равен нулю, получим

$$\int_V (\operatorname{rot} \mathbf{e})^2 dV - k^2 \int_V \epsilon \mathbf{e}^2 dV = 0. \quad (18.5)$$

Разрешив это равенство относительно  $k^2$ , мы найдем искомый функционал  $K(\mathbf{e})$ .

Эти преобразования не доказывают стационарность  $K(\mathbf{e})$ , она должна быть доказана независимо, вычислением первой вариации. В общем случае непрерывного  $\epsilon$  мы не будем доказывать стационарность (18.5). Ограничимся предельным случаем кусочно-постоянного  $\epsilon$  и установим, какие условия на поверхности разрыва  $\epsilon$  нужно накладывать на допустимые функции, чтобы имела место стационарность.

Пусть диэлектрическое тело занимает объем  $V^+$  с границей  $S_e$ ; в объеме  $V^- = V - V^+$  диэлектрическая проницаемость равна единице. В  $V^+$  удовлетворяется уравнение (18.3) с  $\epsilon = \operatorname{const}$ , в  $V^-$  — это же уравнение с  $\epsilon = 1$ , а на поверхности  $S_e$  диэлектрического тела выполняются условия

$$e_t^+ - e_t^- = 0, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{e}^+)_t - (\operatorname{rot} \mathbf{e}^-)_t = 0. \quad (18.6a)$$



Согласно (18.5), функционал  $K(\mathbf{e})$  есть

$$K(\mathbf{e}) = \frac{\int_V (\text{rot } \mathbf{e})^2 dV}{\mathbf{e} \int_{V^+} \mathbf{e}^2 dV + \int_{V^-} \mathbf{e}^2 dV}. \quad (18.7)$$

Функционалы типа (18.7) (и, аналогично, (18.15)) для  $k$ -метода неоднократно приводились в литературе.

Найдем первую вариацию  $K(\mathbf{e})$ , т. е. положим

$$\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}} + \mu \boldsymbol{\varphi}, \quad (18.8)$$

и вычислим член, пропорциональный  $\mu$ . Здесь  $\bar{\mathbf{e}}$  — истинное решение рассматриваемой однородной задачи, так что поле  $\bar{\mathbf{e}}$  удовлетворяет в  $V^+$  и  $V^-$  соответствующим уравнениям, на  $S_e$  — условиям (18.6a) и на  $S$  — условию (18.1a). Выясним условия, которым должна удовлетворять вектор-функция  $\boldsymbol{\varphi}$ , чтобы первая вариация (18.7) обратилась в нуль.

Как и в скалярной задаче, удобнее оперировать с функционалом в виде строчки, т. е. вместо (18.7) рассматривать эквивалентный функционал

$$L(\mathbf{e}) = \int_V (\text{rot } \mathbf{e})^2 dV - k^2 \mathbf{e} \int_{V^+} \mathbf{e}^2 dV - k^2 \int_{V^-} \mathbf{e}^2 dV. \quad (18.9)$$

Подставим (18.8) в (18.9) и произведем несложные преобразования с использованием тождества (18.4). Учитывая при этом свойства  $\bar{\mathbf{e}}$ , получим, что член порядка  $\mu$  равен нулю, если

$$\varphi_t^+ - \varphi_t^- |_{S_e} = 0, \quad (18.10a)$$

$$\varphi_t |_S = 0. \quad (18.10б)$$

Первое из этих равенств означает, что (18.9) обладает требуемыми свойствами стационарности в классе функций, тангенциальные компоненты которых непрерывны на поверхности  $S_e$ . При применении к (18.9) (или к (18.7)), например, метода Ритца, это условие надо накладывать на базисные функции. Это же относится и

к условию (18.1a) — согласно (18.10б), ему тоже должны удовлетворять допустимые функции.

Можно подобрать такой поверхностный интеграл, что, прибавив его к (18.9) (и к числителю (18.7)), можно сделать (18.1a) естественным. Этот интеграл легко найти методом неопределенных коэффициентов; он имеет вид

$$-2 \int_S [\mathbf{e} \text{ rot } \mathbf{e}]_N dS. \quad (18.11)$$

Для сокращения записи мы далее не будем писать слабое (18.11), подразумевая, что допустимые функции удовлетворяют на  $S$  условию (18.1a).

Легко убедиться простой подстановкой, что  $L(\bar{\mathbf{e}}) = 0$ . Поскольку на допустимые функции не накладывается никаких условий, содержащих  $\mathbf{e}$ , то из функционала (18.9) простым алгебраическим преобразованием можно получить для собственных значений  $\epsilon_n$  функционал в виде отношения двух квадратичных функционалов. Приравнявая  $L(\mathbf{e})$  к нулю и разрешая получающееся равенство относительно  $\mathbf{e}$ , получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{e}) = \frac{\int_V (\text{rot } \mathbf{e})^2 dV - k^2 \int_{V^-} \mathbf{e}^2 dV}{k^2 \int_{V^+} \mathbf{e}^2 dV}. \quad (18.12)$$

Это один из возможных видов функционала  $\epsilon$ -метода для задачи с кусочно-постоянным  $\mathbf{e}$ . Он содержит лишь вектор электрического поля  $\mathbf{e}$ .

Можно построить другой функционал, содержащий лишь вектор  $\mathbf{h}$ . Для этого надо волновое уравнение для  $\mathbf{h}$

$$\text{rot } \frac{1}{\epsilon} \text{ rot } \mathbf{h} - k^2 \mathbf{h} = 0 \quad (18.13)$$

умножить на  $\mathbf{h}$  и проинтегрировать по объему. Аналог формулы (18.5) будет иметь вид

$$\int_V \frac{1}{\epsilon} (\text{rot } \mathbf{h})^2 dV - k^2 \int_V \mathbf{h}^2 dV = 0. \quad (18.14)$$

Повторяя то же построение, что и выше, мы получим (для задачи о теле с  $\epsilon = \text{const}$ ) функционал

$$L(\mathbf{h}) = \frac{1}{\epsilon} \int_{V^+} (\text{rot } \mathbf{h})^2 dV + \int_{V^-} (\text{rot } \mathbf{h})^2 dV - k^2 \int_V \mathbf{h}^2 dV. \quad (18.15)$$

Проверка показывает, что действительно

$$L(\bar{\mathbf{h}} + \mu\varphi) = O(\mu^2), \quad (18.16)$$

г. е. (18.15) есть искомый функционал, стационарный на решениях однородных уравнений Максвелла с граничными условиями

$$(\text{rot } \mathbf{h})_t|_S = 0, \quad (18.16)$$

$$h_t^+ - h_t^-|_S = 0, \quad (\text{rot } \mathbf{h}^+)_t - (\text{rot } \mathbf{h}^-)_t|_S = 0 \quad (18.66)$$

и принимающий в стационарных точках нулевые значения. При этом условия (18.16) и второе из (18.66) не нужно накладывать на допустимые функции — эти условия для функционала (18.15) являются естественными. Единственное требование на  $\varphi$ , необходимое для выполнения (18.16), — непрерывность тангенциальных компонент на  $S_\epsilon$ .

Из (18.15) получаем второй функционал для собственного значения

$$E(\mathbf{h}) = \frac{\int_{V^+} (\text{rot } \mathbf{h})^2 dV}{k^2 \int_V \mathbf{h}^2 dV - \int_{V^-} (\text{rot } \mathbf{h})^2 dV}. \quad (18.17)$$

Полученные функционалы  $\epsilon$ -метода пригодны и для решения внешних задач. В этом случае необходимо допустимые функции подчинять условию излучения, а при вычислении интегралов по бесконечному объему считать  $k$  слегка комплексным.

Формулы (18.12) и (18.17) дают два решения задачи этого пункта. Формулы для  $E(u)$  в скалярной задаче (§ 15) связаны с полученными выше формулами и для двумерного случая непосредственно получаются из них.

В двумерной задаче для  $E$ -поляризации из (18.12) следует (15.11), а для  $H$ -поляризации из (18.17) следует (15.25).

2. В этом пункте мы построим стационарные функционалы для одного из вариантов  $\omega$ -метода (см. § 14, п. 1). Мы ограничимся *изотропным и постоянным по всей поверхности импедансом*; обобщение на более сложные случаи может быть сделано. Мы примем, что в поле нет других тел, кроме тела с импедансной поверхностью  $S_w$ , так что  $\epsilon \equiv 1$ . Это упрощение не является принципиальным, хотя, как указано в конце пункта, оно приводит к своеобразному вырождению.

Итак, рассматривается система уравнений

$$\text{rot } \mathbf{h} - ike = 0, \quad (18.18a)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} + ik\mathbf{h} = 0 \quad (18.18b)$$

с граничными условиями на  $S_w$ :

$$e_t + \omega h_\tau = 0, \quad e_\tau - \omega h_t = 0, \quad (18.19)$$

где  $t, \tau$  — взаимно перпендикулярные орты, касательные к  $S_w$  и образующие с внешней нормалью  $N$  правую тройку. В задаче (18.18), (18.19)  $\omega$  — собственное значение, и надо построить функционал  $W(\mathbf{e})$ , стационарный на решениях этой задачи и равный в стационарных точках соответствующим собственным значениям. Как обычно, мы начнем с предположения, что  $S_w$  — замкнутая поверхность, окружающая все поле, и будем строить такой функционал  $K(\mathbf{e})$ , для которого (18.19) — *естественное граничное условие*.

Мы могли бы, аналогично предыдущему пункту, домножить волновое уравнение (18.3) (при  $\epsilon \equiv 1$ ) на  $\mathbf{e}$ , проинтегрировать по  $V$ , преобразовать интеграл от  $\mathbf{e} \text{ rot rot } \mathbf{e}$  по формуле (18.4) и использовать граничные условия. После этого нужно было бы проверить стационарность получившегося выражения и естественность граничных условий. Как показывает проверка, для рассматриваемых в этом параграфе вариантов поверхностных методов таким способом действительно можно получить простейшие из функционалов, обладающие нужными свойствами. Тем не менее мы здесь из методических соображений будем пользоваться тем же

стандартным приемом, что и в § 15. Взяв за основу соответствующие объемные интегралы, мы будем добавлять к ним поверхностные интегралы с неопределенными коэффициентами, а потом определять эти коэффициенты из требования естественности граничных условий. Такой прием регулярен в том смысле, что получающийся в конечном итоге функционал всегда будет обладать нужными свойствами. Никакой дополнительной проверки не требуется. К тому же, этим способом удается сразу найти все существующие функционалы с требуемыми свойствами. Если же для какого-либо метода алгебраическая система для определения коэффициентов окажется несовместной, то это значит, что из взятых за основу объемных интегралов не может быть построен функционал с требуемыми свойствами.

Функционал  $k$ -метода, для которого условия (18.19) естественны, будем искать в виде

$$L(\mathbf{e}) = \int_V (\text{rot } \mathbf{e})^2 dV - k^2 \int_V \mathbf{e}^2 dV + \int_{S_\omega} [c_1 e_t^2 + c_2 e_t e_\tau + c_3 e_\tau^2 + c_4 (\text{rot } \mathbf{e})_t^2 + c_5 (\text{rot } \mathbf{e})_t (\text{rot } \mathbf{e})_\tau + c_6 (\text{rot } \mathbf{e})_\tau^2 + c_7 e_t (\text{rot } \mathbf{e})_t + c_8 e_t (\text{rot } \mathbf{e})_\tau + c_9 e_\tau (\text{rot } \mathbf{e})_t + c_{10} e_\tau (\text{rot } \mathbf{e})_\tau] dS. \quad (18.20)$$

Для определения входящих в (18.20) коэффициентов нужно подставить туда (18.8), считая, что  $\mathbf{e}$  — решение поставленной однородной задачи, и приравнять первую вариацию нулю. При этом на  $\varphi$  не нужно накладывать никаких ограничений. Это приведет к двум независимым системам линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2\omega c_1 + ikc_8 = -2ik, & \quad 2ikc_4 - \omega c_9 = 0, \\ 2\omega c_3 - ikc_9 = -2ik, & \quad 2ikc_6 + \omega c_8 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (18.21a)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega c_2 - ikc_7 = 0, & \quad ikc_5 + \omega c_7 = 0, \\ \omega c_2 + ikc_{10} = 0, & \quad ikc_5 - \omega c_{10} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.21b)$$

Первая из этих систем является недоопределенной неоднородной системой; простейшее ее решение есть

$$c_1 = c_3 = -\frac{ik}{\omega}, \quad c_4 = c_6 = c_8 = c_9 = 0. \quad (18.22a)$$

Система (18.21б) однородна и линейно зависима. Она имеет однопараметрическое семейство нетривиальных решений; к этим решениям мы вернемся несколько позже, а сейчас возьмем простейшее тривиальное решение

$$c_2 = c_5 = c_7 = c_{10} = 0. \quad (18.22б)$$

В результате подстановки (18.22) в (18.20) получим

$$L(\mathbf{e}) = \int_V (\text{rot } \mathbf{e})^2 dV - k^2 \int_V \mathbf{e}^2 dV - \frac{ik}{\omega} \int_{S_\omega} (e_t^2 + e_\tau^2) dS. \quad (18.23)$$

Этот функционал стационарен на решениях однородной задачи  $k$ -метода. В стационарных точках он принимает нулевые значения. Граничные условия (18.19) являются для (18.23) естественными. Это позволяет из (18.23) получить первый из *искомых* в этом пункте функционалов для  $\omega$ -метода

$$W(\mathbf{e}) = \frac{ik \int_{S_\omega} (e_t^2 + e_\tau^2) dS}{\int_V [(\text{rot } \mathbf{e})^2 - k^2 \mathbf{e}^2] dV}. \quad (18.24)$$

Вернемся теперь к другим решениям систем (18.21). Общее решение этих систем содержит три произвольных параметра (два из (18.21a) и один из (18.21б)). Аналогично § 16, мы не будем выписывать это общее решение, а построим трехпараметрическое семейство функционалов, отвечающих этому решению, путем добавления к (18.23) слагаемого

$$\int_{S_\omega} \left\{ D_1 \left[ e_t - \frac{\omega}{ik} (\text{rot } \mathbf{e})_\tau \right]^2 + D_2 \left[ e_\tau + \frac{\omega}{ik} (\text{rot } \mathbf{e})_t \right]^2 + D_3 \left[ e_t - \frac{\omega}{ik} (\text{rot } \mathbf{e})_\tau \right] \left[ e_\tau + \frac{\omega}{ik} (\text{rot } \mathbf{e})_t \right] \right\} dS. \quad (18.25)$$

Каковы бы ни были  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ , прибавление (18.25) не меняет стационарных свойств функционала, так как его первая вариация равна нулю на решении однородной задачи с граничными условиями (18.19). Если, в частности,

положить  $D_1 = D_2 = \frac{ik}{\omega}$  и  $D_3 = 0$ , то  $\omega$  будет входить в функционал, как и раньше в (18.23), только в первой степени. Разрешая равенство  $L(\mathbf{e}) = 0$  относительно  $\omega$ , мы получим второй из искомых функционалов

$$W(\mathbf{e}) = \frac{ik \left\{ \int_V [k^2 \mathbf{e}^2 - (\text{rot } \mathbf{e})^2] dV + 2 \int_{S_\omega} [e_t (\text{rot } \mathbf{e})_\tau - e_\tau (\text{rot } \mathbf{e})_t] dS \right\}}{\int_{S_\omega} [(\text{rot } \mathbf{e})_t^2 + (\text{rot } \mathbf{e})_\tau^2] dS}. \quad (18.26)$$

Получившийся функционал имеет несколько более сложный вид, чем (18.24). Однако окончательный выбор — каким функционалом пользоваться в каждом конкретном случае, зависит главным образом от того, какими значениями  $\omega$  описывается резонанс (см. § 16). Правда, как будет показано ниже, в рассматриваемой нами сейчас простейшей задаче большие и малые собственные значения однозначно связаны между собой, так что для этой задачи, вероятно, предпочтительнее более простой функционал (18.24).

При построении функционалов в этом пункте мы использовали объемное слагаемое, к которому приводит волновое уравнение (18.3) для  $\mathbf{e}$  (два первых слагаемых в (18.20)). Можно было бы исходить из волнового уравнения (18.13) для  $\mathbf{h}$ . Однако при принятом нами условии, что в поле нет других тел, кроме тела с поверхностью  $S_\omega$ , уравнение (18.13) не дает новых функционалов. Получающиеся при этом функционалы отличаются от (18.24) и (18.26) лишь тем, что в этих функционалах  $\mathbf{e}$  всюду заменяется на  $\mathbf{h}$ , а числитель и знаменатель меняются местами. Связано это с тем, что задача (18.18), (18.19) (вместе с условием излучения) инвариантна, как легко проверить, относительно подстановки:

$$\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} \rightarrow -\mathbf{e}, \quad \omega \rightarrow \frac{1}{\omega}. \quad (18.27)$$

В частности, если при каком-то определенном  $\omega$  в резонаторе существуют собственные колебания на данной частоте, то в другом резонаторе, с той же поверхностью

$S_\omega$ , но с импедансом  $1/\omega$ , также существуют собственные колебания на той же частоте. Другими словами, если при заданных  $k$  и поверхности  $S_\omega$  существует собственный импеданс  $\omega_n$ , то существует и собственный импеданс  $1/\omega_n$ . Это свойство не имеет аналогии в трехмерной скалярной задаче. Оно может быть использовано при решении уравнений для  $\omega_n$ , получающихся, например, при применении метода Ритца — эти уравнения вместе с корнем  $\omega_n$  имеют и корень  $1/\omega_n$ . Отмеченное свойство  $\omega$ -метода имеет место лишь в системах без других тел, кроме тела с поверхностью  $S_\omega$ .

3. Построим теперь функционалы для задачи на собственные значения  $\rho^{(e)}$ , сформулированной в начале п. 3 § 14. Рассматривается задача о полях  $\{\mathbf{e}, \mathbf{h}\}$ , удовлетворяющих уравнениям Максвелла (18.18) и на некоторой поверхности  $S_\rho$  — условиям (14.25), (14.26). Как и в п. 1, сначала предполагается, что все поле заключено внутри замкнутой оболочки  $S$ , на которой выполняется условие (18.1), т. е. рассматривается закрытый резонатор; потом условие (18.1) снимается и вводится условие излучения.

Как и для  $\omega$ -метода, нужно искать функционал в общем виде с неопределенными коэффициентами, выписать для определения этих коэффициентов систему уравнений и из решения этой системы получить нужные функционалы. Не приводя всех промежуточных выкладок, выпишем лишь простейшие из получающихся функционалов  $k$ -метода, для которых условия (14.25), (14.26) естественны:

$$L(\mathbf{e}) = \int_V (\text{rot } \mathbf{e})^2 dV - k^2 \int_V \mathbf{e}^2 dV - \frac{ik}{\rho^{(e)}} \int_{S_\rho} (e_t^2 + e_\tau^2) dS, \quad (18.28)$$

$$L(\mathbf{e}) = \int_V (\text{rot } \mathbf{e})^2 dV - k^2 \int_V \mathbf{e}^2 dV - 2 \int_{S_\rho} \{e_t [(\text{rot } \mathbf{e}^+)_\tau - (\text{rot } \mathbf{e}^-)_\tau] - e_\tau [(\text{rot } \mathbf{e}^+)_t - (\text{rot } \mathbf{e}^-)_t]\} dS + \frac{\rho^{(e)}}{ik} \int_{S_\rho} \{[(\text{rot } \mathbf{e}^+)_t - (\text{rot } \mathbf{e}^-)_t]^2 + [(\text{rot } \mathbf{e}^+)_\tau - (\text{rot } \mathbf{e}^-)_\tau]^2\} dS. \quad (18.29)$$

Из этих двух выражений получаются функционалы для собственных значений  $\rho^{(e)}$ :

$$P^{(e)}(e) = \frac{ik \int_{S_\rho} (e_t^2 + e_\tau^2) dS}{\int_V [(\operatorname{rot} e)^2 - k^2 e^2] dV}, \quad (18.30)$$

$$P^{(e)}(e) = \frac{ik}{N} \left\{ - \int_V [(\operatorname{rot} e)^2 - k^2 e^2] dV + \right. \\ \left. + 2 \int_{S_\rho} \{ e_t [(\operatorname{rot} e^+)_\tau - (\operatorname{rot} e^-)_\tau] - e_\tau [(\operatorname{rot} e^+)_t - (\operatorname{rot} e^-)_t] \} dS, \right. \\ (18.31)$$

где

$$N = \int_{S_\rho} \{ [(\operatorname{rot} e^+)_t - (\operatorname{rot} e^-)_t]^2 + [(\operatorname{rot} e^+)_\tau - (\operatorname{rot} e^-)_\tau]^2 \} dS.$$

Тангенциальные составляющие допустимых функций  $e$  для этих функционалов должны быть непрерывными на  $S_\rho$ , а тангенциальные составляющие  $\operatorname{rot} e$  — разрывными, чтобы обеспечить возможность разрыва этих компонент искомым собственным полям. Во внешних задачах допустимые функции должны удовлетворять условию излучения, а при наличии других тел или поверхностей — соответствующим условиям.

Построение стационарных функционалов для II варианта обобщенного метода, сформулированного в § 14, п. 3 — задачи с граничными условиями (14.30), (14.31) — не потребует, как легко убедиться, новых выкладок. В этом методе однородная задача состоит в нахождении полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла (18.18), этим граничным условиям на некоторой поверхности  $S_\rho$  и для внешних задач — условию излучения. Собственным значением является число  $\rho^{(m)}$ . В принятом нами предположении, что в поле нет других тел, кроме поверхности  $S_\rho$ , эта и предыдущая задачи переходят друг в друга при подстановке

$$e \rightarrow h, \quad h \rightarrow -e, \quad \rho^{(e)} \rightarrow \rho^{(m)}. \quad (18.32)$$

Следовательно, если для некоторой поверхности  $S_\rho$  задача (18.18), (14.25), (14.26) имеет собственное значение  $\rho_n^{(e)}$ , то задача (18.18), (14.30), (14.31) для той же поверхности  $S_\rho$  имеет собственное значение  $\rho_n^{(m)}$ , равное  $\rho_n^{(e)}$  первой задачи. Поэтому для  $\rho_n^{(m)}$  сохраняются (с заменой (18.32)) и функционалы (18.28) — (18.31). Если в поле есть еще тела или поверхности, кроме рассматриваемой, то функционалы для обеих задач будут различными. Эти функционалы легко построить, пользуясь описанной методикой обеспечения естественности граничных условий.

\* \* \*

В этой главе были построены стационарные функционалы для определения собственных значений однородных задач, вводимых в различных вариантах обобщенного метода. Эти функционалы аналогичны известным функционалам релеевского типа для собственных частот закрытых резонаторов.

## Г л а в а IV

## ПРИМЕНЕНИЕ К КОНКРЕТНЫМ ЗАДАЧАМ

В предыдущих главах изложены основы метода решения задач дифракции, названного нами обобщенным методом собственных колебаний. В начале этой главы (§ 19) приводятся примеры, иллюстрирующие различные варианты этого метода. Эти примеры выбраны достаточно простыми, чтобы можно было сравнить результаты с точным решением.

Все остальные параграфы посвящены решению задач, которые другими способами либо вообще не решаются, либо решаются сложнее или менее полно. Задачи сгруппированы по вариантам общего метода, использованным при решении. Лишь в § 20, носящем отчасти тоже методический характер, при решении квантовомеханической задачи рассеяния используются одновременно два метода —  $s$ -метод и  $\epsilon$ -метод. Сравнение численных результатов позволяет установить погрешность приближенных формул, учитывающих в резонансе, помимо  $U^0$ , лишь одно слагаемое из ряда. В этой задаче, а также в задачах об открытом и закрытом резонаторах с диэлектрическим телом (§ 21) для поиска собственных значений применен вариационный аппарат  $\epsilon$ -метода.

В §§ 22—26 применены оба варианта  $\rho$ -метода. В § 22 для двух параллельных зеркал произведено численное решение интегрального уравнения (10.18). Тем самым теория открытых резонаторов этого типа обобщена на случай, когда размеры зеркал сравнимы с расстоянием между ними и с длиной волны. Зеркала могут обладать ненулевой прозрачностью. В § 23 дано аналитическое решение задачи о смещении вещественных собственных частот резонатора с полупрозрачными стенками относи-

тельно собственных частот резонатора с металлическими стенками. Использована дифференциальная постановка однородных задач  $\rho$ -метода (10.4а). Дано аналитическое выражение функции  $\rho_n(k)$  вблизи собственных частот закрытого резонатора и найдена фазовая скорость вытекающих волн в волноводе с полупрозрачными стенками. Использована отмеченная, например, в § 7 возможность выбирать в качестве  $U^0$  решение некоторой другой, более простой задачи дифракции. Этот прием применен и в большинстве следующих параграфов этой главы.

В §§ 24 и 25 рассматриваются двумерные задачи о металлических резонаторах произвольной формы с малым отверстием и задачи о фазовых скоростях вытекающих волн волноводов с продольными щелями для  $E$ - и для  $H$ -волн. Эти задачи потребовали некоторой модификации  $\rho$ -метода — в однородное интегральное уравнение для поля собственных колебаний на щели вводится весовая функция, описывающая электростатическую особенность поля на краях щели.

Последняя задача, к которой применялся  $\rho$ -метод, рассмотрена в § 26 — резонатор из материала с большим  $\epsilon$ . Оказалось, что для такого открытого резонатора (в отличие от резонатора с полупрозрачной стенкой) не только добротность, но и смещение резонансной частоты зависят от того, какие тела расположены вблизи резонатора.

В §§ 27 и 28 применен  $s$ -метод, который сводит решение задачи с излучением к решению вещественного интегрального уравнения по поверхности тела, и для нескольких двумерных открытых резонаторов дано численное решение этого уравнения. Найдено затухание вытекающих волн в волноводах нескольких форм с полупрозрачными стенками или с продольной щелью. В этом методе не нужно предварительно решать задачу о резонаторе той же формы с идеально проводящими стенками, находить функцию Грина внешней области (что весьма сложно) и т. д. Поэтому в этих параграфах задачи о резонаторах и волноводах со щелями решены без обычного ограничения, состоящего в том, что снаружи щель дополнена бесконечным фланцем и что внутреннего область резонатора очень проста.

### § 19. Методические примеры

Аппарат, развитый в первых двух главах книги, иллюстрируется в первой половине параграфа (пп. 1—6) на примере элементарной одномерной задачи. Задача эта имеет явное решение, и применение к ней различных вариантов обобщенного метода собственных колебаний позволяет получить разложения этого решения в бесконечные ряды по различным функциям. Сравнение этих решений позволит, в частности, проиллюстрировать соотношения между резонансными кривыми, описывающими для одной и той же задачи амплитуду резонансного слагаемого в различных разложениях. В пп. 7—9 стационарные функционалы главы III используются для нахождения собственных значений двух — тоже одномерных — однородных задач. Так как эти собственные значения легко находятся непосредственно, то на этих примерах удается установить практическую скорость сходимости метода Ритца в применении к комплекснозначным функционалам.

Рассмотрим одномерную (поле не зависит от  $y$  и  $z$ ) задачу о возбуждении закрытого резонатора, частично заполненного однородным диэлектриком. Пусть требуется найти решение уравнений

$$\frac{d^2U}{dx^2} + k^2\epsilon U = 2k\delta(x) \quad (|x| < a), \quad (19.1a)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} + k^2U = 0 \quad (a < |x| < b) \quad (19.1б)$$

с условием непрерывности  $U$  и  $\frac{dU}{dx}$  при  $|x| = a$  и

$$U(\pm b) = 0. \quad (19.2)$$

Эта задача тождественна задаче о колебаниях нагруженной струны и имеет явное решение

$$U(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\epsilon} \sin k(b-a) \cos k\sqrt{\epsilon}(a-|x|)}{D} + \\ + \frac{\cos k(b-a) \sin k\sqrt{\epsilon}(a-|x|)}{D}, \quad (|x| \leq a) \\ \sqrt{\epsilon} \sin k(b-|x|)/D, \quad (a \leq |x| \leq b), \end{cases} \quad (19.3)$$

$$D = \epsilon \sin k\sqrt{\epsilon}a \sin k(b-a) - \sqrt{\epsilon} \cos k\sqrt{\epsilon}a \cos k(b-a).$$

Ниже мы получим это решение разными методами. Благодаря симметрии задачи относительно  $x = 0$  во всех однородных задачах можно ограничиться лишь четными по  $x$  собственными функциями.

1. Начнем с  $k$ -метода. Собственные функции соответствующей однородной задачи этого метода суть

$$u_n(x) = \begin{cases} \cos k_n \sqrt{\epsilon} x & (|x| \leq a), \\ \frac{\cos k_n \sqrt{\epsilon} a}{\sin k_n(b-a)} \sin k_n(b-|x|) & (a \leq |x| \leq b), \end{cases} \quad (19.4a)$$

а собственные значения  $k_n$  определяются из трансцендентного уравнения

$$\sqrt{\epsilon} \sin k \sqrt{\epsilon} a \sin k(b-a) - \cos k \sqrt{\epsilon} a \cos k(b-a) = 0. \quad (19.5)$$

Решение задачи представляется в виде ряда

$$U(x) = \sum_n \frac{2k \sin^2 k_n(b-a) u_n(x)}{(k^2 - k_n^2) [a\epsilon \sin^2 k_n(b-a) + (b-a) \cos^2 k_n \sqrt{\epsilon} a]}. \quad (19.6)$$

Разумеется, (19.6) есть просто другое представление (19.3), а именно, это разложение (19.3) как функции  $k$ , на простейшие дроби.

2. При применении к этой задаче  $\epsilon$ -метода однородное уравнение вне интервала  $|x| < a$  будет совпадать с (19.1б). Возможно лишь одно решение такого уравнения с условием (19.2), поэтому при  $a \leq |x| \leq b$  все собственные функции  $\epsilon$ -метода совпадают:

$$u_n(x) = \sin k(b-|x|) \quad (a \leq |x| \leq b). \quad (19.7)$$

Задача сводится к однородному уравнению на собственные значения  $\epsilon_n$ :

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} + k^2\epsilon_n u_n = 0 \quad (|x| < a), \quad (19.8)$$

с импедансными граничными условиями  $u_n \pm \frac{1}{k} \operatorname{tg} k(b-a) \times \times \frac{du_n}{dx} \Big|_{x=\pm a} = 0$ . Собственными функциями этой задачи

являются

$$u_n(x) = \frac{\sin k(b-a)}{\cos k\sqrt{\varepsilon_n}a} \cos k\sqrt{\varepsilon_n}x. \quad (19.9)$$

Собственные значения  $\varepsilon_n$  определяются из того же трансцендентного уравнения (19.5), в котором теперь  $k$  — заданное число, а искомым является  $\varepsilon$ . Решать уравнение (19.5) относительно  $\varepsilon$  всегда проще, чем относительно  $k$ . Существенное упрощение появляется в случае, если в исходном уравнении (19.1)  $\varepsilon$  комплексно; тогда для  $k$ -метода уравнение (19.5) становится комплексным, а для  $\varepsilon$ -метода *остаётся вещественным*.

Так как источник в нашей задаче находится внутри диэлектрика, то в  $\varepsilon$ -методе  $U^0$  можно не выделять не только при  $|x| \leq a$ , но и при  $|x| > a$ . Тогда решение имеет вид

$$U(x) = \sum_n \frac{4\sqrt{\varepsilon_n} \cos k\sqrt{\varepsilon_n}a \cdot u_n(x)}{(\varepsilon - \varepsilon_n) \sin k(b-a) (2ka\sqrt{\varepsilon_n} + \sin 2k\sqrt{\varepsilon_n}a)}. \quad (19.10)$$

Как и (19.6), ряд (19.10) является разложением функции  $U(x)$  на простейшие дроби; теперь, однако, (19.3) рассматривается как функция  $\varepsilon$  при фиксированном  $k$ , так что разложение ведётся по корням  $\varepsilon_n$  уравнения (19.5).

Наряду с (19.10) можно выписать другой вид решения, выделив предварительно  $U^0$  — решение неоднородной задачи с  $\varepsilon = 1$ :

$$U^0(x) = \frac{\sin k(|x| - b)}{\cos kb}. \quad (19.11)$$

Тогда полное решение будет иметь вид

$$U(x) = U^0(x) + \sum_n \frac{(\varepsilon - 1) \cdot 4\sqrt{\varepsilon_n} \cos k\sqrt{\varepsilon_n}a \cdot u_n(x)}{(\varepsilon_n - 1)(\varepsilon - \varepsilon_n) \sin k(b-a) (2ka\sqrt{\varepsilon_n} + \sin 2k\sqrt{\varepsilon_n}a)}. \quad (19.12)$$

Ряд в (19.12) является разложением на простейшие дроби функции  $U - U^0$ , рассматриваемой как функция аргумента  $\varepsilon - 1$ .

Если параметры задачи таковы, что  $\sin k(b-a) = 0$ , то, согласно трансцендентному уравнению (19.5), одновременно и  $\cos k\sqrt{\varepsilon_n}a = 0$ ; в (19.10) и в сумме (19.12) возникает неопределённость, которую легко раскрыть, так как

$$\frac{\cos k\sqrt{\varepsilon_n}a}{\sin k(b-a)} = \sqrt{\varepsilon_n} \frac{\sin k\sqrt{\varepsilon_n}a}{\cos k(b-a)}. \quad (19.13)$$

Кроме того, в случае, когда  $\cos kb = 0$ , все выражение (19.12) становится неопределённым, поскольку тогда одно из  $\varepsilon_n$  равно единице и ряд превращается в бесконечность. Одновременно в бесконечность обращается и  $U^0$ . Решение  $U(x)$  определяется разностью двух бесконечно больших величин. Представление (19.10) при этом сохраняется.

3. Применим теперь к той же задаче варианты обобщенного метода, описанные в главе II. Как уже отмечалось, размерность рядов в этих методах на единицу меньше, так что для данной задачи рядов не должно возникать вообще, а сразу будет получаться явное решение.

Начнем с  $\omega$ -метода. Вспомогательная задача в этом методе будет состоять из однородного уравнения с истинными  $k$  и  $\varepsilon$ , условий непрерывности  $u_n$  и  $\frac{du_n}{dx}$  при  $|x| = a$  и условия

$$u_n \pm \omega_n \frac{du_n}{dx} = 0 \quad \text{при } x = \pm b. \quad (19.14)$$

Эта задача имеет единственную четную по  $x$  собственную функцию

$$u_1(x) = \begin{cases} \cos k\sqrt{\varepsilon}x & (|x| \leq a), \\ \cos k\sqrt{\varepsilon}a \cos k(|x| - a) - \\ - \sqrt{\varepsilon} \sin k\sqrt{\varepsilon}a \sin k(|x| - a) & (a \leq |x| \leq b) \end{cases} \quad (19.15)$$

и соответствующее ей собственное значение

$$\omega_1 = \frac{1}{k} \frac{\sqrt{\varepsilon} \sin k\sqrt{\varepsilon}a \sin k(b-a) - \cos k\sqrt{\varepsilon}a \cos k(b-a)}{\sqrt{\varepsilon} \sin k\sqrt{\varepsilon}a \cos k(b-a) + \cos k\sqrt{\varepsilon}a \sin k(b-a)}. \quad (19.16)$$



Для решения исходной неоднородной задачи нужно знать еще  $U^0$  — любое решение этой задачи без условия (19.2). В качестве такого решения удобно взять функцию

$$U^0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin k \sqrt{\varepsilon} |x| & (|x| \leq a) \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin ka \sqrt{\varepsilon} \cos k(|x| - a) + \\ + \cos k \sqrt{\varepsilon} a \sin k(|x| - a) & (a \leq |x| \leq b). \end{cases} \quad (19.17)$$

Зная  $U^0$ , можно, согласно § 9, выписать решение исходной задачи в виде

$$U(x) = U^0(x) + \frac{\sqrt{\varepsilon} \cos k \sqrt{\varepsilon} a \sin k(b-a) + \sin k \sqrt{\varepsilon} a \cos k(b-a)}{k \omega_1 \sqrt{\varepsilon} [\sqrt{\varepsilon} \sin k \sqrt{\varepsilon} a \cos k(b-a) + \cos k \sqrt{\varepsilon} a \sin k(b-a)]} u_1(x). \quad (19.18)$$

Подставив в (19.18) вместо  $U^0$ ,  $u_1$  и  $\omega_1$  их явные выражения (19.17), (19.15) и (19.16), мы получим то же решение (19.3) неоднородной задачи. Все резонансные свойства описываются в (19.18) коэффициентом при  $u_1(x)$ , точнее, нулями функции  $\omega_1$ , как функции  $k$ . Числитель  $\omega_1$  совпадает с левой частью уравнения (19.5), так что нули совпадают с собственными частотами  $k_n$  — корнями этого уравнения. Но *решать трансцендентное уравнение теперь не нужно*; для определения соответствующего значения достаточно лишь *вычислить* соответствующим образом пронормированную левую часть этого уравнения при заданном  $k$ . Более того, зная это собственное значение, мы можем сразу же выписать решение задачи с *любым импедансным условием* при  $|x| = b$  (вместо (19.2)). Для этого достаточно в (19.18)  $\omega_1$  заменить на  $\omega_1 - \omega$ , где  $\omega$  — истинное значение импеданса в граничном условии.

4. Перейдем к первому варианту  $\rho$ -метода. Этот метод можно применять к нашей задаче по-разному, вводя собственное значение в граничные условия либо при  $|x| = b$  (§ 10), либо при  $|x| = a$  (§ 11). Мы здесь будем пользоваться методом § 11.

В этом методе прежде всего нужно решить однородное уравнение с условием (19.2) и следующими условиями при  $|x| = a$ :

$$u_n|_{|x|=a-0} - u_n|_{|x|=a+0} = 0, \quad (19.19a)$$

$$\frac{du_n}{dx} \Big|_{|x|=a-0} - \frac{du_n}{dx} \Big|_{|x|=a+0} \pm \frac{1}{\rho_n} u_n(\pm a) = 0. \quad (19.19b)$$

Как и в  $\omega$ -методе, эта однородная задача имеет лишь одну четную по  $x$  собственную функцию

$$u_1(x) = \begin{cases} \cos k \sqrt{\varepsilon} x & (|x| \leq a), \\ \frac{\cos k \sqrt{\varepsilon} a}{\sin k(b-a)} \sin k(b - |x|) & (a \leq |x| \leq b). \end{cases} \quad (19.20)$$

Соответствующее ей собственное значение равно

$$\rho_1 = \frac{1}{k} \frac{\cos k \sqrt{\varepsilon} a \sin k(b-a)}{\sqrt{\varepsilon} \sin k \sqrt{\varepsilon} a \sin k(b-a) - \cos k \sqrt{\varepsilon} a \cos k(b-a)}. \quad (19.21)$$

Для определения  $U^0$  нужно, согласно § 11, сначала решить уравнение (19.1a) при  $|x| \leq a$  с любым условием при  $|x| = a$ . Проще всего принять

$$U^0(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin k \sqrt{\varepsilon} |x| \quad (|x| \leq a). \quad (19.22a)$$

Затем надо зафиксировать это решение в точке  $|x| = a$ , после чего решить задачу Дирихле для области  $a \leq |x| \leq b$  с условием (19.2) и заданным значением

$$U^0(\pm a) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin k \sqrt{\varepsilon} a. \quad (19.23)$$

Это дает функцию  $U^0$  в остальной части интервала

$$U^0(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\sin k \sqrt{\varepsilon} a}{\sin k(b-a)} \sin k(b - |x|) \quad (a \leq |x| \leq b). \quad (19.22b)$$

Окончательно решение задачи представляется в виде

$$U(x) = U^0(x) + \frac{k\rho_1 [\sqrt{\varepsilon} \cos k \sqrt{\varepsilon} a \sin k(b-a) + \sin k \sqrt{\varepsilon} a \cos k(b-a)]}{\sqrt{\varepsilon} \cos k \sqrt{\varepsilon} a \sin k(b-a)} \cdot u_1(x). \quad (19.24)$$

Разумеется, и теперь (19.24), с учетом (19.22), (19.20) и (19.21), совпадает с (19.3).

В отличие от  $\omega$ -метода в  $\rho$ -методе возможны случаи, когда одного знания  $\rho$  как функции  $k$  недостаточно для описания резонансных свойств системы. Резонанс наступает тогда, когда  $\rho_1 = \infty$ . Знаменатель  $\rho_1$  совпадает с левой частью уравнения (19.5), так что это имеет место лишь на собственных частотах  $k_n$ ; если  $\rho_1 = \infty$ , то это всегда резонанс. Кроме того, резонанс может иметь место и при  $\rho_1 = 0$ . Если  $\rho_1 = 0$  вследствие равенства нулю только одного из множителей в числителе (19.21), то резонанса нет; возникающие в (19.24) неопределенности типа  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$  легко раскрываются, и результат получается конечным. Если же одновременно равны нулю оба упомянутых множителя  $\cos k \sqrt{\varepsilon} a = \sin k(b-a) = 0$ , то, как видно из (19.3), общее поле должно обращаться в бесконечность. Действительно, согласно (19.24), коэффициент при  $u_1$  равен в этом случае бесконечности, а само  $u_1$  конечно. Кроме того, при  $a < |x| < b$  бесконечно и  $U^0$ . Такой резонанс не обнаруживается на кривой  $\rho_1(k)$ . Происходит это из-за того, что  $\rho$ -метод пригоден для решения двух отличных по характеру задач: на том месте, где ставятся граничные условия  $\rho$ -метода, в истинной задаче может быть либо условие непрерывности поля и производной (как в нашей задаче), либо условие  $U = 0$  (тогда в резонансе  $\rho = 0$ ). В последнем случае еще возможны два варианта задачи, в зависимости от того, какая область — внутренняя или внешняя — рассматривается. Собственное значение несет информацию о резонансах во всех этих задачах. Множитель  $\cos k \sqrt{\varepsilon} a$  обращается в нуль при резонансе внутренней области,  $\sin k(b-a)$  — внешней области, а знаменатель (19.21) — при резонансе нашей задачи. При совпадении резонансов внутренней и внешней областей резонанс в нашей задаче соответствует значению  $\rho_1 = 0$ .

Кстати, и в  $\omega$ -методе решения однородной задачи пригодны для двух истинных задач — с условием (19.2) и с условием  $\frac{du}{dx} \Big|_{|x|=b} = 0$ . Однако в этих двух задачах резонанс не может возникнуть одновременно — числитель и знаменатель в (19.16) не могут одновременно равняться нулю.

Решая задачу I вариантом  $\rho$ -метода, мы должны отдельно исследовать частоты, при которых  $\rho = 0$ . Для этого можно, в частности, использовать второй вариант  $\rho$ -метода.

**5.** Однородная задача второго варианта  $\rho$ -метода отличается от задачи первого варианта условиями

при  $x = \pm a$ :

$$\frac{du_n}{dx} \Big|_{|x|=a-0} - \frac{du_n}{dx} \Big|_{|x|=a+0} = 0, \quad (19.25a)$$

$$u_n \Big|_{|x|=a-0} - u_n \Big|_{|x|=a+0} \mp \frac{1}{\rho} \frac{du_n}{dx} \Big|_{x=\pm a} = 0. \quad (19.25b)$$

Выпишем собственную функцию этой задачи

$$u_1(x) = \begin{cases} \cos k \sqrt{\varepsilon} x & (|x| < a), \\ \frac{\sqrt{\varepsilon} \sin k \sqrt{\varepsilon} a}{\cos k(b-a)} \sin k(b-|x|) & (a \leq |x| \leq b) \end{cases} \quad (19.26)$$

и соответствующее ей собственное значение

$$\bar{\rho}_1 = \frac{k \sqrt{\varepsilon} \sin k \sqrt{\varepsilon} a \cos k(b-a)}{\sqrt{\varepsilon} \sin k \sqrt{\varepsilon} a \sin k(b-a) - \cos k \sqrt{\varepsilon} a \cos k(b-a)}. \quad (19.27)$$

Тогда решение исходной задачи запишется в виде

$$U(x) = U^0(x) + \frac{\bar{\rho}_1 [\sin k \sqrt{\varepsilon} a \cos k(b-a) + \sqrt{\varepsilon} \cos k \sqrt{\varepsilon} a \sin k(b-a)]}{k \varepsilon \sin k \sqrt{\varepsilon} a \cos k(b-a)} \cdot u_1(x), \quad (19.28)$$

где

$$U^0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sin k \sqrt{\varepsilon} |x| & (|x| \leq a), \\ -\frac{\cos k \sqrt{\varepsilon} a}{\cos k(b-a)} \sin k(b-|x|) & (a < |x| \leq b). \end{cases} \quad (19.29)$$

В такой постановке резонанс имеет место при  $\bar{\rho}_1 = \infty$ , т. е. тоже при  $k = k_n$  (знаменатель  $\bar{\rho}_1$  совпадает с левой частью (19.5)). Подобно первому варианту, во втором варианте тоже иногда может искажаться картина резонансов — теперь это происходит, когда  $\sin k \sqrt{\varepsilon} a = \cos k(b-a) = 0$ . Но невозможна такая ситуация, чтобы при резонансном  $k$  собственные значения  $\bar{\rho}_1$  и  $\rho_1$  одновременно обращались в нуль. Поэтому, решая задачу одним из этих вариантов, можно дополнительно исследовать другим методом окрестности точек, где собственное значение равно нулю, и таким образом получить полное представление о резонансных свойствах системы.

**6.** До сих пор мы предполагали, что система не имеет потерь, т. е. что  $\varepsilon$  — вещественное число. Рассмотрим

теперь, что происходит при комплексном  $\epsilon$ . На рис. 19.1 приведены в зависимости от  $ka$  резонансные множители (пропорциональные  $|A_n|$ ) различных методов при  $\epsilon = 2,25 - 0,1i$ ,  $b = 2a$ ; резонансные всплески на кривых конечны. Видно, что всплески всех кривых происходят

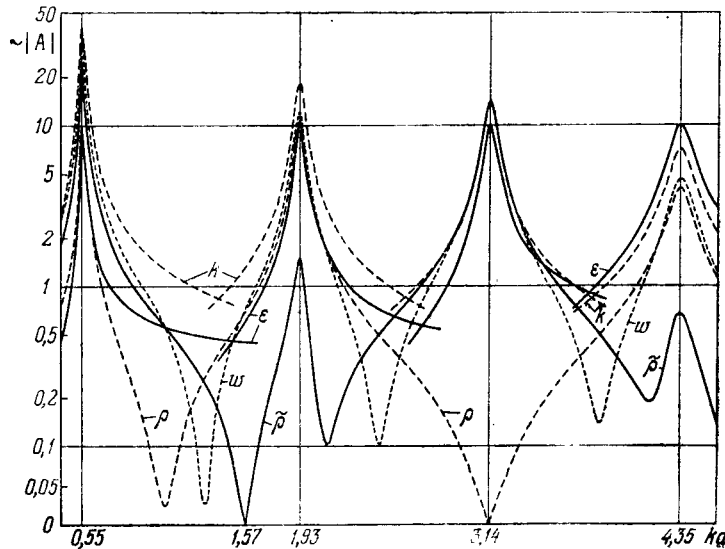


Рис. 19.1.

при одних и тех же значениях  $k$  — это вещественные части соответствующих комплексных  $k_n$ . Подчеркнем, что все эти кривые в одинаковой степени описывают резонансные свойства системы.

На кривых одного из вариантов  $\rho$ -метода всплески могут быть слабо выражены или могут вообще исчезать, если вблизи соответствующего  $k$  собственное значение обращается в нуль. При этом собственное значение другого варианта хорошо передает резонанс.

На примере системы с потерями видно, что дополнительно нужно исследовать не только точки, где  $\rho_n$  или  $\tilde{\rho}_n$  равно нулю, но и окрестности этих точек порядка ширины ожидаемого резонансного всплеска.

7. Найдем собственное значение  $\omega_1$ , при котором существует не зависящее от угла решение однородного уравнения

$$\Delta u_1 + k^2 u_1 = 0 \quad (19.30)$$

вне круга радиуса  $a$  с граничным условием

$$u_1 - \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (19.31)$$

и условием излучения на бесконечности. Собственная функция этой задачи есть, очевидно,

$$u_1(r) = H_0^{(2)}(kr), \quad (19.32)$$

и ей соответствует собственное значение

$$\omega_1 = -\frac{H_0^{(2)}(ka)}{kH_1^{(2)}(ka)}. \quad (19.33)$$

Найдем это собственное значение вариационным методом. Для этого запишем функционал для  $\omega$ -метода, стационарный на собственной функции, и применим к этому функционалу метод Ритца.

Для метода Ритца функционал удобнее всего брать в виде строчки, например, (16.8). В нашем случае он будет иметь вид

$$L(u) = \int_a^\infty \left[ \left( \frac{du}{dr} \right)^2 - k^2 u^2 \right] r dr + \frac{a}{\omega} u^2(a), \quad (19.34)$$

причем подразумевается, что при вычислении интеграла до  $\infty$  следует полагать  $k$  слегка комплексным.

Представим собственную функцию  $u_1(r)$  по базисным функциям  $r^{-(m+\frac{1}{2})} e^{-ikr}$ :

$$u_1(r) = \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{-m}. \quad (19.35)$$

В таком представлении обеспечивается единственное условие, накладываемое на базисные функции — условие излучения (часть базисных функций убывает даже

быстрее, чем это необходимо по условию излучения). Подставив (19.35) в (19.34), получим

$$L(u_1) = \sum_n \sum_m \left( B_{nm} + \frac{1}{\omega} C_{nm} \right) A_n A_m, \quad (19.36)$$

где

$$B_{nm} = - \int_a^\infty e^{-2ikr} e^{-(n+m+2)r} \left[ ikr(n+m+1) + \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( m + \frac{1}{2} \right) \right] dr, \quad (19.37)$$

$$C_{nm} = e^{-2ika} a^{-(n+m)}. \quad (19.38)$$

Приравнивая нулю частные производные  $L(u_1)$  по  $A_m$ , мы приходим к системе однородных линейных уравнений для  $A_m$ . Подстановка решения этой системы в (19.35) дала бы функцию, на которой функционал (19.34) стационарен, т. е. собственную функцию однородной задачи (19.30), (19.31). Однако мы ограничимся нахождением  $\omega = \omega_1$ , при котором система имеет нетривиальное решение. Это  $\omega$  и будет искомым собственным значением однородной задачи. Условием разрешимости однородной системы уравнений является равенство нулю ее определителя

$$\left| B_{nm} + \frac{1}{\omega} C_{nm} \right| = 0. \quad (19.39)$$

Структура коэффициентов  $B_{nm}$  и  $C_{nm}$  такова, что уравнение (19.39) имеет только один корень. В этом можно легко убедиться, преобразуя левую часть (19.39) следующим образом. Первую строчку определителя нужно оставить без изменений, а из каждой следующей строчки вычитать предыдущую, деленную на  $a$ . Поскольку

$$C_{nm} = \frac{C_{n-1, m}}{a}, \quad (19.40)$$

то слагаемые, содержащие  $\omega$ , исчезнут во всех строчках, кроме первой. Следовательно, определитель зависит от  $1/\omega$  линейно, и уравнение (19.39) имеет лишь один корень.

Явное решение уравнения (19.39) имеет весьма громоздкий вид и является по существу одной из возмож-

ных форм представления правой части (19.33) для вещественного  $k > 0$ . Здесь мы этот вид решения выписывать не будем, а дадим лишь его приближенные значения, вычисленные при сохранении двух строк и двух столбцов определителя, т. е. при сохранении *двух членов суммы* (19.35). Эти приближенные значения сравниваются для различных  $ka$  с точными значениями (19.33) в табл. 19.1. При больших значениях  $ka$  двух членов

Таблица 19.1

$ka$		1	1,5	2	5	10
$ k\omega $	точно	0,886	0,936	0,9592	0,9917	0,99779
	прибл.	0,859	0,921	0,9502	0,9905	0,99753
$\arg \omega$	точно	1,22	1,315	1,371	1,4852	1,5273
	прибл.	1,17	1,278	1,341	1,4725	1,5210

суммы оказывается практически достаточно для вычисления  $\omega_1$ . Это объясняется тем, что уже первые члены в (19.35) совпадают по форме с асимптотикой функции Ханкеля (19.32) при больших  $ka$ . Но и при небольших  $ka$ , когда асимптотическая формула дает сравнительно большую ошибку, ошибка в получаемом по методу Ритца собственном значении существенно меньше. Например, при  $ka = 1$  два члена в асимптотической формуле для  $H_0^{(2)}$  дают ошибку около 7%, а полученное с таким разложением собственное значение отличается от истинного (19.33) примерно на 3%. Особенность вариационного аппарата, как известно, в том и состоит, что он позволяет достаточно точно вычислять собственные значения даже при ограниченных возможностях в представлении собственной функции.

8. Перейдем теперь к задаче о *диэлектрическом круге* в пустоте. Рассмотрим сначала постановку соответствующей

щей однородной задачи в  $\varepsilon$ -методе. Пусть требуется найти такие значения  $\varepsilon_n$ , при которых имеются симметричные по углу решения уравнения

$$\Delta u_n + k^2 \varepsilon_n u_n = 0 \quad (r < a), \quad (19.41a)$$

$$\Delta u_n + k^2 u_n = 0 \quad (r > a) \quad (19.41b)$$

с условием непрерывности  $u_n$  и  $\frac{\partial u_n}{\partial r}$  при  $r = a$  и условием излучения на бесконечности. Легко видеть, что такими функциями являются

$$u_n(r) = \begin{cases} H_0^{(2)}(ka) J_0(k\sqrt{\varepsilon}r) & (r \leq a), \\ J_0(k\sqrt{\varepsilon}a) H_0^{(2)}(kr) & (r \geq a). \end{cases} \quad (19.42)$$

Введенная в (19.42) нормировка обеспечивает непрерывность  $u_n$  при  $r = a$ , а требование непрерывности производных приводит к трансцендентному уравнению

$$J_0(k\sqrt{\varepsilon}a) H_1^{(2)}(ka) - \sqrt{\varepsilon} H_0^{(2)}(ka) J_1(k\sqrt{\varepsilon}a) = 0. \quad (19.43)$$

Из этого уравнения определяются собственные значения  $\varepsilon_n$ .

Мы же будем искать собственные значения  $\varepsilon_n$  вариационным методом. Для этого воспользуемся функционалом (см. (15.9))

$$L(u) = \int_0^\infty \left(\frac{du}{dr}\right)^2 r dr - k^2 \varepsilon \int_0^a u^2 r dr - k^2 \int_a^\infty u^2 r dr \quad (19.44)$$

(интегрирование по углу опущено) и будем искать  $\varepsilon_n$  из условия стационарности (19.44). Функции сравнения этого функционала должны быть непрерывными при  $r = a$  и удовлетворять условию излучения. Выберем эти функции в виде

$$u(r) = \begin{cases} A_0 H_0^{(2)}(ka) + \sum_{m=1}^\infty A_m J_0\left(\nu_m \frac{r}{a}\right) & (r \leq a), \\ A_0 H_0^{(2)}(kr) & (r \geq a), \end{cases} \quad (19.45)$$

где  $\nu_m$  —  $m$ -й корень функции Бесселя

$$J_0(\nu_m) = 0. \quad (19.46)$$

Тем самым мы автоматически удовлетворяем условию непрерывности функции на границе диэлектрика, а на бесконечности — условию излучения. Кроме того, при  $r > a$  удовлетворяется уравнение (19.41b); это не является необходимым, но существенно упростит дальнейшие выкладки. Условие непрерывности нормальной производной при  $r = a$  является для функционала (19.15) естественным, и мы его на функции сравнения не накладываем.

Подставляя (19.45) в (19.44), дифференцируя по  $A_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) и приравнявая производные нулю, получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов  $A_m$ . Определитель этой системы имеет простую структуру и, вычисляя его разложением по элементам первой строки, получим уравнение

$$\varepsilon ka - \frac{2H_1^{(2)}(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} + 4\varepsilon^2 (ka)^3 \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{\nu_m^2 [\nu_m^2 - \varepsilon (ka)^2]} = 0. \quad (19.47)$$

Разумеется, уравнение (19.47) полностью идентично (19.43) и может быть сведено к нему с использованием представления функции Бесселя через ее корни

$$J_0(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \prod_{m=1}^\infty e^{\frac{x^2}{\nu_m^2}} \left(1 - \frac{x^2}{\nu_m^2}\right). \quad (19.48)$$

Эта формула легко получается из известного разложения функции Бесселя.

Запись трансцендентного уравнения в виде (19.47) позволяет проследить скорость сходимости метода Ритца в применении к рассматриваемой задаче. Если в сумме (19.45) ограничиться конечным числом членов, то это приведет к конечным размерам определителя и, далее, к конечной сумме в (19.47). Каждый член в последней сумме соответствует базисной функции с тем же номером в (19.45), и скорость сходимости последовательности чисел  $\varepsilon_n^{(N)}$  — корней уравнения (19.47) с конечной суммой из  $N$  членов — есть скорость сходимости метода Ритца. Записав уравнение (19.47) с  $N$  и  $N-1$  членами и вычтя одно из другого, получим, что при достаточно

больших  $N$  имеет место

$$\varepsilon_n^{(N)} - \varepsilon_n^{(N-1)} \sim \frac{1}{v_N^4}. \quad (19.49)$$

А поскольку  $v_N$  возрастают, как  $N$ , то скорость сходимости метода Рунге для данной задачи имеет порядок  $1/N^4$ .

При выводе (19.49) использовалось условие

$$v_N \gg ka |\sqrt{\varepsilon}|, \quad (19.50)$$

так что, казалось бы, с ростом  $ka$  пропорционально ему должно расти количество базисных функций, начиная с которого проявляется сходимость. Однако, как показывают расчеты, с ростом  $ka$  уменьшается модуль искомого собственного значения  $\varepsilon_n$ , и при этом правая часть (19.50) растет очень медленно, так что это почти не сказывается на сходимости. Разумеется, при фиксированном  $ka$  количество необходимых базисных функций должно расти с увеличением номера собственного значения (в силу того же условия (19.50)). Численные результаты, характеризующие скорость сходимости процесса для первого собственного значения, приведены в табл. 19.2.

9. Рассмотрим еще раз задачу о диэлектрическом круге в пустоте, но теперь уже в постановке первого варианта  $\rho$ -метода. Пусть требуется найти такое  $\rho$ , при котором существует симметричное решение уравнения (19.41) с граничными условиями при  $r = a$ :

$$u_1(a+0) - u_1(a-0) = 0, \quad (19.51a)$$

$$\left. \frac{du_1}{dr} \right|_{r=a+0} - \left. \frac{du_1}{dr} \right|_{r=a-0} - \frac{1}{\rho_1} u_1(a) = 0, \quad (19.51b)$$

и условием излучения на бесконечности. Значение  $1/\rho_1$ , как легко проверить, есть

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{k \sqrt{\varepsilon} H_0^{(2)}(ka) J_1(k \sqrt{\varepsilon} a) - k H_1^{(2)}(ka) J_0(k \sqrt{\varepsilon} a)}{H_0^{(2)}(ka) J_0(k \sqrt{\varepsilon} a)}. \quad (19.52)$$

Как уже отмечалось, если в однородной задаче  $\varepsilon$ -метода можно написать трансцендентное уравнение для собственного значения, то *собственное значение* в

Таблица 19.2

$ka$	$N$	1	2	3	4	5	10	20	Точно
1	$ \varepsilon_1 $	2,069	2,0550	2,0528	2,0521	2,05187	2,05162	2,05159	2,05159
	$\arg \varepsilon_1$	0,918	0,91493	0,91448	0,91435	0,91430	0,914256	0,914249	0,914248
2	$ \varepsilon_1 $	0,889	0,8781	0,8765	0,8761	0,87589	0,87571	0,875689	0,875685
	$\arg \varepsilon_1$	0,841	0,8430	0,8433	0,84346	0,84350	0,843546	0,843552	0,843553
4	$ \varepsilon_1 $	0,3245	0,32129	0,324277	0,324274	0,324273	0,324272	0,324272	0,324272
	$\arg \varepsilon_1$	0,515	0,5249	0,5264	0,5269	0,52705	0,527218	0,527240	0,527243

Таблица 19.3

$\varepsilon$	$ka$	$N$	1	2	3	4	5	10	20	50	Точно
4	$ k\rho $	0,89	0,0949	0,09633	0,09665	0,09676	0,096877	0,096864	0,096877	0,096879	0,096879
	$\arg \rho$	1,11	3,0459	3,0444	3,04409	3,04398	3,043875	3,043861	3,043859	3,043859	3,043859
2	$ k\rho $	0,42	0,79	0,96	0,348	0,359	0,3454	0,34398	0,343806	0,343794	0,343794
	$\arg \rho$	0,44	0,92	1,82	0,395	0,368	0,3533	0,35186	0,351666	0,351653	0,351653
4	$ k\rho $	0,49	0,672	0,398	0,371	0,364	0,3582	0,35748	0,357390	0,357383	0,357383
	$\arg \rho$	0,51	1,78	0,41	0,383	0,375	0,3691	0,36834	0,368234	0,368227	0,368227
4	$ k\rho $	0,21	0,41	0,70	1,00	0,41	0,653	0,6711	0,67329	0,673438	0,673438
	$\arg \rho$	0,21	0,42	0,77	1,56	2,71	2,427	2,4042	2,40120	2,401002	2,401002

аналогичной задаче  $\rho$ -метода выражается через левую часть этого уравнения (ср. (19.43) и (19.52)). Это справедливо и для вариационного аппарата, если в обоих случаях пользоваться одними и теми же базисными функциями. В этом можно легко убедиться, если искать собственное значение поставленной выше однородной задачи, пользуясь функционалом (частный случай (17.5))

$$L(u) = \int_0^{\infty} \left( \frac{du}{dr} \right)^2 r dr - k^2 \varepsilon \int_0^a u^2 r dr - k^2 \int_a^{\infty} u^2 r dr + \frac{a}{\rho} u^2(a) \quad (19.53)$$

и применяя метод Ритца с теми же функциями сравнения (19.45). Проведя все необходимые выкладки, мы приходим к определителю, который отличается от определителя в предыдущем пункте лишь тем, что к его левому верхнему угловому элементу добавлено слагаемое  $1/\rho$  с некоторым множителем. Приравнявая получившийся определитель нулю, мы получим уравнение относительно  $1/\rho$ , единственное решение которого есть

$$\frac{1}{\rho} = \frac{k}{2} \left\{ \varepsilon ka - \frac{2H_1^{(2)}(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} + 4\varepsilon^2 (ka)^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{v_m^2 [v_m^2 - \varepsilon (ka)^2]} \right\} \quad (19.54)$$

Это представление собственного значения, полученное вариационным методом, тождественно с (19.52). Оно лишь множителем  $\frac{k}{2}$  отличается от левой части трансцендентного уравнения (19.47) для собственного значения аналогичной задачи  $\varepsilon$ -метода, полученного тоже вариационным методом с теми же базисными функциями. Равенство (19.54) можно рассматривать как общую запись характеристического уравнения для задач  $\varepsilon$ -метода и  $\rho$ -метода. Только в  $\varepsilon$ -методе в этом уравнении следует положить  $\rho$  равным его истинному значению в однородной задаче (а именно, бесконечности) и решать относительно  $\varepsilon$ , а в  $\rho$ -методе положить в (19.54)  $\varepsilon$  равным его истинному значению и вычислять  $\rho$ .

Применение различных вариантов обобщенного метода к конкретной задаче дифракции с последующим использованием вариационного аппарата с одними и

теми же базисными функциями приводит к одной и той же форме записи уравнения; каждый раз в этом уравнении нужно считать неизвестным тот параметр, который играет в задаче роль собственного значения. Остальные параметры следует положить равными их истинным значениям.

Скорость сходимости метода Ритца в применении к задаче (19.41), (19.51) определяется скоростью сходимости ряда в (19.54) т. е. по-прежнему имеет порядок  $1/N^4$ . Теперь, однако, правая часть в (19.50) есть просто параметр задачи, и поэтому чем больше  $ka|\sqrt{\varepsilon}|$ , тем больше базисных функций нужно брать для достижения той же точности. Численные результаты, характеризующие скорость сходимости, приведены в табл. 19.3.

## § 20. Рассеяние на квазистационарном уровне

В настоящем параграфе кратко изложены результаты применения  $s$ -метода к квантовомеханической задаче рассеяния, сформулированной в § 7. В отличие от § 13  $i$  заменено на  $-i$  и, кроме того, изменен знак собственных значений так, чтобы они совпадали с элементами квантовомеханической матрицы рассеяния.

Из методических соображений одна и та же задача решается и  $s$ -методом, и  $\varepsilon$ -методом (аппарат § 7). Сравнение численных результатов позволяет определить ошибку, возникающую при учете в формулах типа (7.11), (7.12) лишь первого слагаемого, а в резонансных условиях еще одного члена суммы. Показано, что двучленная формула достаточно точно описывает рассеяние в широком диапазоне энергий. Рассмотрено несколько конкретных распределений потенциала.

1. Пусть требуется найти решение уравнения Шредингера с потенциалом  $U(r)$ , имеющее в асимптотике следующую зависимость от  $r$  (см. (7.2), (7.3))

$$\Psi|_{r \rightarrow \infty} \simeq e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{kr} \Phi(\varphi, \theta). \quad (20.1)$$

Определим систему функций  $\psi_l(r)$ , по которой может быть разложено решение поставленной задачи. Эти функции должны удовлетворять тому же уравнению

Шредингера

$$\Delta\psi_l + [k^2 - U(\mathbf{r})]\psi_l = 0 \quad (20.2)$$

и следующим условиям на бесконечности:

$$\psi_l|_{r \rightarrow \infty} \simeq \frac{1}{1-s_l} \left[ \Phi_l^*(\varphi, \theta) \frac{e^{-ikr}}{kr} - s_l \Phi_l(\varphi, \theta) \frac{e^{ikr}}{kr} \right], \quad (20.3)$$

$$\Phi_l^*(\varphi, \theta) = \Phi_l(\pi + \varphi, \pi - \theta). \quad (20.4)$$

Здесь  $\Phi_l$  и  $s_l$  — не заданные, а искомые функции и числа. Легко проверить, что при вещественных  $k$  и  $U(\mathbf{r})$   $|s_l| = 1$ . Асимптотическое условие (20.3) означает, что при  $r \rightarrow \infty$   $\psi_l$  есть суперпозиция сходящейся и расходящейся волн, коэффициенты при которых — комплексные функции от углов с одинаковым модулем.

Стандартным образом устанавливается ортогональность

$$\int_{\Omega} \Phi_l \Phi_m^* d\Omega = \delta_{lm}. \quad (20.5)$$

Будем искать решение исходной задачи рассеяния в виде

$$\Psi = \sum_l A_l \Phi_l. \quad (20.6)$$

В таком представлении уравнение Шредингера удовлетворяется функцией  $\Psi(\mathbf{r})$  почленно. Коэффициенты  $A_l$  будем искать из требования, чтобы  $\Psi(\mathbf{r})$  удовлетворяла асимптотическому условию (20.1). Подставляя (20.6) с учетом (20.3) в (20.1), получим

$$\frac{e^{-ikr}}{kr} \sum_l \frac{A_l \Phi_l^*}{1-s_l} - \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_l \frac{A_l s_l \Phi_l}{1-s_l} = e^{ikr} \cos \theta + \frac{e^{ikr}}{kr} \Phi. \quad (20.7)$$

Умножив обе части этого равенства на  $\Phi_m$ , проинтегрировав по  $\Omega$ , воспользовавшись ортогональностью (20.5) и приравняв коэффициенты при  $e^{-ikr}/kr$ , получим явное выражение для  $A_l$ :

$$A_l = 2\pi i (1 - s_l) \Phi_l(\pi). \quad (20.8)$$

Здесь  $\Phi_l(\pi)$  — значение собственной диаграммы в направлении на падающую волну.

Покажем, что диаграмма  $\Phi$  в (20.1) разлагается в ряд по собственным диаграммам  $\Phi_l$  с теми же коэффициентами  $A_l$ . Для этого умножим (20.7) на  $\Phi_m^*$ , проинтегрируем и приравняем коэффициенты при  $e^{ikr}/kr$ . Учтя (20.5), получим

$$\int_{\Omega} \Phi \Phi_l^* d\Omega = A_l, \quad (20.9)$$

т. е.  $A_l$  суть коэффициенты Фурье разложения  $\Phi$  по  $\Phi_l$ . Таким образом,

$$\Phi(\varphi, \theta) = 2\pi i \sum_l (1 - s_l) \Phi_l(\pi) \Phi_l(\varphi, \theta), \quad (20.10)$$

и мы нашли представление искомой диаграммы рассеяния в виде разложения по собственным диаграммам  $\Phi_l$ . Как следует из общих положений  $s$ -метода (§ 13), при рассеянии на барьере резонансное значение энергии (вещественный квазистационарный уровень) определяется как корень уравнения  $s_l(k) = -1$ .

2. Пусть теперь в однородной задаче  $s$ -метода (20.2)–(20.4)  $U(\mathbf{r}) = U(r)$ , т. е. потенциал не зависит от угловых координат. Разделяя переменные в сферической системе и ограничиваясь не зависящими от  $\varphi$  решениями, т. е. полагая

$$\psi_l(r, \varphi, \theta) = \frac{\chi^{(l)}(r)}{r} P_l(\cos \theta), \quad (20.11)$$

где  $P_l(\cos \theta)$  — функции Лежандра, приходим к уравнению

$$\chi^{(l)r} + \left\{ k^2 - \left[ U + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \right\} \chi^{(l)} = 0. \quad (20.12)$$

Условие ограниченности  $\psi_l$  в нуле дает

$$\chi^{(l)}(0) = 0. \quad (20.13)$$

Поскольку  $P_l(\cos(\pi - \theta)) = (-1)^l P_l(\cos \theta)$ , то из асимптотических условий (20.3), (20.4) следует, что

$$\chi^{(l)}|_{r \rightarrow \infty} \simeq \frac{\Phi_l^*(\theta)}{1-s_l} [e^{-ikr} - (-1)^l s_l e^{ikr}]. \quad (20.14)$$

Одномерная задача (20.12)–(20.14) имеет при каждом  $l$  одно собственное значение  $s_l$  и одну собственную функцию  $\chi^{(l)}$ . Эта задача по существу совпадает с



известной в квантовой механике задачей определения парциальных волн (и матрицы рассеяния), с той лишь разницей, что в последней амплитуда сходящейся волны считается заданной.

Задачу (20.12) — (20.14) можно непосредственно решить численным путем, например, интегрируя задачу Коши для уравнения (20.12) с начальными условиями  $\chi^{(l)}(0) = 0$ ,  $\chi^{(l)'}(0) = 1$ . Если потенциал имеет конечный радиус действия, т. е.  $U(r) = 0$  при  $r > b$ , то общее решение уравнения (20.12) во внешней области известно и собственное значение  $s_l$  определяется из требования непрерывности  $\chi^{(l)}$  и  $\chi^{(l)'}$  на границе потенциала. Если же действие потенциала распространяется до бесконечности, то собственное значение можно вычислить из предельного соотношения

$$\lambda_l = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \frac{k\chi^{(l)}(r) \sin kr + \chi^{(l)'}(r) \cos kr}{k\chi^{(l)}(r) \cos kr - \chi^{(l)'}(r) \sin kr} \right]^{(-1)^l}. \quad (20.15)$$

Здесь  $\chi^{(l)}(r)$  — полученное из задачи Коши решение уравнения (20.12) и приняты обозначения  $s_l = e^{2i\delta_l}$ ,  $\text{ctg } \delta_l = \lambda_l$ .

3. Задачу упругого рассеяния на симметричном барьере можно решать и аппаратом  $\epsilon$ -метода (§ 7). Для удобства сравнения результатов мы применим этот метод не к исходной задаче рассеяния, а к задаче (20.12) — (20.14). Тем самым однородную задачу  $s$ -метода, имеющую точное численное решение, мы будем приближенно решать другим вариантом решая другим вариантом обобщенного метода. Результаты позволят установить степень точности приближенных формул.

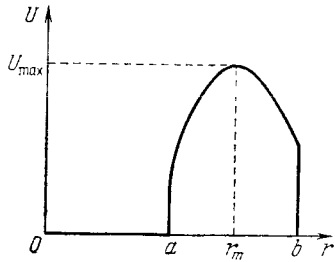


Рис. 20.1.

Ради простоты ограничимся значением  $l = 0$  и не будем выписывать этот индекс, т. е. обозначим  $\chi^{(l)} = \chi$ ,  $s_l = s$ ,  $\delta_l = \delta$ .

Если потенциал имеет форму барьера (рис. 20.1) и  $U_{\max} > k^2$ , то почти при всех значениях  $k$  (за исключе-

нием окрестностей квазистационарных уравнений) функция  $\chi(r)$  мала внутри барьера и рассеяние происходит как бы от внешней его части. Вблизи квазистационарных уровней частицы надолго проникают внутрь барьера и к отраженной волне следует добавить слагаемое, учитывающее этот эффект.

Подобно § 7, введем систему функций  $\chi_n$  уравнением

$$\chi_n'' + [k^2 - U_n(r)]\chi_n = 0 \quad (20.16)$$

с условиями

$$\chi_n(0) = 0, \quad (20.17)$$

$$\chi_n|_{r \rightarrow \infty} \simeq e^{ikr} \quad (20.18)$$

и вспомогательным потенциалом

$$U_n(r) = \sigma_n U(r) + (1 - \sigma_n) \bar{U}(r), \quad (20.19)$$

где

$$\bar{U}(r) = \begin{cases} U_{\max} & (r \leq r_m), \\ U(r) & (r > r_m). \end{cases} \quad (20.20)$$

Роль собственного значения в этой однородной задаче играет  $\sigma_n$ . Собственные функции ортогональны с весом  $U - \bar{U}$ :

$$\int_0^{r_m} (U - \bar{U}) \chi_n \chi_m dr = 0 \quad (n \neq m). \quad (20.21)$$

Решение задачи (20.12) — (20.14) будем искать в виде

$$\chi(r) = \bar{\chi}(r) + \sum_n A_n \chi_n(r), \quad (20.22)$$

где  $\bar{\chi}$  — решение той же задачи (20.12) — (20.14) с заменой  $U$  на  $\bar{U}$ . Соответствующее этому решению  $s$  обозначим через  $\bar{s}$ . При этом, как нетрудно проверить,

$$s = \bar{s} + 2i \sum_n A_n. \quad (20.23)$$

Коэффициенты  $A_n$  определяются из требования, чтобы  $\chi(r)$  удовлетворяло уравнению (20.12). Используя

еще тождество, аналогичное (7.9), получим

$$A_n = \frac{\sigma_n'' \int_0^{r_m} (U - \bar{U}) |\chi_n|^2 dr}{\sigma_n \int_0^{r_m} (U - \bar{U}) \chi_n^2 dr}. \quad (20.24)$$

Вдали от квазистационарного уровня  $|\sigma_n''| \ll |1 - \sigma_n'|$ , все коэффициенты  $A_n$  малы и

$$s \approx \bar{s}. \quad (20.25)$$

В районе квазистационарного уровня один из коэффициентов  $A_n$  становится конечным. Сохраним лишь это слагаемое в сумме (20.23). Второй множитель в (20.24) с высокой точностью равен  $\bar{s}$ . Это следует из того, что внутри барьера (там, где отличен от нуля множитель  $(U - \bar{U})\chi_n$  имеет характер стоячей волны, т. е. почти постоянную фазу, и отношение интегралов по модулю близко к единице;  $\sigma_n$  тоже близко к единице, поэтому

$$A_n \approx \frac{\sigma_n''}{1 - \sigma_n} \bar{s}. \quad (20.26)$$

Таким образом

$$s \approx \frac{1 - \sigma_n^*}{1 - \sigma_n} \bar{s}. \quad (20.27)$$

Переходя к фазам рассеяния, формулу (20.27) можно переписать в виде  $\delta \approx \bar{\delta} + \delta_n$ , где  $\delta_n = \text{arctg} [\sigma_n'' / (1 - \sigma_n')]$ .

Для поиска собственных значений  $\sigma_n$  можно использовать вариационный аппарат, базирующийся на функционале

$$R(\chi) = \frac{\int_0^\infty [(k^2 - U)\chi^2 - (\chi')^2] dr}{\int_0^{r_m} (U - \bar{U}) \chi^2 dr}. \quad (20.28)$$

Допустимые функции этого функционала должны быть всюду непрерывными и удовлетворять условиям (20.17), (20.18).

4. Для нескольких конкретных распределений потенциала задача (20.12) — (20.14) решалась точно (как задача Коши) и приближенно по формулам (20.25), (20.27) с использованием вариационного аппарата поиска собственных значений  $\sigma_n$ . Предварительно сходимость метода Ритца с базисными функциями

$$v_j = \begin{cases} \left(\frac{r}{b}\right)^{2j-1} e^{ikb} & (r \leq b), \\ e^{ikr}, & (r > b). \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (20.29)$$

в применении к функционалу (20.28) проверялась для случая прямоугольного барьера, допускающего явное решение задачи (20.16) — (20.19) (трансцендентное уравнение для  $\sigma_n$ ). Как следует из табл. 20.1, хорошая точность (порядка 0,2% для резонансной энергии  $k_*$  и 2,5% для ширины резонанса  $\delta k$ ) достигается уже при учете трех базисных функций в методе Ритца. Величина  $\delta k$  определяется из условия  $\delta = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$ ; ширина барьера равна  $a/4$ ,  $U_{\max} a^2 = 20$ .

Таблица 20.1

$N$	3	4	5	6	Точно
$k_* a$	2,499	2,499	2,498	2,4961	2,4952
$2\delta k a$	0,224	0,2276	0,2275	0,2286	0,2289

Точные резонансные кривые — зависимость фазы рассеяния  $\delta$  от энергии (сплошные линии), и эти же величины, рассчитанные по формулам (20.25) (пунктир 1) и (20.27) (пунктир 2), приведены на рис. 20.2. Там же штрих-пунктиром приведена фаза  $\delta_n$ , соответствующая собственной функции  $\chi_n(r)$ . Значения параметров равны

$$U_{\max} = \frac{20}{a^2}, \quad b = \frac{3}{2} a.$$

Как следует из этого рисунка, ошибка формулы (20.25) по фазе рассеяния не превышает 0,06л вплоть до значений  $k$ , отстоящих от квазистационарного уровня на  $5\delta k$ . В районе квазистационарного уровня хорошую

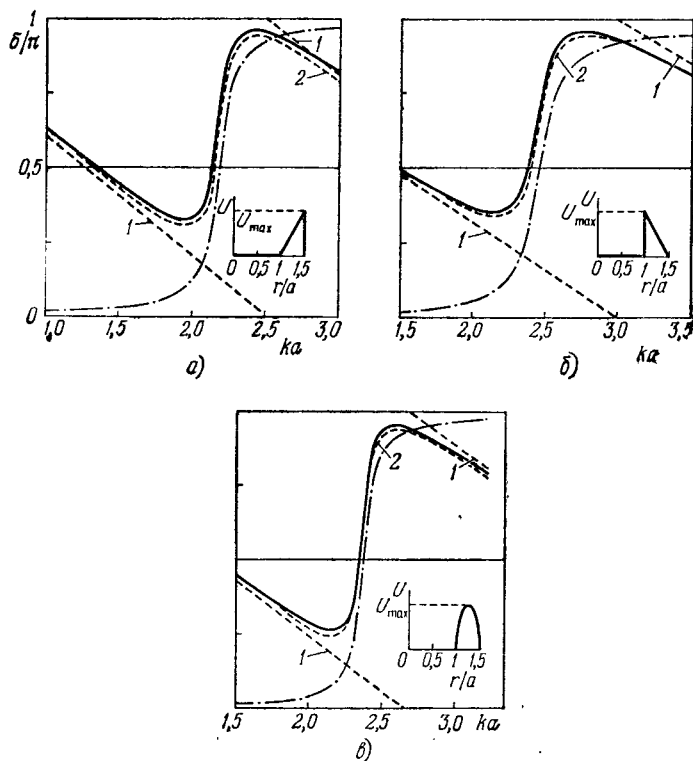


Рис. 20.2.

точность (не хуже 0,025л по фазе) дает двучленная формула (20.27). Несмотря на то, что эта формула получена из соображений, справедливых лишь в резонансе, она оказывается верной (с той же точностью) во всем диапазоне изменения энергии. Это свидетельствует о том, что существует, по-видимому, другой способ получения формулы (20.27), не опирающийся на свойство стоячей волны внутри барьера.

Следует заметить, что значение квазистационарного уровня  $k_*$ , определяемое как корень уравнения  $\sigma'_n(k) = 1$ , несколько отличается от результата, получаемого принятым в  $s$ -методе способом (как корень уравнения  $\delta k = \pi/2$ ). Однако это различие меньше полуширины резонансной кривой и поэтому несущественно.

На рис. 20.3 приведена зависимость резонансных характеристик ( $k_*$  и  $\delta k$ ) от высоты барьера для тех же, что и на рис. 20.2, распределений потенциала. С ростом высоты резонанс достигается при больших энергиях падающих частиц, но относительная частота квазистационарного уровня  $k_*^2/U_{\max}$  убывает, а поэтому уменьшается прозрачность барьера для резонансной энергии, и резонанс становится более узким.

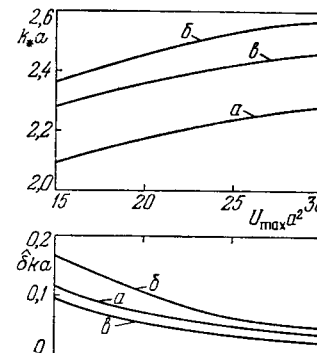


Рис. 20.3.

### § 21. Диэлектрическое тело в закрытом или в открытом резонаторе ( $\epsilon$ -метод, $E$ -поляризация)

Здесь решены две двумерные однородные задачи  $\epsilon$ -метода, соответствующие задачам дифракции на диэлектрическом теле. Одна из задач внутренняя, о диэлектрическом теле в закрытом резонаторе специальной формы; вторая — внешняя, о диэлектрическом теле, окруженном полупрозрачной пленкой. Для нахождения собственных значений применяется вариационный аппарат с использованием метода Ритца.

1. Рассмотрим закрытый резонатор  $H$ -образной формы с металлическими стенками и диэлектрической вставкой (рис. 21.1). Собственные функции однородной задачи  $\epsilon$ -метода такого резонатора удовлетворяют уравнению

$$\Delta u_n + k^2 \epsilon_n u_n = 0 \quad (21.1a)$$

в области  $V^+$ , занятой диэлектриком, и

$$\Delta u_n + k^2 u_n = 0 \quad (21.16)$$

в остальной части  $V^-$  резонатора, условиям непрерывности  $u_n$  и  $\frac{\partial u_n}{\partial N}$  на границе  $S_1$  диэлектрика и условию  $u_n = 0$  на стенках резонатора. Мы здесь ограничимся четными по  $x$  и  $y$  колебаниями.

Для решения задачи целесообразно вначале построить наиболее удобную систему базисных функций, а затем уже подобрать функционал, стационарный в соответствующем этой системе классе допустимых функций. Те из граничных условий однородной задачи, которым базисные функции не удовлетворяют, следует сделать естественными.

В каждой из областей  $V^+$  и  $V^-$  введем свои базисные функции. Тогда базисные функции для всего резонатора будут двух типов: одни отличны от нуля в  $V^+$  и тождественно равны нулю в  $V^-$ , другие, наоборот, отличны от нуля толь-

ко в  $V^-$ . При этом допускаются функции, разрывные на  $S_1$ .

Так как все границы прямолинейны, каждую базисную функцию представим в виде

$$v_{pq} = f_q(x) \varphi_p(y), \quad (21.2)$$

где  $f_q(x)$  и  $\varphi_p(y)$  — тригонометрические функции. В области  $V^+$  возьмем систему функций, удовлетворяющую граничному условию на стенке резонатора, т. е. положим  $\varphi_p(y) = \cos\left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi y}{l}$ . Чтобы система была достаточно полной в  $V^+$ , следует положить  $f_q(x) = \cos \frac{\pi q x}{2a}$ . По такой системе можно, очевидно, разложить произвольную на границе  $S_1$  функцию.

Аналогично, в  $V^-$ , удовлетворив граничному условию при  $|y| = L$ , можно взять  $\varphi_p(y) = \cos\left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi y}{L}$ . При нашем способе подбора базисных функций удается удов-

летворить еще лишь условию при  $|x| = b$ , а условие на стенках резонатора при  $|x| = a$  (эта часть стенки обозначена через  $S_2$ ) остается не выполненным. Действительно, функции вида (21.2), равные нулю на  $S_2$ , автоматически равны нулю и на  $S_1$ , где на самом деле решение отлично от нуля. Чтобы добиться полноты системы, следует в  $V^-$  взять

$$f_q(x) = \sin \frac{\pi(q+1)|b-x|}{b-a}.$$

Таким образом, мы построили систему функций, удовлетворяющих всем граничным условиям, кроме условий при  $|x| = a$ . Эти условия (равенство нулю функции на  $S_2$  и непрерывность функции и ее производной на  $S_1$ ) нужно сделать естественными для функционала. Функционал с нужными нам свойствами может быть получен как частный случай из (17.5). Для нашей задачи он имеет вид

$$L(u) = \int_{V^+} [(\nabla u)^2 - k^2 \epsilon u^2] dV + \int_{V^-} [(\nabla u)^2 - k^2 u^2] dV + \\ + \int_{S_1} (u^+ - u^-) \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} + \frac{\partial u^-}{\partial N} \right) dS - 2 \int_{S_2} u \frac{\partial u}{\partial N} dS. \quad (21.3)$$

Нормаль здесь принята внешней по отношению к  $V^-$ .

Легко проверить, что из-за наличия интегралов по  $S_1$  и  $S_2$  функционал (21.3) не будет положительно определенным. Сходимость метода Ритца следует контролировать численным способом. Сравнение результатов, полученных при разном количестве базисных функций, показывает, что наименьшее по модулю собственное значение  $\epsilon_1$  вычисляется с погрешностью примерно 1% при общем числе базисных функций (в  $V^+$  и  $V^-$ ), равном 6—7. Существенного улучшения точности с увеличением числа базисных функций достичь не удастся без специальных мер, повышающих устойчивость вычислительного процесса. Тем не менее увеличение числа функций существенно повышает (примерно до того же уровня 1—5%) точность вычисления высших собственных значений.

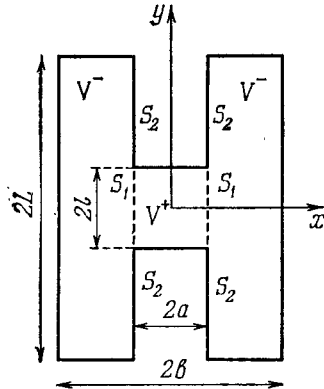


Рис. 21.1.

На рис. 21.2 приведена зависимость трех первых собственных значений  $\epsilon_n$  от относительной толщины диэлектрической вставки при  $ka = \sqrt{2}$ ,  $L/a = 3$ ,  $b/a = 2$ .

2. Перейдем к рассмотрению открытого резонатора, образованного диэлектрическим телом эллиптической

формы, заключенным в круглую полупрозрачную пленку (рис. 21.3). Собственные функции однородной задачи

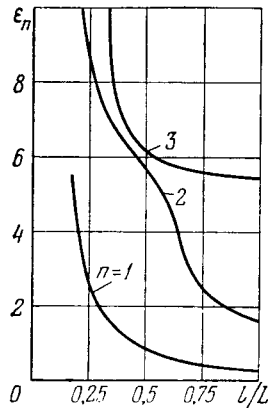


Рис. 21.2.

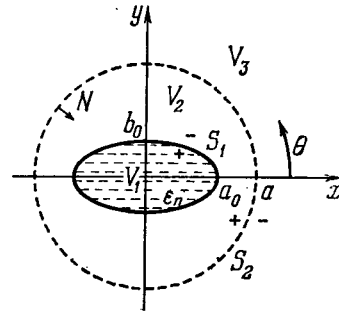


Рис. 21.3.

должны удовлетворять уравнению (21.1а) в области  $V_1$ , (21.1б) в  $V_2$  и  $V_3$ , условию непрерывности  $u_n$  и  $\frac{\partial u_n}{\partial N}$  на  $S_1$ , условиям

$$\begin{cases} u_n^+ - u_n^- = 0, \\ \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} - \frac{1}{\rho} u_n = 0 \end{cases} \quad (21.4)$$

(с заданным значением  $\rho$ ) на  $S_2$  и условию излучения на бесконечности. Ограничимся четными по углу  $\theta$  колебаниями.

Выберем базисные функции, удовлетворяющие всем граничным условиям поставленной задачи, а также уравнению (21.1б) в  $V_3$ :

$$v_{pq} = \begin{cases} J_p(v_{p0}) H_p^{(2)}(kr) \cos p\theta & (r \geq a), \\ \left[ \alpha_{pq} J_p\left(\mu_{pq} \frac{r}{a}\right) + \right. \\ \left. + H_p^{(2)}(ka) J_p\left(v_{p0} \frac{r}{a}\right) \right] \cos p\theta & (r \leq a), \end{cases} \quad (21.5)$$

где

$$\alpha_{pq} = \frac{ka J_p(v_{p0})}{\mu_{pq} J_p'(\mu_{pq})} \left[ H_p^{(2)'}(ka) - \frac{1}{kp} H_p^{(2)}(ka) \right], \quad (21.6)$$

$$J_p(v_{p0}) = 0, \quad J_p'(v_{p0}) = 0.$$

Функционал, стационарный в классе таких функций, не содержит интегралов по границам и по области  $V_3$  и имеет вид

$$L(u) = \int_{V_1} (\Delta u + k^2 \epsilon u) u dV + \int_{V_2} (\Delta u + k^2 u) u dV. \quad (21.7)$$

Методом Ритца по (21.7) найдено первое собственное значение  $\epsilon_1$ . Напомним, что собственные значения  $\epsilon_n$

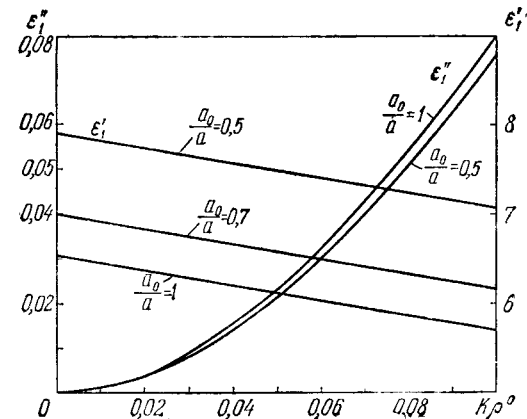


Рис. 21.4.

полностью определяют резонансные свойства системы с произвольной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ . Резонанс происходит на частоте, при которой  $\epsilon_n' = \epsilon'$ , а добротность определяется мнимой частью собственного значения.

Результаты численных расчетов приведены на рис. 21.4 и 21.5. На рис. 21.4 дана зависимость собственного значения  $\epsilon_1$  от прозрачности стенки при различных соотношениях геометрических параметров. Из графиков

видно, что при  $kr \ll 1$  вещественная часть собственного значения линейна по  $\rho$ , а мнимая — слабо зависит от размеров диэлектрика и определяется в основном прозрачностью стенки.

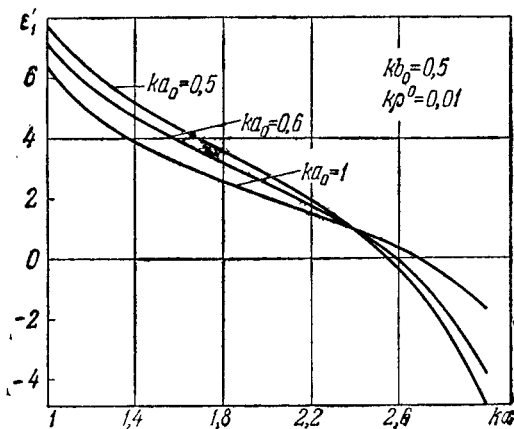


Рис. 21.5.

Зависимость  $\epsilon_1'$  от размеров резонатора приведена на рис. 21.5. При малой прозрачности  $\epsilon_1''$  почти не зависит от  $ka$ , и поэтому мы ее не приводим.

## § 22. Открытый резонатор из пары металлических пластин ( $\rho$ -метод)

В настоящем параграфе рассматривается двумерная задача об открытом резонаторе, образованном парой металлических пластин. С помощью аппарата интегральных уравнений решается однородная задача I варианта  $\rho$ -метода и исследуются резонансные свойства системы. Полученные результаты сравниваются с известной асимптотикой, и тем самым устанавливается степень точности асимптотических результатов при различных значениях геометрических параметров. В последнем пункте кратко изложен новый подход к задаче решения однородных интегральных уравнений.

1. Рассмотрим сначала открытый резонатор, образованный двумя плоскими параллельными металлическими пластинами ширины  $2a$ , удаленными друг от друга на расстояние  $L$  (рис. 22.1). Однородная задача  $\rho$ -метода состоит из уравнения

$$\Delta u_n + k^2 u_n = 0, \quad (22.1)$$

распространенного на всю плоскость  $(x, z)$ , граничных условий на пластинах (только при  $|x| \leq a$ )

$$u_n \Big|_{|z|=\frac{L}{2}+0} - u_n \Big|_{|z|=\frac{L}{2}-0} = 0, \quad (22.2a)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial z} \Big|_{|z|=\frac{L}{2}+0} - \frac{\partial u_n}{\partial z} \Big|_{|z|=\frac{L}{2}-0} \pm \frac{1}{\rho} u_n \Big|_{z=\pm \frac{L}{2}} = 0, \quad (22.2b)$$

условий Майкснера на краях пластин и условия излучения на бесконечности. Как следует из § 10, п. 2, этой задаче соответствует однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} \rho_n v_n(P) &= \\ &= \frac{i}{4} \int_S H_0^{(2)}(kR) v_n(P') dP', \end{aligned} \quad (22.3)$$

причем точки  $P$  и  $P'$  пробегают поверхности  $S$  обеих пластин; через  $R$  обозначено расстояние между этими точками.

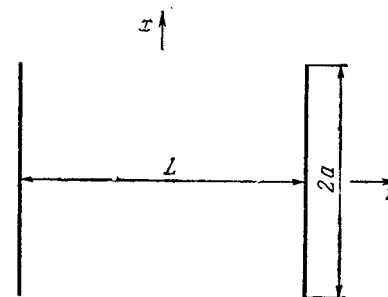


Рис. 22.1.

Из-за симметрии задачи возможны лишь либо четные, либо нечетные по  $x$ , а также по  $z$  решения. Под четностью по  $z$  мы здесь понимаем совпадение функции  $v(P)$  на разных пластинах, включая знак. По  $x$  мы будем рассматривать лишь четные решения.

Введя безразмерную координату

$$\xi = x/a, \quad (22.4)$$

запишем уравнение в виде

$$\frac{\rho_n}{a} v_n(\xi) = \frac{i}{4} \int_{-1}^1 \left[ H_0^{(2)}(ka|\xi - \xi'|) \pm \right. \\ \left. \pm H_0^{(2)}(ka\sqrt{L^2 \pm (\xi - \xi')^2}) \right] v_n(\xi') d\xi'. \quad (22.5)$$

Знак плюс в квадратных скобках соответствует четным, а минус — нечетным по  $z$  решениям. Для численного решения уравнения (22.5) представим неизвестную функцию  $v_n(\xi)$  в виде ряда

$$v(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m f_m(\xi) \quad (22.6)$$

по функциям

$$f_m(\xi) = \cos \frac{(2m-1)\pi\xi}{2 + 0,824(1-i)/c}, \quad (22.7)$$

описывающим собственные колебания рассматриваемого резонатора в известном асимптотическом приближении. Здесь

$$c = \frac{ka^2}{L} \quad (22.8)$$

— квазиоптический параметр резонатора. Подставим (22.6) в (22.5), помножим слева и справа на  $f_n(\xi)$  и проинтегрируем; это приведет к бесконечной системе однородных линейных уравнений. Из условия равенства нулю определителя этой системы находятся собственные значения  $\rho$ .

На рис. 22.2 приведена кривая, описывающая резонансные свойства резонатора при истинном граничном условии  $U|_s = 0$ ; эта кривая соответствует первому собственному значению  $\rho_1$  уравнения (22.5) при  $L/a = 2$ . Рассматриваемая система имеет потери на излучение, и поэтому резонансные всплески на кривой конечны. По ширине  $2\delta kL$  соответствующего всплеска (на уровне  $1/\sqrt{2}$ ) можно определить добротность резонатора на данной резонансной частоте

$$Q = \frac{kL}{2\delta kL}. \quad (22.9)$$

Например, при  $kL = 40,89$  добротность  $Q \approx 680$ .

Кривая соответствует четной по  $z$  собственной функции; расстояние между ее соседними максимумами равно примерно  $2\pi$ . Резонансные частоты нечетных по  $z$  колебаний находятся посередине между этими максимумами.

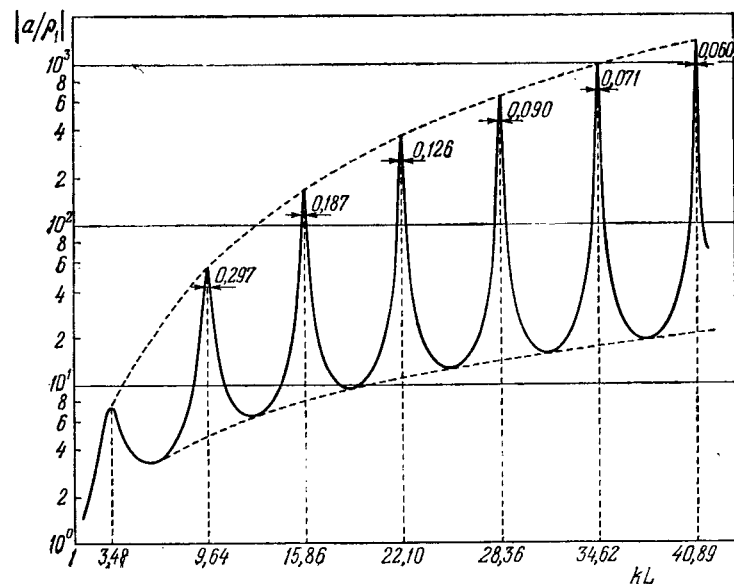


Рис. 22.2.

2. В квазиоптическом приближении единственным существенным параметром рассматриваемого резонатора является параметр  $c$ . Резонаторы с различными значениями  $ka$  и  $a/L$  имеют одинаковые потери и подобные распределения полей, если произведение этих величин одинаково. Такое приближение справедливо, когда  $ka \gg 1$  и  $L \gg a$ .

Проследим, что происходит при изменении  $L/a$ , причем одновременно будет меняться значение  $ka$ , так чтобы в резонансе параметр  $c$  оставался постоянным. Это позволит выяснить, при каких соотношениях между параметрами можно считать справедливой квазиоптическую асимптотику.

Вообще говоря, собственные колебания, получающиеся из квазиоптического подхода, и поля, описываемые собственными функциями  $\rho$ -метода, различны. Однако если добротность достаточно высока, то при решении задачи возбуждения на резонансной частоте в обоих методах будет доминирующий член. Если при некоторых значениях параметров оба метода правильно описывают физику процесса, то соответствующие собственные функции обоих методов должны быть близки. Мы здесь будем сравнивать не сами функции, а лишь значения резонансных частот и ширину резонансных всплесков.

Для расчетов было выбрано значение параметра  $c = 1,2\pi$ . Из квазиоптического решения следует, что при таком  $c$  ширина резонансного всплеска для основного колебания должна быть равной  $2\delta kL = 0,147$ . В табл. 22.1 приведены резонансные частоты и ширина резонансных всплесков, получающихся при решении задачи  $\rho$ -методом. Если расстояние между зеркалами хотя бы вдвое превышает размеры зеркал ( $\frac{L}{a} \approx 4$ ), то при определении полуширины асимптотический метод дает точность порядка 10%. Резонансные частоты в пределах получающейся при численных расчетах точности (2 знака после запятой) полностью совпадают с вычисляемыми по асимптотическим формулам. При построении табл. 22.1 использовались как четные, так и нечетные

Таблица 22.1

$L/a$	1,29	1,58	1,83	2,04	2,24	2,42
$kL$	6,43	9,58	12,72	15,86	19,01	22,15
$2\delta kL$	0,235	0,210	0,198	0,192	0,189	0,186
$L/a$	2,58	2,74	2,89	3,03	3,98	4,92
$kL$	25,29	28,43	31,58	34,70	59,85	91,27
$2\delta kL$	0,181	0,179	0,178	0,175	0,164	0,160

по  $z$  собственные функции  $\rho$ -метода, соответствующие одному и тому же поперечному типу колебаний в квазиоптике.

3. Аналогичная задача рассматривалась для резонаторов с изогнутыми зеркалами. Каждое из зеркал представляло собой дугу окружности, центр которой совпадал с центром противоположного зеркала. В квазиоптике такие резонаторы называют конфокальными; их собственные колебания описываются, как известно, сфероидальными функциями. Эти функции были взяты базисными при решении интегрального уравнения  $\rho$ -метода. Результаты численных расчетов приведены на рис. 22.3 (для  $L/a = 3$ ) и в табл. 22.2 (для  $c = 2,2$ ).

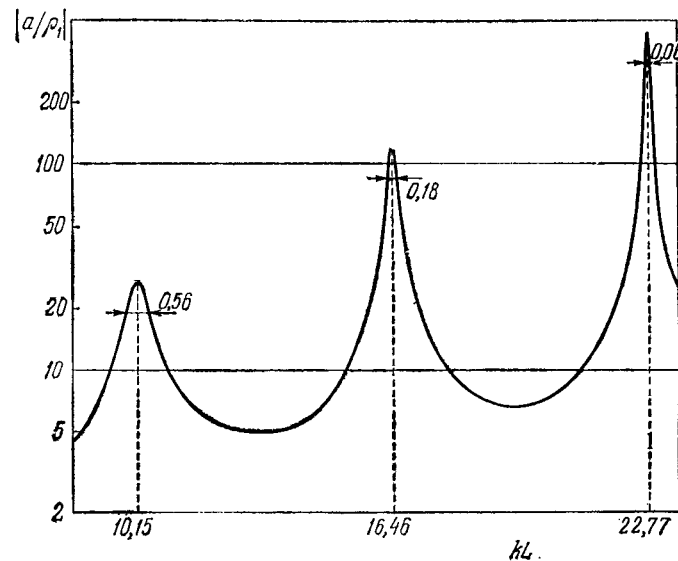


Рис. 22.3.

При принятом значении  $c$ , соответствующем табл. 22.2, квазиоптическое решение дает  $2\delta kL = 0,110$ .

Как уже упоминалось, обобщенные методы удобны для анализа высокодобротных резонансных систем, так как тогда в представлении поля в виде ряда по собственным функциям появляется доминирующий член,



Таблица 22.2

$L/a$	2,15	2,74	3,22	3,63	4,67	5,76
$kL$	10,21	16,49	22,77	29,05	47,90	73,03
$2\delta kL$	0,122	0,122	0,110	0,122	0,115	0,117

довольно точно описывающий полное решение. С другой стороны, при очень высокой добротности появляются вычислительные трудности в решении однородной задачи. Так, в интегральном уравнении  $\rho$ -метода в районе резонанса искомое собственное значение оказывается очень малым по модулю и поэтому может быть найдено с невысокой относительной точностью. Однако, как показывают приведенные примеры, область значений параметров, которую можно исследовать этими методами, остается достаточно широкой.

Результаты этого параграфа могут быть легко перенесены на резонаторы с полупрозрачными зеркалами. Такие зеркала характеризуются параметром прозрачности  $\rho$  в истинном граничном условии (см., например, (10.31a)), и резонансная кривая для них описывается формулой  $1/|\rho - \rho_n|$ , где  $\rho_n$  — то же, что и ранее, собственное значение интегрального уравнения (22.5).

4. Метод, которым мы пользовались здесь для решения интегрального уравнения, позволяет надежно вычислить лишь одно-два собственных значения. Для случая, когда требуется найти с достаточной точностью несколько собственных значений и соответствующих им собственных функций (например, если добротность резонатора невелика и для решения задачи дифракции требуется учесть несколько членов ряда), можно предложить некоторую модификацию общеизвестного итерационного метода. При этом будут использованы не только последние итерации, дающие, как известно, наибольшее по модулю собственное значение, но и все предыдущие — именно в них содержится информация о высших собственных значениях. К тому же и общее число итераций оказывается намного меньшим, чем обычно.

Приведем без вывода основные формулы, реализующие такой подход. Пусть  $v^{(0)}$  — некоторая функция на  $S$  — начальное приближение, а

$$v^{(m)} = \int_S G v^{(m-1)} dS \quad (22.10)$$

— ее  $m$ -я итерация ядром интегрального уравнения (10.18). Построим функцию  $f_N = \sum_{j=0}^N (-1)^j c_j v^{(j)}$  с определенными коэффициентами  $c_j$ . Считая один из них, например,  $c_N$ , равным единице, остальные вычислим из требования, чтобы функция  $f_N$  обращалась в нуль в  $N$  различных (например, равномерно расположенных) точках границы  $S$ . Тогда собственные значения  $\rho_n$  уравнения (10.18) можно приближенно вычислить как нули полинома  $P_N = \sum_{j=0}^N c_j \rho^j$ . Собственные функции находятся после этого по формуле

$$v_n = \sum_{j=0}^N \rho_n^j \sum_{m=0}^j (-1)^m c_{j-m} f_{N-m}. \quad (22.11)$$

Количество собственных элементов, которые можно вычислить таким способом, зависит от начального приближения и плотности начальной части спектра собственных значений  $\rho_n$ . Новые итерации перестают уточнять результаты с тех пор, как  $v^{(m)}$  становится близкой к первой собственной функции. Поэтому, в отличие от обычного метода итераций,  $v^{(0)}$  целесообразно выбирать так, чтобы в ее разложении присутствовало с достаточными весами как можно большее число собственных функций.

### § 23. Открытый резонатор с полупрозрачными стенками, образующими замкнутую поверхность; вытекающие волноводные волны ( $\rho$ -метод)

1. В этом и следующих параграфах рассмотрены высокодобротные открытые резонаторы со слабой связью с внешней средой. Такие резонаторы являются своеобразными ловушками. При внешнем возбуждении почти

при всех частотах внутреннее поле в них малó, а волны создается такое же поле, какое было бы при нулевой связи. Лишь в узких областях частот — а именно, вблизи собственных частот внутренних колебаний закрытого резонатора той же формы — внутреннее поле становится большим, а внешнее испытывает конечное возмущение. Нужно найти частоту, при которой эти два явления выражены сильнее всего (вещественную резонансную частоту открытого резонатора), и ширину резонансной кривой.

Мы применим аппарат § 10. При этом воспользуемся тем, что единственное требование, которому должно подчиняться поле  $U^0$ , выделяемое в виде отдельного слагаемого перед рядом в (10.3), состоит в том, что  $U^0$  удовлетворяет волновому уравнению с той же правой частью, что и в задаче дифракции. Точнее,  $U^0$  должно создаваться теми же источниками, но не обязательно в свободном пространстве. В качестве  $U^0$  мы выберем поле, создаваемое теми же источниками при дифракции на таком же резонаторе, но с нулевой связью, «заметаллизированном». Это поле мы будем считать известным; во всяком случае оно не имеет резонансного характера. Преимущество, получающееся при таком выборе  $U^0$  (по сравнению с тем, что было, если  $U^0$  — просто падающее поле), состоит в том, что возмущение, возникающее в упомянутых частотных областях, будет описываться одним членом ряда. По существу этот же прием применен в § 20.

Как и в § 10, мы будем исследовать решение скалярного уравнения. Решение уравнений Максвелла потребовало бы более сложной записи; оно производится по той же схеме и приводит к тем же физическим результатам.

2. Начнем с решения задачи об определении функции  $U$ , удовлетворяющей вне и внутри некоторой замкнутой поверхности  $S$  уравнению (10.1), условию излучения и условиям сопряжения (10.29) на  $S$ , где  $\rho$  — характеристика стенки резонатора, ее прозрачность. Мы примем, что  $\rho$  постоянно на  $S$ ; никаких принципиальных трудностей не возникает, если  $\rho$  является функцией точки поверхности. Для непрозрачной (металлической) стенки  $\rho = 0$ . Для двумерной задачи о резонаторах (волноводах) с частыми продольными щелями ( $U = E_z$ ) выражение для  $\rho$  приведено в (10.31а). В трехмерных элек-

тродинамических задачах имеют место более сложные условия, аналогичные (10.29). Примерно такие же условия можно установить между полями с обеих сторон тонкой диэлектрической пленки.

Если полупрозрачная стенка обладает потерями, то  $\text{Im } \rho < 0$ . Если потери в стенках невелики или отсутствуют ( $-\text{Im } \rho \ll |\rho|$ ) и, кроме того,

$$|k\rho| \ll 1, \quad (23.1)$$

то резонатор представляет собой ловушку. Именно такой случай мы и будем здесь исследовать.

Определим  $U^0$  как поле, равное нулю внутри резонатора (в  $V^+$ ), а вне резонатора (в  $V^-$ ) удовлетворяющее уравнению (10.1), условию излучения и граничному условию

$$U^0 = 0|_S. \quad (23.2a)$$

Введя собственные функции  $u_n$  и собственные значения  $\rho_n$  рассматриваемого резонатора по (10.4а) и (10.5), мы получим решение в обычном виде (10.3). Однако слагаемое  $U^0$  введено здесь иначе, чем в § 10, поэтому коэффициенты  $A_n$  будут даваться не (10.32а), а формулой

$$A_n = \frac{1}{\frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho}} \frac{\int_S u_n \frac{\partial U^0}{\partial N} dS}{\int_S u_n^2 dS}. \quad (23.3)$$

Эта формула получается так же, как (10.32а), с использованием ортогональности (10.8а). Существенным отличием ее от (10.32а) (справедливой при другом, более простом, выборе  $U^0$ ) является то, что все коэффициенты (23.3) (кроме, может быть, одного) малы при малых  $|\rho|$ , в то время как в (10.32а) все члены ряда не малы и вне резонанса имеют один порядок.

Один из коэффициентов (23.3) оказывается не малым лишь на частотах, при которых  $1/|\rho_n|$  велико, причем так, что разность двух больших величин, стоящих в знаменателе  $A_n$ , не велика, а конечна. Как мы увидим, получив явное выражение для  $\rho_n$ , это имеет место в узких частотных областях, так как  $\rho_n$  сильно зависит от частоты. Знаменатель в (23.3) содержит разность больших величин — одной ( $1/\rho$ ), зависящей от связи, и другой ( $1/\rho_n$ ),

обратно пропорциональной (в старшем порядке) разности рабочей частоты и резонансной частоты закрытого резонатора (см. ниже (23.11)). При компенсации вещественных частей этих величин наступает резонанс, и  $U$  отличается от  $U^0$  одним слагаемым ряда (10.3) — конечным в  $V^-$  и большим в  $V^+$ . Эта структура формул (10.3) и (23.3) и механизм возникновения существенного слагаемого в ряде (10.3) сохраняются и в задачах, рассмотренных в §§ 24, 25.

3. Выразим искомые величины  $1/\rho_n$  через собственные частоты  $k_m$  и собственные функции  $\chi_m$  внутренней области закрытого резонатора, т. е. через собственные элементы самосопряженной задачи в  $V^+$ :

$$\Delta \chi_m + k_m^2 \chi_m = 0, \quad (23.4a)$$

$$\chi_m = 0|_S. \quad (23.4b)$$

Собственные частоты  $k_m$  вещественны. Можно считать вещественными и собственные функции  $\chi_m$ , что упростит дальнейшую запись. Размерность индекса  $m$  в (22.4) на единицу больше, чем индекса  $n$ . Например, в трехмерных задачах  $m$  — совокупность трех чисел, а  $n$  — двух.

Применим формулу Грина к обоим волновым уравнениям (10.1) и (23.4a) в  $V^+$  и заменим в возникшем интеграле по поверхности  $\int_S u_n \frac{\partial \chi_m}{\partial N} dS$ , первый множитель по второй формуле из (10.4a). Получим точное выражение для  $\rho_n$ :

$$\rho_n = (k_m^2 - k^2) \frac{\int_V u_n \chi_m dV}{\int_S \frac{\partial \chi_m}{\partial N} \left( \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \right) dS}. \quad (23.5)$$

Эта формула при каждом  $n$  справедлива для бесконечного ряда значений  $m$ .

Проанализируем (23.5) в области частот, близкой к внутреннему резонансу, т. е. при  $k$ , близком к  $k_m$ .

Согласно (23.5), при  $k = k_m$  собственное значение  $\rho_n = 0$ . Это видно и непосредственно из (23.4b) и (10.4a) — при  $k = k_m$  существует собственная функция

$u_n$ , обращаяющаяся в нуль на  $S$ . При этом, выбирая соответствующий множитель равным единице, для какого-либо одного  $m$  имеем

$$u_n^+ = \chi_m, \quad (23.6a)$$

$$u_n^- = 0. \quad (23.6b)$$

При  $k$ , близком к  $k_m$ ,  $|\rho_n|$  мало, в (23.5) малая величина стоит множителем, и в старшем порядке можно в интегралах заменить  $u_n$  на  $\chi_m$ ,  $\frac{\partial u_n^+}{\partial N}$  на  $\frac{\partial \chi_m}{\partial N}$ , а  $\frac{\partial u_n^-}{\partial N}$  отбросить. Последнее следует из того, что  $\frac{\partial u_n^-}{\partial N}$  должно быть получено из граничной задачи в  $V^-$  по значению  $u_n^-|_S$ , а  $u_n^-|_S$  в нулевом по  $(k - k_m)$  порядке равно нулю. Согласно (10.4a),  $\rho_n \frac{\partial u_n^-}{\partial N}|_S$  является малой величиной, и в старшем порядке

$$u_n^-|_S = \rho_n \frac{\partial \chi_m}{\partial N}|_S. \quad (23.7a)$$

Таким образом, в старшем порядке  $\rho_n$  вещественно и выражается через решение задачи (23.4)

$$\rho_n \simeq -(k - k_m) A, \quad A = \frac{2k_m \int_V \chi_m^2 dV}{\int_S \left( \frac{\partial \chi_m}{\partial N} \right)^2 dS}. \quad (23.8)$$

Нам понадобится и следующее (мнимое) слагаемое в  $\rho_n$ . Его можно получить, записав формулу, подобную (10.6a) (но только ограничившись применением формулы Грина к  $u_n$  и  $u_n^*$  в  $V^+$  и затем заменяя  $\frac{\partial u_n^+}{\partial N}$  и  $\frac{\partial u_n^{+*}}{\partial N}$  по (10.4a)):

$$\text{Im} \frac{1}{\rho_n} = - \frac{\text{Im} \int_S u_n^* \frac{\partial u_n^-}{\partial N} dS}{\int_S |u_n|^2 dS}. \quad (23.9)$$

Для фактического определения правой части (23.9) надо решить упомянутую первую граничную задачу в  $V^-$  — по значению  $u_n^-|_S$  (23.7a) и условию излучения найти  $u_n^-$  во всем внешнем объеме  $V^-$ , а затем — производную  $\frac{\partial u_n^-}{\partial N}$  на  $S$ . Решение этой задачи предполагает знание функции Грина области  $V^-$ , удовлетворяющей условию

$$G^-|_S = 0, \quad (23.10a)$$

т. е. функции Грина заматаллизированной оболочки. Мы не будем выписывать соответствующих формул, так как  $G^-$  известно только для нескольких простейших тел. Отметим лишь, что в отличие от  $A$ , даваемого (23.8),  $\text{Im}(1/\rho_n)$  зависит от того, вблизи каких тел находится резонатор (от этого зависит  $G^-$ ). Величина  $\text{Im}(1/\rho_n)$  конечна, так как при подстановке (23.7a) в (23.9) малая величина  $\rho_n$  сокращается. Таким образом, если обозначить старший (конечный при  $k \rightarrow k_m$ ) член в разложении  $\text{Im}(1/\rho_n)$  по  $k - k_m$  через  $-B$ , то  $B > 0$  (ср. (10.7)), и, сохраняя в  $\text{Re}(1/\rho_n)$  и  $\text{Im}(1/\rho_n)$  старшие члены, получим искомую формулу

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{-1}{(k - k_m)A} - iB. \quad (23.11)$$

Фактическое определение  $B$  проще производить не по (23.9), а непосредственно из (23.11), находя  $\rho_n(k)$  либо из простого интегрального уравнения (10.18), либо из интегрального уравнения с вещественным ядром (13.13), подробно исследованного в § 27. Для тел сложной формы, для которых трудно решить внутреннюю задачу (23.4), может оказаться целесообразным находить из этих интегральных уравнений не только  $B$ , но и коэффициент  $A$ .

В формуле (23.11) участвуют только величины, относящиеся к заматаллизованному резонатору ( $k_m$ ,  $\chi_m$ ,  $G^-$ ).

4. Формулы (23.11) и (23.3) позволяют описать резонатор при любой (малой) связи и любом возбуждении. Они позволяют, в частности, найти и традиционную характеристику резонатора — частотную резонансную

кривую, т. е. зависимость множителя

$$\frac{1}{1/\rho_n - 1/\rho} \quad (23.12a)$$

в (23.3) от  $k$ . Найдем положение максимума этой кривой и ее полуширину.

Примем для простоты записи, что  $\rho$  вещественно. Знаменатель в (23.12a) минимален при  $\text{Re} \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{\rho}$ . Следовательно, центр  $k_*$  резонансной кривой смещен относительно частоты внутреннего резонанса на величину

$$\Delta k = -\rho/A \quad (\Delta k = k_* - k_m). \quad (23.13)$$

Таким образом, для резонаторов рассматриваемого здесь типа, т. е. таких, у которых связь определяется условиями сопряжения (10.29), смещение частоты не зависит от положения резонатора относительно внешних тел. Смещение имеет порядок величины связи и знак, противоположный знаку  $\rho$ .

Формула (23.13) имеет ту же структуру, что и формула для смещения частоты закрытого резонатора, если в нем от граничного условия (23.46) перейти к условию

$$\chi_m = \omega \frac{\partial \chi_m}{\partial N} \Big|_S. \quad (23.14)$$

Смещение частоты такого закрытого резонатора равно, как известно,

$$\Delta k = -\text{Re } \omega/A, \quad (23.15)$$

где  $A$  имеет то же значение, что и в (23.13).

То обстоятельство, что  $V^+$  и  $V^-$  связаны, проявляется в том, что полуширина резонансной кривой, равная, согласно (23.12a) и (23.11),

$$\delta k = \rho^2 \cdot B/A, \quad (23.16)$$

зависит от того, какие тела расположены вблизи резонатора. Величина  $\delta k$  пропорциональна коэффициенту  $B$ , характеризующему поток энергии через поверхность, на которой сформировано поле, пропорциональное  $\frac{\partial \chi_m}{\partial N}$ .

Ширина  $\delta k$  на порядок меньше смещения  $\Delta k$  и уже на частоте внутреннего резонанса, т. е. при  $k = k_m$ , амплитуда  $A_n$  не велика, а порядка единицы.

Легко написать общее выражение для поля при любой частоте. Вдали от резонансных частот ряд в (10.3) мал (порядка  $k\rho$ ), в  $V^-$  поле близко к  $U^0$ , а в  $V^+$  мало. При приближении  $k$  к  $k_*$  становится не малым одно слагаемое ряда.

В центре резонансной кривой, т. е. при  $k = k_*$ , поле равно (в старшем порядке)

$$U = U^0 + \frac{i}{B} \frac{\int_S \frac{\partial U^0}{\partial N} \frac{\partial \chi_m}{\partial N} dS}{\int_S \left( \frac{\partial \chi_m}{\partial N} \right)^2 dS} \frac{u_n}{\rho}. \quad (23.17)$$

Вовне (в  $V^-$ )  $u_n$  имеет порядок  $\rho$  (согласно формуле (23.7a), в которой надо заменить  $\rho_n$  на  $\rho$ ), и дополнительное к  $U^0$  слагаемое в (23.17) конечно. Внутри резонатора  $u_n$  конечно (см. (23.6a)) и поле велико, порядка  $1/\rho$ . С уменьшением связи область частот, в которой поле велико, убывает, согласно (23.16), и приближается к частоте внутреннего резонанса по (23.13), а поле при  $k = k_*$  растет.

5. Применим формулу (23.11) к вычислению волновых чисел вытекающих волн в волноводе из лент, параллельных оси  $z$ . Поперечное сечение такого волновода представляет собой резонатор рассмотренного выше типа с  $U = E_z$ .

Комплексные волновые числа  $\hat{h}_m$  являются собственными значениями двумерного уравнения

$$\Delta u_m + (k^2 - \hat{h}_m^2) u_m = 0 \quad (23.18)$$

с граничными условиями (10.29) (где  $\rho$  дано в (10.31a)) и условием экспоненциального роста на бесконечности. Обозначим через  $\hat{k}_m$  комплексную собственную частоту двумерного открытого резонатора, т. е. собственное значение одномерной задачи

$$\Delta u_m + \hat{k}_m^2 u_m = 0 \quad (23.19)$$

с теми же условиями сопряжения. Очевидно, что

$$\hat{h}_m^2 = k^2 - \hat{k}_m^2 \quad (23.20)$$

и что  $\hat{k}_m$  являются корнями уравнения

$$\rho_n(\hat{k}_m) = 0. \quad (23.21)$$

Это уравнение не имеет вещественных корней, так как  $\text{Im } \rho \leq 0$ , а при вещественном  $k$ , согласно (10.7),  $\text{Im } \rho_n > 0$ .

Используя (23.11), легко найти старшие (по  $k\rho$ ) члены в разложении  $\hat{h}_m$  и тем самым в  $\hat{h}_m$ . Примем вновь для простоты записи, что  $\rho$  вещественно. Тогда

$$\hat{k}_m = k_m - \frac{\rho}{A} + i\rho^2 \frac{B}{A}, \quad (23.22)$$

$$\hat{h}_m = h_m + \frac{\rho}{A} \frac{k_m}{h_m} - i\rho^2 \frac{B}{A} \frac{k_m}{h_m}, \quad (23.23)$$

где  $h_m = \sqrt{k^2 - k_m^2}$  — волновое число заметализированного волновода. Если  $|h_m| \ll k$  (т. е. вблизи критических частот), то пользоваться (23.23) нельзя; в этом случае  $\hat{h}_m$  надо находить непосредственно из (23.20).

Конечная прозрачность ( $\rho \neq 0$ ) приводит к изменению фазовой скорости в первом порядке по  $\rho$ ; затухание имеет порядок  $\rho^2$ . Так как  $A > 0$ , а для рассматриваемой поляризации  $\rho > 0$ , то конечная прозрачность приводит к уменьшению фазовой скорости,  $\text{Re } \hat{h}_m > h_m$ .

6. Приведем кратко результаты, получающиеся для второй поляризации, т. е. для резонатора, на поверхности которого выполняются условия (10.30) с некоторым заданным значением  $\bar{\rho}$ .

Поле  $U^0$ , которое выделяется в полном решении (10.3), должно быть полем, возникающим при дифракции на той же поверхности  $S$  при граничном условии

$$\frac{\partial U^0}{\partial N} = 0 \Big|_S. \quad (23.26)$$

Система собственных функций определяется волновым уравнением, условием излучения и условиями сопряжения (10.46) на  $S$ ;  $\bar{\rho}_n$  — собственные значения, и для них выполняется второе условие (10.7).

Коэффициенты ряда (10.3) имеют ту же структуру, что и в (23.3), и их частотная зависимость определяется в основном таким же множителем:

$$\frac{1}{1/\bar{\rho}_n - 1/\bar{\rho}}. \quad (23.126)$$

Резонансы, при которых среди  $A_n$  есть одно не малое и  $U$  заметно отличается от  $U^0$ , происходят вблизи частот, являющихся собственными значениями той же задачи (23.4), в которой граничным условием, вместо (23.4б), является условие

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_m}{\partial N} = 0 \Big|_S. \quad (23.24)$$

Вблизи резонанса  $\tilde{u}_n^+$  близко к  $\tilde{\chi}_m$ , а граничное значение  $\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial N} \Big|_S$  мало и равно

$$\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial N} \Big|_S = -\bar{\rho}_n \tilde{\chi}_m \Big|_S. \quad (23.76)$$

Функции  $\tilde{u}_n^-$  находятся по значению своих нормальных производных на  $S$ , пропорциональных, согласно (23.76), значению  $\tilde{\chi}_m$  на поверхности. Фактическое определение требует знания функции Грина  $G^-$  внешней области, удовлетворяющей на  $S$  условию

$$\frac{\partial G^-}{\partial N} \Big|_S = 0. \quad (23.10б)$$

Решив эту вторую граничную задачу, можно определить и  $\tilde{u}_n^- \Big|_S$ .

Основной результат всего исследования — формула (23.11) — сохраняется и для  $\bar{\rho}_n$ , только коэффициент  $A$  отличается от (23.8) заменой в знаменателе  $\frac{\partial \tilde{\chi}_m}{\partial N}$  на  $\tilde{\chi}_m$ , а для  $B$  получается выражение, аналогичное (23.9).

Дальнейший анализ производится так же, как и в первой поляризации. Сохраняются, с заменой  $\rho$  на  $\bar{\rho}$ , формулы (23.13) и (23.16) для смещения максимума резонансной кривой и для ее полуширины, формула (23.23) для комплексной фазовой скорости вытекающих волн в ленточном волноводе, аналогия между формулой (23.13) и формулой для смещения частоты при переходе от идеальных к импедансным стенкам (надо в (23.13) заменить  $\bar{\rho}$  на  $-\text{Re} \frac{1}{w}$ ) и все соображения о порядке величин полей в  $V^-$  и  $V^+$  внутри и вне резонансных областей. Заметим, что так как  $\bar{\rho}$ , даваемое формулой (10.31б), отрицательно, то вытекающие  $H$ -волны имеют большую фазовую скорость, чем в закрытом волноводе.

### § 24. Двумерный металлический резонатор произвольной формы с малым отверстием; связь двух резонаторов ( $H$ -поляризация, $\rho$ -метод)

1. В этом и следующем параграфах с помощью  $\rho$ -метода исследуется двумерная ( $\frac{\partial \dots}{\partial z} \equiv 0$ ) задача возбуждения открытого резонатора. Резонатор представляет собой цилиндр произвольного поперечного сечения, в котором прорезана продольная щель (рис. 24.1). Ширину щели  $2l$  будем считать малой по сравнению с длиной волны ( $2l \ll \lambda$ ), а стенку бесконечно тонкой.

Математическая задача состоит в отыскании решения уравнения

$$\Delta U + k^2 U = f, \quad (24.1)$$

удовлетворяющего на стенках резонатора в случае  $H$ -поляризации ( $U = H_z$ ) условию

$$\frac{\partial U}{\partial N} \Big|_{S-\bar{S}} = 0, \quad (24.2)$$

а в случае  $E$ -поляризации ( $U = E_z$ ), которая будет рассмотрена в следующем параграфе, условию

$$U \Big|_{S-\bar{S}} = 0. \quad (24.3)$$

Буквой  $S$  обозначен полный контур поперечного сечения цилиндра, буквой  $\bar{S}$  — отверстие. Кроме того, решение должно удовлетворять соответствующим условиям на острых краях и условию излучения. При возбуждении плоской волной условие излучения накладывается на рассеянное поле. На щели  $\bar{S}$  полное поле и его нормальная производная должны быть непрерывны:

$$U^+ - U^- = 0 \Big|_{\bar{S}}, \quad (24.4a)$$

$$\frac{\partial U^+}{\partial N} - \frac{\partial U^-}{\partial N} = 0 \Big|_{\bar{S}}. \quad (24.4б)$$

Для решения сформулированных задач используем аппарат § 10, несколько обобщив постановку однородных задач.

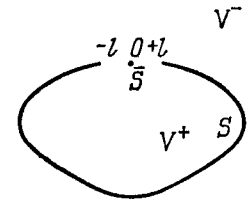


Рис. 24.1.

2. Введем собственные функции  $u_n$ , удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u_n + k^2 u_n = 0, \quad (24.5)$$

тому же, что и полное поле, граничному условию (24.2) на стенках и следующим условиям сопряжения на щели (ср. (10.46)) в отличие от (24.4):

$$\frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} = 0 \Big|_{\bar{S}}, \quad (24.6a)$$

$$u_n^+ - u_n^- + \frac{\alpha}{\bar{\rho}_n} \frac{\partial u_n}{\partial N} = 0 \Big|_{\bar{S}}. \quad (24.6b)$$

Здесь  $\alpha$  — некоторая функция на  $\bar{S}$ , которую мы определим позже. Обобщение постановки однородной задачи по сравнению с § 10 состоит во введении этой функции. Помимо этого каждая собственная функция должна удовлетворять условию излучения и условию на ребрах. Роль собственных значений сформулированной однородной задачи играют числа  $\bar{\rho}_n$ .

Применяя теорему Грина для двух собственных функций разных номеров  $k$  внешней ( $V^-$ ) и к внутренней ( $V^+$ ) областям резонатора и пользуясь при этом уравнением (24.5), граничными условиями на стенках, условиями (24.6) и условиями излучения, легко показать, что нормальные производные собственных функций ортогональны на щели  $\bar{S}$  с весом  $\alpha$ :

$$\int_{\bar{S}} \alpha \frac{\partial u_n}{\partial N} \frac{\partial u_m}{\partial N} dS = 0 \quad (n \neq m). \quad (24.7)$$

Формальное решение задачи возбуждения (24.1), (24.2), (24.4), например, при расположении источников  $f$  только во внешней области дается однократными рядами по собственным функциям:

$$\begin{aligned} U &= U^0 + \sum_n A_n u_n \quad \text{в } V^-, \\ U &= \sum_n A_n u_n \quad \text{в } V^+, \end{aligned} \quad (24.8)$$

где  $U^0$  — решение задачи дифракции тех же источников  $f$  на цилиндре без щели (резонаторе с нулевой связью):

$$\Delta U^0 + k^2 U^0 = f, \quad (24.9a)$$

$$\frac{\partial U^0}{\partial N} = 0 \Big|_S. \quad (24.9b)$$

Очевидно, что представление (24.8) при любых коэффициентах  $A_n$  удовлетворяет всем условиям исходной задачи, кроме (24.4a). Из требования удовлетворения этому условию с использованием ортогональности (24.7) находятся коэффициенты  $A_n$ :

$$A_n = -\bar{\rho}_n \frac{\int_{\bar{S}} U^0 \frac{\partial u_n}{\partial N} dS}{\int_{\bar{S}} \alpha \left( \frac{\partial u_n}{\partial N} \right)^2 dS}. \quad (24.10)$$

В дальнейшем, после решения однородной задачи и вычисления коэффициентов  $A_n$ , мы убедимся в том, что в старшем порядке по  $kl$  в суммах (24.8) присутствует лишь первое слагаемое.

3. Приступим к решению однородной задачи (24.5), (24.6). С помощью формулы Грина она легко сводится к однородному интегральному уравнению второго рода по щели относительно неизвестной функции  $\varphi_n = \frac{\partial u_n}{\partial N} \Big|_{\bar{S}}$ :

$$-\frac{\alpha}{\bar{\rho}_n} \varphi_n = \int_{\bar{S}} \varphi_n (G^+ + G^-) dS. \quad (24.11)$$

Здесь  $G^+$  и  $G^-$  — функции Грина для уравнения Гельмгольца двух несвязанных областей  $V^+$  и  $V^-$  с условием на границе

$$\frac{\partial G^+}{\partial N} = \frac{\partial G^-}{\partial N} = 0 \Big|_S.$$

Для решения уравнения (24.11) в его ядре следует отделить логарифмическую особенность от слагаемых, содержащих резонансы изолированных областей  $V^+$  и  $V^-$ . С этой целью каждое из слагаемых ядра, т. е.  $G^+$  и  $G^-$ , удобно разложить по собственным функциям

однородных задач Стеклова (в нашей терминологии — по функциям  $\omega$ -метода, § 9) для соответствующих областей:

$$\Delta\psi_n + k^2\psi_n = 0, \quad (24.12a)$$

$$\psi_n = \omega_n \frac{\partial\psi_n}{\partial N} \Big|_S. \quad (24.12b)$$

Для области  $V^-$  — функции  $\psi_n$  должны еще удовлетворять условиям излучения<sup>1)</sup>.

Поскольку дальнейшие рассуждения формально одинаковы для  $V^+$  и  $V^-$ , то знаки «+» и «-» мы временно опускаем.

Как отмечалось в § 9, в собственных значениях  $\omega_n$ , как в функциях частоты, содержится вся информация о резонансных свойствах соответствующих изолированных областей. Напомним, что, например, для граничного условия (24.2) резонанс для внутренней области наступает, когда  $k\omega_n$  обращается в бесконечность; для внешней области в резонансных условиях  $|k\omega_n|$  становится большой величиной.

Задачи (24.12) эквивалентны интегральным уравнениям

$$-\omega_n\psi_n = \int_S \psi_n G dS, \quad (24.13)$$

где  $G = G^+$  или  $G = G^-$ . Мы допустим, что для внешней области, как и для внутренней (согласно теореме Гильберта — Шмидта), имеет место билинейная формула, дающая разложение на  $S$  ядра (24.13) по собственным функциям  $\psi_n$ :

$$G(s, s') = - \sum_{n=0} \frac{\omega_n}{L(1 + \delta_{0n})} \psi_n(s) \psi_n(s'). \quad (24.14)$$

Здесь принята нормировка  $\int_S \psi_n^2 dS = (1 + \delta_{0n})L$ ,  $2L$  — длина полного контура  $S$ . Для определенности ограни-

чимся задачами с осью симметрии и будем рассматривать только четные по  $s$  решения. Допустим также, что при больших номерах асимптотика собственных значений  $\omega_n$  и собственных функций  $\psi_n$  имеет вид

$$\frac{\omega_n}{L} \simeq \frac{1}{\pi n} + \frac{(kL)^2}{2(\pi n)^3}, \quad (24.15a)$$

$$\psi_n(s) \simeq \cos \frac{\pi n s}{L}, \quad (24.15b)$$

что справедливо, по крайней мере, для внешней и внутренней областей круга и для внутренней области прямоугольника. Имеются нестрогие соображения о справедливости этой асимптотики в общем случае. В известном смысле в пользу (24.15) свидетельствуют результаты по асимптотике собственных элементов задачи Стеклова для уравнения Лапласа при произвольной форме контура  $S$ .

Асимптотическое представление (24.15) дает возможность отделить в (24.14) слагаемые, обращющиеся в бесконечность при резонансах, от логарифмической особенности:

$$G(s, s') = - \frac{\omega_0\psi_0(s)\psi_0(s')}{2L} - \sum_{n=1} \left( \frac{\omega_n}{L} - \frac{1}{\pi n} \right) \psi_n(s)\psi_n(s') - \sum_{n=1} \frac{\psi_n(s)\psi_n(s')}{\pi n}. \quad (24.16)$$

Интегрирование в (24.11) происходит по малой щели ( $|s| \ll L$ ). Поэтому в первой сумме (24.16), которая сходится, согласно (24.15a), можно приближенно положить  $s = s' = 0$ . Наконец, выделяя во второй сумме (24.16) логарифмическую особенность с помощью (24.15b) и известного тождества

$$\sum_{n=1} \frac{\cos n\alpha \cos n\beta}{n} = -\frac{1}{2} \ln 2 |\cos \alpha - \cos \beta|, \quad (24.17)$$

получим, что с точностью до несущественного постоянного слагаемого (не содержащего резонансов), функция Грина на щели может быть представлена в виде

$$G(s, s') \Big|_S \simeq C + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \left( \frac{\pi s}{L} \right)^2 - \left( \frac{\pi s'}{L} \right)^2 \right|, \quad (24.18)$$

<sup>1)</sup> Заметим, что условие (24.12b) можно ставить и на части полного контура  $S$ , а на дополнении требовать, например,  $\partial\psi_n/\partial N = 0$ . Иногда такая постановка упрощает вычисления (см. текст перед (24.29a)).



где

$$C = -\frac{\omega_0 \psi_0^+(0)}{2L} - \sum_{n=1} \left( \frac{\omega_n}{L} - \frac{1}{\pi n} \right) \psi_n^2(0), \quad (24.19)$$

а под знаком логарифма сохранен лишь старший порядок по  $\frac{s}{L}$ . Две последние формулы будут основными при решении уравнения (24.11).

Исключим в (24.11) малый параметр  $l$  из пределов интегрирования. Для этого введем вместо  $s$  новое переменное  $\xi$  заменой:

$$s = l \cos \xi, \quad (24.20)$$

После несложных преобразований с использованием формулы (24.17) интегральное уравнение (24.11) переписывается в виде

$$-\frac{\alpha(\xi) \varphi_n(\xi)}{\bar{\rho}_n} = l \int_0^\pi \varphi_n(\xi') \sin \xi' \left( C^+ + C^- - \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi l}{2L} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1} \frac{\cos 2n\xi \cos 2n\xi'}{n} \right) d\xi'. \quad (24.21)$$

Наконец, если принять функцию  $\alpha(\xi)$  равной

$$\alpha = l \sin \xi = \sqrt{l^2 - s^2}, \quad (24.22)$$

то (24.21) станет простейшим уравнением относительно функции  $\varphi_n(\xi) \sin \xi$ , решая которое, найдем

$$-\frac{1}{\bar{\rho}_0} = \pi(C^+ + C^-) + 2 \ln \frac{\pi l}{2L}, \quad (24.23a)$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{l \sin \xi} = \frac{1}{\sqrt{l^2 - s^2}}, \quad (24.23б)$$

$$\bar{\rho}_n = n \quad (n > 0), \quad (24.23в)$$

$$\varphi_n = \frac{\cos 2n\xi}{l \sin \xi}. \quad (24.23г)$$

Из формул (24.23) видно, что все резонансы заключены только в первом собственном значении  $\bar{\rho}_0$ , так как только оно зависит от частоты.

4. Вернемся к решению задачи возбуждения. Заметим, что, согласно (24.23б), (24.23г), решение (24.8) имеет требуемую особенность на кромках, а выбор  $\alpha$  по (24.22) обеспечивает, в частности, сходимость интеграла, стоящего в знаменателе (24.10). Подставляя (24.23б), (24.23г) в (24.10), найдем коэффициенты  $A_n$ :

$$A_n = -\bar{\rho}_n \cdot \frac{2}{\pi(1 + \delta_{0n})} \int_0^\pi U^0(l \cos \xi) \cos 2n\xi d\xi, \quad (24.24)$$

т. е. с точностью до членов порядка  $(kl)^2$ :

$$A_0 = -\bar{\rho}_0 U^0(0), \quad A_n = 0 \quad (n > 0). \quad (24.25)$$

В результате, например, ток на стенке резонатора вдали от щели будет описываться выражениями

$$U^-(s) = U^0(s) - \frac{U^0(0) G^-(0, s)}{C^+ + C^- + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi l}{2L}}, \quad (24.26a)$$

$$U^+(s) = \frac{U^0(0) G^+(0, s)}{C^+ + C^- + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi l}{2L}}. \quad (24.26б)$$

Резонансные явления особенно наглядны в случае логарифмически узкой щели. Как мы сейчас увидим, они имеют тот же характер, что и для резонатора с полупрозрачными стенками, рассмотренного в предыдущем параграфе. Действительно, согласно полученным формулам,  $\bar{\rho}_0$  и соответственно поле внутри резонатора почти всегда малы (пропорциональны  $1/\ln \frac{\pi l}{2L}$ ). Резонанс проявляется в том, что на некоторых частотах, близких к собственным частотам для данной области, происходит компенсация большой величины  $\ln \frac{\pi l}{2L}$  в знаменателе  $\bar{\rho}_0$  одним из слагаемых  $C^+ + C^-$ , например, при резонансе в  $V^+$  — слагаемым  $\frac{\omega_n^+}{L} \psi_n^2(0)$ . При этом  $\bar{\rho}_0$  и дополнительное к  $U^0$  поле в  $V^-$  становятся величинами порядка единицы (т. е. внешнее поле испытывает конечное возмущение), а поле внутри резонатора становится большим, пропорциональным  $\ln \frac{\pi l}{2L}$ . Из

формулы (24.26б) также следует, что на собственной частоте замкнутой области  $V^+$  поле внутри резонатора уже невелико (порядка единицы), а во внешней области равно  $U^0$ , так как второе слагаемое в (24.26а) при этом обращается в нуль.

Таким образом, условие резонанса на  $n$ -м колебании может быть сформулировано в виде

$$\frac{\omega_n}{L(1 + \delta_{0n})} \psi_n^2(0) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi l}{2L}. \quad (24.27)$$

Это условие позволяет получить смещение резонансной частоты, вызванное прорезанием щели. Так, для кругового сечения радиуса  $a$   $\omega_n^+ = \frac{J_n(ka)}{kJ_n'(ka)}$ , и смещение частоты, например, при  $n = 0$  оказывается равным

$$\Delta k \approx - \frac{1}{4k_m a^2 \ln \delta/2}, \quad (24.28)$$

где  $2\delta$  — угловой размер щели,  $J_1(k_m a) = 0$ .

Для прямоугольного поперечного сечения  $\omega_n^+$  также можно выписать в явном виде, если во вспомогательной задаче (24.12) условие (24.12б) ставить лишь на одной из стенок резонатора (той, в которой прорезана щель), а на трех оставшихся потребовать  $\frac{\partial \psi_n}{\partial N} = 0$ . Тогда

$$\omega_n^+ = - \frac{1}{\beta_n \operatorname{tg} \beta_n b}. \quad (24.29a)$$

Здесь  $\beta_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}$ ,  $2a$  — размер стенок, в одной из которых прорезана щель,  $b$  — размер других стенок. При этом, например, для колебания, в котором  $n = 0$ , получим

$$\Delta k = - \frac{1}{4ma \ln \frac{\pi l}{2a}}. \quad (24.29б)$$

В общем случае произвольного контура  $S$  для смещения частоты имеет место формула, аналогичная (23.13):

$$\Delta k = - \frac{\bar{\rho}}{A}, \quad (24.30)$$

где

$$\bar{\rho} = \frac{\pi}{4L} \frac{1}{\ln \frac{\pi l}{2L}}, \quad (a) \quad \bar{A} = \frac{k_m \int \chi_m^2 dV}{V^+ L \chi_m^2(0)}, \quad (б) \quad (24.31)$$

$k_m$  и  $\chi_m$  — собственные частоты и собственные функции внутренней задачи с условием  $\frac{\partial \chi_m}{\partial N} = 0|_S$ .

Эта формула легко получается, если применить к  $V^+$  теорему Грина для функций  $\psi_n$  и  $\chi_m$  и воспользоваться при этом граничным условием (24.12б), условием резонанса (24.27), а также тем, что при  $k$ , близком к  $k_m$ , одна из функций  $\chi_m$  близка к  $\psi_n$ .

5. Изложенный аппарат полностью переносится для расчета закрытых резонаторов, связанных через малую щель (рис. 24.2) с очевидным изменением в постановках задач — отпадает условие излучения. При этом единственное изменение во всех формулах обусловлено различием длин контуров  $S^+$  и  $S^-$  ( $2L^+$  и  $2L^-$ ) и сводится, как оказывается, к замене всюду  $\ln \frac{\pi l}{2L}$  на  $\ln \frac{\pi l}{2\sqrt{L^+ L^-}}$ .

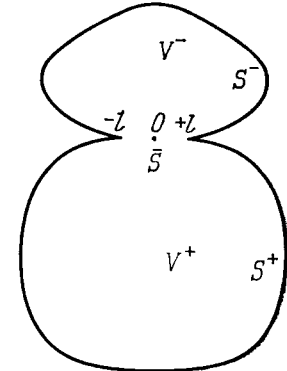


Рис. 24.2.

Разумеется, здесь не только  $\omega_n^+$ , но и  $\omega_n^-$  вещественны и содержат только бесконечные резонансы. Поэтому и в связанной системе существуют только полные резонансы ( $\bar{\rho}_0 = \infty$ ), условие которых

$$C^+ + C^- + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi l}{2\sqrt{L^+ L^-}} = 0. \quad (24.32)$$

Отличие от открытой системы состоит также в том, что на собственной частоте  $V^-$  оба слагаемые в (24.26а) обращаются в бесконечность. Однако если раскрыть эту неопределенность, то окажется, что поле в  $V^-$  велико, но конечно, и имеет порядок  $\ln [\pi l (2\sqrt{L^+ L^-})^{-1}]$ .

Принципиальных усложнений не возникает при близости или совпадении собственных частот областей  $V^+$  и  $V^-$ .

Приведем формулы для смещения  $\Delta k$  резонансных частот относительно собственной частоты  $k$  одной из составляющих областей для трех конкретных резонансных систем

$$\begin{aligned} & - \left( 2a^2 k_{0m} \ln \frac{\delta_+ \delta_-}{4} \right)^{-1} \quad (\text{а}), \quad - \left( 2a_- \ln \frac{\pi l^2}{4a_+ a_-} \right)^{-1} \quad (\text{б}), \\ & - \left( 2a_-^2 k_{0m} \ln \frac{\pi l^2}{4a_+ a_-} \right)^{-1} \quad (\text{в}), \quad - \left( 2a_+ \ln \frac{\pi l^2}{4a_+ a_-} \right)^{-1} \quad (\text{г}). \end{aligned} \quad (24.33)$$

Формула (24.33а) относится к случаю, когда связаны две круговые области; в ней  $2\delta_-$  и  $a_-$  — угловой размер и радиус круга, относительно собственной частоты  $k_{0m}$  ( $J_1(k_{0m}a_-) = 0$ ) которого выписано смещение,  $2\delta_+$  — угловой размер щели в другом круге. Формула (24.33б) дает смещение при связи двух прямоугольных областей; в ней  $2a_-$  и  $b_-$  — размеры прямоугольника, относительно собственной частоты  $k = \pi/b_-$  которого приведено смещение,  $2a_+$  и  $b_+$  — размеры стенок другого прямоугольника; щель прорезана в соприкасающихся стенках с размерами  $2a_-$ ,  $2a_+$ . Формулы (24.33в), (24.33г) соответствуют связи круга радиуса  $a_-$  с прямоугольником, имеющим размеры стенок  $2a_+$  и  $b_+$ ; щель прорезана в стенке ширины  $2a_+$ ; (24.33в) дает смещение относительно собственной частоты  $k_{0m}$  круга ( $J_1(k_{0m}a_-) = 0$ ), а (24.33г) — относительно собственной частоты  $k = \pi/b_+$  прямоугольника.

Заметим, наконец, что через корни уравнения (24.32) элементарно выражаются фазовые скорости собственных волн соответствующих связанных волноводов.

### § 25. Двумерный металлический резонатор произвольной формы с малым отверстием (E-поляризация, $\rho$ -метод).

1. Для E-поляризации введем собственные функции  $u_n$ , которые должны удовлетворять уравнению (24.5), граничному условию на стенках (24.3) и следующим условиям сопряжения на щели (ср. (10.4а)):

$$u_n^+ - u_n^- = 0 \Big|_{\bar{S}}, \quad (\text{а}) \quad \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} - \frac{u_n}{\alpha \rho_n} = 0 \Big|_{\bar{S}}; \quad (\text{б}) \quad (25.1)$$

$\alpha$  — некоторая функция координат на  $\bar{S}$ . От каждой собственной функции также требуется выполнение условия излучения и соответствующего условия вблизи острых кромок. Введенные таким образом собственные функции ортогональны на щели с весом  $1/\alpha$ :

$$\int_{\bar{S}} \frac{u_n u_m}{\alpha} dS = 0 \quad (n \neq m). \quad (25.2)$$

Формальное решение задачи дифракции (24.1), (24.3) дается рядами (24.8), где  $U^0$  — есть решение уравнения (24.9а) с условием  $U^0 = 0 \Big|_{\bar{S}}$ , а коэффициенты  $A_n$  равны

$$A_n = \rho_n \frac{\int_{\bar{S}} u_n \frac{\partial U^0}{\partial N} dS}{\int_{\bar{S}} u_n^2 / \alpha dS}. \quad (25.3)$$

2. Сведем однородную задачу к уравнению по щели. Для этой поляризации оно будет не интегральным, а интегро-дифференциальным. При этом возникает трудность, связанная с тем, что выражение для поля, даваемое формулой Грина, нужно дифференцировать по нормали к  $\bar{S}$  и вносить производную под знак интеграла. Если использовать в этой формуле функции Грина для  $V^+$  и  $V^-$  с условием  $G = 0 \Big|_{\bar{S}}$ , то вносить дифференцирование под знак интеграла, вообще говоря, нельзя из-за получающейся при этом сильной особенности ядра при совпадении аргументов. Такая процедура, однако, становится возможной, если использовать функции Грина импедансного тела, т. е. с условием  $G - w \frac{\partial G}{\partial N} = 0 \Big|_{\bar{S}}$ .

При этом  $\frac{\partial G}{\partial N} \Big|_{\bar{S}}$  имеет, очевидно, ту же особенность, что и сама функция  $G$  (т. е. логарифмическую), и еще одно дифференцирование под знаком интеграла допустимо. Для того чтобы в искомое уравнение вошел интеграл только по щели  $\bar{S}$ , нужно собственные функции на границах резонатора временно подчинить тому же импедансному граничному условию (вместо (24.3)). Затем, после проведения ряда необходимых операций, можно

$\omega$  положить равным нулю и тем самым вернуться к исходным собственным функциям.

Для представления слагаемых ядра  $\frac{\partial^2 G(s, s')}{\partial N_s \partial N_{s'}}$  в виде ряда по собственным функциям  $\psi_n$  задачи Стеклова (24.12) используем теперь интегральное уравнение, аналогичное (24.13), но полученное с помощью функции Грина импедансного тела:

$$\psi_n(s) = (\omega_n - \omega) \int_{\bar{S}} \psi_n(s') \frac{\partial^2 G(s, s')}{\partial N_s \partial N_{s'}} ds'. \quad (25.4)$$

Отсюда получаем искомую билинейную формулу, дающую разложение на  $\bar{S}$  ядра  $\frac{\partial^2 G}{\partial N_s \partial N_{s'}}$ . Взятая на щели  $\bar{S}$  после приближенной замены  $\psi_n(s)$  на  $\psi_n(0) \cos \frac{\pi ns}{L}$  и некоторых формальных преобразований, имеющих целью улучшить сходимость, она примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial N_s \partial N_{s'}}(s, s') \simeq \frac{\psi_0^2(0)}{2L(\omega_0 - \omega)} - \\ - \frac{L^2}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \sum_{n=1} \frac{\psi_n^2(0) \cos \frac{\pi ns}{L} \cos \frac{\pi ns'}{L}}{Ln^2(\omega_n - \omega)}. \end{aligned} \quad (25.5)$$

Подставляя это представление в выражение для нормальной производной собственной функции на  $\bar{S}$ , даваемое формулой Грина, вынося двойное дифференцирование по  $s$  за знак интеграла и переходя затем к пределу при  $\omega \rightarrow 0$ , получим, используя граничное условие (25.16), искомое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{u_n(s)}{\alpha(s)\rho_n} = \frac{1}{2L} \left( \frac{\psi_0^{+2}(0)}{\omega_0^+} + \frac{\psi_0^{-2}(0)}{\omega_0^-} \right) \int_{\bar{S}} u_n ds' - \\ - \frac{1}{\pi^2} \frac{d^2}{ds^2} \int_{\bar{S}} u_n(s') \sum_{m=1} \left( \frac{L\psi_m^{+2}(0)}{\omega_m^+} + \frac{L\psi_m^{-2}(0)}{\omega_m^-} \right) \times \\ \times \frac{\cos \frac{\pi ms}{L} \cos \frac{\pi ms'}{L}}{m^2} ds'. \end{aligned} \quad (25.6)$$

Если в (25.6) подставить  $\frac{L}{\omega_m}$ , воспользовавшись асимптотикой (24.15а), то некоторые возникшие при этом слагаемые можно фактически продифференцировать по  $s$  и затем, где это не вызывает расходимости, положить  $s = s' = 0$ . Пренебрегая при этом несущественными слагаемыми, не содержащими резонансных членов, получим вместо (25.6)

$$\begin{aligned} \frac{u_n(s)}{\alpha(s)\rho_n} = \frac{C^+ + C^-}{L^2} \int_{-l}^{+l} u_n(s') ds' + \\ + \frac{1}{\pi} \frac{d^2}{ds^2} \int_{-l}^{+l} u_n(s') \ln \left| \left( \frac{\pi s'}{L} \right)^2 - \left( \frac{\pi s}{L} \right)^2 \right| ds', \end{aligned} \quad (25.7)$$

где  $C^+$  и  $C^-$  для областей  $V^+$  и  $V^-$  имеют вид

$$C = \frac{L\psi_0^2(0)}{2\omega_0} + \sum_{n=1} \left( \frac{L}{\omega_n} - \pi n + \frac{(kL)^2}{2\pi n} \right) \psi_n^2(0). \quad (25.8)$$

Наконец, если сделать замену переменных по (24.20) и выбрать  $\alpha(s)$  по (24.22), то уравнение (25.7) разрешается в явном виде, и его собственные элементы оказываются равными

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{l}{L} \right)^2 (C^+ + C^-) + 2, \quad (25.9а)$$

$$u_0 = \sqrt{1 - \left( \frac{s}{l} \right)^2}, \quad (25.9б)$$

$$\frac{1}{\rho_n} = 2(2n + 1) \quad (n > 0), \quad (25.9в)$$

$$u_n = \sin \left[ (2n + 1) \arccos \frac{s}{l} \right]. \quad (25.9г)$$

Из этих формул видно, что все резонансы, как и для  $H$ -поляризации, заключены только в первом собственном значении  $\rho_0$  и что собственные функции удовлетворяют требуемому условию вблизи острых кромок.

3. Подставляя (25.9б), (25.9г) в (25.3), найдем коэффициенты  $A_n$ :

$$A_n = \rho_n \frac{2l}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial U^0}{\partial N} (l \cos \xi) \sin(2n+1)\xi \sin \xi d\xi. \quad (25.10)$$

Из этой формулы следует, что с точностью до членов порядка  $(kl)^3$

$$A_0 = \rho_0 l \frac{\partial U^0}{\partial N}(0), \quad A_n = 0 \quad (n > 0). \quad (25.11)$$

При этом поле на щели равно

$$U(s) = \frac{\sqrt{l^2 - s^2} \frac{\partial U^0}{\partial N}(0)}{\frac{\pi}{2} \left(\frac{l}{L}\right)^2 (C^+ + C^-) + 2}, \quad (25.12)$$

вдали от резонатора (в точке  $q$ )

$$U(q) = U^0(q) - \frac{l^2 \frac{\partial U^0}{\partial N}(0) \frac{\partial G^-}{\partial N}(0, q)}{\left(\frac{l}{L}\right)^2 (C^+ + C^-) + \frac{4}{\pi}}, \quad (25.13a)$$

а внутри резонатора, вдали от стенок,

$$U(q) = \frac{l^2 \frac{\partial U^0}{\partial N}(0) \frac{\partial G^+}{\partial N}(0, q)}{\left(\frac{l}{L}\right)^2 (C^+ + C^-) + \frac{4}{\pi}}. \quad (25.13б)$$

Из анализа (25.13) и сравнения этих формул с (24.26) следует, что решения для обеих поляризаций обладают аналогичными резонансными свойствами; только для  $E$ -поляризации роль характерного малого параметра играет не  $\frac{1}{\ln \frac{\pi l}{2L}}$ , а  $\left(\frac{l}{L}\right)^2$ . Условие резонанса здесь имеет

вид

$$\frac{w_n}{L} = -\frac{\pi}{4(1 + \delta_{0n})} \left(\frac{l}{L}\right)^2 \psi_n^2(0), \quad (25.14)$$

а смещение частоты в общем случае произвольного контура дается формулой (24.30)

$$\Delta k = -\rho/\bar{A}, \quad (25.15a)$$

где

$$\rho = \frac{L}{2\pi} \left(\frac{\pi l}{2L}\right)^2, \quad \bar{A} = \frac{k_m \int \chi_m^2 dV}{L \left(\frac{\partial \chi_m}{\partial N}(0)\right)^2}, \quad (25.15б)$$

$k_m$  и  $\chi_m$  — собственные частоты и собственные функции закрытой задачи с условием  $\chi_m|_S = 0$ . Эти формулы получаются по схеме, описанной в § 24 с использованием условия резонанса (25.14).

В частном случае кругового контура радиуса  $a$  при  $n = 0$  смещение резонансной частоты равно

$$\Delta k = -k_m \delta^2/8, \quad J_0(k_m a) = 0, \quad (25.16)$$

$2\delta$  — угловой размер щели. Эта формула хорошо согласуется с результатами проведенного  $s$ -методом (см. § 28, рис. 28.2) строгого расчета вплоть до угловых размеров щели  $\delta \simeq \pi/8$ , погрешность формулы (25.16) не превышает при этом 13%.

Изложенный в этом параграфе аппарат так же, как и в случае  $H$ -поляризации, тривиальным образом переносится на задачи о закрытых резонаторах, связанных через малое отверстие, и о собственных волнах соответствующих волноводов.

4. Результаты этого и предыдущего параграфов позволяют записать (так же, как это сделано в § 23 для случая замкнутых полупрозрачных поверхностей) постоянные распространения  $\hat{k}_m$  вытекающих волн в волноводе с узкой щелью. Поперечные волновые числа  $\hat{k}_m$  для  $H$  и для  $E$ -волн такого волновода являются соответственно корнями уравнений

$$\frac{1}{\hat{\rho}_0(k)} = 0, \quad (25.17a)$$

$$\frac{1}{\rho_0(k)} = 0 \quad (25.17б)$$

или, что то же, нулями резонансных знаменателей в (24.26), (25.13). Легко получить, что вблизи

собственных частот ( $k \approx k_m$ ) соответствующих внутренних задач  $1/\bar{\rho}_0(k)$  и  $1/\rho_0(k)$  имеют одинаковую структуру, а именно, пропорциональны выражению (ср. (23.11))

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{(k - k_m)\bar{A}} + i\bar{B}. \quad (25.18)$$

Приравнявая (25.18) к нулю, находим такие же, как в § 23, формулы ((23.22), (23.23)) для  $\hat{k}_m$  и  $\hat{h}_m$ :

$$\hat{k}_m = k_m - \frac{\rho}{A} + i\rho^2 \frac{\bar{B}}{A}, \quad (25.19)$$

$$\hat{h}_m = h_m + \frac{\rho}{A} \frac{k_m}{h_m} - i\rho^2 \frac{\bar{B}}{A} \frac{k_m}{h_m}. \quad (25.20)$$

Для  $H$ -волн в этих выражениях  $\rho$  надо заменить на  $\bar{\rho}$ , которое дано в (24.31а),  $\bar{A}$  приведено в (24.31б),  $\bar{B} = 2L \operatorname{Im} C^-$  — в (24.19),  $\operatorname{Im} C^- = \operatorname{Im} G^-$  (0, 0). Для  $E$ -волн  $\rho$  дано в первой формуле в (25.15б),  $\bar{A}$  — во второй формуле (25.15б),  $\bar{B} = \frac{2}{L} \operatorname{Im} C^-$  — в (25.8). Так как  $\bar{\rho} < 0$ , то для  $H$ -волн, согласно (25.20),  $\operatorname{Re} \hat{h}_m < \operatorname{Re} h_m$ , т. е. прорезание щели увеличивает фазовую скорость  $H$ -волн, как и для полупрозрачной стенки (§ 23). Так как  $\rho > 0$ , то для  $E$ -волн  $\operatorname{Re} \hat{h}_m > \operatorname{Re} h_m$ , т. е. прорезание щели уменьшает фазовую скорость  $E$ -волн (ср. § 23).

Определение мнимых частей  $\hat{k}_m$ ,  $\hat{h}_m$  по этим формулам требует знания функций Грина внешней области заматриализованного волновода; эта функция фактически известна только для кругового цилиндра. Правда, для задач с щелями (§ 25) можно было бы в принципе определять  $\bar{B}$  для  $E$ -волн непосредственно из интегрального уравнения (10.18), но это потребовало бы вычислений в комплексной области. В § 28 эти величины найдены с помощью решения вещественного интегрального уравнения  $s$ -метода.

Все основные результаты двух последних параграфов получены по существу на основании формул (24.18), (24.19) и (25.5). Эти формулы, разумеется, могут быть использованы не только при исследовании собственных колебаний резонаторов и вытекающих волн в волноводах с продольной щелью, т. е. при решении однород-

ных уравнений (24.11) и (25.6). Эти же ядра входят в неоднородные уравнения задач дифракции.

Эти разложения могут быть использованы также и при решении задач дифракции с помощью техники конформных преобразований. Принятый в этом параграфе способ, основанный на теории § 10, приводит к цели быстрее и принципиально не ограничен условием малости щели. Машинный счет позволяет найти собственные элементы (не зависящие, по определению, от возбуждения) резонатора или волновода с щелью конечной ширины.

### § 26. Открытый резонатор из диэлектрика с большой диэлектрической проницаемостью ( $E$ -поляризация, $\rho$ -метод)

1. В этом параграфе исследуется открытый резонатор в виде тела с высокой диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ,  $|\epsilon| \gg 1$ . Задача дифракции состоит в нахождении поля  $U$ , удовлетворяющего соответственно вне тела (в  $V^-$ ) и внутри тела (в  $V^+$ ) уравнениям

$$\Delta U + k^2 U = f, \quad (26.1a)$$

$$\Delta U + k^2 \epsilon U = 0. \quad (26.1б)$$

На границе  $S$  тела  $U$  непрерывно вместе со своей производной

$$U^+ - U^- = 0|_S, \quad \frac{\partial U^+}{\partial N} - \frac{\partial U^-}{\partial N} = 0 \Big|_S. \quad (26.2)$$

Поле  $U$  так же, как и вводимые далее поля  $U^0$  и  $u_n$ , должно, кроме того, удовлетворять условиям излучения.

Поле  $U^0$  мы определим снова как результат дифракции тех же источников на теле с той же поверхностью  $S$ , на которой, однако,  $U^0$  равно нулю:

$$\Delta U^0 + k^2 U^0 = f \quad (\text{в } V^-), \quad (26.3a)$$

$$U^0 = 0|_S. \quad (26.3б)$$

Собственные функции  $u_n$  должны удовлетворять однородным уравнениям

$$\Delta u_n + k^2 u_n = 0 \text{ в } V^-, \quad \Delta u_n + k^2 \epsilon u_n = 0 \text{ в } V^+ \quad (26.4)$$

и граничным условиям на  $S$ , в которые введено собственное значение  $\rho_n$ :

$$u_n^+ - u_n^- = 0 \Big|_S, \quad (26.5a)$$

$$\frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} - \frac{u_n}{\rho_n} = 0 \Big|_S. \quad (26.5b)$$

Решение задачи (26.1), (26.2) может быть записано в виде ряда (10.3), где

$$A_n = -\rho_n \frac{\int_S u_n \frac{\partial U^0}{\partial N} dS}{\int_S u_n^2 dS}. \quad (26.6)$$

Задача опять сводится к определению  $\rho_n$ , т. е. основной характеристики резонатора.

2. Введем собственные частоты и собственные функции  $k_m$  и  $\chi_m$  внутренней области заматаллизованный резонатора, определив их как собственные элементы однородной задачи в  $V^+$ :

$$\Delta \chi_m + k^2 \epsilon \chi_m = 0, \quad (26.7a)$$

$$\frac{\partial \chi_m}{\partial N} = 0 \Big|_S. \quad (26.7b)$$

В этом случае граничные условия в  $V^-$ , т. е. для  $U^0$  (26.3б), и в  $V^+$ , т. е. для  $\chi_m$  (26.7б), различны.

Для  $\rho_n$  легко найти, используя уравнения для  $u_n$  и  $\chi_m$ , точное выражение:

$$\rho_n = \frac{\int_S \chi_m u_n dS}{\epsilon (k^2 - k_m^2) \int_{V^+} \chi_m u_n dV - \int_S \chi_m \frac{\partial u_n^-}{\partial N} dS}. \quad (26.8)$$

Частоты  $k_m$  расположены близко друг к другу, на расстоянии порядка  $1/\sqrt{|\epsilon|}$ . Поэтому, хотя формула (26.8) справедлива при любом  $m$ , использовать в ней следует ближайшее к рабочей частоте значение  $k_m$ ; только тогда можно из нее найти смещение резонанса относительно  $k_m$  и ширину резонанса — обе эти величины, согласно

(26.11), (26.12), по крайней мере, в  $1/\sqrt{|\epsilon|}$  раз меньше, чем расстояние между частотами  $k_m$ .

Если частота  $k$  не близка к  $k_m$ , то  $\rho_n$  мало (порядка  $1/|\epsilon|$ ) и все члены ряда (10.3) малы. При  $k = k_m$  производная  $\frac{\partial u_n^+}{\partial N} = 0 \Big|_S$ , так что в  $V^+$  функция  $u_n$  совпадает с  $\chi_m$ . При  $k$ , близком к  $k_m$ ,  $u_n|_S$  можно заменить на  $\chi_m|_S$ . Нахождение по  $u_n|_S$  входящей в (25.8) функции  $\frac{\partial u_n^-}{\partial N} \Big|_S$  представляет собой граничную задачу в  $V^-$ , решение которой мы символически запишем с помощью оператора  $L$ . Таким образом, вблизи резонанса искомое выражение для собственного значения  $\rho_n$  есть

$$\rho_n = \frac{\int_S \chi_m^2 dS}{\epsilon (k - k_m) 2k_m \int_{V^+} \chi_m^2 dV - \int_S \chi_m L(\chi_m) dS}. \quad (26.9)$$

3. Второй множитель в (26.6) конечен; вблизи резонанса в нем можно заменить  $u_n$  на  $\chi_m$ , и частотная зависимость дополнительного к  $U^0$  поля определяется частотной зависимостью  $\rho_n$  в (26.9). Обозначим

$$\int_S \chi_m L(\chi_m) dS = \alpha + i\beta. \quad (26.10)$$

Фактическое определение  $\alpha$  и  $\beta$  требует решения упомянутой граничной задачи в  $V^-$ . Например, для круга  $L = -\frac{kH_n^{(2)'}(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \cos n\theta$ , для одномерной задачи  $L = ik$ , поэтому  $\alpha = 0$  и смещение частоты в (26.11) равно нулю, и т. д.

Для сокращения записи вновь ограничимся вещественным  $\epsilon$ . При этом центр резонансной кривой смещен относительно внутреннего резонанса  $k_m$  на величину (порядка  $1/\epsilon$ )

$$\Delta k_m = \frac{1}{\epsilon} \frac{\alpha}{2k_m \int_{V^+} \chi_m^2 dV}. \quad (26.11)$$

Ширина резонансной кривой имеет тот же порядок

$$\delta k = \frac{1}{\epsilon} \frac{\beta}{2k_m \int_{V^+} \chi_m^2 dV}. \quad (26.12)$$

Максимальное значение множителя  $\rho_n$  (т. е. значение его в центре резонансной кривой) равно

$$\max |\rho_n| = \frac{\int_S \chi_m^2 dS}{|\beta|}. \quad (26.13)$$

Максимум модуля дополнительного к  $U^0$  слагаемого  $A_n u_n$  (единственное слагаемое, которое вблизи соответствующего резонанса надо учитывать) равно

$$\max |A_n u_n| = \left| \frac{\int_S \chi_m \frac{\partial U^0}{\partial N} dS u_n}{\beta} \right|, \quad (26.14)$$

где вне резонатора  $u_n$  получается из граничной задачи в  $V^-$  по значению  $u_n|_S = \chi_m|_S$ , а внутри резонатора (в  $V^+$ )  $u_n \approx \chi_m$ .

Особая ситуация возникает, если рассматриваемый резонатор сам находится внутри другого резонатора без потерь или запредельного волновода, т. е. если отсутствуют потери на излучение. При этом знаменатель в (26.14) или в (26.13) обращается в нуль. Разумеется, в этом случае необходим учет мнимой части  $\epsilon$ , так как задача о резонаторе без потерь на резонансной частоте, смещенной на (26.11), при заданных источниках не имеет решения и физически бессмысленна.

Внутри резонатора (в  $V^+$ ) поле не становится большим. Оно мало вдали от резонансной частоты и становится конечным в резонансе. Этому конечному полю соответствует большая запасенная энергия ( $|\epsilon| \gg 1$ ).

Отметим еще два отличия диэлектрического резонатора от резонатора, рассмотренного в § 23. Смещение частоты зависит от положения резонатора относительно внешних тел, а ширина резонанса имеет тот же порядок, что и смещение. В этом смысле скачкообразное изменение  $\epsilon$  образует на границе тела менее сильный барьер, чем частая решетка.

### § 27. Открытый резонатор с полупрозрачными стенками, образующими замкнутую границу ( $E$ -поляризация, $s$ -метод)

В § 23 высокодобротные резонаторы с полупрозрачными стенками были исследованы  $\rho$ -методом для обеих поляризаций. Была найдена структура собственных значений вблизи спектра закрытой задачи и качественно исследованы все характеристики таких резонаторов. Оказалось, что такими же свойствами обладают резонаторы, исследованные в §§ 24, 25. Однако для того, чтобы найти все численные параметры (в первую очередь — ширину резонанса и затухание вытекающих волн) без предварительного решения внутренней и внешней задач для металлизированного волновода, пришлось бы проводить вычисления в комплексной области.

В этом и следующем параграфах мы применим к некоторым из этих задач метод § 13. Это позволит существенно упростить вычислительную часть — интегральное уравнение  $s$ -метода, как отмечалось, имеет вещественное ядро.

1. Для исследуемых высокодобротных резонаторов в представлении полного поля (13.17) в качестве  $U^0$  целесообразно принять (как это сделано в предыдущих параграфах) поле дифракции тех же источников на металлизированных резонаторах той же формы. Иными словами,  $U^0$  в  $V^-$  должно удовлетворять уравнению (13.18) с граничным условием  $U^0 = 0|_S$  и условию излучения; в  $V^+$   $U^0 = 0$ . При этом, разумеется, коэффициенты в (13.17) отличны от (13.21б), они имеют вид

$$A_n = -\frac{\rho}{i + \lambda_n} \frac{\int_S u_n \frac{\partial U^0}{\partial N} dS}{\int_S u_n \operatorname{Im} u_n^2 dS}. \quad (27.1)$$

Ниже мы покажем, что коэффициенты (27.1) не малы лишь в резонансных условиях.

Для исследования резонансных явлений необходимо знать структуру собственных значений  $\lambda_n$   $s$ -метода и коэффициентов (27.1) вблизи собственных частот  $k_m$  соответствующих закрытых задач, так как резонанс



происходит в рассматриваемых резонаторах вблизи этих частот. С этой целью свяжем введенные в § 13 функции  $u_n$  и  $u_n^s$  при  $k$ , близких к  $k_m$ , с собственными функциями  $\chi_m$  закрытых задач (23.4), соответствующими собственным значениям  $k_m$ . Применяя теорему Грина для двух функций  $\chi_m$  и  $\text{Re } u_n^s$  к внутренней области  $V^+$  и используя при этом (13.15) и то, что  $s_n = \frac{i - \lambda_n}{i + \lambda_n}$ , получим следующее выражение для  $\lambda_n$ :

$$\lambda_n = \frac{\rho \frac{(k^2 - k_m^2) \int_{V^+} \text{Re } u_n^s \chi_m dV}{\int_S u_n \frac{\partial \chi_m}{\partial N} dS}}{\frac{\int_S \frac{\partial \chi_m}{\partial N} \text{Im } u_n^s dS}{\int_S u_n \frac{\partial \chi_m}{\partial N} dS}}. \quad (27.2)$$

Знаменатель, согласно формуле Грина, равен

$$\frac{(k^2 - k_m^2) \int_{V^+} \chi_m \text{Im } u_n^s dV}{\int_S u_n \frac{\partial \chi_m}{\partial N} dS}. \quad (27.3)$$

Поэтому  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow k_m$ . При этом для двумерной задачи из уравнения (13.13б) в пределе имеем

$$\int_S u_n J_0(k_m R) dS = 0. \quad (27.4a)$$

Согласно (13.14), отсюда следует, что во всем объеме, в частности в  $V^+$ ,

$$\text{Im } u_n^s(k_m) = 0. \quad (27.4б)$$

Так как (27.4a) совпадает с уравнением для нормальной производной собственной функции  $\chi_m$  закрытой задачи

$$\int_S \frac{\partial \chi_m}{\partial N} J_0(k_m R) dS = 0, \quad (27.5)$$

то с точностью до не зависящего от координат множителя функции  $\frac{\partial \chi_m}{\partial N} \Big|_S$  и  $u_n \Big|_S$  при  $k = k_m$  совпадают:

$$u_n(k_m) \Big|_S = \frac{\partial \chi_m}{\partial N} \Big|_S. \quad (27.6)$$

Сравнивая выражение для  $\text{Re } u_n^s$  (13.14) с выражением для функции  $\chi_m$  через значение  $\frac{\partial \chi_m}{\partial N}$  на  $S$ , получаем, учитывая (27.4б), равенство, справедливое в  $V^+$ :

$$u_n^s(k_m) = -\chi_m. \quad (27.7)$$

Значит, на контуре  $S$  функция  $u_n^s(k_m) = 0$ , и так как  $u_n^s$  удовлетворяет условиям излучения, то во всей внешней области  $V^-$

$$u_n^s(k_m) \equiv 0. \quad (27.8)$$

Полагая функцию  $u_n^s$  аналитической по  $k$ , получаем при  $k$ , близком к  $k_m$ :

$$u_n^s(k) \approx -\chi_m + (k - k_m) \frac{\partial u_n^s}{\partial k}(k_m) \quad \text{в } V^+, \quad (27.9a)$$

$$u_n^s(k) \approx (k - k_m) \frac{\partial u_n^s}{\partial k}(k_m) \quad \text{в } V^-. \quad (27.9б)$$

Аналогично, на  $S$ :

$$u_n(k) \approx \frac{\partial \chi_m}{\partial N} + (k - k_m) \frac{\partial u_n}{\partial k}(k_m). \quad (27.10)$$

Поэтому в старшем порядке по  $(k - k_m)$

$$\int_S \frac{\partial \chi_m}{\partial N} \text{Im } u_n^s dS = \int_S u_n \text{Im } u_n^s dS. \quad (27.11)$$

Применяя теорему Грина для функций  $u_n$  и  $u_n^s$  к  $V^+$  и к  $V^-$ , пользуясь при этом граничными условиями и условиями на бесконечности для этих функций, получаем (для любого  $k$ ) равенство

$$\int_S u_n \text{Im } u_n^s dS = -k \int_{S_\infty} |u_n^s|^2 dS. \quad (27.12)$$

Согласно (27.9б) — (27.12), знаменатель в (27.2) пропорционален  $(k - k_m)^2$ :

$$\int_S \frac{\partial \chi_m}{\partial N} \operatorname{Im} u_n^s dS \approx - (k - k_m)^2 k \int_{S_\infty} \left| \frac{\partial u_n^s}{\partial k} (k_m) \right|^2 dS. \quad (27.13)$$

Используя в (27.2) формулы (27.6), (27.7), (27.13), находим искомую структуру  $\lambda_n(k)$  при  $k$ , близком к  $k_m$ :

$$\lambda_n(k) \approx - \frac{\rho + (k - k_m) A}{(k - k_m)^2 C}. \quad (27.14)$$

Коэффициенты  $A$  и  $C$  не зависят от частоты и от прозрачности стенок  $\rho$ , причем  $A$  определяется формулой (23.8), а

$$C = \frac{k_m \int_{S_\infty} \left| \frac{\partial u_n^s}{\partial k} (k_m) \right|^2 dS}{\int_S \left( \frac{\partial \chi_m}{\partial N} \right)^2 dS}. \quad (27.15)$$

Можно показать, что коэффициент  $C$  пропорционален введенной в § 23 величине  $B$ , а именно:

$$C = A^2 B. \quad (27.16)$$

Заметим, что формула (27.14) справедлива, вообще говоря, при любой величине  $\rho$ . Однако наибольший интерес представляют резонаторы с малой прозрачностью стенок.

2. Полученное для  $\lambda_n(k)$  выражение (27.14) позволяет описать поведение коэффициентов разложения  $A_n$  (13.21б), (27.1) вблизи собственных частот  $k_m$  и исследовать явление резонанса. Подставляя (27.14) в (13.21б), после простых преобразований получаем для разложения (13.17), в котором  $U^0$  есть поле источников в свободном пространстве:

$$A_n \approx - \frac{\frac{1}{\rho} D}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{(k - k_m) A} + iB}, \quad D = \frac{\int_{V^+} U^0 \chi_m dV}{\int_{V^+} \chi_m^2 dV}. \quad (27.17)$$

Если же  $U^0$  — решение задачи дифракции на резонаторе с нулевой связью (металлизированном), то использование (27.14) в (27.1) дает

$$A_n \approx - \frac{\frac{1}{k - k_m} D}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{(k - k_m) A} + iB}, \quad D = \frac{\int_S \frac{\partial U^0}{\partial N} \frac{\partial \chi_m}{\partial N} dS}{2k_m \int_{V^+} \chi_m^2 dV}. \quad (27.18)$$

Из этих формул также следует (см. (23.13)), что резонанс наступает на частоте

$$k_* = k_m - \rho/A. \quad (27.19)$$

При этом, согласно (27.17), (27.9), т. е. при простом выборе  $U^0$ , полное поле (13.17) в  $V^+$  велико, так как в нем выделяется резонансное слагаемое  $A_n u_n^s$ , имеющее порядок  $1/\rho$ ; в  $V^-$   $A_n u_n^s$  порядка единицы, и в ряде для этой области не происходит выделения доминирующего члена. Вблизи резонанса на собственной частоте внутренней задачи ( $k = k_m$ ) соответствующее слагаемое обращается в нуль всюду, и полное поле в  $V^+$  уже не велико, а порядка единицы. Вдали от резонансных частот  $A_n u_n^s$  всюду конечны, однако можно показать, что полное поле внутри резонатора мало и пропорционально  $\rho$ .

При другом выделении  $U^0$ , согласно (27.18), и во внешней области в резонансных условиях происходит выделение одного дополнительного к  $U^0$  резонансного слагаемого порядка единицы. При этом все остальные члены ряда малы и пропорциональны  $\rho$ , то есть наблюдающееся в резонансе конечное возмущение полного поля в  $V^-$  описывается при таком подходе одним слагаемым. В этом и состоит достоинство выбора более сложного  $U^0$ . Вдали от резонанса дополнительное к  $U^0$  поле всюду порядка  $\rho$ . При  $k = k_m$  соответствующее слагаемое отсутствует только во внешней области.

Зависимость собственного значения  $\lambda_n$  от частоты вблизи резонансов, согласно (27.14), имеет стандартный вид, изображенный на рис. 27.1. На резонансной частоте (27.19)  $\lambda_n(k_*) = 0$  (при этом  $s_n = 1$ ); на собственной частоте закрытой задачи  $|\lambda_n(k_m)| = \infty$  (при этом

$s_n = -1$ ). Кривая  $\lambda_n(k)$  при  $k = \bar{k}$  имеет максимум, пропорциональный  $1/\rho$ , причем

$$k_* - \bar{k} = k_m - k_* \quad (27.20)$$

3. Полученные результаты позволяют записать (как это сделано в § 23) постоянные распространения  $\hat{h}_m$  вытекающих волн в волноводах произвольного поперечного сечения с полупрозрачными стенками, а также, на основе интегрального уравнения (13.136) и формулы (27.14), дать расчет  $\hat{h}_m$ . Действительно, поперечные волновые числа (комплексные собственные частоты)  $\hat{k}_m$  являются нулями резонансных знаменателей (27.17), (27.18), или, что то же, корнями уравнения

$$\lambda_n(k) = -i. \quad (27.21)$$

Отсюда получаем выражения (23.22), (23.23) для  $\hat{k}_m$

и  $\hat{h}_m$ . Величины  $B$  (а если нужно, то также  $A$  и  $k_m$ ), входящие в (23.22), могут быть найдены с помощью формулы (27.14) из кривой  $\lambda_n(k)$ , получающейся при численном решении интегрального уравнения (13.136).

На рис. 27.2, 27.3 представлены результаты расчета резонаторов эллиптической и прямоугольной форм. Пунктирными кривыми показано умноженное на  $a$  смещение резонансной частоты  $\Delta ka$  относительно собственной частоты  $k_m a$  закрытой задачи; сплошные кривые изображают величину, пропорциональную затуханию  $\hat{h}_m$  в соответствующих волноводах. Все величины даны как функции прозрачности стенок. Штрих-пунктирная кривая на рис. 27.3 есть  $\Delta ka$ , рассчитанное по приближенным формулам (23.13), (23.8). Погрешность этих формул растет с увеличением прозрачности стенок.

Таким образом, в применении к волноводам с полупрозрачными стенками изложенный аппарат дает

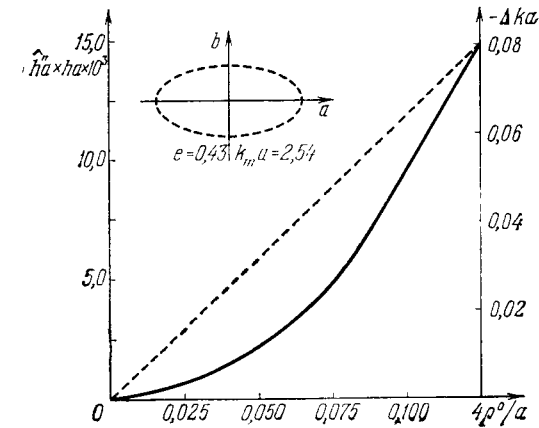


Рис. 27.2.

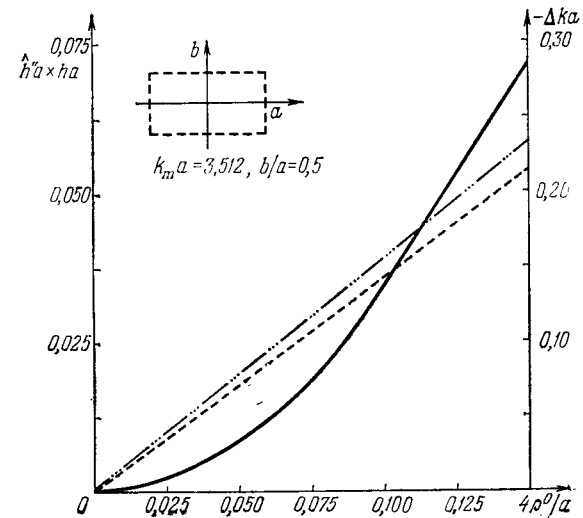


Рис. 27.3.

возможность находить комплексные постоянные распространения вытекающих волн при любой форме сечения волновода. При этом, разумеется, не используется (27.15). Кроме того, можно предварительно не решать и внутреннюю задачу, т. е. находить и  $A$  и  $B$  сразу из (13.136) и (27.14).

Для резонаторов, конечно, также можно находить комплексные собственные частоты, однако для задачи возбуждения резонаторов больший физический смысл имеют величины  $\lambda_n(k)$  для вещественных частот. Их определение требует опять только решения уравнения (13.136).

### § 28. Волновод с продольной щелью, вытекающие волны ( $E$ -поляризация, $s$ -метод)

1. В § 25 получены явные выражения для смещения резонансных частот, обязанного прорезанию малого отверстия в двумерных металлических резонаторах произвольной формы, и найдена структура (25.20), которую имеют постоянные распространения  $\hat{h}_m$  вытекающих волн в соответствующих волноводах. Однако, как уже отмечалось, расчет  $\hat{h}_m$  по формуле (25.20) затруднен, так как требует решения внешней задачи Стеклова для произвольного контура.

В настоящем параграфе показано, как для расчета постоянных распространения  $\hat{h}_m$  может эффективно использоваться интегральное уравнение (13.136)  $s$ -метода. Для случая металлической ( $\rho = 0$ ) границы  $S$  (при наличии щелей  $S$  незамкнута) оно имеет вид

$$\int_S u_n(N_0(kR) - \lambda_n J_0(kR)) dS = 0. \quad (28.1)$$

Здесь  $k$  — частота,  $R$  — расстояние между точками наблюдения и интегрирования,  $\lambda_n = i \frac{1 - s_n}{1 + s_n}$  — собственное значение.

Собственные элементы этого уравнения, как функции частоты, характеризуют резонансные свойства двумерного резонатора и играют в задачах возбуждения роль, аналогичную собственным частотам и соответствующим им собственным колебаниям в закрытых си-

стемах. Функция  $\lambda_n(k)$  дает резонансные частоты для резонаторов со щелями любых размеров. Если щели малы (как мы и предполагаем), то эти частоты близки к собственным частотам  $k_m$  соответствующих закрытых резонаторов. Поэтому важно знать формулу, аналогичную (27.14), описывающую поведение собственных значений  $\lambda_n$  вблизи частот  $k_m$ ; она позволит нам дать расчет  $\hat{h}_m$  в волноводе с продольной щелью. Для получения этой формулы выразим  $\lambda_n$  через найденное в § 25 первое собственное значение  $\rho_0$  (25.9а). Сравнивая постановку однородной задачи § 25 с постановкой однородной задачи § 13 (13.3), (13.4), (13.6), используя при этом теорему Грина, граничные условия и условия на бесконечности для обеих постановок, можно получить

$$\bar{s}_n \approx \frac{\rho_0}{\rho_0^*} s_n, \quad (28.2a)$$

откуда

$$\bar{\lambda}_n \approx \frac{\operatorname{Re}[(i + \lambda_n)/\rho_0]}{\operatorname{Im}[(i + \lambda_n)/\rho_0]}. \quad (28.26)$$

Черту мы ставим над величинами для задачи со щелью;  $s_n$ ,  $\lambda_n$  соответствуют задаче для полностью металлизированной поверхности ( $S$  замкнута, щель отсутствует). Формула для  $\lambda_n(k)$  при  $k \approx k_m$  получается из (27.14) при  $\rho = 0$ :

$$\lambda_n \approx - \frac{1}{(k - k_m) AB}. \quad (28.3)$$

Подставляя (28.3) и найденную по (25.9а) структуру  $\rho_0$  (25.18) вблизи  $k_m$  в (28.26), находим искомую формулу для  $\bar{\lambda}_n$  при  $k$ , близком к  $k_m$ ,

$$\bar{\lambda}_n(k) \approx - \frac{\rho + (k - k_m) \bar{A} + (k - k_m)^2 \rho \bar{A} \bar{B} A B}{\rho (k - k_m) (AB - \bar{A} \bar{B}) + (k - k_m)^2 \bar{A} A B}. \quad (28.4)$$

Участвующие в (28.4) коэффициенты определены в предыдущих параграфах: величины  $\rho$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  введены в § 25,  $A$  и  $B$  в § 23. Напомним, что  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $A$ ,  $B$  не зависят от частоты и от  $\rho$ .

2. Поперечные волновые числа  $k_m$  (комплексные собственные частоты), через которые выражаются искомые постоянные распространения  $\hat{h}_m$ , являются корнями

уравнения

$$\bar{\lambda}_n(k) = -i. \quad (28.5)$$

Отсюда следуют формулы для  $\hat{k}_m$  и  $\hat{h}_m$ , разумеется, те же, что и в § 25 ((25.19), (25.20)).

Величина  $B$ , входящая в эти формулы (а для сложных поперечных сечений волноводов также  $A$  и  $k_m$ ), могут быть найдены с помощью формулы (28.4) из кривой  $\bar{\lambda}_n(k)$ , получающейся при численном решении уравнения (28.1) для незамкнутой границы  $S$ . При этом произведение  $AB$  целесообразно предварительно вычислять с помощью формулы (28.3) по кривой  $\lambda_n(k)$  того же уравнения, но для замкнутой границы  $S$ .

На рис. 28.1 и 28.2 представлены результаты описанного способа расчета для цилиндрических резонаторов прямоугольного и круглого поперечного сечений. Пунктирными кривыми показано смещение резонансной частоты  $\Delta ka$  относительно собственной частоты  $k_m a$  закрытого резонатора, вычисленное с помощью уравнения (28.1). Штрих-пунктирные кривые дают ту же величину, вычисленную по приближенным формулам (25.15). Сплошные кривые изображают величину, пропорциональную затуханию  $\hat{h}_m$  в соответствующих волноводах. Все величины даны в функции от размера щели.

Отметим в заключение, что для комплексной собственной частоты имеет место более общая формула, чем (23.22) и (25.19):

$$\hat{k}_m \simeq k_* - \frac{i}{\frac{d\bar{\lambda}_n}{dk}(k_*)}, \quad (28.6)$$

справедливая для любых высокодобротных резонаторов, в том числе и для неблизких к закрытым. Эта формула, очевидно, есть приближенное решение уравнений (28.5) и аналогичного уравнения (27.21) (с заменой  $\bar{\lambda}_n$  на  $\lambda_n$ ) при условии большой добротности:

$$\left| k_* \frac{d\bar{\lambda}_n}{dk}(k_*) \right| \gg 1. \quad (28.7)$$

Однако для резонаторов, близких к закрытым, с вычислительной точки зрения удобнее пользоваться

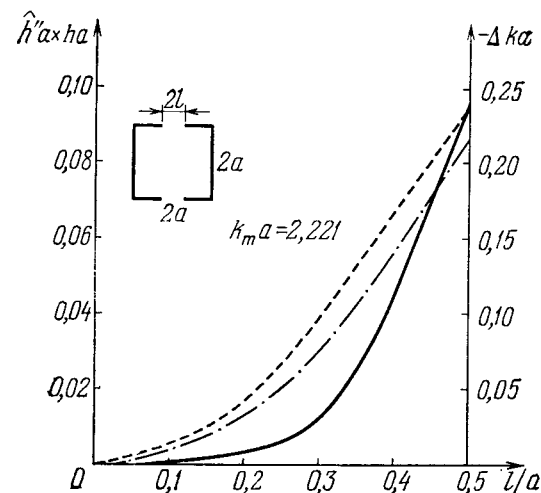


Рис. 28.1.

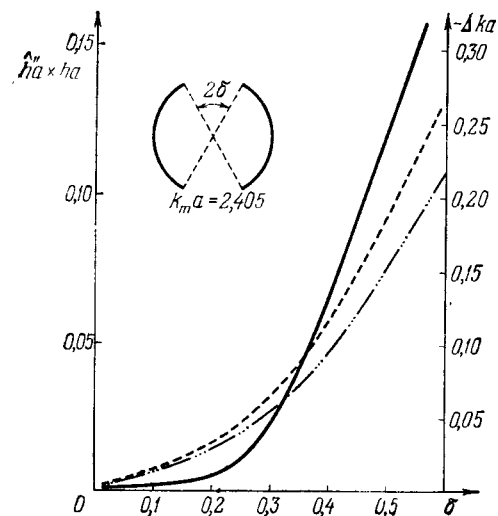


Рис. 28.2.

частными случаями формулы (28.6) (т. е. формулами (23.22) и (25.19)), основанными на найденных выше структурах собственных значений вблизи собственной частоты закрытой задачи.

\* \* \*

### § 29. Обзор литературы

В тексте книги мы не давали ссылок на литературу и не сопоставляли излагаемые методы с другими. В п. 1 этого параграфа мы перечислим основные работы, в которых другими авторами излагались близкие идеи. Приводятся ссылки только на одну-две работы каждого направления. В п. 2 мы сопоставим некоторые аспекты обобщенного метода собственных колебаний (ОМСК) с другими направлениями в теории дифракции. В п. 3 сформулированы некоторые возможные обобщения метода.

Во всей книге использованы монографии и учебники по теории дифракции [2], [4], [7], [8], [9], [10].

1. Метод собственных частот для закрытых резонаторов изложен во многих учебниках (см., например, [4]). Примером применения его к открытым системам, в которых собственные функции (соответствующие полюсам матрицы рассеяния) растут на бесконечности, и разложение поля содержит также интеграл по непрерывному спектру, является обычная квантовомеханическая теория рассеяния [8], [1]. В [2] метод собственных частот применен к открытым электродинамическим системам. Трудности, возникающие в стационарных задачах дифракции из-за возрастания собственных функций, обсуждаются, например, в [1].

Метод главы I близок к так называемому методу функций Штурма; одной из первых работ, в которых подробно рассмотрено представление поля в виде ряда по этим функциям, без привлечения непрерывного спектра, является [38].

В этой статье производится разложение решения уравнения Шредингера в ряд по собственным функциям вспомогательной однородной задачи, в которой принято  $k^2 < 0$ , так что она является самосопряженной. Собственным значением в ней выбран множитель при потен-

циальной энергии (постоянная связи). Собственные функции на бесконечности убывают экспоненциально, поэтому разложение применимо только на конечных расстояниях.

В [32] во вспомогательной задаче  $k$  принято вещественным, и собственные функции удовлетворяют условиям излучения. Эта идея в применении к одномерной квантовомеханической задаче предлагалась давно, и формулы (5.38) — (5.40) варианта метода, описанного в § 5, п. 4, при замене  $\epsilon(\mathbf{r})$  на  $1 - U(\mathbf{r})/k^2$  переходят в формулы, приведенные в начале § 3 обзора [22].

От [38] ОМСК отличается, в первую очередь, тем, что  $k$  в однородном уравнении принято равным  $k$  в задаче рассеяния. В отличие от [32], [38] в ряд разлагается только рассеянное поле, и поэтому ряд сходится всюду. По-видимому, ранее в нем не производилось выделение слагаемого, соответствующего рассеянию на вспомогательном потенциале  $U(\mathbf{r})$ . Именно это выделение позволило получить в резонансных условиях явное одночленное выражение. В принятой в квантовомеханической теории терминологии это означает, что собственные функции порождаются не обычным уравнением Липмана — Швингера (5.24), а другим уравнением Липмана — Швингера в методе искаженных волн [8] — уравнением (5.45) или, в других обозначениях, (7.20). Аналогом этого слагаемого в рядах, использованных в §§ 23—28, является слагаемое, соответствующее дифракции на заматаллизованном резонаторе. По-видимому, к уравнениям (6.1) и (6.3) аналогичный аппарат не применялся.

Метод § 9 главы II примыкает к работам В. А. Стеклова по скалярному волновому уравнению для замкнутого объема со спектральным параметром в виде множителя в граничном условии третьего рода [33]. Перенесение на внешние задачи и на двусторонние граничные условия (условия сопряжения), по-видимому, не производились. В § 24 использованы результаты работы [39] по асимптотике собственных элементов задачи Стеклова для уравнения Лапласа.

$s$ -метод близок к методу, впервые, по-видимому, сформулированному (для радиолокационных и антенных задач) в [36]. В электродинамике оператор рассеяния

был введен в [36] и в [2] (без дополнительного условия (13.56) или (13.66)). В [36] введено понятие собственных колебаний в открытой области, зависящих от формы тела и описываемых собственными функциями оператора рассеяния, с дискретным спектром собственных значений (в наших обозначениях —  $s_n$ , § 13). В [37], в развитие [36], показано, что токи, соответствующие этим собственным колебаниям, совпадают с системой собственных функций некоторого вещественного оператора на поверхности тела (в скалярной записи это соответствует уравнению (13.13) при  $\rho = 0$ ), и дано обобщение на неидеально проводящие и на диэлектрические тела. Собственные функции [36] использованы, в частности, в [23].

В монографии соответствующий аппарат развивается как один из вариантов более общего метода (гл. II), в котором собственное значение вводится в условие на границе. Выделение  $U^0$  позволяет эффективно исследовать высокочастотные системы: открытые резонаторы и волноводы, в частности резонаторы со слабой связью. Аппарат развит также для поверхности с граничным условием сопряжения (малое  $|\rho|$  соответствует слабой связи), и для резонатора с узкими щелями. Найдена структура собственного значения вблизи спектра закрытого резонатора, характер поля вне и внутри резонатора и т. д., решен ряд конкретных задач.

Стационарные функционалы релеевского типа для собственных частот в задачах о замкнутой области подробно рассмотрены, например, в [7], там приведено также несколько примеров того, как сделать какие-либо граничные условия естественными. Общий метод неопределенных коэффициентов для построения функционалов, для которых заданные граничные условия являются естественными (§ 16), ранее не применялся. Вариационный аппарат не применялся, по-видимому, для вычисления других собственных значений электродинамических задач. При построении стационарных функционалов в бесконечной области существенным является вещественность  $k$ .

Примеры главы IV (кроме § 19) представляют собой решения новых задач или более полное решение старых задач. Рассеяние на квазистационарном уровне (§ 20)

давно исследовано методом собственных частот, приводящим к значительно более тяжелым вычислениям. Асимптотическая теория ( $L \gg a \gg \lambda$ ) открытых резонаторов развита впервые в [34]; аналитическая форма ее найдена в [2] — из этой книги взята, в частности, формула (22.7). Теория волноводов с узкими щелями, но обязательно с фланцем, дана, например, в [21], там же приведена литература вопроса. В [35] дано представление поля в открытом волноводе в виде суммы вытекающих волн; § 28 содержит метод определения постоянных распространения этих волн.

Эта книга написана в основном по работам авторов, частично опубликованным в 1968—1975 гг. [11]—[16], [19], [24]—[26], [28], [29]; в [17], [18] содержатся обзоры этих работ. Ряд новых задач рассмотрен в [35a].

2. В этом пункте будут отмечены некоторые дальние аналогии между различными сторонами ОМСК и несколькими новыми направлениями в теории дифракции.

а) Задача о дифракции на двух телах не аддитивна, поле не равно просто сумме полей, возникающих при дифракции на каждом теле. Часто целесообразно в полном решении выделить решение более простой задачи. Например, в рядах типа (3.3) под  $U^0$  можно понимать решение задачи дифракции на одном из двух тел, или вообще на теле, в каком-то смысле близком к системе, на которой происходит дифракция. В такой же «псевдо-аддитивной» форме поле представляется в методе Шварцшильда последовательных дифракций, в методе «знаменателя Фредгольма» (см., например, [6], [5]) и в различных вариантах метода полуобращения операторов (см., например, [30]).

б) Дискретное представление поля в задачах рассеяния используется в нескольких методах, развиваемых в последнее время (см., например, раздел IV обзора [31]). В некоторых из них вне достаточно большой сферы поля разлагаются по сферическим функциям. В других методах разложение производится по функциям, которые, как и в ОМСК, определяются телом, на котором происходит дифракция.

в) Дискретное представление поля достигается также введением комплексных координат [3]. Существует аналогия между этой процедурой, введением штурмовских

функций [38] — собственных функций потенциальной ямы, окруженной бесконечно высоким барьером, и введением в теорию нерегулярных волноводов вспомогательного барьерного волновода [25]. Все эти методы дают ряды, сходящиеся тем хуже, чем дальше точка наблюдения удалена от тела. Сюда же примыкает метод разложения поля вблизи открытого волновода, использующий миттаг-леффлеровское *разложение на простые дроби в плоскости комплексного переменного* [35], [20].

г) Существует много различных форм *интегральных уравнений*, к которым может быть сведена задача дифракции. Любому из этих неоднородных уравнений можно сопоставить однородное уравнение и по его собственным функциям разложить решение задачи. Если ядро уравнения сложное (как, например, в [27], где предлагается этот способ), то численная реализация может оказаться затруднительной. Собственное значение не обязательно входит в ядро в виде множителя.

3. Развитие изложенного в книге метода может идти по нескольким направлениям, например, таким образом:

а) Применение к конкретным задачам, разработка численных алгоритмов, получение новых численных и аналитических результатов.

б) Обобщение аппарата с помощью введения других спектральных параметров (например, описывающих геометрию), если это будет подсказано новыми задачами.

в) Применение метода к линейным уравнениям не электродинамики и акустики, а, например, к уравнениям теории упругости. Даже в системах с конечным числом степеней свободы выбор в качестве собственного значения параметра, отличного от частоты, может оказаться целесообразным (например, система с потерями может быть исследована без перехода в комплексную область).

г) Обобщение на тела, границы которых уходят в бесконечность, или на тела, в которых  $\epsilon \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$ .

д) Обобщение на нестационарные задачи. Комплексные собственные частоты, которые представляются нам неудобным инструментом для исследования стационарных процессов, хорошо описывают «предельно нестационарные» процессы типа высвечивания в отсутствие источников. Однако для промежуточных нестационарных

задач, если поле существует при  $-\infty < t < +\infty$ , но создается источниками переменной амплитуды или частоты, применение комплексных собственных частот потребует введения непрерывного спектра, и можно попытаться его исключить введением другого спектрального параметра. Аналогичная ситуация создается при дифракции на телах движущихся или меняющих форму, если частота столь низкая, что адиабатическое приближение неприменимо. Поле будет тогда описываться системой дифференциальных уравнений для коэффициентов в разложениях типа (3.3), аналогичных системам волноводных уравнений в методе поперечных сечений.



## ЛИТЕРАТУРА

*Учебники и монографии*

1. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, «Наука», 1971.
2. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, «Сов. радио», 1966.
3. В. Ю. Завадский, Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах, «Наука», 1972.
4. Б. З. Каценеленбаум, Высокочастотная электродинамика, «Наука», 1966.
5. Е. П. Курушии, Е. И. Нефёдов, А. Т. Фиалковский, Дифракция электромагнитных волн на анизотропных структурах, «Наука», 1975.
6. Е. И. Нефёдов, А. Т. Фиалковский, Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах, «Наука», 1972.
7. В. В. Никольский, Вариационные методы для внутренних задач электродинамики, «Наука», 1967.
8. Дж. Тейлор, Теория рассеяния волн и частиц, «Мир», 1975.
9. В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, «Сов. радио», 1970.
10. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, «Мир», 1964.

*Статьи и диссертации*

11. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, Е. Н. Коршунова, А. Н. Сивов, Решение внешних задач дифракции и расчет постоянных распространения открытых волноводов при помощи вещественного интегрального уравнения, Радиотехника и электроника 20, № 6, 1129—1137 (1975).
12. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, Метод поверхностного тока для построения систем собственных функций дискретного спектра в задачах дифракции, Радиотехника и электроника 15, № 4, 685—696 (1970).
13. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, Стационарные функционалы для обобщенного метода собственных функций в теории дифракции, Радиотехника и электроника 17, № 2, 268—275 (1972).

14. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, К теории рассеяния на квазистационарном уровне, Препринт № 28 (143), ИРЭ АН СССР (1973).

15. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, s-метод для задач дифракции на ограниченных телах, Препринт № 29 (144), ИРЭ АН СССР (1973).

16. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, Возбуждение двумерного металлического резонатора с малым отверстием (цилиндр со щелью), Радиотехника и электроника 19, № 12, 2458—2469 (1974).

17. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции, в сб. «Исследования в области радиотехники и электроники 1954—1974 гг.», ч. 1, ИРЭ АН СССР, 241—262, 1974.

18. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции, УФН 118, № 1, 709—736 (1976).

19. Н. Н. Войтович, Н. П. Саиталов, О некоторых применениях обобщенного метода собственных колебаний, Радиотехника и электроника 19, № 12, 2625—2629 (1974).

20. Н. Н. Войтович, А. Д. Шатров, Возбуждение открытого волновода с диэлектрическими стенками, Радиотехника и электроника 18, № 4, 687—694 (1973).

21. Х. Л. Гарб, П. Ш. Фридберг, Дисперсионные свойства прямоугольного волновода, нагруженного на полупространство через узкую щель в стенке конечной толщины, Радиотехника и электроника 19, № 1, 1—3 (1974).

22. Л. Дольф, Современное развитие несамосогласованных задач математической физики, Математика 7, № 1, 79—136 (1963).

23. В. В. Карнишин, В. В. Акиндинов, В. В. Вишин, Об одном методе исследования рассеяния электромагнитных волн в резонансной области, Радиотехника и электроника 15, № 1, 14—20 (1970).

24. Б. З. Каценеленбаум, Вынужденные электромагнитные колебания диэлектрических тел в бесконечной области и собственные функции дискретного спектра, Радиотехника и электроника 13, № 4, 586—590 (1968).

25. Б. З. Каценеленбаум, Разложение вынужденных колебаний незамкнутых систем по собственным функциям дискретного спектра, Радиотехника и электроника 14, № 1, 25—30 (1969).

26. Б. З. Каценеленбаум, Е. Н. Коршунова, А. Н. Сивов, Вычисление постоянных распространения вытекающих волн в волноводах произвольного сечения с полупрозрачной стенкой или с продольной щелью, Акустический журнал 21, № 3, 493 (1975).

27. Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, Строгая постановка задачи о свободных и вынужденных колебаниях открытого резонатора, Радиотехника и электроника 12, № 7, 1184—1191 (1967).

28. Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, К теории возбуждения высокооборотных открытых резонаторов, Радиотехника и электроника 19, № 12, 2449—2457 (1974).

29. Е. Н. Коршунова, А. Н. Сивов, Применение обобщенного метода собственных колебаний к расчету постоянных

распространения вытекающих  $E$ -волн в волноводах произвольного сечения с продольными щелями. Радиотехника и электроника 20, № 6, 1038—1041 (1975).

30. Л. Н. Литвиненко, Метод последовательных уточнений для решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, ДАН СССР 203, № 1, 64—67 (1972).

31. Г. Д. Малушков, Методы решения задач электромагнитного возбуждения тел вращения (обзор), Изв. вузов, Радиофизика 18, № 11, 1563—1590 (1975).

32. И. М. Народецкый, Разложение Гильберта — Шмидта для двухчастичной амплитуды потенциального рассеяния, Препринт ИТЭФ № 621 (1968); Ядерная физика 9, № 5, 1086 (1969).

33. В. А. Стеклов, Общие методы решения основных задач математической физики, Докт. дисс., Петербург, 1901.

34. А. Фокс, Т. Ли, Резонансные типы колебаний в интерферометре квантового генератора, сб. «Лазеры», ИЛ, 325—363, 1963.

35. А. Д. Шатров, Дискретные представления поля в задаче возбуждения диэлектрической пластины, Радиотехника и электроника 15, № 9, 1808—1815 (1970).

35а. Н. Н. Войтович, А. И. Кидисюк, А. И. Ровенчак, Численная реализация обобщенного метода собственных колебаний в задачах о двумерных резонаторах сложной формы, в сб. «Теория дифракции и распространения волн», краткие тексты докладов, II, 221—224, М., 1977.

36. R. J. Garbacz, Modal Expansion for Resonance Scattering Phenomena, Proc. IEEE 53, № 8, 856 (1965).

37. R. F. Harrington, Characteristic Modes for Antennas and Scatterers, в книге «Topics in Applied Physics», 3, Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics, Ed. by R. Mittra, 51—87, 1975.

38. M. Rotenberg, Application of Sturmian Functions to the Schroedinger Three — Body Problem: Elastic  $e^+$  —  $H$  Scattering, Ann. Phys. 19, № 2, 262 (1962).

39. S. E. Shamma, Asymptotic Behavior of Stekloff Eigenfunctions, J. Appl. Math. Phys. 20, № 3 (1971).

## ДОПОЛНЕНИЕ

М. С. Агранович

### СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ

#### § 30. Введение

1. Предыдущие главы этой книги, как и предшествовавшие ей работы Н. Н. Войтовича, Б. З. Каценеленбаума и А. Н. Сивова, ставят перед математиками ряд содержательных вопросов. По-видимому, важнейший из них состоит в следующем. Выше всюду предполагалось, что функции из достаточно широких классов разложимы в сходящиеся ряды по собственным функциям рассмотренных в книге задач. Возможны ли в действительности такие разложения? Предлагаемое дополнение посвящено в основном именно этому вопросу. Он не так прост, как может показаться на первый взгляд, и чтобы ответить на него, мы должны будем основательно затронуть некоторые области функционального анализа. Сейчас мы попытаемся на примере объяснить возникающие здесь трудности и качественно описать результаты до точных определений и полных формулировок, излагаемых в дальнейших параграфах. Попутно будет объяснено содержание этих параграфов<sup>1)</sup>.

Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (30.1)$$

в трехмерном пространстве  $R^3$  вне гладкой замкнутой поверхности  $S$ . Подчиним решение условиям

$$u^+ = u^-, \quad \lambda \left( \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \right) + u = g \quad \text{на } S \quad (30.2)$$

<sup>1)</sup> См. также «Заключительные замечания».

и условию излучения на бесконечности (ср. § 10)<sup>1)</sup>. Мы допустим, что  $k$  может быть комплексным; для определенности пусть  $k = k_1 + ik_2$ , где  $k_1 \geq 0$ ,  $k_2 \leq 0$ . Если  $k$  не является положительным числом, то под условием излучения понимается условие убывания решения на бесконечности.

Подстановкой

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \varphi(y) dS_y \quad (30.3)$$

задача легко сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода на  $S$ :

$$A\varphi - \lambda\varphi = g, \quad (30.4)$$

где

$$A\varphi(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \varphi(y) dS_y \quad (x \in S). \quad (30.5)$$

Уравнение (30.4) эквивалентно задаче:  $u(x)$  определяется по  $\varphi(x)$  формулой (30.3), а  $\varphi(x)$  по  $u(x)$  — формулой  $\varphi = \partial u^- / \partial N - \partial u^+ / \partial N$  (см. п. 1 § 36). Теперь будем рассматривать уравнение (30.4).

Для этого удобно ввести гильбертово пространство  $L^2(S)$  комплекснозначных функций на  $S$ , интегрируемых с квадратом модуля, и считать  $g$ ,  $\varphi$  элементами  $L^2(S)$ . Скалярное произведение в этом пространстве

<sup>1)</sup> Под  $\partial/\partial N$  мы всюду будем понимать производную по нормали к  $S$ , направленной в неограниченную область. Значки  $+$  и  $-$ , как и в предыдущих параграфах, относятся к внутренней и внешней сторонам поверхности. Спектральный параметр во всех задачах нам будет удобнее обозначать одинаково, буквой  $\lambda$  или  $\mu$  (в (10.29) он обозначен через  $\rho_j$ ), а точку пространства — буквой  $x$  или  $y$  (вместо  $r$ ,  $r'$ ). Другие расхождения в обозначениях (их будет немного) также будут отмечаться в сносках.

В § 10 рассматривается неоднородное уравнение  $\Delta u + k^2 u = f$ , а граничное условие предполагается однородным:  $g = 0$ . Этот случай приводится к рассматриваемому здесь вычитанием из решения интеграла

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy$$

(падающее поле).

определяется формулой

$$(\varphi, \psi)_S = \int_S \varphi(x) \overline{\psi(x)} dS, \quad (30.6)$$

где  $\bar{\psi}$  — функция, комплексно сопряженная к  $\psi$ <sup>1)</sup>.

Пусть сначала  $k_1 = \operatorname{Re} k = 0$ . Легко проверить, что тогда  $A$  — самосопряженный оператор в  $L^2(S)$ , т. е.

$$(A\varphi, \psi)_S = (\varphi, A\psi)_S \quad (30.7)$$

для всех  $\varphi, \psi$  из  $L^2(S)$ . Так как, кроме того,  $A$  вполне непрерывен (т. е. (30.4) — уравнение Фредгольма), то по известной теореме из функционального анализа в  $L^2(S)$  существует ортонормированный базис  $\{\varphi_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), составленный из собственных функций этого оператора (см., например, [2], гл. V, п. 61). Пусть  $A\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$ ; собственные значения  $\lambda_j$  будут вещественными. Предположим, что  $\varphi_j$  и  $\lambda_j$  нам известны.

Произвольная функция  $g$  из  $L^2(S)$  разлагается в ряд

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j, \quad (30.8)$$

сходящийся по норме в  $L^2(S)$ , т. е. в среднем. Здесь  $c_j = (g, \varphi_j)_S$  — коэффициенты Фурье функции  $g$  по системе  $\{\varphi_j\}$ .

Пусть  $\lambda$  отлично от 0 и не является собственным значением оператора  $A$ . Тогда, как это следует из теории уравнений Фредгольма, уравнение (30.4) имеет единственное решение  $\varphi$  (см., например, [9], гл. IX). Его можно искать в виде ряда  $\varphi = \sum d_j \varphi_j$ ; подставляя этот ряд в (30.4), легко найдем  $d_j$  и придем к формуле

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda_j - \lambda} \varphi_j. \quad (30.9)$$

Это — один из классических методов решения уравнений Фредгольма; можно назвать его *спектральным методом*.

2. Пусть теперь  $\operatorname{Re} k > 0$ . Тогда оператор  $A$  перестает быть самосопряженным;

$$(A\varphi, \psi)_S = (\varphi, A^*\psi)_S, \quad (30.10)$$

где  $A^*$  — сопряженный к  $A$  оператор. Он получается

<sup>1)</sup> Обозначение  $\bar{\psi}$  используется вместо  $\psi^*$ . В предыдущих параграфах черта имеет другой смысл.

заменой в (30.5)  $-ik$  на  $i\bar{k}$  в силу симметрии ядра оператора  $A$ . Собственные значения  $\lambda$  теперь не вещественны (см. (10.7)). Выше, в § 10, предлагалось именно в этом случае (точнее, при  $\text{Im } k = 0$ ) применить спектральный метод. Чем эта ситуация отличается от рассмотренной в п. 1? Мы остановимся сначала на технической стороне дела; более принципиальный вопрос отложим до п. 3.

Прежде всего приходится считаться с тем, что, кроме собственных функций, могут появиться присоединенные функции, и тогда без них уже нельзя обойтись. Аналогия из линейной алгебры: пусть  $A$  — линейный оператор в  $n$ -мерном комплексном пространстве  $\mathbf{C}^n$  и  $J$  — жорданова форма матрицы этого оператора. Если  $J$  — диагональная матрица, то в  $\mathbf{C}^n$  есть базис, составленный из собственных векторов оператора  $A$ ; если же в  $J$  имеется хотя бы одна жорданова клетка размера больше 1, то в  $\mathbf{C}^n$  уже нет базиса из собственных векторов оператора  $A$ , но есть базис, составленный из собственных и присоединенных векторов этого оператора.

Следует отметить, что «предъявить» присоединенные функции нелегко, и пока их удалось указать в явном виде только в одномерных вариантах некоторых из рассмотренных в книге задач. Примеры с присоединенными функциями приведены в п. 7 § 36 и п. 4 § 39.

Допустим, что в  $L^2(S)$  есть базис  $\{\varphi_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), составленный из корневых (т. е. собственных и присоединенных) функций оператора  $A$ , т. е. такая система, что каждая функция  $g$  из  $L^2(S)$  однозначно разлагается в ряд (30.8), сходящийся к  $g$  в среднем. Элементы  $\varphi_j$  этого базиса уже не будут, вообще говоря, попарно ортогональными, и для нахождения коэффициентов Фурье  $c_j$  нужна система  $\{\psi_i\}$ , биортогональная к  $\{\varphi_j\}$ :  $(\varphi_j, \psi_i)_S = \delta_{ij}$ ,  $c_i = (g, \psi_i)_S$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ ).

Можно показать, используя симметрию ядра оператора  $A$ , что в простейшем случае, когда все собственные значения этого оператора однократные,  $\psi_j$  пропорциональна  $\bar{\varphi}_j$ :

$$\begin{aligned} \alpha_j &= (\varphi_j, \bar{\varphi}_j)_S = \int_S \varphi_j^2 dS \neq 0, \quad \psi_j = \bar{\alpha}_j^{-1} \bar{\varphi}_j, \\ c_i &= \alpha_i^{-1} (g, \bar{\varphi}_i)_S = \alpha_i^{-1} \int_S g \varphi_i dS. \end{aligned} \quad (30.11)$$

Иначе говоря, в этом случае можно непосредственно пользоваться «вещественной ортогональностью» собственных функций, как это делается в предыдущих параграфах. При надлежащей нормировке  $\psi_j$  будет совпадать с  $\bar{\varphi}_j$ . Если встречаются и собственные значения кратности выше 1, то можно доказать, что при специальном выборе систем корневых функций, отвечающих таким собственным значениям, мы снова будем иметь  $\psi_j = \bar{\varphi}_j$ . Несколько усложняются также соответствующие члены в формуле (30.9). В частности, если есть присоединенные функции, то в формулах для коэффициентов могут появиться полюсы порядка выше первого в точках  $\lambda_j \neq 0$ . Подробнее мы обсудим это в пп. 6 и 7 § 31.

Таким образом, если в  $L^2(S)$  есть базис, составленный из корневых функций оператора  $A$ , то спектральный метод провести можно, хотя и с некоторыми техническими осложнениями.

3. Однако вопрос о существовании такого базиса становится нетривиальным. Существуют несамосопряженные вполне непрерывные операторы, вообще не имеющие корневых векторов. Таковы вольтерровы операторы,

например, оператор  $\int_0^x \varphi(t) dt$  в пространстве  $L^2$  на отрезке  $[0, 1]$ .

Наша основная цель в отношении оператора  $A$  будет состоять в установлении свойства системы его корневых функций, близкого к базисности и достаточного для обоснования спектрального метода. В § 36 будет показано, что для любой функции  $g$  из  $L^2(S)$  ее ряд Фурье (30.8) по этой системе сходится к  $g$  в среднем после некоторой, не зависящей от  $g$ , расстановки скобок. Скобками выделяются группы членов  $c_1 \varphi_1 + \dots + c_m \varphi_m$ , отвечающих очень близким собственным значениям. Скобки иногда можно снять (не доказано, что их нельзя снять всегда), но это, вообще говоря, может замедлить сходимость ряда. Если  $g$  — очень гладкая функция, то этот ряд со скобками сходится к  $g$  равномерно на  $S$  и допускает почленное дифференцирование любое желаемое число раз, причем сходимость будет очень быстрой. Формула (30.3), если в нее подставить  $\varphi_j$ , определяет

корневые функции  $u$ ; исходной задачи; последние можно использовать для разложения в ряды по ним функций вне  $S$ . Аналогичная картина имеет место в двумерном случае, когда  $S$  — замкнутая кривая на плоскости. Мы получим также некоторую информацию о расположении собственных значений оператора  $A$ , в частности, укажем их асимптотику.

Как видно из оглавления, в §§ 37—40 будут разобраны другие задачи. Выше они рассматривались в близкой форме в §§ 2—5, 9, 10, 13 и 14. При этом в §§ 37 и 40 мы получим такие же по характеру результаты, как в § 36. Результаты в § 38 будут более скромными, но все же достаточными для обоснования спектрального метода. В § 39 для рассмотренных там задач при некоторых предположениях будет показано, что присоединенных функций нет, а из собственных функций можно составить ортонормированный базис при некотором специальном выборе скалярного произведения.

4. Доказательства основаны на использовании средств двух разделов математики, сложившихся сравнительно недавно: теории несамосопряженных операторов в абстрактном гильбертовом пространстве и теории эллиптических дифференциальных и псевдодифференциальных операторов в пространствах С. Л. Соболева. Мы приведем, в основном в §§ 31—35, необходимые определения и формулировки теорем из этих двух разделов в удобной для нас форме с краткими пояснениями и ссылками на литературу<sup>1)</sup>, а затем будем применять эти теоремы к конкретным задачам и операторам.

Оператор (30.5) оказывается при этом наиболее прозрачной моделью для применения этих теорем. Укажем свойства этого оператора, играющие здесь основную роль. Пусть для простоты  $\text{Im } k = 0$ . Запишем  $A = A_R + iA_I$ , где  $A_R$  и  $A_I$  — соответственно вещественная и мнимая части оператора  $A$ ; это интегральные операторы с ядрами

$$-\frac{\cos k|x-y|}{4\pi|x-y|} \quad \text{и} \quad \frac{\sin k|x-y|}{4\pi|x-y|} \quad (30.12)$$

соответственно. Вторая из этих функций — бесконечно гладкая по  $(x, y)$ , т. е. имеющая непрерывные произ-

водные любого порядка, тогда как первая имеет при  $x-y=0$  такую же особенность, как ядро оператора  $A$ . Кроме того, как мы увидим, существует (неограниченный) оператор  $A_R^{-1}$  (быть может, после несущественного изменения слагаемых в сумме  $A_R + iA_I$ ). Вместе эти два обстоятельства означают, что  $A$  — очень слабое возмущение самосопряженного оператора  $A_R$ . Для слабых возмущений самосопряженных операторов имеются теоремы о базисности (см. § 35), которыми мы и воспользуемся.

Операторы  $A$  и  $A_R$  принадлежат к классу *псевдодифференциальных операторов* (ПДО), содержащему, кроме дифференциальных операторов, важнейшие интегральные и интегро-дифференциальные операторы математической физики. Исчисление ПДО быстро завоевывает популярность в последние годы. В § 33 оно намечено в адаптированной форме. Это исчисление приписывает каждому ПДО его *символ*, имеющий определенный *порядок*. Например, оператор Лапласа на плоскости имеет символ  $-(\xi_1^2 + \xi_2^2)$  порядка 2. В этом примере символ не зависит от  $x$  и однороден по  $\xi$ . В общем случае символ зависит от  $x$  и  $\xi$  и состоит из однородных по  $\xi$  слагаемых; *главная часть символа* имеет старший порядок однородности, который, по определению, и является порядком символа. Операторы  $A$  и  $A_R$  имеют один и тот же символ (его главная часть указана в формуле (36.9)) порядка  $-1$ ; оператор  $A_I$  имеет (при  $\text{Im } k = 0$ ) нулевой символ, последнему приписывается порядок  $-\infty$ . При перемножении двух ПДО главные части их символов перемножаются; при этом порядки складываются, если только произведение главных частей символов не равно тождественно 0. Мы будем многократно пользоваться этим в §§ 36—40.

В классе ПДО содержится важный подкласс *эллиптических* ПДО. Например, эллиптически оператор Лапласа,  $A$  и  $A_R$ . Система Максвелла не эллиптически, но задачи для нее, которые мы рассмотрим в § 40, будут сведены к уравнениям с эллиптическими ПДО на  $S$ .

Для эллиптических уравнений построена теория разрешимости в пространствах С. Л. Соболева  $H_s = W_2^{(s)}$  (см. §§ 32 и 34) и в других функциональных пространствах;

<sup>1)</sup> § 35 содержит добавления к известным теоремам.

ее результатами мы также будем пользоваться. Например, из эллиптичности оператора  $A_R$  вытекает упомянутый выше факт существования оператора  $A_R^{-1}$  (быть может, после «исправления»  $A_R$  на некотором конечномерном подпространстве функций) с символом порядка  $+1$ . Привлечение пространств  $H_s$  позволяет дать следующее определение *порядка оператора*: оператор конечного порядка  $m$  — это оператор, действующий ограниченным образом из  $H_{s+m}$  в  $H_s$  при любом  $s$ . При этом ПДО с символом порядка  $m$  оказывается оператором порядка  $m$ . Пространство  $H_s$  совпадает с  $L^2$  при  $s = 0$ , сужается с ростом  $s$  и при высоких  $s$  состоит из гладких функций. Таким образом, оператор отрицательного порядка «сглаживает» функции, повышает их гладкость, а оператор положительного порядка, вообще говоря, понижает ее. Пространство  $H_s$  гильбертово и поэтому особенно удобно для наших целей.

В § 39 будет затронута теория самосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой.

5. Из сказанного в предыдущем пункте видно, что мы используем довольно обширный математический аппарат. Трудности, ожидающие читателя, который заранее с этим аппаратом не знаком, связаны не с тем, что ему предстоит разбирать громоздкие математические выкладки (таких практически нет), а с тем, что привлекается большой круг математических понятий. Однако понятия и теоремы, сводка которых приводится в §§ 31—35, вне всякого сомнения важны и интересны сами по себе, а задачи, рассматриваемые в §§ 36—40, позволяют увидеть содержание этих понятий и теорем на конкретных примерах.

Для понимания дальнейшего текста необходимо знакомство с основами (или, лучше сказать, с элементами) функционального анализа. Для справок можно использовать некоторые параграфы из глав I—V книги [2], глав I, III книги [8] или глав III—V и VII—IX книги [9]. Предполагается, что читателю известно понятие обобщенной функции. Необходимые сведения об обобщенных функциях и их преобразованиях Фурье можно найти в нескольких параграфах из глав I, II книги [5] или главы II книги [4]. Будет сделано также много ссылок на специальную литературу, но лишь для того, чтобы чита-

тель мог при желании найти опущенные нами доказательства или дополнительные подробности. Доказательства, проведенные в п. 2 § 33 и в § 35, при первом чтении можно пропустить.

Мы рассматриваем не все задачи, затронутые в главах I и II, а только наиболее типичные и, может быть, наиболее важные из задач, допускающих сведение к уравнениям Фредгольма в  $L^2(S)$  или  $L^2(V^+)$ , где  $V^+$  — область, ограниченная поверхностью (или кривой)  $S$ . Подробный разбор всех вариантов этих задач занял бы слишком много места. Все «вторичные» математические трудности мы устраняем, предполагая поверхность  $S$  гладкой и замкнутой, т. е. не имеющей ребер и отверстий, а диэлектрическую проницаемость  $\epsilon(x)$  — меняющейся скачком при переходе через  $S$ . (Таких трудностей особенно много в конкретных прикладных задачах, которые разбирались в главе IV.) К сожалению, в отношении задач, рассмотренных в §§ 6 и 8, пока удалось выяснить очень немного, и мы о них здесь не будем говорить. Не проанализирован также формальный метод Ритца отыскания стационарных точек функционалов (см. гл. III). Отметим, что другие методы вычисления собственных значений несамосопряженных операторов описаны, например, в [10], [14].

### § 31. Системы векторов и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

1. **Системы векторов.** Пусть  $\mathfrak{H}$  — комплексное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением  $(f, g)$  и нормой  $\|f\|^2 = (f, f)^{1/2}$ . Мы введем несколько понятий, относящихся к системе  $\{f_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) векторов этого пространства; в частности, скажем, когда  $\{f_j\}$  называется *полной системой*, *базисом со скобками*, *базисом*, *базисом Рисса*, *базисом Бари*. Здесь каждое следующее свойство является усилением предыдущего. Будет приведено несколько утверждений; некоторые из них очевидны, доказательства других и дальнейшие подробности можно найти в [6], гл. VI, §§ 1—3.

Система  $\{f_j\}$  называется *полной*, если для любого вектора  $f$  из  $\mathfrak{H}$  и любого числа  $\epsilon > 0$  найдутся такой

номер  $m$  и такие коэффициенты  $a_1, \dots, a_m$ , что

$$\left\| f - \sum_{j=1}^m a_j f_j \right\| < \varepsilon. \quad (31.1)$$

При уменьшении  $\varepsilon$ , т. е. повышении требуемой точности, вообще говоря, приходится не только увеличивать  $m$ , но и менять уже найденные  $a_1, \dots, a_m$ .

Система  $\{f_j\}$  называется *минимальной*, если ни один из векторов  $f_j$  не содержится в замыкании линейной оболочки остальных векторов этой системы.

Пусть  $\{f_j\}$  — минимальная система. Тогда в  $\mathfrak{F}$  существует система  $\{g_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), *биортогональная* к  $\{f_j\}$ :  $(f_j, g_i) = \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ ). Если при этом  $\{f_j\}$  — полная система, то  $\{g_i\}$  определяется однозначно и также будет минимальной полной системой. Если  $\{f_j\}$  — ортонормированная полная система, то  $g_j = f_j$  для всех  $j$ .

Пусть  $\{f_j\}$  — минимальная система, а  $\{g_i\}$  — система, биортогональная к  $\{f_j\}$ . Предположим, что некоторый вектор  $f$  из  $\mathfrak{F}$  является суммой ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j. \quad (31.2)$$

Очевидно, что тогда

$$c_j = (f, g_j). \quad (31.3)$$

Если теперь  $f$  — произвольный вектор из  $\mathfrak{F}$ , то числа (31.3) называются *коэффициентами Фурье*, а формально составленный ряд (31.2) — *рядом Фурье вектора  $f$  по системе  $\{f_j\}$* . Но этот ряд может оказаться расходящимся или сходящимся не к  $f^1$ . Система  $\{f_j\}$  называется *базисом* в  $\mathfrak{F}$ , если для любого вектора  $f$  из  $\mathfrak{F}$  его ряд Фурье (31.2) сходится к  $f$ . В этом случае  $\{g_i\}$  также будет базисом. Базис является, очевидно, полной системой.

Частная сумма  $c_1 f_1 + \dots + c_m f_m$  ряда Фурье вектора  $f$  не обязательно совпадает с той линейной комбинацией векторов  $f_1, \dots, f_m$ , которая наилучшим образом аппроксимирует  $f$ , даже если  $\{f_j\}$  — базис. Последняя, очевидно, равна  $b_1 h_1 + \dots + b_m h_m$ , где  $h_1, \dots, h_m$  — орто-

<sup>1)</sup> Если система  $\{f_j\}$  полная, то сходиться он может только к  $f$ .

нормированный базис в линейной оболочке векторов  $f_1, \dots, f_m$  и  $b_j = (f, h_j)$ . Но базисность системы  $\{f_j\}$  позволяет при повышении требуемой точности, увеличивая  $m$ , не менять  $c_j$ , уже найденные по формуле (31.3).

Пусть  $\{e_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) — ортонормированный базис в  $\mathfrak{F}$ ,  $B$  — ограниченный линейный оператор в  $\mathfrak{F}$ , имеющий ограниченный обратный  $B^{-1}$ , и  $f_j = B e_j$ . Тогда  $\{f_j\}$  также будет базисом в  $\mathfrak{F}$ . Такой базис  $\{f_j\}$  называется *базисом, эквивалентным ортонормированному*, или *базисом Рисса*. Следующие свойства базиса Рисса легко выводятся из определения:

1) В  $\mathfrak{F}$  можно ввести новое скалярное произведение  $\langle f, g \rangle = (B^{-1} f, B^{-1} g)$ , относительно которого базис  $\{f_j\}$  будет ортонормированным, причем нормы  $\langle f, f \rangle^{1/2}$  и  $\|f\|$  эквивалентны, т. е. их отношение заключено между положительными постоянными.

2)  $C_1 \|f\|^2 \leq \sum |c_j|^2 \leq C_2 \|f\|^2$  для любого  $f$  с некоторыми положительными постоянными  $C_1$  и  $C_2$ .

Эти два неравенства, заменяющие равенство Парсеваля для ортонормированной системы, пригодны для оценки нормы остатка ряда Фурье.

3) Система  $\{f_j\}$  — *безусловный базис*: она остается базисом после любой перестановки входящих в нее векторов.

Каждое из свойств 1) — 3) эквивалентно тому, что  $\{f_j\}$  — базис Рисса (если к 2) добавить, что система  $\{f_j\}$  полна, а к 3) — что  $0 < C_1 \leq \|f_j\| \leq C_2$  (теоремы Барі и Лорча)).

Две системы векторов  $\{f_j\}$ ,  $\{e_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) называются *квадратично близкими*, если

$$\sum \|f_j - e_j\|^2 < \infty. \quad (31.4)$$

Полная минимальная система, квадратично близкая к ортонормированному базису, является базисом Рисса (теорема Барі). Такой базис называется *базисом, квадратично близким к ортонормированному*, или *базисом Барі*.

Система  $\{f_j\}$  называется *базисом со скобками* в  $\mathfrak{F}$ , если существует такая возрастающая последовательность номеров  $\{m_i\}$ , что для любого вектора  $f \in \mathfrak{F}$  последовательность частных сумм с номерами  $m_i$  ряда Фурье

(31.2) этого вектора сходится к  $f$ , т. е.

$$f = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{j=m_{l+1}}^{m_{l+1}} c_{lf} f_j \right) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l f, \quad \text{где } P_l f = \sum_{j=m_{l+1}}^{m_{l+1}} c_{lf} f_j, \quad (31.5)$$

$m_0 = 0$ . Подчеркнем, что  $\{m_l\}$  не зависит от  $f$ . Из базисности со скобками тоже следует полнота.

Обозначим через  $\mathfrak{M}_l$  линейную оболочку векторов  $f_{m_{l+1}}, \dots, f_{m_{l+1}}$ . Мы ввели в (31.5) оператор проектирования  $P_l$ , сопоставляющий каждому вектору  $f$  часть его ряда Фурье, лежащую в  $\mathfrak{M}_l$ . Если  $\{f_j\}$  — полная минимальная система, то  $P_l$  проектирует  $\mathfrak{F}$  на  $\mathfrak{M}_l$  параллельно замыканию линейной оболочки остальных  $\mathfrak{M}_k$ . Если  $\{f_j\}$  — ортонормированный базис в  $\mathfrak{F}$ , то  $P_l$  — ортопроектор на  $\mathfrak{M}_l$ .

Стоит отметить, хотя это и очевидно, что из (31.5) вытекает равенство

$$f = c_1 f_1 + \dots + c_{m_l} f_{m_l} + P_{l+1} f + P_{l+2} f + \dots \quad (31.6)$$

при любом  $l$ , т. е. скобки до сколь угодно далекого номера можно снять. Однако при этом не исключено, что частные суммы ряда (31.6) с номерами, промежуточными между  $m_k$  ( $k=0, \dots, l$ ), будут аппроксимировать  $f$  хуже, чем частные суммы с номерами  $m_k$ .

Сделаем еще одно замечание. Пусть  $h_{m_{l+1}}, \dots, h_{m_{l+1}}$  — ортонормированный базис в  $\mathfrak{M}_l$  при каждом  $l$ . Тогда из (31.5) вытекает, что  $\{h_j\}$  ( $j=1, 2, \dots$ ) — базис в  $\mathfrak{F}$  (без скобок). Это следует из того, что если  $b_j$  — коэффициенты Фурье по новой системе, то при  $m_l < j \leq m_{l+1}$

$$\begin{aligned} \|b_{m_{l+1}} h_{m_{l+1}} + \dots + b_j h_j\|^2 &= \\ &= |b_{m_{l+1}}|^2 + \dots + |b_j|^2 \leq \|P_l f\|^2, \end{aligned}$$

а  $\|P_l f\| \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow \infty$ . Переход от ряда  $\sum c_{lf} f_j$  к ряду  $\sum b_j h_j$  можно рассматривать как некоторое усреднение первого.

В следующем пункте будут указаны усиления свойства базисности со скобками.

**2. Базисы Рисса и Бари со скобками.** Пусть  $\{f_j\}$  ( $j=1, 2, \dots$ ) — минимальная система,  $\mathfrak{M}_l$  — линейная оболочка векторов  $f_{m_{l+1}}, \dots, f_{m_{l+1}}, \{h_j\}$  ( $j=1, 2, \dots$ ) — ортонормированный базис в  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{N}_l$  — линейная оболочка векторов  $h_{m_{l+1}}, \dots, h_{m_{l+1}}$ . Если существует такой ограниченный оператор  $B$  в  $\mathfrak{F}$ , имеющий ограниченный обратный, что  $\mathfrak{M}_l = B\mathfrak{N}_l$  при всех  $l$ , то  $\{f_j\}$  — базис со скобками в  $\mathfrak{F}$ . Мы будем называть  $\{f_j\}$  в этом случае *базисом Рисса со скобками* в  $\mathfrak{F}$ .

Можно показать (ср. [6], гл. VI, §§ 5 и 2), что следующие условия эквивалентны тому, что  $\{f_j\}$  — базис Рисса со скобками:

1) В  $\mathfrak{F}$  можно ввести новое скалярное произведение  $\langle f, g \rangle$  так, что система, составленная из ортонормированных относительно него базисов в  $\mathfrak{M}_l$  ( $l=0, 1, \dots$ ), будет ортонормированным базисом в  $\mathfrak{F}$ , а норма  $\langle f, f \rangle^{1/2}$  будет эквивалентной  $\|f\|$ .

2)  $C_1 \|f\|^2 \leq \sum \|P_l f\|^2 \leq C_2 \|f\|^2$  для любого  $f$  с некоторыми положительными постоянными  $C_1, C_2$ .

3) В ряде  $f = P_0 f + P_1 f + \dots$  можно произвольно переставлять члены. Поэтому базис Рисса со скобками называется также *безусловным базисом со скобками*.

Пусть  $\{h_j\}$  ( $j=1, 2, \dots$ ) — снова некоторый ортонормированный базис в  $\mathfrak{F}$ ,  $0 = \tilde{m}_0 < \tilde{m}_1 < \dots$  и  $Q_l$  — ортопроектор на линейную оболочку векторов  $h_{\tilde{m}_{l+1}}, \dots, h_{\tilde{m}_{l+1}}$ . Предположим, что система  $\{f_j\}$  полна, минимальна и удовлетворяет условию

$$\sum_{l=0}^{\infty} \|P_l - Q_l\|^2 < \infty. \quad (31.7)$$

Такая система  $\{f_j\}$  будет базисом Рисса со скобками (это следует из теоремы А. С. Маркуса; см. [6], гл. VI, § 5, и [37]). Мы назовем такую систему *базисом Бари со скобками*<sup>1)</sup>. Условие (31.7) говорит о том, что ряды  $\sum P_l f$  и  $\sum Q_l f$  в известном смысле «равносходящиеся».

<sup>1)</sup> Здесь мы несколько отклоняемся от терминологии в [6], [37].



Ниже нам встретятся системы  $\{f_j\}$ , удовлетворяющие значительно более сильному условию

$$l^N \|P_l - Q_l\| \leq C_N \quad (31.8)$$

с любым натуральным  $N$ . Это условие означает, что имеет место «быстрая равносходимость» рядов  $\sum P_l f$  и  $\sum Q_l f$  при любом  $f$ . Отметим еще, что из (31.7) следует совпадение  $\{m_l\}$  с  $\{\tilde{m}_l\}$ , начиная с некоторого номера.

**3. Спектральные свойства вполне непрерывных операторов.** Если  $A$  — линейный оператор, действующий в  $\mathfrak{F}$ , то через  $\Sigma(A)$  будем обозначать его спектр, т. е. совокупность всех таких комплексных чисел  $\lambda$ , что оператор  $A - \lambda I$  не имеет ограниченного обратного. Здесь и дальше  $I$  — *единичный оператор*. Если  $A$  ограничен, то  $\Sigma(A)$  лежит в круге  $\{\lambda; \lambda \leq \|A\|\}$ .

Пусть  $A$  — вполне непрерывный (другое название: компактный) оператор. Известно (см., например, [2], гл. V), что тогда  $\Sigma(A)$  состоит из 0 и не более чем счетного множества собственных значений, которые могут скапливаться только к 0. Каждому собственному значению  $\lambda \neq 0$  отвечает конечномерное *корневое подпространство*  $\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{L}_\lambda(\lambda)$ , состоящее из всех таких векторов  $f$ , что  $(A - \lambda I)^m f = 0$  при каком-нибудь натуральном  $m$ . Если  $f \neq 0$ , то наименьшее  $m = m(f)$  называется *порядком* вектора  $f$ . Корневые векторы порядка 1 — это *собственные векторы*, порядка больше 1 — *присоединенные векторы*. Если 0 — собственное значение, то мы будем предполагать, что отвечающие ему корневые векторы образуют конечномерное подпространство<sup>1)</sup>. Размерность  $d(\lambda) = \dim \mathfrak{L}(\lambda)$  называется *алгебраической кратностью* собственного значения  $\lambda$ . Если она больше 1, то либо  $\mathfrak{L}(\lambda)$  состоит из 0 и собственных векторов, либо там имеются также и присоединенные векторы. Положим еще  $m(\lambda) = \max m(f)$  по всем  $f \neq 0$  из  $\mathfrak{L}(\lambda)$ ; это наибольший из размеров жордановых клеток матрицы оператора  $A$  в  $\mathfrak{L}(\lambda)$ .

Расположим все собственные значения оператора  $A$  в последовательность  $\{\lambda_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) следующим образом: если 0 — не собственное значение, то  $|\lambda_j| \geq$

$\geq |\lambda_{j+1}|$  при всех  $j$ ; если 0 — собственное значение, то  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{d(0)} = 0$  и  $|\lambda_j| \geq |\lambda_{j+1}|$  при  $j > d(0)$ ; при этом каждое собственное значение  $\lambda$  повторяется  $d(\lambda)$  раз. В каждом  $\mathfrak{L}(\lambda)$  выберем базис и составим из всех этих базисов систему  $\{f_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) так, что  $f_j \in \mathfrak{L}(\lambda_j)$  при всех  $j$ . Систему  $\{f_j\}$  зафиксируем и в дальнейшем будем называть *системой корневых векторов оператора  $A$* . Для операторов, которые нам предстоит рассматривать, она будет бесконечной и минимальной (см. ниже п. 6). Отметим еще, что при этом пространство  $\mathfrak{M}_l$  (см. п. 1) всегда будет корневым подпространством или конечной суммой корневых подпространств, отвечающих соседним собственным значениям.

Числа  $\mu_j = \lambda_j^{-1}$  для ненулевых  $\lambda_j$  называются *характеристическими числами* оператора  $A$ .

**4. Операторы с дискретным спектром.** Рассмотрим *неограниченный* замкнутый оператор  $L$  в  $\mathfrak{F}$  со всюду плотной областью определения  $\mathfrak{D}(L)$ . Такой оператор называют *оператором с дискретным спектром*, или *оператором со вполне непрерывной резольвентой*, если резольвента  $R_L(\mu) = (L - \mu I)^{-1}$  существует и является вполне непрерывным оператором хотя бы при одном  $\mu = \mu_0$ . Доказывается (см., например, [8], гл. III, § 6), что тогда спектр  $\Sigma(L)$  состоит из не более чем счетного множества собственных значений с единственной возможной предельной точкой  $\infty$  (а не 0, как у вполне непрерывного оператора); каждому собственному значению отвечает конечномерное корневое подпространство  $\mathfrak{L}(\mu) = \mathfrak{L}_L(\mu)$ ; резольвента  $R_L(\mu)$  вполне непрерывна при  $\mu \in \Sigma(L)$ .

Подчеркнем, что оператор с дискретным спектром — обязательно неограниченный оператор, так как оператор, обратный к ограниченному, не может быть вполне непрерывным.

Собственные значения мы расположим в последовательность  $\{\mu_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) так, что  $|\mu_1| \leq |\mu_2| \leq \dots$  и каждое собственное значение  $\mu$  повторяется  $d(\mu)$  раз, а из базисов во всех  $\mathfrak{L}(\mu)$  составим *систему корневых векторов*  $\{f_j\}$  оператора  $L$  так, что  $f_j \in \mathfrak{L}(\mu_j)$  при всех  $j$ .

Если оператор  $L^{-1} = A$  вполне непрерывен (этого всегда можно добиться, заменив  $L$  на  $L - \mu_0 I$ ), то наши

<sup>1)</sup> Исключая § 39.

обозначения согласуются следующим образом:  $\mu_j = \lambda_j^{-1}$ ,  $\mathfrak{L}_L(\mu_j) = \mathfrak{L}_A(\lambda_j)$  и  $\{f_j\}$  — общая система корневых векторов операторов  $L$  и  $A$ .

**5. Метод Абеля.** Мы приведем здесь принадлежащее В. Б. Лидскому [50] определение свойства системы  $\{f_j\}$  корневых векторов оператора  $L$  с дискретным спектром (или вполне непрерывного оператора  $A$ ), промежуточное между полнотой и базисностью со скобками.

Предположим сначала, что все собственные значения  $\mu_j$  оператора  $L$  (характеристические числа оператора  $A$ ), кроме, быть может, конечного их числа, содержатся в угле  $\Theta = \{\mu; |\arg \mu| < \theta\}$ , и пусть  $\alpha$  — положительное число, причем  $\alpha\theta < \pi/2$ . Положим  $\mu^\alpha = |\mu|^\alpha e^{i\alpha \arg \mu}$  в этом угле, так что  $|\exp(-\mu^\alpha t)| \rightarrow 0$  при  $t = \text{const} > 0$ ,  $\mu \in \Theta$ ,  $\mu \rightarrow \infty$ .

Пусть сначала в системе  $\{f_j\}$  нет присоединенных векторов, отвечающих собственным значениям  $\mu_j \in \Theta$  (по крайней мере, начиная с некоторого номера  $j$ ). В этом случае скажем, что  $\{f_j\}$  — базис для метода суммирования Абеля порядка  $\alpha$ , если существует такая возрастающая последовательность номеров  $0 = m_0 < m_1 < \dots < m_l < \dots$ , что для любого  $f \in \mathfrak{F}$  при  $t > 0$  сходится ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=m_l+1}^{m_{l+1}} c_j e_j(t) f_j \quad (31.9)$$

и его сумма  $f(t)$  стремится к  $f$  в  $\mathfrak{F}$  при  $t \rightarrow +0$ . Здесь функция  $e_j(t) = e_j(t; \alpha)$  равна  $\exp(-\mu_j^\alpha t)$ , если  $\mu_j \in \Theta$ , причем все члены, отвечающие одному и тому же собственному значению, содержатся в одном слагаемом суммы по  $l$ . Для тех  $j$ , для которых  $\mu_j \in \Theta$  (например, для  $\mu_j = 0$ , если  $0$  — собственное значение), полагаем  $e_j(t) \equiv 1$ .

В общем случае, когда есть и присоединенные векторы, это определение обобщается следующим образом. Пусть  $f_p, \dots, f_q$  — базис в корневом подпространстве  $\mathfrak{L}_L(\mu')$ ,  $\mu' \in \Theta$ . Тогда сумма  $c_p e_p(t) f_p + \dots + c_q e_q(t) f_q$

заменяется интегралом

$$-(2\pi i)^{-1} \int_{|\mu-\mu'|=\varepsilon} \exp(-\mu^\alpha t) (L - \mu I)^{-1} f d\mu, \quad (31.10)$$

где контур интегрирования лежит в  $\Theta$  и окружает только одно собственное значение  $\mu'$  с обходом против часовой стрелки. Этот интеграл при  $t=0$  становится равным проекции вектора  $f$  на  $\mathfrak{L}_L(\mu')$ , т. е.  $c_p f_p + \dots + c_q f_q$  (см., например, [8], гл. III, § 6). Если  $\mu'$  — простой полюс резольвенты, т. е.  $m(\mu') = 1$ , то интеграл совпадает с  $c_p e_p(t) f_p + \dots + c_q e_q(t) f_q$ .

Можно также предположить, что  $\Theta = \{\mu; |\arg(\mu/\mu_0)| < \theta\}$ , где  $|\mu_0| = 1$ ; тогда всюду в приведенных выше формулах надо заменить  $\mu^\alpha$  на  $|\mu|^\alpha e^{i\alpha \arg(\mu/\mu_0)} = (\mu/\mu_0)^\alpha$ .

Этот вид базисности, в отличие от определенных в пп. 1—2, тесно связан с рассматриваемым оператором, поскольку от него зависят  $e_j(t; \alpha)$ . Обсуждение метода Абеля мы продолжим в п. 4 § 35.

**6. Построение системы, биортогональной к системе корневых векторов. Использование симметрии.** Пусть  $A$  — вполне непрерывный оператор в  $\mathfrak{F}$  и  $A^*$  — оператор, сопряженный к  $A$ . Следующие три утверждения хорошо известны (см., например, [2], гл. V, или [8], гл. III, § 6):

1° Оператор  $A^*$  вполне непрерывен.

2° Ненулевое число  $\lambda$  является собственным значением оператора  $A$  тогда и только тогда, когда  $\bar{\lambda}$  — собственное значение оператора  $A^*$ .

3° Если  $\lambda$  — ненулевое собственное значение оператора  $A$ , то  $\dim \mathfrak{L}_A(\lambda) = \dim \mathfrak{L}_{A^*}(\bar{\lambda})$ .

Оператор  $A$  называется диссипативным, если  $\text{Im}(A f, f) \geq 0$  для всех  $f$ .

4° Пусть оператор  $A$  диссипативен и  $\lambda$  — его вещественное собственное значение. Тогда  $\mathfrak{L}_A(\lambda) = \mathfrak{L}_{A^*}(\lambda)$  и  $A = A^*$  на этом подпространстве, так что в нем нет присоединенных векторов (см. [6], гл. V, § 1).

В частности, это верно в отношении  $\mathfrak{L}_A(0)$ , если  $A$  — диссипативный оператор и  $0$  — его собственное значение.

Заметим, что если  $A$  диссипативен, то  $A^*$  не диссипативен (за исключением случая, когда  $A = A^*$ ), однако оператор  $-A^*$  диссипативен.

Диссипативность неограниченного оператора  $L$  определяется условием  $\text{Im}(L\bar{f}, f) \geq 0$  при  $f \in \mathfrak{D}(L)$ . Если такой оператор имеет ограниченный обратный  $L^{-1} = A$ , то  $-A$  диссипативен.

Конкретные операторы, которые нам предстоит рассмотреть в §§ 36—38, 40, как правило, будут диссипативными.

Два следующих утверждения легко проверяются (ср. [2], гл. V, и [8], гл. III, § 6); второе из них уточняет 3°.

5° Если  $\lambda, \lambda'$  — различные собственные значения оператора  $A$ , то  $\mathfrak{L}_A(\lambda)$  и  $\mathfrak{L}_{A^*}(\bar{\lambda}')$  ортогональны.

6° Если  $\lambda$  — ненулевое собственное значение оператора  $A$ , то  $\dim \mathfrak{L}_A^m(\lambda) = \dim \mathfrak{L}_{A^*}^m(\bar{\lambda})$ , где  $\mathfrak{L}_A^m(\lambda)$  — подпространство в  $\mathfrak{L}_A(\lambda)$ , состоящее из нуля и корневых векторов порядка не выше  $m$ .

Для  $m = 1$  это показано в [2], [8]. Случай  $m > 1$  сводится к случаю  $m = 1$ , так как  $(A - \lambda)^m = T - \lambda_1$ ,  $(A^* - \bar{\lambda})^m = T^* - \bar{\lambda}_1$ , где  $\lambda_1 = \lambda^m$  и  $T$  — вполне непрерывный оператор.

7° Пусть  $f_p, \dots, f_q$  — базис в  $\mathfrak{L}_A^m(\lambda)$  ( $\lambda \neq 0$ ), а  $g_p, \dots, g_q$  — базис в  $\mathfrak{L}_{A^*}^m(\bar{\lambda})$ . Тогда матрица  $\{(f_j, g_i)\}$  ( $i, j = p, \dots, q$ ) невырождена в том и только в том случае, если  $m = m(\lambda)$ , т. е. если в  $\mathfrak{L}_A(\lambda)$  (и в  $\mathfrak{L}_{A^*}(\bar{\lambda})$ ) нет корневых векторов порядка выше  $m$ .

При  $m = 1$  достаточно заметить, что разрешимость уравнения  $(A - \lambda)f = f_0$ , где  $f_0 = a_p f_p + \dots + a_q f_q \neq 0$ , равносильна ортогональности  $f_0$  к  $g_p, \dots, g_q$  согласно теории уравнений Фредгольма. Случай  $m > 1$  сводится к случаю  $m = 1$  только что указанным приемом.

Предложение 7° при  $m = 1$  можно рассматривать как критерий отсутствия присоединенных векторов.

Теперь до конца § 31 и в § 35 мы будем предполагать, что если  $\lambda = 0$  — собственное значение оператора  $A$ , то  $\mathfrak{L}_A(0)$  и  $\mathfrak{L}_{A^*}(0)$  имеют одинаковую конечную размерность, причем если  $f_1, \dots, f_{d(0)}$  и  $g_1, \dots, g_{d(0)}$  — базисы в  $\mathfrak{L}_A(0)$  и  $\mathfrak{L}_{A^*}(0)$ , то матрица  $\{(f_j, g_i)\}$  ( $i, j = 1, \dots, d(0)$ ) невырождена. Очевидно, что это условие выполнено, если  $A$  — диссипативный оператор с конечномерным  $\mathfrak{L}_A(0)$  (см. 4°).

Пусть  $\{f_j\}$  и  $\{g_j\}$  — системы корневых векторов операторов  $A$  и  $A^*$ , причем  $f_j \in \mathfrak{L}_A(\lambda)$  тогда и только тогда, когда  $g_j \in \mathfrak{L}_{A^*}(\bar{\lambda})$ . Предложения 5° и 7° показывают, что систему  $\{g_i\}$ , биортогональную к  $\{f_j\}$ , можно построить следующим образом. Пусть  $h_p, \dots, h_q$  — базис в некотором  $\mathfrak{L}_{A^*}(\bar{\lambda})$ . Тогда для  $i = p, \dots, q$  полагаем  $g_i = b_{pi} h_p + \dots + b_{qi} h_q$ . Из условий  $(f_j, g_i) = \delta_{ij}$  ( $i, j = p, \dots, q$ ) для коэффициентов  $b_{ji}$  получается система линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем, так что  $b_{ji}$  однозначно определяются.

Более точно, пусть  $\Gamma = (\Gamma_{ij})$  — матрица из скалярных произведений  $\Gamma_{ij} = (f_i, h_j)$  ( $i, j = p, \dots, q$ ); она невырождена в силу 7°. Полагаем  $(g_p, \dots, g_q) = (h_p, \dots, h_q)B$ . Искомая матрица  $B$  определяется равенством  $\Gamma \bar{B} = E$ , где  $E$  — единичная матрица, откуда  $B = \bar{\Gamma}^{-1}$ .

Предположим теперь, что в пространстве  $\mathfrak{F}$  определена операция перехода от вектора  $f$  к комплексно сопряженному вектору  $\bar{f}$ , причем  $(\bar{f}, g) = \overline{(f, g)}$ . (Например,  $\mathfrak{F}$  состоит из заданных на некотором множестве комплекснозначных функций.) Пусть  $M$  — линейный оператор в  $\mathfrak{F}$  с областью определения  $\mathfrak{D}(M)$ . Введем оператор  $\bar{M}$ :

$$\bar{M}\bar{f} = \overline{Mf} \text{ для } f \in \mathfrak{D}(\bar{M}) = \overline{\mathfrak{D}(M)} = \{\bar{f}; \bar{f} \in \mathfrak{D}(M)\}. \quad (31.11)$$

Многие операторы, связанные с рассмотренными в этой книге задачами (например, оператор (30.5)), обладают свойством симметрии, которое записывается формулой

$$M^* = \bar{M}; \quad (31.12)$$

оно часто встречается в математической физике (ср. [40]).

Очевидно, что если  $\{f_j\}$  — система корневых векторов оператора  $A$ , то  $\{\bar{f}_j\}$  — система корневых векторов оператора  $\bar{A}$ . Поэтому при  $A^* = \bar{A}$  нам вместе с  $\{f_j\}$  сразу известна система  $\{\bar{f}_j\}$  корневых векторов оператора  $A^*$ , и в использованных выше обозначениях нужно положить  $(g_p, \dots, g_q) = (\bar{f}_p, \dots, \bar{f}_q) \bar{\Gamma}^{-1}$ , где  $\Gamma$  — матрица из скалярных произведений  $\Gamma_{ij} = (f_i, \bar{f}_j)$ .

Более того, справедливо следующее утверждение:  
 8° При условии (31.12) можно так подобрать базис  $f_p, \dots, f_q$  в каждом корневом подпространстве, что системы  $\{f_j\}$  и  $\{\bar{f}_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) будут биортогональны.

Действительно, пусть  $\{f'_p, \dots, f'_q\}$  — какой-нибудь базис в  $\mathfrak{L}_A(\lambda)$  и  $\Gamma$  — матрица из скалярных произведений  $(f'_i, \bar{f}'_j)$  ( $i, j = p, \dots, q$ ). Положим

$$\begin{pmatrix} f_p \\ \dots \\ f_q \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f'_p \\ \dots \\ f'_q \end{pmatrix}.$$

Тогда  $(\bar{f}_p, \dots, \bar{f}_q) = (\bar{f}'_p, \dots, \bar{f}'_q) T^*$ , и для матрицы  $T$  получается уравнение  $T\Gamma T' = E$ . Отсюда  $T$  найти можно, так как матрица  $\Gamma$  невырождена и симметрична,  $\Gamma = \Gamma'$  (см., например, [13], гл. VI, п. 23.3, теорема 4).

В частности, если все собственные значения простые, то  $(f_j, \bar{f}_j) \neq 0$  при любом выборе ненулевого вектора  $f_j$  в каждом корневом подпространстве и  $(f_j, \bar{f}_j) = 1$  при надлежащей нормировке этих векторов. (Добавим к сказанному, что если  $\dim \mathfrak{L}_A(\lambda) > 1$ , то скалярные произведения  $(f, \bar{f})$  для ненулевых векторов  $f \in \mathfrak{L}_A(\lambda)$  не обязательно отличны от 0, даже если в  $\mathfrak{L}_A(\lambda)$  нет присоединенных векторов.)

Таким образом, условие (31.12) облегчает построение системы, биортогональной к  $\{f_j\}$ . Однако из (31.12) вытекает еще и другое следствие, которое будет играть очень существенную роль. Напомним, что для любого ограниченного оператора  $A$  его вещественная и мнимая части — это самосопряженные операторы

$$A_R = \operatorname{Re} A = \frac{A + A^*}{2}, \quad A_I = \operatorname{Im} A = \frac{A - A^*}{2i}. \quad (31.13)$$

При  $A^* = \bar{A}$  эти формулы принимают вид

$$A_R = \frac{A + \bar{A}}{2}, \quad A_I = \frac{A - \bar{A}}{2i}. \quad (31.14)$$

Для удобства ссылок сформулируем следующее предложение:

9° Если  $A^* = \bar{A}$ , то  $A = A_R + iA_I$ , где  $A_R, A_I$  — самосопряженные операторы, определяемые формулами (31.14).

Для неограниченного оператора  $A$  это утверждение остается в силе при условии  $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(\bar{A})$ .

Кроме операторов, обладающих свойством (31.12), нам встретятся также операторы вида

$$A = A_1 Y, \quad \text{где } A_1^* = \bar{A}_1, \quad Y^* = \bar{Y}. \quad (31.15)$$

Здесь для простоты будем считать  $A_1$  вполне непрерывным и  $Y$  — ограниченным оператором; тогда оператор  $A$  вполне непрерывен. Примером может служить оператор

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \sigma(y) \varphi(y) dS_y \quad (x \in S) \quad (31.16)$$

в  $L^2(S)$ , где  $\sigma(y)$  — комплекснозначная функция на  $S$ . Здесь  $A_1$  — оператор, определяемый правой частью формулы (30.5), а  $Y$  — оператор умножения на  $\sigma$ .

Очевидно, что при условиях (31.15)  $A^* = \bar{Y}\bar{A}_1$ ; далее, если  $\{f_j\}$  — система корневых векторов оператора  $A$ , в которой  $f_j$  отвечает собственному значению  $\lambda_j$ , то  $\{\bar{Y}\bar{f}_j\}$  — система корневых векторов оператора  $A^*$ , в которой  $\bar{Y}\bar{f}_j$  отвечает собственному значению  $\bar{\lambda}_j$ . При  $\lambda_j \neq \lambda_k$  мы имеем  $(Y\bar{f}_j, \bar{f}_k) = (f_j, \bar{Y}\bar{f}_k) = 0$  в силу 5°. Обобщая 8°, нетрудно проверить следующее утверждение:

10°  $(Y\bar{f}_j, \bar{f}_k) = \delta_{jk}$  при надлежащем выборе базисов в корневых подпространствах оператора  $A$ .

Действительно, если  $\{f'_p, \dots, f'_q\}$  — базис в  $\mathfrak{L}_A(\lambda)$ , то матрица  $\Gamma = \{(Y\bar{f}'_i, \bar{f}'_j)\}$  ( $i, j = p, \dots, q$ ) невырождена в силу 7° и симметрична:

$$(Y\bar{f}'_i, \bar{f}'_j) = (\bar{f}'_i, \bar{Y}\bar{f}'_j) = (Y\bar{f}'_j, \bar{f}'_i).$$

Вводя векторы  $f_p, \dots, f_q$  так же, как в доказательстве предложения 8°, мы снова получаем соотношение  $T\Gamma T' = E$ , из которого можно определить  $T$ .

**7. Приближенные решения уравнения Фредгольма.** Рассмотрим уравнение

$$A f - \lambda f = g \quad (31.17)$$

с вполне непрерывным оператором  $A$ . Пусть  $\lambda$  не принадлежит спектру  $\Sigma(A)$ . Тогда резольвента  $R_A(\lambda) =$

$= (A - \lambda I)^{-1}$  — ограниченный оператор, поэтому

$$\|f\| \leq C_\lambda \|g\| \quad (31.18)$$

с не зависящей от  $f$  постоянной  $C_\lambda$ . Если вектору  $g'$  отвечает решение  $f'$ , то

$$\|f - f'\| \leq C_\lambda \|g - g'\|. \quad (31.19)$$

Пусть система  $\{f_j\}$  корневых векторов оператора  $A$ , по крайней мере, полна. Тогда для любого  $g$  из  $\mathfrak{F}$  существует линейная комбинация  $g' = a_1 f_1 + \dots + a_m f_m$ , сколь угодно близкая к  $g$  по норме. Оценка (31.19) показывает, что решение  $f'$  будет близким к  $f$ . При этом  $f'$  строится по  $g'$  по существу средствами линейной алгебры. Действительно, достаточно указать решение для вектора  $g''$  вида  $a_p f_p + \dots + a_q f_q$ , где  $f_p, \dots, f_q$  — базис в некотором  $\mathfrak{L}_A(\lambda_j)$ . Оно имеет вид  $f'' = b_p f_p + \dots + b_q f_q$ . Пусть  $a, b$  — столбцы из координат  $a_p, \dots, a_q$  и  $b_p, \dots, b_q$ , и пусть  $A_{\lambda_j}$  — матрица оператора  $A$  в  $\mathfrak{L}_A(\lambda_j)$  в базисе  $f_p, \dots, f_q$ . Тогда  $(A_{\lambda_j} - \lambda E)b = a$ , где  $E$  — единичная матрица; отсюда  $b = (A_{\lambda_j} - \lambda E)^{-1}a$  при  $\lambda \neq \lambda_j$ . Стоит отметить, что при  $a \neq 0$  правая часть как функция от  $\lambda$  имеет полюс в  $\lambda_j$ , максимальный возможный порядок которого равен  $m(\lambda_j)$ . Если в  $\mathfrak{L}_A(\lambda_j)$  нет присоединенных векторов (и только в этом случае), порядок полюса всегда равен 1.

Если  $a_p, \dots, a_q$  — коэффициенты Фурье вектора  $g$  по системе  $\{f_j\}$ , то  $b_p, \dots, b_q$  будут коэффициентами Фурье решения.

Таким образом, зная систему  $\{f_j\}$  и собственные значения оператора  $A$ , мы можем строить приближенные решения уравнения (31.17), если система  $\{f_j\}$  хотя бы полна. Чем «лучше» эта система (см. серию определений в пп. 1, 2 и 5), тем практически удобнее этот спектральный метод решения уравнения (31.17).

Все сказанное в двух последних пунктах легко переносится на случай, когда вместо вполне непрерывного оператора  $A$  рассматривается оператор  $L$  с дискретным спектром.

## § 32. Пространства С. Л. Соболева

Мы приведем здесь сводку определений и нужных нам теорем. Доказательства можно найти, например, в [57] и [20], ч. II, § 2; см. также [19], гл. II.

**1. Определения.** Пусть  $s$  — любое вещественное число. Пространство  $H_s(\mathbf{R}^n)$  определяется как пополнение пространства  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  финитных бесконечно гладких (комплекснозначных) функций в  $\mathbf{R}^n$  по норме

$$\|u(x)\|_{\mathbf{R}^n, s} = \left( \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |(Fu)(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \quad (32.1)$$

где  $F$  — преобразование Фурье:

$$(Fu)(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx, \quad (32.2)$$

$x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$ . При натуральном  $s$  она эквивалентна норме

$$\left( \sum_{|\alpha| \leq s} \int |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (32.3)$$

т. е. отношение этих норм заключено между положительными постоянными. Здесь и дальше  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ ,  $D_j = -i\partial/\partial x_j$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Интеграл берется по  $\mathbf{R}^n$ . При дробном  $s > 0$  норма (32.1) эквивалентна норме

$$\left( \sum_{|\alpha| \leq [s]} \int |D^\alpha u(x)|^2 dx + \sum_{|\alpha| = [s]} \iint \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s-2[s]}} dx dy \right)^{1/2}, \quad (32.4)$$

где  $[s]$  — целая часть числа  $s$  и интегралы также берутся по  $\mathbf{R}^n$ . Мы позволим себе обозначать нормы (32.3) и (32.4) снова через  $\|u\|_{\mathbf{R}^n, s}$ .

Пусть  $V$  — область в  $\mathbf{R}^n$  с компактной бесконечно гладкой  $(n-1)$ -мерной границей  $S$ , внутренняя или внешняя по отношению к  $S$ . Пространство  $H_s(V)$  при  $s \geq 0$  определяется как пополнение пространства

бесконечно гладких в замыкании  $\bar{V}$  области  $V$  функций, финитных, если она бесконечна, по норме  $\|u(x)\|_{V,s}$ , равной (32.3) при целом  $s$  и (32.4) при дробном  $s$ , где интегралы берутся по  $V$ .

Рассмотрим теперь  $n$ -мерную компактную бесконечно гладкую поверхность  $\mathfrak{S}$  в  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Локально она задается уравнением вида  $x_j = \Phi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ , где  $\Phi$  — бесконечно гладкая функция и координата, отмеченная значком  $\hat{\phantom{x}}$ , опущена. Каждая точка на  $\mathfrak{S}$  имеет на  $\mathfrak{S}$  окрестность, в которой действуют локальные координаты, скажем,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . На пересечении двух таких координатных окрестностей действующие в них локальные координаты  $y, \tilde{y}$  связаны невырожденным бесконечно гладким преобразованием. При указанной выше локальной записи поверхности  $\mathfrak{S}$  уравнением  $x_j = \Phi$  одна из бесконечно многих возможных систем локальных координат есть  $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_{n+1})$ .

На  $\mathfrak{S}$  можно построить (многими способами) конечную систему бесконечно гладких функций  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_K$  так, что носитель каждой  $\epsilon_j$  содержится в одной координатной окрестности и функции  $\kappa_j = \epsilon_j^2$  ( $j = 1, \dots, K$ ) образуют (бесконечно гладкое) разбиение единицы на  $\mathfrak{S}$ :  $\sum \kappa_j \equiv 1$  на  $\mathfrak{S}$ .

Определим на пространстве  $C^\infty(\mathfrak{S})$  бесконечно гладких на  $\mathfrak{S}$  функций норму

$$\|u\|_{\mathfrak{S},s} = \left( \sum_{j=1}^K \|\epsilon_j u\|_{\mathbf{R}^n,s}^2 \right)^{1/2} \quad (32.5)$$

при любом вещественном  $s$ . Здесь подразумевается, что функция  $\epsilon_j u$  записана в локальных координатах на носителе функции  $\epsilon_j$  и продолжена нулем на соответствующее  $\mathbf{R}^n$ ; норма  $\|\epsilon_j u\|_{\mathbf{R}^n,s}$  вычисляется в этих координатах. От способа построения функций  $\epsilon_j$  и выбора систем локальных координат норма (32.5) зависит несущественным образом: разные нормы такого вида эквивалентны. Пространство  $H_s(\mathfrak{S})$  определяется как пополнение пространства  $C^\infty(\mathfrak{S})$  по норме (32.5).

**2. Свойства пространств  $H_s$ .** Приведенные ниже утверждения относятся к пространствам функций на  $\mathbf{R}^n$ ,

$V$  или  $\mathfrak{S}$ , если не оговаривается противное. Некоторые из этих утверждений очевидны.

1° Пространство  $H_0$  совпадает с пространством  $L^2$  функций, интегрируемых с квадратом модуля (по Лебегу).

2°  $H_{s_1} \supset H_{s_2}$  при  $s_1 < s_2$ , причем оператор вложения (сопоставляющий функции  $u \in H_{s_2}$  эту же функцию в  $H_{s_1}$ ) ограничен. В случаях ограниченной области  $V$  или  $\mathfrak{S}$  он вполне непрерывен.

3° При натуральном  $s$  пространство  $H_s$  состоит из функций  $u$ , принадлежащих  $L^2$  вместе с производными  $D^\alpha u$  порядка  $|\alpha| \leq s$  в смысле обобщенных функций. Здесь  $H_s = H_s(\mathbf{R}^n)$  или  $H_s(V)$ . На  $\mathfrak{S}$  производные  $D^\alpha u$  определены только локально (в локальных координатах), и если  $u \in H_s(\mathfrak{S})$  имеет достаточно малый носитель, то  $D^\alpha u \in L^2(\mathfrak{S})$  при  $|\alpha| \leq s$ . Пространства  $H_s(\mathbf{R}^n)$  и  $H_s(\mathfrak{S})$  с отрицательным  $s$  содержат обобщенные функции. (Мы иногда будем опускать слово «обобщенные».) Например, дельта-функция  $\delta(x)$  в  $\mathbf{R}^n$  принадлежит  $H_s(\mathbf{R}^n)$  при  $s < -n/2$ .

4° Величины (32.1), (32.3) — (32.5) сохраняют смысл для элементов из соответствующих  $H_s$  и определяют нормы в этих пространствах.

5° Оператор умножения на функцию, непрерывную и ограниченную вместе с производными порядка  $|\alpha| \leq t$  (1), действует ограниченным образом в  $H_s$  при  $|s| \leq t$ .

6° Оператор  $D^\alpha$  действует ограниченным образом из  $H_{s+|\alpha|}$  в  $H_s$ . Здесь  $H_s = H_s(\mathbf{R}^n)$  или  $H_s(V)$ .

7° Пространство  $H_s(V)$  состоит из сужений на  $V$  функций из  $H_s(\mathbf{R}^n)$ ; оператор перехода к сужению действует ограниченным образом из  $H_s(\mathbf{R}^n)$  в  $H_s(V)$ .

8° Пусть поверхность  $S$  разделяет пространство  $\mathbf{R}^n$  на внутреннюю и внешнюю области  $V^+$  и  $V^-$ ,  $s$  — натуральное число; функция  $u(x)$  принадлежит  $H_s(V^+)$  и  $H_s(V^-)$ . Тогда  $u \in H_s(\mathbf{R}^n)$  в том и только в том случае, если  $\partial^i u^+ / \partial N^i = \partial^i u^- / \partial N^i$  ( $i = 0, \dots, s-1$ ). Здесь  $\partial / \partial N$  — производная по нормали. Аналогичное утверждение верно также, скажем, для шара большого радиуса в  $\mathbf{R}^n$  вместо  $\mathbf{R}^n$  и пересечения  $V^-$  с этим шаром вместо  $V^-$ . (Шар содержит  $S$  внутри себя.)

1) Производные порядка  $t$  можно считать кусочно-непрерывными.

9° Для функции из  $H_s(V)$  при  $s > 1/2$  определено ее граничное значение на  $S$ ; оно принадлежит  $H_{s-1/2}(S)$  и в случае непрерывной в  $\bar{V}$  функции совпадает с обычным граничным значением. Оператор перехода к граничному значению действует ограниченным образом из  $H_s(V)$  в  $H_{s-1/2}(S)$ . Аналогично, функции из  $H_s(\mathbb{R}^n)$  при  $s > 1/2$  имеют след на  $S$ , принадлежащий  $H_{s-1/2}(S)$ .

10° При  $s > n/2$  любая функция из  $H_s$  непрерывна (быть может, после исправления на множестве нулевой меры).

Чтобы усилить это утверждение, введем пространства  $C^{(s)}$ . Пространство  $C^{(s)}(V)$  при целом  $s \geq 0$  состоит из непрерывных в  $\bar{V}$  вместе с производными до порядка  $s$  функций  $u(x)$ , имеющих конечную норму

$$\sup_{x \in V; |\alpha| \leq s} |D^\alpha u(x)|. \quad (32.6)$$

При дробном  $s > 0$  это пространство состоит из непрерывных в  $\bar{V}$  вместе с производными до порядка  $[s]$  функций  $u(x)$ , имеющих конечную норму

$$\sup_{x \in V; |\alpha| \leq [s]} |D^\alpha u(x)| + \sup_{x, y \in V; |\alpha| = [s]} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^{s - [s]}}. \quad (32.7)$$

Совершенно аналогично определяются пространство  $C^{(s)}(\mathbb{R}^n)$  и норма в нем. Сходимость последовательности функций  $u_n(x)$  в  $C^{(s)}(V)$  при целом  $s$  — это равномерная сходимость  $\{u_n(x)\}$  и  $\{D^\alpha u_n(x)\}$  при любом  $\alpha$  ( $|\alpha| \leq s$ ). При  $s' > s$  имеем  $C^{(s')}(V) \subset C^{(s)}(V)$ , и оператор вложения ограничен.

Наконец, пространство  $C^{(s)}(\mathfrak{S})$  состоит из всех таких функций  $u$  на  $\mathfrak{S}$ , что все  $\kappa_j u$  ( $j = 1, \dots, K$ ) будут принадлежать  $C^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ , если их записать в локальных координатах и продолжить нулем на соответствующие  $\mathbb{R}^n$ . Норма функции  $u$  в  $C^{(s)}(\mathfrak{S})$  определяется как наибольшая из норм функций  $\kappa_j u$  в соответствующих  $C^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ ; здесь снова выбор разбиения единицы и локальных координат не играет существенной роли.

Очевидно, что  $C^{(s)} \subset H_s$  и оператор вложения ограничен в случаях ограниченной области  $V$  и  $\mathfrak{S}$ .

11° При  $s > (n/2) + t$ , где  $t \geq 0$ , пространство  $H_s$  содержится в  $C^{(t)}$ , причем оператор вложения  $H_s$  в  $C^{(t)}$  ограничен.

12° Все  $H_s$  — гильбертовы пространства. Соответствующие скалярные произведения легко выписываются; например, если норма определена формулой (32.3), то соответствующее скалярное произведение имеет вид

$$\sum_{|\alpha| \leq s} \int D^\alpha u \cdot \overline{D^\alpha v} dx. \quad (32.8)$$

13° При целом  $m > 0$  и любом  $s$  все элементы из  $H_{s-m}(\mathbb{R}^n)$  можно представить в виде

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u_\alpha, \quad \text{где } u_\alpha \in H_s(\mathbb{R}^n) \text{ и } \|u_\alpha\|_{\mathbb{R}^n, s} \leq C_{ms} \|u\|_{\mathbb{R}^n, s-m}.$$

В частности, элементы  $H_{-m}(\mathbb{R}^n)$  — это производные (в смысле обобщенных функций) порядка не выше  $m$  от функций из  $L^2(\mathbb{R}^n)$  и их линейные комбинации.

14° Пусть  $K(x, y)$  — функция из  $C_0^{(2m)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Тогда оператор, заданный формулой

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) u(y) dy \quad (u \in H_0(\mathbb{R}^n)), \quad (32.9)$$

продолжается до оператора, действующего ограниченным образом из  $H_{-m}(\mathbb{R}^n)$  в  $H_m(\mathbb{R}^n)$ .

Выведем это утверждение из 13°. Подставим в (32.9) сначала  $u = \sum D^\alpha u_\alpha$ , где  $u_\alpha \in H_m(\mathbb{R}^n)$  ( $|\alpha| \leq m$ ). Интегрируя по частям, получаем

$$Au(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(x, y) u_\alpha(y) dy,$$

где ядра  $K_\alpha(x, y) = (-1)^\alpha D_y^\alpha K(x, y)$  финитны и непрерывны по  $(x, y)$  вместе с производными по  $x$  до порядка  $m$  включительно. Пользуясь нормой (32.3), замечаем, что  $Au \in H_m(\mathbb{R}^n)$  и  $\|Au\|_{\mathbb{R}^n, m} \leq C \sum \|u_\alpha\|_{\mathbb{R}^n, 0}$ . Это утверждение сохраняется при  $u_\alpha \in H_0(\mathbb{R}^n)$ . Остается сослаться на 13° с  $s = 0$ .

Оператор, действующий на функциях, заданных в  $\mathbb{R}^n$  или на  $\mathfrak{S}$ , называется оператором порядка (не выше)  $\nu$

если он является ограниченным оператором из  $H_s$  в  $H_{s-\gamma}$  при любом  $s$ . Истинный порядок оператора — это нижняя грань его порядков. Операторы отрицательного порядка называются также *сглаживающими операторами*, операторы истинного порядка  $-\infty$  — *операторами порядка  $-\infty$* , или *бесконечно сглаживающими операторами*. Сглаживающие операторы на  $\mathcal{S}$  являются вполне непрерывными операторами в каждом  $H_s(\mathcal{S})$  в силу 2°. Бесконечно сглаживающие операторы на  $\mathcal{S}$  — это интегральные операторы с бесконечно гладкими ядрами. Интегральный оператор в  $\mathbb{R}^n$  с финитным бесконечно гладким ядром является бесконечно сглаживающим в  $\mathbb{R}^n$  в силу 14°.

Некоторые обобщения изложенных здесь определений и фактов на случай вектор-функций понадобятся нам и будут приведены в § 40.

### § 33. Псевдодифференциальные операторы

Мы будем пользоваться здесь определениями и обозначениями, введенными в § 32. Доказательства приведенных здесь утверждений и дальнейшей подробности можно найти, например, в [47], [65] и [24].

**1. Псевдодифференциальные операторы в  $\mathbb{R}^n$ .** Пусть  $a(x, \xi)$  — функция, определенная при  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Назовем ее *однородным символом порядка  $\gamma$* , если выполнены следующие условия: она положительно однородна по  $\xi$  степени  $\gamma$ , т. е.  $a(x, t\xi) = t^\gamma a(x, \xi)$  при  $t > 0$ , является бесконечно гладкой функцией (при  $\xi \neq 0$ ) и не зависит от  $x$  при достаточно большом  $|\xi|$ , т. е. при  $|\xi| \geq C = C(a)$ . Здесь  $\gamma$  — вещественное число.

Пусть сначала  $\gamma \geq 0$ . *Однородный ПДО  $a(x, D)$  с символом  $a(x, \xi)$*  определяется сначала на функциях  $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  (финитных и бесконечно гладких) следующей формулой ( $F^{-1}$  — обратное преобразование Фурье):

$$\begin{aligned} a(x, D) u(x) &= F_{\xi \rightarrow x}^{-1} a(x, \xi) (Fu)(\xi) = \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}_\xi^n} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \int_{\mathbb{R}_x^n} e^{-iy \cdot \xi} u(y) dy d\xi. \end{aligned} \quad (33.1)$$

Теперь пусть  $\gamma < 0$ . Тогда символ имеет особенность при  $\xi = 0$ . Пусть  $\theta(\xi)$  — любая бесконечно гладкая функ-

ция на  $\mathbb{R}^n$ , равная 0 в окрестности начала и 1 вне несколько большей окрестности. Положим  $a_\theta(x, \xi) = a(x, \xi) \theta(\xi)$  и определим оператор  $a_\theta(x, D)$  формулой вида (33.1) с заменой  $a$  на  $a_\theta$ . Двум разным функциям  $\theta_1, \theta_2$  отвечают операторы  $a_{\theta_1}(x, D), a_{\theta_2}(x, D)$ , разность которых есть бесконечно сглаживающий оператор. Мы позволим себе называть  $a_\theta(x, D)$  *однородным ПДО с символом  $a(x, \xi)$* .

Справедливо следующее утверждение (очевидное в случае, когда символ не зависит от  $x$ , в силу формулы (32.1)):

1°  $\|a(x, D) u(x)\|_{\mathbb{R}^n, s-\gamma} \leq C_s \|u(x)\|_{\mathbb{R}^n, s}$  при любом  $s$  с не зависящей от  $u(x)$  постоянной, если  $\gamma \geq 0$ ; аналогичное неравенство имеет место для  $a_\theta(x, D)$ , если  $\gamma < 0$ .

Это неравенство позволяет продолжить однородный ПДО по непрерывности со всюду плотного в  $H_s(\mathbb{R}^n)$  множества  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  на все  $H_s(\mathbb{R}^n)$  при любом  $s$  с сохранением этого неравенства. Теперь определим ПДО с *главным символом  $a(x, \xi)$*  формулой  $\mathcal{A} = a(x, D) + T$  при  $\gamma \geq 0$  и формулой  $\mathcal{A} = a_\theta(x, D) + T$  при  $\gamma < 0$ ; здесь  $T$  — любой оператор порядка  $\gamma - 1$ , играющий роль младшего члена (см. определение порядка в конце § 32).

2° ПДО  $\mathcal{A}$  с *главным символом  $a$  порядка  $\gamma$*  является оператором порядка  $\gamma$ . Если  $a \neq 0$ , то  $\gamma$  — истинный порядок этого оператора. Если же  $a \equiv 0$ , то это любой оператор, истинный порядок которого не выше  $\gamma - 1$ .

В дальнейшем вместо «ПДО с главным символом порядка  $\gamma$ » мы будем говорить «ПДО порядка  $\gamma$ ».

ПДО, которые нам предстоит рассматривать, допускают разложение  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\gamma + \dots + \mathcal{A}_{\gamma-q} + T_{\gamma-q-1}$  при любом натуральном  $q$ , где  $\mathcal{A}_j$  — не зависящий от  $q$  однородный ПДО с символом  $a_j(x, \xi)$  порядка  $j$  и  $T_{\gamma-q-1}$  — оператор порядка  $\gamma - q - 1$  (это тоже ПДО, так как  $q$  можно увеличить). Такому ПДО  $\mathcal{A}$  приписывают (*полный*) символ — формальный ряд  $a_\gamma(x, \xi) + \dots + a_{\gamma-q}(x, \xi) + \dots$  (вообще говоря, расходящийся). ПДО с нулевым полным символом имеет порядок  $-\infty$ .

Пример. Дифференциальный оператор

$$\mathcal{A}u(x) = \sum_{|\alpha| \leq \gamma} a_\alpha(x) D^\alpha \quad (33.2)$$



с коэффициентами  $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ , не зависящими от  $x$  при большом  $|x|$ , есть ПДО, главный и полный символы которого равны соответственно

$$\sum_{|\alpha|=\gamma} a_\alpha(x) \xi^\alpha \quad \text{и} \quad \sum_{|\alpha| \leq \gamma} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

где  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ .

В частности, оператор умножения на функцию  $a_0(x)$  есть однородный ПДО с символом  $a_0(x)$ , имеющий нулевой порядок. Более общие однородные ПДО нулевого порядка — это так называемые *сингулярные интегральные операторы*; нам не придется рассматривать их специально. Напротив, ПДО отрицательного порядка будут играть важную роль; им посвящен п. 2.

Следующие три утверждения составляют содержание нужной нам части *исчисления псевдодифференциальных операторов*. Первые два из них очевидны в случае символов, не зависящих от  $x$ ; третье легко проверяется в случае дифференциальных операторов.

3° (Теорема о композиции.) Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — ПДО с главными символами  $a, b$ . Тогда  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  — ПДО с главным символом  $ab$ .

Отсюда следует, что операторы  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}\mathcal{A}$  имеют один и тот же главный символ  $ab$ . Поэтому, если  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — ПДО порядков  $\gamma_1, \gamma_2$ , то  $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$  — оператор порядка  $\gamma_1 + \gamma_2 - 1$ .

4° Пусть  $\mathcal{A}$  — ПДО с главным символом  $a$ . Тогда оператор  $\mathcal{A}^*$ , формально сопряженный к  $\mathcal{A}$  относительно скалярного произведения в  $H_0$ , есть ПДО с главным символом  $\bar{a}$ .

Формальная сопряженность понимается в следующем смысле:  $(\mathcal{A}u, v)_{\mathbf{R}^n} = (u, \mathcal{A}^*v)_{\mathbf{R}^n}$ , где  $(u, v)_{\mathbf{R}^n} = \int_{\mathbf{R}^n} u \bar{v} dx$ ,

при  $u, v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ . С учетом предложений 2°, 4° первое из этих равенств верно при  $u, v \in H_\beta(\mathbf{R}^n)$ , где  $\beta = \max(0, \gamma)$ , а  $\gamma$  — порядок операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$ . Но можно придать ему смысл при  $u \in H_{s+\gamma}, v \in H_{-s}$  с любым  $s$  (ср. конец п. 2 § 34).

5° При бесконечно гладком невырожденном преобразовании координат  $x = x(\bar{x})$  ПДО  $\mathcal{A}$  в  $\mathbf{R}_x^n$  с главным

символом  $a(x, \xi)$  переходит в ПДО  $\bar{\mathcal{A}}$  в  $\mathbf{R}_{\bar{x}}^n$  с главным символом

$$\bar{a}(\bar{x}, \bar{\xi}) = a \left[ x(\bar{x}), \left( \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)^{-1} \bar{\xi} \right], \quad (33.3)$$

где  $\partial x / \partial \bar{x}$  — матрица Якоби и штрих обозначает транспонирование. Более точно, если  $\varphi(x)$  и  $u(x)$  — функции из  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ , равные 0 вне области, в которой преобразование задано и невырождено, то после вычисления  $\varphi(x)(\mathcal{A}u)(x)$  и подстановки в его результат  $x = x(\bar{x})$  получается  $\varphi[x(\bar{x})](\bar{\mathcal{A}}u)[x(\bar{x})]$ , где  $u = u[x(\bar{x})]$ .

2. **Интегральные операторы с ядрами, имеющими слабую особенность.** При рассмотрении задач дифракции существенную роль будет играть следующий факт: интегральные операторы на поверхности  $S$  в  $\mathbf{R}^3$  или на кривой  $S$  в  $\mathbf{R}^2$ , порождаемые потенциалами простого и двойного слоя для уравнения Гельмгольца (в частности, оператор (30.5)), — это ПДО порядка  $-1$  (см. определения ниже, в п. 3). Это будет показано в §§ 36 и 37. Будут вычислены также главные символы операторов, отвечающих потенциалам простого слоя. Для подготовки к этому рассмотрим сначала интегральные операторы общего вида в  $\mathbf{R}^n$  с ядрами, *однородными в обобщенном смысле порядка  $\delta > -n$* :

$$\mathcal{A}u(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x, x-y) \vartheta(x-y) u(y) dy. \quad (33.4)$$

Здесь  $\vartheta(y)$  — функция из  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ , равная 1 в окрестности начала. На функцию  $K(x, y)$  накладываются следующие условия:

1) Если  $\delta$  не является целым неотрицательным числом, то  $K(x, y)$  положительно однородна по  $y$  степени  $\delta$  в обычном смысле:  $K(x, ty) = t^\delta K(x, y)$  при  $t > 0$ . Кроме того,  $K(x, y)$  — бесконечно гладкая при  $y \neq 0$  функция, равная 0 при  $|x| \geq C = C_K$ .

2) Если же  $\delta$  — целое неотрицательное число, то

$$K(x, y) = K_1(x, y) + \sum_{|\alpha|=\delta} b_\alpha(x) y^\alpha \ln |y|. \quad (33.5)$$

Здесь  $K_1$  обладает такими же свойствами, как  $K$  в 1), а  $b_\alpha(x)$  — функции из  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ .

В [65] показано, что при этих условиях (33.4) — ПДО порядка  $\gamma = -n - \delta$ . Его главный символ  $a(x, \xi)$  вычисляется как преобразование Фурье от ядра  $K(x, y)$  при фиксированном  $x$ . Точнее, он совпадает с этим преобразованием Фурье, понимаемым в смысле обобщенных функций, при  $\xi \neq 0$ <sup>1)</sup>. Более того, это полный символ оператора (33.4), т. е. это однородный оператор с точностью до бесконечно сглаживающего слагаемого. Не исключено, что этот символ — тождественный нуль: так будет в случае 2), если  $K(x, y) = K_1(x, y) = \sum_{|\alpha|=\delta} c_\alpha(x) y^\alpha$ , где  $c_\alpha(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Очевидно, что в этом случае (33.4) — бесконечно сглаживающий оператор.

Основные для дальнейшего примеры:

$$\begin{aligned} K(x, y) &= c(x) |y|^l & (n=2) \\ K(x, y) &= b(x) |y|^m \ln |y| & (n=1), \end{aligned} \quad (33.6)$$

и где  $l$  — нечетное число, не меньшее  $-1$ , а  $m$  — четное число, не меньшее  $0$ ,  $c$  и  $b$  — финитные бесконечно гладкие функции соответственно в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^1$ . При четном  $l$  первая из функций (33.6) определяет по формуле (33.4) бесконечно сглаживающий оператор.

Продолжая подготовку к §§ 36, 37, мы рассмотрим теперь интегральные операторы с неоднородными ядрами довольно специального вида. Будет установлено четыре вспомогательных предложения.

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{A}u(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a(t, \tilde{t}) |x(t) - x(\tilde{t})|^{-q} u(\tilde{t}) d\tilde{t}. \quad (33.7)$$

Здесь  $a(t, \tilde{t}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1})$ . Нам будет удобно записать эту функцию в виде  $a(t, \tilde{t}) = a(t, t + \tau) = a_1(t, \tau)$ , где  $\tau = \tilde{t} - t$ . Функция  $a_1(t, \tau)$  также принадлежит

<sup>1)</sup> Это означает, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) \overline{\psi(y)} dy = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \xi) \overline{\varphi(\xi)} d\xi,$$

если  $\varphi(\xi)$  принадлежит  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  и равна  $0$  в окрестности начала, а  $\psi(y)$  — обратное преобразование Фурье от  $\varphi(\xi)$ .

$C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1})$ ; пусть она равна  $0$  вне множества  $\{(t, \tau); |t| < C_1, |\tau| < C_2\}$ . Пусть  $p$  — максимальное целое неотрицательное число, такое, что  $D_t^p a_1(t, \tau) = 0$  при  $\tau = 0$  и  $|\alpha| < p$ . Если  $p \geq 1$ , то это означает, что  $a_1(t, \tau)$  имеет при  $\tau = 0$  нуль порядка  $p$ , а если  $p = 0$  — что  $a_1(t, 0) \neq 0$ . Далее,  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , где все  $x_j(t)$  принадлежат  $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ <sup>1)</sup>. Векторы  $\partial x(t)/\partial t_j$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ) предположим попарно ортогональными и всюду отличными от  $0$ . Наконец,  $q$  — целое положительное число, причем  $p - q > -(n-1)$ . Это неравенство обеспечивает существование интеграла (33.7). Мы можем ограничиться случаями  $n=2$  и  $n=3$ , хотя следующее предложение верно при любом  $n \geq 2$ :

Предложение 1. При указанных условиях  $\mathcal{A}$  — ПДО порядка  $\gamma = -(n-1) - (p-q)$  в  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Доказательство. Исследуем ядро оператора (33.7). Пусть для определенности  $n=3$ . По формуле Тейлора

$$x_j(\tilde{t}) - x_j(t) = \frac{\partial x_j(t)}{\partial t_1} \tau_1 + \frac{\partial x_j(t)}{\partial t_2} \tau_2 + r_j(t, \tau), \quad (33.8)$$

где  $r_j(t, \tau)$  — бесконечно гладкая функция (вместе с остальными членами в этой формуле), удовлетворяющая неравенству  $|r_j(t, \tau)| \leq C_3 |\tau|^2$  при  $|t| \leq C_1$ ,  $|\tau| \leq C_2$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Векторы  $\partial x(t)/\partial t_1$  и  $\partial x(t)/\partial t_2$ , по предположению, ортогональны. Обозначим их длины через  $h_1(t)$  и  $h_2(t)$ ; они отличны от  $0$ . Из (33.8) получаем

$$|x(t) - x(\tilde{t})|^2 = h_1^2(t) \tau_1^2 + h_2^2(t) \tau_2^2 + R(t, \tau), \quad (33.9)$$

где  $R(t, \tau)$  — бесконечно гладкая функция, удовлетворяющая неравенству  $|R(t, \tau)| \leq C_4 |\tau|^3$  при  $|t| \leq C_1$ ,  $|\tau| \leq C_2$ . Обозначим через  $H(t, \tau)$  сумму первых двух членов справа в (33.9). Эта функция не обращается в  $0$  при  $|t| \leq C_1$ ,  $\tau \neq 0$ . Из (33.9) следует, что

$$|x(t) - x(\tilde{t})|^{-q} = H^{-q/2} [1 + R_1]^{-q/2},$$

где  $R_1 = RH^{-1}$  и  $|R_1(t, \tau)| \leq C_5 |\tau|$  при  $|t| \leq C_1$ ,  $0 < |\tau| < C_2$ . При дополнительном предположении, что

<sup>1)</sup> В § 36 и далее  $x = x(t)$  будет параметрическим представлением участка  $(n-1)$ -мерной поверхности в  $\mathbb{R}^n$ .

$C_5|\tau| \leq C_6 < 1$ , мы можем разложить  $[1 + R_1]^{-q/2}$  в биномиальный ряд. Пусть  $b(\tau)$  — бесконечно гладкая функция, равная 1 в окрестности начала и 0 при  $C_5|\tau| \geq C_6$ ; тогда

$$b(\tau) |x(t) - x(\tilde{t})|^{-q} = b(\tau) \left[ H^{-q/2} + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j R^j H^{-j-(q/2)} \right],$$

где  $\gamma_j$  — некоторые числа. При  $j > q$  функция  $R^j H^{-j-(q/2)}$  станет непрерывной, включая точки с  $\tau = 0$ , если положить эту функцию равной 0 при  $\tau = 0$ ; с ростом  $j$  гладкость этой функции будет возрастать. С другой стороны, бесконечно гладкую функцию  $R^j(t, \tau)$  можно разложить по формуле Тейлора по степеням  $\tau$  до любого наперед заданного порядка; разложение будет начинаться с членов порядка  $3j$ . Аналогичное разложение допускает  $a_1(t, \tau)$ ; оно начинается с членов порядка  $p$ . Это позволяет получить при любом натуральном  $m > p - q$  следующую формулу:

$$b(\tau) a_1(t, \tau) |x(t) - x(\tilde{t})|^{-q} = b(\tau) \left[ \sum_{l=p-q}^m K_l(t, \tau) + R^{(m)}(t, \tau) \right], \quad (33.10)$$

где  $K_l(t, \tau)$  — бесконечно гладкие при  $\tau \neq 0$  функции, положительно однородные степени  $l$  по  $\tau$ , а  $R^{(m)}(t, \tau) \in C^{(m)}(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^{n-1})$ ; все эти функции равны 0 при  $|t| \geq C_1$ . Ясно, что если в (33.10) заменить  $b(\tau)$  на  $1 - b(\tau)$ , то получится бесконечно гладкая функция. Согласно сказанному в начале этого пункта, мы получаем разложение

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\nu + \mathcal{A}_{\nu-1} + \dots + \mathcal{A}_{-m-(n-1)} + T^{(m)},$$

где  $\mathcal{A}_j$  — ПДО порядка  $j$ , а  $T^{(m)}$  — интегральный оператор с ядром из  $C_0^{(m)}(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^{n-1})$ . При этом  $\mathcal{A}_j$  не зависят от  $m$ . Возьмем любое  $s$ ; при достаточно большом  $m$  мы получим, используя предложение 2° настоящего параграфа и предложение 14° из § 32, что  $\mathcal{A} - \mathcal{A}_\nu$  действует ограниченным образом из  $H_s(R^{n-1})$  в  $H_{s-\nu-1}(R^{n-1})$ . Значит  $\mathcal{A} - \mathcal{A}_\nu$  — оператор порядка  $\nu - 1$ . Доказательство закончено.

Полный символ оператора  $\mathcal{A}$  складывается из символов операторов  $\mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_{\nu-1}, \dots$ . Главный символ оператора  $\mathcal{A}$  совпадает с символом оператора  $\mathcal{A}_\nu$ , который, как это видно из доказательства, является интегральным оператором с ядром

$$b(\tau) \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = p} \frac{\tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial \tau_1^{\alpha_1} \partial \tau_2^{\alpha_2}} a_1(t, 0) \cdot H^{-q/2}(t, \tau), \quad (33.11a)$$

где  $\tau = \tilde{t} - t$ .

Предложение 2. Пусть  $n = 3$ ,  $q = 1$  и  $a(t, t) \neq 0$  (т. е.  $p = 0$ ). Тогда оператор (33.7) имеет главный символ

$$2\pi a(t, t) h_1^{-1}(t) h_2^{-1}(t) [h_1^{-2}(t) \xi_1^2 + h_2^{-2}(t) \xi_2^2]^{-1/2}. \quad (33.11b)$$

Доказательство. Функция  $|t|^{-1}$  на плоскости имеет преобразование Фурье  $2\pi |\xi|^{-1}$  в смысле обобщенных функций (см. [5], гл. II, § 3). Отсюда нужный результат получается заменой переменных.

Предложение 3. При  $n = 2$  оператор

$$\mathcal{A}u(t) = \int_{\mathbf{R}^1} a(t, \tilde{t}) \ln |x(t) - x(\tilde{t})| u(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (33.12)$$

есть ПДО порядка  $-p - 1$ .

Здесь  $t, \tilde{t} \in \mathbf{R}^1$ ,  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ , и предположения относительно  $a(t, \tilde{t})$ ,  $p$  и  $x(t)$  — такие же, как перед формулировкой предложения 1. Доказательство аналогично доказательству предложения 1; разница только в том, что  $H^{1/2}(t, \tau) = h(t) |\tau|$ , где  $h(t) = |x'(t)|$ , и вместо биномиального ряда используется ряд для  $\ln [1 + R_1]$ .

Главный символ оператора (33.12) совпадает с символом интегрального оператора  $\mathcal{A}_\nu$  ( $\nu = -p - 1$ ), имеющего ядро

$$b(\tau) \frac{\tau^p}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \tau^p} a_1(t, 0) \ln |\tau|, \quad \text{где } \tau = \tilde{t} - t. \quad (33.13)$$

Предложение 4. При  $p = 0$  главный символ оператора (33.12) равен

$$-\pi a(t, t) |\xi|^{-1}. \quad (33.14)$$

Это следует из того, что преобразование Фурье обобщенной функции  $\ln|\tau|$  на прямой равно  $-\pi|\xi|^{-1}$  вне начала координат (см. [5], гл. II, § 2, и гл. I, § 4).

**3. Псевдодифференциальные операторы на поверхности  $\mathcal{S}$ .** Пусть  $\mathcal{S}$  имеет тот же смысл, что и в п. 1 § 32. ПДО  $\mathcal{A}$  порядка  $s$  на  $\mathcal{S}$  определяется как линейный оператор, заданный первоначально на  $C^\infty(\mathcal{S})$  и удовлетворяющий следующим двум условиям. Пусть  $\omega_1, \omega_2$  — функции из  $C^\infty(\mathcal{S})$ . Тогда

I) если  $\omega_1, \omega_2$  имеют непересекающиеся носители, то  $\omega_1 \mathcal{A}(\omega_2 u)$  — оператор порядка  $\gamma - 1$ ;

II) если носители функций  $\omega_1, \omega_2$  лежат в одной координатной окрестности, то  $\omega_1 \mathcal{A}(\omega_2 u) = \omega_1 \tilde{\mathcal{A}}(\omega_2 u)$ , где справа функции записаны в соответствующих локальных координатах и  $\tilde{\mathcal{A}}$  — ПДО порядка  $\gamma$  в соответствующем  $\mathbb{R}^n$ .

Используя разбиение единицы  $\{\kappa_j\}$  (см. п. 1 § 32), можно представить оператор  $\mathcal{A}$  формулой

$$\mathcal{A}u(x) = \sum_{j,l} \kappa_j \mathcal{A}(\kappa_l u). \quad (33.15)$$

Можно принять, что носители любых двух функций  $\kappa_j, \kappa_l$  либо не пересекаются, либо лежат в одной координатной окрестности, и тогда каждое слагаемое справа имеет вид, указанный в I) или II). Отсюда нетрудно вывести, что  $\mathcal{A}$  продолжается до оператора, действующего ограниченным образом из  $H_s(\mathcal{S})$  в  $H_{s-\gamma}(\mathcal{S})$  при любом  $s$ , т. е. до оператора порядка  $\gamma$  на  $\mathcal{S}$ .

Предложение 5° показывает, что для ПДО  $\mathcal{A}$  порядка  $\gamma$  определен главный символ  $a$  как функция на так называемом *касательном расслоении*  $T^*\mathcal{S}$  (см., например, [1], гл. 8), состоящем из *касательных векторов*<sup>1)</sup>. Поясним эти термины и заодно рассмотрим *касательное расслоение*  $T\mathcal{S}$ , которое понадобится в § 40 (см. [1], гл. 4). Последнее состоит из всевозможных *касательных векторов*, выходящих из точек на  $\mathcal{S}$  и касающихся  $\mathcal{S}$ . (При  $n = 1, 2$  можно представлять себе их

<sup>1)</sup> Точнее, символ задан на ненулевых кокасательных векторах.

стрелками.) Касательные векторы, выходящие из фиксированной точки на  $\mathcal{S}$ , образуют *касательное пространство* к  $\mathcal{S}$  в этой точке. Это линейное пространство, и можно рассмотреть линейные однородные функции от его элементов. Эти функции и называются *кокасательными векторами*. Если на  $\mathcal{S}$  введены локальные координаты  $t = (t_1, \dots, t_n)$ , то любой касательный к  $\mathcal{S}$  вектор, выходящий из точки на  $\mathcal{S}$  с координатами  $t$ , задается набором  $2n$  чисел  $(t, \eta) = (t_1, \dots, t_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$ , которые можно рассматривать как локальные координаты в  $T\mathcal{S}$ . Линейная однородная функция от  $\eta$  (при фиксированном  $t$ ) имеет вид  $\xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n$ . Поэтому кокасательный вектор тоже задается набором  $2n$  чисел  $(t, \xi) = (t_1, \dots, t_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ , которые можно рассматривать как локальные координаты в  $T^*\mathcal{S}$ . Однако законы преобразования координат в  $T\mathcal{S}$  и  $T^*\mathcal{S}$  разные. Если локально на  $\mathcal{S}$  мы переходим от координат  $t$  к координатам  $\tilde{t} = \tilde{t}(t)$ , то набор  $(t, \eta)$  переходит в  $(\tilde{t}, \tilde{\eta}) = (\tilde{t}(t), [\partial \tilde{t}(t)/\partial t] \eta)$  (где  $\partial \tilde{t}/\partial t$  — матрица Якоби), а набор  $(t, \xi)$  переходит в  $(\tilde{t}, \tilde{\xi}) = (\tilde{t}(t), [\partial \tilde{t}(t)/\partial t]^{-1} \xi)$ . Отсюда и из формулы (33.3) ясно, что главный символ ПДО — функция на  $T^*\mathcal{S}$ .

Локально главный символ записывается как функция  $a(t, \xi)$ , определенная и бесконечно гладкая при  $\xi \neq 0$ , положительно однородная степени  $\gamma$ . Если не выходить за пределы координатной окрестности, то можно определить также полный символ (ср. п. 1).

Для ПДО на  $\mathcal{S}$  остаются в силе предложения 2°, 3° и 4°<sup>1)</sup>, если скалярное произведение определить формулой

$$(u, v)_{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} u \bar{v} d\mathcal{S}. \quad (33.16)$$

Мы могли бы «переделать» примеры ПДО из п. 2 в примеры ПДО на поверхности, но будет удобнее отложить это до §§ 36 и 37. Следует учесть, что там обозначения будут немного другими:  $S$  — поверхность в  $\mathbb{R}^n$ . В § 40 понадобятся и будут рассмотрены матричные ПДО.

<sup>1)</sup> См. также конец п. 2 § 34.

### § 34. Эллиптические псевдодифференциальные операторы и граничные задачи

1. Эллиптические псевдодифференциальные операторы (см. [65]; [24], гл. III, и ссылки в [24]). Пусть  $\mathcal{A}$  — ПДО порядка  $\gamma$  на поверхности  $\mathfrak{S}$ . Он называется эллиптическим, если его главный символ  $a$  не обращается в 0 (на ненулевых кокасательных векторах). Для такого оператора справедливы следующие утверждения:

1°  $\|u\|_{\mathfrak{S}, s+\gamma} \leq C_s (\|\mathcal{A}u\|_{\mathfrak{S}, s} + \|u\|_{\mathfrak{S}, s+\gamma-1})$  при  $u \in H_{s+\gamma}(\mathfrak{S})$  для любого  $s$  с не зависящей от  $u$  постоянной  $C_s$ .

Здесь  $\|u\|_{\mathfrak{S}, s+\gamma-1}$  можно заменить на  $\|u\|_{\mathfrak{S}, s'}$  с любым фиксированным  $s' < s + \gamma$ . Отметим еще, что если из  $\mathcal{A}u = 0$  следует  $u = 0$ , т. е. имеет место единственность, то неравенство усиливается:  $\|u\|_{\mathfrak{S}, s+\gamma} \leq C'_s \|\mathcal{A}u\|_{\mathfrak{S}, s}$ .

2° (Теорема о гладкости.) Если  $\mathcal{A}u = f$ ,  $u \in H_{s+\gamma}(\mathfrak{S})$ , но  $f \in H_{s+t}(\mathfrak{S})$ , где  $t > 0$ , то  $u \in H_{s+t+\gamma}(\mathfrak{S})$ . (Если  $f$  обладает дополнительной гладкостью, то и  $u$  обладает дополнительной гладкостью.) В частности, если  $f \in C^\infty(\mathfrak{S})$ , то  $u \in C^\infty(\mathfrak{S})$  (см. 11° в § 32). Справедливо также аналогичное утверждение локального характера; например, если  $u \in H_s(\mathfrak{S})$ , но  $f \in C^\infty$  в окрестности некоторой точки на  $\mathfrak{S}$ , то  $u \in C^\infty$  в этой окрестности.

3° Подпространство  $\text{Ker } \mathcal{A} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^1(0)$  решений уравнения  $\mathcal{A}u = 0$  имеет конечную размерность  $l$ .

В силу 2°  $\text{Ker } \mathcal{A}$  состоит из бесконечно гладких функций.

Оператор  $A^*$  (см. § 33) эллиптичен вместе с  $\mathcal{A}$ , так что для  $\mathcal{A}^*$  справедливы аналогичные утверждения. Пусть  $l' = \dim \text{Ker } A^*$  и  $v_1, \dots, v_{l'}$  — базис в  $\text{Ker } \mathcal{A}^*$ .

4° При  $f \in H_s(\mathfrak{S})$  ( $s \geq 0$ ) для разрешимости уравнения  $\mathcal{A}u = f$  в  $H_{s+\gamma}(\mathfrak{S})$  необходимо и достаточно, чтобы выполнены условия  $(f, v_j)_{\mathfrak{S}} = 0$  ( $j = 1, \dots, l'$ ).

Разность  $\kappa = l - l'$  называется индексом оператора  $\mathcal{A}$ . Индекс не меняется при добавлении к  $\mathcal{A}$  любого оператора порядка меньше  $\gamma$ .

5° Если  $l = l' = 0$ , то существует ПДО  $\mathcal{A}^{-1}$  порядка  $-\gamma$ . Если  $a = \bar{a}$ , то индекс оператора  $\mathcal{A}$  равен 0 и существование  $A^{-1}$  следует из  $l = 0$ .

Доказательства утверждений 1° — 4° основаны на возможности построить ПДО  $\mathcal{B}$  порядка  $-\gamma$  с главным символом  $a^{-1}$ . В силу предложения 3° из § 33 операторы  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  «почти обратны»:  $\mathcal{A}\mathcal{B} = I + T_1$ ,  $\mathcal{B}\mathcal{A} = I + T_2$ , где  $T_1$  и  $T_2$  — сглаживающие и, значит, вполне непрерывные операторы (см. конец § 32).

Отметим также, что оценка в 1° на самом деле эквивалентна эллиптичности и что для эллиптических операторов в  $\mathbb{R}^n$  справедливы утверждения 1° и 2°.

Замечание. Если  $\mathcal{A}$  — эллиптический ПДО положительного порядка  $\gamma$ , то его можно рассматривать не только как ограниченный оператор из  $H_{s+\gamma}(\mathfrak{S})$  в  $H_s(\mathfrak{S})$ , но и как неограниченный оператор в  $H_s(\mathfrak{S})$  с областью определения  $\mathfrak{D}_s(\mathcal{A}) = H_{s+\gamma}(\mathfrak{S})$ . Она всюду плотна в  $H_s(\mathfrak{S})$ , так как даже  $C^\infty(\mathfrak{S})$  всюду плотно в  $H_s(\mathfrak{S})$ .

Кроме того,  $\mathcal{A}$  — замкнутый оператор в  $H_s(\mathfrak{S})$ : если  $u_n \in \mathfrak{D}_s(\mathcal{A})$ ,  $u_n \rightarrow u$ ,  $\mathcal{A}u_n \rightarrow f$  в  $H_s(\mathfrak{S})$ , то  $u \in \mathfrak{D}_s(\mathcal{A})$  и  $\mathcal{A}u = f$ . Действительно,  $\mathcal{A}u_n \rightarrow \mathcal{A}u$  в  $H_{s-\gamma}(\mathfrak{S})$  (см. 2° в § 33); значит,  $\mathcal{A}u = f$  и  $u \in H_{s+\gamma}(\mathfrak{S})$  в силу 2°.

Можно также показать, что если рассматривать  $\mathcal{A}$  и формально сопряженный к нему оператор  $\mathcal{A}^*$  (см. пп. 1 и 3 в § 33) как операторы в  $H_0(\mathfrak{S})$  с областью определения  $H_\gamma(\mathfrak{S})$ , то они сопряжены в смысле теории операторов в гильбертовом пространстве (см., например, [2], гл. IV, п. 44).

2. Самосопряженные эллиптические операторы. В этом пункте мы будем предполагать, что  $\mathcal{A}_0$  — эллиптический ПДО на  $\mathfrak{S}$ , для определенности порядка 1, совпадающий с  $\mathcal{A}_0^*$ . Согласно сказанному в конце предыдущего пункта,  $\mathcal{A}_0$  как оператор в  $H_0(\mathfrak{S})$  с  $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_0) = H_1(\mathfrak{S})$  является самосопряженным, так что, в частности, спектр  $\Sigma(\mathcal{A}_0)$  лежит на вещественной оси.

6°  $\mathcal{A}_0$  как оператор в  $H_s(\mathfrak{S})$  с областью определения  $H_{s+1}(\mathfrak{S})$  имеет дискретный спектр, не зависящий от  $s$  ( $-\infty < s < \infty$ ).

Действительно, пусть  $\text{Im } \mu \neq 0$ . Тогда  $\mu$  не является собственным значением оператора  $\mathcal{A}_0$ . Так как  $a = \bar{a}$  (см. § 33), то из 5° вытекает, что существует оператор  $(\mathcal{A}_0 - \mu I)^{-1}$ , имеющий порядок  $-1$  и, значит, вполне непрерывный в каждом  $H_s(\mathfrak{S})$  (см. конец § 32). Отсюда и следует, что  $\mathcal{A}_0$  — оператор с дискретным спектром

(см. п. 4 в § 31). Собственные функции оператора  $\mathcal{A}_0$  лежат в  $C^\infty(\mathfrak{E})$  (в силу  $2^\circ$ ), поэтому спектр не зависит от  $s$ , чем и заканчивается доказательство.

В силу эллиптичности главный символ  $a = \bar{a}$  имеет ненулевые вещественные значения (на ненулевых касательных векторах). Предположим дополнительно, что  $a > 0$ . Можно доказать, что тогда спектр  $\Sigma(\mathcal{A}_0)$  лежит на некотором луче  $\{\mu; \mu > \mu_0\}$ . Пусть для простоты  $\mu_0 > 0$ .

Для оператора  $\mathcal{A}_0$  определены степени  $\mathcal{A}_0^s$  ( $-\infty < s < \infty$ ; определение напоминает в следующем пункте). В [66] показано, что  $\mathcal{A}_0^s$  — эллиптический ПДО порядка  $s$  (с главным символом  $a^s$ ). Он взаимно однозначно и непрерывно в обе стороны отображает  $H_s(\mathfrak{E})$  на  $H_0(\mathfrak{E})$ :  $\|u\|_{\mathfrak{E}, s} \leq C_1 \| \mathcal{A}_0 u \|_{\mathfrak{E}, 0} \leq C_2 \|u\|_{\mathfrak{E}, s}$ . Положим

$$\langle u, v \rangle_{\mathfrak{E}, s} = (\mathcal{A}_0^s u, \mathcal{A}_0^s v)_{\mathfrak{E}}. \quad (34.1)$$

Эта билинейная форма является новым скалярным произведением в  $H_s(\mathfrak{E})$ . Очевидно, что  $\langle \mathcal{A}_0 u, v \rangle_{\mathfrak{E}, s} = \langle u, \mathcal{A}_0 v \rangle_{\mathfrak{E}, s}$  при  $u, v \in H_{s+1}(\mathfrak{E})$ . Имеет место следующее предложение:

$7^\circ$   $\mathcal{A}_0$  как оператор в  $H_s(\mathfrak{E})$  с областью определения  $H_{s+1}(\mathfrak{E})$  является самосопряженным в  $H_s(\mathfrak{E})$  относительно скалярного произведения (34.1). Соответствующая норма  $\langle u, u \rangle_{\mathfrak{E}, s}^{1/2}$  эквивалентна норме  $\|u\|_{\mathfrak{E}, s}$ .

Условимся обозначать через  $\nu_j$  собственные значения оператора  $\mathcal{A}_0$  ( $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$ ) и через  $N(t)$  число собственных значений на интервале  $(\mu_0, t)$  (с учетом алгебраической кратности). Тогда справедлива следующая важная формула:

$$N(t) = C_a t^n + O(t^{n-1}) \quad (t \rightarrow +\infty), \quad (34.2a)$$

где  $C_a = (2\pi)^{-n} V_a$ ,  $V_a$  — «объем» области в  $T^*\mathfrak{E}$ , определяемой неравенством  $a < 1$  (см. [59] и обзор [33]). Из (34.2a) нетрудно вывести, что

$$\nu_j = C_a' j^{1/n} + O(1) \quad (j \rightarrow \infty), \quad (34.2b)$$

где  $C_a' = 2\pi V_a^{-1/n}$ .

Отметим еще, что, фиксируя  $\mathcal{A}_0$ , форме  $(f, g)_{\mathfrak{E}}$  можно придать следующий смысл при  $f \in H_s(\mathfrak{E})$ ,  $g \in H_{-s}(\mathfrak{E})$  с любым  $s$ :  $(f, g)_{\mathfrak{E}} = (\mathcal{A}_0^s f, \mathcal{A}_0^{-s} g)_{\mathfrak{E}}$ . Утверждение  $4^\circ$  сохраняет силу для  $s < 0$ . Кроме того, если  $\mathcal{B}, \mathcal{B}^*$  — формально сопряженные ПДО порядка  $\nu$ , то  $(\mathcal{B}f, g)_{\mathfrak{E}} = (f, \mathcal{B}^*g)_{\mathfrak{E}}$  при  $f \in H_{s+\nu}(\mathfrak{E})$ ,  $g \in H_{-s}(\mathfrak{E})$  с любым  $s$ .

**3. Абстрактный аналог шкалы  $H_s(\mathfrak{E})$**  (см., например, [49]). Пусть  $\mathfrak{H}$  — сепарабельное гильбертово пространство и  $L_0$  — самосопряженный оператор с дискретным спектром в  $\mathfrak{H}$ ;  $\{h_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) — ортонормированный базис в  $\mathfrak{H}$ , составленный из собственных векторов оператора  $L_0$ ;  $L_0 h_j = \nu_j h_j$ . Будем считать, что  $0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$ . Мы введем шкалу гильбертовых пространств  $\mathfrak{H}_s$ , связанную с оператором  $L_0$ . В § 35 она будет использована для формулировки признаков базисности системы корневых векторов несамосопряженного оператора  $L$ , близкого к  $L_0$ . Она более удобна, чем одно гильбертово пространство  $\mathfrak{H}$ , если иметь в виду приложения к псевдодифференциальным операторам на замкнутой поверхности (ср. [28], [28a]).

Напомним, что вещественные степени  $L_0^s$  оператора  $L_0$  определяются следующим образом:

$$\text{если } f = \sum_{j=1}^{\infty} b_j h_j, \text{ то } L_0^s f = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \nu_j^s h_j, \quad (34.3)$$

причем если  $s > 0$ , то область определения  $\mathfrak{D}(L_0^s)$  состоит из тех  $f$ , для которых последний ряд сходится в  $\mathfrak{H}$ .

Положим  $\mathfrak{H}_s = \mathfrak{D}(L_0^s)$  при  $s \geq 0$ . Тогда  $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$ ; при  $s > 0$  подпространство  $\mathfrak{H}_s$  в  $\mathfrak{H}$  является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(f, g)_s = (L_0^s f, L_0^s g). \quad (34.4a)$$

Если  $g = \sum c_j h_j$ , то эту формулу можно переписать в виде

$$(f, g)_s = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{2s} b_j \bar{c}_j. \quad (34.4b)$$

Норму  $(f, f)_s^{1/2}$  обозначим  $\|f\|_s$ .

Для  $s < 0$  определим пространство  $\mathfrak{H}_s$  как состоящее из формальных рядов  $f \sim \sum b_j h_j$  (не обязательно сходящихся в  $\mathfrak{H}$ ) с конечной нормой  $\|f\|_s = \{\sum v_j^{2s} |b_j|^2\}^{1/2}$ . Это также гильбертово пространство со скалярным произведением (34.46).

Если  $L_0 = \mathcal{A}_0$  — самосопряженный ПДО первого порядка на поверхности  $\mathfrak{S}$  с положительными собственными значениями, то  $\mathfrak{H}_s = H_s(\mathfrak{S})$ . В общем случае шкала  $\mathfrak{H}_s$  зависит, конечно, от  $L_0$ . Но эта шкала и оператор  $L_0$  в ней сохраняют ряд свойств шкалы  $H_s(\mathfrak{S})$  и оператора  $\mathcal{A}_0$  (см. п. 2). Перечислим некоторые свойства. Под  $\mathfrak{H}_\infty$  будем понимать пересечение всех  $\mathfrak{H}_s$ ; это пространство «бесконечно гладких» векторов.

1)  $\mathfrak{H}_{s_1} \supset \mathfrak{H}_{s_2}$  при  $s_1 < s_2$ , причем оператор вложения вполне непрерывен.

2) При любых вещественных  $\gamma$  и  $s$  оператор  $L_0^\gamma$  взаимно однозначно и непрерывно отображает  $\mathfrak{H}_{s+\gamma}$  на  $\mathfrak{H}_s$ .

3) Если  $L_0 f = g$ ,  $f \in \mathfrak{H}_{s+1}$ ,  $g \in \mathfrak{H}_{s+t}$ ,  $t > 0$ , то  $f \in \mathfrak{H}_{s+t+1}$ . В частности, собственные векторы оператора  $L_0$  принадлежат  $\mathfrak{H}_\infty$ .

4) В любом  $\mathfrak{H}_s$  оператор  $L_0$  с  $\mathfrak{D}(L_0) = \mathfrak{H}_{s+1}$  является самосопряженным оператором с дискретным спектром. Его собственные значения и собственные векторы не зависят от  $s$ .

Эти утверждения несложно выводятся из определения пространства  $\mathfrak{H}_s$ . Чтобы проверить 1), нужно показать, что образ ограниченного множества из  $\mathfrak{H}_s$  имеет конечную  $\varepsilon$ -сеть в  $\mathfrak{H}_{s_1}$ .

Пусть  $L_1$  — линейный оператор, действующий в  $\mathfrak{H}_\infty$ . Назовем его оператором порядка  $\gamma$  в шкале  $\mathfrak{H}_s$ , если  $\|L_1 f\|_s \leq C_s \|f\|_{s+\gamma}$  при  $f \in \mathfrak{H}_\infty$  для любого  $s$ . Такой оператор  $L_1$  продолжается до оператора, действующего ограниченным образом из  $\mathfrak{H}_{s+\gamma}$  в  $\mathfrak{H}_s$  при любом  $s$ . Если  $\gamma > 0$ , то  $L_1$  можно рассматривать также как неограниченный оператор в  $\mathfrak{H}_s$  с областью определения  $\mathfrak{H}_{s+\gamma}$ .

В § 35 мы рассмотрим оператор  $L$  вида  $L_0 + L_1$ , где  $L_1$  — оператор порядка  $\gamma < 1$ . Ясно, что тогда  $L$  — оператор порядка 1. Предложение 3) обобщается на такие  $L$ :

5) Если  $Lf = g$ ,  $f \in \mathfrak{H}_{s+1}$ ,  $g \in \mathfrak{H}_{s+t}$ ,  $t > 0$ , то  $f \in \mathfrak{H}_{s+t+1}$ . В частности, корневые векторы оператора  $L$  принадлежат  $\mathfrak{H}_\infty$ .

Действительно,  $f = L_0^{-1}g - L_0^{-1}L_1 f$ . Пусть для простоты  $g \in \mathfrak{H}_\infty$ . Мы получаем сначала, что  $f \in \mathfrak{H}_{s+1+(1-\gamma)}$ ; затем — что  $f \in \mathfrak{H}_{s+1+2(1-\gamma)}$ ; и т. д.

Предложения 3) и 5) — это аналоги теоремы о гладкости 2° (из п. 1) для эллиптических ПДО. Продолжим эту аналогию.

6) Подпространство решений  $\text{Ker } L$  уравнения  $Lf = 0$  имеет конечную размерность  $l$ .

Действительно, это уравнение эквивалентно уравнению Фредгольма  $(I + L_0^{-1}L_1)f = 0$ .

7) Если  $l = 0$ , то существует оператор  $L^{-1}$  порядка  $-1$ .

Действительно, если  $l = 0$ , то существует оператор  $(I + L_0^{-1}L_1)^{-1}$  порядка 0 и  $L^{-1} = (I + L_0^{-1}L_1)^{-1}L_0^{-1}$ .

4. Эллиптические граничные задачи. Для эллиптических уравнений построена общая теория граничных задач, результаты которой во многом аналогичны результатам теории эллиптических ПДО на замкнутой поверхности (см., например, [12], гл. II, [19], гл. X, [24], гл. IV, и приведенные там ссылки). Мы приведем следствия из этой теории, относящиеся к нескольким задачам для уравнения

$$\Delta u(x) + \varepsilon(x)u(x) = f(x) \quad (34.5)$$

в ограниченной области  $G$  пространства  $\mathbf{R}^n$ , имеющей бесконечно гладкую  $(n-1)$ -мерную границу  $\Gamma$ . Граничное условие будем считать имеющим вид

$$\frac{\partial u(x)}{\partial N} + \mathcal{A}u(x) = g(x) \text{ на } \Gamma, \quad (34.6)$$

где  $N$  — внешняя нормаль и  $\mathcal{A}$  — ПДО порядка 1 на  $\Gamma$ .

Сформулируем сначала условие эллиптичности задачи. Пусть  $x_0$  — любая точка на  $\Gamma$ . Будем для наглядности считать, что начало системы координат  $x$  перенесено в точку  $x_0$  и оси повернуты так, что касательная плоскость имеет уравнение  $x_n = 0$ , а ось  $x_n$  направлена по внутренней нормали. В окрестности рассматриваемой точки поверхность  $\Gamma$  записывается уравнением  $x_n = \Phi(x')$  с бесконечно гладкой функцией  $\Phi$  от

$x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ , так что  $x'$  можно принять за локальные координаты на  $\Gamma$ . Пусть  $(x', \xi')$  — соответствующие локальные координаты в  $T^*\Gamma$  и  $a(x', \xi')$  — главный символ оператора  $\mathcal{A}$  в этих координатах. Рассмотрим следующую задачу на полупрямой  $t = x_n > 0$ :

$$v''(t) - |\xi'|^2 v(t) = 0 \quad \text{при } t > 0, \quad (34.7a)$$

$$-v'(t) + a(0, \xi') v(t) = h \quad \text{при } t = 0. \quad (34.7b)$$

Условие эллиптичности задачи (или условие З. Я. Шапиро — Я. Б. Лопатинского) состоит в следующем: при любом вещественном  $\xi' \neq 0$  и любом числе  $h$  эта задача должна иметь единственное решение, убывающее при  $t \rightarrow +\infty$ .

Поясним способ составления уравнений (34.7). Член  $\varepsilon(x)$  в (34.5) считается младшим и в условии эллиптичности не учитывается. Оператор Лапласа  $\Delta'$  по «касательным» переменным  $x'$  имеет символ  $-|\xi'|^2$ . Знак минус перед  $v'$  в (34.7b) поставлен потому, что нормаль  $N$  направлена в сторону отрицательных  $t$ . Главный символ оператора  $\mathcal{A}$  взят в рассматриваемой точке  $x'_0 = 0$ .

Общий вид убывающего при  $t \rightarrow +\infty$  решения уравнения (34.7a) есть  $v(t) = Ce^{-|\xi'|t}$ . Подставим это выражение в (34.7b):

$$[|\xi'| + a(0, \xi')] C = h.$$

Мы видим, что условие эллиптичности задачи в данной точке записывается неравенством

$$|\xi'| + a(0, \xi') \neq 0 \quad \text{при } \xi' \neq 0. \quad (34.8)$$

Очевидно, что (34.8) выполнено в случае граничного условия

$$\frac{\partial u(x)}{\partial N} + \sigma(x)u(x) = g(x) \quad \text{на } \Gamma, \quad (34.9)$$

где  $\sigma(x)$  — бесконечно гладкая функция на  $\Gamma$ , так как в этом случае главный символ оператора  $\mathcal{A}$  равен 0. В частности, условие эллиптичности выполнено в случае задачи Неймана, т. е. при  $\sigma \equiv 0$ . Задачи с нетривиальными ПДО в граничных условиях встретятся в §§ 36—38.

Если условие эллиптичности выполнено всюду на  $\Gamma$  и  $\varepsilon(x) \in C^\infty(\bar{G})$  (например,  $\varepsilon(x) \equiv k^2$ ), то справедливы следующие утверждения:

1°  $\|u\|_{G, s+2} + \|u\|_{\Gamma, s+3/2} + \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{\Gamma, s+1/2} \leq C_s \{ \|f\|_{G, s} + \|g\|_{\Gamma, s+1/2} + \|u\|_{G, 0} \}$  при любом  $s \geq 0$ . Если имеет место единственность (из  $f = 0, g = 0$  следует  $u = 0$ ), то слабое  $\|u\|_{G, 0}$  можно опустить.

Поясним, что если  $u \in H_{s+2}(G)$ , то  $f \in H_s(G)$  и  $g \in H_{s+1/2}(\Gamma)$  в силу утверждений 5°, 6° и 9° из § 32 и аналогично  $u \in H_{s+3/2}(\Gamma)$ ,  $\partial u / \partial N \in H_{s+1/2}(\Gamma)$ .

2° Если  $u \in H_{s+2}(G)$ ,  $f \in H_{s+t}(G)$  и  $g \in H_{s+t+1/2}(\Gamma)$ , где  $t > 0$ , то  $u \in H_{s+t+2}(G)$ . В частности, если  $f \in C^\infty(\bar{G})$ ,  $g \in C^\infty(\Gamma)$ , то  $u \in C^\infty(\bar{G})$ . Справедлив также локальный аналог этого утверждения.

3° Подпространство решений однородной задачи ( $f \equiv 0, g \equiv 0$ ) конечномерно (и состоит из бесконечно гладких в  $\bar{G}$  функций).

4° При заданных  $f \in H_s(G)$ ,  $g \in H_{s+1/2}(\Gamma)$  задача имеет решение в  $H_{s+2}(G)$  тогда и только тогда, когда  $f$  и  $g$  удовлетворяют конечному набору условий ортогональности некоторым фиксированным функциям (соответственно в  $G$  и на  $\Gamma$ ). Эти условия могут отсутствовать; тогда задача разрешима при любых  $f \in H_s(G)$ ,  $g \in H_{s+1/2}(\Gamma)$ .

Укажем несколько вариантов этих утверждений.

Если  $\varepsilon(x)$  в (34.5) или  $\sigma(x)$  в (34.9) обладают лишь конечной гладкостью, то промежуток допустимых  $s$  ограничен сверху. Например, если  $\varepsilon(x) \in C^{(0)}(\bar{G})$ ,  $\sigma(x) \in C^{(2)}(\Gamma)$ , то можно взять только  $s = 0$ , а утверждения о гладкости теряют силу.

Условие (34.6) или (34.9) можно заменить условием Дирихле  $u(x) = g(x)$  на  $\Gamma$ . Оно также удовлетворяет условию эллиптичности (в этом случае (34.7b) заменяется на  $v(0) = h$ ). При этом  $\|g\|_{\Gamma, s+1/2}$  в 1° заменяется на  $\|g\|_{\Gamma, s+3/2}$ ; аналогично изменяются формулировки остальных утверждений.

Граница  $\Gamma$  может состоять из более чем одной компоненты, и граничные условия могут быть разными на разных компонентах (скажем, на одной — условие (34.9), на другой — условие Дирихле). Аналоги утверждений 1°—4°, имеющие место и для этого случая, нетрудно сформулировать.



Можно рассмотреть также задачу, в которой область  $G$  разбита, скажем, на две части  $G^+$ ,  $G^-$  замкнутой бесконечно гладкой поверхностью  $S$ , не имеющей общих точек с  $\Gamma$ . Коэффициент  $\varepsilon(x)$  может иметь скачок на  $S$ . Пусть на  $S$  поставлены, например, условия

$$\alpha_1(x)u^+(x) + \alpha_2(x)u^-(x) = g_1(x),$$

$$\beta_1(x) \frac{\partial u^+(x)}{\partial N} + \beta_2(x) \frac{\partial u^-(x)}{\partial N} + \beta_3(x)u^+(x) + \beta_4(x)u^-(x) = g_2(x),$$

где нормаль для определенности направлена в  $G^-$ . Условия эллиптичности накладываются во всех точках поверхностей  $S$  и  $\Gamma$ . Сформулируем условие эллиптичности в точке  $x_0 \in S$ . Перенесем начало в  $x_0$  и направим ось  $x_n$  вдоль  $N$ . Тогда следует рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} v_+''(t) - |\xi'|^2 v_+(t) &= 0 \text{ при } t < 0, \\ v_-''(t) - |\xi'|^2 v_-(t) &= 0 \text{ при } t > 0, \\ \alpha_1(0)v_+(0) + \alpha_2(0)v_-(0) &= h_1, \\ \beta_1(0)v_+'(0) + \beta_2(0)v_-'(0) &= h_2. \end{aligned}$$

Условие эллиптичности в данной точке состоит в том, что эта задача при  $\xi' \neq 0$  и любых  $h_1, h_2$  должна быть однозначно разрешимой в классе решений, убывающих на бесконечности. Как нетрудно подсчитать, это условие равносильно неравенству

$$\alpha_1(0)\beta_2(0) + \alpha_2(0)\beta_1(0) \neq 0. \quad (34.10)$$

Для эллиптических задач с граничными условиями на  $S$  и  $\Gamma$  справедливы аналоги утверждений 1° — 4°, вытекающие из общих теорем (см., например, [56] и [64]). Эти аналоги нетрудно сформулировать, руководствуясь предложениями § 32. Мы сделаем это в §§ 36, 38 для рассматриваемых там задач.

Можно рассмотреть и задачи для эллиптических систем, например, для векторного уравнения Гельмгольца. Одна такая задача упоминается в п. 8 § 40.

**5. Эллиптичность с параметром.** Существуют варианты теорем пп. 1 и 5 для эллиптических уравнений и задач, содержащих параметр (см. [60], [29], [24a], [66]). Содержание этих теорем сводится к следующему: параметр изменяется в пределах некоторого угла на комплексной плоскости с вершиной в начале координат; этот параметр включается в главный символ, и если вместо обычных условий эллиптичности выполнены *усиленные условия эллиптичности*, учитывающие вхождение этого параметра, то для достаточно больших по модулю значений параметра из рассматриваемого угла имеет место *однозначная разрешимость* уравнения или задачи с априорной оценкой, в левую часть которой также входит модуль параметра. Мы не будем приводить здесь точных формулировок; они будут приведены там, где понадобятся, а именно в п. 8 § 36 и п. 1 § 38.

### § 35. Признаки базисности

Пусть снова  $\mathfrak{H}$  — сепарабельное гильбертово пространство,  $L$  — оператор с дискретным спектром и  $A$  — вполне непрерывный оператор в  $\mathfrak{H}$ ,  $\{f_j\}$  — система корневых векторов оператора  $L$  или  $A$  (см. пп. 3 и 4 § 31). Условимся пользоваться следующими обозначениями (определения см. в § 31):

$L$  (или  $A$ )  $\in \mathbf{A}(\alpha, \mathfrak{H})$ , если  $\{f_j\}$  — базис для метода суммирования Абеля порядка  $\alpha$  в  $\mathfrak{H}$  ( $\alpha > 0$ );

$L$  (или  $A$ )  $\in \mathbf{R}(\mathfrak{H})$ , если  $\{f_j\}$  — базис Рисса со скобками в  $\mathfrak{H}$ ;

$L$  (или  $A$ )  $\in \mathbf{B}(\mathfrak{H})$ , если  $\{f_j\}$  — базис Бари со скобками в  $\mathfrak{H}$ .

Здесь каждое следующее свойство оператора является усилением предыдущего.

**1. Операторы, близкие к самосопряженным.** Рассмотрим оператор  $L = L_0 + L_1$ , где  $L_0$  — самосопряженный оператор с дискретным спектром и положительными (для простоты) собственными значениями  $\nu_j$ . Введем шкалу пространств  $\mathfrak{H}_s$ , отвечающую оператору  $L_0$  (см. п. 3 § 34). Наложим на  $L$  два условия:

1)  $\nu_j \geq Cj^\beta$  при некоторых  $C > 0$  и  $\beta > 0$ .

2)  $L_1$  — оператор порядка  $\gamma < 1$  в шкале  $\mathfrak{H}_s$ .

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда спектр оператора  $L$  дискретен. При этом для всех  $s$

$$L \in \mathbf{A}(\alpha, \mathfrak{H}_s), \text{ если } \beta(1 - \gamma) < 1, \alpha > \beta^{-1} - (1 - \gamma), \quad (35.1a)$$

$$L \in \mathbf{R}(\mathfrak{H}_s), \text{ если } \beta(1 - \gamma) = 1, \quad (35.1б)$$

$$L \in \mathbf{B}(\mathfrak{H}_s), \text{ если } \beta(1 - \gamma) > 1. \quad (35.1в)$$

Кроме того, существует такое  $C_1 > 0$ , что все собственные значения оператора  $L$  лежат в объединении кругов  $\{\mu; |\mu - \nu_j| \leq C_1 \nu_j^{\nu}\}$ .

Эта теорема в известной мере отражает целое направление в теории несамосопряженных операторов. Оно начато в работах М. В. Келдыша [44], [45], где для более общих, чем здесь, операторов в  $\mathfrak{H}$  доказаны дискретность спектра, полнота и неравенство  $|\arg \mu_j| < \varepsilon$  ( $j \geq j_0(\varepsilon)$ ) со сколь угодно малым  $\varepsilon > 0$ . Для  $s=0$  при менее жестком условии, чем 2), утверждение (35.1в) принадлежит А. С. Маркусу [52] (см. также [37]), утверждение (35.1б) с  $\gamma \geq 0$  — В. Э. Кацнельсону [42, 43] и утверждение (35.1а) — В. Э. Кацнельсону и В. И. Мацаеву (см. [43]). В [43] содержится также последнее утверждение теоремы 1 для  $\gamma \geq 0$ . В высказанной здесь форме теорема 1 легко выводится из предложений 1—3 в [28].

В дальнейшем, в § 36, 37 и 40, будут применимы утверждение (в) при вещественном  $k$  и утверждения (б) и (в) при комплексном  $k$ . (Утверждение (а) приведено для полноты картины.) Однако в предположениях теоремы 1 еще слабо учтена специфика интересующих нас операторов. Во-первых, мы располагаем асимптотической формулой (34.2б) для собственных значений эллиптического ПДО. Во-вторых,  $\gamma$  может оказаться намного меньше единицы (если  $k$  вещественно, то  $\operatorname{Im} \gamma = -\infty$ , т. е.  $L_1$  — бесконечно сглаживающий оператор). В-третьих, разлагать в ряды нужно главным образом очень гладкие функции. В следующем пункте будут приведены усиления теоремы 1 при дополнительных предположениях об операторе и разлагаемых в ряды векторах. Попутно будет проверено последнее утверждение теоремы 1.

**2. Расстановка скобок и скорость сходимости.** Начнем с некоторых предварительных соображений. Как объясня-

лось в п. 1 § 31, ряд Фурье со скобками по системе векторов  $\{f_j\}$  ( $j=1, 2, \dots$ ) можно записать в виде  $P_0 f + \dots + P_1 f + \dots$ , где  $P_l$  — проектор, сопоставляющий вектору  $f$  часть  $\sum c_j f_j$  ряда Фурье с  $m_l + 1 \leq j \leq m_{l+1}$  (в обозначениях п. 1 § 31). Если  $\{f_j\}$  — система корневых векторов оператора  $L$  с дискретным спектром и собственные значения  $\mu_{m_l+1}, \mu_{m_{l+1}}$  отличны соответственно от  $\mu_{m_l}$  и  $\mu_{m_{l+1}+1}$ , то  $P_l$  допускает запись в виде контурного интеграла

$$P_l = - (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_l} R_L(\mu) d\mu. \quad (35.2)$$

Здесь  $R_L(\mu) = (L - \mu I)^{-1}$  — резольвента оператора  $L$ , а  $\Gamma_l$  — замкнутый контур, не проходящий через  $\mu_j$  и охватывающий только  $\mu_{m_l+1}, \dots, \mu_{m_{l+1}}$ , с направлением обхода против часовой стрелки (см., например, [8]; ср. п. 5 § 31). Выбор контуров  $\Gamma_l$  равносильен расстановке скобок в ряде Фурье  $\sum c_j f_j$ , не зависящей от  $f$ . Чтобы выбрать такие контуры и установить сходимость ряда  $\sum P_l f$ , нужно иметь информацию о расположении  $\mu_j$  и уметь оценивать норму резольвенты  $\|R_L(\mu)\|$  на выбираемых контурах. Здесь помогают известные формулы и неравенства, которые мы сейчас приведем (ср. [37], [43]). Все операторы будем пока рассматривать в пространстве  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$ .

1° Пусть  $\mu \in \Sigma(L_0)$ . Если

$$\|L_1 R_{L_0}(\mu)\| \leq \theta < 1, \quad (35.3)$$

то  $\mu \in \Sigma(L)$  и

$$\|R_L(\mu)\| \leq (1 - \theta)^{-1} \|R_{L_0}(\mu)\| = (1 - \theta)^{-1} d_\mu^{-1}, \quad (35.4)$$

где  $d_\mu = \inf |\mu - \nu_j|$ .

Действительно, при  $\mu \in \Sigma(L_0)$

$$L - \mu I = [I + L_1 R_{L_0}(\mu)] (L_0 - \mu I).$$

Если выполнено условие (35.3), то оператор  $I + L_1 R_{L_0}(\mu)$  имеет обратный, норма которого не превосходит  $(1 - \theta)^{-1}$

(см., например, [9], гл. IV, § 5), и тогда существует

$$R_L(\mu) = R_{L_0}(\mu) [I + L_1 R_{L_0}(\mu)]^{-1}. \quad (35.5)$$

Отсюда следует (35.4), так как  $\|R_{L_0}(\mu)\| = d_\mu^{-1}$ .

Последнее равенство можно обобщить:

2° При любом вещественном  $\kappa$

$$\|L_0^\kappa R_{L_0}(\mu)\| = \sup_j v_j^\kappa |\mu - v_j|^{-1}. \quad (35.6)$$

Если  $0 \leq \kappa \leq 1$ , то

$$\|L_0^\kappa R_{L_0}(\mu)\| \leq (|\mu| + d_\mu)^\kappa d_\mu^{-1}. \quad (35.7)$$

Формула (35.6) вытекает из того обстоятельства, что оператор  $L_0^\kappa R_{L_0}(\mu)$  имеет ортонормированный базис  $\{f_j\}$  из собственных векторов (тот же, что и  $L_0$ ) и собственные значения  $v_j^\kappa (v_j - \mu)^{-1}$ . Оценка (35.7) — следствие формулы (35.6), так как правая часть в ней не превосходит

$$\sup_{t \geq d_\mu} (|\mu| + t)^\kappa t^{-1} = (|\mu| + d_\mu)^\kappa d_\mu^{-1}.$$

(Оценка (35.7) взята из [43], гл. III, § 1.)

Из (35.6), в частности, следует, что

$$\|L_1 R_{L_0}(\mu)\| \leq C_2 \sup_j v_j^y |\mu - v_j|^{-1}, \quad \text{где } C_2 = \|L_1 L_0^{-y}\|. \quad (35.8)$$

Зафиксируем  $\theta \in (0, 1)$ . Если  $|\mu - v_j| \geq \theta^{-1} C_2 v_j^y$  при всех  $j$ , то мы получаем (35.3) из (35.8). Таким образом:

3° Вне объединения кругов

$$O_j = \{\mu; |\mu - v_j| < \theta^{-1} C_2 v_j^y\} \quad (35.9)$$

нет точек из  $\Sigma(L)$  и справедлива оценка (35.4).

Устремляя  $\theta$  к 1, получаем, что последнее утверждение теоремы 1 справедливо с  $C_1 = C_2$ .

Считая, что контур  $\Gamma_l$  не проходит через  $v_j$ , введем отвечающий оператору  $L_0$  проектор

$$Q_l = - (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_l} R_{L_0}(\mu) d\mu. \quad (35.10)$$

Это ортопроектор, и для любого  $f$  ряд  $\sum Q_l f$  сходится в  $\mathfrak{F}$  (к  $f$ , если каждое  $v_j$  охвачено одним из контуров  $\Gamma_l$ ).

Поэтому ряд  $\sum P_l f$  сходится, если сходится ряд  $\sum (P_l - Q_l) f$ . Сходиться ряд  $\sum P_l f$  может только к  $f$  из-за полноты системы  $\{f_j\}$  (которая имеет место при любом  $\gamma < 1$  в силу теоремы М. В. Келдыша [44], [45]).

Для исследования ряда  $\sum (P_l - Q_l) f$  нужно уметь оценивать норму разности  $R_L(\mu) - R_{L_0}(\mu)$ . Заметим, что из формулы  $(L - \mu I) - (L_0 - \mu I) = L_1$  вытекает формула

$$R_L(\mu) - R_{L_0}(\mu) = -R_L(\mu) L_1 R_{L_0}(\mu) \quad (35.11)$$

и что если  $\mu$  находится вне кругов  $O_j$ , то здесь норму правой части можно оценить при помощи неравенств (35.4) и (35.8).

Перейдем к формулировке усиления теоремы 1. Условие 1) мы заменим более жестким условием

$$1') v_j = c j^\beta + O(j^\delta) \quad (j \rightarrow \infty), \quad \text{где } c > 0, \beta > 0, 0 \leq \delta < \beta,$$

принимая за образец формулу (34.26) для собственных значений эллиптического ПДО (см. также обзор [33]).

Пусть  $\{a_l\}$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) — возрастающая последовательность вещественных чисел,  $a_0 = 0$  и  $a_l \rightarrow \infty$  при  $l \rightarrow \infty$ . Назовем ее *допустимой*, если  $a_l \neq |\mu_k|$ ,  $v_j$  при всех  $l \geq 1$  и всех  $k, j$ .

Проектор  $P_l$  будем считать отвечающим всем  $\mu_k$  с  $a_l < |\mu_k| < a_{l+1}$  ( $a_0 = 0 \leq |\mu_k| < a_1$  для  $l = 0$ ), проектор  $Q_l$  — всем  $v_j$  с  $a_l < v_j < a_{l+1}$ .

Последовательность  $\{a_l\}$  мы хотим подчинить неравенствам

$$b l^{\rho\beta} < a_l < b (l+1)^{\rho\beta} \quad (l \geq l_0), \quad (35.12)$$

и здесь вопрос состоит в том, какие можно взять  $\rho > 0$ ,  $b > 0$ . При таком подходе не исключено, что в кольце  $\{\mu; a_l < |\mu| < a_{l+1}\}$  при каких-либо  $l$  нет собственных значений  $\mu_k$  или  $v_j$ , и тогда оператор  $P_l$  или  $Q_l$  является нулевым. (В обозначениях п. 1 § 31 мы должны теперь считать  $\{m_l\}$  неубывающей последовательностью.) Однако, указав возможные  $\rho$  и  $b$ , мы тем самым оценим допустимую частоту расстановки скобок в ряде  $\sum c_l f_l$ , а кроме того, сумеем оценить скорость сходимости получающегося ряда со скобками.

Теорема 2. Пусть выполнено условие 1') и  $\beta(1-\gamma) > 1$ , где  $\gamma$  — порядок оператора  $L_1$  в шкале  $\mathfrak{F}_s$ . Пусть  $\rho > 0$  выбрано так, что

$$\tau = \rho[\beta(1-\gamma) - 1] - \max\{0, 1 - \rho(\beta - \delta)\} > 0. \quad (35.13)$$

Тогда при любом  $b > 0$  существует такая допустимая последовательность  $\{a_l\}$ , удовлетворяющая условию (35.12), что при  $f \in \mathfrak{F}_{s+t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $m' \geq m$

$$m^{\tau+0\beta t} \left\| \sum_{l=m}^{m'} (P_l - Q_l) f \right\|_s \leq C_3 \|f\|_{s+t}, \quad (35.14)$$

$$m^{0\beta t} \left\| \sum_{l=m}^{m'} P_l f \right\|_s \leq C_4 \|f\|_{s+t}, \quad (35.15)$$

где  $C_3, C_4$  — постоянные, не зависящие от  $f, m, m'$  (но зависящие от  $\gamma, \rho, b, s, t$ ).

Поясним эту формулировку и укажем следствия.

Неравенство (35.14) обеспечивает сходимость ряда  $\sum P_l f$  в  $\mathfrak{F}_s$  к  $f$  при любом  $f \in \mathfrak{F}_s$ . Неравенство (35.15) показывает, что при  $f \in \mathfrak{F}_{s+t}$  с ростом  $t$  улучшается оценка скорости сходимости ряда  $\sum P_l f$  в  $\mathfrak{F}_s$ . Полагая в (35.15)  $m' = \infty$ , получаем оценку нормы остатка ряда  $\sum P_l f$ ; полагая  $m' = m$ , получаем оценку нормы общего члена этого ряда. В частности:

4° Если  $f \in \mathfrak{F}_\infty$  (т. е.  $f$  — «бесконечно гладкий» вектор), то  $\|P_l f\|_s$  убывает быстрее  $l^{-N}$  при любом натуральном  $N$ .

В (35.14) оценивается скорость «равносходимости» рядов  $\sum P_l f$  и  $\sum Q_l f$ . При  $t=0$  из (35.14) следует сходимость ряда  $\sum (P_l - Q_l)$  по норме операторов в  $\mathfrak{F}_s$ . Полагая  $m' = \infty$ , получаем оценку нормы остатка этого ряда; полагая  $m' = m$ , получаем оценку нормы общего члена. В частности:

5° При  $\tau > 1/2$  выполнено условие (31.7) в каждом  $\mathfrak{F}_s$ .

6° Если  $\inf \gamma = -\infty$  (т. е.  $L_1$  — бесконечно сглаживающий оператор), то норма оператора  $P_l - Q_l$  в  $\mathfrak{F}_s$  убывает быстрее  $l^{-N}$  с любым натуральным  $N$ .

Доказательство теоремы 2. Будем сначала считать, что  $s=0$ .

Рассмотрим отрезок  $\Delta_l = [bl^{\rho\beta}, b(l+1)^{\rho\beta}]$  вещественной оси. Из 1') можно вывести (мы опустим элементарный подсчет), что число собственных значений  $\nu_j$  на  $\Delta_l$  не превосходит  $C_5(l^{\rho-1} + l^{\rho[1-(\beta-\delta)]})$ . Так как длина отрезка  $\Delta_l$  не меньше  $C_6 l^{\rho\beta-1}$ , то на нем найдется не содержащий точек  $\nu_j$  промежуток  $\Delta'_l$  длины, не меньшей

$$2\gamma_l = C_7 l^{\rho(\beta-1)} [1 + l^{1-\rho(\beta-\delta)}]^{-1}. \quad (35.16)$$

Пусть  $\rho > 0$  выбрано так, что  $\tau > 0$  (см. (35.13)). Тогда, поскольку  $O_j$  имеет радиус  $\theta^{-1} C_2 \nu_j^\gamma$ ,

$$l^{\rho\beta\gamma} \gamma_l^{-1} \leq C_8 l^{-\tau} \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty) \quad (35.17)$$

и функции  $x + \theta^{-1} C_2 x^\gamma$ ,  $x - \theta^{-1} C_2 x^\gamma$  являются возрастающими при больших  $x$ , найдется такое  $l_0$ , что при  $l \geq l_0$  середина промежутка  $\Delta'_l$  лежит вне всех кругов  $O_l$ . Ее мы и примем за  $a_l$ . Для остальных  $l$  доопределим  $a_l$  так, чтобы получилась допустимая последовательность.

Зафиксируем любое  $\varepsilon > 0$ . Увеличив, если требуется,  $l_0$ , мы можем принять, что все  $\mu_k$  с  $|\mu_k| > a_{l_0}$  лежат в угле  $\{\mu; |\operatorname{Im} \mu| < \varepsilon \operatorname{Re} \mu\}$ . Тогда в качестве  $\Gamma_l$  ( $l \geq l_0$ ) можно взять, например, границы трапеций

$$\Gamma_l = \{\mu; a_l \leq \operatorname{Re} \mu \leq a_{l+1}, \quad |\operatorname{Im} \mu| \leq \varepsilon \operatorname{Re} \mu\}.$$

Через  $\Gamma_{mm'}$  обозначим объединение трапеций  $\Gamma_m, \dots, \Gamma_{m'}$  и через  $\Gamma_{mm'}$  — его границу.

Нам нужно предположить, что  $0 \in \Sigma(L)$ . Этим общность не ограничивается, так как всегда можно заметить  $L, L_0$  на  $L - \mu_0 I, L_0 - \mu_0 I$  с  $\mu_0 > 0$ . Оператор  $L^{-1}$  имеет порядок  $-1$ .

Докажем неравенство (35.14) для  $s=0$ . Пусть  $f \in \mathfrak{F}_t$ ; тогда  $f = L_0^{-t} g$ , где  $\|g\| \leq C_9 \|f\|_t$ , и дело сводится к доказательству неравенства

$$\left\| \int_{\Gamma_{mm'}} R_L(\mu) L_1 L_0^{-t} R_{L_0}(\mu) g d\mu \right\| \leq C_{10} m^{-\tau-0\beta t} \|g\|. \quad (35.18)$$

Положим  $\gamma - t = -q + \kappa$ , где  $q$  — целое неотрицательное число и  $0 \leq \kappa < 1$ . При  $q > 0$  проделаем следующие преобразования. Запишем  $L_1 L_0^{-t}$  в виде  $L_0^{-q} L_2 L_0^\kappa$ , где

$L_2$  — ограниченный оператор, и подставим сюда

$$L^{-q} = \mu^{-q} I - \\ - (\mu^{-1} L^{-q} + \dots + \mu^{-q-1+k} L^{-k} + \dots + \mu^{-q} L^{-1}) (L - \mu I).$$

Далее, представим  $L^{-k} L_2$  в виде  $L_{2,k} L_0^{-k}$ , где  $L_{2,k}$  — ограниченный оператор. Так как

$$L_0^{-k} = \mu^{-k} I - (\mu^{-1} L_0^{-k} + \dots + \mu^{-k} L_0^{-1}) (L_0 - \mu I),$$

то мы получаем, что интеграл в (35.18) равен

$$\int_{\Gamma_{mm'}} \mu^{-q} R_L(\mu) L_2 L_0^* R_{L_0}(\mu) g \, d\mu - \\ - \sum_{\Gamma_{mm'}} \int \mu^{-q-1} L_{2,k} L_0^* R_{L_0}(\mu) g \, d\mu. \quad (35.19)$$

Пользуясь неравенствами (35.3), (35.7) и неравенством  $d_\mu \leq |\mu|$  на  $\Gamma_{mm'}$ , получаем, что норма подынтегрального выражения в первом интеграле не превосходит  $C_{11} |\mu|^{-l} d_\mu^{-2} \|g\|$ . Такая же оценка верна и для подынтегральных выражений в остальных интегралах. Полагая  $\mu = \alpha_l + i\lambda$ , имеем

$$\int_{-e\alpha_l}^{e\alpha_l} d_\mu^{-2} \, d\lambda \leq \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda^2 + \nu_l^2)^{-1} \, d\lambda = \pi \nu_l^{-1}. \quad (35.20)$$

Полагая  $\mu = (1 \pm i\epsilon)\lambda$ , имеем

$$\int_{\alpha_m}^{\alpha_{m'+1}} d_\mu^{-2} \, d\lambda \leq C_{12} \int_{\alpha_m}^{\infty} \lambda^{-2} \, d\lambda = C_{12} \alpha_m^{-1}. \quad (35.21)$$

Из (35.20) с  $l = m, m'+1$ , (35.17) и (35.21) получаем (35.18).

Теперь выведем (35.15) для  $s=0$ . Достаточно получить аналогичную оценку для  $Q_l$  вместо  $P_l$  (так как можно пользоваться неравенством (35.14)). Пусть  $f = \sum b_j \psi_j$ ; тогда в силу равенства Парсеваля

$$\left\| \sum_{m'} Q_l f \right\|^2 \leq \sum_{\nu_j > \alpha_m} |b_j|^2 \nu_j^{2l} \cdot \nu_j^{-2l} \leq C_{13} m^{-2\theta l} \|f\|^2. \quad (35.22)$$

Отсюда, кстати, видно, поскольку можно взять  $f = \psi_j$

с  $\nu_j \sim \alpha_m$ , что эта оценка, а значит, и (35.15), не улучшаемы. Проведенные рассуждения без труда переносятся на случай любого  $s$  (с постоянными, зависящими от  $s$ ). Доказательство закончено.

Для случая (б) справедлив следующий аналог теоремы 2:

**Теорема 2'.** Пусть выполнено условие 2') и  $\beta(1 - \gamma) = 1$ , где  $\gamma$  — порядок оператора  $L_1$  в шкале  $\mathfrak{F}_s$ . Пусть  $\rho \geq (\beta - \delta)^{-1}$ . Тогда при любом  $b > 0$  существует такая допустимая последовательность  $\{\alpha_t\}$ , удовлетворяющая условию (35.12), что  $\sum P_t f = f$  в  $\mathfrak{F}_s$  для любого  $f \in \mathfrak{F}_s$ , а для  $f \in \mathfrak{F}_{s+t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $m' \geq t$  справедливо неравенство (35.15).

Доказательство, использующее теорему 1.2 из [43], гл. III, будет опубликовано в другом месте. Некоторые обобщения теорем 2 и 2' сформулированы в [28a].

Теоремы, аналогичные теоремам 2 и 2', справедливы и для вполне непрерывных операторов  $A = A_0 + A_1$ , где  $A_0$  — самосопряженный оператор с положительными собственными значениями  $1/\nu_j$  и  $A_1$  — оператор порядка  $-2 + \gamma$  в шкале, определяемой оператором  $L_0 = A_0^{-1}$ , если  $\text{Ker } A = \{0\}$  (ср. следующий пункт).

Приведем еще утверждение об асимптотике собственных значений  $\mu_j$ , вытекающее из теоремы, приведенной в [44] (см. также [6], гл. V, § 11):

7° Если  $\nu_j \cdot j^{-\beta} \rightarrow c > 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ) и  $\gamma < 1$ , то  $\mu_j \cdot j^{-\beta} \rightarrow c$  ( $j \rightarrow \infty$ ).

Это асимптотика без оценки остаточного члена. Отметим, что оценку остаточного члена в формуле для  $\mu_j$  при условии 1') и любом  $\gamma \in [0, 1)$  недавно получили А. С. Маркус и В. И. Мацаев.

**3. Эллиптические ПДО, близкие к самосопряженным.** Пусть  $\mathcal{A}$  — эллиптический ПДО на  $n$ -мерной поверхности  $\mathfrak{S}$  порядка 1 с положительным <sup>1)</sup> главным символом, имеющий вид  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ , где  $\mathcal{A}_0$  — самосопряженный эллиптический ПДО порядка 1 и  $\mathcal{A}_1$  — ПДО порядка  $\gamma < 1$ . Практически для дальнейшего нужны два случая:  $\gamma = -1$  и  $\inf \gamma = -\infty$ . Все результаты пп. 1, 2 до-

<sup>1)</sup> В §§ 36, 37, 40 исследуемые там ПДО будут иметь отрицательные главные символы.

словно сохраняются, если положить  $\beta = 1/n$  (см. (34.26)). и  $\mathfrak{H}_s = H_s(\mathfrak{E})$ . У оператора  $\mathcal{A}_0$  может быть несколько собственных значений на  $(-\infty, 0]$ , но это не играет роли, так как можно сдвинуть спектральный параметр.

Пусть теперь  $\mathcal{B}$  — эллиптический ПДО порядка  $-1$  на поверхности  $\mathfrak{E}$  с положительным главным символом и  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1$ , где  $\mathcal{B}_0$  — самосопряженный эллиптический ПДО порядка  $-1$ , а  $\mathcal{B}_1$  — ПДО порядка  $\gamma_1 < -1$ . Если  $\text{Ker } \mathcal{B}_0$  и  $\text{Ker } \mathcal{B}$  состоят из одного нуля, то существуют операторы  $\mathcal{B}_0^{-1}$  и  $\mathcal{B}^{-1}$  (см. п. 1 § 34), и тогда

$$\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{B}_0^{-1} [I + \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_0^{-1}]^{-1} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1, \quad (35.23)$$

где  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_0^{-1}$  и  $\mathcal{A}_1 = -\mathcal{B}_0^{-1} (\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_0^{-1}) [I + \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_0^{-1}]^{-1}$ . Это ПДО порядков  $1$  и  $\gamma = 2 + \gamma_1 < 1$ , и мы приходим к предыдущему случаю, так как  $\mathcal{A}_0$  — самосопряженный оператор с положительным главным символом. Таким образом, результаты из пп. 1, 2 снова применимы. Отметим, что  $1 - \gamma = -1 - \gamma_1$ , т. е. разница порядков у операторов  $\mathcal{A}_0$  и  $\mathcal{A}_1$  такая же, как у  $\mathcal{B}_0$  и  $\mathcal{B}_1$ . В задачах §§ 36, 37  $\gamma_1 = -3$  или  $\inf \gamma_1 = -\infty$ .

Наконец, пусть  $\text{Ker } \mathcal{B} \neq \{0\}$ . В этом случае мы предположим, что  $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}(0)$  конечномерно. Можно проверить (как 7° в п. 6 § 31, используя 4° из п. 1 § 34 для  $s < 0$ ), что для  $\mathcal{B}$  выполнено условие, указанное внизу на стр. 306, и вывести отсюда, что

$$H_0(\mathfrak{E}) = \mathfrak{L}_{\mathcal{B}}(0) + [\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}^*(0)]^\perp.$$

Теперь, чтобы прийти к случаю, когда существует  $\mathcal{B}^{-1}$ , достаточно «исправить» жорданову матрицу оператора  $\mathcal{B}$  в  $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}(0)$ , заменив собственное значение  $0$  любым ненулевым числом. Это равносильно прибавлению к  $\mathcal{B}$  и к  $\mathcal{B}_1$  некоторого конечномерного оператора порядка  $-\infty$  (так как  $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}(0) \subset C^\infty(\mathfrak{E})$ , см. п. 1 § 34), которое, конечно, не отразится на интересующих нас спектральных свойствах оператора  $\mathcal{B}$ . Если  $\text{Ker } \mathcal{B}_0 \neq \{0\}$ , то  $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}_0}(0) = \text{Ker } \mathcal{B}_0$  заведомо конечномерно (см. п. 1 § 34), и мы можем аналогичным образом исправить  $\mathcal{B}_0$  в  $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}_0}(0)$ , прибавив к  $\mathcal{B}_0$  некоторый конечномерный оператор порядка  $-\infty$  и вычтя его из  $\mathcal{B}_1$ . Таким образом, результаты из пп. 1, 2 снова применимы при отмеченном выше предположении о  $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}(0)$ .

Далее, из наших результатов для пространств  $H_s(\mathfrak{E})$  нетрудно вывести аналогичные результаты для пространств  $C^{(s)}(\mathfrak{E})$  при помощи теоремы вложения (§ 32, 10° и 11°). Мы получаем, в частности, что если  $\mathcal{A}_1$  (или  $\mathcal{B}_1$ ) — оператор порядка  $-\infty$ , то для любой функции  $f \in C^\infty(\mathfrak{E})$  ее ряд Фурье со скобками по корневым функциям оператора  $\mathcal{A}$  (или  $\mathcal{B}$ ) сходится равномерно, причем максимум модуля скобки убывает быстрее любой отрицательной степени ее модуля, и такой же сходимостью остается после локального почленного дифференцирования ряда любое число раз.

**4. Операторы с лучами минимального роста.** Здесь мы приведем теорему, которая понадобится в п. 8 § 36, п. 5 § 37 и § 38.

Пусть  $L$  — оператор с дискретным спектром в  $\mathfrak{F}$  и  $A = (L - \mu_0 I)^{-1}$  при каком-нибудь  $\mu_0 \in \Sigma(L)$ . Обозначим через  $s_j^2$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) собственные значения самосопряженного положительного оператора  $AA^*$ , занумерованные с учетом алгебраической кратности так, что  $s_j^2 \geq s_{j-1}^2$  при всех  $j$ . Положительные числа  $s_j$  называются *s-числами оператора A*. Их зависимость от  $\mu_0$  несущественна. Наложим на  $L$  следующие условия:

1'')  $s_j \leq C j^{-\beta}$  при некотором  $\beta > 0$ .

2'') Спектр  $\Sigma(L)$  лежит в объединении круга  $\{\mu; |\mu| < r\}$  и угла  $\Lambda_\theta = \{\mu; |\arg \mu| < \theta\}$  при некоторых  $r > 0$  и  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi\beta/2$ ). Вне этого объединения выполняется оценка  $\|R_L(\mu)\| < C|\mu|^{-1}$ .

Лучи  $\{\mu; \arg \mu = \varphi\}$  с такой оценкой называются *лучами минимального роста* резольвенты [60]<sup>1)</sup>. Условия 1'') и 2'') заменяют условия 1) и 2) из п. 1 в случае, когда из оператора  $L$  не удается выделить главную самосопряженную часть. Из 2) следует 2'') со сколь угодно малым  $\theta > 0$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия 1'') и 2''), и пусть  $\alpha \in (\beta^{-1}, \pi\theta^{-1}/2)$ . Тогда  $L \in \mathbf{A}(\alpha, \mathfrak{F})$ .

Эта теорема, как и теорема 1, также имеет изрядную предысторию. В [60, 21] и [7], гл. XI, § 9, при условиях,

<sup>1)</sup> Правильнее было бы называть их лучами максимального убывания, так как  $\|R_L(\mu)\|$  не может убывать быстрее  $|\mu|^{-1}$ .

близких к  $1''$ ) и  $2''$ ), доказана теорема о полноте; она применялась во многих работах. В [50] введен метод Абея и доказана теорема о суммируемости этим методом; она усиливалась и применялась в нескольких работах, в частности, в [48] и [28]. Мы привели теорему 3 с учетом улучшения, сообщенного недавно В. И. Мацаевым.

Наметим основные моменты доказательства. Сдвинув, если потребуется, спектральный параметр, можно принять, что спектр  $\Sigma(L)$  лежит внутри угла  $\Lambda_\theta$  и вне круга  $\{\mu; |\mu| < 1\}$  и что в объединении этого круга с дополнением к  $\Lambda_\theta$  выполняется неравенство

$$\|R_L(\mu)\| \leq C(1 + |\mu|)^{-1}. \quad (35.24)$$

Пусть  $\Gamma$  — граница угла  $\Lambda_\theta$ . Рассмотрим оператор

$$I(t) = - (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} e^{-\mu^\alpha t} R_L(\mu) d\mu, \quad (35.25)$$

где при дробном  $\alpha$  ветвь  $\mu^\alpha$  выбирается так, как указано в п. 5 § 31, и при обходе контура область  $\Lambda_\theta$  остается слева. Достаточно доказать три утверждения:

а) Существует последовательность дуг  $\{\mu; |\mu| = R_k, |\arg \mu| < \theta\}$ , таких, что  $R_k \rightarrow \infty$  и  $\|R_L(\mu)\| = \exp[o(R_k^\alpha)]$  на этих дугах.

б)  $I(t)\bar{f} \rightarrow \bar{f}$  при  $t \rightarrow +0$ , если  $\bar{f} \in \mathfrak{D}(L)$ .

в)  $\|I(t)\| \leq \text{Const}$  при  $t \in (0, 1)$ .

Утверждения а) и б) фактически доказаны в [50], хотя там предположения более жесткие. При этом а) выводится из  $1''$ ), и это наиболее содержательная часть доказательства. Утверждение а) позволяет привести (35.25) к виду, указанному в п. 5 § 31. Из б) и в) следует, что  $I(t)\bar{f} \rightarrow \bar{f}$  при  $t \rightarrow +0$  для всех  $\bar{f} \in \mathfrak{F}$ .

Утверждение б) доказывается совсем просто. Пусть  $\Gamma_1$  — контур, получаемый из  $\Gamma$  заменой отрезков  $\{\mu; |\mu| < 1/2, \arg \mu = \pm \theta\}$  стягивающей их дугой  $\{\mu; |\mu| = 1/2, |\arg \mu| < \theta\}$ . Заменим в (35.25)  $\Gamma$  на  $\Gamma_1$  и подставим  $\bar{f} = L^{-1}g$  (пользуясь тем, что  $\bar{f} \in \mathfrak{D}(L)$ ). Так как  $L^{-1} - \mu^{-1} = \mu^{-1}L^{-1}(\mu I - L)$ , то  $L^{-1}$  можно заменить на  $\mu^{-1}$ :

$$I(t)\bar{f} = - (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_1} e^{-\mu^\alpha t} \mu^{-1} R_L(\mu) g d\mu.$$

Неравенство  $|\mu|^{-1} \cdot \|R_L(\mu)\| \leq C|\mu|^{-2}$  позволяет перейти здесь к пределу при  $t \rightarrow +0$ :

$$\lim_{t \rightarrow +0} I(t)\bar{f} = - (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_1} \mu^{-1} R_L(\mu) g d\mu.$$

Правая часть вычисляется как вычет подынтегрального выражения в  $\mu = 0$ , который, как легко проверить, равен  $\bar{f}$ .

Докажем утверждение в) (справедливость которого заметил В. И. Мацаев). Будем сначала предполагать, что  $\alpha$  — целое число. Сделаем замену  $\mu = \xi t^{-1/\alpha}$ . Контур  $\Gamma$  перейдет в себя. Обозначим через  $\Gamma_2$  контур, получаемый из  $\Gamma$  заменой отрезков  $\{\xi; |\xi| \leq 1, \arg \xi = \pm \theta\}$  стягивающей их дугой  $\{\xi; |\xi| = 1, |\arg \xi| > \theta\}$ . Имеем

$$I(t) = - (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_2} e^{-\xi^\alpha} R_L(\xi t^{-1/\alpha}) d\xi \cdot t^{-1/\alpha}.$$

Используя оценку (35.24) и экспоненциальное убывание  $|e^{-\xi^\alpha}|$  на входящих в  $\Gamma_2$  лучах, легко получаем в).

Если  $\alpha$  нецелое, то приходится добавить к  $\Gamma_2$  контур  $\Gamma_3$ , состоящий из двух берегов разреза комплексной плоскости вдоль участка  $(-1, 0)$  вещественной оси. Интеграл по  $\Gamma_3$  равен

$$- (2\pi i)^{-1} \int_{-1}^0 e^{-|\xi|^\alpha \cos \alpha\pi} (-2i) \sin(|\xi|^\alpha \sin \alpha\pi) \times \\ \times R_L(\xi t^{-1/\alpha}) d\xi \cdot t^{-1/\alpha}.$$

Он также легко оценивается.

**5. Другие признаки базисности.** Еще два специальных признака базисности будут приведены в § 38 (см. формулу (38.20)) и п. 1 § 39.

### § 36. Скалярная задача со спектральным параметром в условии сопряжения

**1. Постановка задачи; ее связь с эллиптическим псевдодифференциальным уравнением на  $S$ .** Мы рассмотрим здесь задачу, несколько более общую, чем

в § 30<sup>1)</sup>. Ищется решение уравнения Гельмгольца в  $\mathbb{R}^n$  ( $n=2$  или  $3$ )

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad (36.1)$$

вне  $S$  ( $S$  — замкнутая бесконечно гладкая поверхность при  $n=3$ , кривая при  $n=2$ ), удовлетворяющее условиям

$$u^+(x) = u^-(x), \quad \text{на } S \quad (36.2)$$

$$\frac{\lambda}{\sigma(x)} \left[ \frac{\partial u^+(x)}{\partial N} - \frac{\partial u^-(x)}{\partial N} \right] + u(x) = g(x)$$

и условию излучения. Здесь  $\sigma(x)$  — фиксированная положительная<sup>2)</sup> функция из  $C^\infty(S)$ ,  $\lambda$  — спектральный параметр. Пусть  $k = k_1 + ik_2$  и для определенности  $k_1 > 0$ ,  $k_2 \leq 0$ . Тогда условие излучения можно записать в виде (ср. с (2.23))

$$\frac{\partial u(x)}{\partial r} + iku(x) = e^{-ikr_0} \left( r^{-\frac{n-1}{2}} \right) \quad \text{при } r = |x| \rightarrow \infty. \quad (36.3)$$

Как мы уже отмечали в § 30, неоднородность переведена здесь из правой части уравнения Гельмгольца в правую часть граничного условия вычитанием из решения падающего поля. При этом гладкость функции  $g$  в (36.2) определяется гладкостью исходной правой части  $f$  уравнения Гельмгольца вблизи  $S$ . Аналогичное замечание следует иметь в виду и при чтении §§ 37 и 40; мы уже не будем его повторять. Отметим еще, что выражение  $\lambda/\sigma(x)$  может быть комплексным вместе с  $\lambda$ .

Пусть  $V^+$  и  $V^-$  — внутренняя и внешняя области, на которые  $S$  делит  $\mathbb{R}^n$ . Через  $G(x-y)$  будем, как и в предыдущих параграфах, обозначать функцию Грина уравнения (36.1) с условием излучения на бесконечности, т. е.

$$G(x) = \begin{cases} -(4i)^{-1} H_0^{(2)}(k|x|) & \text{при } n=2, \\ -(4\pi|x|)^{-1} e^{-ik|x|} & \text{при } n=3. \end{cases} \quad (36.4)$$

Если  $u(x)$  — решение уравнения (36.1), гладкое в  $\bar{V}^+$  и в  $\bar{V}^-$  и удовлетворяющее условию (36.3), то, как

<sup>1)</sup> Ср. § 10, п. 3.  
<sup>2)</sup> До п. 8.

известно,

$$\pm \int_S \left[ \frac{\partial G(x-y)}{\partial N_y} u^\pm(y) - G(x-y) \frac{\partial u^\pm(y)}{\partial N} \right] dS_y = \chi_\pm(x) u(x) \quad (36.5)$$

вне  $S$ , где функция  $\chi_+$  равна 1 в  $V^+$  и 0 в  $V^-$ , функция  $\chi_-$  равна 1 в  $V^-$  и 0 в  $V^+$ ; нормаль, как мы условились в § 30, направлена в  $V^-$ . Следовательно, при первом из условий (36.2)

$$u(x) = \int_S G(x-y) \sigma(y) \varphi(y) dS_y \quad \text{вне } S, \quad (36.6)$$

$$\text{где } \varphi = \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial u^-}{\partial N} - \frac{\partial u^+}{\partial N} \right].$$

Подставляя это выражение для  $u(x)$  во второе из условий (36.2), приходим к уравнению Фредгольма, эквивалентному задаче:

$$A\varphi(x) - \lambda\varphi(x) = g(x), \quad (36.7)$$

где

$$A\varphi(x) = \int_S G(x-y) \sigma(y) \varphi(y) dS_y \quad (x \in S). \quad (36.8)$$

Смысл этой эквивалентности мы уточним в теореме 2.

Локально на  $S$  при  $n=3$  можно ввести ортогональные криволинейные координаты  $t = (t_1, t_2)$ , выразив декартовы координаты в виде функций  $x_j = x_j(t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) класса  $C^\infty$ . Обозначим через  $(t, \xi) = (t_1, t_2, \xi_1, \xi_2)$  соответствующие координаты в  $T^*S$  (см. п. 3 § 33) и через  $h_1(t), h_2(t)$  коэффициенты Ламе, т. е. длины векторов  $\partial x(t)/\partial t_1, \partial x(t)/\partial t_2$ . При  $n=2$  будем пользоваться аналогичными обозначениями:  $t$  — параметр на  $S$ ,  $x_j = x_j(t)$  ( $j = 1, 2$ ),  $(t, \xi)$  — координаты в  $T^*S$ ,  $h(t)$  — длина вектора  $x'(t)$ .

Теорема 1.  $A$  — эллиптический ПДО первого порядка на  $S$  с главным символом, равным при  $n=2$  и  $n=3$  соответственно

$$-\frac{1}{2} \sigma h |\xi|^{-1} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} \sigma [h_1^{-2} \xi_1^2 + h_2^{-2} \xi_2^2]^{-1/2}. \quad (36.9)$$



Доказательство. Для определенности пусть  $n=3$ . Пусть  $\omega_1, \omega_2$  — функции из  $C^\infty(S)$ . Условие I из п. 3 § 33 очевидным образом выполняется: если  $\omega_1, \omega_2$  имеют непересекающиеся носители, то  $\omega_1 A(\omega_2 \varphi)$  — интегральный оператор с бесконечно гладким ядром и, значит, бесконечно сглаживающий оператор. Пусть носители функций  $\omega_1, \omega_2$  лежат в одной координатной окрестности (с координатами  $t$ ). Тогда  $\omega_1 A(\omega_2 \varphi)$  — интегральный оператор в  $\mathbb{R}^2$  с ядром

$$-(4\pi)^{-1} \omega_1(t) \Phi(|x(t) - x(\bar{t})|) \sigma(x(\bar{t})) \omega_2(\bar{t}) h_1(\bar{t}) h_2(\bar{t}), \quad (36.10a)$$

где

$$\Phi(r) = \Phi_1(r) - i\Phi_2(r), \quad (36.10b)$$

$$\Phi_1(r) = r^{-1} \cos kr, \quad \Phi_2(r) = r^{-1} \sin kr.$$

Функции  $\cos kr$  и  $\Phi_2(r)$  разлагаются в ряды Тейлора по четным степеням  $r$ , так что  $\cos(k|x(t) - x(\bar{t})|)$  и  $\Phi_2(k|x(t) - x(\bar{t})|)$  — бесконечно гладкие функции. Поэтому при подстановке в (36.10a)  $\Phi_2$  вместо  $\Phi$  получается ядро бесконечно сглаживающего оператора; при подстановке  $\Phi_1$  вместо  $\Phi$  получается ядро, к которому применимы предложения 1 и 2 из п. 2 § 33. Они и приводят нас к цели. При  $n=2$  проходит аналогичное доказательство с применением предложений 3 и 4 из п. 2 § 33.

Следствие. Корневые функции оператора  $A$  принадлежат  $C^\infty(S)$ . Если  $0$  — собственное значение оператора  $A$ , то  $\text{Кег } A = \mathfrak{L}_A^1(0)$  конечномерно.

Здесь достаточно сослаться на п. 1 § 34. Ниже мы покажем, что  $A$  диссипативен (предложение 4); отсюда следует, что в  $\mathfrak{L}_A(0)$  нет присоединенных векторов (см. предложение 4<sup>о</sup> в п. 6 § 31), так что  $\text{Кег } A = \mathfrak{L}_A(0)$ . Без труда проверяется при помощи формул (36.6)

Предложение 1. Число  $\lambda=0$  является собственным значением оператора  $A$  при тех и только тех (вещественных)  $k$ , при которых внутренняя однородная задача Дирихле

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \text{ в } V^+, \quad u^+(x) = 0 \text{ на } S \quad (36.11)$$

имеет нетривиальные решения. При этом

$$\text{Кег } A = \left\{ \frac{\partial u^+}{\partial N}; \Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } V^+, u^+ = 0 \right\}. \quad (36.12)$$

В частности, пространство решений задачи (36.11) и  $\text{Кег } A$  имеют одинаковую размерность.

**2. Свойства решений; оценки их норм.** Пусть  $S$  лежит внутри шара  $E_R = \{x; |x| < R\}$  (круга при  $n=2$ ). Обозначим через  $V_R^-$  пересечение  $V^- \cap E_R$ .

Теорема 2. Пусть  $\lambda \in \Sigma(A)$ . Тогда при любой  $g \in H_s(S)$  ( $s \geq 1/2$ ) задача (36.1) — (36.3) имеет одно и только одно решение, принадлежащее  $H_{s+3/2}$  в  $V^+$  и в  $V_R^-$  с любым  $R^1$ ). При этом

$$\|u\|_{V^+, s+3/2} + \|u\|_{V_R^-, s+3/2} + \|u\|_{S, s+1} + \left\| \frac{\partial u^\pm}{\partial N} \right\|_{S, s} \leq C_s \|g\|_{S, s}, \quad (36.13)$$

где  $C_s$  не зависит от  $u$ . Если  $\text{Im } k < 0$ , то сказанное верно для  $V^-$  вместо  $V_R^-$ .

Это решение представимо первой из формул (36.6), где  $\varphi$  — (единственное) решение уравнения (36.7) в  $H_s(S)$ . Оно является бесконечно гладким вне  $S$  (в  $V^+$  и в  $V^-$ , если  $g \in C^\infty(S)$ ). Вне любой фиксированной окрестности этой поверхности при любом натуральном  $m$

$$\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u(x)| \leq C'_m (1 + |x|)^{-\frac{n-1}{2}} e^{k_2|x|} \|g\|_{S, 0}. \quad (36.14a)$$

Кроме того,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial r} + iku \right| \leq \eta(r) r^{-\frac{n-1}{2}} e^{k_2 r} \|g\|_{S, 0}, \quad (36.14b)$$

где  $\eta(r) \rightarrow 0$  при  $r = |x| \rightarrow \infty$ .

Смысл оценок, которые мы привели, состоит в том, что если функция  $g_q$  аппроксимирует  $g$  в  $H_s(S)$ , т. е.  $\|g - g_q\|_{S, s} \rightarrow 0$  при  $q \rightarrow \infty$ , а  $u_q$  — решение задачи с  $g_q$  вместо  $g$ , то  $u_q$  аппроксимирует  $u$  в смысле стремления к 0 левых частей в (36.13) — (36.14) после подстановки в них  $u - u_q$  вместо  $u$ .

Доказательство теоремы 2. Немного увеличив, если потребуется,  $R$ , мы можем предположить,

<sup>1</sup> Если  $n=3$ , то  $u(x)$  будет классическим решением задачи (непрерывным с производными до второго порядка включительно) при  $s > 2$ . Если же  $n=2$ , то это верно при  $s > 3/2$ . (См. 11<sup>о</sup> в § 32.)

что внутренняя однородная задача Дирихле в шаре  $E_R$  при данном  $k$  не имеет нетривиальных решений. Преобразуем задачу (36.1) — (36.3) в эквивалентную ей задачу в шаре  $E_R$ . Для этого воспользуемся формулой (36.5) с  $S_R = \{x; |x|=R\}$  вместо  $S$ . Переходя в ней к пределу при  $|x| \rightarrow R+0$ , получаем соотношение

$$A_1 \frac{\partial u^-}{\partial r} - B_1 u^- = \frac{1}{2} u^- \text{ на } S_R, \quad (36.15)$$

где

$$A_1 \varphi(x) = \int_{S_R} G(x-y) \varphi(y) dS_y,$$

$$B_1 \varphi(x) = \int_{S_R} \frac{\partial G(x-y)}{\partial N_y} \varphi(y) dS_y.$$

Здесь  $A_1$ , согласно теореме 1, — эллиптический ПДО порядка  $-1$  с вещественным главным символом. Из предложения 1 следует, что Кег  $A_1$  состоит из одного нуля, а из предложения 5° п. 1 § 34 — что существует ПДО  $A_1^{-1}$  порядка  $+1$ . В § 37 мы покажем, что  $B_1$  — ПДО порядка  $-1$ . Заменяя в (36.15)  $u^-$  на  $u^+$  и  $\partial u^-/\partial r$  на  $\partial u^+/\partial r$  и действуя на обе части оператором  $A_1^{-1}$ , приходим к соотношению

$$\frac{\partial u^+}{\partial r} - \frac{1}{2} A_1^{-1} u^+ - A_1^{-1} B_1 u^+ = 0 \text{ на } S_R. \quad (36.16)$$

Теперь вместо исходной задачи в  $\mathbf{R}^n$  мы можем рассматривать задачу в  $E_R$  для уравнения (36.1) вне  $S$  с условиями (36.2) на  $S$  и (36.16) на  $S_R$ . (Решение новой задачи легко продолжается в решение исходной задачи: для этого надо найти  $u^+$  и  $\partial u^+/\partial r$  на  $S_R$ , заменить их на  $u^-$  и  $\partial u^-/\partial r$  и подставить в формулу (36.5) с нижними знаками и  $S_R$  вместо  $S$ .)

Проверим, что новая задача эллиптическая. Эллиптичность условий на  $S$  (при  $\lambda \neq 0$ ) фактически проверена в п. 4 § 34 (см. формулу (34.10)). Рассмотрим условие (36.16). Пользуясь предложениями § 33 и формулой (36.9), мы заключаем, что  $A_1^{-1} B_1$  — ПДО нулевого порядка, а главный символ оператора  $-\frac{1}{2} A_1^{-1}$  равен

$[h_1^{-2} \xi_1^2 + h_2^{-2} \xi_2^2]^{1/2}$  при  $n=3$  в ортогональной системе координат на  $S_R$ . Но нам надо перейти к другой системе локальных координат (см. п. 4 § 34). Зафиксируем точку  $x_0 = x(t_1^0, t_2^0)$  на  $S_R$ ; в этой точке коэффициенты Ламе  $h_1, h_2$  мы можем принять равными 1. Тогда символ станет равным  $|\xi|$  в этой точке. Теперь спроектируем окрестность точки  $x_0$  на  $S_R$  на касательную плоскость к  $S_R$  в этой точке. Примем за оси координат в этой плоскости касательные к координатным линиям  $t_1 = t_1^0, t_2 = t_2^0$  с направлениями, отвечающими росту  $t_j$ . Мы получим новые локальные координаты на  $S_R$  в окрестности  $x_0$ , и в них символ останется равным  $|\xi|$  в  $x_0$  (см. формулу (33.3); матрица Якоби перехода от старых локальных координат к новым является единичной в  $x_0$ ). При  $n=2$  это также верно. Подставляя  $|\xi|$  вместо  $|\xi'|$  и  $|\xi|$  вместо  $a(0, \xi')$  в (34.8), убеждаемся, что условие эллиптичности выполнено и на  $S_R$ .

Итак, задача в  $E_R$  эллиптическая, и мы можем воспользоваться сказанным в п. 4 § 34. Легко видеть, что при  $\lambda \in \Sigma(A)$  для нее имеет место единственность: если бы при  $g=0$  задача имела нетривиальное решение, то оно было бы бесконечно гладким в  $\bar{V}^+$  и  $\bar{V}_R^-$  (ср. 2° в п. 4 § 34) и по второй формуле (36.6) давало бы нетривиальное решение уравнения (36.7) с  $g=0$ .

Это сразу дает нам все утверждения первого абзаца формулировки теоремы 2 (при  $\text{Im } k < 0$  в оценке (36.13) можно устремить  $R$  к  $\infty$ ). Остальные утверждения очевидны: в частности, левые части в (36.14) легко оцениваются через  $\|f\|_{S,0}$  при помощи первой из формул (36.6) и неравенства Коши — Буняковского, а  $\|f\|_{S,0}$  оценивается через  $\|g\|_{S,0}$  (см. (31.18)).

От условия  $s \geq 1/2$  можно освободиться, используя результаты из [12]; мы не будем здесь на этом останавливаться.

Если  $\lambda \in \Sigma(A)$ , причем  $\lambda \neq 0$ , то задача перестает, конечно, быть однозначно разрешимой. Формулы (36.6) осуществляют для таких  $\lambda$  взаимно однозначное соответствие между корневыми функциями  $\varphi_j$  оператора  $A$  и теми функциями  $u_j$ , по которым следует проводить разложения в ряды вне  $S$ . Если  $\varphi_j$  — собственная

функция,  $A\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$ , то  $u_j$  — решение задачи (36.1) — (36.3) с  $\lambda = \lambda_j$  и  $g = 0$ ; для присоединенных функций  $\varphi_j$  правая часть  $g$  также легко указывается. Используя эллиптичность нашей задачи в  $E_R$  при  $\lambda \neq 0$ , можно сделать заключение, что  $u_j \in C^\infty$  в  $\bar{V}^-$  и  $\bar{V}^+$ .

Число  $\lambda = 0$ , как мы видели в конце п. 1, также может быть собственным значением; соответствующим собственным функциям  $\varphi_j$  отвечают функции  $u_i$ , которые в  $V^-$  равны 0, а в  $V^+$  являются решениями задачи (36.11) и поэтому также принадлежат  $C^\infty(\bar{V}^+)$ .

**3. Теорема о базисности.** Введем в  $L^2(S)$  скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle_S = \int_S \varphi \bar{\psi} \sigma \, dS. \quad (36.17)$$

Соответствующая норма  $\langle \varphi, \varphi \rangle_S^{1/2}$  эквивалентна обычной норме  $\|\varphi\|_{S,0}$  в  $L^2(S)$ . Под  $A^*$  будем понимать оператор, сопряженный к  $A$  относительно нового скалярного произведения. Очевидно, что  $A^* = \bar{A}$ ; отсюда вытекают следствия, указанные в п. 6 § 31 (8° и 9°).

Согласно сказанному в п. 2 § 34, для характеристических чисел  $\nu_j$  самосопряженного оператора  $\operatorname{Re} A$  имеет место асимптотика

$$\nu_j = -c_2 j + O(1) \quad \text{при } n=2, \quad (36.18a)$$

$$\nu_j = -c_3 j^{1/2} + O(1) \quad \text{при } n=3,$$

где

$$c_2 = 2\pi \left( \int_S \sigma \, dS \right)^{-1} \quad \text{и} \quad c_3 = 4\sqrt{\pi} \left( \int_S \sigma^2 \, dS \right)^{-1/2}. \quad (36.18б)$$

**Предложение 2.** Оператор  $\operatorname{Im} A$  имеет порядок  $-\infty$ , если  $k$  вещественно, и порядок  $-3$ , если  $k$  мнимовещественно<sup>1)</sup>.

**Доказательство.** Так как  $A^* = \bar{A}$ , то  $\operatorname{Im} A = (A - \bar{A})/(2i)$  (см. 9° в п. 6 § 31). Оператор  $\bar{A}$  имеет

<sup>1)</sup> В последнем случае оператор «дальше» от самосопряженного, чем при вещественном  $k$ , что физически, видимо, связано с увеличением потерь. Аналогично обстоит дело с операторами, рассматриваемыми в §§ 37 и 40.

вид (36.8) с  $\bar{G}$  вместо  $G$ . Если  $\operatorname{Im} k = 0$ , то, как видно из (36.4),  $G - \bar{G}$  — бесконечно гладкая функция, так что  $\operatorname{Im} A$  — бесконечно сглаживающий оператор. Пусть  $\operatorname{Im} k \neq 0$ . Тогда при  $n=3$

$$\operatorname{Im}[e^{-ik|x|} |x|^{-1}] = -k_1 - 2k_1 k_2 |x| + \dots;$$

так как особенность здесь определяется членом с  $|x|$ , то  $\operatorname{Im} A$  — оператор порядка  $-3$  (в силу предложения 1 из п. 2 § 33). Нетрудно проверить, что последнее утверждение верно и при  $n=2$ , чем и заканчивается доказательство.

Теперь мы можем применить к оператору  $A$  признаки базисности, изложенные в пп. 1—3 § 35. Положим  $\mathfrak{H}_s = H_s(S)$ .

**Теорема 3.**  $A \in \mathbf{B}(H_s(S))$  при всех  $s$ , если  $\operatorname{Im} k = 0$  или  $n=2$  и  $\operatorname{Im} k < 0$ . Если же  $n=3$ ,  $\operatorname{Im} k < 0$ , то  $A \in \mathbf{R}(H_s(S))$  при всех  $s$ .

Для оператора  $A$  справедливы утверждения теоремы 2 из § 35 с  $\beta = 1/(n-1)$ ,  $\delta = 0$  и  $\inf \gamma = -\infty$  в случае  $\operatorname{Im} k = 0$ ,  $\gamma = -1$  в случае  $n=2$ ,  $\operatorname{Im} k < 0$ .

Если же  $n=3$ ,  $\operatorname{Im} k < 0$ , то для  $A$  справедливы утверждения теоремы 2' из § 35 с  $\beta = 1/2$ ,  $\delta = 0$ .

Чтобы немного расшифровать эту формулировку, напомним, что под  $\sum P_l f$  и  $\sum Q_l f$  сейчас нужно понимать ряды Фурье со скобками по корневым функциям оператора  $A$  и по собственным функциям оператора  $\operatorname{Re} A$  на  $S$ . Из теоремы 3 следует, что скобки можно расставлять способом, описанным в п. 2 § 35. При этом, чем выше гладкость функции  $f$ , заданной на  $S$ , тем быстрее сходится интересующий нас ряд  $\sum P_l f$ . Например, если  $f \in C^\infty(S)$ , то модули членов этого ряда убывают быстрее  $l^{-N}$  с любым натуральным  $N$  и такой же быстрой остается сходимость после (локального) почленного дифференцирования этого ряда любое число раз. Кроме того, за исключением случая  $n=3$ ,  $\operatorname{Im} k < 0$ , имеет место равносходимость рядов  $\sum P_l f$ ,  $\sum Q_l f$  для негладких или не очень гладких  $f$ , особенно быстрая при  $\operatorname{Im} k = 0$ . Например, если  $\operatorname{Im} k = 0$  и  $f \in C^{(1)}(S)$ , то модули функций  $P_l f - Q_l f$  убывают при  $l \rightarrow \infty$  быстрее  $l^{-N}$  с любым натуральным  $N$ . Такой же

характер сохраняет сходимость соответствующих рядов вне  $S$  в силу теоремы 2.

**4. Расположение собственных значений.** Используя утверждение 7° из п. 2 § 35 и последнее утверждение теоремы 1 из п. 1 § 35, получаем

Предложение 3. Для характеристических чисел  $\mu_j$  оператора  $A$  имеют место формулы

$$\mu_j \cdot j^{-1} \rightarrow -c_2 \text{ при } n=2, \quad \mu_j \cdot j^{-1/2} \rightarrow -c_3 \text{ при } n=3, \quad (36.18в)$$

$j \rightarrow \infty$ , где  $c_2, c_3$  определены в (36.18б). Все  $\mu_j$  находятся в объединении кругов вида  $\{\mu; |\mu - \nu_l| \leq C_q \nu_l^{-q}\}$ , где  $q=1$  при  $\text{Im } k < 0$  и  $q$  сколь угодно велико при  $\text{Im } k = 0$ .

В частности,  $\text{Im } \mu_j$  стремятся к 0, особенно быстро при  $\text{Im } k = 0$ .

Предложение 4.  $\text{Im} \langle A\varphi, \varphi \rangle_S > 0$  при  $A\varphi \neq 0$ . Следовательно, оператор  $A$  диссипативен и его ненулевые собственные значения  $\lambda_j$  лежат в полуплоскости  $\text{Im } \lambda > 0$ <sup>1)</sup>. Если  $k_2 = \text{Im } k < 0$ , то значения формы  $\langle A\varphi, \varphi \rangle_S$  с  $\varphi \neq 0$   $u$ , в частности,  $\lambda_j$  лежат в полуплоскости

$$\text{Re } \lambda + \gamma \text{Im } \lambda < 0, \quad \text{где } \gamma = (k_1^2 - k_2^2)(2k_1 k_2)^{-1}. \quad (36.19)$$

Доказательство. Пусть  $\varphi \in C^\infty(S)$ . Определим функцию  $\bar{u}(x)$  первой из формул (36.6) и применим к  $u(x)$  и  $\bar{u}(x)$  формулу Грина (2.5) для оператора Лапласа в областях  $V^+$  и  $V_R^-$ . Мы получим

$$\int_{E_R} \Delta \bar{u} \cdot u \, dx = - \int_{E_R} |\nabla u|^2 \, dx + \int_S \left( \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial N} - \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial N} \right) u \, dS + \int_{S_R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} u \, dS,$$

или

$$\langle A\varphi, \varphi \rangle_S = \bar{k}^2 \int_{E_R} |u|^2 \, dx - \int_{E_R} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{S_R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} u \, dS.$$

Предельным переходом это соотношение распространяется на случай  $\varphi \in H_0(S)$ . Используя условие излу-

чения и отделяя вещественные и мнимые части, получаем

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle A\varphi, \varphi \rangle_S &= \\ &= (k_1^2 - k_2^2) \int_{E_R} |u|^2 \, dx - \int_{E_R} |\nabla u|^2 \, dx + k_2 \int_{S_R} |u|^2 \, dS + o(1), \end{aligned} \quad (36.20а)$$

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle A\varphi, \varphi \rangle_S &= \\ &= -2k_1 k_2 \int_{E_R} |u|^2 \, dx + k_1 \int_{S_R} |u|^2 \, dS + o(1). \end{aligned} \quad (36.20б)$$

При  $k_2 < 0$  нужные соотношения получаются после перехода к пределу при  $R \rightarrow \infty$ . При  $k_2 = 0$  из (36.20б) имеем  $\text{Im} \langle A\varphi, \varphi \rangle_S \geq 0$ . Если предположить, что  $\text{Im} \langle A\varphi, \varphi \rangle_S = 0$ , то получим, что интеграл по  $S_R$  стремится к 0. Известно, что тогда  $u \equiv 0$  в  $V^-$  (см. [11], стр. 37, или [36], стр. 135). Значит,  $u^+ = 0$ ; но при  $A\varphi \neq 0$  это невозможно в силу предложения 1.

**5. Задача Дирихле**<sup>1)</sup>. Предположим, что 0 не является собственным значением оператора  $A$ , и рассмотрим задачу (36.1) — (36.3) при  $\lambda = 0$ . Она распадается на внутреннюю и внешнюю задачи Дирихле с  $u^+ = u^- = g$  на  $S$ ; внутренняя задача разрешима (это следует из предложения 1), внешняя всегда однозначно разрешима (см. [11] или [36]). Для этой «двойной» задачи Дирихле нетрудно получить теорему типа теоремы 2. Ограничимся замечанием, что оценка (36.13) заменится оценкой

$$\|u\|_{V^+, s+1/2} + \|u\|_{V_R^-, s+1/2} \leq C_s \|g\|_s. \quad (36.21)$$

Эта задача эквивалентна уравнению Фредгольма первого рода  $A\varphi = g$ . Для его решения снова можно использовать ряды по корневым функциям  $\varphi_j$  оператора  $A$  (при любом  $\sigma > 0$ ). Следует только учесть, что при  $g \in H_s(S)$  решение  $\varphi$  лежит в  $H_{s-1}(S)$  и удовлетворяет оценке  $\|\varphi\|_{s-1} \leq C_s \|g\|_s$  (так как  $A^{-1}$  — оператор первого порядка), так что ряд Фурье со скобками функции  $\varphi$

<sup>1)</sup> Последнее уже отмечалось в (10.7) для  $\text{Im } k = 0$ .

<sup>1)</sup> Ср. с п. 1 § 10.

по системе  $\{\varphi_j\}$  будет сходиться к ней, вообще говоря, только в  $H_{s-1}(S)$ .

Если  $\lambda=0$  — собственное значение оператора  $A$ , а целью является приближенное решение *внешней* задачи Дирихле, то можно поступить следующим образом. Заменим область  $V^+$  на  $V^+ \setminus E_\varepsilon$ , где  $E_\varepsilon$  — шар малого радиуса, лежащий внутри  $V^+$ , и подчиним решение условию  $\partial u / \partial r + \beta u = 0$  на его внешней поверхности  $S_\varepsilon$  с  $\beta = \text{Const}$ ,  $\text{Im } \beta < 0$ . Можно проверить, что модифицированная таким образом задача (36.1) — (36.3) с  $\lambda=0$  однозначно разрешима и эквивалентна интегральному уравнению  $\tilde{A}\varphi = g$ , в котором  $\tilde{A}$  уже не имеет собственного значения 0. Ядро оператора  $\tilde{A}$  имеет вид  $\tilde{G}(x, y) \sigma(y)$ , где  $\tilde{G}(x, y)$  — функция Грина для уравнения Гельмгольца в дополнении к  $E_\varepsilon$  с указанным выше условием на  $S_\varepsilon$  и условием излучения на бесконечности. Функция  $\tilde{G}(x, y) = G(x-y)$  принадлежит  $C^\infty$  при  $x, y \in S$  (см. [3], гл. III), так что  $\tilde{A} = A$  — бесконечно сглаживающий оператор. Поэтому для  $\tilde{A}$  сохраняются теоремы 1 и 3 и их следствия. Функцию  $\tilde{G}(x, y)$  можно выписать в явном виде (см. [67]).

**6. Случай, когда оператор  $A$  нормален.** Пусть  $\sigma \equiv 1$  и  $S$  — окружность (при  $n=2$ ) или сфера (при  $n=3$ ). В этом случае можно непосредственно проверить (см. [55]), что оператор  $A$  нормален:  $AA^* = A^*A$ . Это эквивалентно наличию у  $A$  ортонормированного базиса из собственных функций в  $L^2(S)$  (см., например, [2], гл. V); присоединенных функций нет. Нетрудно найти собственные функции, решая задачу (36.1) — (36.3) разделением переменных; это будут синусы и косинусы при  $n=2$ , сферические функции при  $n=3$ . Поскольку полнота этих ортогональных систем хорошо известна, мы заново получаем, что  $A$  нормален. Собственные значения вещественны; они по существу известны: см., например, в [15] формулы (7.2.51) и (11.3.44) (см. также выше конец п. 1 § 10).

Если  $S$  — эллипс или эллипсоид, то оператор  $A$  будет нормальным при специальном подборе  $\sigma(x)$  (см. [26]).

**7. Пример задачи с присоединенными векторами.** Рассмотрим одномерный аналог задачи (36.1) — (36.3).

В этом случае  $S$  состоит из двух точек — обозначим их  $a$  и  $b$ , — так что  $L^2(S)$  становится двумерным комплексным пространством  $C^2$ . Аналог оператора  $A$  имеет вид

$$\frac{i}{2k} \begin{pmatrix} \rho(a) & e^{-ik(b-a)} \rho(b) \\ e^{-ik(b-a)} \rho(a) & \rho(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(a) \\ \varphi(b) \end{pmatrix}. \quad (36.22)$$

Легко проверить, что этот оператор имеет присоединенный вектор при  $a = -1$ ,  $b = 1$ ;  $\rho(a)\rho^{-1}(b) = 3 \pm 2\sqrt{2}$ ;  $k = (2l+1)\pi/4$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ).

**8. Обобщения и варианты.** 1. Выше мы предполагали функцию  $\sigma(x)$  положительной. Откажемся теперь от этого предположения и будем считать, что  $\sigma(x)$  — *всюду отличная от 0 функция* из  $C^\infty(S)$  с комплексными значениями, принадлежащими углу  $\Psi_0 = \{\mu; \beta_1 < \arg \mu < \beta_2\}$ . Нам не удастся в этом случае рассматривать  $A$  как оператор, близкий к самосопряженному, так что теорема 3 теряет силу. Примем для простоты, что задача Дирихле (36.11) при данном  $k$  не имеет нетривиальных решений, и преобразуем уравнение (36.7) к виду

$$\mu\varphi - L\varphi = h, \quad (36.23)$$

где  $\mu = \lambda^{-1}$ ,  $L = A^{-1}$ ,  $h = \mu Lg$ . Обозначим через  $\Psi_1$  угол  $\{\mu; \bar{\mu} \in \Psi_0\}$  и через  $\Psi$  замкнутый угол  $\{\mu; -\mu \in \Psi_1\}$ . Мы ограничимся доказательством следующей теоремы:

**Теорема 4. Зафиксируем  $s \in \mathbb{R}$ . Существуют такие  $r > 0$  и  $C_s > 0$ , что при  $\mu \in \Psi$ ,  $|\mu| > r$  для любого  $h \in H_s(S)$  уравнение (36.23) имеет одно и только одно решение  $\varphi \in H_{s+1}(S)$ , причем справедлива оценка**

$$\|\varphi\|_{s,s+1} + |\mu| \cdot \|\varphi\|_{s,s} \leq C_s \|h\|_{s,s}. \quad (36.24)$$

Если  $\beta_2 - \beta_1 < \pi(n-1)^{-1}$  и  $\alpha \in (n-1, \pi(\beta_2 - \beta_1)^{-1})$ , то  $L \in \mathbf{A}(\alpha, H_s(S))$ .

Доказательство сводится к использованию теоремы об эллиптических ПДО с параметром, упомянутой, но не сформулированной в п. 5 § 34, и теоремы 3 из § 35. Пусть для определенности  $n=3$ . Приписывая параметру  $\mu$  порядок 1, сопоставим левой части в (36.23) главный символ

$$\mu + 2[h_1^{-2}(x)\xi_1^2 + h_2^{-2}(x)\xi_2^2]^{1/2} \sigma^{-1}(x). \quad (36.25)$$

Очевидно, что это выражение не обращается в 0, если  $\xi_1, \xi_2$  вещественны,  $\mu \in \Psi$  и  $(\mu, \xi) \neq 0$ . В этом и состоит усиленное условие эллиптичности для угла  $\Psi$ . В силу теоремы об эллиптических ПДО с параметром (см. например, [66]) оно дает все утверждения теоремы 4, кроме последнего. Последнее утверждение вытекает из теоремы 3 § 35: так как оператор  $L^{-1}$  имеет порядок  $-1$ , а  $S$  — размерность  $n-1$ , то условие 1'' из п. 4 § 35 выполнено с  $\beta = 1/(n-1)$  (см., например, [53]).

Отметим еще, что остается в силе теорема 2 и что корневые функции оператора  $A$  можно подчинить условию

$$\int_S \sigma(x) \varphi_j(x) \varphi_l(x) dS = \delta_{jl} \quad (36.26)$$

(см. 10° в п. 6 § 31).

2. Вместо задачи в  $\mathbf{R}^n$  можно рассмотреть аналогичную задачу в ограниченной области  $V_0$  пространства  $\mathbf{R}^n$ , содержащей  $S$  внутри себя. В этом случае ищется решение уравнения (36.1) в  $V_0$  вне  $S$ , подчиненное условиям (36.2) на  $S$  и одному из следующих условий:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial N} + a(x)u(x) = 0 \quad (36.27a)$$

или

$$u(x) = 0 \quad (36.27b)$$

на  $S_0$  — границе области  $V_0$ . Для простоты будем считать, что задача для уравнения Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = f$  в  $V_0$  с рассматриваемым условием (36.27) однозначно разрешима, и обозначим через  $G_1(x, y)$  функцию Грина этой задачи.

(Например, можно предположить либо что  $\text{Im } k < 0$  и условие на  $S_0$  имеет вид (36.27a) с  $\text{Im } a(x) \geq 0$  или вид (36.27b), либо что  $\text{Im } k = 0$  и условие на  $S_0$  имеет вид (36.27a) с  $\text{Im } a(x) \geq 0$  всюду и  $\text{Im } a(x) > 0$  где-нибудь на  $S_0$ .)

Для задачи (36.1), (36.2), (36.27) почти дословно сохраняются результаты, изложенные выше в этом параграфе. Роль функции  $G(x-y)$  всюду играет функция  $G_1(x, y)$ , обладающая, очевидно, свойством симметрии;

разность  $G_1(x, y) - G(x-y)$  принадлежит  $C^\infty$  при  $x, y \in S$ .

Если  $k > 0$ ,  $\sigma(x) > 0$  и условие на  $S_0$  имеет вид (36.27a) с  $\text{Im } a(x) = 0$  или вид (36.27b), то интегральный оператор на  $S$  с ядром  $G_1(x, y)\sigma(y)$  оказывается самосопряженным относительно скалярного произведения (36.17), так что существует ортонормированный относительно него базис из собственных функций в  $L^2(S)$ , остающийся ортогональным базисом в  $H_s(S)$  при надлежащем выборе скалярного произведения в этом пространстве.

### § 37. Другие скалярные задачи со спектральным параметром в граничных условиях

Первый пункт этого параграфа содержит подготовку к рассмотрению задач, которые будут сформулированы в п. 2.

1. **Выражения для  $u^\pm$  через  $\partial u^\pm / \partial N$ .** В этом параграфе мы будем обозначать буквой  $A$  оператор (36.8) с  $\sigma \equiv 1$  и буквой  $B$  — аналогичный оператор с ядром  $\partial G / \partial N_y$  вместо  $G$ :

$$A\varphi(x) = \int_S G(x-y)\varphi(y) dS_y, \quad B\varphi(x) = \int_S \frac{\partial G(x-y)}{\partial N_y} \varphi(y) dS_y. \quad (37.1)$$

Пусть  $u(x)$  — решение уравнения Гельмгольца (36.1) в  $V^+$  или  $V^-$ , подчиненное условию излучения (36.3) во втором случае и гладкое соответственно в  $\bar{V}^+$  или  $\bar{V}^-$ . Предельный переход при  $x \rightarrow S$  в формулах (36.5) приводит к хорошо известным соотношениям

$$Bu^+ - A \frac{\partial u^+}{\partial N} = \frac{1}{2} u^+, \quad A \frac{\partial u^-}{\partial N} - Bu^- = \frac{1}{2} u^-, \quad (37.2)$$

в частном случае уже использованным в § 36.

Предложение 1.  $B$  — ПДО порядка (не выше) — 1.

Доказательство. Для определенности пусть  $n = 3$ . Будем пользоваться обозначениями, введенными при доказательстве теоремы 1 § 36. Если  $\omega_1, \omega_2 \in C^\infty(S)$  имеют непересекающиеся носители, то  $\omega_1 B(\omega_2 \varphi)$  — бесконечно сглаживающий оператор. Пусть носители функций  $\omega_1, \omega_2$  лежат в одной координатной окрестности

с локальными ортогональными координатами  $t$ . Тогда  $\omega_1 B(\omega_2 \Phi)$  — интегральный оператор с ядром

$$-(4\pi)^{-1} \omega_1(t) \Phi'(|x-y|) \frac{\partial |x-y|}{\partial N_y} \omega_2(\tilde{t}) h_1(\tilde{t}) h_2(\tilde{t}),$$

где нужно подставить  $x = x(t)$ ,  $y = x(\tilde{t})$ . Вектор  $(\partial x / \partial t_1) \times (\partial x / \partial t_2)$  направлен по нормали к  $S$ , и нетрудно подсчитать, что при надлежащей ориентации осей  $t_1, t_2$

$$\frac{\partial |x-y|}{\partial N_y} = \frac{1}{|x-y|} h_1^{-1}(\tilde{t}) h_2^{-1}(\tilde{t}) D(t, \tilde{t}),$$

где

$$D(t, \tilde{t}) = \begin{vmatrix} x_1(\tilde{t}) - x_1(t) & x_2(\tilde{t}) - x_2(t) & x_3(\tilde{t}) - x_3(t) \\ \partial x_1(\tilde{t}) / \partial \tilde{t}_1 & \partial x_2(\tilde{t}) / \partial \tilde{t}_1 & \partial x_3(\tilde{t}) / \partial \tilde{t}_1 \\ \partial x_1(\tilde{t}) / \partial \tilde{t}_2 & \partial x_2(\tilde{t}) / \partial \tilde{t}_2 & \partial x_3(\tilde{t}) / \partial \tilde{t}_2 \end{vmatrix}.$$

Запишем последнюю функцию в виде  $D(t, t + \tau) = D_1(t, \tau)$ , где  $\tau = \tilde{t} - t$ . Она принадлежит  $C^\infty$ , а ее тейлоровское разложение по степеням  $\tau$  не содержит членов порядка  $< 2$ . Мы видим, что к оператору  $B$  применимо предложение 1 из п. 2 § 33 с  $p \geq 2$ ,  $q = 3$  и  $n = 3$ ; оно и дает желаемый результат. При  $n = 2$  нужно пользоваться предложением 3 из п. 2 § 33.

*Следствие.*  $I + 2B$  и  $I - 2B$  — эллиптические операторы нулевого порядка.  $\text{Ker}(I + 2B)$  и  $\text{Ker}(I - 2B)$  конечномерны и состоят из бесконечно гладких функций.

Ниже мы до п. 4 будем предполагать выполненными следующие условия:

1°. Внутренняя однородная задача Дирихле (36.11) не имеет нетривиальных решений.

2°. Внутренняя однородная задача Неймана

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \text{ в } V^+, \quad \frac{\partial u^+(x)}{\partial N} = 0 \text{ на } S \quad (37.3)$$

не имеет нетривиальных решений.

Этим временно исключаются из рассмотрения некоторые вещественные  $k$ .

Предложение 2. Условия 1° и 2° эквивалентны соответственно существованию ПДО  $(I + 2B)^{-1}$  и  $(I - 2B)^{-1}$  нулевого порядка.

Действительно, эти операторы имеют нулевой индекс (см. предложение 5° в п. 1 § 34), поэтому достаточно показать, что условия 1° и 2° эквивалентны соответ-

ственно условиям  $\text{Ker}(I + 2B) = \{0\}$  и  $\text{Ker}(I - 2B) = \{0\}$ . Это хорошо известный факт; он вытекает из предложения 1 § 36 и следующего предложения, которое понадобится в п. 4 (ср. [11], гл. II, § 8, и [36]):

Предложение 3.

$$\text{Ker}(I - 2B) = \left\{ u^+; \Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } V^+, \frac{\partial u^+}{\partial N} = 0 \right\}, \quad (37.4)$$

$$\text{Ker}(I + 2B) = \left\{ u^-; \Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } V^-, A \frac{\partial u^-}{\partial N} = 0 \right\}. \quad (37.5)$$

В последнем равенстве имеются в виду функции  $u(x)$ , удовлетворяющие условию излучения.

*Доказательство.* Проверим сначала формулу (37.5). Пусть  $\varphi$  — ненулевая функция из  $\text{Ker}(I + 2B)$ . Тогда  $\varphi \in C^\infty(S)$  и внешняя задача Дирихле для уравнения Гельмгольца в  $V^-$  с условием  $u^- = \varphi$  на  $S$  и условием излучения на бесконечности однозначно разрешима. Вторая из формул (37.2) показывает, что  $A(\partial u^- / \partial N) = 0$ . Пусть теперь  $\psi$  — ненулевая функция из  $\text{Ker} A$ . Тогда  $\psi \in C^\infty(S)$  и внешняя задача Неймана для уравнения Гельмгольца с условием  $\partial u^- / \partial N = \psi$  на  $S$  и условием излучения также однозначно разрешима. Вторая из формул (37.2) показывает, что  $(I + 2B)u^- = 0$ .

Теперь проверим формулу (37.4). Пусть  $u(x)$  — решение уравнения Гельмгольца в  $V^+$  с условием  $\partial u^+ / \partial N = 0$ . Первая из формул (37.2) показывает, что  $(I - 2B)u^+ = 0$ .

Теперь пусть  $\varphi$  — ненулевое решение уравнения  $(I - 2B)\varphi = 0$ . Будем решать задачу  $\Delta v + k^2 v = 0$  в  $V^+$ ,  $v^+ = \varphi$  на  $S$  при помощи потенциала двойного слоя

$$v(x) = \int_S \frac{\partial G(x-y)}{\partial N_y} \psi(y) dS_y, \quad (37.6)$$

Для  $\psi$  получим уравнение  $(I + 2B)\psi = 2\varphi$ . Для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы функция  $\varphi$  была ортогональна к  $\text{Ker}(I + 2B^*)$ . Это условие выполнено:  $2B\varphi = \varphi$ , и если  $2B^*\chi = -\chi$ , то функции  $\varphi$  и  $\chi$  ортогональны (см. 2°, 5° в § 31). Таким образом, нужное нам решение  $v$  существует. Первая из формул (37.2) показывает, что  $A(\partial v^+ / \partial N) = 0$ . Согласно формуле (36.12),

существует такое решение  $w$  уравнения  $\Delta w + k^2 w = 0$  в  $V^+$ , что  $\partial v^+ / \partial N = \partial w^+ / \partial N$  и  $w^+ = 0$  на  $S$ . Положим  $u = v - w$ . Тогда  $\Delta u + k^2 u = 0$  в  $V^+$ ,  $u^+ = \varphi$  и  $\partial u^+ / \partial N = 0$  на  $S$ . Доказательство закончено.

Очевидно, что формула (37.4) останется справедливой, если перед  $\partial u^+ / \partial N$  поставить  $A$ .

Введем операторы

$$T_+ = 2(I - 2B)^{-1} A, \quad T_- = 2(I + 2B)^{-1} A. \quad (37.7)$$

Из (37.2) следует, что

$$u^+ = -T_+ \frac{\partial u^+}{\partial N}, \quad u^- = T_- \frac{\partial u^-}{\partial N} \quad (37.8)$$

для решений уравнения Гельмгольца соответственно в  $V^+$  и  $V^-$  (гладких вплоть до  $S$ ) с условием излучения на бесконечности во втором случае. Формулы (37.8) выясняют смысл операторов (37.7), играющих дальше существенную роль.

Заметим, что оператор  $B' = \bar{B}^*$  вместе с  $B$  есть ПДО порядка  $-1$ . Звездочкой в этом пункте мы обозначаем оператор, сопряженный к данному относительно скалярного произведения (30.6).

Предложение 4. При условиях  $1^\circ$  и  $2^\circ$ , кроме формул (37.8), имеют место формулы

$$u^+ = -2A(I - 2B')^{-1} \frac{\partial u^+}{\partial N}, \quad u^- = 2A(I + 2B')^{-1} \frac{\partial u^-}{\partial N}. \quad (37.9)$$

Доказательство. Операторы  $I + 2B'$ ,  $I - 2B'$  обратимы одновременно с  $I + 2B$ ,  $I - 2B$  соответственно. Рассмотрим в  $V^+$  потенциал простого слоя

$$u(x) = \int_S G(x-y) \psi(y) dS_y \quad (37.10)$$

с гладкой плотностью  $\psi$ . Это решение уравнения Гельмгольца вне  $S$ , и для него  $u^+ = A\psi$ ,  $2\partial u^+ / \partial N = -(I - 2B')\psi$ . Отсюда для  $u^+(x)$  получается первая из формул (37.9). Она на самом деле имеет место для всех решений уравнения Гельмгольца в  $V^+$ , гладких в  $\bar{V}^+$ , так как при условии  $2^\circ$  решение однозначно определяется зада-

нием  $\partial u^+ / \partial N$  и по  $\partial u^+ / \partial N$  функция  $\psi$  определяется формулой  $\psi = -2(I - 2B')^{-1} \partial u^+ / \partial N$ .

Вторая из формул (37.9) получается аналогично.

Сравнивая формулы (37.8) и (37.9), получаем

Следствие 1.  $BA = AB'$ .

Предельным переходом это равенство распространяется на значения  $k$ , исключенные условиями  $1^\circ$  и  $2^\circ$ .

Следствие 2.  $T_+^* = \bar{T}_+$ ,  $T_-^* = \bar{T}_-$ .

Действительно, например,

$$T_+^* = 2[A(I - 2B')^{-1}]^* = 2(I - 2\bar{B})^{-1} A^* = \\ = 2(I - 2\bar{B})^{-1} \bar{A} = \bar{T}_+.$$

Можно также воспользоваться формулой Грина (2.8).

**2. Постановка задач и их сведение к псевдодифференциальным уравнениям на  $S$ .** Мы рассмотрим в этом параграфе три задачи <sup>1)</sup>.

1) *Внутренняя задача с импедансным условием.*

Ищется решение уравнения Гельмгольца (36.1) в  $V^+$ , удовлетворяющее условию

$$-\sigma_1(x) u^+(x) = \lambda \frac{\partial u^+(x)}{\partial N} + g(x) \text{ на } S. \quad (37.11)$$

2) *Внешняя задача с импедансным условием.* Ищется решение уравнения (36.1) в  $V^-$  с условием излучения (36.3) и условием

$$\sigma_1(x) u^-(x) = \lambda \frac{\partial u^-(x)}{\partial N} + g(x) \text{ на } S. \quad (37.12)$$

3) *Вторая задача со спектральным параметром в условии сопряжения.* Ищется решение уравнения (36.1) вне  $S$  с условием излучения и условиями

$$\frac{\partial u^+(x)}{\partial N} = \frac{\partial u^-(x)}{\partial N}, \\ \text{на } S. \quad (37.13)$$

$$\frac{1}{2} \sigma_1(x) [u^-(x) - u^+(x)] = \lambda \frac{\partial u(x)}{\partial N} + g(x)$$

<sup>1)</sup> Речь идет о  $w$ -методе и втором варианте  $\rho$ -метода (см. §§ 9 и 10). При  $\sigma_1(x) \equiv 1$  наш спектральный параметр  $\lambda$  совпадает с  $w$  в (37.11) и (37.12) и с  $(2\bar{\rho}_n)^{-1}$  в (37.13).



Во всех задачах  $\sigma_1(x)$  — положительная функция из  $C^\infty(S)$ . Функция  $\lambda\sigma_1^{-1}(x)$  может быть комплексной вместе с  $\lambda$ .

Положим

$$\mathcal{T}_\pm = \sigma_1 T_\pm, \quad \mathcal{T} = \frac{1}{2}[\mathcal{T}_+ + \mathcal{T}_-], \quad \varphi^\pm = \frac{\partial u^\pm}{\partial N}, \quad \varphi = \frac{\partial u}{\partial N}. \quad (37.14)$$

Из формул (37.8) видно, что задачи 1), 2), 3) эквивалентны соответственно уравнениям

$$\mathcal{T}_+ \varphi^+ = \lambda \varphi^+ + g, \quad \mathcal{T}_- \varphi^- = \lambda \varphi^- + g, \quad \mathcal{T} \varphi = \lambda \varphi + g. \quad (37.15)$$

Введем скалярное произведение (36.17) с  $\sigma = \sigma_1^{-1}$  и условимся звездочкой обозначать оператор, сопряженный к данному относительно этого скалярного произведения. Из следствия 2 (относящегося к случаю  $\sigma_1 \equiv 1$ ) вытекает, что  $\mathcal{T}_+^* = \bar{\mathcal{T}}_+$ ,  $\mathcal{T}_-^* = \bar{\mathcal{T}}_-$ ,  $\mathcal{T}^* = \bar{\mathcal{T}}$ .

Теорема 1.  $\mathcal{T}_+$ ,  $\mathcal{T}_-$ ,  $\mathcal{T}$ , а также  $\text{Re } \mathcal{T}_+$ ,  $\text{Re } \mathcal{T}_-$  и  $\text{Re } \mathcal{T}$  — эллиптические ПДО порядка  $-1$  с главным символом (36.9), где  $\sigma = 2\sigma_1$ .

Это следует из теоремы 1 § 36 (применяемой к оператору  $A$  с  $\sigma \equiv 1$ ), формул (37.14), (37.7) и теоремы о композиции 3° § 33.

Следствие. Корневые функции этих операторов принадлежат  $C^\infty(S)$ . Для характеристических чисел операторов  $\text{Re } \mathcal{T}_+$ ,  $\text{Re } \mathcal{T}_-$ ,  $\text{Re } \mathcal{T}$  имеет место асимптотика (36.18а, б) с  $\sigma = 2\sigma_1$ .

Для задач 1), 2), 3) можно получить теоремы, аналогичные теореме 2 § 36. Мы не будем на этом останавливаться; см. [35], [38].

**3. Спектральные свойства операторов  $\mathcal{T}_+$ ,  $\mathcal{T}_-$ ,  $\mathcal{T}$ .** Заметим прежде всего, что  $\mathcal{T}_+^* = \bar{\mathcal{T}}_+$  при вещественном  $k$ . Это легко проверяется при помощи формулы Грина (2.8) с  $\bar{v}$  вместо  $v$ . Самосопряженные операторы, связанные со значительно более общими задачами со спектральным параметром в граничном условии, изучались во многих работах; см., например, [34], [61] и указанные там ссылки.

Предложение 5. Если  $k$  вещественно, то  $\text{Im } \mathcal{T}_-$ ,  $\text{Im } \mathcal{T}$  — операторы порядка  $-\infty$ . Если  $k$  не вещественно, то  $\text{Im } \mathcal{T}_+$ ,  $\text{Im } \mathcal{T}_-$ ,  $\text{Im } \mathcal{T}$  — операторы порядка  $-3$ . В част-

ности, сказанное справедливо для операторов  $T_+$ ,  $T_-$ ,  $T$  при  $\sigma_1 \equiv 1$ .

Доказательство. Положим  $B_1 = (B + \bar{B})/2$ ,  $B_2 = (B - \bar{B})/(2i)$  и аналогичным образом определим  $A_1$ ,  $A_2$ . Мы знаем, что  $A_2$  — оператор порядка  $-\infty$  при  $\text{Im } k = 0$  и порядка  $-3$  при  $\text{Im } k \neq 0$  (предложение 2 § 36 при  $\sigma \equiv 1$ ). Точно такое же утверждение справедливо для  $B_2$ . Действительно, это интегральный оператор с ядром  $\partial \text{Im } G(x-y)/\partial N_y$ . При  $\text{Im } k = 0$  оно является бесконечно гладким, так как в этом случае  $\text{Im } G(x-y)$  — бесконечно гладкая функция. При  $\text{Im } k \neq 0$  и, скажем,  $n=3$  особенность рассматриваемого ядра определяется членом  $\partial |x-y|/\partial N_y$ . Как видно из доказательства предложения 1, это ядро ПДО порядка  $-3$ . Случай  $\text{Im } k \neq 0$ ,  $n=2$  разбирается аналогично.

Рассмотрим теперь для определенности  $\mathcal{T}_-$ . При любом натуральном  $q$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_- &= 2\sigma_1(I + 2B)^{-1} A = \\ &= 2\sigma_1 [I - 2B + \dots + (-2B)^q + (-2B)^{q+1}(I + 2B)^{-1}] A. \end{aligned}$$

Для  $\mathcal{T}_-$  имеет место аналогичная формула с заменой  $A$ ,  $B$  на  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Im } \mathcal{T}_- &= 2\sigma_1(I + 2B)^{-1} A_2 + \\ &+ 2\sigma_1 [-2B_2 + \dots + (-2)^q (B^q - \bar{B}^q)/(2i)] \bar{A} + \\ &+ 2\sigma_1 [(-2B)^{q+1}(I + 2B)^{-1} - (-2\bar{B})^{q+1}(I + 2\bar{B})^{-1}] \bar{A}/(2i). \end{aligned}$$

Первое слагаемое справа имеет такой же порядок, как  $A_2$ . В третьей строке стоит оператор порядка не выше  $-q-2$ , так как  $B$ ,  $\bar{B}$  и  $\bar{A}$  — операторы порядка  $-1$ . Во второй строке в квадратных скобках стоит оператор, который можно представить в виде суммы произведений операторов  $B_1$  и  $B_2$  с некоторыми коэффициентами, причем в каждом произведении множитель  $B_2$  присутствует хотя бы один раз. Теперь доказательство заканчивается без труда.

Аналогичным образом оно проходит для  $\mathcal{T}_+$ . Остается воспользоваться тем, что  $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_+ + \mathcal{T}_-)/2$ .

Используя признаки базисности пп. 1 — 3 § 35, получаем следующую теорему, аналогичную теореме 3 § 36. Положим  $\mathfrak{H}_s = H_s(S)$ .

**Теорема 2.**  $\mathcal{T}_-, \mathcal{T} \in \mathbf{B}(H_s(S))$  при всех  $s$ , если  $\text{Im } k = 0$  или  $n = 2$  и  $\text{Im } k < 0$ .  $\mathcal{T}_+ \in \mathbf{B}(H_s(S))$  при всех  $s$ , если  $n = 2$ ,  $\text{Im } k < 0$ . Если же  $n = 3$ ,  $\text{Im } k < 0$ , то  $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-, \mathcal{T} \in \mathbf{R}(H_s(S))$  при всех  $s$ .

Утверждения теоремы 2 из § 35 справедливы для операторов  $\mathcal{T}_-, \mathcal{T}$  при  $\text{Im } k = 0$  с  $\beta = 1/(n-1)$ ,  $\delta = 0$ ,  $\inf \gamma = -\infty$  и для операторов  $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-, \mathcal{T}$  при  $n = 2$ ,  $\text{Im } k < 0$  с  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\gamma = -1$ .

Если же  $n = 3$  и  $\text{Im } k < 0$ , то для  $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-, \mathcal{T}$  справедливы утверждения теоремы 2' из § 35 с  $\beta = 1/2$ ,  $\delta = 0$ .

Сказанное после теоремы 3 § 36 можно было бы повторить и здесь. Наиболее сильные утверждения получаются для бесконечно гладких функций, а также для  $\text{Im } k = 0$ .

На операторы  $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-, \mathcal{T}$  переносятся также предложение 3 (с  $\sigma = 2\sigma_1$  в (36.186)) и предложение 4 из § 36 (см. [38], а также (9.8) и (10.7) выше), причем 0 не является собственным значением (см. предложение 1 в § 36 для  $\sigma \equiv 1$ ; напоминаем, что условия 1° и 2° предполагаются выполненными). Если  $\sigma_1 \equiv 1$ , а  $S$  — окружность или сфера, то  $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_-, \mathcal{T}$  — нормальные операторы с теми же собственными функциями, что и у  $A$  при  $\sigma \equiv 1$  (см. п. 6 § 36, а также п. 2 § 1 и п. 1 § 10).

**4. Случай, когда условие 1° или 2° нарушено.** Рассмотрим сначала задачу 2). Для нее с самого пачала условие 2° можно было снять: оно не играет роли. Пусть нарушено условие 1°. Тогда обозначим через  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  операторы вида (37.1) с ядром  $\tilde{G}(x, y)$  вместо  $G(x - y)$ , где  $\tilde{G}(x, y)$  — функция Грина задачи, упомянутой в конце п. 5 § 36. Мы имеем  $\text{Ker } \tilde{A} = \{0\}$ , и аналог формулы (37.5) показывает, что  $\text{Ker}(I + 2\tilde{B}) = \{0\}$ . Поэтому

$$u^- = T_- \frac{\partial u^-}{\partial N}, \quad \text{где } T_- = 2(I + 2\tilde{B})^{-1} \tilde{A}. \quad (37.16)$$

Этот оператор  $T_-$  совпадает с прежним  $T_-$  при не-исключительных  $k$ . Поэтому соотношение  $\mathcal{T}_- = \tilde{\mathcal{T}}_-$  остается в силе для исключительных  $k$ . Так как  $A - \tilde{A}$

и  $B - \tilde{B}$  — бесконечно сглаживающие операторы, то  $\mathcal{T}_-$  — эллиптический оператор порядка  $-1$  с тем же, что и раньше, символом, а  $\text{Im } \mathcal{T}_-$ , поскольку  $k$  вещественно, — бесконечно сглаживающий оператор. Таким образом, теорема 2 сохраняется для  $\mathcal{T}_-$ .

Рассмотрим задачу 3). Для простоты предположим, что  $\sigma_1 \equiv 1$ . Пусть нарушено условие 2°. Тогда у задачи появляется «собственное значение»  $\infty$ : ему отвечают решения  $u(x)$ , равные 0 в  $\bar{V}^-$ , с  $du^+/\partial N = 0$ ,  $u^+ \in \text{Ker}(I - 2B)$ . При любом конечном  $\lambda$  решение задачи с  $g \in \text{Ker}(I - 2B)$  однозначно определяется в только что указанном классе: для этого достаточно положить  $u^+ = -2g$ . Обозначим через  $H^{(1)}$  ортогональное дополнение  $[\text{Ker}(I - 2B)]^\perp$  к  $\text{Ker}(I - 2B)$  и через  $P$  ортопроектор на  $H^{(1)}$  в  $H_0(S)$ . Мы можем считать, что  $g = Pg$ , и наша цель теперь заключается в том, чтобы привести задачу к уравнению на  $S$  в  $H^{(1)}$ .

Заметим, что если  $u(x)$  — решение уравнения Гельмгольца в  $\bar{V}^+$  с ненулевым значением  $du^+/\partial N$ , то обязательно  $du^+/\partial N \perp \text{Ker}(I - 2B)$ , так что  $du^+/\partial N = P(du^+/\partial N)$ . Действительно, если  $v \in \text{Ker}(I - 2B)$ , то, согласно (37.4),  $v = v^+$  — граничное значение решения уравнения Гельмгольца в  $V^+$  с  $\partial v^+/\partial N = 0$ ; тогда по формуле Грина (2.8)

$$\int_S \frac{\partial u^+}{\partial N} \bar{v}^+ dS = \int_S u^+ \frac{\partial \bar{v}^+}{\partial N} dS = 0. \quad (37.17)$$

Далее, формула (37.2) показывает, что  $A(du^+/\partial N)$  всегда принадлежит области значений оператора  $I - 2B$ . Поэтому можно написать

$$u^+ = -2(I - 2B)^{-1} A \frac{\partial u^+}{\partial N}; \quad (37.18)$$

но здесь  $u^+$  определено лишь с точностью до прибавления любого элемента из  $\text{Ker}(I - 2B)$ .

Что касается выражения для  $u^-$ , то его всегда можно записать в виде (37.16), где значок  $\sim$  можно снять, если условие 1° выполнено.

Теперь потребуем, чтобы

$$u^- - u^+ \perp \text{Ker}(I - 2B), \quad \text{т. е. } u^- - u^+ = P(u^- - u^+). \quad (37.19)$$

Этим  $u^+$  определяется однозначно, и окончательно

получаем

$$\frac{1}{2}(u^- - u^+) = P[(I + 2\tilde{B})^{-1}\tilde{A} + (I - 2B)^{-1}A]P\varphi, \quad (37.20)$$

где  $\varphi = du/\partial N = P\varphi$  в силу сделанного выше замечания. Задача 3) с  $g = Pg$  приводится, таким образом, к уравнению  $\mathcal{T}\varphi = \lambda\varphi + g$  в  $H^{(1)}$ , где  $\mathcal{T}\varphi$  равно правой части в (37.20).

Мы «отщепили»  $\text{Ker}(I - 2B)$ ; теперь можем продолжить  $\mathcal{T}$ , положив в  $\text{Ker}(I - 2B)$ , скажем,  $\mathcal{T} = I$ .

Оператор  $P$  можно записать в виде  $I - Q$ , где  $Q$  — ортопроектор на  $\text{Ker}(I - 2B)$ . Это конечномерный оператор; он является бесконечно сглаживающим, так как  $\text{Ker}(I - 2B) \subset C^\infty(S)$ , и совпадает с  $\bar{Q}$ , так как  $\text{Ker}(I - 2B) = \text{Ker}(I - 2\bar{B})$  [63]. Кроме того,  $Q = Q^*$ , так как это ортопроектор.

Из сказанного следует, что  $\mathcal{T}$  — эллиптический оператор порядка  $-1$  с тем же, что и раньше, главным символом, причем  $\mathcal{T}^* = \bar{\mathcal{T}}$ . Можно проверить, что  $\text{Im } \mathcal{T}$  — бесконечно сглаживающий оператор (ср. ниже § 40, п. 9). Теорема 2 снова применима.

Аналогичные соображения, на которых мы не будем останавливаться подробно, применимы к задаче 1), если нарушены условия 1° и 2° или одно из них. Здесь появляются собственные значения 0 и  $\infty$ , и отщеплению подлежат  $\text{Ker}(I - 2B)$  и  $\text{Ker } A$ . Можно показать, что последнее подпространство совпадает с  $\text{Ker}(I + 2B^*)$ .

**5. Обобщения и варианты.** В случае комплекснозначной функции  $\sigma_1(x)$  можно получить аналог теоремы 4 § 36. Можно перенести результаты на случай задач в ограниченной области  $V_0$  с одним из условий (36.27) на ее поверхности. Наконец, можно рассмотреть задачи сопряжения с более общими условиями на  $S$ , чем (37.13) (ср. [38]). На этом не будем останавливаться.

### § 38. Скалярная задача со спектральным параметром в уравнении

**1. Основные результаты.** Нам будет удобно записать задачу следующим образом<sup>1)</sup>. Ищется решение

уравнения

$$\Delta u(x) + [k^2 - \mu\sigma(x)]u(x) = f(x) \quad (38.1)$$

в  $\mathbb{R}^n$  вне  $S$  ( $n = 1, 2, 3$ ), подчиненное условию излучения (36.3) на бесконечности и условиям

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial N} = \frac{\partial u^-}{\partial N} \quad \text{на } S. \quad (38.2)$$

Функцию  $\sigma(x)$  предположим непрерывной в  $\bar{V}^+$  и равной 0 вне  $\bar{V}^+$ . До п. 4 будем считать ее положительной в  $\bar{V}^+$ ; но функция  $\mu\sigma(x)$  может принимать комплексные значения вместе с  $\mu$ . Как и в §§ 36, 37,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 \leq 0$ . Функцию  $f(x)$  будем считать равной 0 вне  $V^+$ . Этого нетрудно добиться вычитанием из решения интеграла  $\int G(x-y)f(y)dy$  (т. е. поля тех же источников в пустоте).

Значения  $u^-$  и  $du^-/\partial N$  на  $S$  связаны вторым из соотношений (37.2). Предположим выполненным условие 1° из § 37. (Это несущественное ограничение: если оно не выполнено, то следует заменить  $A, B$  на операторы  $\tilde{A}, \tilde{B}$  из п. 4 § 37.) Тогда это соотношение на  $S$  с учетом условий (38.2) преобразуется к виду (ср. с (36.16))

$$\frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{1}{2}A^{-1}u^+ - A^{-1}Bu^+ = 0 \quad \text{на } S. \quad (38.3)$$

Исходная задача эквивалентна задаче в  $V^+$  для уравнения (38.1) с условием (38.3).

Следующая теорема будет выведена из теоремы, относящейся к общим эллиптическим задачам с параметром (она упомянута, но не сформулирована в п. 5 § 34), и позволит нам воспользоваться теоремой 3 из § 35.

**Теорема 1.** Пусть  $\Theta_\delta$  — угол на комплексной плоскости  $\{\mu; |\arg \mu| \leq \pi - \delta\}$ . Тогда при сколь угодно малом  $\delta > 0$  существует такое  $R = R_\delta > 0$ , что при  $\mu \in \Theta_\delta$ ,  $|\mu| \geq R_\delta$  задача (38.1), (38.3) для любой  $f \in H_0(V^+)$  имеет одно и только одно решение  $u \in H_2(V^+)$ . При этом справедлива оценка

$$|\mu| \cdot \|u\|_{V^+,0} + \|u\|_{V^+,2} \leq C_\delta \|f\|_{V^+,0} \quad (38.4)$$

с не зависящей от  $f$  постоянной  $C_\delta$ .

<sup>1)</sup> В обозначениях § 5  $\mu\sigma(x)$  — это  $-\sigma[k(x) - 1]$ .

Доказательство похоже на доказательство теоремы 2 § 36, но теперь мы припишем параметру  $\mu$  порядок 2 и включим член с  $\mu$  в главный символ левой части в (38.1). Этот символ равен, таким образом,

$$-|\xi'|^2 - \mu\sigma(x). \quad (38.5)$$

Первое из усиленных условий эллиптичности для угла  $\Theta_\delta$  состоит в том, что этот символ отличен от 0 при  $x \in \bar{V}^+$ ,  $\xi \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mu \in \Theta_\delta$ ,  $(\xi, \mu) \neq 0$ . Это очевидно. Второе условие заключается в следующем. Вместо задачи (34.7) рассмотрим задачу

$$v''(t) - [|\xi'|^2 + \mu\sigma(0)]v(t) = 0 \quad \text{при } t > 0, \quad (38.6a)$$

$$-v'(t) + |\xi'|v(t) = h \quad \text{при } t = 0. \quad (38.6b)$$

Здесь начало координат в  $\mathbf{R}^n$  перенесено в произвольную точку на  $S$ ;  $|\xi'|$  в (38.6б) — главный символ оператора  $-\frac{1}{2}A^{-1}$  в этой точке (ср. доказательство теоремы 2 § 36). Эта задача при любом числе  $h$  имеет единственное решение  $v(t)$ , убывающее при  $t \rightarrow +\infty$ , если  $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ ,  $\mu \in \Theta_\delta$ ,  $(\xi', \mu) \neq 0$ . Действительно, при этих  $(\xi', \mu)$  убывающее при  $t \rightarrow +\infty$  решение уравнения (38.6a) имеет общий вид  $v(t) = Ce^{-\gamma t}$ , где  $\gamma^2 = |\xi'|^2 + \mu\sigma(0)$  и  $\operatorname{Re} \gamma > 0$ . Подставляя это  $v(t)$  в (38.6б), приходим к равенству  $[\gamma + |\xi'|]C = h$ , и здесь  $\gamma + |\xi'| \neq 0$  для нужных нам  $(\xi', \mu)$ .

Утверждение теоремы 1 вытекает теперь из общих теорем, доказанных в [60], [29] для дифференциальных эллиптических задач с параметром и перенесенных в [24a], гл. V, на задачи с псевдодифференциальными граничными условиями.

Добавим, что в левую часть оценки (38.4) можно включить члены  $|\mu|^{3/4} \|u\|_{S,0} + \|u\|_{S,3/2}$  и  $|\mu|^{1/4} \|\partial u / \partial N\|_{S,0} + \|\partial u / \partial N\|_{S,1/2}$ .

Отметим теперь, что исходную задачу легко свести к интегральному уравнению. Рассматривая функцию  $u(x)$  как принадлежащую  $H_2(V^+)$  и  $H_2(V_R^-)$  при сколь угодно большом  $R$  и пользуясь предложением 8° из § 32, мы можем «забыть» про  $S$  и считать, что уравнение (38.1)

выполняется всюду. Тогда

$$u(x) = \int_{V^+} G(x-y) [\mu\sigma(y)u(y) + f(y)] dy, \quad (38.7)$$

где  $G(x-y)$ , как и раньше, — функция Грина для уравнения Гельмгольца в  $\mathbf{R}^n$  с условием излучения на бесконечности, т. е.  $G(x)$  выражается формулой (36.4) при  $n=2$  или 3 и равно  $(i/2k)e^{-ik|x|}$  при  $n=1$ . Таким образом, исходная задача эквивалентна уравнению

$$u(x) = \mu Ku(x) + f_1(x), \quad (38.8)$$

где

$$Ku(x) = \int_{V^+} G(x-y)\sigma(y)u(y) dy \quad (x \in V^+) \quad (38.9)$$

и  $f_1 = K(\sigma^{-1}f)$  (ср. с (5.24)). Этот оператор действует ограниченным образом из  $H_0(V^+)$  в  $H_2(V^+)$  и поэтому вполне непрерывен в  $H_0(V^+)$ .

Следующая теорема дополняет теорему 1 и доказывается аналогично теореме 2 из § 36.

Теорема 2. Пусть  $\mu^{-1} \equiv \Sigma(K)$ . Тогда при любой  $f \in H_0(V^+)$  задача (38.1), (38.2), (36.3) имеет одно и только одно решение, принадлежащее  $H_2(E_R)$  в шаре  $E_R$  со сколь угодно большим  $R$ . При этом

$$\|u\|_{E_R,2} \leq C_R \|f\|_{V^+,0}. \quad (38.10)$$

Если  $\operatorname{Im} k < 0$ , то в (38.10)  $E_R$  можно заменить на  $\mathbf{R}^n$ . Кроме того,  $u(x)$  — бесконечно гладкая функция в  $V^-$ ; вне любой фиксированной окрестности множества  $\bar{V}^+$  при любом  $m$

$$\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u(x)| \leq C_m r^{-\frac{n-1}{2}} e^{k_2 r} \|f\|_{V^+,0} \quad (38.11a)$$

и

$$\left| \frac{\partial u}{\partial r} + iku \right| \leq \gamma(r) r^{-\frac{n-1}{2}} e^{k_2 r} \|f\|_{V^+,0}, \quad (38.11b)$$

где  $C_R, C_m, \gamma(r)$  не зависят от  $f$  и  $\gamma(r) \rightarrow 0$  при  $r = |x| \rightarrow \infty$ .

В левую часть оценки (38.10) можно включить  $\|u\|_{S,3/2}$  и  $\|\partial u / \partial N\|_{S,1/2}$ .

Сопоставим задаче (38.1), (38.3) оператор  $L$  в  $H_0(V^+)$ , определенный на функциях из  $H_2(V^+)$ , удовлетворяющих (38.3), и действующий по формуле  $Lu = \sigma^{-1}[\Delta u + k^2 u]$ . Этот оператор имеет дискретный спектр, поскольку оператор  $L^{-1} = K$  вполне непрерывен. Далее, так как  $\|f\|_{V^+,0} \leq C_1 \|\sigma^{-1}f\|_{V^+,0}$ , то из (38.4) следует, что оператор  $-L$  удовлетворяет условию 2'' из п. 4 § 35 со сколь угодно малым  $\theta = \delta$ . Так как  $L^{-1}$  — ограниченный оператор из  $H_0(V^+)$  в  $H_2(V^+)$ , а  $V^+$  имеет размерность  $n$ , то условие 1'' выполнено с  $\beta = 2/n$  (см., например, [53]). Поэтому применима теорема 3 из § 35, и мы получаем следующий результат:

**Теорема 3.**  $L \in \mathbf{A}(\alpha, H_0(V^+))$  при  $\alpha > n/2$ .

**Следствие.** Пусть  $\mu \in \Sigma(L)$ . Тогда ряд Фурье решения задачи (38.1), (38.3) по корневым функциям оператора  $L$  суммируется к  $u(x)$  методом Абеля порядка  $\alpha > n/2$  в  $H_2(V^+)$  и, значит, в  $C^{(\beta)}(V^+)$  при  $\beta < 2 - (n/2)$ .

В частности, это утверждение относится к функции  $f_1$  в (38.8), которая равна  $u(x)$  при  $\mu = 0$ .

Из теоремы 1 вытекает, что все собственные значения оператора  $L$ , кроме конечного их числа, находятся вне угла  $\Theta_\delta$  при сколь угодно малом  $\delta$ . Для задач с псевдодифференциальными граничными условиями справедливы полученные в [21] результаты по асимптотике собственных значений. Эти результаты дают:

**Предложение 1.** При  $n = 1, 2, 3$  для собственных значений  $\mu_j(L)$  имеет место асимптотика

$$\begin{aligned} \mu_j(L) \cdot j^{-2} &\rightarrow C_1, \\ \mu_j(L) \cdot j^{-1} &\rightarrow C_2, \\ \mu_j(L) \cdot j^{-2/3} &\rightarrow C_3 \end{aligned} \quad (38.12a)$$

( $j \rightarrow \infty$ ), где

$$\begin{aligned} C_1 &= -\pi^2 \left( \int_{V^+} \sigma^{1/2} dx \right)^{-2}, \quad C_2 = -4\pi \left( \int_{V^+} \sigma dx \right)^{-1}, \\ C_3 &= -(6\pi^2)^{2/3} \left( \int_{V^+} \sigma^{3/2} dx \right)^{-2/3}. \end{aligned} \quad (38.12b)$$

Введем в  $L^2(V^+)$  скалярное произведение

$$\langle u, v \rangle_{V^+} = \int_{V^+} u \bar{v} \sigma dx. \quad (38.13)$$

Норма  $\langle u, u \rangle_{V^+}^{1/2}$  эквивалентна  $\|u\|_{V^+,0}$ .

**Предложение 2.** Если  $\text{Im } k = 0$ , то  $\text{Im} \langle K\varphi, \varphi \rangle_{V^+} \geq 0$  и собственные значения оператора  $K$  лежат в открытой верхней полуплоскости<sup>1)</sup>. Если  $\text{Im } k < 0$ , то при  $\varphi \neq 0$  значения  $\langle K\varphi, \varphi \rangle_{V^+}$  лежат в пересечении открытой верхней полуплоскости с полуплоскостью (36.19), так что собственные значения оператора  $K$  лежат в этом пересечении. В частности, оператор  $K$  диссипативен.

Доказательство аналогично доказательству предложения 4 в § 36. Применяя формулу Грина (2.5) к объемному потенциалу  $u(x)$  с плотностью  $\sigma\varphi$  и  $v = \bar{u}$ , получаем после отделения вещественных и мнимых частей

$$\text{Im} \langle K\varphi, \varphi \rangle_{V^+} = -2k_1 k_2 \int_{E_R} |u|^2 dx + k_1 \int_{S_R} |u|^2 dS + o(1), \quad (38.14a)$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle K\varphi, \varphi \rangle_{V^+} &= (k_1^2 - k_2^2) \int_{E_R} |u|^2 dx - \\ &- \int_{E_R} |\nabla u|^2 dx + k_2 \int_{S_R} |u|^2 dS + o(1), \end{aligned} \quad (38.14b)$$

где  $E_R$  — шар большого радиуса  $R$  с центром в начале и  $S_R$  — его граница. Если  $k_2 = \text{Im } k < 0$ , то здесь можно перейти к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , после чего легко получают нужные утверждения. Пусть  $k_2 = 0$ . Тогда видно, что  $\text{Im} \langle K\varphi, \varphi \rangle_{V^+} \geq 0$ . Если здесь имеет место знак равенства, то интеграл по  $S_R$  стремится к 0 при  $R \rightarrow \infty$ , и тогда  $u(x) = 0$  в  $V^-$  (см. [11] или [36]), так что  $u^+ = 0$  и  $du^+/\partial N = 0$  на  $S$ . Допустим, что  $u = \lambda\varphi$  в  $V^+$ ; тогда  $u(x) = 0$  и в  $V^+$ : при  $\lambda \neq 0$  это следует из единственности решения задачи Коши для эллиптических уравнений второго порядка (см., например, [19], § 8.9), так

<sup>1)</sup> Ср. с (4.6).

что  $\varphi = (\Delta u + k^2 u) \sigma^{-1} = 0$  в  $V^+$ , чем и заканчивается доказательство.

2. Сравним полученные результаты с результатами §§ 36, 37. Там теоремы о базисности получены в шкале  $H_s(S)$ , а здесь — только в пространстве  $H_0(V^+)$  и в подпространстве пространства  $H_2(V^+)$ , состоящем из функций, удовлетворяющих граничным условиям (38.3). Объективная причина для этого состоит в том, что корневые функции подчинены граничным условиям (38.3), поэтому в  $H_s(V^+)$  при  $s > 3/2$  система корневых функций заведомо не полна. Это обстоятельство хорошо известно для дифференциальных эллиптических задач со спектральным параметром в эллиптическом уравнении.

Второе отличие состоит в том, что вместо теорем 1 и 2 § 35 мы смогли воспользоваться только теоремой 3 из § 35, хотя, скажем, при  $\text{Im } k = 0$  оператор  $\text{Im } K$  переводит функции из  $L^2(V^+)$  в функции из  $C^\infty(V^+)$ . Здесь причина состоит в том, что не удается выделить главную самосопряженную часть оператора  $L$  из-за «несамосопряженности» граничных условий (38.3). Обсудим это обстоятельство.

Оператор  $K^*$ , сопряженный к  $K$  относительно (38.13), совпадает с  $\bar{K}$ . Обозначим через  $\mathcal{R}$  область значений оператора  $K$ . Тогда  $\bar{K}$  имеет область значений  $\bar{\mathcal{R}}$ . Примем для простоты, что  $\sigma \equiv 1$ , и найдем их пересечение.

Предложение 3.  $\mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{R}}$  состоит из функций  $u(x) \in H_2(V^+)$  с нулевыми данными Коши  $u^+$ ,  $du^+/\partial N$  на  $S$ .

Доказательство. Пусть функция  $u(x)$  принадлежит  $H_2(V^+)$  и имеет нулевые данные Коши на  $S$ . Продолжим ее нулем в  $V^-$  и положим  $\Delta u + k^2 u = \varphi$ ,  $\Delta u + \bar{k}^2 u = \psi$ . Тогда

$$u(x) = \int_{V^+} G(x-y) \varphi(y) dy = \int_{V^+} \overline{G(x-y)} \psi(y) dy \quad (38.15)$$

в  $\mathbf{R}^n$  и, в частности, в  $V^+$ , так что  $u \in \mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{R}}$ .

(Если  $k = \bar{k}$ , то  $\varphi = \psi$ ,  $K_1 \varphi = 0$ . Ср. стр. 386.)

Обратно, пусть  $u(x) \in \mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{R}}$ . Тогда функция  $u(x)$  принадлежит  $H_2(V^+)$  и ее можно представить форму-

лами (38.15) в  $V^+$ . Из них видно, что  $\overline{u(x)} \in \mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{R}}$ ; значит,  $\text{Re } u(x)$ ,  $\text{Im } u(x)$  принадлежат  $\mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{R}}$ . Поэтому будем считать функцию  $u(x)$  вещественной. Так как  $\Delta u + k^2 u = \varphi$  в  $V^+$ , то  $2k_1 k_2 u = \text{Im } \varphi$ . Продолжим  $u(x)$  в  $V^-$  при помощи первой из формул (38.15). Формула (38.14a) показывает, что

$$0 = -2k_1 k_2 \int_{V^-} |u|^2 dx + k_1 \int_{S_R} |u|^2 dS + o(1).$$

Отсюда нетрудно вывести, что  $u(x) \equiv 0$  в  $V^-$  (см. стр. 375), так что  $u(x)$  имеет нулевые данные Коши на  $S$ .

Таким образом,  $K$  и  $K^*$  имеют существенно разные области значений, а  $L$  и  $L^*$  — соответственно разные области определения. Иначе обстояло дело в §§ 36, 37, где операторы  $A$  и  $A^*$ ,  $\mathcal{T}_\pm$  и  $\mathcal{T}_\pm^*$ ,  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{T}^*$  имели одинаковую область значений, обычно совпадающую с  $H_s(S)$  при каком-нибудь  $s$ .

3. Специальные случаи. Однако теорему 3 можно усилить при  $n=1$ . В этом случае задача (38.1), (38.3) становится дифференциальной:

$$u''(x) + k^2 u(x) = \mu \sigma(x) u(x) + f(x) \quad \text{на } (a, b), \quad (38.16)$$

$$u'(a) - iku(a) = 0, \quad u'(b) + iku(b) = 0. \quad (38.17)$$

Эта задача принадлежит к классу так называемых регулярных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, спектральные свойства которых хорошо изучены. Из общих теорем о регулярных задачах (см., например, [16], гл. II) вытекает следующее усиление предложения 1 в случае  $n=1$ :

Предложение 4. При  $n=1$  собственные значения  $\mu_j$  являются простыми, по крайней мере, начиная с некоторого номера. При этом

$$\mu_j(L) = C_j j^2 + O(1), \quad (38.18)$$

$$u_j(x) = \cos \left[ \pi j \left( \int_a^b \sqrt{\sigma} dx \right)^{-1} \int_a^x \sqrt{\sigma} dt \right] \cdot [1 + O(j^{-1})] \quad (38.19)$$

равномерно по  $x$  ( $j \geq j_0$ ).

Известно, что если все собственные значения диссипативного оператора простые, начиная с некоторого

номера, и система его корневых функций полна, то следующее условие достаточно для того, чтобы нормированные корневые функции составляли базис Бари (см. [6], гл. VI, § 4):

$$\sum_{j \neq k} \frac{\operatorname{Im} \mu_j \operatorname{Im} \mu_k}{|\mu_j - \mu_k|^2} < \infty. \quad (38.20)$$

Легко проверить, что это условие выполнено, если имеет место асимптотика (38.18). Таким образом, справедлива

**Теорема 4.** При  $n=1$  система нормированных корневых функций оператора  $L$  является базисом Бари в  $H_0(V^+)$ . Если  $\mu \in \Sigma(L)$ , то ряд Фурье решения  $u(x)$  задачи (38.16), (38.17) по этой системе сходится к  $u(x)$  в  $H_2(V^+)$  и, следовательно, в  $C^{(\alpha)}(V^+)$  при  $\alpha < 3/2$ .

В случае, когда  $\sigma(x) \equiv 1$  на  $[a, b]$  и, скажем,  $b - a = 1$ , положим  $l^2 = k^2 - \mu$ . Подставляя общее решение  $C_1 e^{ilx} + C_2 e^{-ilx}$  уравнения с  $f = 0$  в (38.17), приходим к трансцендентному уравнению для определения  $l$ , которое, как нетрудно проверить, распадается на два уравнения

$$(l + k) e^{il} \pm (l - k) = 0$$

без общих корней. Простому корню этого уравнения отвечает простое собственное значение  $\mu$ . Можно показать, что  $\operatorname{Im} k > 0$ , если есть кратный корень  $l$  (ср. [51]). Так как у нас  $\operatorname{Im} k \leq 0$ , то в рассматриваемом случае все собственные значения простые, присоединенных функций нет.

Можно показать, что их нет при  $\sigma \equiv 1$  также в случае, когда  $V^+$  — круг ( $n=2$ ) или шар ( $n=3$ ). Собственные функции вычисляются методом разделения переменных, и произвольные функции из  $H_0(V^+)$  разлагаются по собственным функциям соответственно в двукратные или трехкратные ряды (ср. с п. 3 § 4). Недостаток места не позволяет остановиться на этом; некоторые дополнительные подробности приведены в [25].

**4. Обобщения и варианты.** 1. Выше функция  $\sigma(x)$  предполагалась положительной в  $\bar{V}^+$ . Теперь будем считать, что она отлична от 0 и принимает комплексные значения, принадлежащие углу  $\Psi_0 = \{\mu; \beta_1 < \arg \mu < \beta_2\}$ .

Угол  $\Psi$  определим так же, как в п. 8 § 36. Тогда теорема 1 останется справедливой, если заменить условие  $\mu \in \Theta_\delta$  условием  $\mu \in \Psi$ . (В приведенной в п. 1 формулировке она отвечает случаю  $\beta_1 = -\delta$ ,  $\beta_2 = \delta$  со сколь угодно малым  $\delta > 0$ .) Действительно, при  $\mu \in \Psi$ , как нетрудно проверить, выполнены усиленные условия эллиптичности. Далее, теорема 3 принимает следующий вид:

**Теорема 3'.** Если  $\beta_2 - \beta_1 < 2\pi/n$ ,  $\alpha \in (n/2, \pi(\beta_2 - \beta_1)^{-1})$ , то  $L \in \mathbf{A}(\alpha, H_0(V^+))$ .

Аналогичным образом изменяется формулировка следствия из теоремы 3. Теорема 2 сохраняется, а предположение 1 утрачивает силу. Корневые функции можно подчинить условию

$$\int_V \sigma(x) \varphi_j(x) \varphi_l(x) dx = \delta_{jl} \quad (38.21)$$

(см. 10° в п. 6 § 31).

2. Как и в п. 8 § 36, можно заменить  $\mathbf{R}^n$  ограниченной областью  $V_0$ , содержащей  $\bar{V}^+$  внутри себя, поставив на ее границе  $S_0$  одно из условий (36.27) (ср. § 3). Изложенные в п. 1 и выше в настоящем пункте результаты почти дословно сохраняются. Если  $k$  и  $\sigma(x)$  положительны и условие на  $S_0$  имеет вид (36.27а) с  $\operatorname{Im} a(x) = 0$  или вид (36.27б), то аналог оператора  $K$  оказывается самосопряженным оператором относительно скалярного произведения (38.13).

3. Остановимся кратко на задачах, рассмотренных в § 2. Они похожи по своим свойствам на задачи, рассмотренные выше в этом параграфе. Нам будет удобно придать задачам § 2 следующий вид: рассматривается уравнение

$$\Delta u(x) - \mu \sigma(x) u(x) = f(x) \quad (38.22)$$

в ограниченной области  $V_0$  с одним из условий (36.27) на ее границе  $S_0$ . Функцию  $\sigma(x)$  будем считать непрерывной и отличной от 0 в  $\bar{V}_0$ . Сопоставим задаче (38.22), (36.27) оператор  $L$ , определенный на функциях из  $H_2(V_0)$ , удовлетворяющих рассматриваемому граничному условию на  $S_0$ , и действующий по формуле  $Lu = \sigma^{-1} \Delta u$ .

Если  $\sigma(x) > 0$  в  $\bar{V}_0$  и условие на  $S_0$  имеет вид (36.27а) с  $\text{Im } a(x) = 0$  или вид (36.27б), то  $L$  — самосопряженный оператор в  $H_0(V_0)$  относительно скалярного произведения  $\langle u, v \rangle_{V_0}$ . Это хорошо известно.

Если  $\sigma(x) > 0$ , а условие на  $S_0$  имеет вид (36.27а) с невещественной функцией  $a(x)$ , то граничное условие перестает быть самосопряженным. В этом случае задача удовлетворяет условиям усиленной эллиптичности в угле  $\Theta_\delta$  со сколь угодно малым  $\delta > 0$ , так что справедливы теорема 3, аналог следствия из нее и предложение 1 с заменой  $V^+$  на  $V_0$ .

Если же  $\sigma(x)$  — комплекснозначная функция со значениями, принадлежащими углу  $\Psi_0$ , то условия усиленной эллиптичности выполнены в угле  $\Psi$ , так что справедливы утверждения типа приведенных в начале этого пункта под номером 1 (в частности, теорема 3') с заменой  $V^+$  на  $V_0$ .

### § 39. s-метод

**1. s-метод в абстрактной форме.** В пп. 2 и 3 мы проанализируем подход к задачам дифракции, развитый в пп. 1 и 2 § 13. В настоящем пункте мы постараемся продвинуться возможно дальше в абстрактных терминах.

Пусть  $T_0 = T_1 + iT_2$  — любой вполне непрерывный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$ ,  $T_1$  и  $T_2$  — его вещественная и мнимая части. Это, как мы знаем, самосопряженные вполне непрерывные операторы (см. формулу (31.13)). Рассмотрим уравнение Фредгольма

$$(I + T_0)f = g. \quad (39.1)$$

Будем предполагать, что это уравнение однозначно разрешимо, т. е. что  $-1$  не является собственным значением оператора  $T_0$ . Отсюда следует (см. [6], гл. V, § 9), что оператор  $I + T_1 + hT_2$  имеет обратный для всех  $h$ , исключая некоторое дискретное множество значений.

Зафиксируем неисклнчительное вещественное  $h$  и положим

$$J = I + T_1 + hT_2, \quad T = J^{-1}T_2. \quad (39.2)$$

Оператор  $J$  является самосопряженным,  $T$  — вполне непрерывный оператор. Уравнение (39.1) эквивалентно уравнению

$$[T - (h - i)^{-1}I]f = g_1, \quad (39.3)$$

где  $g_1 = (i - h)^{-1}J^{-1}g$ . Мы хотим теперь выяснить возможность использования разложений по корневым векторам оператора  $T$  для решения уравнения (39.3) или эквивалентного ему уравнения (39.1). Иначе говоря, мы хотим выяснить свойства системы корневых векторов оператора  $T$ .

Для этого, следуя [6], гл. V, § 8, введем билинейную форму

$$[f, g] = (Jf, g) \quad (39.4a)$$

и заметим, что оператор  $T$  является самосопряженным относительно нее:

$$[Tf, g] = (T_2f, g) = (f, T_2g) = [f, Tg].$$

Наиболее простым является случай, когда все собственные значения  $\gamma_j$  оператора  $J$  положительны. Тогда среди них есть наименьшее (поскольку  $\gamma_j - 1 \rightarrow 0$  как собственные значения вполне непрерывного оператора); пусть это  $\gamma_1$ . Имеем  $\gamma_1 \|f\|^2 \leq [f, f] \leq \|J\| \cdot \|f\|^2$ , откуда видно, что форма (39.4а) обладает всеми свойствами скалярного произведения, причем нормы  $\|f\|$  и  $[f, f]^{1/2}$  эквивалентны. Так как  $T$  — самосопряженный относительно (39.4а) вполне непрерывный оператор, то в  $\mathfrak{H}$  существует базис из собственных векторов этого оператора, ортонормированный относительно (39.4а). В исходной метрике пространства  $\mathfrak{H}$  он будет базисом Рисса. Итак:

*1° Если все собственные значения оператора  $J$  положительны, то в  $\mathfrak{H}$  существует базис Рисса, составленный из собственных векторов оператора  $T$ , ортонормированный относительно скалярного произведения (39.4а).*

Положительности собственных значений оператора  $J$  иногда можно добиться за счет выбора  $h$ . Этого, однако, нельзя сделать, если есть такой вектор  $f$ , что  $T_2f = 0$  и  $((I + T_1)f, f) \leq 0$ .

Предположим теперь, что среди собственных значений оператора  $J$  есть отрицательные числа. Тогда квад-



ратичная форма  $[f, f]$  уже не будет положительно определенной. Однако билинейную форму (39.4а) можно рассматривать как *индефинитное скалярное произведение* в  $\mathfrak{H}$ . Отметим некоторые его свойства.

Пусть  $\{h_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) — ортонормированный базис из собственных векторов оператора  $J$  в  $\mathfrak{H}$  и  $Jh_j = \gamma_j h_j$ , причем нумерация установлена так, что  $\gamma_j < 0$  при  $j \leq k$  и  $\gamma_j > 0$  при  $j > k$ . Такую нумерацию можно ввести, поскольку  $\gamma_j \rightarrow 1 \rightarrow 0$ . Пусть  $\sum \alpha_j h_j$ ,  $\sum \beta_j h_j$  — ряды Фурье векторов  $f$ ,  $g$  по системе  $\{h_j\}$ . Тогда

$$[f, g] = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \alpha_j \bar{\beta}_j. \quad (39.4б)$$

Здесь первые  $k$  коэффициентов  $\gamma_j$  отрицательны, остальные положительные. Формула

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^k (-\gamma_j) \alpha_j \bar{\beta}_j + \sum_{j=k+1}^{\infty} \gamma_j \alpha_j \bar{\beta}_j$$

определяет скалярное произведение с обычными свойствами в  $\mathfrak{H}$ , причем нормы  $\{f, f\}^{1/2}$  и  $\|f\|$  эквивалентны, поскольку  $\gamma_j \rightarrow 1$ .

Согласно общепринятой терминологии, пространство  $\mathfrak{H}$ , снабженное индефинитным скалярным произведением (39.4), является *пространством Понтрягина*  $\Pi_*$ . (Мы не приводим аксиоматическое определение пространства Понтрягина; см. [41], [22].)

Если  $[f, g] = 0$ , то говорят, что векторы  $f$ ,  $g$  *J-ортогональны*. Оператор, самосопряженный относительно (39.4), называется *J-самосопряженным*.

Справедливо следующее предложение (см. [54], [41]):

2° Пусть  $T$  — вполне непрерывный *J-самосопряженный оператор* в  $\mathfrak{H}$ . Тогда он может иметь только конечное число не вещественных собственных значений и только конечное число линейно независимых присоединенных векторов. Если 0 — собственное значение, то отвечающие ему корневые векторы образуют (замкнутое) подпространство  $\mathfrak{L}_T(0)$ .

Подпространство  $\mathfrak{L}_T(0)$  может быть бесконечномерным. Согласно [31], справедлива следующая теорема:

3° Пусть  $T$  — вполне непрерывный *J-самосопряженный оператор*. Для того чтобы система его корневых векторов была полна в  $\mathfrak{H}$ , необходимо и достаточно, чтобы в  $\mathfrak{L}_T(0)$  не было вектора  $f \neq 0$ , *J-ортогонального* к  $\mathfrak{L}_T(0)$ . При выполнении этого условия в  $\mathfrak{H}$  существует базис Рисса, составленный из корневых векторов оператора  $T$ .

Предположим дополнительно, что оператор  $T$  *J-неотрицателен*:  $[Tf, f] \geq 0$  при всех  $f$  (или *J-неположителен*). Это равносильно предположению, что  $T_2$  неотрицателен:  $(T_2 f, f) \geq 0$ .

4° Пусть  $T$  — вполне непрерывный *J-самосопряженный J-неотрицательный* (или *J-неположительный*) оператор. Тогда все его собственные значения  $\lambda$  вещественны и в  $\mathfrak{L}_T(\lambda)$  при  $\lambda \neq 0$  нет присоединенных векторов. Их нет также в  $\mathfrak{L}_T(0)$ , если в  $\text{Ker} T$  нет вектора  $f \neq 0$ , *J-ортогонального* к  $\text{Ker} T$ , и в этом случае в  $\mathfrak{H}$  существует базис Рисса, составленный из собственных векторов оператора  $T$ <sup>1)</sup>.

Действительно, пусть  $Tf = \lambda f$ ,  $f \neq 0$ ,  $\lambda \neq 0$ . Тогда  $T_2 f \neq 0$  и  $\lambda [f, f] = (T_2 f, f) > 0$ , так что  $[f, f] \neq 0$  и  $\lambda$  вещественно. Допустим, что  $(T - \lambda)f_1 = f$ ; тогда  $[f, f] = [f_1, (T - \lambda)f_1] = 0$ , а это, как мы только что видели, невозможно (ср. [22], стр. 147).

Пусть в  $\text{Ker} T$  нет вектора  $f \neq 0$ , *J-ортогонального* к  $\text{Ker} T$ . Если  $Tf = 0$ ,  $f \neq 0$  и  $Tf_1 = f$ , то для любого вектора  $h \in \text{Ker} T$  имеем  $[f, h] = [f_1, Th] = 0$ , что противоречит предположению. Таким образом,  $\text{Ker} T = \mathfrak{L}_T(0)$ . Остается сослаться на 3°.

Сделаем еще следующее замечание. Пусть оператор  $T$  удовлетворяет условиям, указанным в 3°, и  $\{f_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) — базис Рисса из его корневых векторов. Предположим также, что все собственные значения оператора  $T$  вещественны. Тогда непосредственно проверяется, что

$$[f_j, f_l] = 0, \quad (39.5а)$$

если  $f_j, f_l$  отвечают разным собственным значениям. Далее, можно подчинить систему  $\{f_j\}$  условию

$$[f_j, f_j] = \varepsilon_j \quad (39.5б)$$

<sup>1)</sup> Если же в  $\mathfrak{L}_T(0)$  есть присоединенные векторы, то, как трудно проверить, их порядок равен 2.

для всех  $j$ , где  $\varepsilon_j = -1$  для  $\kappa$  значений  $j$  и  $\varepsilon_j = +1$  для остальных значений  $j$ . Последнее утверждение можно вывести из полученного в [31] разложения пространства  $\mathfrak{F}$  в  $J$ -ортогональную сумму нескольких корневых подпространств  $\mathfrak{L}_T(\lambda_j)$  ( $j=0, \dots, k$ ; здесь  $\lambda_0=0$ , если  $0$  — собственное значение; остальные  $\mathfrak{L}_T(\lambda_j)$  конечномерны) и инвариантного относительно  $T$  подпространства  $\mathfrak{N}$ , на котором форма  $[f, g]$  является обычным скалярным произведением и норма  $[f, f]^{1/2}$  эквивалентна  $\|f\|$ . В  $\mathfrak{N}$  оператор  $T$  имеет  $J$ -ортонормированный базис из собственных векторов. Каждое  $\mathfrak{L}_T(\lambda_j)$  является пространством Понтрягина  $\Pi_{\kappa_j}$  ( $\kappa_0 + \dots + \kappa_k = \kappa$ ) и допускает разложение в  $J$ -ортогональную сумму двух подпространств:  $\Pi^-(j)$  размерности  $\kappa_j$ , на котором  $-[f, g]$  — обычное скалярное произведение, и  $\Pi^+(j)$ , на котором  $[f, g]$  — обычное скалярное произведение (см. [41]). Остается в последних подпространствах выбрать ортонормированные базисы относительно указанных скалярных произведений.

Отметим также, что уравнению для собственных векторов и собственных значений оператора  $T$  можно придать вид

$$[T_2 - \lambda(I + T_1 + hT_2)]f = 0. \quad (39.6)$$

**2.  $s$ -метод в задаче о дифракции на полупрозрачной поверхности.** Рассмотрим уравнение (36.7), для определенности при  $\lambda = 1$ :

$$(A_R + iA_I - \Pi)\varphi(x) = g(x), \quad (39.7)$$

где  $A_R$  и  $A_I$  — вещественная и мнимая части оператора (36.8). Будем считать, что  $\sigma(x) > 0$ . (39.7) — это уравнение вида (39.1) с  $T_1 = -A_R$ ,  $T_2 = -A_I$ . В силу предложений 1 и 4 § 36 уравнение (39.7) однозначно разрешимо в  $H_0(S)$ , так как ненулевые собственные значения оператора  $A = A_R + iA_I$  не вещественны; оператор  $T_2$  неположителен, так как  $\text{Im} \langle A\varphi, \varphi \rangle_S = \langle A_I\varphi, \varphi \rangle_S$ ;  $\text{Ker } T_2 \neq \{0\}$  только для некоторых вещественных  $k$  и при этом конечномерно. Кроме того,  $T_1\varphi = 0$  для  $\varphi \in \text{Ker } T_2$ , и тогда  $[\varphi, \varphi] = \langle \varphi, \varphi \rangle_S \neq 0$ , если  $\varphi \neq 0$ . Таким образом, можно воспользоваться предложением 4° из п. 1:

**Теорема 1.** Пусть вещественное  $h$  выбрано так, что оператор  $J = I - A_R - hA_I$  обратим в  $H_0(S)$ . Тогда в  $H_0(S)$  существует базис Рисса  $\{u_j(x)\}$  ( $j=1, 2, \dots$ ), составленный из собственных функций оператора  $T = -J^{-1}A_I$ .

Примем теперь для простоты, что  $\text{Im } k = 0$  и  $h = 0$ , и обратимся к формулам п. 1 § 13. Уравнение (13.13) лишь обозначениями отличается от уравнения (39.6) для собственных функций оператора  $T = (I - A_R)^{-1}A_I$ , но в обозначениях § 13  $\lambda$  может оказаться равным  $\infty$ . А именно, при тех  $k$ , при которых задача Дирихле (36.11) имеет нетривиальные решения, функции  $u_j$  из  $\text{Ker } A_j = \text{Ker } A$  удовлетворяют уравнению (13.13), поделенному на  $\lambda$ , при  $\lambda^{-1} = 0$ . Соответствующее  $s$  равно  $-1$ . Однако если функция  $g$  получена по формуле

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y) dy,$$

где  $f$  — финитная функция, равная 0 в  $V^+$  (источники находятся в  $V^-$ ), то эти  $u_j$  не участвуют в разложении функции  $g$  по собственным функциям оператора  $T$ . Действительно,  $u_j$  можно считать вещественными, и соответствующие коэффициенты Фурье равны 0:

$$\begin{aligned} [g, u_j] &= \langle g, (I - A_R)u_j \rangle_S = \langle g, u_j \rangle_S = \int_S \sigma(x) g(x) u_j(x) dx = \\ &= \int_{V^-} f(y) \int_S G(x-y) \sigma(x) u_j(x) dS_x dy = 0, \end{aligned}$$

так как внутренний интеграл равен 0 при  $y \in S$  и, значит, при  $y \in V^-$  в силу единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца.

Используя ряд по  $\{u_j\}$  ( $j=1, 2, \dots$ ), мы можем построить решение уравнения (36.7) с  $\lambda = 1$  в  $H_0(S)$ . Можно также подставить  $u_j$  в первую из формул (36.6) вместо  $\varphi$  и получить функции  $u_j^S$  (см. формулу (13.14)), пригодные для разложения по ним решения задачи, поставленной в начале п. 1 § 36 (с  $\lambda = 1$ ). Это следует

из теоремы 2 § 36, распространенной на случай  $s=0$  (см. замечание после ее доказательства).

Наконец, отметим, что формула (13.16б) вытекает из (39.5а): если  $u_j, u_l$  отвечают разным собственным значениям  $\lambda_j, \lambda_l$ , то

$$\langle A_j u_j, u_l \rangle_S = \lambda_j [u_j, u_l] = 0.$$

**3. s-метод в задаче о дифракции на диэлектрическом теле.** Рассмотрим уравнение (38.8) при  $\mu = -1$ :

$$(I + K_R + iK_I)u(x) = f_1(x), \quad (39.8)$$

где  $K_R, K_I$  — вещественная и мнимая части оператора (38.9). Будем считать, что  $\sigma(x) > 0$  в  $\bar{V}^+$ . Основной интерес представляет случай, когда  $k > 0$ , но пока не будем исключать случай  $\text{Im } k < 0$ . (39.8) — уравнение вида (39.1) с  $T_1 = K_R, T_2 = K_I$ . Так как  $\text{Im} \langle K\varphi, \varphi \rangle_{V^+} = -\langle K_I \varphi, \varphi \rangle_{V^+}$ , то в силу предложения 2 § 38 оператор  $K_I$  неотрицателен. Формула (38.14а) показывает, что  $\text{Ker } K_I = \{0\}$  при  $k_2 = \text{Im } k < 0$ , а при  $k_2 = 0$  (ср. стр. 375, 376)

$\text{Ker } K_I =$

$$= \left\{ u; u = (\Delta\omega + k^2\omega)\sigma^{-1}, \omega \in H_2(V^+), \omega^+ = \frac{\partial\omega^+}{\partial N} = 0 \right\}. \quad (39.9)$$

Это бесконечномерное подпространство в  $H_0(V^+)$ . Выясним смысл условия, входящего в формулировку предложения 4° из п. 1. Оно состоит в том, что если для некоторой функции  $u$  и любой функции  $v$  из  $\text{Ker } K_I$

$$\langle (I + K)u, U \rangle_{V^+} = 0, \quad (39.10)$$

то  $u=0$ . Подставим сюда  $u = (\Delta\omega + k^2\omega)\sigma^{-1}$  и  $v = (\Delta\omega_1 + k^2\omega_1)\sigma^{-1}$ , где  $\omega, \omega_1$  — функции из  $H_2(V^+)$  с нулевыми данными Коши на  $S$ . Соотношение (39.10) примет вид (с учетом того, что  $k^2 + \sigma(x) = k^2\varepsilon(x)$ )

$$\int_{V^+} (\Delta\omega + k^2\varepsilon\omega) (\Delta\bar{\omega}_1 + k^2\bar{\omega}_1) \sigma^{-1} dx = 0.$$

Оно означает, что  $\omega(x)$  является обобщенным решением следующей задачи:

$$(\Delta + k^2)(\varepsilon - 1)^{-1}(\Delta + k^2\varepsilon)\omega = 0 \text{ в } V^+, \quad \omega^+ = \frac{\partial\omega^+}{\partial N} = 0 \text{ на } S. \quad (39.11)$$

Предположим, что  $\varepsilon \in C^{(2)}(\bar{V}^+)$ . В теории эллиптических граничных задач доказывается, что тогда всякое обобщенное решение такой задачи является классическим ее решением (см., например, [12], гл. 2, § 9). Таким образом, рассматриваемое условие выполнено, если задача (39.11) не имеет нетривиальных классических решений. Используя результаты из [29], можно показать, что при заданном  $\varepsilon$  значения  $k$ , для которых это условие нарушается, образуют не более чем счетное множество без конечных предельных точек.

**Теорема 2.** Пусть вещественное  $h$  выбрано так, что оператор  $J = I + K_R + hK_I$  обратим. Если  $\text{Im } k < 0$  или же  $\text{Im } k = 0$  и задача (39.11) не имеет нетривиальных классических решений, то в  $H_0(V^+)$  существует базис Рисса  $\{u_j(x)\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), составленный из собственных функций оператора  $T = J^{-1}K_I$ .

Добавим, что заведомо можно взять  $h=0$  и воспользоваться предложением 1° из п. 1, если норма оператора  $K_R$  меньше 1. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство (см. [9], гл. IX, § 2):

$$\int_{V^+} \int_{V^+} \sigma^2(x) \sigma^2(y) |\text{Re } G(x-y)|^2 dx dy < 1. \quad (39.12)$$

Теперь, считая, что  $\text{Im } k = 0$  и  $h=0$ , просмотрим формулы п. 2 § 13. Уравнение (13.27) лишь обозначениями отличается от уравнения (39.6) для собственных функций оператора  $T$ . В (13.27)  $\lambda$  может равняться  $\infty$ , и тогда  $s = -1$ ; но соответствующие собственные функции  $u_j(x)$  не участвуют в разложении функции

$$f_1(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y) dy$$

с финитной  $f$ , равной 0 в  $V^+$ . Действительно, пусть  $u_j = (\Delta w_j + k^2 w_j) \sigma^{-1}$ , где  $w_j \in H_2(V^+)$  имеет нулевые данные Коши на  $S$ ; можно считать, что функция  $w_j$  вещественна. Тогда

$$\begin{aligned} [f_1, u_j] &= \langle (I + K_R) f_1, u_j \rangle_{V^+} = \langle f_1, (I + K) u_j \rangle_{V^+} = \\ &= \int_{V^+} f_1 (\Delta + k^2 \varepsilon) w_j dx = \int_{V^+} (\Delta + k^2 \varepsilon) f_1 \cdot w_j dx = \\ &= \int_{V^+} \sigma f_1 w_j dx = \int_{V^-} f(y) \int_{V^+} G(x-y) w_j(x) \sigma(x) dx dy = 0, \end{aligned}$$

так как внутренний интеграл равен 0 при  $y \in V^-$ .

Если решение уравнения (38.8) можно строить в виде ряда по  $\{u_j\}$  ( $j=1, 2, \dots$ ), то объемные потенциалы  $u_j^S$  с плотностями  $-\sigma u_j$  (см. формулу (13.28)) пригодны для разложения по ним решения задачи, поставленной в п. 1 § 38 (с  $\mu = -1$ ), в силу теоремы 2 § 38.

Формулу (13.31) можно вывести из (39.5a): если  $u_j, u_l$  — собственные функции оператора  $T$ , отвечающие разным собственным значениям  $\lambda_j, \lambda_l$ , то (при  $h=0$ )

$$\begin{aligned} \langle u_j - u_j^S, u_l \rangle_{V^+} &= \\ = \langle (I + K_R) u_j, u_l \rangle_{V^+} + i \langle K u_j, u_l \rangle_{V^+} &= (1 + i \lambda_j) [u_j, u_l] = 0. \end{aligned}$$

**4. Пример.** Теорема 2 не дает ответа на вопрос, полна ли система корневых функций при исключительных значениях  $k$ , для которых задача (39.11) имеет нетривиальные решения. Мы не будем рассматривать здесь этот вопрос в общем виде, но заметим, что если при таком  $k$  интересующая нас система полна, то она заведомо содержит присоединенные функции, отвечающие нулевому собственному значению (так как иначе нарушено условие из предложения 3° п. 1, эквивалентное полноте). Ограничимся разбором следующего примера.

Рассмотрим задачу

$$u''(x) + 4u(x) = f(x) \quad \text{на } (-\pi, \pi), \quad (39.13a)$$

$$u'(-\pi) - iu(-\pi) = 0, \quad u'(\pi) + iu(\pi) = 0. \quad (39.13b)$$

Это задача (38.16), (38.17) с  $a = -\pi$ ,  $b = \pi$ ,  $k = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $\mu = -1$ ,  $\sigma = 3$ . (Можно проверить, что значение  $k = 1$  является исключительным, если  $\varepsilon = 4$ .) Полагая

$$T_1 \varphi(x) = \frac{3}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin|x-y| \varphi(y) dy, \quad (39.14)$$

$$T_2 \varphi(x) = \frac{3}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y) \varphi(y) dy,$$

приводим задачу к уравнению

$$(I + T_1 + iT_2) \varphi(x) = \frac{1}{3} f(x). \quad (39.15)$$

Здесь  $T_1 + iT_2$  — это оператор  $K$  из § 38. Оператор  $I + T_1$  обратим. Действительно, если  $(I + T_1)\varphi = 0$ , то, применяя к этому равенству оператор  $(d^2/dx^2) + 1$ , получаем  $\varphi'' + 4\varphi = 0$ , откуда  $\varphi(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ . Но функции  $\cos 2x$  и  $\sin 2x$  не являются собственными функциями оператора  $T_1$ : несложное вычисление показывает, что

$$T_1 \cos 2x = -\cos 2x - \cos x, \quad T_1 \sin 2x = -\sin 2x - \sin x. \quad (39.16)$$

Эти формулы сейчас нам понадобятся. Преобразуем уравнение (39.15) к виду

$$(T - i)\varphi(x) = g(x), \quad \text{где } T = (I + T_1)^{-1} T_2. \quad (39.17)$$

Мы утверждаем, что *тригонометрическая система*

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\} \quad (39.18)$$

*является системой корневых функций оператора  $T$  и что все они отвечают собственному значению  $\lambda = 0$ , причем  $1, \cos 2x, \dots$  — собственные функции, а  $\cos x$  и  $\sin x$  — присоединенные функции.*

Действительно, как нетрудно проверить, оператор  $T_2$  аннулирует все функции  $1, \cos 2x, \dots$ ; значит, это верно и для  $T$ . Функции  $\cos x$  и  $\sin x$  являются собственными функциями для  $T_2$ , отвечающими собственному значению  $3\pi/2$ . Поэтому из (39.16) следует, что

$$T \cos x = -\frac{3\pi}{2} \cos 2x, \quad T \sin x = -\frac{3\pi}{2} \sin 2x. \quad (39.19)$$

## § 40. Векторные задачи

## со спектральным параметром в граничных условиях

Задачи, которые мы хотим здесь рассмотреть, сформулированы в п. 5. До этого мы должны получить результаты, похожие на результаты п. 1 § 37.

1. Соотношения на  $S$  для решений системы Максвелла. Рассмотрим систему Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - ik\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + ik\mathbf{H} = 0 \quad (40.1)$$

в  $\mathbb{R}^3$  вне  $S$  при  $k = k_1 + ik_2 \neq 0$ ,  $k_1 \geq 0$ ,  $k_2 \leq 0$ . На бесконечности  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  подчиняются условиям излучения. При  $k_2 = 0$  их можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} r^{-1}\mathbf{x} \times \mathbf{E} - \mathbf{H} = o(r^{-1}), \quad r^{-1}\mathbf{x} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} = o(r^{-1}), \\ \mathbf{E} = O(r^{-1}), \quad \mathbf{H} = O(r^{-1}), \end{aligned} \right\} \quad (40.2)$$

где  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x)$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x)$ ,  $\mathbf{x}$  — радиус-вектор точки  $x$ ,  $r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . При  $k_2 < 0$  эти условия состоят в экспоненциальном убывании  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  на бесконечности.

Нам понадобится ряд фактов из теории системы (40.1); они будут приводиться по мере надобности со ссылками в основном на [23].

Введем на  $S$  векторные поля

$$\varphi^\pm = -\mathbf{N} \times \mathbf{H}^\pm, \quad \psi^\pm = \mathbf{N} \times \mathbf{E}^\pm. \quad (40.3)$$

Для решений системы (40.1) в  $V^+$  или  $V^-$ , гладких соответственно в  $\bar{V}^+$  или  $\bar{V}^-$  и удовлетворяющих во втором случае условию излучения, вне  $S$  имеют место формулы

$$\begin{aligned} \chi_\pm(x) \mathbf{E}(x) = & \pm \int_S [ik\varphi^\pm(y) G(x-y) + \\ & + \psi^\pm(y) \times \operatorname{grad}_y G(x-y) - \\ & - ik^{-1} \operatorname{div}_0 \varphi^\pm(y) \cdot \operatorname{grad}_y G(x-y)] dS_y, \end{aligned} \quad (40.4a)$$

$$\begin{aligned} \chi_\pm(x) \mathbf{H}(x) = & \pm \int_S [ik\psi^\pm(y) G(x-y) - \\ & - \varphi^\pm(y) \times \operatorname{grad}_y G(x-y) - \\ & - ik^{-1} \operatorname{div}_0 \psi^\pm(y) \cdot \operatorname{grad}_y G(x-y)] dS_y \end{aligned} \quad (40.4b)$$

(см. теоремы 36 и 37 в [23], а также [18], п. 12). Здесь, как и в § 36,  $\chi_\pm(x) = 1$  в  $V^\pm$  и 0 в  $V^\mp$ . Через  $\operatorname{div}_0$  обо-

значена *поверхностная дивергенция*. В локальных ортогональных координатах  $t = (t_1, t_2)$  на  $S$ , если  $\varphi = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2$  — разложение векторного поля  $\varphi(t)$  по соответствующим единичным векторам  $\mathbf{e}_1(t)$  и  $\mathbf{e}_2(t)$ <sup>1)</sup>, то

$$\operatorname{div}_0 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial (h_2 v^1)}{\partial t_1} + \frac{\partial (h_1 v^2)}{\partial t_2} \right], \quad (40.5)$$

где  $h_1, h_2$  — коэффициенты Ламе.

В формулах (40.4) можно сделать предельный переход при  $x \rightarrow S$ . Предварительно заметим, что справа в (40.4) в последних слагаемых под знаком интеграла  $\operatorname{grad}_y G(x-y) = -\operatorname{grad}_x G(x-y)$ ; операцию  $\operatorname{grad}_x$  можно вынести за знак интеграла. Заметим еще, что в средних слагаемых в (40.4) под знаком интеграла

$$\operatorname{grad}_y = \operatorname{grad}_{0y} + \mathbf{N}_y \frac{\partial}{\partial N_y}, \quad (40.6)$$

где *поверхностный градиент*  $\operatorname{grad}_0$  определяется формулой

$$\operatorname{grad}_0 U = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial t_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial t_2} \mathbf{e}_2. \quad (40.7)$$

Пользуясь результатами из § 13 в [23], приходим к следующим соотношениям (ср. [18], п. 13):

$$(I - B)\psi^+ = iA\varphi^+, \quad (I - B)\varphi^+ = -iA\psi^+, \quad (40.8a)$$

$$(I + B)\psi^- = -iA\varphi^-, \quad (I + B)\varphi^- = iA\psi^-. \quad (40.8b)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A\varphi(x) = & 2k\mathbf{N}_x \times \int_S G(x-y) \varphi(y) dS_y + \\ & + 2k^{-1} \mathbf{N}_x \times \operatorname{grad}_{0x} \int_S G(x-y) \operatorname{div}_0 \varphi(y) dS_y, \end{aligned} \quad (40.9a)$$

$$\begin{aligned} B\varphi(x) = & 2\mathbf{N}_x \times \int_S \varphi(y) \times \operatorname{grad}_y G(x-y) dS_y = \\ = & -2\mathbf{N}_x \times \int_S \frac{\partial G(x-y)}{\partial N_y} [\mathbf{N}_y \times \varphi(y)] dS_y + \\ & + 2\mathbf{N}_x \times \int_S \mathbf{N}_y (\operatorname{grad}_{0y} G(x-y) \cdot [\mathbf{N}_y \times \varphi(y)]) dS_y. \end{aligned} \quad (40.9b)$$

<sup>1)</sup> Тройка  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{N})$  всюду предполагается правой, вектор  $\mathbf{N} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$  направлен в  $V^-$ .

**2. ПДО в соболевских пространствах векторных полей на  $S$ .** Нам понадобятся теперь соболевские пространства вектор-функций на  $S$  и псевдодифференциальные операторы, действующие в этих пространствах. Более точно, эти функции будут векторными полями на  $S$ , т. е. сечениями касательного расслоения  $TS$  (см. п. 3 § 33). Мы сохраним для соболевских пространств векторных полей обозначение  $H_s(S)$ . В пространстве  $L^2(S) = H_0(S)$  векторных полей скалярное произведение двух полей  $\varphi, \tilde{\varphi}$ , локально записанных в виде  $\varphi = v^1 e_1 + v^2 e_2$  и  $\tilde{\varphi} = \tilde{w}^1 e_1 + \tilde{w}^2 e_2$ , определяется формулой

$$(\varphi, \tilde{\varphi})_S = \int_S (v^1 \tilde{w}^1 + v^2 \tilde{w}^2) dS, \quad (40.10)$$

не меняющейся при замене одних локальных ортогональных координат другими. Если носитель векторного поля  $\varphi$  лежит в одной координатной окрестности, то, по определению,  $\|\varphi\|_{S,s}^2 = \|v^1\|_{S,s}^2 + \|v^2\|_{S,s}^2$ . Все сказанное в § 32 о пространствах  $H_s$  скалярных функций на поверхности переносится на пространства  $H_s$  векторных полей.

ПДО сначала определяются на пространстве  $C^\infty(S)$  бесконечно гладких векторных полей. Если  $\mathcal{A}$  — такой оператор и  $\omega_1, \omega_2$  — две скалярные функции из  $C^\infty(S)$  с носителями в одной координатной окрестности, то оператор  $\omega_1 \mathcal{A}(\omega_2 \varphi) = \psi = w^1 e_1 + w^2 e_2$  записывается формулой

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \omega_1 \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix} \left[ \omega_2 \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \right], \quad (40.11)$$

где  $\varphi = v^1 e_1 + v^2 e_2$ ,  $\mathcal{A}_{ij}$  — скалярные ПДО в  $\mathbb{R}^2$ . Главный символ такого ПДО  $\mathcal{A}$  задан на ненулевых кокасательных к  $S$  векторах и локально записывается в виде матрицы  $a(t, \xi)$  второго порядка, бесконечно гладкой по  $(t, \xi)$  при  $\xi \neq 0$  и положительно однородной по  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ . Все предложения § 33 переносятся на такие ПДО со следующими естественными изменениями. 1) Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — два ПДО с главными символами  $a, b$  и  $\gamma_1, \gamma_2$  — их порядки. Тогда  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$  — оператор порядка  $\gamma_1 + \gamma_2 - 1$ , если  $ab = ba$ . 2) Оператор  $\mathcal{A}^*$ , сопряженный

к ПДО  $\mathcal{A}$  с главным символом  $a$  относительно скалярного произведения (40.10), есть ПДО с главным символом  $a^*$ , эрмитово сопряженным к  $a$ .

Условие эллиптичности теперь имеет вид  $\det a(x, \xi) \neq 0$  при  $\xi \neq 0$ . Предложения п. 1 § 34 также сохраняются, включая 5° (с  $a = a^*$ ).

Наконец, можно определить ПДО, переводящие скалярные функции в векторные поля на  $S$ , и ПДО, переводящие векторные поля в скалярные функции. Примерами могут служить соответственно дифференциальные операторы  $\text{grad}_0$  и  $\text{div}_0$ . Их символы в локальных ортогональных координатах имеют вид

$$i \begin{pmatrix} h_1^{-1} \xi_1 \\ h_2^{-1} \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad i (h_1^{-1} \xi_1, h_2^{-1} \xi_2). \quad (40.12)$$

Теорема о композиции 3° п. 1 § 33 остается в силе для любых двух ПДО из описанных классов, если только произведение этих ПДО имеет смысл.

**3. Операторы  $A$  и  $B$ .** Здесь мы покажем, что (40.9a) и (40.9б) — ПДО порядков 1 и  $-1$ , и вычислим главный символ оператора (40.9a).

Предложение 1. Оператор  $N_x \times$  есть ПДО нулевого порядка с символом

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (40.13)$$

в ортогональных локальных координатах<sup>1)</sup>.

Действительно, этот оператор переводит векторное поле  $v^1 e_1 + v^2 e_2$  в векторное поле  $-v^2 e_1 + v^1 e_2$ .

Полезно отметить, что  $N \times N \times = -I$ .

Индексом  $\text{tg}$  условимся обозначать касательную составляющую вектора, выходящего из точки на  $S$ .

Предложение 2. Операторы

$$\left[ \int_S G(x-y) \varphi(y) dS_y \right]_{\text{tg}}, \quad \left[ \int_S \frac{\partial G(x-y)}{\partial N_y} \varphi(y) dS_y \right]_{\text{tg}} \quad (40.14)$$

<sup>1)</sup> Дальше мы пользуемся только ортогональными локальными координатами и напоминать об этом больше не будем.

являются псевдодифференциальными операторами порядка  $-1$ . Первый из них имеет главный символ

$$-\frac{1}{2}[h_1^{-2}\xi_1^2 + h_2^{-2}\xi_2^2]^{-1/2} E, \quad (40.15)$$

где  $E$  — единичная матрица второго порядка.

Доказательство. Будем рассматривать операторы, получаемые умножением операторов (40.14) слева на  $\omega_1$  и умножением  $\varphi$  под знаками интегралов в (40.14) на  $\omega_2$ , где  $\omega_1, \omega_2$  — функции из  $C^\infty(S)$  с носителями в фиксированной координатной окрестности. Пусть  $t, \tilde{t}$  — локальные координаты точек  $x$  и  $y$ . Тогда

$$e_1(\tilde{t}) = \alpha_{11}(t, \tilde{t}) e_1(t) + \alpha_{12}(t, \tilde{t}) e_2(t) + \alpha_{13}(t, \tilde{t}) N_x,$$

$$e_2(\tilde{t}) = \alpha_{21}(t, \tilde{t}) e_1(t) + \alpha_{22}(t, \tilde{t}) e_2(t) + \alpha_{23}(t, \tilde{t}) N_x,$$

где  $\alpha_{ij}(t, \tilde{t})$  — бесконечно гладкие функции, равные  $\delta_{ij}$  при  $\tilde{t} = t$ . Рассмотрим, например, первый из интересующих нас операторов. Он переводит векторное поле  $\varphi(\tilde{t}) = v^1(\tilde{t}) e_1(\tilde{t}) + v^2(\tilde{t}) e_2(\tilde{t})$  в векторное поле  $\psi(t) = \omega^1(t) e_1(t) + \omega^2(t) e_2(t)$  по формуле

$$\begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix} = \omega_1(t) \int_{\mathbb{R}^2} G[x(t) - x(\tilde{t})] \times \\ \times \begin{pmatrix} \alpha_{11}(t, \tilde{t}) & \alpha_{21}(t, \tilde{t}) \\ \alpha_{12}(t, \tilde{t}) & \alpha_{22}(t, \tilde{t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(\tilde{t}) \\ v_2(\tilde{t}) \end{pmatrix} \omega_2(\tilde{t}) h_1(\tilde{t}) h_2(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Дальше надо воспользоваться такими же соображениями, как при доказательстве теоремы 1 в § 36. Второй из наших операторов рассматривается аналогично (см. доказательство предложения 1 в § 37).

Предложение 3. Оператор

$$\left[ \int_S N_y (\text{grad}_{0y} G(x-y) \cdot \varphi(y)) dS_y \right]_{\text{tg}} \quad (40.16)$$

есть ПДО порядка  $-1$ .

Доказательство. В тех же обозначениях, что и в предыдущем доказательстве,

$$N_y = \beta_1(t, \tilde{t}) e_1(t) + \beta_2(t, \tilde{t}) e_2(t) + \beta_3(t, \tilde{t}) N_x,$$

где  $\beta_i(t, \tilde{t})$  — бесконечно гладкие функции, причем  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равны 0 при  $t = \tilde{t}$ . Мы должны рассмотреть оператор

$$\begin{pmatrix} \omega^1(t) \\ \omega^2(t) \end{pmatrix} = \omega_1(t) \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} \beta_1(t, \tilde{t}) \\ \beta_2(t, \tilde{t}) \end{pmatrix} \Phi'(|x-y|) \times \\ \times \left[ \frac{1}{h_1(\tilde{t})} \frac{\partial |x-y|}{\partial \tilde{t}_1} v^1(\tilde{t}) + \frac{1}{h_2(\tilde{t})} \frac{\partial |x-y|}{\partial \tilde{t}_2} v^2(\tilde{t}) \right] \times \\ \times \omega_2(\tilde{t}) h_1(\tilde{t}) h_2(\tilde{t}) d\tilde{t},$$

где  $x = x(t), y = x(\tilde{t})$ . Здесь, например,

$$\frac{\partial |x-y|}{\partial \tilde{t}_1} = \frac{1}{|x-y|} \sum_{j=1}^3 [x_j(\tilde{t}) - x_j(t)] \frac{\partial x_j(\tilde{t})}{\partial \tilde{t}_1}.$$

Теперь можно применить предложение 1 из п. 2 § 33 с  $p=2, q=3, n=3$ .

Чтобы немного облегчить запись символов, положим

$$\eta_1 = h_1^{-1}(t) \xi_1, \quad \eta_2 = h_2^{-1}(t) \xi_2. \quad (40.17)$$

В этих обозначениях символ (40.15) равен  $-\frac{1}{2} |\eta|^{-1} E$ .

Предложение 4.  $A$  и  $B$  (см. формулы (40.9)) — ПДО соответственно порядков 1 и  $-1$ . Главный символ  $a(t, \xi)$  оператора  $A$  выражается формулой

$$a(t, \xi) = k^{-1} |\eta|^{-1} J \Xi, \quad \text{где } \Xi = \begin{pmatrix} \eta_1^2 & \eta_1 \eta_2 \\ \eta_1 \eta_2 & \eta_2^2 \end{pmatrix}. \quad (40.18)$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой о композиции  $3^\circ$  из § 33 и предложениями 1—3. При этом формула (40.18) получается из (40.12), (40.13) и (40.15).

4. Выражения для  $\psi^\pm$  через  $\varphi^\pm$  и для  $\varphi^\pm$  через  $\psi^\pm$ . До п. 9 мы будем предполагать выполненным следующее условие:

(а) Задача для системы (40.1) с условием  $N \times E^+ = 0$  на  $S$  не имеет нетривиальных гладких в  $\bar{V}^+$  решений<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Здесь  $E^+$  можно заменить на  $N^+$ , так как система (40.1) инвариантна относительно замены  $E$  на  $N, N$  на  $-E$ .

Этим мы временно исключаем из рассмотрения некоторые вещественные  $k$ .

Следующее предложение аналогично предложению 2 из § 37.

Предложение 5. Условие (а) эквивалентно существованию ПДО  $(I+B)^{-1}$  и  $(I-B)^{-1}$  нулевого порядка.

Доказательство. Так как  $I+B$  и  $I-B$  — эллиптические ПДО нулевого порядка с самосопряженным главным символом (он просто равен единичной матрице), то достаточно проверить, что условие (а) эквивалентно равенствам  $\text{Ker}(I \pm B) = \{0\}$ . В [23], § 25, показано, что  $\text{Ker}(I+B)$  и  $\text{Ker}(I-B)$  имеют одинаковую размерность. Допустим, что условие (а) нарушено и  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  — нетривиальное решение системы (40.1) в  $V^+ \subset \Psi^+ = \mathbf{N} \times \mathbf{E}^+ = 0$ . Тогда, как видно из (40.8а),  $(I-B)\varphi^+ = 0$ , причем  $\varphi^+$  не может быть тождественным нулем (см. формулы (40.4)).

Предположим, что уравнение  $(I+B)\psi = 0$  имеет нетривиальное решение  $\psi$ . Тогда  $\psi \in C^\infty(S)$ . Рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{E}(x) = \int_S \psi(y) \times \text{grad}_y G(x-y) dS_y, \quad (40.19a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x) = \\ = \int_S [ik\psi(y)G(x-y) - ik^{-1} \text{div}_0 \psi(y) \cdot \text{grad}_y G(x-y)] dS_y. \end{aligned} \quad (40.19b)$$

Согласно теореме 48 из [23], это решение системы (40.1) вне  $S$ , удовлетворяющее условиям излучения, для которого

$$\psi^+ - \psi^- = \psi, \quad \varphi^+ = \varphi^-. \quad (40.20)$$

В силу теоремы 43 из [23],  $2\mathbf{N} \times \mathbf{E}^+ = (I+B)\psi = 0$ . Таким образом,  $\psi^+ = 0$ . Если предположить, что и  $\varphi^+ = 0$ , то мы получим, что  $\varphi^- = 0$ , а тогда  $\psi^- = 0$  в силу единственности решения внешней задачи в  $V^-$  с условием  $\mathbf{N} \times \mathbf{H}^- = 0$  на  $S$  ([23], § 25). Это невозможно, поэтому  $\varphi^+ \neq 0$  и условие (а) нарушено. Доказательство закончено.

Теперь при условии (а) мы можем переписать (40.8) в виде

$$\psi^+ = i(I-B)^{-1} A\varphi^+, \quad \varphi^+ = -i(I-B)^{-1} A\psi^+, \quad (40.21a)$$

$$\psi^- = -i(I+B)^{-1} A\varphi^-, \quad \varphi^- = i(I+B)^{-1} A\psi^-. \quad (40.21b)$$

Заметим, что здесь  $\psi^-$  и  $\psi^+$  могут быть любыми векторными полями из  $C^{(1)}(S)$ . Действительно, внешняя задача с условием  $\mathbf{N} \times \mathbf{E}^- = \psi^-$  всегда разрешима, а внутренняя разрешима при условии (а). (Условие ее разрешимости, как показано в [23], § 25, имеет вид  $\psi^+ \perp \text{Ker}(I+B^*)$ , но при условии (а)  $\dim \text{Ker}(I+B^*) = \dim \text{Ker}(I+B) = 0$ .) Мы получаем из (40.21), что  $[(I \pm B)^{-1} A]^2 \psi = \psi$  для гладких  $\psi$  и, значит, вообще для всех  $\psi$ :

$$[(I+B)^{-1} A]^2 = I, \quad [(I-B)^{-1} A]^2 = I. \quad (40.22)$$

Оператор  $(I \pm B)^{-1} A$  первого порядка оказывается сам к себе обратным. (В частности, главный символ левых частей в (40.22) как операторов порядка 2 равен 0. В этом можно убедиться непосредственно:  $a^2(t, \xi)$  — нулевая матрица.)

Заметим еще, что при произвольном векторном поле  $\psi \in C^{(1)}(S)$  для решения (40.19) системы Максвелла имеют место соотношения  $2\psi^+ = (I+B)\psi$ ,  $\varphi^+ = -(i/2)A\psi$ , причем первое из этих равенств позволяет найти  $\psi$  по  $\psi^+$  (при условии (а)). Мы получаем следующую формулу:  $\varphi^+ = -iA \cdot (I+B)^{-1} \psi^+$ . Сравнивая ее со второй из формул (40.21а), видим, что  $A(I+B)^{-1} = (I-B)^{-1}A$ . Отсюда вытекает

$$\text{Предложение 6. } AB = -BA, \quad A(I \pm B)^{-1} = (I \mp B)^{-1}A.$$

Первое из этих равенств предельным переходом распространяется на значения  $k$ , исключенные условием (а).

5. Постановка задач; их сведение к псевдодифференциальным уравнениям на  $S$ . Мы рассмотрим параллельно три задачи<sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> См. в § 14 импедансный метод и метод поверхностного магнитного тока. Наше  $\lambda$  в (40.23), (40.24) пропорционально  $\omega$  в (14.4), а  $\lambda$  в (40.25) обратно пропорционально  $\rho$  в (14.31).



I. Ищется решение системы (40.1) в  $V^+$ , удовлетворяющее условию

$$\lambda(\mathbf{N} \times \mathbf{H}^+) - i \mathbf{E}_{ig}^+ = \mathbf{g} \text{ на } S. \quad (40.23)$$

II. Ищется решение системы (40.1) в  $V^-$ , удовлетворяющее условию

$$\lambda(\mathbf{N} \times \mathbf{H}^-) + i \mathbf{E}_{ig}^- = \mathbf{g} \text{ на } S \quad (40.24)$$

и условиям излучения на бесконечности.

III. Ищется решение системы (40.1) вне  $S$ , удовлетворяющее условиям

$$\mathbf{H}_{ig}^+ = \mathbf{H}_{ig}^-, \quad \lambda(\mathbf{N} \times \mathbf{H}) + \frac{i}{2}(\mathbf{E}_{ig}^- - \mathbf{E}_{ig}^+) = \mathbf{g} \text{ на } S \quad (40.25)$$

и условиям излучения.

Введем операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_I &= -\mathbf{N} \times (I - B)^{-1} A, \quad \mathcal{A}_{II} = -\mathbf{N} \times (I + B)^{-1} A, \\ \mathcal{A}_{III} &= \frac{1}{2}(\mathcal{A}_I + \mathcal{A}_{II}) = -\mathbf{N} \times (I - B^2)^{-1} A. \end{aligned} \quad (40.26)$$

Из (40.21) видно, что задачи I, II, III приводятся соответственно к уравнениям

$$(\mathcal{A}_I - \lambda)\varphi^+ = \mathbf{g}, \quad (\mathcal{A}_{II} - \lambda)\varphi^- = \mathbf{g}, \quad (\mathcal{A}_{III} - \lambda)\varphi = \mathbf{g}. \quad (40.27)$$

Предложение 7.  $\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_{II}, \mathcal{A}_{III}$  — ПДО первого порядка с одним и тем же главным символом  $-J \cdot a(t, \xi) = k^{-1} |\eta|^{-1} \Xi$ . Существуют обратные к ним ПДО первого порядка

$$\mathcal{A}_I^{-1} = (I - B)^{-1} A \mathbf{N} \times, \quad \mathcal{A}_{II}^{-1} = (I + B)^{-1} A \mathbf{N} \times, \quad \mathcal{A}_{III}^{-1} = A \mathbf{N} \times \quad (40.28)$$

с главным символом  $a(t, \xi) J = k^{-1} |\eta|^{-1} J \Xi J$ .

Это вытекает из предложений 1, 4 и 6 и формул (40.22).

Так как  $\det \Xi = 0$ , то операторы  $\mathcal{A}$ , конечно, не эллиптичны.

**6. Преобразование уравнений (40.27) в эллиптические уравнения.** Введем новый спектральный параметр  $\mu = \lambda - \lambda^{-1}$  (ср. [32]). Подействуем на уравнения (40.27) соответственно операторами  $(\lambda \mathcal{A}_I)^{-1}, (\lambda \mathcal{A}_{II})^{-1}, (\lambda \mathcal{A}_{III})^{-1}$ .

Полученные уравнения сложим с соответствующими уравнениями (40.27). Мы придем к уравнениям

$$(\mathcal{B}_I - \mu)\varphi^+ = \mathbf{h}_I, \quad (\mathcal{B}_{II} - \mu)\varphi^- = \mathbf{h}_{II}, \quad (\mathcal{B}_{III} - \mu)\varphi = \mathbf{h}_{III}, \quad (40.29)$$

играющим дальше основную роль. Здесь

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{A}^{-1}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{g} + (\lambda \mathcal{A})^{-1} \mathbf{g}. \quad (40.30)$$

Теорема 1.  $\mathcal{B}_I, \mathcal{B}_{II}, \mathcal{B}_{III}$  — эллиптические ПДО первого порядка с одним и тем же главным символом  $k^{-1} |\eta| E$ .

Это легко следует из предложения 7.

Из теоремы 1 вытекает, что корневые векторы операторов  $\mathcal{B}$  принадлежат  $C^\infty(S)$ .

**7. Спектральные свойства операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ .**

Предложение 8. Пусть  $\mathcal{T}$  — любой из операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ . Тогда  $\mathcal{T}^* = \bar{\mathcal{T}}$ . Если  $\text{Im } k = 0$ , то  $\mathcal{A}_I^* = \mathcal{A}_I, \mathcal{B}_I^* = \mathcal{B}_I$ . Если  $\text{Re } k = 0$ , то  $\mathcal{T}^* = -\mathcal{T}$ .

Доказательство. Все эти соотношения получаются из формул типа формулы Лоренца. Более точно, пусть  $\mathbf{E}_I, \mathbf{H}$  — гладкие вектор-функции в  $\bar{V}^+$ . Из формулы  $\text{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{E}_I) = \mathbf{E}_I \text{ rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E}_I$  и формулы Гаусса — Остроградского получается формула

$$\int_{V^+} (\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}_I - \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E}_I) dx = \int_S (\mathbf{N} \times \mathbf{H}^+) \cdot \mathbf{E}_I dS. \quad (40.31)$$

Пусть  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}, \{\mathbf{E}_I, \mathbf{H}_I\}$  — два решения системы (40.1) в  $V^+$ , гладкие в  $\bar{V}^+$ . Тогда из (40.31) следует, что

$$\int_S \varphi^+ \cdot (\mathbf{N} \times \psi_1^+) dS = \int_S (\mathbf{N} \times \psi^+) \cdot \varphi_1^+ dS \quad (40.32a)$$

(формула Лоренца). Заменив в (40.31)  $\mathbf{E}_I$  на  $\bar{\mathbf{E}}_I$ , мы при  $\text{Im } k = 0$  аналогичным образом получим формулу

$$0 = \int_S \varphi^+ \cdot (\overline{\mathbf{N} \times \psi_1^+}) dS + \int_S (\mathbf{N} \times \psi^+) \cdot \bar{\varphi}_1^+ dS \quad (40.32b)$$

и при  $\text{Re } k = 0$  — формулу

$$\int_S \varphi^+ \cdot (\overline{\mathbf{N} \times \psi_1^+}) dS = \int_S (\mathbf{N} \times \psi^+) \cdot \bar{\varphi}_1^+ dS. \quad (40.32в)$$

(Если  $k=0$  — этот случай мы исключили, — то обе части в (40.32в) равны 0.) Так как  $\mathbf{N} \times \psi^+ = -i\mathcal{A}_1\psi^+$  (см. (40.21а) и (40.26)), то формулы (40.32) доказывают все наши утверждения о  $\mathcal{A}_1$ . Утверждения о  $\mathcal{A}_{II}$  получаются аналогично, только вместо  $V^+$  надо сначала рассматривать  $V_R^-$ . Как следствия получаются утверждения о  $\mathcal{A}_{III}$  и  $\mathcal{B}$ .

Предложение 8 показывает, что  $\mathcal{B}_I$  при  $\text{Im } k=0$  и все  $i\mathcal{B}$  при  $\text{Re } k=0$  ( $k \neq 0$ ) — самосопряженные операторы в  $H_0(S)$  и в  $H_s(S)$  (при надлежащем определении скалярного произведения в  $H_s(S)$ , см. п. 2 § 34). В этих случаях  $\mathcal{B}$  имеет ортонормированный базис из собственных векторов в  $H_0(S)$ , остающийся ортогональным базисом в любом  $H_s(S)$ . В предложениях 9 и 10 и теореме 2 мы исключим эти случаи.

Предложение 9.  $\text{Im } \mathcal{B}_{II}$  и  $\text{Im } \mathcal{B}_{III}$  — операторы порядка  $-\infty$ , если  $\text{Im } k=0$ .  $\text{Im } (k\mathcal{B})$  — операторы порядка  $-1$ , если  $\text{Im } k < 0$ ,  $\text{Re } k > 0$ .

Доказательство аналогично доказательству предложения 5 в § 37. При  $\text{Im } k=0$  достаточно заметить, что операторы  $A - \bar{A}$  и  $B - \bar{B}$  имеют вид (40.9) с  $G - \bar{G}$  вместо  $G$ . При  $\text{Im } k < 0$  мы пользуемся тем, что  $(k\mathcal{B})^* = \bar{k}\mathcal{B}^* = \bar{k}\mathcal{B} = k\mathcal{B}$ . В этом случае  $kA - \bar{k}\bar{A}$  — оператор порядка  $-1$ , как видно из (40.9а), а  $B - \bar{B}$  — оператор порядка  $-3$ .

Главный символ операторов  $\text{Re } (k\mathcal{B})$  — скалярная матрица. Можно распространить на этот случай построения в [59] и показать, что собственные значения  $\nu_j$  операторов  $k^{-1} \text{Re } (k\mathcal{B})$  ( $= \text{Re } \mathcal{B}$ , если  $\text{Im } k=0$ ) имеют асимптотику

$$\nu_j = k^{-1} \sqrt{2\pi |S|^{-1} j^{1/2}} + O(1), \quad (40.33)$$

где  $|S|$  — площадь поверхности  $S$  (ср. с формулой (34.26) для скалярных операторов).

Теперь воспользуемся результатами (и обозначениями) § 35 с  $\mathcal{H}_s = H_s(S)$ .

Теорема 2.  $\mathcal{B}_{II}, \mathcal{B}_{III} \in \mathbf{B}(H_s(S))$  при  $\text{Im } k=0$ ,  $\mathcal{B} \in \mathbf{R}(H_s(S))$  при  $\text{Im } k < 0$  для всех  $s$ .

Если  $\text{Im } k=0$ , то для операторов  $\mathcal{B}_{II}, \mathcal{B}_{III}$  справедливы утверждения теоремы 2 из § 35 с  $\beta = 1/2$ ,  $\delta = 0$ ,  $\inf \gamma = -\infty$ .

Если  $\text{Im } k < 0$ , то для операторов  $\mathcal{B}$  справедливы утверждения теоремы 2' из § 35 с  $\beta = 1/2$ ,  $\delta = 0$ .

Предложение 10. Для собственных значений  $\mu_j$  оператора  $\mathcal{B}$  имеет место формула  $\mu_j \cdot j^{-1/2} \rightarrow k^{-1} \sqrt{2\pi |S|^{-1}}$  ( $j \rightarrow \infty$ ).

Все собственные значения  $\mu_j$  оператора  $\mathcal{B}$  находятся в объединении кругов с центрами в собственных значениях  $\nu_j$  оператора  $k^{-1} \text{Re } (k\mathcal{B})$  радиусов  $C_q |\nu_j|^{-q}$ , где  $q$  сколь угодно велико, если  $\text{Im } k=0$ , и  $q=1$ , если  $\text{Im } k < 0$ .

Вернемся к операторам  $\mathcal{A}$ .

Предложение 11. Число  $\lambda$  является собственным значением оператора  $\mathcal{A}_I$  тогда и только тогда, когда  $\mu = \lambda - \lambda^{-1}$  — собственное значение оператора  $\mathcal{B}_I$ . Если при этом уравнение  $\mu = \lambda - \lambda^{-1}$  имеет разные корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , то корневое подпространство  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_I}(\mu)$  есть прямая сумма корневых подпространств  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_I}(\lambda_1)$  и  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_I}(\lambda_2)$ , причем последние изоморфны. Если же корни совпадают,  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_I}(\lambda_i) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}_I}(\mu)$ . В частности,  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_I}(\lambda)$  конечномерны и состоят из бесконечно гладких векторных полей. Аналогичные утверждения справедливы для операторов  $\mathcal{A}_{II}$  и  $\mathcal{B}_{II}$ .

Доказательство. Будем под  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  понимать  $\mathcal{A}_I, \mathcal{B}_I$  или  $\mathcal{A}_{II}, \mathcal{B}_{II}$ . Если  $(\mathcal{A} - \lambda)\varphi = 0$ , то, как мы знаем,  $(\mathcal{B} - \mu)\varphi = 0$ , где  $\mu = \lambda - \lambda^{-1}$ . Вообще, пусть  $(\mathcal{A} - \lambda)^m \varphi = 0$  при некотором натуральном  $m$ . Тогда

$$0 = (-\mathcal{A}^{-1}\lambda^{-1})^k (\mathcal{A} - \lambda)^m \varphi = (\mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1})^k (\mathcal{A} - \lambda)^{m-k} \varphi$$

при  $k=0, \dots, m$ , а отсюда следует, что  $(\mathcal{B} - \mu)^m \varphi = 0$ . Таким образом,  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\lambda) \subset \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\mu)$ .

Подпространство  $\mathcal{M} = \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\mu)$  конечномерно, поскольку  $\mathcal{B}$  — оператор с дискретным спектром, и инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ , так как  $\mathcal{A}$  перестановочен с  $(\mathcal{B} - \mu)^m$ . В некотором базисе подпространства  $\mathcal{M}$  матрица оператора  $\mathcal{A}$  в  $\mathcal{M}$  будет жордановой, причем в силу сказанного в предыдущем абзаце ее собственные значения являются корнями квадратного уравнения  $\mu = \lambda - \lambda^{-1}$ .

Поэтому  $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\lambda_1) \dot{+} \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\lambda_2)$ , если это уравнение имеет разные корни  $\lambda_1, \lambda_2$ , и  $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\lambda_i)$  в случае совпадения корней.

Если корни разные, то из  $(\mathcal{A} - \lambda_1)^m \varphi = 0$  следует  $(\mathcal{A} - \lambda_2)^m \mathbf{N} \times \varphi = 0$ , как нетрудно проверить, причем отображением  $\varphi$  в  $\mathbf{N} \times \varphi$  устанавливается изоморфизм между  $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\lambda_1)$  и  $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\lambda_2)$ <sup>1)</sup>. Доказательство закончено.

Следствие. Собственные значения каждого из операторов  $\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_{II}$  имеют две точки накопления: 0 и  $\infty$ .

Предложение 11'. Число  $\mu$  тогда и только тогда является собственным значением оператора  $\mathcal{B}_{III}$ , когда хотя бы один из корней  $\lambda_1, \lambda_2$  уравнения  $\mu = \lambda - \lambda^{-1}$  является собственным значением оператора  $\mathcal{A}_{III}$ . При этом  $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}_{III}}(\mu)$  есть прямая сумма  $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}_{III}}(\lambda_1)$  и  $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}_{III}}(\lambda_2)$ . В частности,  $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}_{III}}(\lambda)$  конечномерны и состоят из бесконечно гладких векторных полей.

Доказательство совпадает с доказательством аналогичных утверждений в предложении 11.

Отметим еще, что так как  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ , то для операторов  $\mathcal{A}$  остаются в силе утверждения 2°, 3°, 5° и 6° из п. 6 § 31. Если  $\varphi_p, \dots, \varphi_q$  — базис в  $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\lambda)$ , то матрица  $\{(\varphi_j, \varphi_i)_S\}$  ( $i, j = p, \dots, q$ ) невырождена: это следует из справедливости аналогичного утверждения для  $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\mu) \supset \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}(\lambda)$ . Поэтому для  $\mathcal{A}$  справедливо также утверждение 8° из п. 6 § 31.

Отметим еще, что совпадение корней уравнения  $\mu = \lambda - \lambda^{-1}$  возможно лишь при  $\lambda^{-1} = -\lambda$ , т. е. при  $\lambda = \pm i$ . Из следующего предложения вытекает, в частности, что, по крайней мере, один из этих двух случаев,  $\lambda = -i$ , невозможен.

Предложение 12. Собственные значения операторов  $\mathcal{A}_{II}$  и  $\mathcal{A}_{III}$  лежат в полуплоскости  $\text{Im } \lambda > 0$ . То же верно для  $\mathcal{A}_I$  при  $k_2 = \text{Im } k < 0$ . Если  $k_2 < 0$ , то для собственных значений выполняется также неравенство  $|\text{Re } \lambda| / |\text{Im } \lambda| \leq k_1 / |k_2|$ .

<sup>1)</sup> Наличие такого изоморфизма связано, конечно, с инвариантностью уравнений Максвелла относительно замены  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}$  на  $-\mathbf{E}$ . Ср. (18.27).

Доказательство проведем для  $\mathcal{A}_{II}$ . Из формулы (40.31) с  $\bar{\mathbf{E}}$  вместо  $\mathbf{E}_1$  и  $V_R^-$  вместо  $V^+$  получаем

$$\begin{aligned} i \int_{V_R^-} (k |\mathbf{E}|^2 - \bar{k} |\mathbf{H}|^2) dx &= \\ &= - \int_S (\mathbf{N} \times \mathbf{H}) \cdot \bar{\mathbf{E}} dS + \int_{S_R} (r^{-1} \mathbf{x} \times \mathbf{H}) \cdot \bar{\mathbf{E}} dS = \\ &= i \bar{\lambda} \int_S |\mathbf{N} \times \mathbf{H}|^2 dS - \int_{S_R} |\mathbf{E}|^2 dS + o(1) \end{aligned}$$

с учетом (40.2) и (40.24). Отделим вещественные и мнимые части:

$$\begin{aligned} -k_2 \int_{V_R^-} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) dx &= \\ &= \text{Im } \lambda \int_S |\mathbf{N} \times \mathbf{H}|^2 dS - \int_{S_R} |\mathbf{E}|^2 dS + o(1), \\ k_1 \int_{V_R^-} (|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{H}|^2) dx &= \text{Re } \lambda \int_S |\mathbf{N} \times \mathbf{H}|^2 dS + o(1). \end{aligned}$$

Первое из этих соотношений дает  $\text{Im } \lambda > 0$ . (Если  $k_2 = 0$ , то, предположив, что  $\text{Im } \lambda = 0$ , можно показать, что  $\mathbf{E} \equiv 0$  в  $V^-$ , пользуясь тем, что компоненты вектор-функции  $\mathbf{E}$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца и условию излучения для этого уравнения; ср. [23], стр. 284.) При  $k_2 < 0$  переходим к пределу при  $R \rightarrow \infty$  и получаем  $-k_2 \cdot \alpha = \text{Im } \lambda \cdot \beta$ ,  $-k_1 \cdot \alpha < \text{Re } \lambda \cdot \beta < k_1 \cdot \alpha$ , где  $\alpha$  — интеграл от  $|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2$  по  $V^-$ ,  $\beta$  — интеграл от  $|\mathbf{N} \times \mathbf{H}|^2$  по  $S$ . Отсюда следует нужное неравенство для  $|\text{Re } \lambda| / |\text{Im } \lambda|$ .

Утверждения относительно  $\mathcal{A}_I$  и  $\mathcal{A}_{III}$  доказываются аналогично. При  $k_2 = 0$  собственные значения оператора  $\mathcal{A}_I$  вещественны и отличны от 0.

**8. Однозначно разрешимые задачи I—III.** Мы приведем здесь теорему, относящуюся к задаче II; аналогичные теоремы справедливы для задач I и III. При этом ограничимся случаем  $k_2 = 0$ ; при  $k_2 < 0$  приведенные ниже неравенства можно усилить.

Теорема 3. Пусть  $k_2 = 0$ ,  $\lambda \neq 0$  и  $\lambda$  не является собственным значением оператора  $\mathcal{A}_{II}$ . Тогда уравнение  $(\mathcal{A}_{II} - \lambda)\varphi^- = \mathbf{g}$  с правой частью из  $H_s(S)$  имеет единственное решение в  $H_s(S)$ , причем  $\|\varphi^-\|_{s,s} \leq C_s \|\mathbf{g}\|_{s,s}$ . Если  $s > 2^1$ , то задача II имеет при этом единственное классическое решение. Для него

$$\|\mathbf{E}\|_{V_R^-, s+1/2} + \|\mathbf{H}\|_{V_R^-, s+1/2} \leq C'_s \|\mathbf{g}\|_{s,s}; \quad (40.34)$$

при  $|x| > R$  ( $S \subset E_R$ )

$$|x| \sum_{|\alpha| \leq m} (|D^\alpha \mathbf{E}(x)| + |D^\alpha \mathbf{H}(x)|) \leq C'_m \|\mathbf{g}\|_{s,1}, \quad (40.35a)$$

$$|x|^2 [ |x|^{-1} \mathbf{x} \times \mathbf{E}(x) - \mathbf{H}(x) | + | |x|^{-1} \mathbf{x} \times \mathbf{H}(x) + \mathbf{E}(x) | ] \leq C \|\mathbf{g}\|_{s,1}. \quad (40.35b)$$

Доказательство. Индекс II опустим. Пусть  $\mathbf{g} \in H_s(S)$ . Уравнение  $(\mathcal{A} - \lambda)\varphi^- = \mathbf{g}$  не может иметь двух разных решений в  $H_s(S)$ , так как  $\lambda$  не является собственным значением оператора  $\mathcal{A}$ . Преобразуем это уравнение в уравнение  $(\mathcal{B} - \mu)\varphi^- = \mathbf{h}$ . Последнее имеет единственное решение в  $H_s(S)$ , так как  $\mathbf{h} = \mathbf{g} + \lambda^{-1} \mathcal{A}^{-1} \mathbf{g} \in H_{s-1}(S)$ ,  $\mathcal{B} - \mu$  — эллиптический оператор первого порядка и  $\mu = \lambda - \lambda^{-1}$  не является его собственным значением. Пользуясь перестановочностью  $\mathcal{A} - \lambda$  с  $\mathcal{B} - \mu$  и тем, что  $(\mathcal{A} - \lambda)\mathbf{h} = (\mathcal{B} - \mu)\mathbf{g}$ , получаем  $(\mathcal{B} - \mu)[(\mathcal{A} - \lambda)\varphi^- - \mathbf{g}] = 0$ , так что  $\varphi^-$  — решение уравнения  $(\mathcal{A} - \lambda)\varphi^- = \mathbf{g}$ .

При этом  $\|\varphi^-\|_{s,s} \leq \tilde{C}_s \|\mathbf{h}\|_{s,s-1} \leq C_s \|\mathbf{g}\|_{s,s}$ . Пусть  $s > 2$ . Так как  $\varphi^- \in C^{(1)}(S)$ , то существует единственное классическое решение внешней задачи для системы (40.1) с условием  $-\mathbf{N} \times \mathbf{H}^- = \varphi^-$  ([23], § 25). Для него верны формулы (40.21б); из них и из  $(\mathcal{A} - \lambda)\varphi^- = \mathbf{g}$  следует (40.24).

Двух разных классических решений задача II иметь не может, так как им отвечали бы разные решения  $\varphi^-$  уравнения  $(\mathcal{A} - \lambda)\varphi^- = \mathbf{g}$ .

Используя формулы (40.4), можно получить оценки (40.35) (ср. [23], § 14).

<sup>1)</sup> Мы ограничиваемся этими  $s$ , чтобы остаться в рамках теории, построенной в [23].

См. также [11], [39], [62].

Из (40.24) вытекает, что  $\psi^- \in H_s(S)$  и  $\|\psi^-\|_{s,s} \leq C'_s \|\mathbf{g}\|_{s,s}$ .

Наконец, оценку (40.34), скажем, для  $\mathbf{E}$  можно получить, пользуясь эллиптичностью граничных условий

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{N} \times \mathbf{E}^- = \psi^- \quad \text{на } S \quad (40.36)$$

для векторного уравнения Гельмгольца  $\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$  и отмеченной выше единственностью. Мы не будем останавливаться на подробностях.

9. Случай, когда условие (а) нарушено. В этом случае также можно получить результаты, аналогичные изложенным выше. Сначала отметим некоторые факты, относящиеся к внутренней задаче для системы (40.1) с условием  $\mathbf{N} \times \mathbf{E}^+ = \boldsymbol{\chi}$  или условием  $-\mathbf{N} \times \mathbf{H}^+ = \boldsymbol{\chi}$  на  $S$  (с гладким  $\boldsymbol{\chi}$  при исключительных  $k$ ). В [23], § 25, показано, что необходимое и достаточное условие разрешимости любой из этих задач имеет вид

$$\boldsymbol{\chi} \perp \operatorname{Ker}(I + B^*). \quad (40.37)$$

Если решение существует, то оно не единственно. Рассмотрим для определенности задачу с условием  $\varphi^+ = -\mathbf{N} \times \mathbf{H}^+ = 0$ . Для ее решений мы имеем  $(I - B)\varphi^+ = 0$  в силу первой из формул (40.8а). Нетрудно показать, что здесь  $\psi^+$  может быть любым в  $\operatorname{Ker}(I - B)$ :

$$\operatorname{Ker}(I - B) = \{\psi^+; \mathbf{E}, \mathbf{H} \text{ удовлетворяют (40.1) и } \varphi^+ = 0\}. \quad (40.38)$$

Действительно, рассмотрим поле (40.19), считая, что  $\psi$  пробегает  $\operatorname{Ker}(I - B)$ . Для этого поля мы имеем в силу теоремы 43 из [23]  $2\psi^- = -(I - B)\psi = 0$ , так что  $\varphi^- = 0$ ,  $\varphi^+ = 0$ , и  $2\psi^+ = (I + B)\psi = 2\psi - (I - B)\psi$ , т. е.  $\psi^+ = \psi$ .

В (40.38) можно, конечно, поменять местами  $\varphi^+$  и  $\psi^+$ . Отметим еще, что

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \times \operatorname{Ker}(I - B) &= \operatorname{Ker}(I + B^*), \\ \mathbf{N} \times \operatorname{Ker}(I + B^*) &= \operatorname{Ker}(I - B) \end{aligned} \quad (40.39)$$

(см. леммы 110 и 112 в [23]).

Теперь рассмотрим задачу I. При исключительных  $k$  она имеет собственное значение 0, отвечающее полям  $\mathbf{E}$ ,

$\mathbf{H}$  с  $\psi^+ = 0$ ,  $\varphi^+ \in \text{Ker}(I - B)$ , и «собственное значение»  $\infty$ , отвечающее полям с  $\varphi^+ = 0$ ,  $\psi^+ \in \text{Ker}(I - B)$ , т. е. с  $\mathbf{E}_{ig}^+ = -\mathbf{N} \times \psi^+ \in \text{Ker}(I + B^*)$ . Заметим, что подпространства  $\text{Ker}(I - B)$  и  $\text{Ker}(I + B^*)$  ортогональны (см. 5° в п. 6 § 31) и содержатся в  $C^\infty(S)$ . Обозначим через  $H^{(1)}$  ортогональное дополнение к сумме этих подпространств и через  $P$  ортогональный проектор на  $H^{(1)}$  в  $L^2(S)$ . Если  $\mathbf{g} \in [H^{(1)}]^\perp$  и  $\lambda$  конечно и отлично от 0, то задача I имеет одно и только одно решение, являющееся суммой поля  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  с  $\psi^+ = 0$  и поля  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_2$  с  $\varphi^+ = 0$ . Теперь будем считать, что  $\mathbf{g} \in H^{(1)}$ , и сведем задачу к уравнению в  $H^{(1)}$ .

Пусть  $\varphi$  — гладкое векторное поле на  $S$  и  $\varphi^+ = P\varphi^+$ ; тогда  $\varphi^+$  удовлетворяет условию (40.37), и в силу первой из формул (40.8а)  $A\varphi^+$  принадлежит области значений оператора  $I - B$ . Это позволяет написать  $\psi^+ = i(I - B)^{-1}A\varphi^+$ ;  $\psi^+$  здесь также удовлетворяет условию (40.37) и определено с точностью до прибавления любого элемента из  $\text{Ker}(I - B)$ . Потребуем, чтобы  $\psi^+$  было ортогонально к  $\text{Ker}(I - B)$ , т. е. чтобы  $\psi^+ = P\psi^+$ ; этим  $\psi^+$  определится однозначно. Итак, вместо (40.21а) мы имеем в пределах  $H^{(1)}$  формулы

$$\psi^+ = iP(I - B)^{-1}AP\varphi^+, \quad \varphi^+ = -iP(I - B)^{-1}AP\psi^+, \quad (40.40)$$

из которых вторая — следствие первой в силу инвариантности уравнений Максвелла относительно замены  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}$  на  $-\mathbf{E}$ . Эти формулы показывают, что в  $H^{(1)}$  имеет место равенство

$$[P(I - B)^{-1}AP]^2 = I. \quad (40.41)$$

Заметим, что  $[H^{(1)}]^\perp$  инвариантно относительно оператора  $\mathbf{N} \times$  в силу (40.39); поэтому  $H^{(1)}$  также инвариантно относительно  $\mathbf{N} \times$ . Задача I с  $\mathbf{g} \in H^{(1)}$  приводится к уравнению в  $H^{(1)}$

$$(\tilde{\mathcal{A}}_1 - \lambda)\varphi^+ = \mathbf{g}, \quad \text{где } \tilde{\mathcal{A}}_1 = -\mathbf{N} \times P(I - B)^{-1}AP, \quad (40.42)$$

которое тем же путем, что и в п. 6, преобразуется в уравнение  $(\tilde{\mathcal{B}}_1 - \mu)\varphi^+ = \mathbf{h}$ , где  $\tilde{\mathcal{B}}_1 = \tilde{\mathcal{A}}_1 - \tilde{\mathcal{A}}_1^{-1}$ . Этот оператор можно доопределить, положив  $\tilde{\mathcal{B}}_1 \chi = \chi$  при

$\chi \in [H^{(1)}]^\perp$ . Нетрудно проверить, что получается эллиптический самосопряженный оператор первого порядка.

Прежде чем перейти к задаче II, выведем формулы, заменяющие (40.21б). Обозначим через  $P_1$  и  $P_2$  ортогональные проекторы на области значений операторов  $I + B^*$  и  $I + B$ , т. е. на ортогональные дополнения к  $\text{Ker}(I + B)$  и  $\text{Ker}(I + B^*)$  соответственно. Оператор  $(I + B)^{-1}$  при исключительных  $k$  не существует, но существует  $P_1(I + B)^{-1}P_2$ . Внешняя задача с условием  $-\mathbf{N} \times \mathbf{H}^- = \varphi^-$  всегда однозначно разрешима; при этом (см. первую из формул (40.8б))  $A\varphi^- = P_2A\varphi^-$  и

$$\psi^- = -iP_1(I + B)^{-1}P_2A\varphi^- + \alpha_1\chi_1 + \dots + \alpha_m\chi_m,$$

где  $\chi_1, \dots, \chi_m$  — ортонормированный базис в  $\text{Ker}(I + B)$ . Коэффициенты  $\alpha_j$  определяются следующим образом.

Пусть  $\varphi_j^- = \mathbf{N} \times \bar{\chi}_j$ ,  $\mathbf{E}_j$ ,  $\mathbf{H}_j$  — решение внешней задачи с  $-\mathbf{N} \times \mathbf{H}_j^- = \varphi_j^-$  и  $\psi_j^- = \mathbf{N} \times \mathbf{E}_j^-$ . Тогда, используя формулу Лоренца (формулу вида (40.32а) с заменой  $+$  на  $-$ ), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \int_S \psi^- \cdot \bar{\chi}_j dS = - \int_S \psi^- \cdot (\mathbf{N} \times \varphi_j^-) dS = \\ &= \int_S \varphi^- \cdot (\mathbf{N} \times \psi_j^-) dS. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\psi^- = -i[P_1(I + B)^{-1}P_2A + K]\varphi^-, \quad (40.43а)$$

где

$$K\varphi^- = i \sum_{j=1}^m \chi_j \int_S \varphi^- \cdot (\mathbf{N} \times \psi_j^-) dS \quad (40.44)$$

— конечномерный бесконечно сглаживающий оператор. Отсюда

$$\psi^- = i[P_1(I + B)^{-1}P_2A + K]\psi^-, \quad (40.43б)$$

в силу инвариантности системы Максвелла относительно замены  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}$  на  $-\mathbf{E}$ . Из (40.43) следует, что

$$[P_1(I + B)^{-1}P_2A + K]^2 = I. \quad (40.45)$$

Справедлива формула

$$P_1(I+B)^{-1}P_2 = P_1[I-B + \dots + (-B)^k]P_2 + \\ + P_1(-B)^{k+1}P_1(I+B)^{-1}P_2,$$

проверяемая применением оператора  $I+B$  к левой и правой частям. Ее можно переписать в виде

$$P_1(I+B)^{-1}P_2 = I-B + \dots + (-B)^k + \\ + (-B)^{k+1}P_1(I+B)^{-1}P_2 + \dots, \quad (40.46)$$

где последнее многоточие обозначает конечномерный бесконечно сглаживающий оператор.

После этой подготовки мы можем рассмотреть задачу II и с небольшими изменениями повторить для нее все сделанное в случае неисклнчительных  $k$ . Задача сводится сначала к уравнению  $(\mathcal{A}_{II} - \lambda)\varphi^- = \mathbf{g}$ , где  $\mathcal{A}_{II} = -\mathbf{N} \times [P_1(I+B)^{-1}P_2A + K]$ , и затем к эллиптическому уравнению  $(\mathcal{B}_{II} - \mu)\varphi^- = \mathbf{h}$ , где  $\mathcal{B}_{II} = \mathcal{A}_{II} - \mathcal{A}_{II}^{-1}$ .

К задаче 2) в § 37 был возможен аналогичный подход; но там мы выбрали другой путь.

Аналогичным образом можно рассмотреть задачу III. При исключительных  $k$  она имеет собственное значение  $\infty$ , отвечающее полям  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  с  $\mathbf{E}_{ig}^+ \in \text{Ker}(I+B^*)$ , равным 0 в  $V^-$ . Пусть  $H^{(2)}$  — ортогональное дополнение к  $\text{Ker}(I+B^*)$  в  $L^2(S)$ . Тогда задача III с  $\mathbf{g} \in H^{(2)}$  сводится к уравнению

$$\tilde{\mathcal{A}}_{III}\varphi - \lambda\varphi = \mathbf{g}, \quad \text{где } \tilde{\mathcal{A}}_{III}\varphi = \frac{i}{2}\mathbf{N} \times (\psi^+ - \psi^-)$$

и  $\varphi = \varphi^+ = \varphi^- \in H^{(2)}$  (см. (40.37)). Чтобы получить явное выражение для оператора  $\tilde{\mathcal{A}}_{III}$ , нужно воспользоваться формулой (40.43) и первой из формул (40.8а), в силу которой  $\psi^+ = iP_0(I-B)^{-1}AP_2\varphi + \psi_0^+$ , где  $\psi_0^+ \in \text{Ker}(I-B)$  и  $P_0$  — ортопроектор на это подпространство. Здесь  $\psi_0^+$  определяется из условия  $\psi^+ - \psi^- \perp \perp \text{Ker}(I-B)$  (ср. с (40.39)). Из (40.8) следует также, что при  $\varphi = \varphi^+ = \varphi^-$  справедлива формула  $\varphi = (i/2)A(\psi^- - \psi^+)$ , поэтому  $\tilde{\mathcal{A}}_{III}^{-1} = P_2AN \times P_2$ ; и т. д.

**10. Двумерные задачи.** Можно рассмотреть двумерные аналоги задач I—III, в которых  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  не зависят от  $x_3$  и пространство  $\mathbf{R}^3$  разделено на две части цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси  $x_3$ . Пусть плоскость  $x_3=0$  пересекает эту поверхность по бесконечно гладкой замкнутой кривой  $S$ , разделяющей плоскость на внутреннюю и внешнюю части  $V^+$  и  $V^-$ . Обозначим через  $u$ ,  $v$  проекции векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  на ось  $x_3$ . Как известно, система Максвелла сводится в этом случае к уравнениям Гельмгольца  $\Delta u + k^2u = 0$ ,  $\Delta v + k^2v = 0$  (см., например, [18], п. 4). Аналоги задач I, II, III сводятся к задачам для этих уравнений соответственно в  $V^+$ , в  $V^-$  и вне  $S$ , причем в двух последних случаях решение подчинено на бесконечности условию излучения. Условия на  $S$  имеют следующий вид: в задаче типа I

$$\frac{\lambda}{k} \frac{\partial u^+}{\partial N} + u^+ = g_1, \quad \lambda kv^+ - \frac{\partial v^+}{\partial N} = g_2;$$

в задаче типа II

$$\frac{\lambda}{k} \frac{\partial u^-}{\partial N} - u^- = g_1, \quad \lambda kv^- + \frac{\partial v^-}{\partial N} = g_2;$$

в задаче типа III

$$\frac{\partial u^+}{\partial N} = \frac{\partial u^-}{\partial N}, \quad \frac{\lambda}{k} \frac{\partial u}{\partial N} - \frac{1}{2}(u^- - u^+) = g_1, \\ v^+ = v^-, \quad \lambda kv + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^-}{\partial N} - \frac{\partial v^+}{\partial N} \right) = g_2.$$

Эти задачи в других обозначениях рассмотрены в §§ 36, 37. Мы видим, в частности, что каждая из задач типа I, II, III распадается на две скалярные задачи, в одной из которых собственные значения имеют единственную точку накопления  $\infty$ , а в другой — 0.

#### Заключительные замечания

Мы приведем здесь некоторые общие соображения, возникающие в связи с изучением задач, поставленных в главах I—II, и заслуживающие, на наш взгляд, внимания математиков — специалистов по спектральной

теории операторов и по теории уравнений в частных производных.

До последнего времени основным объектом приложения теорем о суммируемости рядов по корневым векторам операторов, близких к самосопряженным (в смысле п. 1 § 35), если говорить о многомерных задачах, были эллиптические граничные задачи для уравнений с самосопряженной главной частью и «самосопряженными» граничными условиями. Спектральный параметр в этих задачах входит в уравнение. (Пример: уравнение  $\Delta u + \dots = \lambda u$  в области  $V^+$  с условием  $u^+ = 0$  на  $S$ ; многоточием обозначены младшие члены.) Такие задачи приводят к рассмотрению операторов  $L = L_0 + L_1$ , где  $L_0$  — самосопряженный оператор положительного порядка и порядок оператора  $L_1$  меньше порядка оператора  $L_0$ , но неотрицателен, причем ставится цель охватить случай, когда разница порядков мала.

Случай, когда разница порядков велика, не привлекал особенного внимания, хотя и был рассмотрен в [52], а это именно тот случай, который нужен в задачах главы II. Это задачи для эллиптических уравнений второго порядка, содержащие спектральный параметр в граничном условии на компактной поверхности  $S$ . Сводя их на  $S$ , мы приходим к рассмотрению эллиптических псевдодифференциальных операторов  $L = L_0 + L_1$  первого порядка, очень близких к самосопряженным полуограниченным операторам  $L_0$  (см. §§ 36, 37). В частности,  $L_1$  оказывается оператором порядка  $-\infty$ , если несамосопряженность имеет причиной лишь условия излучения или граничные условия на поверхности, не имеющей общих точек с  $S$ .

Такой оператор  $L$  естественно рассматривать в шкале  $H = W_2^{(s)}$  соболевских пространств на  $S$ , так как можно принять, что оператор  $L_0$  порождает эту шкалу. При этом можно пользоваться тем, что известна асимптотическая формула с остаточным членом для собственных значений оператора  $L_0$  (см. [59], [33]). Здесь обнаруживаются новые эффекты. Во-первых, собственные значения оператора  $L$  сближаются с собственными значениями оператора  $L_0$  очень быстро, если очень низок порядок оператора  $L_1$  (см. п. 1 § 35). Во-вторых, если он

настолько низок, что становятся применимыми теоремы из [52] и [42] о базисности системы корневых функций оператора  $L$  со скобками, то эти теоремы можно дополнить. А именно, можно в известной мере оценить допустимую частоту расстановки скобок и при этом оценить скорость сходимости получающегося ряда со скобками в  $H_s$ . Чем выше гладкость разлагаемой функции, тем быстрее сходится этот ряд. Для негладких или не очень гладких функций скорость сходимости разности этого ряда и соответствующего ряда со скобками по собственным функциям оператора  $L_0$  тем выше, чем ниже порядок оператора  $L_1$ . Этим фактам можно придать абстрактную форму (см. п. 2 § 35). Такой же характер сходимости сохраняется при переходе к соответствующим рядам вне  $S$ , т. е. в областях  $V^+$  и  $V^-$  (в силу априорных оценок для рассматриваемых эллиптических задач).

Кроме теорем об операторах, близких к самосопряженным, мы пользуемся теоремой о суммируемости методом Абея рядов по корневым векторам операторов с лучами минимального роста (см. п. 4 § 35). Эта теорема, являющаяся некоторым усилением теоремы о суммируемости из [50] и одновременно усилением теоремы о полноте из [7], гл. XI, § 9, и из [21], оказывается удобной в тех случаях, когда из оператора не удается выделить главную самосопряженную часть, в п. 8 § 36, п. 5 § 37 и в § 38.

Существенные свойства операторов, связанных с большей частью рассмотренных в книге задач, — их диссипативность, и комплексная симметрия. Этими свойствами мы неоднократно пользовались, начиная с § 31 (см. п. 6 § 31).

Спектральные задачи, поставленные в главах I и II, как правило, не являются внутренними задачами: это либо внешние задачи, либо задачи сопряжения. Спектральный параметр, однако, не входит в уравнение в неограниченной области: он входит либо в граничное условие, либо в уравнение в ограниченной области, по одну сторону от рассматриваемой поверхности. В п. 2 § 36 и § 38 мы свели скалярные задачи такого вида к задачам в ограниченной области с псевдодифференциальными граничными условиями; это позволило вывести из

известных теорем нужные утверждения об однозначной разрешимости и априорные оценки.

Задачи для системы Максвелла всегда интересны, так как они редко укладываются в рамки общих математических теорем, и в этом смысле не составляют исключения задачи § 14. Эти задачи имеют две точки накопления спектра (подобных задач в математической физике известно немного), но по своим спектральным свойствам, как выясняется в § 40, не уступают соответствующим скалярным задачам. Доказательства основаны на сведении этих задач к псевдодифференциальным системам на границе и их преобразовании в эллиптические системы.

Несколько особняком стоит «s-метод» (§ 13), потребовавший привлечения некоторых фактов из теории пространств с индефинитной метрикой (см. § 39).

Теоремы о суммируемости рядов по корневым векторам несамосопряженных операторов и исчисление псевдодифференциальных операторов имеют примерно одинаковый возраст: 10—15 лет. Как видно из сказанного, задачи этой книги побудили сопоставить эти две области в анализе, и это уже привело к расширению приложений и некоторому усовершенствованию известных теорем. Но вряд ли эту деятельность можно считать завершённой; скорее всего в настоящем дополнении подведен итог лишь первого ее этапа. Вероятно, вопросы, фактически поставленные в этой книге, привлекут внимание многих математиков.

§§ 36, 38 написаны на основе заметок [25—27], однако здесь многие результаты усилены (и при этом устранено несколько мелких неточностей). Результаты § 37 принадлежат З. Н. Голубевой (см. [38]); результаты § 40 получены нами совместно [30]. Л. Ф. Фридендер прочитал рукопись дополнения и сделал ряд полезных замечаний.

Теореме о базисности в § 36 предшествовала теорема о полноте [55].

Теоремы §§ 36—39 обобщаются на размерности  $n > 3$ ; но при этом операторы, отвечающие задачам §§ 36, 37 в случае  $\text{Im } k < 0$ , принадлежат  $A(\alpha, H_s(S))$  с некоторым  $\alpha > 0$ . Конечно, можно рассмотреть и более общие уравнения.

ЛИТЕРАТУРА<sup>1)</sup>

## Учебники и монографии

1. В. И. Арнольд, Математические методы классической механики, «Наука», 1974.
2. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1966.
3. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», 1965.
4. В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, «Наука», 1976.
5. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шиллов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959.
6. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1965.
7. Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, спектральная теория, «Мир», 1966.
8. Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, «Мир», 1972.
9. А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1976.
10. М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутцкий, В. Я. Стеценко, Приближенное решение операторных уравнений, «Наука», 1969.
11. В. Д. Купрадзэ, Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, Гостехиздат, 1950.
12. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, «Мир», 1971.
13. А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, «Наука», 1970.
14. С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, «Наука», 1970.
15. Ф. М. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. I и т. II, ИЛ, 1958 и 1960.
16. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, «Наука», 1969.
17. Функциональный анализ. Под ред. С. Г. Крейна. Справочная математическая библиотека, «Наука», 1972.
18. Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, «Мир», 1964.
19. Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», 1965.
20. Л. Шварц, Комплексные аналитические многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными, «Мир», 1964.
21. S. Agmon, Lectures on elliptic boundary value problems. Van Nostrand Math. Studies, 1965.

<sup>1)</sup> См. также литературу в приведенных здесь книгах и статьях. Для книг и статей, переведенных на русский язык, указаны только русские названия.



22. J. Bognár, Indefinite inner product spaces, Springer, 1974.  
 23. Cl. Müller, Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves, Springer, 1969.

*Статьи и диссертации*

24. М. С. Агранович, Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, УМН XX, № 5, 3—120 (1965).  
 24а. М. С. Агранович, Сингулярные интегро-дифференциальные операторы в теории граничных задач, докт. дисс., Москва, 1966.  
 25. М. С. Агранович, Несамосопряженные операторы в задачах типа дифракции на диэлектрическом теле, Радиотехника и электроника XIX, № 5, 970—979 (1974).  
 26. М. С. Агранович, Несамосопряженные операторы в некоторых скалярных задачах дифракции на гладкой замкнутой поверхности, Радиотехника и электроника XX, № 1, 39—48 (1975).  
 27. М. С. Агранович, О несамосопряженных интегральных операторах с ядрами типа функции Грина и связанных с ними задачах дифракции, Радиотехника и электроника XX, № 7, 1370—1378 (1975).  
 28. М. С. Агранович, О суммируемости рядов по корневым векторам несамосопряженных эллиптических операторов, Функц. анализ и его прилож. 10, № 3, 1—12 (1976).  
 28а. М. С. Агранович, О рядах по корневым векторам операторов, очень близких к самосопряженным, Функц. анализ и его прилож. 11, № 4, 65—67 (1977).  
 29. М. С. Агранович и М. И. Вишик, Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН XIX, № 3, 53—161 (1964).  
 30. М. С. Агранович и З. Н. Голубева, О некоторых задачах для системы Максвелла со спектральным параметром в граничном условии, ДАН СССР 231, № 4, 777—780 (1976).  
 31. Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, Критерий полноты и базисности корневых векторов вполне непрерывного  $J$ -самосопряженного оператора в пространстве Понтрягина  $P_n$ , Матем. исследования VI: 1, 158—161 (1971).  
 32. Н. Г. Аскеров, С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев, Об одном классе несамосопряженных краевых задач, ДАН СССР 155, № 3, 499—502 (1964).  
 33. М. Ш. Бирман и М. З. Соломяк, Асимптотика спектра дифференциальных уравнений, Итоги науки и техники, Математический анализ, т. 14, 1977, стр. 5—58.  
 34. В. В. Барковский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, соответствующих общим эллиптическим задачам с собственным значением в граничных условиях, Укр. матем. ж. 19, № 1, 9—24 (1967).  
 35. Б. Р. Вайнберг, Об эллиптических задачах в неограниченных областях, Матем. сб. 75, № 3, 454—480 (1968).  
 36. И. Н. Векуа, О метагармонических функциях, Труды Матем. ин-та АН Грузинской ССР XII, 105—174 (1943).

37. В. Н. Визитей и А. С. Маркус, О сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных векторов операторного пучка, Матем. сб. 66, № 2, 287—320 (1965).  
 38. З. Н. Голубева, Некоторые скалярные задачи дифракции и связанные с ними несамосопряженные операторы, Радиотехника и электроника XXI, № 2, 219—227 (1976).  
 39. И. С. Гудович, С. Г. Крейн, И. М. Куликов, Краевые задачи для уравнений Максвелла, ДАН СССР 207, № 2, 321—324 (1972).  
 40. Л. Дольф, Современное развитие несамосопряженных задач математической физики, Математика 7: 1, 79—136 (1963).  
 41. И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн, Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой I, Труды Моск. матем. об-ва 5, 368—432 (1956).  
 42. В. Э. Кацнельсон, Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов, Функц. анализ и его прилож. 1, № 2, 39—51 (1967).  
 43. В. Э. Кацнельсон, О сходимости и суммируемости рядов по корневым векторам некоторых классов несамосопряженных операторов, канд. дисс., Харьков, 1967.  
 44. М. В. Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных операторов, ДАН СССР 77, № 1, 11—14 (1951).  
 45. М. В. Келдыш, О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов, УМН XXVI, № 4, 15—41 (1971).  
 46. А. Н. Кожевников, Спектральные задачи для псевдодифференциальных систем, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу, и их приложения, Матем. сб. 92, № 1, 60—88 (1973).  
 47. Дж. Дж. Кон, Л. Ниренберг, Алгебра псевдодифференциальных операторов, в сб. «Псевдодифференциальные операторы», «Мир», 1967, стр. 9—62.  
 48. А. Г. Костюченко и Г. В. Радзиевский, О суммировании методом Абеля  $n$ -кратных разложений, Сиб. матем. ж. XV, № 4, 855—870 (1974).  
 49. С. Г. Крейн и Ю. И. Петунин, Шкалы банаховых пространств, УМН XXI, № 2, 89—168 (1966).  
 50. В. Б. Лидский, О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов, Труды Моск. матем. об-ва 11, 3—35 (1962).  
 51. Г. И. Макаров и В. В. Новиков, Некоторые спектральные задачи, возникающие в теории распространения радиоволн, VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, II, Москва — Ереван, 1973, стр. 9—13.  
 52. А. С. Маркус, О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора, ДАН СССР 142, № 3, 538—541 (1962).  
 53. В. И. Параска, Об асимптотике собственных и сингулярных чисел линейных операторов, повышающих гладкость, Матем. сб. 68, № 4, 623—631 (1965).  
 54. Л. С. Понтрягин, Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, 243—280 (1944).

55. А. Г. Рамм, О разложении по собственным функциям дискретного спектра в задачах дифракции, Радиотехника и электроника XVIII, № 3, 496—501 (1973).

56. Я. А. Ройтберг и З. Г. Шефтель, Граничные задачи и задачи на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными коэффициентами, в сб. «Матем. физика», Киев, 1965, стр. 119—135.

57. Л. Н. Слободецкий, Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена 197, 54—112 (1958).

58. Л. Ф. Фридлиндер, О сходимости рядов по корневым функциям операторов, близких к самосопряженным, в пространствах  $S$  и  $L^p$ , Функци. анализ и его прилож. 11, № 4, 94—95 (1977).

59. Л. Хёрмандер, Спектральная функция эллиптического оператора, Математика 13:6, 114—137 (1969).

60. S. Agmon, On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math. XV, 119—147 (1962).

61. J. Ercolano, M. Schechter, Spectral theory for operators generated by elliptic boundary problems with eigenvalue parameter in boundary conditions, I, II, Comm. Pure Appl. Math. XVIII, 83—105, 397—414 (1965).

62. R. Leis, Rand- und Eigenwertaufgaben in der Theorie electromagnetischer Schwingungen, Zeitschr. angew. Math. Mech. 54, T36—T40 (1974).

63. Cl. Müller, Zur Methode der Strahlungskapazität von H. Weyl, Math. Zeitschr. 56, № 1, 80—83 (1952).

64. M. Schechter, A generalisation of the problem of transmission, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 14, № 3, 207—236 (1960).

65. R. T. Seeley, Refinement of the functional calculus of Calderón and Zygmund, Koninkl. Nederl. Acad. van Wetensch., Proc., ser. A, 68, № 3, 521—531 (1965).

66. R. T. Seeley, Complex powers of an elliptic operator. Proc. of Symposia in Pure Math. X, 288—307 (1967).

67. F. Ursell, On the exterior problems of acoustics, Proc. Camb. Phil. Soc. 74, 117—125 (1973).