

М. К. Волков
В. Н. Первушкин

Существенно
нелинейные
квантовые теории,
динамические
симметрии
и физика
мезонов

Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов

Под редакцией
член-корреспондента АН СССР
Д. И. БЛОХИНЦЕВА



МОСКВА АТОМІЗДАТ 1978

Волков М. К., Первушин В. Н. Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов: Под ред. чл.-кор. АН СССР Д. И. Блохинцева. - М., Атомиздат, 1978, с. 240.

В книге изучаются квантовые теории поля с неполиномиальными лагранжианами. В ней можно познакомиться с математическим аппаратом, который описывает неполиномиальные взаимодействия квантованных полей в соответствии со всеми основными требованиями, предъявляемыми к теории S -матрицы; излагаются общие методы получения неполиномиальных лагранжианов из принципов симметрии, концепция спонтанного нарушения симметрии вакуума и теория нелинейных реализаций произвольных динамических симметрий, в том числе киральной и аффинной симметрий; приводятся различные физические приложения обсуждаемых методов.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных сотрудников, специализирующихся в области физики элементарных частиц.

Рис. 32. Табл. 3. Список литературы 182 наименования.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Настоящая книга посвящена новой области теоретической физики — применению кирально-симметричных неполиномиальных лагранжианов к теории мезонов. Это направление теоретических исследований интенсивно развивалось в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ в Дубне. Помимо обзора современной теории квантованных полей в книге приводятся оригинальные исследования авторов, которым принадлежит ряд результатов фундаментального значения. Прежде всего это касается разработки новых методов построения теории S -матрицы для лагранжианов неполиномиального вида, теории квантования полей со спонтанно-нарушенной симметрией, а также многочисленных физических приложений, имеющих принципиальное значение для толкования экспериментальных фактов в области низкоэнергетической физики мезонов.

Первая часть книги посвящена изложению новых методов корректного описания неперенормированных квантовых теорий поля с неполиномиальными лагранжианами. В настоящее время выяснилось, что такие лагранжианы связаны с целым рядом физически интересных взаимодействий. Эти лагранжианы возникают как реализация динамических симметрий, важная роль которых для теорий гравитационных, слабых и электромагнитных, сильных взаимодействий элементарных частиц стала теперь общепризнанной.

Во второй части книги излагается новейший теоретический подход к физике элементарных частиц, в котором с единой групповой точки зрения можно получать многие из лагранжианов, используемых в настоящее время, в том числе киральные лагранжианы и теорию гравитации Эйнштейна. Этот подход основан на концепции динамических (спонтанно-нарушенных) симметрий. В книге описан аппарат, использующий дифференциаль-

ную геометрию групповых пространств Картана и позволяющий восстанавливать лагранжианы по группе динамической симметрии. Обсуждаются многочисленные примеры конкретных физических приложений квантовой теории поля с так называемой киральной динамической симметрией. Рассмотрены гравитационные, слабые, электромагнитные и сильные взаимодействия элементарных частиц. Конкретные физические результаты, полученные в рамках квантовой киральной теории, находятся во вполне удовлетворительном согласии с многочисленными экспериментальными данными.

Как известно, учет киральной динамической симметрии во взаимодействиях элементарных частиц можно провести в более простом подходе, получившем большое распространение в физике последних лет — в так называемой *алгебре токов*. Это направление значительно полнее отражено в физической литературе, чем подход, основанный на феноменологических лагранжианах. Существенные преимущества лагранжева подхода к интересующей нас проблеме заключаются в том, что этот метод не только воспроизводит все результаты, следующие из алгебры токов (многочисленные связи между различными физическими величинами в низкоэнергетическом пределе), но и позволяет продвинуться дальше по энергиям, в частности получить сведения о таких тонких свойствах адронов, как поведение форм-факторов для электромагнитных и слабых взаимодействий, поляризуемость мезонов и их электромагнитные радиусы и т. п. Эти новые достижения квантовой теории поля, относящиеся к физике мезонов в области невысоких энергий, обстоятельно освещены в книге и составляют естественный итог описания общей теории. Столь полного и глубокого описания методов, основанных на использовании феноменологических лагранжианов, и их применений к мезонной физике нет ни в отечественной, ни в зарубежной литературе. Поэтому можно надеяться, что книга будет встречена читателями с большим интересом и прочтена с пользой для дальнейших исследований.

Член-корреспондент АН СССР

Д. И. Блохинцев

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу этой монографии положены лекции, прочитанные авторами в 1973, 1975 и 1976 гг. на школах по физике элементарных частиц в г.г. Тбилиси и Кутаиси и в Объединенном институте ядерных исследований. Основная задача авторов — привлечь внимание читателей к обширной и интересной области квантовой теории поля, к так называемым *неренормируемым теориям*. В отличие от хорошо изученных в настоящее время ренормируемых теорий, классическим примером которых является квантовая электродинамика, исследования в области неренормируемых теорий поля не могут еще претендовать на полноту и законченность. И тем не менее в последние годы здесь имели место заметные достижения как в области разработки математических методов (для корректного вычисления физических величин в рамках этой теории), так и в области конкретных приложений, вполне удовлетворительно описывающих различные физические явления. В настоящей монографии будут рассмотрены только неренормируемые теории неполиномиального типа. Неполиномиальные лагранжианы будем иногда называть *существенно-нелинейными лагранжианами*.

Книга посвящена, главным образом, трем вопросам: 1) ознакомлению с математическим аппаратом, позволяющим описывать неполиномиальные взаимодействия квантованных полей в соответствии со всеми основными требованиями, предъявляемыми к теории S -матрицы (такими, как причинность, унитарность и т. п.); 2) изложению стандартных и общих методов получения неполиномиальных лагранжианов взаимодействующих полей из принципов симметрии, в частности изложению концепции спонтанного нарушения симметрии вакуума, которая широко используется в современной физике элементарных частиц при объединении различного вида

взаимодействий; 3) различным физическим приложениям в рамках ненормируемых квантовых теорий поля. В основном речь будет идти об описании низкоэнергетических свойств мезонов в так называемой киральной теории поля.

Первая половина книги (гл. 1—6) носит более формальный характер, и читатели, больше интересующиеся физическими приложениями, могут основное внимание уделить второй половине этой книги.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Д. И. Блохинцеву и Д. В. Ширкову за многочисленные советы и стимулирующие обсуждения, которые были весьма полезны при работе над рукописью, а также Б. М. Барбашову, Е. А. Иванову, В. А. Мещерякову и В. И. Огисвскому за ценные замечания.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

В книге в основном использованы обозначения, принятые в монографии П. П. Боголюбова и Д. В. Ширкова [1]. Полагается, что $\hbar = c = 1$.

1. Метрика

$$px = p_\mu x_\nu g^{\mu\nu} = p_0 x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}; \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu;$$

$$\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu; \quad \partial^2 = (\partial_\mu \partial^\mu) = (\partial / \partial t)^2 - (\partial / \partial \mathbf{x})^2;$$

$\dot{}$: — знак нормального произведения;

T — знак хронологического произведения.

2. γ Матрицы Дирака и спиноры

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где σ^i — матрицы Паули;

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\sigma^{\mu\nu} = (i/2) (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu);$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$

Уравнения для спиноров имеют вид:

$$(\hat{p} - m) u(p) = 0; \quad \bar{u}(p) = u^+(p) \gamma^0;$$

$$\bar{u}(p) (\hat{p} - m) = 0;$$

$$\hat{p} = \gamma_\mu p^\mu; \quad \bar{\psi} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi = \frac{1}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^\nu \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\nu} \gamma^\nu \psi \right),$$

где u нормированы следующим образом:

$$\bar{u}_s(p) u_s(p) = m/2p_0; \quad \sum_s u_s(p) \bar{u}_s(p) = (\hat{p} + m)/2p_0.$$

3. $SU(2)$ - и $SU(3)$ -матрицы и поля адронов

Матрицы Паули

$$\tau_i \equiv \sigma_i.$$

Матрицы Гелл-Мана

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

След, коммутатор и антикоммутатор двух матриц равны

$$\text{Sp}(\lambda_k \lambda_l) = 2\delta_{kl};$$

$$[\lambda_k, \lambda_l] = 2if_{klm}\lambda_m;$$

$$\{\lambda_k, \lambda_l\} = (4/3)\delta_{kl} + 2d_{klm}\lambda_m,$$

где d_{klm} (f_{klm}) — полностью симметричный (антисимметричный) тензор:

$$f_{123} = 1;$$

$$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = 1/2;$$

$$f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2;$$

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = 1/\sqrt{3};$$

$$d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -1/2\sqrt{3};$$

$$d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = 1/2.$$

Октеты барионов B_i и мезонов M_i

$$B_1 = \frac{\Sigma^- + \Sigma^+}{\sqrt{2}}; \quad B_2 = i \frac{\Sigma^+ - \Sigma^-}{\sqrt{2}}; \quad B_3 = \Sigma^0; \quad B_4 = \frac{p - \Xi^-}{\sqrt{2}};$$

$$B_5 = i \frac{p + \Xi^-}{\sqrt{2}}; \quad B_6 = \frac{n + \Xi^0}{\sqrt{2}}; \quad B_7 = i \frac{n - \Xi^0}{\sqrt{2}}; \quad B_8 = \Lambda^0;$$

$$M_1 = \frac{\pi^+ + \pi^-}{\sqrt{2}}; \quad M_2 = i \frac{\pi^+ - \pi^-}{\sqrt{2}}; \quad M_3 = \pi^0; \quad M_4 = \frac{K^+ + \bar{K}^+}{\sqrt{2}};$$

$$M_5 = i \frac{K^+ - \bar{K}^+}{\sqrt{2}}; \quad M_6 = \frac{K^0 + \bar{K}^0}{\sqrt{2}}; \quad M_7 = i \frac{K^0 - \bar{K}^0}{\sqrt{2}}; \quad M_8 = \eta^0.$$

4. Вероятности переходов, сечения и вероятности распадов

Если вероятность перехода для сдвиги пространства-времени из начального состояния $|i\rangle$ в конечное состояние $|f\rangle$ есть

$$\omega_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) |\langle f | T | i \rangle|^2,$$

то вероятность распада частицы i в n частиц f выражается через матрицу T следующим образом:

$$\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3n} 2^n E_i} \int \prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{E_j} \delta^4 \left(p_i - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\langle f | T | i \rangle|^2.$$

Рассмотрим упругое рассеяние одинаковых частиц в системе центра масс с законом сохранения импульса:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4.$$

Мандельштамовские переменные:

$$s = (p_1 + p_2)^2; \quad t = (p_1 - p_3)^2; \quad u = (p_1 - p_4)^2; \quad s + t + u = 4m^2.$$

Дифференциальное сечение имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{s(s-4m^2)} |T(s, t)|^2.$$

Инвариантная амплитуда $T(s, t)$ имеет следующее разложение по парциальным волнам:

$$T(s, t) = 8\pi \sqrt{\frac{4s}{s-4m^2}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp(i\delta_l) \sin \delta_l P_l(\cos \theta).$$

5. Используемые физические константы *

e — электрический заряд протона, $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$;

G — константа Ферми (слабого взаимодействия), $G \approx 10^{-5}/M_N^2$;

M_N — масса нуклона, $M_N \approx 940$ Мэв;

\bar{g} — константа сильного взаимодействия, $\bar{g}^2/4\pi \approx 14,7$;

g_A — отношение констант связи аксиального и векторного токов, $g_A \approx 1,25$;

F_π — константа слабого распада заряженного пиона; $F_\pi \approx 92$ Мэв

α — параметр смешивания f и d мезон-барионной связи в $SU(3)$ -теории, $\alpha \approx 2/3$;

θ_c — угол Кабиббо, $\sin \theta_c \approx 0,27$.

6. Наиболее часто встречающиеся специальные функции

$\Gamma(n)$ — гамма-функция;

$\psi(n) = \partial \ln \Gamma(n) / \partial n$ — пси-функция Эйлера;

$C = 0,577 \dots$ — константа Эйлера;

$J_1(x)$, $K_1(x)$, $H_1^{(1,2)}(x)$ — цилиндрические функции Бесселя и Ганкеля.

* Здесь даны приближенные значения констант. Поскольку обсуждаемые ниже результаты соответствуют примерно 20%-ной погрешности, то эти значения констант можно считать вполне приемлемыми.

7. Вспомогательные сингулярные функции

Разрывные функции $\theta(x)$ и $\varepsilon(x)$

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ixt)}{t - i\varepsilon} dt = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x < 0; \end{cases}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ixt) \frac{dt}{t} = \theta(x) - \theta(-x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

(P — символ главного значения);

$$\delta\text{-функция Дирака: } \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ixt) dt.$$

Некоторые соотношения:

$$\frac{1}{x + i\varepsilon} = P \frac{1}{x} - i\pi\delta(x); \quad \frac{1}{x - i\varepsilon} = P \frac{1}{x} + i\pi\delta(x);$$

$$\left(\frac{1}{x + i\varepsilon} \right)^{n+1} = P \left(\frac{1}{x} \right)^{n+1} - i\pi \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(x);$$

$$P \frac{1}{x} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t) \exp(ixt) dt.$$

ПРИНЦИПЫ СИММЕТРИИ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

§ 1. Развитие квантовой теории поля

Квантовая теория поля (КТП), возникшая в конце 20-х годов, получила широкое признание после успешного объяснения квантовой электродинамикой многих экспериментальных данных (лэмбовского сдвига, аномального магнитного момента электрона и т. п.). Именно с этого времени начался период бурного развития КТП. Многочисленные результаты, полученные в это время, подробно изложены во многих учебниках и монографиях (см., например, Н. Н. Боголюбова, Д. В. Ширкова [1], А. И. Ахиезера, В. Б. Берестецкого [2], Швсбера [3] и др.).

Система основных аксиом и постулатов КТП, сформировавшаяся в этот период, оказала большое влияние на возникновение других направлений в физике элементарных частиц. Однако развитие лагранжева формализма в самой КТП выражалось, в основном, в изучении и совершенствовании математического аппарата этой теории. Попытки использовать лагранжиан для описания слабых, сильных и гравитационных взаимодействий оказались не столь успешными, как в квантовой электродинамике. Физики столкнулись здесь с такими существенными трудностями, как например, невозможность использования обычной теории возмущений из-за больших констант связи в сильных взаимодействиях или неперенормируемость теории в слабых и гравитационных взаимодействиях. Более того, в аппарате самой квантовой электродинамики была вскрыта сложная проблема, связанная с появлением нуль-заряда. В связи с этим интерес к использованию лагранжева формализма в КТП резко упал. Сомнения в его целесообразности были весьма популярны среди физиков в конце 50-х начале 60-х годов. Возникали предложения вообще вместо лагранжианов изучать аналитические свойства амплитуд. Внимание большинства теоретиков все чаще

обращалось на построение аппарата дисперсионных соотношений, разработку идеологии полюсов Редже, открытие новых симметрий в физике адронов и слабых взаимодействий.

В КТП в 60-х годах, с одной стороны, стало развиваться аксиоматическое направление. На этом пути были достигнуты значительные успехи в понимании структуры КТП. Изучались вопросы перенормируемости, локализуемости и унитарности теории, на строгом математическом уровне доказывались общие теоремы, например, о СРТ-симметрии, о связи спина и статистики и т. п. С другой стороны, успешное применение унитарной симметрии в физике адронов, построение $V-A$ -теории слабых взаимодействий, развитие идеи универсальности взаимодействий и алгебры токов привели к более глубокому пониманию роли симметрий в физике элементарных частиц, в частности роли калибровочной инвариантности в самой квантовой электродинамике.

Именно развитие групповых методов в физике элементарных частиц в большой степени способствовало возрождению лагранжева формализма в КТП в конце 60-х годов. Развитие калибровочных и так называемых *киральные теории* со спонтанно-нарушенной симметрией вакуума, построение единых теорий слабого, электромагнитного, а затем и сильного взаимодействий, развитие партонной картины Фейнмана для взаимодействий при высоких энергиях не только позволили объяснить и предсказать некоторые экспериментальные факты, но и обогатили арсенал теоретической физики глубокими по содержанию физическими идеями и математическими методами.

В качестве основного достижения последних лет можно отметить выяснение глубокой роли, которую играют алгебраические и динамические симметрии при построении моделей КТП. Остановимся более подробно на этих понятиях и на значении принципов симметрии в физике элементарных частиц.

§ 2. Роль принципов симметрии в физике элементарных частиц

В работах Эйнштейна [4] и Вигнера [5] неоднократно отмечалась исключительно важная роль, которую играют принципы симметрии при создании новых физи-

ческих теорий. Место, которое занимают эти принципы в общей структуре современной теории, можно наглядно изобразить с помощью простой схемы [4]:

Принципы симметрии → Законы → Явления.

Такую схему нетрудно принять, если заметить, что все уравнения теории поля (описывающие взаимодействующие и невзаимодействующие реальные элементарные частицы) соответствуют определенным группам симметрии (например, решения уравнения Клейна — Гордона, Дирака, Максвелла тесно связаны с представлениями группы Пуанкаре).

Наиболее трудный и важный этап в построении теории — это поиск физических гипотез, ведущих к установлению принципов симметрии. Здесь большую роль играет интуиция. «К ним (принципам симметрии) ведет не логический путь, а основанная на прощиповании в суть опыта интуиция», — говорил Эйнштейн [4]. Именно поэтому пути установления принципов симметрии трудно понимаемы и часто являются темой для многочисленных обсуждений*.

§ 3. Алгебраические и динамические принципы

Симметрии в теории поля можно разделить на алгебраические и динамические [5]. *Алгебраические принципы симметрии* отражают законы сохранения динамических величин и позволяют классифицировать невзаимодействующие частицы по линейным представлениям алгебраических групп. Эти представления связаны с сохраняющимися величинами — «зарядами». Учет алгебраической симметрии позволяет устанавливать связи между амплитудами, описывающими одинаковое число частиц, но с разными «зарядами». Примерами таких симметрий могут служить: группа Пуанкаре (классификация по импульсу, массе, спину), группа изотопических и унитарных преобразований в физике адронов, группа глобальных калибровочных преобразований (с постоянной фазой) в электродинамике.

Однако требования алгебраических симметрий, соответствующих невзаимодействующим частицам, не могут помочь однозначно выбрать лагранжиан взаимодействия.

* Вспомним хотя бы о продолжающихся по сей день дискуссиях о физических и логических основах общей теории относительности.

Чтобы фиксировать вид взаимодействия, необходимо постулировать инвариантность полного лагранжиана относительно более широкой, чем алгебраическая группа, *динамической группы преобразований*, накладывающей ограничения на форму взаимодействия полей. Важно отметить, что такое расширение постулатов, конечно, не должно приводить к новым законам сохранения, так как, по определению, все законы сохранения уже учтены алгебраической группой симметрии.

Примерами динамической симметрии могут служить: группа локальных калибровочных преобразований в электродинамике и в теории Янга — Миллса (с фазой, зависящей от точки пространства) и группа общековариантных преобразований в гравитации. Следуя Вигнеру, можно предположить, что все реальные взаимодействия имеют ту или иную динамическую симметрию. Учет динамической симметрии позволяет установить связи между амплитудами, описывающими разное число частиц (так называемые *низкоэнергетические теоремы*).

За последние десять лет можно отметить существенный прогресс в понимании роли и сущности динамической симметрии. Этот прогресс тесно связан с более глубоким изучением явления спонтанного нарушения симметрии вакуума. Впервые эффекты спонтанного нарушения симметрии вакуума были подробно рассмотрены в теории многих тел Н. Н. Боголюбовым [6] и в релятивистской квантовой теории поля — Намбу [7] и Голдстоуном [8]*.

Симметрия относительно некоторой группы G называется *спонтанно-нарушенной*, если при инвариантном полном лагранжиане вакуум системы, который можно понимать в классическом смысле, стабилен лишь по отношению к подгруппе H полной группы G . В таком случае подгруппа H — алгебраическая группа классификации исходных полей или частиц теории, а вакуум и лагранжиан свободных полей — «скалярные» представления группы H .

* Эффект спонтанного нарушения симметрии вакуума непосредственно связан с возможностью спонтанных вакуумных переходов, которые приводят к новому вакууму, отличающемуся от вакуума первоначальной теории возмущений, и к новому спектру частиц. Заметим, что такая возможность возникновения новых вакуумов в квантовой теории поля рассматривалась много ранее Д. И. Блохинцевым [9].

Спонтанное нарушение симметрии вакуума сопровождается возникновением выделенных полей с нулевой массой, называемых *голдстоуновскими полями* (теорема Боголюбова о « $1/q^2$ » в статистической физике и теорема Голдстоуна в теории поля).

Можно отметить два подхода к описанию явления спонтанно-нарушенной симметрии — *групповой* и *динамический*.

Групповой подход ставит своей задачей выяснение экспериментальных следствий обнаруженной динамической симметрии, оставляя в стороне вопросы, связанные с причинами спонтанного нарушения симметрии и возникновения голдстоуновских частиц. Наиболее простой и эффективный метод описания следствий учета симметрии — метод феноменологических лагранжианов [10—14].

Существуют линейные и нелинейные реализации динамических симметрий. Метод нелинейных реализаций позволяет воспроизвести автоматически все следствия спонтанного нарушения симметрии в наиболее чистом виде, используя только алгебру соответствующей динамической группы. Этот метод приводит, как правило, к неперенормируемым теориям с существенно-нелинейными лагранжианами неполиномиального вида.

Метод линейных реализаций связан с построением перенормируемых лагранжианов, что достигается увеличением числа исходных полей. Недостатком такого метода является необходимость рассмотрения дополнительных динамических предположений о виде лагранжиана взаимодействия и введение ненаблюдаемых полей.

Динамический подход (динамическое спонтанное нарушение симметрии) связан с построением квантовой теории, объясняющей спонтанное нарушение симметрии вакуума. Примером такого подхода может служить решение проблемы о квазисредних в статистической физике Н. Н. Боголюбовым [6]. В этом подходе ясно видно отсутствие абсолютности различия между динамическими и алгебраическими симметриями. При определенных условиях могут происходить фазовые переходы в системе, восстанавливающие спонтанно-нарушенную симметрию вакуума и изменяющие спектр элементарных возбуждений.

К последнему направлению довольно близки работы [15, 16], основной задачей которых является находжде-

ние в некоторых моделях теории поля спектра элементарных возбуждений, отличающегося от спектра обычной теории возмущений.

§ 4. Виды взаимодействий и их симметрии

Идея спонтанного нарушения симметрии вакуума в настоящее время проникла в теории всех взаимодействий — от гравитационного до сильного. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим кратко различные взаимодействия элементарных частиц и их предполагаемые симметрии.

Гравитация. Гравитация — наиболее слабое и универсальное взаимодействие элементарных частиц. Алгебраической группой классификации частиц является группа Пуанкаре. Существуют несколько путей расширения этой симметрии до динамической симметрии — группы общековариантных преобразований. В частности, в работах [17, 18] показано, что теорию гравитации можно получить как совместную нелинейную реализацию двух динамических спонтанно-нарушенных симметрий — аффинной и конформной (см. § 44).

Электромагнитные и слабые взаимодействия. Идея о промежуточном векторном бозоне в слабых взаимодействиях и объединение этого бозона с электромагнитным полем в один мультиплет привели к созданию первой единой теории электромагнитного и слабого взаимодействий [19]. Согласно этой теории группой классификации лептонов является группа $SU(2) \times U(1)$. Вслед за работами [19] появилось большое число аналогичных теорий, основанных на других группах симметрии. В этих теориях группа классификации частиц расширяется до локальной калибровочной группы*, и одновременно вводится спонтанное нарушение симметрии вакуума. Последнее приводит к возникновению масс у фермионов и у промежуточных векторных бозонов. При спонтанном нарушении симметрии вакуума можно использовать как линейные реализации нарушенных симметрий с учетом скалярных частиц (перенормируемые теории [19]), так и нелинейные реализации (см.,

* Отметим, что калибровочные теории поля также можно трактовать как нелинейные реализации спонтанно-нарушенных бесконечно-параметрических групп симметрии [20].

например, [21]), которые не требуют введения скалярных частиц, но являются переспорными. Заметим, что до настоящего времени скалярные частицы не наблюдались в экспериментах.

Сильные взаимодействия. Высокие энергии. Гипотеза кварков позволяет распространить указанную выше классификацию $SU(2) \times U(1)$ на адроны и строить единые теории сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий [22, 23]. Такие теории служат хорошей феноменологической основой для описания процессов с передачами больших импульсов. Большим успехом такого подхода было предсказание нового квантового числа — чарма, подтвердившееся экспериментально. Чисто адронной группой классификации частиц является цветная группа $SU(3)_c$, необходимая для объяснения статистического состояния кварков в барионах [24].

В настоящее время интенсивно обсуждаются схемы построения единой теории поля на основе одной общей группы симметрии, объединяющей цветные кварки и лептоны в один мультиплет [23]. (При этом, число скалярных частиц, участвующих в спонтанном нарушении симметрии вакуума, достигает нескольких сот.) *

Экспериментальные данные по глубоко-неупругим процессам взаимодействия хорошо описываются приближением безмассовых кварков. Это свидетельствует о том, что сильные взаимодействия на малых расстояниях инвариантны относительно киральной группы симметрии, классифицирующей частицы с определенной спиральностью.

Низкие энергии. Исторически киральная алгебра токов возникла как способ описания взаимодействия адронов при низких энергиях [25]. В данном случае киральная симметрия проявляет себя как динамическая. Имеются экспериментальные факты, свидетельствующие о том, что при низких энергиях хорошо реализуется спонтанное нарушение киральной $SU(n) \times SU(n)$ -симметрии с $SU(n)$ -подгруппой стабильности вакуума ($n = 2, 3, 4$). При этом псевдоскалярные мезоны являются голдстоуновскими частицами, получившими ненулевую массу вследствие нарушения киральной симметрии.

* Существенными трудностями цветной теории адронов (квантовой хромодинамики [22]) является ненаблюдаемость в свободном состоянии кварков, а также то, что эта теория не объясняет пока ряд процессов с передачами малых импульсов.

Метод феноменологических лагранжианов позволяет наиболее просто воспроизвести результаты низкоэнергетических теорем алгебры токов.

Переход от алгебраической реализации киральной симметрии при высоких энергиях к динамической при низких энергиях напоминает фазовые переходы в квантовой статистической физике.

Выводы

Краткий обзор современного состояния квантовой теории поля свидетельствует о том, что проблема неперенормируемых теорий не потеряла актуальности. В частности, физики при построении новых теорий сталкиваются с дилеммой: или перенормируемые теории, но необходимость введения ненаблюдаемых скалярных частиц, или неперенормируемые теории с той же динамической симметрией, но без скалярных частиц.

В настоящее время нет достаточно веских аргументов для однозначного выбора из этих возможностей.

В предлагаемой монографии сделана попытка восполнить пробел, существующий в современной физической литературе в области описания неперенормируемых теорий. С одной стороны, будет рассказано о достижениях в квантовании неперенормируемых неполиномиальных теорий поля, с другой — на основе рассмотрения спонтанного нарушения симметрии и учета динамических симметрий — изложены методы получения существенно нелинейных лагранжианов в физике элементарных частиц. Будут приведены также примеры физически интересных применений развитых в настоящее время методов для описания фундаментальных свойств мезонов при низких энергиях.

КЛАССИФИКАЦИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В предыдущей главе были рассмотрены основные физически интересные случаи взаимодействия элементарных частиц с точки зрения тех динамических симметрий, которым они соответствуют. Здесь вновь будут обсуждаться эти взаимодействия, но уже с точки зрения построения лагранжева формализма и соответствующих квантовых теорий поля*. Будут рассмотрены два вопроса: 1) какими лагранжианами можно описывать различные виды взаимодействий; 2) к каким квантовым теориям поля (ренормируемым или перенормируемым) приводят различные формы лагранжианов взаимодействия?

§ 5. Электромагнитные и слабые взаимодействия

Начнем с простого примера взаимодействия протонов с электромагнитным полем A_μ , которое описывается лагранжианом**

$$\mathcal{L}_{\text{эм}}^{(p)} = \mathcal{L}_0(\psi, A) - e: \bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_p A^\mu:, \quad (5.1)$$

где $\mathcal{L}_0(\psi, A)$ — лагранжиан свободных спинорных и электромагнитных полей:

$$\mathcal{L}_0(\psi, A) = i \bar{\psi}_p \overleftrightarrow{\partial} \psi_p - M_p \bar{\psi}_p \psi_p - H_{kl} H^{kl}/4;$$

* Лагранжианы, описывающие гравитационные взаимодействия, не будут рассматриваться в этой главе ввиду их относительно сложного вида. Эти взаимодействия подробно обсуждаются в гл. 6 и 13.

** Для простоты изложения, а также следуя исторически сложившейся ситуации, рассмотрим сначала электромагнитные, слабые и сильные взаимодействия только нуклонов [$SU(2)$ -схема], а затем покажем, как эта картина обобщается при учете остальных баронов [$SU(3)$ -схема].

$H_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$; ψ_p — спинорное поле протона; M_p — масса протона. Этот лагранжиан инвариантен не только относительно преобразований координат в пространстве — времени (алгебраическая симметрия), но и относительно калибровочных преобразований входящих в него полей (динамическая симметрия). Лагранжиан (5.1) приводит к перенормируемой КТП.

Слабое взаимодействие пуклонов с лептонами описывается произведением двух токов:

$$\mathcal{L}_{сл}^{(\mu, \nu)} = \frac{G}{\sqrt{2}} [J_{\mu(\mu)}^+(x) J_{(\mu)}^\mu(x) + J_{\mu(\mu)}^+(x) J_{\nu}^\mu(x)], \quad (5.2)$$

где $J_{(\mu)}^\mu$ и $J_{(\nu)}^\mu$ — лептонный и нуклонный токи соответственно:

$$J_{(\mu)}^\mu = : \bar{\nu}_{(\mu)} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \mu : + \bar{\nu}_{(e)} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) e :; \quad (5.3)$$

$$J_{(\mu)}^\mu = : \bar{\psi}_n \gamma^\mu (1 + g_A \gamma_5) \psi_p :. \quad (5.4)$$

Здесь μ и $\nu(\mu)$ — поля мюона и его нейтрино (аналогично для e и $\nu(e)$); ψ_n и ψ_p — поля нейтрона и протона.

В более общей форме лагранжиан слабого взаимодействия записывается в виде произведения двух одинаковых токов:

$$\mathcal{L}_{сл} = \frac{G}{\sqrt{2}} : J_\mu^+(x) J^\mu(x) :, \quad (5.2a)$$

где $J^\mu(x) = J_{(\mu)}^\mu(x) + J_{(a)}^\mu(x)$ — сумма лептонного и адронного токов.

В $SU(3)$ -инвариантной схеме слабые и электромагнитные взаимодействия описываются октетом векторных токов $J_i^\mu(x)$ и октетом аксиально-векторных токов $J_i^{5\mu}(x)$. Здесь μ — пространственно-временной индекс ($\mu=0, 1, 2, 3$), а i — индекс унитарного спина ($i=1, \dots, 8$) [25]. Векторный октет соответствует сохраняющемуся току унитарного спина. Его первые три компоненты представляют собой токи изотопического спина, а восьмая компонента пропорциональна току гиперзаряда. Компоненты с $i=4, \dots, 7$ изменяют странность. Они сохраняются лишь при отсутствии нарушения $SU(3)$ -инвариантности.

Электромагнитный ток $J_{\text{эм}}^\mu$ следующим образом выражается через компоненты векторного октета:

$$J_{\text{эм}}^\mu(x) = e [J_3^\mu(x) + J_8^\mu(x) / \sqrt{3}]. \quad (5.5)$$

Лагранжиан, описывающий взаимодействие электромагнитного поля A_μ с адронами, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{эм}}^{(a)} = - J_{\text{эм}}^\mu(x) A_\mu(x). \quad (5.1a)$$

Адронный ток, входящий в лагранжиан слабого взаимодействия (5.2a), записывается в форме

$$J_{(a)}^\mu = [J_1^\mu + i J_2^\mu - (J_1^{5\mu} + i J_2^{5\mu})] \cos \theta_c + \\ + [J_4^\mu + i J_5^\mu - (J_4^{5\mu} + i J_5^{5\mu})] \sin \theta_c, \quad (5.6)$$

Токи J_i^μ и $J_i^{5\mu}$ выражаются через барионные поля B_i и структурные коэффициенты d_{klm} и f_{klm} $SU(3)$ -группы следующим образом:

$$J_i^\mu = -i \bar{B}_k \gamma^\mu f_{ikl} B_l; \quad (5.7)$$

$$J_i^{5\mu} = g_A \bar{B}_k \gamma^\mu \gamma^5 [a d_{ikl} - i(1 - \alpha) f_{ikl}] B_l. \quad (5.8)$$

При построении выписанных здесь лагранжианов слабого взаимодействия были учтены лишь алгебраические симметрии. В отличие от электромагнитных лагранжианов, приводящих к перенормируемым теориям, эти лагранжианы дают неперенормируемые теории.

Как уже упоминалось в гл. 1, учет динамических калибровочных симметрий и введение промежуточного векторного бозона позволили построить единую теорию слабых и электромагнитных взаимодействий, которая, как и электродинамика, опять становится перенормируемой.

§ 6. Сильные взаимодействия

Простейшая форма лагранжиана для нуклон-пионных взаимодействий, учитывающая инвариантность относительно изменения пространственно-временных и изотопических координат, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{сильн}}^{\text{B3}} = i \bar{g} \bar{\psi} \gamma_5 \tau \cdot \pi \psi + h (\pi^2)^2, \quad (6.1)$$

где ψ и π — поля нуклонов и пионов; τ — матрица Паули; \bar{g} — константа сильного взаимодействия.

Малые константы связи у электромагнитных и слабых взаимодействий позволяют надеяться на получение разумных результатов при использовании теории возмущений. Действительно, расчеты такого рода в рамках квантовой электродинамики дают результаты по своей точности эквивалентные данным современных экспериментов. Совершенно иная ситуация имеет место при описании сильных взаимодействий. Ввиду большой константы связи нет оснований ожидать хороших результатов в низших порядках теории возмущений при использовании лагранжиана (6.1).

Можно попытаться извлечь какую-то полезную информацию из лагранжиана (6.1) для описания низкоэнергетических процессов взаимодействия адронов. Но оказывается, что и при низких энергиях лагранжиан (6.1) в борновском приближении даст совершенно неверную картину, например $\pi\pi$ -рассеяния. В то же время хорошо известно, что низкоэнергетические теоремы, полученные из алгебры токов, находятся в разумном согласии с реальной картиной низкоэнергетической адронной физики. Алгебра токов построена на динамической $SU(3) \times SU(3)$ -группе. Тогда естественно возникает предложение — построить лагранжиан сильного взаимодействия с учетом этой группы и проверить, не будет ли он корректно описывать низкоэнергетические процессы взаимодействия адронов. Лагранжиан такого типа имеет вид*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi, \pi) = & i \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial} \psi - M_n \bar{\psi} U(\pi/F_\pi) \psi + \\ & + (F_\pi/4) \text{Sp} \{ \partial_\mu U(\pi/F_\pi) \partial^\mu U^\dagger(\pi/F_\pi) \}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $U(\pi/F_\pi) = \exp \{ -i \gamma_5 \pi \tau / F_\pi \}$; F_π — константа распада π -мезона. В низшем порядке по константе связи ($1/F_\pi$) этот лагранжиан можно записать так:

$$\overline{\mathcal{L}}_{\text{сильн}}^{\text{вз}} = i \frac{M_n}{F_\pi} : \bar{\psi} \gamma_5 \tau \pi \psi : + \frac{M_n}{2F_\pi^2} : \bar{\psi} \psi \pi^2 : - \frac{:\pi^2 (\partial_\mu \pi)^2:}{4F_\pi^2}. \quad (6.1a)$$

* Вывод лагранжиана вида (6.2) см. в гл. 8. Лагранжиан (6.2) взят для более простого случая инвариантности относительно $SU(2) \times SU(2)$ -группы.

Сравнивая лагранжианы (6.1) и (6.1a), легко заметить целый ряд существенных различий между ними: во-первых, имеем только одну константу в (6.1a) в отличие от двух различных констант в (6.1) *; во-вторых, в пион-пионное взаимодействие вошла связь с производной и, в-третьих, появился еще один член для π - n -взаимодействия в низшем порядке по константе сильной связи, который важен при описании некоторых низкоэнергетических процессов (например, он определяет поляризуемость пиона, как это будет видно ниже).

Если теперь попытаться описать процесс $\pi\pi$ -рассеяния при низких энергиях, то для амплитуды этого процесса в борновском приближении получается выражение, которое хорошо согласуется с экспериментальными данными. Удовлетворительные результаты можно получить для длин рассеяния $\pi\pi$ -системы и т. п. (см. § 31).

Итак, учет динамической $SU(2) \times SU(2)$ -группы [или, в более общем случае, $SU(3) \times SU(3)$] при построении лагранжиана для сильных взаимодействий позволяет достичь того эффекта, что низкоэнергетические разложения амплитуд рассеяния адронов начинают совпадать с соответствующими разложениями по степеням константы связи \bar{g} . Поэтому, чтобы описать процессы при низких энергиях, опять можно будет использовать теорию возмущений. Результаты, получаемые в низших порядках теории возмущений с использованием так называемых феноменологических [$SU(3) \times SU(3)$ -инвариантных] лагранжианов, полностью согласуются с результатами, найденными из низкоэнергетических теорем алгебры токов.

§ 7. Взаимодействия первого и второго рода

Рассмотрим различные квантовые теории поля с точки зрения их ренормируемости или перенормируемости и опишем простой способ, пригодный для определения по одному виду лагранжиана, к какому типу теории он приводит.

Обсуждая лагранжианы, описывающие электромагнитные, слабые и сильные взаимодействия элементарных

*Если ввести перенормировку сильной вершины $g_A \approx 1,25$, то получим $g_A M_n/F_\pi \approx \bar{g}'$ (тождество Голдбергера — Треймана [26]).

частиц, мы неоднократно отмечали, что одни из них приводят к ренормируемым квантовым теориям поля, а другие — к неренормируемым. Это качество теории поля связано с наличием УФ-расходимостей в квантовых теориях.

В квантовых теориях поля возможны две различные ситуации. Первая — когда процедура устранения УФ-расходимостей приводит к появлению конечного числа неопределенных констант. В этом случае неопределенность в теории можно устранить с помощью переопределения конечного числа наблюдаемых физических величин (например, заряда и массы). Такие теории называются *ренормируемыми*. Вторая ситуация имеет место в том случае, когда при устранении расходимостей с помощью обычных методов квантовой теории поля (например, регуляризации Паули—Вилларса или Боголюбова—Парасюка [1]) в теории появляется бесконечное количество неопределенных констант. Такие теории называются *неренормируемыми*. Здесь обычные методы квантовой теории поля заведомо неприменимы и необходимо использовать совершенно новые математические методы, позволяющие избежать появления бесконечного набора неопределенных параметров.

Прежде чем перейти к описанию методов, используемых в неренормируемых теориях поля, остановимся более подробно на выявлении признаков, с помощью которых в лагранжевом подходе можно установить, относится ли данная теория к ренормируемому или неренормируемому типу. Здесь полезно ввести понятие индекса диаграммы $\omega(G)$ и индекса вершины ω_i^* .

При проведении процедуры устранения расходимостей в квантовой теории поля в члены S -матрицы вводятся контрчлены. Количество их однозначно связано с числом различных типов расходящихся сильносвязанных диаграмм в теории**. Тип расходящейся диаграм-

* В изложении этой части главы мы будем следовать монографии Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [1]. Заметим, что необходимое условие перенормируемости теории было сформулировано также в работе Д. И. Блохинцева [27].

** Диаграмма называется *несвязанной*, если ее можно разбить на две части, не соединенные между собой линиями. В противном случае диаграмма называется *связанной*: *слабосвязанной*, если она превращается в несвязанную при снятии одной линии, и *сильносвязанной*, если последнее невозможно.

мы характеризуется степенью ее расходимости и числом внешних линий. Если число различных типов сильносвязанных расходящихся диаграмм в теории конечно, то имеем ренормируемую теорию, в противном случае — неренормируемую.

Подсчитаем степень расходимости интеграла, соответствующего сильносвязанной диаграмме G , имеющей n вершин и L внутренних линий. Поскольку диаграмма G — сильносвязанная и в каждой вершине стоят δ -функции, с их помощью снимается $4(n-1)$ интеграций и остается $4(L-n+1)$ независимых переменных интегрирования в импульсном пространстве (одна δ -функция не участвует в интеграциях, поскольку она обеспечивает сохранение энергии-импульса для всей диаграммы).

После выделения «радиального» импульса P произведение дифференциалов $\prod_i d^4 p_i$ даст множитель $P^{4(L-n+1)} \times$

$\times dP/P^i$. С каждой внутренней линией связан пропагатор вида $A_r(p)/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$, где $A_r(p)$ — полином по p степени r . Для скалярных и электромагнитных полей $r=0$, для спинорных полей $r=1$, для векторных полей $r=2$ и т. д.

Старшие степени пропагаторов добавляют в общий интеграл еще множитель $P^{\sum_{l=1}^L (r_l - 2)}$, где r_l — степень полинома, стоящего в числителе пропагатора l -й линии, а суммирование ведется по всем внутренним линиям диаграммы G . Отсюда легко видеть, что интеграл по P будет расходящимся или сходящимся, если

$$\omega(G) = \sum_{l=1}^L (r_l + 2) - 4(n - 1) \quad (7.1)$$

будет ≥ 0 или < 0 соответственно. Величина $\omega(G)$ называется *индексом диаграммы*.

Число контрчленов в теории определяется числом различных сильносвязанных диаграмм с неотрицательным индексом $\omega(G)$. Связь между диаграммой с n вершинами и s внешними линиями и соответствующим контрчленом легко установить, записав сначала квази-

локальный оператор

$$: u_{\alpha_1}(x_{i_1}) \dots u_{\alpha_s}(x_{i_s}) : Z \left(\dots \frac{\partial}{\partial x_i} \dots \right) \delta(x_1 - x_2) \dots \\ \dots \delta(x_{n-1} - x_n),$$

где u_{α} — внешние поля; x_i — координаты вершин; степень полинома Z равна индексу диаграммы $\omega(G)$. После интегрирования по всем переменным x_i , кроме одной, получим контрчлен лагранжиана (при этом производные переходят с δ -функций на операторы поля u_{α}). Отсюда видно, что типы контрчленов, а именно их операторный вид и степень производных у каждого оператора поля, однозначно определяются числами $\omega(G)$ и s соответствующих сильносвязанных диаграмм.

Найдем теперь зависимость $\omega(G)$ от числа внешних и внутренних линий диаграммы G . Для этого полезно ввести понятие индекса вершины ω_i :

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{внт}}} (r_l - 2) - 4, \quad (7.2)$$

где суммирование ведется по всем внутренним линиям, входящим в i -ю вершину. Индекс диаграммы $\omega(G)$ выражается через индекс вершин следующим образом:

$$\omega(G) = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i + 4.$$

Когда все линии, связанные с данной вершиной, оказываются внутренними, индекс ω_i принимает максимальное значение $\omega_i^{\text{макс}}$. Если $\omega_i^{\text{макс}} \leq 0$, то $\omega(G) \leq 4$ и, наоборот, если $\omega_i^{\text{макс}} > 0$, то $\omega(G)$ может оказаться больше любого наперед заданного числа. Зависимость $\omega(G)$ от числа внешних линий можно записать в виде

$$\omega(G) = \sum_i \omega_i + 4 - \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{внш}}} (r_l + 2),$$

где суммирование в последнем члене производится по всем внешним линиям данной диаграммы.

Заметим, что в случае, когда $\omega_i^{\text{макс}} \leq 0$, как $\omega(G)$, так и число внешних линий s у диаграмм с положительными индексами ограничены числом четыре. Поэтому число соответствующих контрчленов оказывается конечным и поддается детальной классификации. В случае же,

когда $\omega_i^{\text{макс}} > 0$, нельзя прийти к конечному числу контрчленов в теории и получить замкнутое выражение для полного эффективного лагранжиана на таком языке*.

Поэтому можно разбить все лагранжианы взаимодействия на два класса: 1) взаимодействия первого рода (все $\omega_i \leq 0$); 2) взаимодействия второго рода (некоторые $\omega_i > 0$). Соответственно и теории делятся на ренормируемые и неренормируемые.

Здесь необходимо сделать существенное замечание. Имеется целый ряд теорий (например, калибровочные теории, модель Янга — Миллса, модель Вейнберга), в которых отдельные вершинные факторы могут взаимно компенсироваться (компенсация расходимостей в определенных совокупностях диаграмм). Поэтому эффективное значение индексов ω_i может понизиться.

Итак, получен простой рецепт, с помощью которого по одному внешнему виду лагранжиана взаимодействия можно сказать, какому типу теории он соответствует. Так, лагранжианы электромагнитного и сильного взаимодействий (5.1) и (6.1) приводят к ренормируемым теориям, а лагранжианы слабых взаимодействий (5.2), киральный лагранжиан (6.2) и гравитационные (см. ниже) — к неренормируемым теориям.

Перейдем теперь к более подробному рассмотрению взаимодействий второго рода. Среди бесконечного числа контрчленов, возникающих в таких теориях, всегда можно выделить группу членов одинакового операторного типа, но с бесконечно возрастающими степенями производных. Бесконечный ряд по степеням производных было бы вполне естественно представить как разложение некоторого нелокального выражения и потому взаимодействия второго рода считать нелокальными взаимодействиями.

Рассмотрим в качестве примера псевдовекторное взаимодействие пуклонов с мезонами**

$$g: \bar{\Psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi \partial^\mu \varphi \quad (7.3)$$

* Эффективным лагранжианом называется здесь лагранжиан, в котором содержатся все контрчлены [1]. В последнее время это название часто используют для обозначения феноменологических лагранжианов (см. гл. 7), что следует учитывать во избежание возможных недоразумений.

** Константы \bar{g} в (6.1) и g в (7.3) связаны соотношением $\bar{g} = 2M_\pi g$. Константу g обозначают иногда как f/m_π , где m_π — масса пиона [3].

В этом случае в эффективном лагранжиане появляется бесконечный ряд контрчленов вида

$$C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} : \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi \partial_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \partial^\mu \varphi ;,$$

которые можно было бы считать разложением некоторого выражения нелокального типа

$$\int : \bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma^\mu \psi(x) \partial_\mu \varphi(y) K(x-y) dy$$

в ряд по степеням производных от функций $\varphi(x)$.

Однако ситуация здесь оказывается более сложной. Как показали исследования Н. Н. Меймана [28] и Джаффе [29, 30], если коэффициенты $C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ убывают с ростом n достаточно быстро, то взаимодействия второго рода приводят опять к локальным теориям. Эти взаимодействия можно назвать *взаимодействиями локализуемого типа*. Если же коэффициенты $C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ не удовлетворяют этому условию, то мы приходим к нелокальным теориям. В частности, как показано в гл. 6, лагранжиан с псевдовекторной мезон-нуклонной связью (7.3) описывает локализуемые взаимодействия.

Следующая глава будет посвящена выяснению вопроса о точной границе между локализуемыми и нелокализуемыми взаимодействиями второго рода. В дальнейшем, в частности при изучении конкретных физических моделей, в основном будут рассматриваться только локализуемые взаимодействия.

Выводы

С физической точки зрения все известные взаимодействия элементарных частиц можно разбить на четыре основных типа, отличающихся друг от друга прежде всего соответствующими константами связи. Это — гравитационное, слабое, электромагнитное и сильное взаимодействия.

В силу необходимости использования различных математических аппаратов в рамках квантовой теории поля возникает классификация взаимодействий, приводящая к разграничению их на взаимодействия первого и второго рода. Эта классификация относится к лагранжианам, описывающим взаимодействия полей, а не к самим физическим взаимодействиям. Например, сильные

взаимодействия частиц можно описать как лагранжианом взаимодействия первого рода (6.1), так и лагранжианом взаимодействия второго рода (6.2). Можно ли тому или иному типу физического взаимодействия поставить в однозначное соответствие определенную форму лагранжиана? Пока окончательного ответа на этот вопрос не существует. Но есть вполне определенная надежда, что учет динамических симметрий при построении лагранжианов взаимодействий позволит положительно разрешить эту проблему (см. гл. 8).

Разделение лагранжианов взаимодействия на два различных вида приводит к соответствующему разделению квантовых теорий поля на ренормируемые и неренормируемые. Одно время было принято считать, что все неренормируемые теории поля описывают нелокализуемые взаимодействия. Однако впоследствии выяснилось, что среди взаимодействий второго рода существует большой подкласс, описывающий взаимодействия локализуемого типа. К выяснению границ этого подкласса мы и перейдем.

ЛОКАЛИЗУЕМЫЕ И НЕЛОКАЛИЗУЕМЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВТОРОГО РОДА

В работах Н. Н. Меймана [28] и Джаффе [29, 30] было выяснено, что среди взаимодействий второго рода существует большой класс взаимодействий локализуемого типа. В теории поля, описывающей такие взаимодействия, можно добиться строгого удовлетворения принципа микропричинности теории. Покажем, как устанавливается точная граница между взаимодействиями второго рода локализуемого и нелокализуемого типа. При изложении будем следовать работе [28].

§ 8. Запаздывающие и опережающие амплитуды

Рассмотрим процесс упругого рассеяния скалярных частиц a и b с массами μ и M (рис. 1,а):

$$a(k) + b(p) \rightarrow a(k') + b(p'),$$

и перекрестный процесс (рис. 1,б):

$$\bar{a}(k') + b(p) \rightarrow \bar{a}(k) + b(p').$$

Здесь p и p' — импульсы частицы b ; k и k' — импульсы частицы a до и после рассеяния. Введем инвариантные переменные $s = (p+k)^2$; $t = (p-p')^2$; $u = (p-k')^2$; $s+t+u = 2(\mu^2 + M^2)$. Если амплитуду прямого процесса можно записать как $A(s, t, u)$, то перекрестная симметрия приводит к тому, что амплитуда перекрестного процесса записывается в форме $A(2(\mu^2 + M^2) - t - s, s, t)$. (Каждый раз амплитуда является функцией лишь двух независимых переменных, например s и t .)

Пусть система $a+b$ не имеет связанных состояний с массами, меньшими $\mu+M$. Тогда порогом физической области в s -канале будет точка $s_{\text{оп}} = (\mu+M)^2$, а в u -канале — $u_0 = (\mu+M)^2$. Физической областью прямого процесса в s -плоскости служит верхний берег правого раз-

реза ($s_{0п}, +\infty$), а физической областью перекрестного процесса — нижний берег левого разреза ($-\infty, s_{0п}$), где $s_{0л} = 2(\mu^2 + M^2) - u_0 - t = (M - \mu^2) - t$ (рис. 2).

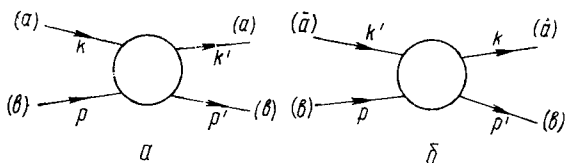


Рис. 1. Прямой и перекрестный процессы упругого рассеяния частиц a и b

Амплитуда $A(s, u, t)$ в физической области прямого процесса совпадает с запаздывающей амплитудой [1, 31]

$$A^{\text{ret}}(s, t) = \int d^4x \exp[i(k + k')x/2] \left\langle p' \left| \frac{\delta j(-x/2)}{\delta \varphi^+(x/2)} \right| p \right\rangle, \quad (8.1)$$

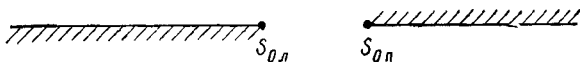


Рис. 2. Физические области прямого и перекрестного процессов в упругом рассеянии $a + b \rightarrow \bar{a} + \bar{b}$

где $\varphi(x)$ — поле частицы a в представлении Гейзенберга; $j(x)$ — ток этого поля:

$$j(x) = -i \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} S^+;$$

$$j^+(x) = i \frac{\delta S^+}{\delta \varphi^+(x)} S = -i \frac{\delta S}{\delta \varphi^+(x)} S^+; \quad SS^+ = 1.$$

Здесь использовано представление локальной теории поля в форме Боголюбова. Условие микропричинности можно записать с помощью равенства

$$\frac{\delta}{\delta \varphi^+(y)} \left(\frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} S^+ \right) = 0 \quad \text{при } x \leq y. \quad (8.2)$$

Следуя монографии [1], введем запаздывающий и опережающий матричные элементы:

$$F^{\text{ret}}(x) = \left\langle p' \left| \frac{\delta j(-x/2)}{\delta \varphi^+(x/2)} \right| p \right\rangle;$$

$$F^{\text{adv}}(x) = \left\langle p' \left| \frac{\delta j(x/2)}{\delta \varphi^+(-x/2)} \right| p \right\rangle, \quad (8.3)$$

где в силу микропричинности $F^{\text{ret}}(x) = 0$ при $x \leq 0$; $F^{\text{adv}}(x) = 0$ при $x \geq 0$. Теперь можно записать

$$\left. \begin{aligned} A^{\text{ret}}(s, t) &= \int d^4x \exp[i(k+k')x/2] F^{\text{ret}}(x) dx, \quad x \geq 0; \\ A^{\text{adv}}(s, t) &= \int d^4x \exp[i(k+k')x/2] F^{\text{adv}}(x) dx, \quad x \leq 0. \end{aligned} \right\} (8.4)$$

Опережающая амплитуда совпадает с амплитудой перекрестного процесса в его физической области, т. е. на нижнем берегу левого разреза.

Амплитуда $A^{\text{ret}}(s, t)$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im} s > 0$, а амплитуда $A^{\text{adv}}(s, t)$ — в нижней полуплоскости и $A^{\text{ret}}(s, t) = A^{*\text{adv}}(s^*, t)$. Поскольку свойства $A^{\text{adv}}(s, t)$ в нижней полуплоскости совпадают со свойствами $A^{\text{ret}}(s, t)$ в верхней полуплоскости, ограничимся в дальнейшем лишь исследованием $A^{\text{ret}}(s, t)$.

Н. Н. Боголюбов впервые строго доказал, что в некотором интервале переданных импульсов ($-\sigma\mu^2 \leq t \leq 0$) запаздывающая амплитуда $A^{\text{ret}}(s, t)$ аналитична во всей верхней полуплоскости $\text{Im} s > 0$ и имеет два простых вещественных полюса в точках $s = M^2$ и $s = 2\mu^2 + M^2 - t$ [32]. Обе амплитуды $A^{\text{ret}}(s, t)$ и $A^{\text{adv}}(s, t)$ вещественны и совпадают друг с другом в просвете между разрезами. Поэтому в совокупности они определяют во всей плоскости с разрезами аналитическую с точностью до двух простых вещественных полюсов функцию.

Теорема о возможности объединения опережающей и запаздывающей функции в единую аналитическую функцию является наиболее важным результатом, полученным в этой области (см. [31, дополнение А, теорема 1]). Впоследствии эта теорема получила название *теоремы об «острие клина»*. С ее помощью можно доказывать дисперсионные соотношения для разных случаев (например, для пион-нуклонного рассеяния при фиксированном t в интервале $t_{\text{мин}} < t < 0$, $t_{\text{мин}} = -8\mu^2$). После доказательства Боголюбова возможность аналитического продолжения амплитуды на плоскость с разрезами была доказана разными методами многими авторами [33—36]. Важное значение имеет интегральное представление фурье-образа матричного элемента коммутатора токов, полученное Йостом и Лемапом [35] и обобщенное Дайсоном [36].

Обратим теперь внимание на одно весьма существенное обстоятельство. Функции $F^{\text{ret}}(x)$ и $F^{\text{adv}}(x)$ являются

не обычными функциями, а *обобщенными* (их называют еще *несобственными* функциями или распределениями). В отличие от обычных функций, сингулярные или обобщенные функции определяются не заданием их значений для всех значений аргументов, поскольку для некоторого множества значений аргументов эти функции могут быть бесконечными или вообще неопределенными, а заданием правил интеграции их произведений с достаточно регулярными функциями. Например, δ -функция характеризуется правилами интеграции ее с непрерывными функциями, производные δ -функций — правилами интеграции их с соответствующим числом раз дифференцируемыми функциями и т. д.

Таким образом, обобщенная функция определяется заданием непрерывного линейного функционала в подходящем линейном пространстве достаточно регулярных функций, которые называются *основными функциями*. Такая функциональная точка зрения проводилась в работах [37, 38] по созданию новой математической теории, так называемой *теории обобщенных функций* (см. также работу [39]).

Пространство обобщенных функций, определенных на заданном пространстве S основных функций, образует сопряженное пространство S' . Элементы основного пространства в дальнейшем будем обозначать $f(x)$, а обобщенные функции — T и ψ . Результат применения линейного функционала T к функции $f(x)$ символически обозначается так:

$$(T, f) = \int f(x) T(x) dx. \quad (8.5)$$

Добавочное математическое требование, входящее во все имеющиеся выводы одномерных дисперсионных соотношений, состоит в том, что $F^{\text{ret}}(x)$ и $F^{\text{adv}}(x)$ — обобщенные функции умеренного роста. Это означает, что в качестве пространства основных функций взято пространство S бесконечно дифференцируемых функций, определенных во всем x -пространстве и стремящихся на бесконечности к нулю вместе со всеми своими производными скорее любой отрицательной степени x (пространство S часто называют *пространством Шварца* и так же называют соответствующие ему обобщенные функции). Обобщенные функции умеренного роста могут иметь лишь δ -образные особенности конечного порядка, т. е. содержать производные от δ -функций конечного порядка. При

таких предположениях $A^{\text{ret}}(s, t)$ и $A^{\text{adv}}(s, t)$ могут расти по s не скорее полиномов*.

Чтобы описать взаимодействия первого рода, вполне достаточно рассмотреть обобщенные функции умеренного роста. Однако как только приступим к построению квантовой теории поля, описывающей взаимодействия второго рода, так сразу выясняется, что пространство обобщенных функций умеренного роста не является здесь подходящим аппаратом. Таким образом, возникает необходимость рассмотрения совершенно иных пространств обобщенных функций, о которых в дальнейшем и пойдет речь.

Чтобы наглядно убедиться в этом утверждении, вернемся к простому примеру взаимодействия второго рода, рассмотренному в гл. 2 [см. формулу (7.3)]. Как показано в гл. 6, взаимодействие (7.3) эквивалентно следующему нсполиномиальному взаимодействию:

$$-M : \bar{\psi} [\exp(-i 2g\gamma^5 \varphi(x)) - 1] \psi :, \quad (8.6)$$

где M — масса спинорного поля ψ . Двухточечные функции Грина, соответствующие взаимодействию (8.6), помимо полюсных особенностей на световом конусе обладают еще существенно особыми точками. Действительно, например, для массового оператора спинорного поля $\Sigma(p)$ получаем выражение (см. § 22)

$$\Sigma(p) = -M^2 \int d^4x \exp(i p x) S^c(x) [\exp\{-i(2g)^2 \Delta^c(x)\} - 1], \quad (8.7)$$

где $S^c(x)$ и $\Delta^c(x)$ — пропагаторы свободных спинорных и скалярных полей. Рассмотрим для простоты безмассовое скалярное поле φ . Тогда

$$\Delta^c(x) = \frac{(-1)}{(2\pi)^2 (x^2 - i\epsilon)};$$

$$S^c(x) = -\frac{M}{8\pi} (i \hat{\partial} + M) \frac{H_1^{(2)}(M \sqrt{x^2 - i\epsilon})}{\sqrt{x^2 - i\epsilon}}, \quad (8.8)$$

где $H_1^{(2)}(z)$ — функция Ганкеля; ϵ — бесконечно малая положительная величина. Легко видеть, что подынтегральное выражение в (8.7) на световом конусе $x^2=0$ имеет

* Литературу, посвященную описанию теории обобщенных функций умеренного роста, можно найти, например, в работах [37—42].

существенно особую точку. Тем самым необходимость построения новых пространств основных и обобщенных функций при рассмотрении взаимодействий второго рода вполне очевидна.

§ 9. Вспомогательные асимптотические амплитуды

При исследовании аналитических свойств $A^{\text{ret}}(s, t)$ по одной переменной известное удобство представляет такой выбор системы координат, где обобщенная функция $F^{\text{ret}}(x)$ не зависит от этой переменной. Система

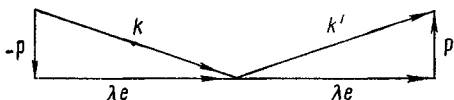


Рис. 3. Импульсы частиц в системе координат Брейта

координат Брейта, определяемая условием $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$, как раз удовлетворяет этому требованию. В ней (рис. 3)

$$\mathbf{k} = -\mathbf{p} + \lambda \mathbf{e}; \quad \mathbf{k}' = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{e}; \quad p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2};$$

$$k_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \lambda^2 + \mu^2},$$

где \mathbf{e} — единичный вектор, ортогональный \mathbf{p} , а λ — скаляр; $\lambda = \sqrt{k_0^2 - \mathbf{p}^2 - \mu^2}$. Переменные s и t связаны с переменными в системе Брейта соотношениями:

$$t = -4\mathbf{p}^2; \quad s = M^2 + \mu^2 - t/2 + 2p_0 k_0; \quad k_0 = [s + t/2 - (M^2 + \mu^2)] / (2\sqrt{M^2 - t/4}). \quad (9.1)$$

В системе Брейта запаздывающая и опережающая амплитуды зависят от энергетической переменной k_0 и от переданного импульса t . Функция $F^{\text{ret}}(x)$ не зависит от k_0 .

Из выражения для k_0 (9.1) следует, что переходу $s \rightarrow u$ соответствует переход $k_0 \rightarrow -k_0$. Поэтому плоскость s с разрезами $(-\infty, s_{0\text{л}})$, $(s_{0\text{п}}, +\infty)$ переходит в плоскость k_0 с симметричными разрезами $(-\infty, -a)$, $(a, +\infty)$. Поскольку $s_{0\text{п}} = (M + \mu)^2$, то порог $a = (\mu M + t/4) / \sqrt{M^2 - t/4}$.

Верхний берег правого разреза является физической областью прямого процесса в плоскости k_0 , а нижний

берег левого разреза — физической областью перекрестного процесса. В системе Брейта

$$A^{\text{ret}}(k_0, t) = \int d^4x \exp \{i [k_0 x_0 - \mathbf{e}x \sqrt{k_0^2 - \mu^2 + t/4}] \} F^{\text{ret}}(x),$$

$$x \geq 0; \quad A^{\text{adv}}(k_0, t) = \int d^4x \exp \{i [k_0 x_0 - \mathbf{e}x \sqrt{k_0^2 - \mu^2 + t/4}] \} F^{\text{adv}}(x), \quad x \leq 0.$$

В физической области прямого процесса запаздывающая амплитуда при $k_0 \rightarrow \infty$ асимптотически совпадает с функцией

$$A_{\infty}^{\text{ret}}(k_0, t) = \int d^4x \exp [i (k_0 x_0 - \mathbf{e}x k_0)] F^{\text{ret}}(x), \quad x \geq 0.$$

Предполагается, что амплитуда $A^{\text{ret}}(k_0, t)$ в физической области рассматриваемого процесса при $k_0 \rightarrow +\infty$ не слишком быстро растет или не слишком быстро осциллирует*, т. е. если c — произвольная вещественная константа, то выполняется по крайней мере одно из двух условий:

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} [A^{\text{ret}}(k_0 + c/k_0, t) / A^{\text{ret}}(k_0)] = 1;$$

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} [A^{\text{ret}}(k_0 + c/k_0, t) - A^{\text{ret}}(k_0)] = 0.$$

Первый случай означает, что $A^{\text{ret}}(k_0, t)$ имеет ограниченное число нулей в физической области. Утверждение об асимптотическом совпадении $A_{\infty}^{\text{ret}}(k_0, t)$ и $A^{\text{ret}}(k_0, t)$ состоит в том, что в первом случае

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} [A_{\infty}^{\text{ret}}(k_0, t) / A^{\text{ret}}(k_0, t)] = 1,$$

а во втором случае разность $A_{\infty}^{\text{ret}}(k_0, t) - A^{\text{ret}}(k_0, t)$ стремится к нулю. Это утверждение является некоторым условием на $F^{\text{ret}}(x)$. Однако в классе допустимых обобщенных функций, с которыми придется иметь дело, это условие будет выполняться. Аналогичные соотношения имеют место и для опережающей амплитуды

$$A_{\infty}^{\text{adv}}(k_0, t) = \int d^4x \exp [i k_0 (x_0 - \mathbf{e}x)] F^{\text{adv}}(x), \quad x \leq 0.$$

* В дальнейшем окажется, что для локализуемых взаимодействий $A^{\text{ret}}(k_0, t)$ растет при $k_0 \rightarrow \infty$ медленнее любой линейной экспоненты по k_0 .

Указанные свойства оправдывают для функций $A_{\infty}^{\text{ret}}(k_0, t)$ и $A_{\infty}^{\text{adv}}(k_0, t)$ названия асимптотически запаздывающей и асимптотически опережающей амплитуд.

Введем переменную $\tau = x_0 - \epsilon x$. Тогда

$$A_{\infty}^{\text{ret}}(k_0, t) = \int_0^{\infty} d\tau \exp[i k_0 \tau] \psi(\tau, t), \quad (9.2)$$

где $\psi(\tau, t)$ — результат интегрирования обобщенной функции $F^{\text{ret}}(x)$ по сечению светового конуса гиперплоскостью $x_0 - \epsilon x = \tau$.

§ 10. Причинность и структура допустимых обобщенных функций. Свойства основных функций

Условие причинности выражается в том, что в формуле (8.1) для запаздывающей амплитуды $A^{\text{ret}}(s, t)$ интегрирование производится по верхней полке светового конуса. В соответствующей асимптотической запаздывающей амплитуде (9.2) условие причинности приводит к необходимости проводить интегрирование только по положительной полуоси. При этом неявно предполагается, что интеграл (9.2) передает сигналы лишь из точек положительной полуоси, так как иначе причинность теряла бы свой смысл. Для обычных функций $\psi(\tau)$ это условие выполняется автоматически, однако для обобщенных функций такое требование является реальным ограничением.

Из причинности и отсутствия дальнего действия следует, что обобщенные функции $\psi(\tau)$ должны удовлетворять следующему условию: при любых τ_1 и τ_2 интеграл

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \exp(i k_0 \tau) \psi(\tau) \quad (10.1)$$

не должен быть эквивалентен суперпозиции сигналов, источники которых лежат вне интервала (τ_1, τ_2) .

Здесь уместно сделать следующее пояснение. В некоторых случаях интеграл (10.1) можно представить в форме

$$\int_L d\tau \exp(i k_0 \tau) u_{\psi}(\tau), \quad (10.2)$$

где $u_\psi(\tau)$ — аналитическая функция в некоторой окрестности интервала (τ_1, τ_2) , а L — замкнутый контур, окружающий интервал (τ_1, τ_2) . Контур L можно непрерывно стянуть к разрезу (τ_1, τ_2) , так что интегрирование в пределе произойдет по верхнему и нижнему берегам интервала (τ_1, τ_2) . Эквивалентность интегралов (10.1) и (10.2) не противоречит принципу причинности, хотя область интеграции в (10.2) выходит за пределы интервала (τ_1, τ_2) . Это происходит потому, что интегралы, в которых контуры интегрирования могут непрерывно переводиться друг в друга, рассматриваются как один и тот же интеграл. Эквивалентность интегралов (10.1) и (10.2) запрещается в случае, если контур нельзя непрерывно стянуть к (τ_1, τ_2) . Сформулированное требование было названо Мейманом *принципом локальности* для обобщенных функций.

Рассмотрим несколько примеров обобщенных функций, нарушающих принцип локальности.

1. Пусть

$$\psi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}(\tau)/n!.$$

Очевидно, что при $0 < \varepsilon < 1$

$$\int_{-\varepsilon}^{\infty} d\tau \exp(i k_0 \tau) \psi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i k_0)^n / n! = \exp(-i k_0),$$

т. е. интеграл передает сигнал из точки $\tau = -1$ и имеет место прямое нарушение принципа причинности.

2. Пусть

$$\psi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c^n \delta^{(n)}(\tau - \tau_0),$$

где $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$, а вещественное или комплексное c такое, что точка $\tau_0 + c$ лежит вне интервала (τ_1, τ_2) . Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \exp(i k_0 \tau) \psi(\tau) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \frac{d^n}{d\tau^n} [\exp(i k_0 \tau)] \Big|_{\tau=\tau_0} = \exp[i k_0 (\tau_0 + c)], \end{aligned}$$

т. е. интеграл эквивалентен передаче сигнала из точки $\tau_0 + c$, лежащей вне интервала (τ_1, τ_2) .

Рассмотрим теперь обобщенные функции вида

$$\psi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n \delta^{(n)}(\tau - \tau_0) \quad (10.3)$$

с произвольными коэффициентами c_n . Оказывается возможны два принципиально разных случая:

$$1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = \rho > 0; \quad (10.4)$$

$$2) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = 0. \quad (10.5)$$

В первом случае опять приходим к явному нарушению принципа локальности, в то время как во втором этот принцип будет соблюден. Докажем это.

В случае (10.4) для коэффициента c_n можно написать представление

$$c_n = \int \int_{|\zeta| \leq \rho + \varepsilon} \zeta^n d\sigma_\varepsilon(\zeta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.6)$$

где $\varepsilon > 0$ и плотность $d\sigma_\varepsilon(\zeta)$ удовлетворяет неравенству

$$\int \int_{|\zeta| \leq \rho + \varepsilon} |d\sigma_\varepsilon(\zeta)| < M_\varepsilon < +\infty. \quad (10.7)$$

Ни в одном кружке радиуса меньше ρ такое представление невозможно, так как иначе получилось бы неравенство $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} < \rho$.

Для доказательства того, что представление (10.6) действительно существует, рассмотрим функцию

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^{-n-1}.$$

Из условия (10.4) следует аналитичность функции $\Phi(\zeta)$ при $|\zeta| > \rho$. Поэтому можно записать

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \rho + \varepsilon} \zeta^n \Phi(\zeta) d\zeta,$$

т. е. представление (10.6) справедливо.

Теперь нетрудно показать, что при условии (10.4) принцип локальности нарушается. Действительно, рассмотрим интеграл (10.1) с функцией $\psi(\tau)$ (10.3) в интервале $(\tau_0 - \eta, \tau_0 + \eta)$, где $\eta < \rho$. Используя для c_n представление (10.6), нетрудно доказать равенство

$$\int_{\tau_0 - \eta}^{\tau_0 + \eta} \exp(i k_0 \tau) \psi(\tau) d\tau = \int_{|\zeta| \leq \rho + \varepsilon} \int \exp[i k_0 (\tau_0 + \zeta)] d\sigma_\zeta(\zeta).$$

Так как $\eta < \rho$ и представление типа (10.6), (10.7) в круге радиуса меньше ρ невозможно, то обобщенная функция (10.3) при условии (10.4) не удовлетворяет принципу локальности. Напротив, функция (10.3) с условием (10.5) удовлетворяет принципу локальности. Тем самым приходим к фундаментальному выводу: в качестве пространства основных функций должно быть взято пространство, на котором определены все линейные непрерывные функционалы (10.3) с условием (10.5) и не существуют функционалы вида (10.3) с условием (10.4).

Пространство основных функций, удовлетворяющее таким требованиям (обозначим его символом C_0), должно обладать следующими свойствами: 1) всякая функция $f(\tau)$ из C_0 аналитична в некоторой окрестности полуоси $\tau \geq 0$; 2) не существует ни одной фиксированной окрестности $|\tau - \tau_0| \leq d$ какой-нибудь точки τ_0 , в которой все функции из C_0 были бы аналитичны.

Эти свойства функций $f \in C_0$ легко установить. Действительно, возьмем точку $\tau_0 \geq 0$. Тогда нам надо доказать:

1) что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\tau_0)}{n!} (\tau - \tau_0)^n$$

имеет положительный радиус сходимости. Допустим противное, тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f^{(n)}(\tau_0)}{n!} \right)^{1/n} \rightarrow \infty,$$

т. е. существует такая последовательность индексов $\{n'\}$, что при $n' \rightarrow \infty$ этот предел бесконечен. Положим

$$c_n = [f^{(n)}(\tau_0) / n!]^{-1},$$

если n входит в последовательность $\{n'\}$, и $c_n = 0$ в противном случае. Тогда $|c_n|^{1/n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и по пред-

положению функционал

$$\psi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n \delta^{(n)}(\tau - \tau_0)$$

допустим. Но это противоречит тому, что

$$(\psi, f) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f^{(n)}(\tau_0)/n! = \infty;$$

2) если бы все функции $f(\tau)$ из C_0 были аналитичны в фиксированном круге $|\tau - \tau_0| < d$, то для любой функции из C_0 радиус сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\tau_0)}{n!} (\tau - \tau_0)^n$$

был бы меньше d . Но тогда функционал (10.3) имел бы смысл не только при условии $|c_n|^{1/n} \rightarrow 0$, но и при условии $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} < d$.

Итак, мы приходим к следующему определению пространства C_0 основных функций.

1. Каждая функция $f(\tau)$ из C_0 аналитична в некоторой полуполосе $O_f: \operatorname{Re} \tau \geq -d_f$, $|\operatorname{Im} \tau| \leq d_f$, причем положительная константа d_f зависит от функции f .

2. Функция $f(\tau)$ и все ее производные ограничены в $O_f: |f^{(k)}(\tau)| < M_{k,f}$.

3. При $\tau \rightarrow \infty$ в O_f функция $f(\tau)$ стремится к пределу $f(+\infty)$ и разность $|f(+\infty) - f(\tau)|$ убывает скорее, чем $\tau^{-\alpha_f}$, где α_f — некоторая положительная константа.

4. Пространство C_0 содержит все функции, удовлетворяющие условиям 1—3.

5. Последовательность функций $f_n(\tau)$ из C_0 сходится к нулю, если существует полуполоса O_f , в которой все функции последовательности аналитичны и равномерно стремятся к нулю.

Чем уже пространство основных функций, тем шире сопряженное пространство обобщенных функций. Если сравнить пространства C_0 и S , то легко видеть, что требование аналитичности чрезвычайно сужает C_0 по сравнению с S . С другой стороны, условие 3 для функции

$f(\tau)$ из C_0 слабее, чем соответствующее условие для функций из S , где требуется быстрое убывание на ∞ . Кроме того, отказ от условия 3 мало влияет на окончательные результаты.

Пространство обобщенных функций, определенных на C_0 , обозначим C'_0 . Общий вид линейного функционала T из C'_0 следующий:

$$\left. \begin{aligned} (T, f) &= \sum_n \int d\sigma_n(\tau) f^{(n)}(\tau)/n!; \\ T &= \sum_n \int_0^\infty (-1)^n \delta^{(n)}(\tau - t) d\sigma_n(t)/n!, \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

где меры $\sigma_n(\tau)$ удовлетворяют условию

$$s_n = \int_0^\infty |d\sigma_n(\tau)| < +\infty; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |s_n|^{1/n} = 0. \quad (10.9)$$

Необходимость условия (10.9) видна уже из рассмотренного случая функционалов (10.3), где все меры $d\sigma_n(\tau)$ сосредоточены в точке τ_0 . Достаточность условия (10.9) также очевидна.

Если $d\sigma_n(\tau) = 0$ при $n \geq 1$, а $d\sigma_0(\tau) = T(\tau) d\tau$, где $T(\tau)$ — обычная интегрируемая функция, то (T, f) сводится к обычному интегралу.

§ 11. Ограничения на рост для преобразований Фурье обобщенных функций из C'_0

Условия на коэффициенты s_n вида (10.4) и (10.5) используются для классификации взаимодействий локализуемого и нелокализуемого типа в конфигурационном пространстве. В импульсном пространстве аналогичным критерием служит ограничение на рост амплитуд или функций Грина. Найдем это условие.

Используем для обобщенных функций представления в виде контурных интегралов. Пусть T — функционал из C'_0 и точка ζ лежит вне полуоси $\tau \geq 0$. Поскольку $(\zeta - \tau)^{-1}$ как функция от τ принадлежит C_0 , то $(T, [2\pi i (\zeta - \tau)]^{-1}) = u_T(\zeta)$ является функцией ζ . Из линейности и непрерывности T следует, что

$$\frac{d}{d\zeta} u_T(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} (T, (\zeta - \tau)^{-2}),$$

г. е. функция $u_T(\zeta)$ голоморфна вне положительной полуоси $\tau \geq 0$.

Согласно представлению (10.8) для T имеем

$$u_T(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_n \int_0^\infty \int_0^\infty (\zeta - \tau)^{-n-1} d\sigma_n(\tau) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_n \frac{\sigma_n(0)}{\zeta^{n+1}} - \\ - \frac{1}{2\pi i} \sum_n (n+1) \int_0^\infty \frac{\sigma_n(\tau)}{(\zeta - \tau)^{n+2}} d\tau. \quad (11.1)$$

Отсюда видно, что на бесконечности функция $u_T(\zeta)$ убывает, по крайней мере, как ζ^{-1} .

Пусть $f(\tau)$ — функция из C_0 и Γ_f — граница полуполосы O_f . Тогда $f(\tau)$ можно представить в виде интегралов

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_f} [f(\zeta) - f(+\infty)] \frac{d\zeta}{\zeta - \tau} + \frac{f(+\infty)}{2\pi i} \int_{\Gamma_f} \frac{d\zeta}{\zeta - \tau}.$$

Если последний член переписать в форме

$$\int_{\Gamma_f} \frac{d\zeta}{\zeta - \tau} = \int_{-d_f+1}^{-d_f-1} \frac{d\zeta}{\zeta - \tau} + \int_{-d_f}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta - 1} \frac{1}{d_f - \tau} - \frac{1}{\zeta + 1} \frac{1}{d_f - \tau} \right) d\zeta,$$

то легко видеть, что все интегралы, входящие в представление $f(\tau)$, абсолютно сходятся. Поэтому операции интегрирования и применения функционала T можно менять местами. Следовательно,

$$(T, f(\tau)) = \int_{\Gamma_f} f(\zeta) u_T(\zeta) d\zeta. \quad (11.2)$$

Эта формула дает общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве C_0 . Контур Γ_f можно заменить любым контуром в O_f , окружающим полуось $\zeta \geq 0$.

Вернемся теперь к рассмотрению запаздывающей асимптотической амплитуды $A_\infty^{\text{ret}}(k_0, t)$, введенной в § 9 [см. (9.2)].

Амплитуда $A_\infty^{\text{ret}}(k_0, t)$ — фурье-образ обобщенной функции $\psi(\tau, t)$ из C'_0 . Если точка $z = x + iy$ лежит в верхней полуплоскости $y > 0$, то функция $\exp(iz\tau)$ принадлежит

C_0 и фурье-преобразование обобщенной функции T из C'_0 есть не что иное, как значение функционала T на функции $\exp(iz\tau)$:

$$\tilde{T}(z) = (T, \exp(iz\tau)/2\pi).$$

Используя формулы (11.2) и (11.1), можно записать

$$\begin{aligned} \tilde{T}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \exp(iz\zeta) u_T(\zeta) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{d\sigma_n(\tau)}{(\zeta-\tau)^{n+1}} \right] \exp(iz\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Из условия (10.9) следует законность изменения порядка интегрирования. Но поскольку

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\exp(iz\zeta)}{(\zeta-\tau)^{n+1}} d\zeta = \frac{(iz)^n}{n!} \exp(iz\tau),$$

то для $\tilde{T}(z)$ получаем

$$\tilde{T}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z) \frac{(iz)^n}{n!}; \quad c_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(iz\zeta) d\sigma_n(\tau). \quad (11.3)$$

В силу (10.9) $|c_n(z)|^{1/n} \rightarrow 0$ при $\text{Im } z \geq 0$. Поэтому $T(z)$ растет в верхней полуплоскости, включая вещественную ось, медленнее любой линейной экспоненты.

Итак, мы пришли к важному выводу. Если функционал T принадлежит к классу локальных обобщенных функций (пространство C'_0), то для любого $\epsilon > 0$ всегда найдется такое $R(\epsilon)$, что при $|z| \geq R(\epsilon)$, $\text{Im } z \geq 0$ фурье-образ T будет удовлетворять неравенству

$$|\tilde{T}(z)| < \exp\{\epsilon|z|\}. \quad (11.4)$$

Критерию (11.4) должны удовлетворять все функции Грина и амплитуды процессов, которые получаются в квантовых теориях поля, описывающих локализуемые взаимодействия. В гл. 4 (см. табл. 1) приведены различ-

ные типы неполиномиальных лагранжианов, соответствующие локализуемым и нелокализуемым взаимодействиям, и указано поведение матричных элементов при больших значениях импульсов. Из табл. 1 можно заключить, что условие (11.4) позволяет провести четкую границу между двумя различными типами взаимодействий.

Укажем еще одно свойство функции $\hat{T}(z)$. Если $\text{Im} z > 0$, то $c_n(z)$ — аналитическая функция от z . Но тогда и $\hat{T}(z)$ как сумма равномерно сходящегося ряда аналитических функций — тоже аналитическая функция от z в верхней полуплоскости $\text{Im} z > 0$. В дальнейшем можем убедиться в этом свойстве $\hat{T}(z)$ на многочисленных конкретных примерах. Тем самым установлено, что фурье-преобразование обобщенной функции из C'_0 аналитично в верхней полуплоскости и растет в замкнутой верхней полуплоскости медленнее любой линейной экспоненты.

Условие, близкое к (11.4), но несколько отличающееся от него, получено было также в работах [29, 30]. Оно было выведено из требования строгой локализуемости полей. Поле A рассматривается как обобщенная функция, определенная на пространстве квазианалитических основных функций $f(x)$:

$$A(f) = \int A(x) f(x) dx.$$

Тогда условие строгой локализуемости заключается в требовании, чтобы поле $A(f)$ коммутировало (или антикоммутировало) с полем $A(g)$ в случае, если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пространственно-подобно разделенные носители *

$$A(f)A(g)\psi = \pm A(g)A(f)\psi.$$

Здесь ψ — вектор состояния. Из этого условия следует, что в импульсном пространстве рост всех функций Грина и амплитуд ограничен функцией

$$\exp\{|\rho|/\ln|\rho|\}. \quad (11.5)$$

Это условие несколько более сильное, чем (11.4).

* Носителем функции $f(x)$ называется та область переменной x , где $f(x) \neq 0$.

Выводы

На основе изучения причинных свойств запаздывающей амплитуды сформулирован принцип локальности для обобщенных функций. Найдены классы основных и обобщенных функций (пространства S_0 и S'_0), внутри которых можно корректно описать неренормируемые теории поля с локализуемыми взаимодействиями. Получено важное условие на рост амплитуд рассеяния в импульсном пространстве, которое позволит в дальнейшем проводить строгое разграничение неполиномиальных лагранжианов на локализуемые и нелокализуемые виды.

КВАНТОВЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ С НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ЛАГРАНЖИАНАМИ

§ 12. S-матрица в неполиномиальных теориях

Типичный лагранжиан, описывающий взаимодействие второго рода, — лагранжиан неполиномиального вида.

В дальнейшем будут рассмотрены неполиномиальные лагранжианы, описывающие взаимодействия четырех типов: гравитационные, электромагнитные, слабые и сильные. Здесь же, для демонстрации методов, используемых в теориях поля с существенно нелинейными лагранжианами, введем модельный лагранжиан общего вида. Для простоты будем считать, что он зависит лишь от однокомпонентного скалярного поля, не содержит производных и представляется в виде бесконечного ряда по степеням $\varphi(x)$:

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} : (\varphi(x))^n : = G : U(\varphi(x)) : . \quad (12.1)^*$$

Коэффициенты u_n пропорциональны n -й степени второй константы связи g , которая всегда присутствует в подобных теориях наряду с G (иногда константы g и G выражаются друг через друга). Теория возмущений будет строиться по степеням G . В каждом порядке по G учитываются все порядки по g . В основном рассматривается второй порядок по G , поскольку этого вполне достаточно для описания используемого нами метода.

S-матрица в теории с существенно нелинейным лагранжианом строится аналогично тому, как это делается в перенормируемых теориях с полиномиальными лагранжианами [1]:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G^n}{n!} S_n,$$

* В лагранжиане взаимодействия (12.1) разложение по степеням φ должно содержать степени φ не ниже третьей. Для удобства будем проводить суммирование от нуля, полагая, что $u_0 = u_1 = u_2 = 0$.

где

$$S_n = (i)^n \int d^4 x_1, \dots, d^4 x_n T(U(\varphi(x_1)), \dots, U(\varphi(x_n))).$$

Для лагранжиана (12.1) уже в первом порядке теории возмущений по G возможны любые процессы упругого и неупругого рассеяния скалярных частиц. Однако рассмотрение этого порядка не вызывает интереса ввиду его тривиальности (отсутствуют какие бы то ни было расходимости, все амплитуды рассеяния выражаются через константы). Поэтому сразу перейдем к изучению второго порядка теории возмущений по G :

$$S_2 = - \iint d^4 x_1 d^4 x_2 \sum_0^\infty \sum_0^\infty F_{k_1 k_2}^{(2)}(x_1 - x_2) : \frac{\varphi^{k_1}(x_1)}{k_1!} \frac{\varphi^{k_2}(x_2)}{k_2!} : ,$$

где

$$F_{k_1 k_2}^{(2)}(x) = \sum_1^\infty \frac{u_{n+k_1} u_{n+k_2}}{n!} [-i \Delta^c(x)]^n; \quad (12.2)^*$$

$$\Delta^c(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^4} d^4 p \frac{\exp(i p x)}{m^2 - p^2 - i \varepsilon} \quad (12.3)$$

— пропагатор свободной скалярной частицы с массой m ; ε — бесконечно малая положительная величина.

* В выражении для S_2 не будем включать несвязанных диаграмм. Поэтому суммирование в формуле (12.2) начинается с единицы. При получении выражения (12.2) удобно пользоваться теоремой Вика, записывая символ T -произведения в дифференциальной форме [43]:

$$T = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint d^4 \xi_1 d^4 \xi_2 \Delta^c(\xi_1 - \xi_2) \frac{\delta^2}{\delta \varphi(\xi_1) \delta \varphi(\xi_2)} \right\}.$$

Тогда из выражения

$$S_2 = - \iint d^4 x_1 d^4 x_2 T \left[\sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{u_n u_m}{n! m!} : (\varphi(x_1))^n : : (\varphi(x_2))^m : \right]$$

легко получить (12.2). Действительно, например, для диаграммы с двумя внешними линиями в каждой вершине и n внутренними линиями имеем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{u_{n+2}}{(n+2)!} \right]^2 \frac{[-i \Delta^c(x_1 - x_2)]^n}{n!} \left\{ \frac{\delta^{2n}}{\delta \varphi_1^n \delta \varphi_2^n} \varphi_1^{n+2} \varphi_2^{n+2} = \left[\frac{(n+2)!}{2!} \right] \varphi_1^2 \varphi_2^2 \right\} = \\ & = \frac{u_{n+2}^2}{n!} [-i \Delta^c(x_1 - x_2)]^n : \frac{\varphi_1^2}{2!} \frac{\varphi_2^2}{2!} : . \end{aligned}$$

Суммируя это выражение по n , приходим к (12.2) для упругого рассеяния двух частиц ($\varphi_i \equiv \varphi(x_i)$).

Довольно часто будем рассматривать взаимодействие скалярных частиц с нулевой массой покоя. В этом случае пропагатор $\Delta^c_0(x)$ имеет особенно простой вид [см. (8.8)]:

$$\Delta^c_0(x) = (-i) / [(2\pi)^2 (x^2 - i\varepsilon)].$$

Через двухточечную функцию $F_{k_1 k_2}^{(2)}(x)$ выражаются все функции Грина и амплитуды рассеяния скалярных частиц во втором порядке теории возмущений по G .

Функция $F_{k_1 k_2}^{(2)}(x)$ — обобщенная функция, подобная тем которые были рассмотрены в гл. 3. При построении фурье-образа функции $F_{k_1 k_2}^{(2)}(x)$, или, иными словами, при определении соответствующего ей функционала на классе основных функций $\exp(ipx)$, мы встречаемся с трудностями двух типов. Первый связан с наличием УФ-расходимостей на световом конусе. Уже из самой формы (12.2) ясно, что здесь содержатся полюса любого порядка при $x^2=0$. Для взаимодействий локализуемого типа полное выражение для $F_{k_1 k_2}^{(2)}(x)$, просуммированное по всем n , содержит существенно особую точку на световом конусе [см., например, (8.7)].

Другой тип трудностей связан со специфическими качествами нелокализуемых взаимодействий и заключается в том, что ряд (12.2) для взаимодействий нелокализуемого типа или сходится лишь в ограниченной области x^2 или не сходится ни в какой области x^2 и является асимптотическим рядом. Поэтому помимо проблемы, связанной с устранением УФ-расходимостей, появляется еще одна проблема, относящаяся к суммированию расходящихся рядов.

Основные требования, которые необходимо удовлетворить при решении этих проблем, заключаются в том, чтобы S -матрица окончательной теории была конечной и унитарной. В теориях с локализуемыми взаимодействиями должны быть выполнены условия микропричинности, в теориях с нелокализуемыми взаимодействиями — условия макропричинности.

§ 13. Спектральные функции быстрого роста

Как было показано в гл. 3, границу между локализуемыми и нелокализуемыми взаимодействиями проще всего найти, исследуя асимптотическое поведение

фурье-образа обобщенной функции (12.2). В частности, для этого достаточно рассмотреть мнимую часть (12.2), в которой не содержится УФ-расходимостей. Для локализуемых взаимодействий фурье-образ (12.2) должен удовлетворять условию

$$|\tilde{F}_{k_1 k_2}^{(2)}(p)| < c \exp\{\sigma \sqrt{|p^2|}\} \quad (13.1)$$

для любых $c > 0$, $\sigma > 0$ и $p^2 \rightarrow \infty$.

Условию (13.1) должна удовлетворять и мнимая часть фурье-образа (12.2), поведение которой при $p^2 \rightarrow \infty$ является определяющим для всей функции $\tilde{F}_{k_1 k_2}^{(2)}(p)$. Поэтому естественно сейчас обратиться к определению этой мнимой части, которую часто называют *спектральной функцией*. Если в полиномиальных теориях мы имеем дело только со спектральными функциями умеренного роста, т. е. растущими не быстрее некоторого полинома по p^2 конечной степени, то в неполиномиальных теориях возникают спектральные функции быстрого роста, т. е. растущие быстрее любого полинома конечной степени.

Знание мнимой части $\tilde{F}_{k_1 k_2}^{(2)}(p)$ понадобится нам и при проверке выполнения условия унитарности S -матрицы. Сформулируем это условие, для чего рассмотрим фурье-образ двухточечной функции (12.2):

$$\tilde{F}_{k_1 k_2}^{(2)}(p) = i \int d^4 x \exp(i p x) F_{k_1 k_2}^{(2)}(x). \quad (13.2)$$

Функция $\tilde{F}_{k_1 k_2}^{(2)}(p)$ должна обладать вполне определенными аналитическими свойствами. Так, если рассматривать процесс упругого рассеяния двух скалярных частиц, то при $p^2 < 0$ функция (13.2) должна быть действительной, в интервале $0 < p^2 < 4m^2$ должен существовать простой полюс при $p^2 = m^2$, а в точках $p^2_n = (nm)^2$, где $n = 2, 3, \dots$, должны находиться точки ветвлений, от которых начинаются разрезы, продолжающиеся до бесконечности. Скачки на разрезах должны выражаться через сумму фазовых объемов скалярных частиц:

$$\text{Im} \tilde{F}_{22}^{(2)}(p) = \pi u^2 \delta(p^2 - m^2) + \pi \sum_{n=2}^{[V \bar{p}^2/m]} \frac{u^2_{n+2}}{n!} \Omega_n^{(m)}(p^2), \quad (13.3)$$

где

$$\Omega_n^{(m)}(p^2) = (2\pi)^{-s(n-1)} \int \frac{dq_1}{2\omega_1} \dots \int \frac{dq_n}{2\omega_n} \delta^{(4)}(p - q_1 - \dots - q_n); \quad (13.4)$$

$\omega_i = \sqrt{q_i^2 + m^2}$; $[V p^2/m]$ — ближайшее целое число $\leq V p^2/m$. Если масса покоя скалярных частиц равна нулю, то фазовый объем очень просто выражается через степени p^2 :

$$\Omega_n^{(0)}(p^2) = (4\pi)^{-2} \left[\frac{p^2}{(4\pi)^2} \right]^{n-2} \frac{\theta(p^2) \theta(p^0)}{(n-1)! (n-2)!}, \quad (13.5)$$

а верхний предел суммы в (13.3) равен бесконечности. Что касается аналитических свойств, которыми должна обладать функция $\tilde{F}_{22}^{(2)}(p)$ для безмассовых частиц, то при $p^2 < 0$ она по-прежнему будет действительной, в точке же $p^2 = 0$ одновременно существуют полюс и точка ветвления. От нуля до $(+\infty)$ идет логарифмический разрез (см. работу [44] и гл. 5).

Какой бы метод ни был использован для построения конечной функции $\tilde{F}_{k_1 k_2}^{(2)}(p)$, она должна обладать описанными выше свойствами. В частности, требование (13.3), выражающее мнимую часть функции $\tilde{F}_{22}^{(2)}(p)$ через фазовые объемы скалярных частиц, непосредственно вытекает из условия унитарности S -матрицы, записанного для второго порядка теории возмущений по главной константе G . В этом нетрудно убедиться. Действительно, условие унитарности S -матрицы

$$SS^+ = 1 \quad (13.6)$$

во втором порядке по G можно переписать в форме

$$(S_2 + S_2^+)/2 + S_1 S_1^+ = 0. \quad (13.7)$$

Используем соотношение [1]

$$\varphi(x) | a^+(q) \rangle = \exp(-iqx) / [(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}],$$

где $| a^+(q) \rangle$ означает одночастичное состояние скалярной частицы φ с импульсом q , и выражения для S_1 и S_2 , приведенные выше. Тогда условие (13.7) для процесса упругого рассеяния двух скалярных частиц можно за-

писать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & [(2\pi)^4 4 \sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}]^{-1} \int \int d^4 x_1 d^4 x_2 \exp \{i[(p_1 + p_2) x_1 - \\
 & - (p_3 + p_4) x_2]\} \{F_{22}^{(2)}(x_1 - x_2) + F_{22}^{(2)*}(x_1 - x_2) - \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \int dq_1 \dots \int dq_n \langle 0 | U(\varphi(x_1)) | n \rangle \langle n | U(\varphi(x_2)) | 0 \rangle\} = 0,
 \end{aligned} \tag{13.8}$$

где p_1 и p_2 , p_3 и p_4 — импульсы налетающих и улетающих частиц соответственно; ω_i — их энергия. В последнем члене проведено разложение по полному набору промежуточных состояний. В импульсном пространстве условие (13.8) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & 2(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \text{Im} \tilde{F}_{22}^{(2)}(p_1 + p_2 = p) = \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n+2}^2}{(n!)^2} \int dq_1 \dots \int dq_n \iint dx_1^4 dx_2^4 \exp \{i[(p_1 + p_2) x_1 - \\
 & - (p_3 + p_4) x_2]\} \langle 0 | \varphi^n(x_1) | n \rangle \langle n | \varphi^{*n}(x_2) | 0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{13.9}$$

Используя, наконец, равенства

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \varphi^n(x) | n \rangle &= \frac{n!}{\sqrt{n!}} \frac{\exp \left\{ -i x \sum_1^n q_i \right\}}{(2\pi)^{3n/2} \sqrt{2\omega_1 \dots 2\omega_n}}; \\
 \langle n | \varphi^{*n}(x) | 0 \rangle &= \frac{n!}{\sqrt{n!}} \frac{\exp \left\{ i x \sum_1^n q_i \right\}}{(2\pi)^{3n/2} \sqrt{2\omega_1 \dots 2\omega_n}}; \\
 \iint d^4 x_1 d^4 x_2 \exp \left\{ i x_1 \left[p_1 + p_2 - \sum_1^n q_i \right] - \right. \\
 & \left. - i x_2 \left[p_3 + p_4 - \sum_1^n q_i \right] \right\} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \\
 & - p_3 - p_4) \delta^{(4)} \left(p - \sum_1^n q_i \right),
 \end{aligned}$$

легко видеть, что из (13.9) непосредственно следует условие (13.3).

Теперь перейдем к определению границы между локализуемыми и нелокализуемыми взаимодействиями, которые описываются неполиномиальными лагранжианами вида (12.1). Для этого найдем асимптотику $\text{Im } \tilde{F}_{22}^{(2)}(p)$ при $p^2 \rightarrow +\infty$. Для безмассовых частиц будем пользоваться формулами (13.3) и (13.5).

Если же массы покоя частиц отличны от нуля, то для фазового объема $\Omega_n^{(m)}(p^2)$ можно применять приближенное выражение, справедливое при $p^2 \gg m^2$ [45]:

$$\Omega_n^{(m)}(p^2) \approx \varphi(p, n) p^{(n-3)/2} (p - nm)^{(3n-5)/2} / \Gamma(2n),$$

где $p = \sqrt{p^2}$; $\Gamma(2n)$ — гамма-функция; $\varphi(p, n)$ — медленно меняющаяся функция. При вычислении асимптотики $\text{Im } \tilde{F}_{22}^{(2)}(p)$ для больших значений p^2 зависимостью $\varphi(p, n)$ от p^2 можно пренебречь. Результаты вычислений для различного рода коэффициентов u_n [см. (12.1)] приведены в табл. 1.

Имея в виду ограничение на рост амплитуд рассеяния при $p^2 \rightarrow +\infty$ в теориях с локализуемыми взаимодействиями [условия (11.4) или (13.1)], легко получить соответствующие условия для коэффициентов u_n :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |u_n / \Gamma(n/2)|^{1/n} = 0. \quad (13.10)$$

С помощью условия (13.10) уже по одному виду неполиномиального лагранжиана (12.1) можно судить, какого типа взаимодействие такой лагранжиан описывает. Если теперь вместо коэффициентов u_n рассмотреть коэффициенты

$$c_n^{(k_1 k_2)} = u_{n+k_1} u_{n+k_2} / n!,$$

входящие в разложение функции $F_{k_1 k_2}^{(2)}(x)$ по степеням пропагаторов $\Delta^c(x)$ [см. (12.2)], то для них условие локализуемости взаимодействия переписется в форме, близкой к условию (10.5):

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n^{(k_1 k_2)}|^{1/n} = 0. \quad (13.11)$$

Близость условий (10.5) и (13.11) по форме не является случайной. Действительно, если рассмотреть, например,

Асимптотика $\ln \operatorname{Im} F_{22}^{(2)}(p)$ при больших значениях p^2

№ п.п.	Сектор	u_k	$\lim_{k \rightarrow \infty} c(k) ^{1/k}$ $c(k) = (u_k)^2 / k!$	$U(\varphi)$	$\ln \operatorname{Im} \widetilde{F}_{22}^{(2)}(p)$ $p \rightarrow \infty$ ($m \neq 0$)	$\ln \operatorname{Im} \widetilde{F}_{22}^{(2)}(p)$ $p \rightarrow \infty$ ($m=0$)	Вид взаимодействия
1		$u_k = 0$	0	$\sum_0^N \frac{u(k)}{k!} : \varphi^k(x) :$	$2(N-4) \ln p$	$2(N-4) \ln p$	Локализуемые
		$k > N$	0	$I_0(\sqrt{g\varphi(x)})$ ($\gamma = 1$)	$\operatorname{const} p^{\frac{2}{3+2\gamma}}$	$\operatorname{const} p^{\frac{2}{3+2\gamma}}$	
2	I	$\sim [\Gamma(\gamma k)]^{-1}$ ($\gamma > 0$)	0	$\exp\{g\varphi(x)\}$	$\operatorname{const} p^{2/3}$	$\operatorname{const} p^{2/3}$	Локализуемые
		$\sim (\operatorname{const})^k$	0	$\int_0^\infty d\nu \exp[\nu g\varphi(x) - \nu^{1/\gamma}]$	$\operatorname{const} p^{\frac{2}{3-2\gamma}}$	$\operatorname{const} p^{\frac{2}{3-2\gamma}}$	
3		$\sim \Gamma(\gamma k)$ $\gamma < 1/2$	0	$\exp\{\mp g^2 \varphi^2(x)\}$	$\operatorname{const} p$	$\operatorname{const} p$	
4	II	$\sim \Gamma(k/2)$	$\sim 1/2$				

6	II	$\sim \Gamma(\gamma k)$ $1/2 < \gamma \leq 1$	∞	$\exp \{ \mp g^{2m} \varphi^{2m}(x) \}$ $m \geq 2$ $(\gamma = 1 - 1/2m) \gamma < 1$	$\text{const } (2\gamma - 1) \times$ $\times p \ln p$	$\text{const } p^{\frac{2}{3-2\gamma}}$
7		$\sim \Gamma(k)$	∞	$\frac{g\varphi}{\sqrt{1+g^2\varphi^2}}; \frac{g\varphi}{1 \pm g^2\varphi^2}$	$\text{const } p \ln p$	$\text{const } p^2$
8	III	$\sim \Gamma(\gamma k)$ $\gamma > 1$	∞	$\sum_0^\infty \Gamma((\gamma - 1)k) (g\varphi)^k$	$\text{const } (2\gamma - 1) \times$ $\times p \ln p$	$\text{const } p^{\frac{2}{3-2\gamma}}$ $\gamma < 3/2$ Не существует, если $\gamma > 3/2$
9		$\sim e^{k\alpha}$	∞	$\sum_0^{n^2} e^{n^2} (g\varphi)^n$	$\text{const } 2p^2$	Не существует

Нелокализуемые

Примечания. *Локализуемые* взаимодействия — это взаимодействия, приводящие к спектральным функциям, удовлетворяющим условию (13.1). Если спектральная функция при больших p^2 растет быстрее, чем требуется по условию (13.1), то соответствующее взаимодействие называется *нелокализуемым*.

Локальные теории — это теории, в которых выполняется принцип микропричинности. Теории, в которых принцип микропричинности нарушается на малых расстояниях и выполняется лишь принцип максигучности, называются *нелокальными теориями*. Нелокализуемые взаимодействия всегда описываются нелокальными теориями, в то время как локализуемые взаимодействия могут сводиться как локальными, так и нелокальными теориями в зависимости от метода, используемого при построении этой теории.

мнимую часть обобщенной функции $F_{k_1 k_2}^{(2)}(x)$ для безмассовых частиц, то можно будет обнаружить большое сходство между выражением (10.3), рассмотренным Мейманом [28], и выражением для $\text{Im} F_{k_1 k_2}^{(2)}(x)$:

$$\text{Im} F_{k_1 k_2}^{(2)}(x) = -\pi \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{c_{n+1}^{(k_1, k_2)}}{(2\pi)^{2(n+1)}} \delta^{(n)}(x^2). \quad (13.12)^*$$

Итак, лагранжианы, у которых коэффициенты разложения в ряд по степеням поля φ удовлетворяют условию (13.10), описывают локализуемые взаимодействия. При невыполнении условия (13.10) приходим к нелокализуемым взаимодействиям. Среди последних можно выделить еще два подкласса: первый, когда ряд (12.1) сходится к определенной функции от поля φ ; и второй, когда он расходится. Нам кажется, что с физической точки зрения интересен лишь первый подкласс нелокализуемых лагранжианов. Во втором подклассе помимо расходимости ряда (12.1) в большинстве случаев не существует и спектральной функции для безмассовых частиц (см. табл. 1).

Теории поля с неполиномиальными лагранжианами, описывающими нелокализуемые взаимодействия, подробно изучались Г. В. Ефимовым [46—48], а также Е. С. Фрадкиным [49]. В § 16 приведем пример одного из методов, пригодных для описания нелокализуемых взаимодействий. Основное же внимание уделим методам, используемым в теориях поля с локализуемыми взаимодействиями.

Отметим еще одно весьма интересное различие, существующее между локализуемыми и нелокализуемыми взаимодействиями. Оказывается, что асимптотическое поведение амплитуд при больших значениях импульса в теориях с локализуемыми взаимодействиями одинаково для массивных и безмассовых частиц. Для нело-

* Формулу (13.12) легко получить из (12.2) и (12.4), если использовать соотношение

$$1/(x^2 - i\varepsilon)^{n+1} = P/(x^2)^{n+1} + i\pi \delta^{(n)}(x^2) (-1)^n/n!$$

Оно выводится с помощью n -кратного дифференцирования по x^2 формулы (12.4), которую можно представить в виде

$$1/x^2 - i\varepsilon = P/x^2 + i\pi \delta(x^2) \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

где P — знак главного значения функции [1].

кализуемых взаимодействий асимптотическое поведение амплитуд рассеяния массивных частиц отличается от поведения амплитуд для безмассовых частиц, как это видно из табл. 1. Отсюда следует, что в теориях, описывающих нелокализуемые взаимодействия, при проведении приближенных расчетов для больших значений энергии нельзя просто пренебрегать массами частиц и использовать для оценок выражения, соответствующие более простому случаю безмассовых частиц. (Подобная некорректность была допущена, например, в работе Салама, Стразди [50], где при больших значениях p^2 использовались для пропагаторов массивных частиц приближенные выражения, совпадающие с выражениями для безмассовых частиц.)

§ 14. Классификация методов, используемых в теориях поля с неполиномиальными лагранжианами

Сформулируем еще раз типичную задачу, возникающую в теории поля с неполиномиальным лагранжианом, и проведем некоторую классификацию методов, применяемых для ее решения.

Как было показано, уже во втором порядке теории возмущений в теории поля с неполиномиальным лагранжианом возникает двухточечная функция Грина $F(x)$, выражающаяся через бесконечный ряд по степеням пропагаторов свободных скалярных частиц:

$$F(x) = i \sum_{n=1}^{\infty} c(n) [-i \Delta^c(x)]^n. \quad (14.1)$$

Эту функцию в дальнейшем будем называть *суперпропагатором* (СП). В гл. 3 было показано, что функция $F(x)$ является обобщенной и ее можно определить лишь на известном классе основных функций. В частности, функция $\exp(ipx)$ — одна из возможных основных функций. Поэтому задача будет сводиться к определению функционала $F(p)$, представляющего собой фурье-преобразование обобщенной функции $F(x)$:

$$\tilde{F}(p) = \int d^4x \exp(ipx) F(x). \quad (14.2)$$

Функционал $F(p)$ должен быть конечной функцией от p и обладать аналитическими свойствами, описанными в § 13.

Методы, используемые для нахождения функции $F(p)$, можно условно разбить на четыре группы:

1) определение функции $F(p)$ методами интегральных представлений;

2) определение функции $F(p)$ с помощью решений соответствующих уравнений для функций Грина или амплитуд рассеяния;

3) нахождение функций $F(x)$, имеющих фурье-образы (14.2) в обычном смысле, а не в смысле функционалов, выражающихся через интегралы от обобщенных функций;

4) введение нелокальных форм-факторов.

В гл. 5 дано подробное описание типичного метода, относящегося к первой группе. Именно этот метод будет использоваться в дальнейшем при изучении ренормируемых теорий. Здесь же постараемся схематически изложить характерные черты тех подходов, которые применяются в каждой из четырех указанных групп.

1. Рассмотрим неполиномиальный лагранжиан экспоненциального типа с безмассовым скалярным полем $\varphi(x)$:

$$\mathcal{L}_s = G [\exp \{g\varphi(x)\} - 1].$$

Во втором порядке теории возмущений по константе G приходим к следующему выражению для двухточечной функции $F^{(2)}(x)$:

$$F_{(-)}^{(2)}(x) = iG^2 \left\{ \exp \left[-\frac{g^2}{(2\pi)^2 (x^2 - i\epsilon)} \right] - 1 \right\}. \quad (14.3)$$

Функция $F_{(-)}^{(2)}(x)$ обладает существенно особой точкой на световом конусе. С одной стороны, поведение функции Грина на световом конусе становится значительно более сингулярным, чем это было в ренормируемых теориях (см. гл. 2), но, с другой — появляется возможность введения в теорию совершенно новых методов регуляризации расходящихся интегралов, которые были неприемлемы в ренормируемых теориях. Они основаны на использовании специфического качества существенно особой точки. Поведение функции Грина, имеющей существенно особую точку на световом конусе, сильно зависит от пути, по которому мы приближаемся к нему. Поэтому если в интеграле (14.2) выбрать контур интегрирования по переменной $\bar{\lambda} = x^2$ так, чтобы приближаться к световому конусу из области, где $x^2 > 0$, то

получается сходящийся интеграл и выражение $F^{(3)}(p)$ конечно. Конкретный выбор формы контура интегрирования диктуется условием унитарности S -матрицы (13.3).

Для иллюстрации изложенного рассмотрим две функции $F_{(\pm)}^{(3)}(x)$. $F_{(+)}^{(3)}(x)$ отличается знаком в экспоненте от $F_{(-)}^{(3)}(x)$ [см. (14.3)]. Из унитарности S -матрицы, в частности, следует, что при $p^2 < 0$ $\text{Im} F_{(\pm)}^{(3)}(p) = 0$. Этому условию удовлетворяет конечное выражение для $\tilde{F}_{(+)}^{(3)}(p)$ в форме простого однократного интеграла:

$$\tilde{F}_{(+)}^{(3)}(p) = \int_0^{\infty} d\lambda R_{(+)}(|p|, \lambda), \quad (14.4a)$$

где

$$R_{(\mp)}(|p|, \lambda) = \frac{2\pi^2 G^2}{|p|} \sqrt{\lambda} J_1(|p| \sqrt{\lambda}) \{ \exp[\mp g^2 / (2\pi)^2 \lambda] - 1 \};$$

$\lambda = -x^2$; $|p| = \sqrt{-p^2}$; $J_1(z)$ — функция Бесселя. Рассмотрена область, где $p^2 < 0$.

Приведенное выше представление для функции $\tilde{F}_{(+)}^{(3)}(p)$ получается из (14.2), если в области $p^2 < 0$ перейти к евклидовой метрике и в полярных координатах провести интегрирование по всем углам. Действительно, если $p^2 < 0$, то всегда можно выбрать систему координат, в которой $p = \{0, p\}$. В этой системе координат можно повернуть контур интегрирования по переменной x_0 на угол $(-\pi/2)$, не пересекая особых точек у $(x^2 - i\epsilon)^{-1}$, и тем самым перейти к евклидовой метрике, после чего в полярной системе координат все интегралы по угловым переменным легко берутся*.

* Напомним, что в полярной системе координат:

$$\int d^4 x = \int_0^{\infty} dr r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta_1 \sin \theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \sin^2 \theta_2;$$

$$px = |p| r \cos \theta_2; \quad r = \sqrt{-x^2} = \sqrt{\lambda};$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin^2 \theta \exp[-i |p| \sqrt{\lambda} \cos \theta] = \frac{\pi}{|p| \sqrt{\lambda}} J_1(|p| \sqrt{\lambda}).$$

Несколько более сложный случай, когда в экспоненте у $F^{(3)}(x)$ стоит знак минус. Чтобы получить конечное выражение для $\tilde{F}_{(-)}^{(3)}(p)$ и в то же время удовлетворить условию $\text{Im} \tilde{F}_{(-)}^{(3)}(p) = 0$, когда $p^2 < 0$, приходится представить $\tilde{F}_{(-)}^{(3)}(p)$ в виде комбинации двух интегралов с деформированными контурами:

$$\tilde{F}_{(-)}^{(3)}(p) = \alpha \int_{L_1} d\lambda R_{(-)}(|p|, \sqrt{\lambda}) + \beta \int_{L_2} d\lambda R_{(-)}(|p|, \sqrt{\lambda}). \quad (14.46)$$

Контур L_1 и L_2 изображены на рис. 4; α и β — комплексные коэффициенты, удовлетворяющие условиям: $\alpha + \beta = 1$; $\text{Re} \alpha = \text{Re} \beta$. Второе условие следует из уни-

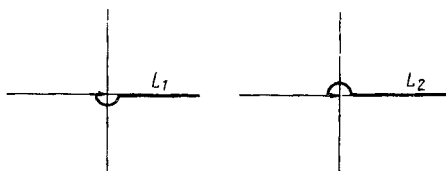


Рис. 4. Контур, по которым производится интегрирование при определении функции $F_{(-)}^{(3)}(p)$ [формула (14.46)]

тарности S -матрицы. В результате для α и β получаем: $\alpha = 1/2 + i\eta$, $\beta = 1/2 - i\eta$, где η — произвольный параметр. После интегрирования по λ функции $\tilde{F}_{(\pm)}^{(3)}(p)$ можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость p^2 *

Новые свойства функций Грина $F(x)$, которые возникают в неполиномиальных теориях и позволяют получать конечные выражения для их фурье-образов, исчезают, если рассматривать каждый член разложения по степеням пропагаторов $\Delta^c(x)$ отдельно (подобно тому, как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-t^n)/n! = 0$$

* Об устранении произвола в методах первой группы и о способах интегрирования функций типа $R(|p|, \lambda)$ см. гл. 5.

отличается от суммы пределов каждого члена). Кроме того, как показано в гл. 5, функция $F(p)$ имеет неаналитическую зависимость от константы связи g , в частности, у $\tilde{F}^{(g)}(p)$ эта зависимость логарифмического типа. Это еще раз подтверждает незаконность рассмотрения каждого члена в разложении (14.1) отдельно при построении фурье-образа.

Методы, относящиеся к первой группе, в последние годы развивались в работах многих авторов [44, 50—58].

2. Характерным приемом, используемым для нахождения функции $F(p)$ во второй группе методов, является решение уравнений для функций Грина или амплитуд рассеяния в импульсном пространстве в евклидовой области значений импульса. Решения находятся сначала при нефизических значениях константы связи g , а затем аналитически продолжают к истинным значениям g и ко всем комплексным значениям p^2 [59, 60].

Продемонстрируем этот метод на простом примере, разобранным в работе [59]. В ней рассмотрен лагранжиан взаимодействия типа (7.3), но со скалярным (а не псевдоскалярным) полем. В этом случае преобразованием Дайсона [61] для спинорных полей (7.3) приводится к свободному лагранжиану* и, следовательно, S -матрица здесь будет единичной. Однако функция Грина для спинорного поля, вершинная функция и некоторые другие величины имеют нетривиальную форму типа (8.7). Поэтому представляет известный интерес задача нахождения фурье-образов этих функций с помощью решения соответствующих уравнений.

Для безмассовых частиц спинорную функцию Грина можно записать в форме

$$G(p) = -\hat{p}f(p^2 + i\epsilon)/(p^2 + i\epsilon).$$

Тогда, исходя из уравнения Дайсона — Швингера и используя тождество Уорда [1], получаем в евклидовой области значений импульса $p^2 < 0$ следующее уравнение для функции $f(p^2 + i\epsilon)$:

$$x^* f'''(x) + 3x^2 f''(x) + (g^2/4\pi^2) x f(x) = 0$$

с граничными условиями $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) \rightarrow 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow \text{const}$. Здесь

* Для псевдоскалярного поля преобразование Дайсона приводит лагранжиан (7.3) к виду (8.6) (см. § 22).

$x = -p^2$; g — константа связи. Для удовлетворения граничных условий необходимо, чтобы знак у g^2 был отрицательным, а это соответствует нефизическому мнимому значению константы связи. Следовательно, предлагается такой способ определения функции $f(x)$. Сначала находится функция $f(x, g^2)$ для отрицательных значений g^2 . Она имеет логарифмический разрез по g^2 от 0 до $+\infty$. Искомая функция $f(x)$ выражается через комбинацию этих функций, взятых одна на верхнем, другая на нижнем берегу разреза:

$$f(x) = \alpha f(x, g^2 \exp(i\pi)) + \beta f(x, g^2 \exp(-i\pi)),$$

где $\alpha = 1/2 + i\eta$; $\beta = 1/2 - i\eta$; η — произвольный параметр [см. аналогичное выражение для $\tilde{F}_{(-)}^{(s)}(p)$]. Функция $f(x, g^2)$ является хорошо известной функцией Майера (см. [62]):

$$f(x, g^2) = G_{03}^{20}((g/2\pi)^2 x | 1, 0, -1).$$

Поскольку аналитические свойства функции Майера хорошо известны, не представляет труда получить выражение для функции $f(p^2 + i\epsilon)$ во всей комплексной плоскости значений p^2 .

Заметив, что вещественная и мнимая части пропагатора удовлетворяют одному и тому же уравнению, Н. М. Атакишиев и А. Т. Филиппов [60] распространили дифференциальный метод на достаточно широкий класс неполиномиальных теорий. Их идея такова: поскольку мнимая часть суперпропагатора в импульсном пространстве удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению с граничным условием $\text{Im} f(p^2) \rightarrow 0$ при $p^2 \rightarrow 0$, можно потребовать, чтобы и вещественная часть удовлетворяла тому же уравнению, но с другим граничным условием $f(p^2) \rightarrow 1$ при $p^2 \rightarrow 0$. Тогда для $f(p^2)$ получается решение с точностью до члена вида $c \text{Im} f(p^2)$, где c — произвольная константа, а $\text{Im} f(p^2)$ — строго определенная функция. В такой форме этот метод уже не будет связан с переходом к евклидовой метрике и последующим продолжением по константе связи g^2 .

3. Из методов, относящихся к третьей группе, типичным является метод, предложенный одновременно и независимо Г. В. Ефимовым [46] и Е. С. Фрадкиным

[49]. Это была первая попытка построить конечную унитарную квантовую теорию поля с существенно нелинейным лагранжианом*. Авторы исходили из того положения, что не для любого лагранжиана можно построить конечную теорию, и ставили своей целью найти класс лагранжианов, в котором построение конечной теории возможно. Метод, развитый ими, позволяет строить конечную теорию для лагранжианов, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $U(\alpha)$ [см. (12.1)] — непрерывная функция, не имеющая сингулярностей на реальной оси и в окрестности точки нуль разлагающаяся в ряд Тейлора с конечным радиусом сходимости:

$$U(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n u_n / n!;$$

б) должен существовать интеграл от $|U(\alpha)|^2$ по любой ограниченной области в комплексной α -плоскости;

в) на бесконечности $U(\alpha)$ должна удовлетворять условию

$$\overline{\lim}_{|\alpha| \rightarrow \infty} [U(\alpha)/\alpha^2] = 0.$$

Это довольно сильные ограничения на допустимый вид лагранжиана (12.1). Они выделяют из всевозможных взаимодействий неполиномиального типа, приведенных в табл. 1, нелокализуемые взаимодействия с лагранжианами, указанными в п. 7.

Суть метода заключается в использовании асимптотических свойств бесконечного ряда (14.1). Постулируется, что существует «хорошая» функция $F(x)$, которая не имеет сингулярностей при $x^2 \rightarrow 0$, когда $\Delta^c(x) \rightarrow \infty$. Ряд (14.1) рассматривается как асимптотическое разложение этой функции $F(x)$ при $x^2 \rightarrow \infty$, когда $\Delta^c(x) \rightarrow 0$.

* Одной из первых работ, посвященных построению двухточечной функции Грина в теории с лагранжианом (7.3), который сводится к неполиномиальному лагранжиану (8.6), была работа Окубо, появившаяся еще в 1954 г. [63]. Его метод близок к методам группы 1 и группы 2. Техника, использованная Окубо, как и полученные им формулы, весьма похожа на аппарат и формулы, о которых шла речь в п. 1 § 14. Однако серьезный недостаток этой работы заключается в неверном аналитическом продолжении по константе связи g , приводящем к нарушению условия унитарности S -матрицы.

Условия а) — в) обеспечивают существование этой «хорошей» функции.

Как непосредственное развитие идей Ефимова — Фрадкина можно указать процедуру, описанную Ли, Зумино [64]. Если авторы работ [46, 49] ставили целью найти такой класс лагранжианов, на основе которого можно построить конечную и унитарную квантовую теорию поля, то Ли и Зумино хотели описать уже заданные лагранжианы, получающиеся, например, в кирально-симметричных теориях [10, 11, 13, 65—67]. Поэтому последние рассмотрели лагранжиан, близкий по форме к кирально-симметричным лагранжианам, но находящийся в противоречии с условием б) предыдущего метода*:

$$U(\varphi) = \sqrt{\kappa\varphi(x)} / [1 - \kappa\varphi^2(x)].$$

В этом случае функция (14.1) выглядит следующим образом:

$$F(x) = i \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)! \kappa^{2n+1} [-i\Delta^c(x)]^{2n+1}. \quad (14.5)$$

Для суммирования расходящегося ряда (14.5) используется метод Бореля [68]

$$\begin{aligned} F(x) &= i \int_0^{\infty} dt e^{-t} \sum_0^{\infty} \kappa^{2n+1} [-it\Delta^c(x)]^{2n+1} = \\ &= \kappa \int_0^{\infty} dt t e^{-t} \Delta^c(x) / \{1 + [\kappa t \Delta^c(x)]^2\}. \end{aligned}$$

Фурье-образ этой функции в области $p^2 < 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\kappa^2}(p) &= \frac{(2\pi)^2 \kappa}{\sqrt{-p^2}} \int_0^{\infty} dt t e^{-t} \times \\ &\times \int_0^{\infty} dr r^2 J_1(\sqrt{-p^2} r) \frac{mK_1(mr)/(4\pi^2 r)}{1 - t^2 \kappa^2 (mK_1(mr)/(4\pi^2 r))^2}. \end{aligned}$$

* Отсутствие производных принципиально отличает лагранжиан $U(\varphi)$ от лагранжиана кирального типа.

Здесь J_1 и K_1 — функции Бесселя. Функция $\tilde{F}_{\kappa^2}(p)$ определена при всех значениях параметра κ^2 , за исключением значений, лежащих на реальной положительной оси, где имеется разрез. Но физическое значение лежит как раз на этом разрезе. Искомое значение функции $F(p)$ при $\kappa^2 > 0$ следует определять через комбинацию значений на верхнем и нижнем берегах разреза:

$$\tilde{F}(p) = \alpha \tilde{F}_{\kappa^2+i0}(p) + \beta \tilde{F}_{\kappa^2-i0}(p),$$

где $\alpha = \beta^* = 1/2 + i\eta$; η — произвольный параметр, как и в двух предыдущих примерах. Из нефизической области $p^2 < 0$ легко сделать аналитическое продолжение функции $\tilde{F}(p)$ на всю область комплексных переменных p^2 .

4. Последняя группа методов связана с введением в теорию таких форм-факторов, которые устраняют УФ-расходимости и не нарушают условий унитарности S -матрицы. Из-за ограниченных возможностей метода перенормировок, который используется лишь в относительно узком классе теорий, описывающих только взаимодействия первого рода, давно возникла идея построения нелокальной теории квантового поля, которая была бы в состоянии описывать значительно более широкий класс взаимодействий [69—75]. Одной из сложнейших проблем, возникающих при создании таких теорий, является проблема, связанная с введением фундаментальной длины без нарушения релятивистской инвариантности, причинности и унитарности теории. В настоящее время исследовано много вариантов нелокальных теорий поля и выяснены основные трудности, связанные с удовлетворением всех перечисленных выше требований. Поскольку наша книга посвящена описанию существенно нелинейных взаимодействий локализуемого типа, не будем здесь останавливаться на обзоре обширной литературы, посвященной нелокальным теориям, а ограничимся лишь приведенными выше ссылками.

Выводы

Во втором порядке теории возмущений по главной константе G показано, как строится S -матрица в квантовой теории поля с неполиномиальным лагранжианом.

Описаны основные проблемы, которые возникают в этом порядке. Сформулировано условие унитарности S -матрицы. На основе изучения асимптотического поведения спектральной функции при больших значениях импульса найдены условия, которым должны удовлетворять коэффициенты неполиномиальных лагранжианов, описывающих локализуемые взаимодействия элементарных частиц, а также коэффициенты соответствующих СП. Отмечено интересное свойство целолокализуемых взаимодействий, проявляющееся в различном асимптотическом поведении СП при $p^2 \rightarrow \infty$ для массивных и безмассовых частиц. Дана краткая характеристика четырех различных подходов к описанию теорий поля с неполиномиальными лагранжианами.

В гл. 4 на основе рассмотрения модели с экспоненциальным взаимодействием было показано, как находится фурье-образ двухточечной функции Грина с помощью простого метода, относящегося к первой группе.

В этой главе подробно опишем значительно более общий метод построения фурье-образов функций Грина и амплитуд рассеяния, возникающих в неполиномиальных теориях. Этот метод также относится к первой группе и применим к исследованию широкого класса не только локализуемых, но и нелокализуемых взаимодействий. Он был предложен одним из авторов этой монографии в 1967 г. [44, 51—53] и получил дальнейшее развитие в последующих работах других авторов [см., например, 50, 56, 76]. Этот метод будем называть *суперпропагаторным* (СП-метод), следуя терминологии, впервые использованной Саламом. Сначала рассмотрим нелокализуемые, а затем локализуемые взаимодействия неполиномиального вида.

§ 15. Краткое описание метода

Рассмотрим основную идею СП-метода для чего обратимся к выражению (14.1). Нетрудно видеть, что, начиная с $n=2$, все члены бесконечного ряда, через который выражается функция $F(x)$, при переходе к импульсному пространству содержат расходимости тем более высокого порядка, чем больше число n . Сущность метода заключается в том, что степени пропагаторов n в $F(x)$ рассматриваются как комплексные переменные z , т. е. членам ряда $c(n) [-i\Delta^c(x)]^n$ сопоставляется некоторая функция комплексного переменного z : $c(z) [-i\Delta^c(x)]^z$, которая при целочисленных значениях

переменной z совпадает с этими членами. Затем для рассматриваемого ряда находится такое интегральное представление, в котором выполнялось бы условие $\text{Re } z < 2$. Таким представлением может служить хорошо известное представление Зоммерфельда — Ватсона [62]. При этом в большинстве случаев приходится использовать промежуточную регуляризационную процедуру, которая обеспечивает возможность манипуляций с контуром интегрирования, приводящих к выполнению условия $\text{Re } z < 2$. После выполнения всех этих операций можно построить фурье-образ $F(p)$, не встречаясь с УФ-расходимостями. На конечном этапе промежуточная регуляризация снимается, и тогда можно вновь вернуться от интегрального представления к хорошо сходящемуся ряду. Этот ряд для безмассовых частиц, как правило, сводится к какой-либо гипергеометрической функции, например к уже встречавшейся в гл. 4 G -функции Майера.

Интересно отметить, что наш метод близок к методу аналитической регуляризации, предложенному в 1968 г. Спиром [77] для описания ренормируемых теорий с полиномиальными лагранжианами. Там степени пропагаторов также рассматриваются как комплексные числа, а на заключительном этапе вычислений делается аналитическое продолжение к целочисленным значениям.

Однако существенная разница этих методов заключается в том, что СП-метод применим только для описания теорий с неполиномиальными лагранжианами, в то время как метод Спира может использоваться лишь в ренормируемых теориях и приводит к тем же результатам, которые можно получить, например, с помощью хорошо известного метода Боголюбова — Парасюка [78].

Перейдем теперь к изложению СП-метода. Чтобы достичь большей наглядности при описании характерных черт СП-метода, рассмотрим сначала случай безмассовых частиц. В этом случае сохраняются все специфические качества теорий с неполиномиальными лагранжианами (наличие существенных особенностей на световом конусе, неаналитическая зависимость суперпропагатора $F(p)$ от константы связи g). В то же время, как уже упоминалось, удается получить относительно простые представления для суперпропагаторов, выражающиеся через известные специальные функции.

§ 16. Нелокализуемые взаимодействия (безмассовые частицы)

Из примера построения фурье-образов для функций $F_{\alpha(\pm)}(x)$ [см. формулы (14.3), (14.4a) и (14.4б)] легко заметить, что следует выделить СП двух типов, различающиеся знаками перед Δ^c . Суперпропагаторы первого типа можно записать в форме (14.1) и обозначить их буквой F , а СП второго типа — буквой Φ *:

$$\Phi(x) = i \sum_1^{\infty} c(n) [i\Delta^c(x)]^n. \quad (16.1)$$

Из разобранных в гл. 4 примера видно, что фурье-образ для СП Φ строится более просто, чем для СП F . Оказывается, это не случайное качество приведенного примера, а общее свойство всех СП. В дальнейшем станет ясно, почему так происходит. Сразу заметим, что СП $F(x)$ появляются уже во втором порядке теории возмущений по G , в то время как СП $\Phi(x)$ — лишь в более высоких порядках.

Еще одно важное различие функций $\Phi(x)$ и $F(x)$ заключается в том, что фурье-образ первой из них определяется однозначно нашим методом, в то время как при определении фурье-образа $F(x)$ появляется одна неопределенная константа. Чтобы ее устранить, необходимо наложить некоторые дополнительные физические или математические требования [56, 79—81]. Одно из таких требований, предложенное Леманом и Полмайером и названное ими *принципом минимальных сингулярностей* [56], будет подробно разобрано в этой главе.

1. Рассмотрим сначала более простую задачу — построение фурье-образа для СП $\Phi(x)$. Пусть коэффициенты $c(n)$ удовлетворяют условию**

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-b} |c(n)|^{1/n} = A, \quad (16.2)$$

* Коэффициенты $c(n)$ будем считать вещественными и положительно определенными.

** Условие (16.2) можно сформулировать в более сильной форме. Именно, можно потребовать, чтобы целая функция $\chi(z)$,

представляемая степенным рядом $\chi(z) = \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{c(n)}{(2n)!} z^n$, была

ограничена в некотором секторе $|\varphi| \leq \delta$, где $\delta > 0$, а $z = r \exp(i\varphi)$. Из этого условия следует условие (16.2). Будем считать, что оба условия выполнены.

где A — некоторая отличная от нуля положительная константа, а значения параметра b лежат в интервале

$$2 > b \geq 0. \quad (16.3)$$

Теории, в которых коэффициенты $c(n)$ удовлетворяют условию (16.2), описывают все физически интересные случаи нелокализуемого взаимодействия квантованных полей. Если посмотреть на табл. 1, то легко видеть, что к этим взаимодействиям относятся все взаимодействия из сектора II и те из сектора III, которые допускают существование мнимой части у функции $\tilde{F}(p)$ для безмассовых частиц ($\gamma < 2/3$).

При описании нелокализуемых взаимодействий весьма полезным оказывается следующее интегральное представление для n -й степени пропагатора скалярной частицы:

$$[i\Delta_m^c(x)]^n = \frac{i}{2} \left(-\frac{1}{16\pi^3}\right)^{n-1} \int_{(nm)^2}^{\infty} d\mu^2 \Omega_n^{(m)}(\mu^2) \Delta_\mu^c(x), \quad (16.4)$$

где m — масса скалярной частицы; $\Omega_n^{(m)}$ — фазовый объем n частиц [см. (13.4)]; $\Delta_\mu^c(x)$ — пропагатор скалярной частицы с массой μ . Для безмассовых частиц это представление принимает простую форму, выражающуюся через табличный интеграл* [82]:

$$\lambda^{-n} = \frac{(-1)^{2\pi i}}{4^n \Gamma(n) \Gamma(n-1)} \int_0^{\infty} d\mu^2 (\mu^2)^{n-1} \frac{H_1^{(2)}(\mu \sqrt{\lambda})}{\mu \sqrt{\lambda}}, \quad (16.4a)$$

где $H_1^{(2)}(\mu \sqrt{\lambda})$ — функция Ганкеля; $\Gamma(n)$ — гамма-функция; $\lambda = x^2 - i\epsilon$.

С помощью представлений (16.4) или (16.4a) суперпропагатор (16.1) можно записать в форме

$$\Phi_m(x) = -\frac{i}{2} \sum_1^{\infty} \left(-\frac{1}{16\pi^3}\right)^n c(n+1) \int_{[(n+1)m]^2}^{\infty} d\mu^2 \Omega_{n+1}^{(m)}(\mu^2) \Delta_\mu^c(x) \quad (16.5)$$

*Здесь мы воспользовались формулами (8.8) и (13.5), а также известным выражением для $\Delta_\mu^c(x)$ [1]:

$$\Delta_\mu^c(x) = -\frac{\mu}{8\pi \sqrt{\lambda}} H_1^{(2)}(\mu \sqrt{\lambda}).$$

или для $m=0$

$$\Phi_0(x) = - \sum_1^{\infty} \left(-\frac{1}{(4\pi)^2} \right)^n \times \\ \times \frac{c(n+1)}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)} \int_0^{\infty} d\mu^2 (\mu^2)^{n-1} \Delta_{\mu}^c(x). \quad (16.5a)$$

Здесь, по сравнению с формулой (16.1), отброшен член с коэффициентом $c(1)$, поскольку его фурье-образ получается тривиально. В дальнейшем этот член вновь будет включен в рассмотрение.

Перед тем как перейти к импульсному пространству, необходимо ввести промежуточную регуляризацию в формулу (16.5a)*. Это можно сделать с помощью обрезания области интегрирования по μ^2 при больших значениях μ^2 ($\mu^2 \leq M^2 < \infty$). На одном из конечных этапов вычисления эта регуляризация будет снята. Регуляризованное выражение для $\Phi_0(x)$ имеет вид

$$\Phi_{0 \text{ рег}}(x) = - \sum_1^{\infty} (-1)^n \int_0^{M^2} d\mu^2 \frac{\varphi(n, \mu^2)}{\mu^2} \Delta_{\mu}^c(x), \quad (16.6)$$

где

$$\varphi(n, \mu^2) = (\mu/4\pi)^{2n} c(n+1) / [\Gamma(n)\Gamma(n+1)]. \quad (16.7)$$

Сравнив полученную формулу для $\Phi_{0 \text{ рег}}(x)$ с первоначальным выражением (16.1), нетрудно заметить, что представление (16.4) [или (16.4a)] помогает превратить расходящийся асимптотический ряд (16.1) в хорошо сходящийся ряд (16.6)**. Прием, использованный здесь, близок к известным способам суммирования расходящихся асимптотических рядов, например к методу Бореля [см. работу [68] и суммирование ряда (14.5)].

Теперь поставим перед собой следующую задачу: по значениям $\varphi(n, \mu^2)$ в заданной последовательности точек $n=1, 2, 3, \dots$ восстановить аналитическую функцию $\varphi(z, \mu^2)$, регулярную в правой полуплоскости $\text{Re } z > 0$,

* Далее рассматривается только случай безмассовых частиц.

** После регуляризации интеграл по μ^2 абсолютной сходится, поэтому знаки суммирования и интегрирования можно менять местами.

непрерывную вплоть до ее границы и подчиняющуюся условиям:

$$а) |\varphi(z, \mu^2)| < B \exp(\Lambda |z|) \quad (\operatorname{Re} z > 0, z = x + iy); \quad (16.8)$$

$$б) |\varphi(iy, \mu^2)| < B \exp[(\pi - \varepsilon) |y|] \quad (-\infty < y < +\infty, \varepsilon > 0). \quad (16.9)$$

Условия (16.8) и (16.9) обеспечивают единственность восстановленной функции $\varphi(z, \mu^2)$ [83, 84].

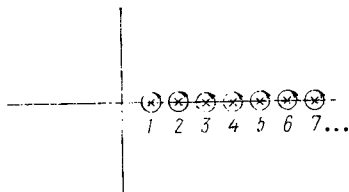


Рис. 5. Представление ряда (16.6) через сумму вычетов в целочисленных точках на реальной положительной оси

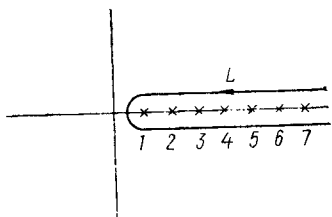


Рис. 6. Представление ряда (16.6) через интеграл Зоммерфельда — Ватсона по контуру L

Имея в своем распоряжении регулярную в правой полуплоскости z функцию $\varphi(z, \mu^2)$, представим ряд (16.6) в виде суммы вычетов функции $\varphi(z, \mu^2)$ в целочисленных точках на реальной положительной оси (рис. 5). Поскольку функция $\varphi(z, \mu^2)$ регулярна в правой полуплоскости z , все контуры, изображенные на рис. 5, соединим в один контур L , охватывающий положительную реальную ось сверху и снизу и огибающий точку $+1$ слева (рис. 6). Тогда формула (16.6) принимает вид*

$$\Phi_{\text{рег}}(x) = \frac{i}{2} \int_L \frac{dz}{\sin \pi z} \int_0^{M^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} \varphi(z, \mu^2) \Delta_{\mu}^c(x). \quad (16.10)$$

Это интегральное представление Зоммерфельда — Ватсона (или интеграл Меллина — Бернса [62]).

* Здесь использована известная формула для вычетов

$$\frac{1}{2i} \int_L \frac{dz}{\sin \pi z} \varphi(z) = \sum_1^{\infty} (-1)^n \varphi(n).$$

Обратим теперь внимание на то обстоятельство, что условия (16.8) и (16.9), которые обеспечивали единственность восстановленной функции $\varphi(z, \mu^2)$, в то же время позволяют выпрямить контур интегрирования L так, чтобы он шел параллельно мнимой оси между реальными точками 0 и 1 (рис. 7) (вместе с условиями (16.8) и (16.9) условие (16.2) приводит к обращению в нуль подынтегрального выражения в (16.10) на z -бесконечности). Новый контур интегрирования обеспечи-

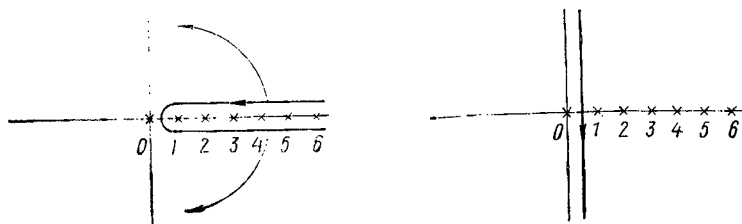


Рис. 7. Выпрямление контура L , необходимое для перехода к импульсному пространству

вает выполнение условия $\text{Re } z < 1$ во всей области интегрирования:

$$\Phi_{\text{пер}}(x) = \frac{i}{2} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{dz}{\sin \pi z} \int_0^{M^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} \varphi(z, \mu^2) \Delta_{\mu}^c(x), \quad (16.11)$$

где $0 < \alpha < 1$. На данном этапе уже достигнуто решение задачи, сформулированной в начале главы. А именно, в полученном представлении для СП $\text{Re } z$ [степень пропагаторов, входящих в $\Phi_0(x)$, см. (16.1)] всегда меньше единицы. Следовательно, если использовать представление (16.11), то при переходе к импульсному пространству УФ-расходимости не возникнут.

Поскольку при применении операции фурье-преобразования к (16.11) все интегралы абсолютно сходятся, это преобразование отнесем непосредственно к $\Delta_{\mu}^c(x)$, а затем снимем промежуточную регуляризацию, устремив M^2 к бесконечности:

$$\tilde{\Phi}_0(p) = \frac{i}{2} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{dz}{\sin \pi z} \int_0^{\infty} \frac{d\mu^2}{\mu^2} \frac{\varphi(z, \mu^2)}{\mu^2 - p^2 - i\epsilon}. \quad (16.12)$$

В результате получаем конечное выражение для фурье-образа функции $\Phi_0(x)$.

Обратимся теперь к более подробному определению функции $\varphi(z, \mu^2)$. Явный вид этой функции не понадобится нам в дальнейшем. Лишь ее аналитические свойства и асимптотическое поведение на бесконечности важны для использования представлений типа (16.10) — (16.12) *. Тем не менее знакомство с методом построения функции $\varphi(z, \mu^2)$ по ее значениям позволит получить важные ограничения на рост коэффициентов $c(n)$ [на параметр b в (16.2)].

Существуют различные методы построения аналитических функций по их значениям в заданных последовательностях точек [83]. Условия (16.8) и (16.9) оказываются достаточными для того, чтобы обеспечить единственность восстановленной функции. Приведем одну из теорем, позволяющих найти функцию $\varphi(z, \mu^2)$ в явной форме.

Теорема 1. Пусть n есть последовательность натуральных чисел, а функция $\varphi(z, \mu^2)$ удовлетворяет условиям (16.8) и (16.9). Тогда при достаточно больших q функцию $\varphi(z, \mu^2)$ можно представить в виде

$$\varphi(z, \mu^2) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} \left\{ - \int_{-q}^{\infty} P_{\mu}(x) \exp(-zx) dx + \right. \\ \left. + \exp(qz) \sum_1^{\infty} (-1)^n n \varphi(n, \mu^2) \frac{\exp(-qn)}{z-n} \right\}, \quad (16.13)$$

где $P_{\mu}(z)$ — аналитическая функция, представимая в достаточно далекой полуплоскости $\operatorname{Re} z < a$ рядом Дирихле

$$P_{\mu}(z) = \sum_1^{\infty} (-1)^n n \varphi(n, \mu^2) \exp(nz). \quad (16.14)$$

Доказательство. Покажем в общих чертах, как проводится доказательство теоремы 1 (более строгое доказательство можно найти, например, в книге [83]). Для ряда Дирихле (16.14) можно написать представление, подобное представлению (16.11) для

* Для дальнейших расчетов понадобится только знание явной зависимости функции $\varphi(z, \mu^2)$ от параметра μ^2 .

ряда (16.6):

$$P_{\mu}(z) = \frac{i}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d\zeta\zeta}{\sin \pi\zeta} \exp(z\zeta) \varphi(\zeta, \mu^2).$$

Справедливость такого представления для ряда $P_{\mu}(z)$, абсолютно сходящегося в полуплоскости $\operatorname{Re} z < a$, можно строго доказать. При этом функция $\varphi(z, \mu^2)$ должна удовлетворять условиям (16.8) и (16.9). Сходимость ряда Дирихле следует уже из условия (16.8) и тем более из (16.2) и (16.3).

Приведенное здесь представление для $P_{\mu}(z)$ осуществляет аналитическое продолжение ряда Дирихле (16.14) в полосу $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$. Действительно, вследствие условия (16.9)

$$\varphi(iy, \mu^2) \operatorname{sh} \pi y < B \exp(-\varepsilon|y|).$$

Поэтому интеграл для $P_{\mu}(z)$ сходится в полосе $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$ и представляет собой ограниченную функцию. Эти свойства $P_{\mu}(z)$ позволяют рассмотреть следующий интеграл:

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_{-q}^{\infty} dx P_{\mu}(x) \exp(-zx) = \\ &= \frac{i}{2} \int_{-q}^{\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} dx d\zeta \exp[x(\zeta - z)] \frac{\zeta}{\sin \pi\zeta} \varphi(\zeta, \mu^2). \end{aligned}$$

При $\operatorname{Re} z > 0$ порядок интегрирования можно изменить. Сделав это и взяв интеграл по x , получим

$$I(z) = \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d\zeta\zeta}{\zeta - z} \frac{\varphi(\zeta, \mu^2)}{\sin \pi\zeta} \exp[-q(\zeta - z)].$$

Благодаря условию (16.9) можно выбрать такое q и такую последовательность $r_n \rightarrow \infty$, что

$$\left| \frac{\varphi(\zeta, \mu^2)}{\sin \pi\zeta} \zeta \exp(-q\zeta) \right| < B_1 \exp(-\varepsilon_1|\zeta|) \\ (\zeta = r_n; \operatorname{Re} \zeta > 0; 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon).$$

Обозначая C_n границу полукруга $|\zeta| < r_n$, где $\operatorname{Re} \zeta > 0$, приходим к формуле

$$I(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \oint_{C_n} \frac{d\zeta\zeta}{\zeta - z} \frac{\varphi(\zeta, \mu^2)}{\sin \pi\zeta} \exp[-q(\zeta - z)] =$$

$$= -\frac{\pi z}{\sin \pi z} \varphi(z, \mu^2) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n < r_n} (-1)^n \varphi(n, \mu^2) \times \\ \times \frac{n}{z-n} \exp[-q(n-z)].$$

Нетрудно убедиться, что последний ряд сходится и представляет собой аналитическую функцию от z . Следовательно,

$$I(z) = -\varphi(z, \mu^2) \pi z / \sin \pi z + \\ + \exp(qz) \sum_1^{\infty} (-1)^n n \varphi(n, \mu^2) \exp(-qn) / (z-n)$$

и теорема доказана.

Функцию $\varphi(z, \mu^2)$, однозначно восстановленную по значениям $\varphi(n, \mu^2)$ с помощью теоремы 1, запишем в следующем виде:

$$\varphi(z, \mu^2) = (\mu/4\pi)^{2z} c(z+1) / [\Gamma(z) \Gamma(z+1)]. \quad (16.15)$$

Явный вид функции $c(z+1)$ нет необходимости выписывать. Достаточно знать, что она регулярна в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и, входя в функцию (16.15), удовлетворяет условиям (16.8) и (16.9). В целочисленных точках на реальной положительной оси она принимает значения, совпадающие с $c(n+1)$.

Условия, при которых справедлива теорема 1, налагают определенные ограничения на рост коэффициентов $c(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Найдем их.

Как мы уже видели, одним из важнейших условий, при которых справедливо представление (16.13), является требование, чтобы сумма ряда Дирихле (16.14) аналитически продолжалась в полосу $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$ и была ограничена в ней. Посмотрим, какие ограничения это требование налагает на рост коэффициентов $c(n)$. Сопоставим с рядом Дирихле (16.14) степенной ряд, получающийся из него заменой переменных $v = \exp(z)$:

$$\bar{P}_\mu(v) = \sum_1^{\infty} (-1)^n n \varphi(n, \mu^2) v^n. \quad (16.16)$$

Тогда условие ограниченности ряда Дирихле (16.14) в полосе $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$ становится аналогичным условию ограниченности степенного ряда (16.16) в секторе $|\varphi| < \varepsilon$ ($v = r \exp(i\varphi)$). Из теории целых функций извест-

но (теорема Фрагмена — Ландселефа), что для того, чтобы целая функция была ограничена в некотором секторе, порядок ее роста ρ должен удовлетворять требованию $\rho \geq 1/2$.

Теперь, чтобы получить условия роста коэффициентов $c(n)$, достаточно воспользоваться теоремой 2.

Теорема 2. Пусть $\bar{P}(v) = \sum_1^{\infty} d_n v^n$. Если

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \ln M_{\bar{P}}(r) = \sigma, \quad (16.17)$$

то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{1/\rho} |d_n|^{1/n} = (\sigma \rho)^{1/\rho} \quad (16.18)$$

и, наоборот, из (16.18) следует (16.17)*.

Доказательство. Достаточно показать, что из (16.17) следует (16.18) с заменой знака равенства на знак меньше или равно и что из (16.18) следует (16.17) также с заменой знака равенства на знак меньше или равно.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, докажем вспомогательное утверждение, что из условия

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} M_{\bar{P}}(r) \exp(-\sigma r^{\rho}) = M \quad (16.19)$$

следует

$$|d_n| \leq (M + \varepsilon) [n/(\sigma \rho e)]^{-n/\rho} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (16.20)$$

Для этого воспользуемся более или менее очевидным неравенством, которое можно доказать точно:

$$M_{\bar{P}}(r) \geq \max_{n \geq 0} |d_n| r^n.$$

Из этого неравенства получаем

$$|d_n| \leq \min_{r > 0} r^{-n} M_{\bar{P}}(r).$$

В частности, при $r = (n/\sigma \rho)^{1/\rho}$ оно дает

$$|d_n| \leq (n/\sigma \rho)^{-n/\rho} M_{\bar{P}}((n/\sigma \rho)^{1/\rho}).$$

* Знак $M_{\bar{P}}(r)$ означает $M_{\bar{P}}(r) = \max_{|v|=r} \bar{P}(v)$ ($r = |v|$).

Но, согласно условию (16.19),

$$M_{\bar{P}}((n/\sigma\rho)^{1/\rho}) \leq (M + \varepsilon) \exp(n/\rho), \quad n \rightarrow \infty$$

поэтому неравенство (16.20) справедливо.

Вернемся теперь к теореме 2. Если (16.17) выполнено, то при любом $\varepsilon > 0$ и при всех r за счет выбора достаточно большого M_ε имеем

$$M_{\bar{P}} \leq M_\varepsilon \exp[(\sigma + \varepsilon)r^\rho].$$

Тогда из (16.20) получаем

$$|d_n| \leq M_\varepsilon n^{-n/\rho} \{(\sigma + \varepsilon)e\rho\}^{n/\rho}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то отсюда следует

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{1/\rho} |d_n|^{1/n} \leq (\sigma e\rho)^{1/\rho}.$$

Аналогично доказывается обратное утверждение, что из (16.18) следует $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \ln M_{\bar{P}}(r) \leq \sigma$. Тем самым теорема 2 доказана*.

Коэффициенты d_n связаны с $c(n)$ соотношением [см. формулу (16.16) и (16.7)]:

$$|d_n| = (\mu/4\pi)^{2n} c(n+1) / [\Gamma(n)]^2.$$

Подставляя их в формулу (16.18), находим искомое условие на рост $c(n)$ при $n \rightarrow \infty$ **:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-2+1/\rho} |c(n)|^{1/n} = (4\pi/\varepsilon\mu)^2 (e\sigma\rho)^{1/\rho}. \quad (16.21)$$

Если теперь обозначить $2 - 1/\rho = b$, то легко убедиться, что из условия на порядок роста целой функции $\bar{P}_\mu(v)$: $\rho \geq 1/2$, необходимого для выполнения теоремы 1, следует неравенство (16.3): $2 > b \geq 0$. Отсюда видно, что полученное условие роста $c(n)$ (16.21) совпадает с условием (16.2), которое с самого начала накладывалось на коэффициенты $c(n)$. Поэтому условие (16.2) вполне обеспечивает однозначное восстановление функции $c(z)$

* Более подробно теорема 2 доказывается в книге [83].

** Здесь использовалось асимптотическое представление Стирлинга для Γ -функции при больших значениях n [82]:

$$\Gamma(n) = n^{n-1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi} \{1 + O(n^{-1})\}.$$

по ее значениям в целочисленных точках реальной положительной оси $c(n)$.

Как уже отмечалось, теории, в которых коэффициенты $c(n)$ удовлетворяют условиям (16.2) или, что то же самое (16.21), описывают все случаи нелокализуемых взаимодействий, где имеет смысл введение понятия *фундаментальной длины* (речь здесь идет или о *строгой фундаментальной длине*, или об *эффективной фундаментальной длине* в том смысле, в каком они определены в работе [74]). Если коэффициенты $c(n)$ удовлетворяют условию (16.2) с параметром $b \geq 2$, то в таких теориях не удается ввести даже эффективной фундаментальной длины, т. е. некой усредненной длины. Таким образом, мы видим, что условия (16.2) и (16.3), обеспечивающие однозначность восстановления аналитической функции $\varphi(z, \mu^2)$ по ее значениям $\varphi(n, \mu^2)$, оказываются связанными с физическими свойствами нелокализуемых взаимодействий, а именно строго выделяют класс нелокализуемых взаимодействий, характеризующихся фундаментальной длиной l .

Вернемся теперь к формуле (16.12). Подставляя в нее значение $\varphi(z, \mu^2)$, данное в (16.15), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_0(p) = & \frac{1}{2i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz \frac{(4\pi)^{-2z} c(z+1)}{\sin \pi z \Gamma(z) \Gamma(z+1)} \times \\ & \times \int_0^{\infty} d\mu^2 \frac{(\mu^2)^{z-1}}{\mu^2 - p^2 - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (16.22)$$

Поскольку оба интеграла в (16.22) абсолютно сходятся [условие (16.9)], то можно поменять порядок интегрирования и записать $\tilde{\Phi}_0(p)$ в форме спектрального представления:

$$\tilde{\Phi}_0(p) = \int_0^{\infty} d\mu^2 \rho(\mu^2) / (\mu^2 - p^2 - i\epsilon), \quad (16.23)$$

где

$$\begin{aligned} \rho(\mu^2) = & \frac{1}{2i (4\pi)^2} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{dz}{\sin \pi z} \left(\frac{\mu}{4\pi} \right)^{2(z-1)} \frac{c(z+1)}{\Gamma(z) \Gamma(z+1)} = \\ = & (4\pi)^{-2} \sum_1^{\infty} \left[- \left(\frac{\mu}{4\pi} \right)^2 \right]^{n-1} \frac{c(n+1)}{(n-1)! n!} \end{aligned} \quad (16.24)$$

является спектральной функцией, выражающейся через знакопеременный ряд. Использование спектральных представлений типа (16.23) для СП оказывается полезным при доказательстве унитарности S -матрицы в высших порядках теории возмущений по G [85].

Интеграл по μ^2 в (16.22) легко берется

$$\int_0^{\infty} d\mu^2 \frac{\mu^{2(z-1)}}{\mu^2 - p^2 - i\epsilon} = -\pi (p^2 + i\epsilon)^{z-1} \exp(-i\pi z) / \sin \pi z. \quad (16.25)$$

В результате получаем еще одно интегральное представление для СП в форме интеграла Меллина — Бернса [62]. Это представление полезно использовать при вычислении петлевых диаграмм, состоящих из СП

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_0(p) = & \frac{i\pi}{2(p^2 + i\epsilon)} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz \frac{\exp(-i\pi z)}{\sin^2 \pi z} \times \\ & \times \frac{c(z+1)}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)} \left(\frac{p^2 + i\epsilon}{(4\pi)^2} \right)^z. \end{aligned} \quad (16.26)$$

Наконец, интеграл по z тоже легко берется и сводится к сумме двойных вычетов в целочисленных точках на реальной положительной оси. Для его вычисления необходимо предварительно так деформировать контур интегрирования, чтобы он окружал сверху и снизу реальную положительную ось. Такая деформация возможна опять-таки в силу выполнения условий (16.8) и (16.9), а также (16.2) и (16.3). В результате получаем*

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_0(p) = & \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \sum_1^{\infty} \left(- \frac{p^2 + i\epsilon}{(4\pi)^2} \right)^n \times \\ & \times \frac{c(n+1)}{n!(n-1)!} \left\{ \ln \left[\frac{p^2 + i\epsilon}{(4\pi)^2} \exp(-i\pi) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \nu} [\ln c(\nu+1)] \Big|_{\nu=n} - \psi(n) - \psi(n+1) \right\}, \end{aligned} \quad (16.27)$$

где $\psi(n)$ — функция Эйлера.

* Здесь использована формула

$$(\pi/2i) \int_L dz \varphi(z) / \sin^2 \pi z = \sum_1^{\infty} \varphi'(n),$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция, не имеющая нулей на реальной положительной оси, а контур L изображен на рис. 6.

Как видно из формулы (16.27), СП $\tilde{\Phi}_0(p)$ имеет разрез в p^2 -плоскости с точкой ветвления при $p^2=0$. Мнимая часть СП (скачок на разрезе)

$$\text{Im} \tilde{\Phi}_0(p) = -\pi \frac{\theta(p^2)}{p^2} \sum_1^{\infty} \left(-\frac{p^2}{(4\pi)^2} \right)^n \frac{c(n+1)}{n!(n-1)!}.$$

Сравнивая последнюю формулу с (13.3), видим, что, в отличие от $\text{Im} F_0(p)$, мнимая часть $\tilde{\Phi}_0(p)$ выражается через знакпеременный ряд. Это следствие того, что в формуле (16.1) перед пропагатором $\Delta^c(x)$ стоит знак противоположный знаку, бывшему в (12.2).

Коэффициенты $c(n)$ обычно пропорциональны n -й степени квадрата константы g :

$$c(n) = a(n) g^{2n}, \quad (16.28)$$

где $a(n)$ — безразмерная величина. Если учесть этот факт, то из (16.27) следует, что СП $\Phi_0(p)$ обладает неаналитической зависимостью от константы связи g в точке $g=0$. Эта зависимость имеет логарифмический вид $(\ln g^2) f(g^2) + \varphi(g^2)$, где $f(g^2)$ и $\varphi(g^2)$ — целые функции от g^2 .

2. Перейдем теперь к построению фурье-образа для функции $F_0(x)$. Суперпропагатор $F_0(x)$ нетрудно привести к регуляризованному виду, подобному (16.6):

$$F_{\text{пер}}(x) = \sum_1^{\infty} \int_0^{M^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} \varphi(n, \mu^2) \Delta_{\mu}^c(x), \quad (16.29)$$

где функция $\varphi(n, \mu^2)$ та же, что и в (16.7). Как и в предыдущем случае, по значениям $\varphi(n, \mu^2)$ однозначно восстанавливается функция $\varphi(z, \mu^2)$, регулярная в правой полуплоскости $\text{Re } z > 0$ и удовлетворяющая условиям (16.8) и (16.9). Тогда (16.29) можно записать в интегральной форме:

$$F_{\text{пер}}(x) = \frac{1}{2i} \int_L dz \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \int_0^{M^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} \varphi(z, \mu^2) \Delta_{\mu}^c(x). \quad (16.30)$$

Контур L изображен на рис. 6. В отличие от предыдущего случая [формула (16.10)], здесь нельзя выпрямить контур интегрирования из-за наличия $\cos \pi z$ под

знаком интеграла по z [$\cos \pi z$ появился в (16.30) потому, что в (16.29) под знаком суммы отсутствует множитель $(-1)^n$]. При $z \rightarrow \pm i\infty$ значение $\cos \pi z$ экспоненциально растет, и условия (16.9) теперь недостаточно для обращения в нуль подынтегрального выражения на бесконечности.

Это обстоятельство заставляет нас использовать еще одну промежуточную процедуру. Чтобы подавить рост $\cos \pi z$ при $z \rightarrow \pm i\infty$, введем параметр γ под знак синуса в (16.30). Тогда нетрудно видеть, что при $\gamma > 2$ [точнее, при $\gamma > 2 - b/2$ с учетом условия (16.2) на коэффициенты $c(n)$], контур L опять можно будет выпрямить:

$$F_{\text{oper}}^{\gamma}(x) = \frac{1}{2i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz \frac{\cos \pi z}{\sin \gamma \pi z} \frac{(4\pi)^{-2z} c(z+1)}{\Gamma(z) \Gamma(z+1)} \times \\ \times \int_0^{M^2} d\mu^2 (\mu^2)^{z-1} \Delta_{\mu}^c(x). \quad (16.31)$$

Здесь параметр α лежит в интервале $0 < \alpha < 1/\gamma$. Интересующая нас функция F_0 определяется как предел F_0^{γ} при $\gamma = 1$ (контур в (16.31) надо предварительно вернуть в прежнее положение):

$$F_0 = \lim_{\gamma \rightarrow 1} F_0^{\gamma}.$$

Для выражения (16.31) уже не представляет труда произвести фурье-преобразование. Переходя к импульсному пространству и устремляя M^2 к бесконечности, получаем спектральное представление для $\tilde{F}_0^{\gamma}(p)$:

$$\tilde{F}_0^{\gamma}(p) = \frac{1}{2i} \int_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty} dz \frac{\cos \pi z}{\sin \gamma \pi z} \frac{(4\pi)^{-2z} c(z+1)}{\Gamma(z) \Gamma(z+1)} \times \\ \times \int_0^{\infty} d\mu^2 \frac{(\mu^2)^{z-1}}{\mu^2 - p^2 - i\epsilon} = \\ = \int_0^{\infty} d\mu^2 \frac{p_{\gamma}(\mu^2)}{\mu^2 - p^2 - i\epsilon}. \quad (16.32)$$

Интегрируя по переменной μ^2 [формула (16.25)], приходим к представлению для $\tilde{F}_0^\gamma(p)$, подобному (16.26) для $\tilde{\Phi}_0(p)$:

$$\tilde{F}_0^\gamma(p) = \frac{\pi}{2i(p^2 + i\varepsilon)} \times \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz \operatorname{ctg} \pi z \frac{\exp(-i\pi z)}{\sin \gamma \pi z} \frac{c(z+1)}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)} \left(\frac{\mu^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2} \right)^z. \quad (16.33)$$

Представление (16.33) так же, как и (16.26), удобно использовать при вычислении петлевых СП-диаграмм. Контур интегрирования в (16.33) опять деформируем так, чтобы он шел около реальной положительной оси, после чего устремляем параметр γ к единице:

$$\tilde{F}_0^1(p) = \frac{i\pi}{2(p^2 + i\varepsilon)} \times \int_L dz \exp(-i\pi z) \frac{\cos \pi z}{\sin^2 \pi z} \frac{c(z+1)}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)} \left(\frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2} \right)^z.$$

Интегрируя по z , получаем окончательное выражение для $\tilde{F}_0(p)$ в виде хорошо сходящегося ряда:

$$\tilde{F}_0(p) = \frac{(-1)}{p^2 + i\varepsilon} \sum_1^\infty \left(\frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2} \right)^n \frac{c(n+1)}{n!(n-1)!} \times \left\{ \ln \left[\frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2} \exp(-i\pi) \right] + \frac{\partial}{\partial \nu} [\ln c(\nu + 1)] \Big|_{\nu=n} - \psi(n) - \psi(n+1) \right\}. \quad (16.34)$$

Спектральная функция здесь выражается через знакопостоянный ряд и полностью согласуется с условием унитарности \mathcal{S} -матрицы (13.3):

$$\operatorname{Im} \tilde{F}_0(p) = \pi \frac{\theta(p^2)}{p^2} \sum_1^\infty \left(\frac{p^2}{(4\pi)^2} \right)^n \frac{c(n+1)}{n!(n-1)!}.$$

Как и функция $\tilde{\Phi}_0(p)$, $\tilde{F}_0(p)$ обладает логарифмической точкой ветвления при $g=0$, если $c(n)$ имеет форму (16.28).

Введение параметра γ является удобным способом для получения представлений типа (16.32) и (16.33).

Однако это не единственная возможность для нахождения фурье-преобразования $F_0(x)$. Из других подходов уместно упомянуть процедуру, аналогичную описанной в § 14. Эта процедура связана с аналитическим продолжением по константе g^2 . Действительно, если рассмотреть нефизический случай $g^2 < 0$ [формула (16.28)], то задача построения фурье-образа функции $F_0(x)$ сводится к более простой задаче построения такого образа для функции $\Phi_0(x)$. Покажем, как это происходит.

Функцию $\varphi(n, \mu^2)$ (16.7) с учетом формулы (16.28) перепишем в виде

$$\varphi(n, \mu^2) = -\kappa \left[-\kappa (\mu/4\pi)^2 \right]^n a(n+1) / [\Gamma(n) \Gamma(n+1)] = \\ = (-1)^{n+1} \varphi_\kappa(n, \mu^2),$$

где $\kappa = -g^2$. Будем считать, что $\kappa > 0$. Тогда, повторяя расчеты, проведенные выше [вычисление фурье-образа функции $\Phi_0(x)$], получаем

$$\tilde{F}_\kappa(p) = \frac{\kappa}{p^2 + i\varepsilon} \sum_1^\infty \left(-\kappa \frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2} \right)^n \frac{a(n+1)}{n!(n-1)!} \times \\ \times \left\{ \ln \left[\kappa \frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2} \exp(-i\pi) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \nu} [\ln a(\nu+1)] \Big|_{\nu=n} - \psi(n) - \psi(n+1) \right\}. \quad (16.35)$$

Функция $\tilde{F}_\kappa(p)$ имеет логарифмический разрез при отрицательных значениях κ . Поэтому при восстановлении функции $\tilde{F}_0(p)$ необходимо учитывать значения $\tilde{F}_\kappa(p)$ на обоих берегах разреза (как это делалось в § 14):

$$\tilde{F}_0(p) = \alpha \tilde{F}_{\kappa \exp(i\pi)}(p) + \alpha^* \tilde{F}_{\kappa \exp(-i\pi)}(p), \quad (16.35a)$$

где $\alpha = 1/2 + i\eta$; η — произвольный параметр. Тогда для функции $\tilde{F}_0(p)$ получаем выражение

$$\tilde{F}_0(p) = \frac{(-g^2)}{p^2 + i\varepsilon} \sum_1^\infty \left[g^2 \frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2} \right]^n \frac{a(n+1)}{n!(n-1)!} \times \\ \times \left\{ \ln \left[g^2 \frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2} \exp(-i\pi - 2\pi\eta) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \nu} [\ln a(\nu+1)] \Big|_{\nu=n} - \psi(n) - \psi(n+1) \right\}. \quad (16.34a)$$

В отличие от (16.34), найденное здесь выражение содержит произвольный параметр η . Оказывается, такой параметр может возникать и при использовании предыдущей процедуры. Действительно, при переходе от суммы (16.29) к интегралу (16.30) вместо косинуса в числителе подинтегрального выражения можно было бы поставить функцию $\cos \pi z + a \sin \pi z$, не нарушая равенства выражений (16.29) и (16.30). Тогда произвольный параметр a обнаружит себя и в (16.34) ($a = -2\eta$). Об исключении этого произвола речь пойдет ниже, при обсуждении локализуемых взаимодействий.

§ 17. Локализуемые взаимодействия (безмассовые частицы)

Перейдем к изучению локализуемых взаимодействий. Коэффициенты $c(n)$ теперь подчиняются условию (13.11)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c(n)|^{1/n} = 0.$$

Будем рассматривать только такие взаимодействия, при которых $|c(n)|^{1/n}$ при больших значениях n стремятся к нулю, как n в некоторой конечной отрицательной степени k :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^k |c(n)|^{1/n} = A. \quad (17.1)$$

Здесь $A > 0$ и $k > 0$. В дальнейшем на величину k будут наложены определенные ограничения.

Для скалярных безмассовых частиц функцию $\Phi_0(x)$ запишем в форме

$$\Phi_0(x) = i \sum_1^{\infty} c(n+1) [(2\pi)^2 (x^2 - i\epsilon)]^{-n-1}. \quad (17.2)$$

Вводя промежуточную регуляризацию для пропагатора $(x^2 - i\epsilon)^{-1}$, такую, чтобы можно было построить фурье-образ любой его степени, переходим к импульсному пространству (конкретный вид регуляризации будет

определен ниже) *:

$$\tilde{\Phi}_{\text{пер}}(p) = i \sum_1^{\infty} c(n+1) (2\pi)^{-2(n+1)} \times \\ \times \int d^4x \exp(ipx) (x^2 - i\epsilon)_{\text{пер}}^{-n-1}.$$

Здесь опять отброшен член, соответствующий первой степени пропагатора.

Рассмотрим нефизическую область $p^2 < 0$ и выберем систему координат, где $p = \{0, \mathbf{p}\}$. Тогда, поворачивая координату x_0 на угол $-\pi/2$, чтобы не пересекать особые точки пропагаторов, перейдем к евклидовой метрике. Проводя интегрирование по углам в полярных координатах и вводя в явной форме регуляризацию с помощью обрезания малых значений λ ($\lambda = -x^2$), получаем

$$\tilde{\Phi}_{\text{пер}}(p) = -\frac{1}{2|p|} \sum_1^{\infty} (-1)^n \times \\ \times \int_{l^2}^{\infty} \frac{d\lambda}{V\lambda} f(n, \lambda) J_1(|p| \sqrt{\lambda}), \quad (17.3)$$

где $f(n, \lambda) = [(2\pi)^2 \lambda]^{-n} c(n+1)$; $J_1(|p| \sqrt{\lambda})$ — функция Бесселя; $|p| = \sqrt{-p^2}$; l — длина обрезания.

Теперь по значениям $f(n, \lambda)$ в заданной последовательности точек $n=1, 2, 3, \dots$ опять восстановим аналитическую функцию $f(z, \lambda)$, регулярную в правой полуплоскости $\text{Re } z > 0$ и подчиняющуюся условиям (16.8) и (16.9). С помощью найденной функции сумму (17.3) запишем в форме интеграла Зоммерфельда — Ватсона с контуром, проходящим параллельно мнимой оси и пересекающим реальную ось между точками 0 и 1:

$$\tilde{\Phi}_{\text{пер}}(p) = \frac{i}{4|p|} \int_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty} \frac{dz}{\sin \pi z} \times \\ \times \int_{l^2}^{\infty} \frac{d\lambda}{V\lambda} f(z, \lambda) J_1(|p| \sqrt{\lambda}), \quad (17.4)$$

* Пример необходимой промежуточной регуляризации для $[\Delta^{\circ_0}(x)]^n$ можно найти в работах [51, 53].

где $f(z, \lambda) = [(2\pi)^2 \lambda]^{-z} c(z+1)$ и $c(z)$ в целочисленных точках на реальной положительной оси принимает значения, совпадающие с $c(n)$.

Для однозначного построения функции $f(z, \lambda)$ снова используем теорему 1. Условия, при которых справедлива эта теорема, наложат определенные ограничения на скорость убывания коэффициентов $c(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Сходимость ряда Дирихле (16.14), где вместо значений $\varphi(n, \mu^2)$ будут стоять значения $f(n, \lambda)$, в полуплоскости $\operatorname{Re} z < a$ вполне обеспечивается условием (17.1) при любом положительном a .

Другое важное требование, необходимое для выполнения теоремы 1, накладывает ограничение на параметр k в (17.1). Это требование заключается в том, что сумма ряда Дирихле

$$P_\lambda(z) = \sum_1^\infty (-1)^n n f(n, \lambda) \exp(nz)$$

должна аналитически продолжаться в полосу $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$ и быть ограниченной в ней. Рассуждения, аналогичные использованным в § 16, вместе с теоремой 2 приводят к следующему условию на коэффициенты $c(n)$:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{1/\rho} |c(n)|^{1/n} = (2\pi)^2 \lambda (e\sigma)^{1/\rho}.$$

Здесь ρ — порядок роста целой функции, соответствующей ряду Дирихле $P_\lambda(z)$ при замене $v = \exp(z)$; e и σ — константы. Из требования ограниченности ряда Дирихле в полосе $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$ вытекает условие $\rho \geq 1/2$. Отсюда следует, что параметр k , входящий в условие (17.1), должен удовлетворять неравенству

$$0 < k \leq 2. \quad (17.5)$$

При такой скорости убывания коэффициентов $c(n)$ можно однозначно восстанавливать функцию $f(z, \lambda)$ по ее значениям $f(n, \lambda)$. Заметим, что одно из наиболее часто встречающихся неполиномиальных локализуемых взаимодействий — экспоненциальное взаимодействие — удовлетворяет условиям (17.1) и (17.5) ($k_{\text{эксп}} = 1$).

Возвращаясь к (17.4), видим, что в этой формуле можно снять промежуточную регуляризацию, устремив

l^2 к нулю. Тогда интеграл по λ легко вычисляется [82] и получается интегральное представление для $\tilde{\Phi}_0(p)$:

$$\tilde{\Phi}_0(p) = \frac{\pi}{2i} \frac{1}{(|p|^2)^2} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{dz}{\sin^2 \pi z} \frac{c(z+1)}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)} \left(\frac{|p|^2}{(4\pi)^2} \right)^z. \quad (17.6)$$

Интеграл по z сводится к бесконечной сумме двойных вычетов в целочисленных точках на реальной положительной оси, что дает

$$\tilde{\Phi}_0(p) = \frac{(-1)}{|p|^2} \sum_1^{\infty} \left(\frac{|p|^2}{4\pi} \right)^{2n} \frac{c(n+1)}{n!(n-1)!} \left\{ \ln \left(\frac{|p|^2}{4\pi} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \nu} [\ln c(\nu+1)]|_{\nu=n} - \psi(n) - \psi(n+1) \right\}.$$

Аналитически продолжая это выражение по p^2 так, чтобы выйти из нефизической области $p^2 < 0$, в которой до сих пор велось рассмотрение, на верхний берег разреза $p^2 + i\epsilon$ ($p^2 > 0$), получаем

$$\tilde{\Phi}_0(p) = \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \sum_1^{\infty} \left(-\frac{p^2 + i\epsilon}{(4\pi)^2} \right)^n \frac{c(n+1)}{n!(n-1)!} \times \\ \times \left\{ \ln \left[\frac{p^2 + i\epsilon}{(4\pi)^2} \exp(-i\pi) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \nu} [\ln c(\nu+1)]|_{\nu=n} - \psi(n) - \psi(n+1) \right\}.$$

В результате приходим к формуле, целиком совпадающей с (16.27), которая получена для нелокализуемых взаимодействий. Вся разница состоит лишь в поведении коэффициентов $c(n)$.

Поведение $c(n)$ в локализуемых взаимодействиях таково, что интегральные представления для СП $\tilde{\Phi}_0(p)$ типа (16.23) и (16.26) нельзя написать без введения параметра γ под знак синуса в знаменателе подобно тому, как это делалось для функций $\tilde{F}_0(p)$ в нелокализуемых взаимодействиях. Здесь имеется в виду поведение функций $c(z)$ при $|y| \rightarrow \infty$ ($z = x + iy$). В нелокализуемых взаимодействиях $c(iy)$ убывают при $y \rightarrow \pm\infty$. Например, при взаимодействии типа

$$\mathcal{L} = a\varphi^2 / (1 + \bar{a}\varphi^2)^2,$$

где φ — поле безмассовой скалярной частицы; a, \bar{a} — константы, функция $c(z)$ ведет себя, как $\Gamma(z)$ (см. п. 7 табл. 1). При $z=iy \rightarrow i\infty$ Γ -функция убывает как $\exp(-\pi y/2)$. Поэтому при использовании интегральных z -представлений для СП функции $c(z)$ не могут мешать при переходах от контуров L к выпрямленным и обратно. Напротив, в локализуемых взаимодействиях функции $c(z)$ убывают при $x \rightarrow +\infty$, но растут при $y \rightarrow \pm\infty$. Например, при взаимодействиях экспоненциального вида (см. п. 3 табл. 1) функция $c(z) \sim [\Gamma(z)]^{-1}$ при $z=iy \rightarrow \pm i\infty$ растет как $\exp(\pi y/2)$. Таким образом, чтобы представление (17.6) имело место при всех значениях p^2 , необходимо сначала ввести параметр γ под знак одного из синусов в подынтегральном выражении, а затем, полагая этот параметр бóльшим $1+k/2$, перейти к физическим значениям импульса p^2 :

$$\tilde{\Phi}_0^\gamma(p) = \frac{i\pi}{2(p^2 + i\varepsilon)} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz \frac{\exp(-i\pi z)}{\sin \gamma\pi z \sin \pi z} \times \\ \times \frac{c(z+1)}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)} \left(\frac{p^2 + i\varepsilon}{(4\pi)^2}\right)^z. \quad (17.7)$$

Здесь $0 < \alpha < 1/\gamma$. Используя (16.25), напомним спектральное представление для $\tilde{\Phi}_0^\gamma(p)$:

$$\tilde{\Phi}_0^\gamma(p) = \frac{1}{2i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz \frac{(4\pi)^{-2z} c(z+1)}{\sin \gamma\pi z \Gamma(z)\Gamma(z+1)} \times \\ \times \int_0^\infty d\mu^2 \frac{(\mu^2)^{z-1}}{\mu^2 - p^2 - i\varepsilon} = \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_\gamma(\mu^2)}{\mu^2 - p^2 - i\varepsilon}. \quad (17.8)$$

Выражение для $\tilde{F}_0(p)$ при локализуемых взаимодействиях можно получить способами, похожими на использованные в пеллокализуемых взаимодействиях. Не повторяя вывода соответствующих формул, укажем только, что $\tilde{F}_0(p)$ опять будет содержать один неопределенный параметр. Формулы для $\tilde{F}_0(p)$ в точности совпадают с (16.34) и (16.34а). Интегральные представления для этого СП также совпадают с представлениями (16.32) и (16.33). Только параметр γ должен быть больше, чем $2+k/2$. В окончательных выражениях необходимо переходить к пределу $\gamma=1$.

§ 18. Проблема однозначности метода. Принцип минимальных сингулярностей

Обсудим теперь более подробно проблему однозначности полученных выражений для СП Φ и F . Из проведенных вычислений видно, что функции $\tilde{\Phi}_0(p)$ определяются однозначно для локализуемых и нелокализуемых взаимодействий. Функции же $F_0(p)$ определяются с точностью до одного произвольного параметра. Чтобы зафиксировать этот оставшийся неопределенным параметр, необходимо наложить дополнительные требования. В этом параграфе опишем некоторые из них.

Разберем предварительно несколько деталей вопроса, почему функцию $\tilde{\Phi}_0(p)$ удается определить однозначно? Казалось бы, можно, не нарушая соответствия со значениями $c(n)$, ввести вместо функции $c(z)$, например, функцию $\bar{c}(z) = c(z) + a(z) \sin \pi z$, где $a(z)$ — регулярная функция при $\text{Re } z > 0$, не имеющая нулей при $z = 1, 2, 3, \dots$. В результате получалась бы та же неоднозначность, что и в $F_0(p)$. Но здесь следует напомнить, что при построении функции $\tilde{\Phi}_0(p)$ условие (16.9) одновременно обеспечивало: 1) возможность выпрямления контура, что необходимо при получении конечного выражения для $\tilde{\Phi}_0(p)$; 2) однозначное восстановление функции $c(z)$ по значениям $c(n)$, что запрещает добавлять к $c(z)$ указанные выше функции. Когда же мы переходим к рассмотрению функции $F_0(x)$, то здесь условие (16.9) не может играть такой двойственной роли, и при построении фурье-образа функции $F_0(x)$ мы вынуждены использовать дополнительную регуляризационную процедуру (параметр γ), вносящую неоднозначность в окончательные выражения.

Это же можно пояснить на менее формальном языке, возвращаясь к примеру (14.3), разобранным в гл. 4. Рассмотрим экспоненциальное взаимодействие безмассовых частиц $c^{(g)}(n) = g^{2n} / \Gamma(n+1)$.

Тогда в нефизической области $p^2 < 0$ СП $\tilde{\Phi}_0^{(g)}(p)$ выражается через интеграл

$$\tilde{\Phi}_0^{(g)}(p) = -\frac{1}{2|p|} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{V\lambda} J_1(|p|V\lambda) \exp \left[-(g/2\pi)^2 \frac{1}{\lambda} \right],$$

где $p = \sqrt{-p^2}$. Легко видеть, что этот интеграл сходится и весь вопрос сводится лишь к его вычислению и дальнейшему аналитическому продолжению полученного выражения на область всех остальных значений p^2 .

Иная ситуация имеет место при рассмотрении функции $\tilde{F}_0^{(\varepsilon)}(p)$. Интеграл для $\tilde{F}_0^{(\varepsilon)}(p)$, записанный при $p^2 < 0$ в том же виде, как и для $\tilde{\Phi}_0^{(\varepsilon)}(p)$, будет расходящимся, и поэтому необходимы специальные приемы для его определения [см. формулу (14.46)].

Один из таких приемов был описан в § 16. Суть его заключалась в том, что константа связи g^2 рассматривалась при нефизических отрицательных значениях ($\varkappa = -g^2 > 0$). Благодаря этому присему задача определения фурье-образа функции F_0 сводилась к аналогичной, но уже решенной задаче с функцией Φ_0 . В конце вычислений производилось аналитическое продолжение по константе связи g^2 к ее физическому значению ($g^2 > 0$).

Покажем, что такая процедура всегда приводит к появлению только одного неопределенного параметра. Действительно, формула (16.35а) — частный случай более общей формулы, получающейся при аналитическом продолжении функции $\tilde{F}_\varkappa(p)$ [см. (16.35)] от значений $\varkappa > 0$ ($g^2 < 0$) к физическим значениям $\varkappa < 0$ ($g^2 > 0$):

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0(p) = & \sum_0^\infty [\alpha_n \tilde{F}_{\varkappa \exp[i(2n+1)\pi]}(p) + \\ & + \beta_n \tilde{F}_{\varkappa \exp[-i(2n+1)\pi]}(p)]. \end{aligned} \quad (18.1)$$

Нетрудно показать, что эта формула, как и (16.35а), содержит лишь один произвольный параметр. Структура функции $\tilde{F}_\varkappa(p)$ по \varkappa следующая:

$$\tilde{F}_\varkappa(p) = A(p, \varkappa) + B(p, \varkappa) \ln \varkappa - i\pi B(p, \varkappa), \quad (18.2)$$

где $A(p, \varkappa)$ и $B(p, \varkappa)$ — действительные целые функции по \varkappa [см. (16.35)]. Коэффициенты α_n и β_n — комплекс-

ные числа и удовлетворяют очевидному условию

$$\sum_0^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = 1. \quad (18.3)$$

Еще одно условие следует из унитарности S -матрицы [см. (13.3)]:

$$\operatorname{Im} \tilde{F}_0(p) = -\pi B(p, -\kappa). \quad (18.4)$$

С учетом формул (18.1)—(18.3) это условие можно привести к виду

$$\operatorname{Re} \sum_0^{\infty} (2n+1)(\alpha_n - \beta_n) = 0.$$

Обозначая теперь

$$\operatorname{Im} \sum_0^{\infty} (2n+1)(\alpha_n - \beta_n) = 2\eta,$$

для функции $\tilde{F}_0(p)$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0(p) = & A(p, -\kappa) + B(p, -\kappa) \ln \kappa - \\ & - i\pi B(p, -\kappa) - 2\pi\eta B(p, -\kappa). \end{aligned}$$

Эта формула в точности совпадает с (16.34а). Функции A и B легко определить, сравнивая (18.2) и (16.35).

Как зафиксировать параметр η ? Существует несколько способов для устранения этой неопределенности [79—81, 56]. Рассмотрим некоторые из них. В дальнейшем будем обсуждать только локализуемые взаимодействия.

Простейший способ, позволяющий однозначно фиксировать параметр η , заключается в наложении дополнительного условия на рост реальной части $\tilde{F}_0(p)$ [81]: $\operatorname{Re} \tilde{F}_0(p) / \operatorname{Im} \tilde{F}_0(p) \rightarrow 0$ при $p^2 \rightarrow \infty$ или $\operatorname{Re} \tilde{F}_0(p) \rightarrow 0$ при $p^2 \rightarrow \infty$. К подобному же условию можно прийти, используя следующие рассуждения, высказанные еще раньше в работе [80]. Заметим, что лишь реальная часть функции $\tilde{F}_0(p)$ содержит неопределенный параметр η . Появление этого параметра — следствие того, что при определении функции $\tilde{F}_0(p)$ в области $p^2 < 0$ она выражается через расходящийся интеграл, если не деформировать контур интегрирования. Поскольку деформация контура,

как видно из (14.4б), является неоднозначной процедурой, то это и приводит к возникновению произвольного параметра η . Отсюда, естественно, возникает предложение попытаться определить реальную часть функции $\tilde{F}_0(p)$ в области $p^2 > 0$, где она будет выражаться через сходящийся интеграл без всякого изменения контура интегрирования по λ ($\lambda = x^2$) (напомним, что такая ситуация имела место при определении функции $\tilde{\Phi}_0(p)$ в области $p^2 < 0$).

Итак, рассмотрим реальную часть функции $F_0(x)$ независимо от мнимой части и построим ее фурье-образ [79, 80]:

$$\operatorname{Re} \tilde{F}_0^{\text{per}}(p) = \frac{1}{2i} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{c(n+1)}{(2\pi)^2 (n+1)} \times \\ \times \int d^4x \cos px \left\{ (x^2 - i\varepsilon)_{\text{per}}^{-n-1} - (x^2 + i\varepsilon)_{\text{per}}^{-n-1} \right\}.$$

В физической области $p^2 > 0$ выберем систему координат, где $p = \{p_0, 0\}$. Поворачивая контуры интегрирования по пространственным координатам так, чтобы не пересекать особенностей в пропагаторах, переходим к евклидовой метрике и фиксируем регуляризацию введением обрезания при малых значениях λ :

$$\operatorname{Re} \tilde{F}_0^{\text{per}}(p) = \frac{1}{2p} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{c(n+1)}{(2\pi)^{2n}} \int_{i^2}^{\infty} d\lambda \lambda^{-n-1/2} J_1(p\sqrt{\lambda}).$$

Здесь $p = \sqrt{p^2}$. По значениям $c(n)$ однозначно восстанавливаем функцию $c(z)$ и с ее помощью записываем для $\operatorname{Re} \tilde{F}_0(p)$ интегральное представление, в котором можно снять промежуточную регуляризацию:

$$\operatorname{Re} \tilde{F}_0(p) = \frac{1}{14p} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz \frac{c(z+1)}{(2\pi)^{2z} \sin \pi z} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda^{-z-1/2} J_1(p\sqrt{\lambda}). \quad (18.5)$$

Интегралы по λ и z легко берутся, и $\operatorname{Re} \tilde{F}_0(p)$ приводится к виду, согласующемуся с (16.34), где $\eta = 0$.

Однозначное выражение для $\operatorname{Re} \tilde{F}_0(p)$ удалось получить, во-первых, за счет того, что функция $F_0(x)$ не обращается в бесконечность при $x^2 \rightarrow 0$ из области $x^2 > 0$,

и, во-вторых (это тесно связано с первым обстоятельством), что $\text{Re } \bar{F}_0(p)$ убывает при $p^2 \rightarrow +\infty$. Поэтому для $\text{Re } \bar{F}_0(p)$ существует представление (18.5) с выпрямленным контуром без введения дополнительного параметра γ под знак синуса в подинтегральном выражении (процедура, которая может привести к неоднозначности!).

Именно этими свойствами функции $F_0(x)$ воспользовались Леман и Полмайер [56], чтобы сформулировать «принцип минимальных сингулярностей» для однозначного определения ее фурье-образа. Изложим кратко этот принцип.

Рассмотрим опять взаимодействие экспоненциального типа [см. (14.3)], где СП во втором порядке по G имеет вид

$$F^c(x) = iG^2 \{ \exp[-\kappa/(x^2 - i\varepsilon)] - 1 \} \quad (\kappa = (g/2\pi)^2).$$

Суперпропатор $F^c(x)$ экспоненциально растет, если приближаться к световому конусу из пространственно-подобной области x , и имеет конечный предел, если приближаться из времениподобной области. Это свойство $F^c(x)$ будет использовано в дальнейшем.

Для того чтобы найти фурье-образ $F^c(x)$ (причинного СП), сначала рассмотрим временинеупорядоченное произведение

$$\begin{aligned} F^{(+)}(x) &= iG^2 \{ \exp[ig^2 \Delta^{(+)}(x)] - 1 \} = \\ &= iG^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f[(x_0 - i\varepsilon)^2 - \mathbf{x}^2]; \\ f(z) &= \exp \left[\frac{\kappa m}{\sqrt{-z}} K_1(m\sqrt{-z}) \right] - 1, \end{aligned}$$

которое однозначно определено. Для большей общности здесь рассмотрен случай массивных скалярных полей. Причинный СП выражается через $F^{(+)}(x)$ и $F^{(-)}(x)$ следующим образом:

$$F^c(x) = \bar{F}(x)/2 - iF^{(1)}(x)/2,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= \varepsilon(x_0) F(x); \quad F(x) = F^{(+)}(x) - F^{(+)}(-x); \\ F^{(1)}(x) &= i[F^{(+)}(x) - F^{(-)}(x)]; \\ \varepsilon(x_0) &= \theta(x_0) - \theta(-x_0). \end{aligned}$$

Вся неоднозначность связана с определением реальной части причинного СП $\bar{F}(x)$, которая выражается произ-

ведением коммутатора $F(x)$ на антисимметричную ступенчатую функцию $\varepsilon(x_0)$. Важное обстоятельство, которое будет использовано в дальнейшем, состоит в том, что поведение коммутатора вблизи точки $x=0$ допускает наименее сингулярное определение $\bar{F}(x)$. Чтобы пояснить это утверждение, рассмотрим коммутатор, проинтегрированный по трехмерному пространству (вообще говоря, с подходящей пробной функцией из соот-

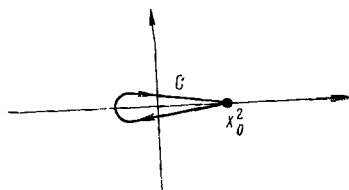


Рис. 8. Контур C , по которому происходит интегрирование коммутатора при фиксированном времени $x_0 \neq 0$

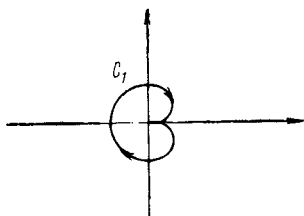


Рис. 9. Контур C_1 , в который переходит контур C , в пределе $x_0=0$

ветствующего основного пространства) при фиксированном времени $x_0 \neq 0$:

$$R(x_0) = \int d^3x F(x_0, \mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} iG^2 \int d^3x \{f[(x_0 - i\varepsilon)^2 - \mathbf{x}^2] - f[(x_0 + i\varepsilon)^2 - \mathbf{x}^2]\} = -2\pi i G^2 \varepsilon(x_0) \int_C d\zeta \sqrt{x_0^2 - \zeta} f(\zeta).$$

Контур C указан на рис. 8. Здесь в полярных трехмерных координатах проведено интегрирование по углам и сделана замена переменных $\zeta = (x_0 \mp i\varepsilon)^2 - r^2$. При интеграции по ζ от x_0^2 до $-\infty$ особая точка функции $f(\zeta)$ обходится сначала снизу, а потом сверху и контур стягивается от $-\infty$ к конечной отрицательной точке. Вследствие несингулярного поведения функции $f(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow +0$ существует конечный предел при $x_0 \rightarrow 0$:

$$R(\pm 0) = -2\pi i G^2 \varepsilon(x_0) \int_{C_1} d\zeta \sqrt{x_0^2 - \zeta} f(\zeta).$$

Контур C_1 дан на рис. 9. Таким образом, функция $R(x_0)$ обладает следующей структурой: при $x_0 \neq 0$ это гладкая (C^∞) функция, имеющая конечный предел при $x_0 \rightarrow \pm 0$. Здесь могли бы появиться и сингулярные члены

с посетителем, сосредоточенным в точке $x_0=0$, как это имеет место в ренормируемых полиномиальных теориях [1]. Но их можно исключить, рассматривая пределы для значений $x_0 \neq 0$. Частный выбор пространственно-проинтегрированного ε -коммутатора, следовательно, дается выражением $\bar{R}(x_0) = \varepsilon(x_0)R(x_0)$. Это гладкая функция, включая и точку $x_0=0$. Любой другой выбор коммутатора приводит к появлению членов $\sum_n c_n \delta^{(2n)}(x_0)$ и делает $\bar{R}(x_0)$ сингулярным в $x_0=0$.

Итак, мы видим, что наименее сингулярное определение функции $F(x)$ можно получить как предел в области $x \neq 0$, более точно как предел на пробных функциях, которые исчезают при $x=0$ вместе со всеми их производными. Такая функция $F(x)$ не имеет сингулярностей вида

$$\square^n \delta^{(4)}(x), \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (18.6)$$

В импульсном пространстве это приводит к свойству

$$\text{Re } \bar{F}^{(e)}(p) \rightarrow 0 \text{ при } p^2 \rightarrow +\infty. \quad (18.7) *$$

Основной результат предложенного принципа минимальных сингулярностей заключается в запрещении сингулярностей типа (18.6) с реальными коэффициентами. Как показано Н. Н. Боголюбовым и Д. В. Ширковым [1], такие сингулярности приводят к возникновению квазилокальных членов в эффективном лагранжиане (см. гл. 2). Тем самым, принцип минимальных сингулярностей приводит к наиболее простому выбору динамики, которую можно связать с данным классическим лагранжианом. Другой выбор СП приведет к появлению членов, соответствующих связям с производной.

§ 19. Регуляризационная процедура для построения высших порядков теории возмущений по G . Связь с регуляризацией Паули — Вилларса

Характерная задача, возникающая в теориях с неполиномиальными лагранжианами при рассмотрении высших порядков по G начиная с третьего, связана с опре-

* Поведение пространственно-проинтегрированного коммутатора для неэкспоненциальных теорий можно проиллюстрировать следующим образом (см. [56]). Если $f(\xi) \rightarrow \xi^{-\alpha}$ при $\xi \rightarrow +0$, тогда $R(x_0) \rightarrow \rightarrow \text{const } (x_0)^{3-2\alpha}$ при $x_0 \rightarrow +0$. Наименее сингулярный СП, удовлетворяющий свойству (18.7), можно определить, если $\alpha < 2$. Это требование исключает полиномиальные взаимодействия.

делением интегралов от произведения обобщенных функций — суперпропагаторов. Поскольку они представляют собой функции быстрого роста (при $p^2 \rightarrow +\infty$), интегралы от их произведений не существуют в обычном смысле, а требуют специального определения. Покажем в общих чертах, как вычисляются конечные выражения для такого рода интегралов с использованием полученных выше интегральных представлений для СП типа (16.32) и (16.33). Более подробное описание высших порядков теории возмущений для неполиномиальных лагранжианов можно найти в работах [85—87].

Прежде всего уделим несколько большее внимание специфическим свойствам этих представлений, чтобы лучше понять сущность нашей регуляризационной процедуры. Включая в полученное ранее выражение для СП член, соответствующий пропагатору свободного поля, перепишем (16.33) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0^\gamma(p) = & \frac{i}{2(p^2 + i\epsilon)} \int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} dz \operatorname{ctg} \pi z \frac{\Gamma(-\gamma z)}{\Gamma(z)} \times \\ & \times c(z+1) \left[\frac{p^2 + i\epsilon}{(4\pi)^2} \exp(-i\pi) \right]^z. \end{aligned} \quad (19.1)$$

Из представления Стирлинга для Γ -функции легко видеть, что параметр γ , введенный в функцию $\Gamma(-\gamma z)$, играет ту же роль, что и в (16.32) и (16.33), когда он стоял под знаком синуса в знаменателе. Для экспоненциального взаимодействия, которое в дальнейшем чаще всего будет встречаться, коэффициент $c(z)$ равен $g^{2z}/\Gamma(z+1)$ и параметр γ в (19.1) следует брать большим четырех.

Для перехода к пределу $\gamma=1$ необходимо использовать другое представление для $\tilde{F}_0^\gamma(p)$ (например, тот же интеграл по z , но с контуром, окружающим реальную положительную ось). Представление (19.1) полезно для вычисления интегралов по внутренним импульсам в выражениях, соответствующих петлевым диаграммам Фейнмана. Введение параметра γ представляет собой промежуточную регуляризацию, имеющую некоторое сходство с известной регуляризацией Паули — Вилларса [88] (см. также [1]).

Чтобы сделать эту аналогию более явной, перепишем (19.1) в форме спектрального интеграла

$$\tilde{F}_0^\gamma(p) = \int_0^\infty d\mu^2 \rho_\gamma(\mu^2) / (\mu^2 - p^2 - i\epsilon), \quad (19.2)$$

где

$$\rho_\gamma(\mu^2) = \frac{c(1)}{\gamma} \delta(\mu^2) - \frac{2i}{(4\pi)^3} \int_{-i0-i\infty}^{+i0+i\infty} dz \cos(\pi z) \frac{\Gamma(-\gamma z)}{\Gamma(z)} \times \\ \times c(z+1) \left(\frac{\mu}{4\pi}\right)^{2(z-1)}. \quad (19.3)$$

Спектральное представление (19.2) справедливо лишь при значениях параметра γ , больших определенной величины (для экспоненциального взаимодействия $\gamma > 4$). Посмотрим теперь, как ведет себя спектральная функция $\rho_\gamma(\mu^2)$ в зависимости от значений параметра γ . При $\gamma=1$ она выражается через бесконечный знакостоянный ряд, растущий экспоненциально при $\mu^2 \rightarrow +\infty$. Это — сумма фазовых объемов n скалярных частиц со значениями $n=1, 2, 3, \dots$, как то и следует из условия унитарности S -матрицы.

Однако при $\gamma > 4$ $\rho_\gamma(\mu^2)$ становится экспоненциально убывающей функцией μ^2 при $\mu^2 \rightarrow +\infty$. Бесконечный ряд, через который выражается теперь $\rho_\gamma(\mu^2)$, перестает быть знакостоянным. Тем самым в спектральном представлении (19.2) как бы появляются состояния с индефинитной метрикой. Подобная же ситуация имеет место при введении компенсирующих полей в регуляризации Паули — Вилларса*. Роль компенсирующих полей в нашей

* Кратко напомним, в чем заключается регуляризация Паули — Вилларса. Данной сингулярной функции поля $\Delta^c(x)$ с массой m сопоставляется функция, непрерывная со всеми своими производными до $(n-2)$ -го порядка включительно:

$$\text{reg} \{\Delta_m^c(x)\} = \Delta_m^c(x) + \sum_1^n c_i \Delta_{\mu_i}^c(x).$$

Эта функция содержит n вспомогательных масс μ_i и ее n коэффициентов подчинены n -условиям:

$$1 + \sum_1^n c_i = 0; \quad m^2 + \sum_1^n c_i \mu_i^2 = 0, \dots; \quad m^{2n-2} + \sum_1^n c_i \mu_i^{2n-2} = 0.$$

Снятие регуляризации осуществляется предельным переходом $\mu_i^2 \rightarrow +\infty$.

регуляризации играют диаграммы с различным числом внутренних линий. При $\gamma > 4$ они взаимно компенсируют свои расходимости.

Для большей наглядности только что изложенных утверждений рассмотрим асимптотическое поведение спектральной функции $\rho_\gamma(\mu^2)$ при $\mu^2 \rightarrow +\infty$ и различных значениях параметра γ . Тогда для экспоненциального взаимодействия получаем

$$\rho_\gamma(\mu^2) \approx \exp \left\{ \left(1 + \frac{2}{\gamma} \right) (\kappa \mu^2 \gamma^2)^{1/(2+\gamma)} \cos \pi \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+2} \right) \right\} \times \\ \cos \left\{ \left(1 + \frac{2}{\gamma} \right) (\kappa \mu^2 \gamma^2)^{1/(2+\gamma)} \sin \pi \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+2} \right) \right\},$$

где $\kappa = (g^2/4\pi)^2$. Из этой формулы легко видеть, что при $\gamma > 1$ функция $\rho_\gamma(\mu^2)$ перестает быть знакопостоянной.

В ней появляются осцилляции, но вплоть до значений $\gamma \leq 4$ амплитуда осцилляций растет экспоненциально при $\mu^2 \rightarrow \infty$. Однако при $\gamma = 4$ амплитуда осцилляций перестает экспоненциально расти и при $\gamma > 4$ становится экспоненциально убывающей. Это и есть та область, в которой спектральная функция $\rho_\gamma(\mu^2)$ начинает играть роль регуляризующего форм-фактора. Для большей аналогии с регуляризацией Паули — Вилларса укажем, что в этой области значений параметра γ функция $\rho_\gamma(\mu^2)$ обладает еще одним свойством, весьма близким к тем условиям, которым подчиняются коэффициенты c_i при компенсирующих пропагаторах в регуляризации Паули — Вилларса (см. список на с. 98):

$$\int_0^\infty d\mu^2 \mu^{2n} \rho_\gamma(\mu^2) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

здесь $\rho_\gamma(\mu^2)$ выступает в роли коэффициентов c_i при пропагаторах с различными массами [см. (19.2)]. Из последнего равенства видно, что СП в экспоненциальном случае обладает весьма мощными регуляризующими свойствами. А именно, при интегрировании по внутренним импульсам функция $\tilde{F}_\gamma(p)$ может регуляризовать любую степенную расходимость, если одна из линий в петлевой диаграмме соответствует СП. В окончательных выражениях совершается переход к пределу $\gamma = 1$.

Тем самым индефинитная метрика устраняется и S -матрица остается унитарной [85, 89].

Теперь покажем, почему от описанной здесь регуляризационной процедуры можно ожидать успеха при построении конечной S -матрицы в любых порядках теории возмущений по G . Для этого рассмотрим произвольную диаграмму с n вершинами. В x -пространстве ей будет соответствовать коэффициентная функция вида [взаимодействие имеет форму (12.1)]

$$F_{m_1 \dots m_n}(\Delta) = \sum_{n_{ij}=0}^{\infty} u \left(m_1 + \sum_2^n n_{1j} \right) \dots u \left(m_n + \sum_1^{n-1} n_{nj} \right) \times \\ \times \prod_{i < j} [-i\Delta(x_i - x_j)]^{n_{ij}} / n_{ij}!. \quad (19.4)$$

Здесь m_i — число внешних линий, связанных с вершиной x_i . В экспоненциальном случае $u(n) = g^n$ и (19.4) выражается через произведение $n(n-1)/2$ СП. Заметим, что суммы у СП в (19.4) начинаются с постоянного члена ($n_{ij}=0$). В импульсном пространстве этому члену соответствует δ -функция $i(2\pi)^4 c(0) \delta^{(4)}(p)$, которую легко включить в представление (19.1), используя формулу

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{z=0} dz (p^2 + i\epsilon)^{z-2} = 2\pi^2 \delta^{(4)}(p).$$

Тогда СП, начинающийся в x -пространстве с постоянным членом, в импульсном пространстве запишется в форме

$$\bar{F}_0^\gamma(p) = -i \frac{8\pi^2}{(p^2 + i\epsilon)^2} \int_{-0-i\infty}^{+0+i\infty} dz \operatorname{ctg}(\pi z) c(z) \frac{\Gamma(1-\gamma z)}{\Gamma(z-1)} \times \\ \times \left[\frac{p^2 + i\epsilon}{(4\pi)^2} \exp(-i\pi) \right]^z. \quad (19.1a)$$

Используя это представление, нетрудно записать выражение (19.4) в импульсном пространстве. Каждой внутренней линии под знаком z интеграла теперь соответствует импульс $(p^2_{ij} + i\epsilon)^{z_{ij}-2}$, где $\operatorname{Re} z_{ij} < 0$. Общее количество внутренних линий в диаграмме с n вершинами равно $n(n-1)/2$. Произведение $n(n-1)/2$ функций вида (19.1a) стоит под знаком $2(n-1)(n-2)$ -кратного интеграла по внутренним импульсам [здесь учтены n δ -функций, стоящих в вершинах, одна из которых обеспе-

чивает закон сохранения энергии-импульса, а $(n-1)$ остальных понижают кратность интеграла с $2n(n-1)$ до $2(n-1)(n-2)$]. Отсюда условие отсутствия УФ-расходимости можно записать в виде неравенства

$$2(n-1)(n-2) + 2 \sum_{i < j} (\operatorname{Re} z_{ij} - 2) < 0,$$

или, полагая все $\operatorname{Re} z_{ij}$ равными друг другу,

$$\operatorname{Re} z_{ij} < 4/n. \quad (19.5)$$

Из представления (19.1а) легко видеть, что условие (19.5) выполняется при любом n .

К выводу об отсутствии УФ-расходимостей в любом порядке теории возмущений можно прийти, вычисляя максимальный индекс вершины (см. гл. 2):

$$\omega^{\max} = \left(\sum_{i_{\text{внт}}} 2 \operatorname{Re} z \right) / 2 - 4 < -4.$$

Здесь суммирование ведется по всем внутренним линиям, исходящим из данной вершины. Из неравенства $\omega^{\max} < 0$ следует, что если УФ-расходимости отсутствуют в низших порядках теории возмущений, то они не могут появиться и в высших порядках. Поскольку во втором порядке по G расходимостей не остается, точно так же они устраняются и из любого порядка.

§ 20. Суперпропагатор для массивных частиц

В дальнейшем, в приложениях, нам часто придется вычислять интегралы, соответствующие петлевым диаграммам, состоящим из виртуальных скалярных частиц с ненулевой массой покоя. Покажем здесь, как это можно делать, используя СП-метод*.

Если интересоваться областью малых значений импульса p^2 и рассматривать взаимодействия с малыми значениями констант связи g , то от всего выражения для СП можно оставить лишь член с низшей степенью по g . Вычислим этот член.

* Вычисления СП массивных частиц проводились в работах [54, 55, 76, 90]. Поскольку расчеты эти довольно сложны, мы не будем их здесь подробно описывать, а ограничимся простым частным примером.

В нефизической области $p^2 < 0$ после перехода к евклидовой метрике и интегрирования по углам СП $\tilde{\Phi}_m(p)$ принимает вид

$$\tilde{\Phi}_m^{\text{рег}}(p) = (2\pi\kappa)^2 \frac{m}{|p|} \sum_0^{\infty} (-\kappa m^2)^n a(n+2) \int_{(m!)^2}^{\infty} dr \times \\ \times J_1\left(\frac{|p|}{m} r\right) \left(\frac{K_1(r)}{r}\right)^{n+2} r^2, \quad (20.1)$$

где m — масса скалярной частицы; $|p| = \sqrt{-p^2}$; $\kappa = (g/2\pi)^2$. Используя представление Зоммерфельда — Ватсона, запишем (20.1) в интегральной форме и спием регуляризацию:

$$\tilde{\Phi}_m(p) = \frac{(\pi\kappa)^2}{2i} \frac{m}{|p|} \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \frac{dz}{\sin \pi z} (\kappa m^2)^z a(z+2) \times \\ \times \int_0^{\infty} dr r^{-z} (K_1(r))^{z+2} J_1\left(\frac{|p|}{m} r\right). \quad (20.2)$$

В дальнейшем нас будет интересовать только тот член, который соответствует значению $n=0$ в (20.1). Остаток ряда играет роль регуляризующего множителя. Особенно отчетливо это качество проявляется в экспоненциальном случае, когда $a(n) = 1/n!$. Действительно, здесь СП (20.1) можно записать в виде

$$\tilde{\Phi}_m^{(\text{э})}(p) = (2\pi\kappa)^2 \frac{m}{|p|} \int_0^1 dt (1-t) \int_0^{\infty} dr \times \\ \times J_1\left(\frac{|p|}{m} r\right) K_1^2(r) \exp\left\{-\kappa m^2 t \frac{K_1(r)}{r}\right\}.$$

При вычислении функции $\tilde{\Phi}_m(p)$ «во втором порядке по κ » можно вместо (20.2) использовать более простое выражение

$$\bar{\Phi}_m(p) = \frac{(\pi\kappa)^2}{2i} \frac{m}{|p|} \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} dz \frac{(\kappa m^2)^z}{\sin \pi z} a(z+2) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} dr r^{-2z} K_1^2(r) J_1\left(\frac{|p|}{m} r\right),$$

где под знаками интеграла пропагаторы только двух частиц оставлены в «массивной» форме, а остальные взяты для безмассовых частиц. Такое упрощение не влияет на точность результата в интересующем нас низшем порядке по κ . Если использовать теперь представление для $J_1(|p|r/m)$ в виде ряда, то интегрирование по r удастся выполнить [82]. После этого формула для $\bar{\Phi}_m(p)$ принимает вид

$$\bar{\Phi}_m(p) = i V \bar{\pi} \left(\frac{\pi \kappa}{2}\right)^2 \sum_0^{\infty} \frac{\left(\frac{p^2}{4m^2}\right)^n}{n! (n+1)!} \int_L dz (\kappa m^2)^z \times \\ \times a(z+2) \frac{\Gamma(n-z) \Gamma(n-z+1) \Gamma(n-z+2)}{\sin \pi z \Gamma(n-z+3/2)}.$$

Контур L идет вокруг реальной положительной оси. В интеграле по z нас интересует только вычет в точке $z=0$, поскольку остальные вычеты приводят к членам более высокого порядка по κ . При $n=0$ имеет место вычет второго порядка, а при остальных значениях n — вычеты первого порядка. В результате получаем

$$\bar{\Phi}_m^{(2)}(p) = (\pi \kappa)^2 a(2) \left\{ \frac{V \bar{\pi}}{2} \sum_1^{\infty} \left(\frac{p^2}{4m^2}\right) \frac{(n-1)!}{\Gamma(n+3/2)} - \right. \\ \left. - \ln \frac{\kappa m^2}{4} - [\ln a(2)]' - 2C - 1 \right\},$$

где C — постоянная Эйлера. Сумму по n можно выразить через логарифм [54]. Тогда окончательный результат записывается в форме хорошо известного выражения, получающегося при вычислении скалярной петли обычными методами [1], с тем лишь отличием, что здесь появляется член $\kappa^2 \ln(\kappa m^2)$, свидетельствующий о неаналитической зависимости $\tilde{\Phi}_m(p)$ от константы связи κ . Это след регуляризующего влияния «хвоста» СП

(остатка ряда с $n > 2$):

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_m^{(2)}(p) = & -(\pi\kappa)^2 a(2) \{ \sqrt{1 - 4m^2/p^2} \ln(\sqrt{1 - 4m^2/p^2} + \\ & + 1) / (\sqrt{1 - 4m^2/p^2} - 1) + \ln \kappa m^2 / 4 + [\ln a(2)]' + 2C - 1 \}. \end{aligned} \quad (20.3)$$

Формула (20.3) справедлива в области $p^2 \leq 0$. Аналитическое продолжение в область $p^2 > 0$ не представляет труда. Выражения для функций $\tilde{\Phi}_m(p)$ и $\tilde{F}_m(p)$ во втором порядке по κ совпадают.

Выводы

Дано подробное описание метода построения фурье-преобразований для двухточечных функций Грина и амплитуд рассеяния в квантовых теориях поля с неполиномиальными лагранжианами. Показано, что СП-метод может использоваться для описания взаимодействий локализуемого и целокализуемого типов. Следует различать СП двух видов (Φ и F). Первые из них обладают спектральной функцией, выражающейся через знакпеременный ряд, в то время как спектральная функция вторых выражается через знакпостоянный ряд. Во втором порядке теории возмущения по G возникают СП только второго вида, как этого и следовало ожидать из условия унитарности S -матрицы (13.3). Если СП первого вида определяются в импульсном пространстве однозначно, то при определении СП второго вида возникает один произвольный параметр. Этот параметр можно зафиксировать, используя следующие свойства $\text{Re } F$: 1) она имеет конечный предел при $x^2 \rightarrow +0$; 2) в импульсном пространстве $\text{Re } \tilde{F}_0(p) \rightarrow 0$ при $p^2 \rightarrow +\infty$. Последнее качество, скорее, является условием, выделяющим однозначную часть в СП $\tilde{F}(p)$, поскольку неопределенный параметр η будет стоять всегда при целой функции от p^2 , растущей экспоненциально во всей плоскости p^2 и совпадающей с $\text{Im } \tilde{F}(p)$. (Здесь речь идет только о локализуемых взаимодействиях). Указанные качества $\text{Re } F$ позволили Леману и Полмайеру сформулировать принцип минимальных сингулярностей, позволяющий однозначно определять $\tilde{F}(p)$ и имеющий интересную физическую интерпретацию (выбор наиболее простой динамики, соответствующей данному классическому лагранжиану).

Для СП с безмассовыми частицами удается получить явные выражения в импульсном пространстве в виде хорошо сходящихся рядов. Если коэффициенты $c(n)$ выражаются через Γ -функции от n [например, $c^{(a)}(n) = g^{2n}/\Gamma(n+1)$], то СП в импульсном пространстве записывается в форме хорошо известных G -функций Майера [62]. Благодаря этому нетрудно определить асимптотическое поведение СП при больших значениях импульса. Укажем, что мнимые части СП для локализуемых взаимодействий всегда растут быстрее любого полинома в любом направлении в плоскости p^2 , в нелокализуемых взаимодействиях они могут убывать по некоторым направлениям. В случае массивных частиц явных выражений для СП в импульсном пространстве получить не удается.

Даны полезные интегральные представления для СП вида (19.1) и (19.2). Первое из них можно назвать z -представлением, второе — спектральным представлением. Первое представление помогает строить конечную теорию возмущений по главной константе связи G , второе — доказать унитарность S -матрицы в высших порядках по G . При этом необходимо использовать промежуточную регуляризацию, связанную с введением параметра γ под знак синуса или Γ -функции в подынтегральном выражении. Эта регуляризация имеет много общего с известной регуляризацией Паули — Вилларса. Только вместо введения фиктивных вспомогательных полей с индефинитной метрикой меняется метрика реальных полей, участвующих во взаимодействии. Петли с разным числом внутренних линий взаимно компенсируют свои расходимости, после чего регуляризация снимается. Сразу заметим, что снятие регуляризации не представляет труда при исследовании второго порядка теории возмущений по G , но является очень сложной проблемой при исследовании высших порядков [85, 86].

§ 21. Регуляризирующие свойства суперпропагаторов

После возникновения методов, позволяющих строить непротиворечивые квантовые теории поля с неполиномиальными лагранжианами, многие авторы пытались использовать такие модели при описании различных взаимодействий элементарных частиц. Помимо интенсивного изучения теорий с существенно нелинейными по полям лагранжианами, такими, как, например, киральные лагранжианы, или теорий, в которых полиномиальные лагранжианы с производными сводятся к неполиномиальным лагранжианам без производных [см. (7.3) и (8.6)], некоторые авторы пытались вводить существенно нелинейную зависимость от полей в обычные полиномиальные лагранжианы и с помощью такой операции получать затем конечную теорию поля [46, 49, 91]. Наиболее интересным примером такого рода, на наш взгляд, была попытка построить конечную электродинамику с учетом нелинейности в лагранжиане по гравитационному полю. Такие работы были выполнены Саламом с сотр. [92, 93].

Конечность результатов во всех упомянутых выше теориях достигается за счет использования специфических свойств СП — двухточечных функций Грина тех полей, которые неполиномиально входят в лагранжиан. Эти функции не только сами остаются конечными, что было показано в гл. 5, но, кроме того, могут регуляризовать полюсные расходимости, возникающие при T -упорядочении других полей. Таким образом, СП может выступать в качестве некоторого форм-фактора. В этой связи определенный интерес приобретает вопрос: каковы регуляризирующие возможности СП, встречающихся в различных теориях? Любую ли расходимость можно устранить с его помощью или лишь некоторые? Оказывается, при различных типах взаимодействий регуляризирующие возможности СП довольно сильно различаются.

Поясним это на простом примере. Рассмотрим СП $\bar{F}_0^i(p)$ для безмассовых полей [см. (19.1a)]. Пусть у нас имеется петлевая диаграмма с двумя вершинами. Тогда при добавлении к такой диаграмме еще одной линии, соответствующей СП (19.1a), в выражении для коэффициентной функции появится дополнительный четырехмерный интеграл по импульсам, а общая степень импульса в подынтегральном выражении изменится на $2(2+z)$. [Заметим, что в петлевой диаграмме с СП содержится и первоначальная диаграмма, поскольку вычету при $z=0$ в (19.1a) соответствует $\delta^{(4)}(p)$.] Теперь нетрудно видеть, что если $\text{Re } z$ отрицательна, то добавление СП-линии будет улучшать поведение подынтегрального выражения при больших значениях импульса. Регуляризация будет тем сильнее, чем меньше можно сделать $\text{Re } z$, т. е. чем дальше влево можно сдвинуть контур интегрирования в (19.1a). Возможность такого сдвига контура определяется видом коэффициентов $c(n)$, т. е. видом взаимодействия. Если функция $c(z)$, восстановленная по значениям $c(n)$, не будет иметь особенностей в левой полуплоскости $-\infty < \text{Re } z \leq 0$ (вообще говоря, без учета бесконечной точки слева), то контур интегрирования можно сдвигать неограниченно далеко. В этом случае СП может регуляризовать полюсную расходимость любой степени.

Именно такая ситуация возникает при экспоненциальном взаимодействии. Действительно, в этом случае функция $c(z)$ принимает вид

$$c^{(g)}(z) = g^{2z} / \Gamma(z+1) = -(g^{2z} / \pi) \sin(\pi z) \Gamma(-z).$$

Эта функция не имеет особенностей в левой полуплоскости $-\infty < \text{Re } z \leq 0$ за исключением бесконечно удаленной точки. Поэтому СП для экспоненциального взаимодействия может регуляризовать любую степенную расходимость по импульсу.

Если же функция $c(z)$ обладает какими-либо особенностями в левой полуплоскости z , то контур интегрирования в (19.1a) можно сдвигать лишь до ближайшей из них. Это ограничивает регуляризующие свойства СП. Подобная ситуация имеет место, например, в теориях с лагранжианами нелокализуемого типа [см. п. 7 табл. 1 и (14.5), где $c(z) = \kappa^{2z+1} \Gamma(2z+2)$ обладает особенностью при $z=-1$].

Покажем на примере, как СП регуляризует полюсную расходимость. Для этого рассмотрим произведение n -й степени пропагатора безмассовой скалярной частицы и экспоненциального СП:

$$[-i\Delta_0^c(x)]^n i \sum_0^{\infty} (g^{2k}/k!) [i\Delta_0^c(x)]^k.$$

Заменим сумму интегралом Зоммерфельда — Ватсона и сдвинем в нем контур интегрирования влево так, чтобы реальная часть общей степени пропагатора Δ_0^c была меньше двух (рассматриваем область $x^2 < 0$):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\alpha+i\infty}^{-\alpha-i\infty} dz \frac{g^{2z} (-i\Delta_0^c(x))^{z+n}}{\sin \pi z \Gamma(z+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-n+1+\alpha+i\infty}^{-n+1+\alpha-i\infty} dz \frac{g^{2z} (-i\Delta_0^c(x))^{z+n}}{\sin \pi z \Gamma(z+1)} = \\ &= \frac{1}{2} (-g^2)^{1-n} \int_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty} dz' \frac{g^{2z'} (-i\Delta_0^c(x))^{z'+1}}{\sin \pi z' \Gamma(z' - n + 2)}. \end{aligned}$$

Здесь $0 < \alpha < 1$ и $z' = z + n - 1$. Переходя к импульсному пространству, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2i} (-1)^n \frac{g^{2(1-n)}}{p^2 + i\epsilon} \int_L dz \frac{\exp(-i\pi z)}{\sin^2 \pi z} \frac{[\kappa(p^2 + i\epsilon)]^z}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)\Gamma(z-n+2)} = \\ &= \frac{g^{2(1-n)}}{p^2 + i\epsilon} \sum_1^{n-2} \frac{\Gamma(n-k-1)}{\Gamma(k)\Gamma(k+1)} [\kappa(p^2 + i\epsilon)]^k + (-1)^n g^{2(1-n)} (p^2 + \\ &+ i\epsilon)^{-1} \sum_{n-1}^{\infty} \frac{[-\kappa(p^2 + i\epsilon)]^k}{k!(k-1)!(k-n+1)!} \{ \ln [\kappa(p^2 + i\epsilon) \exp(-i\pi)] - \\ & - \psi(k+1) - \psi(k) - \psi(k-n+2) \}, \end{aligned}$$

где $\kappa = g^2/(4\pi^2)$; $\psi(k)$ — пси-функция Эйлера; контур L изображен на рис. 6.

Итак, мы видим, что экспоненциальные взаимодействия имеют много преимуществ по сравнению с другими взаимодействиями, поскольку: 1) можно добиться вы-

полнения принципа микропричинности в теории; 2) легко вводится нормальное упорядочение в лагранжиане; 3) можно использовать принцип минимальных сингулярностей для однозначного определения СП $\bar{F}(p)$; 4) СП, возникающие в таких теориях, обладают сильными регуляризирующими свойствами.

§ 22. Модель с псевдовекторной связью скалярных и спинорных полей

Вернемся к изучению лагранжиана (7.3), рассмотренного в гл. 2:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(\psi, \varphi) + g : \bar{\psi}(x) \gamma^5 \gamma^\nu \psi(x) \partial_\nu \varphi(x) :, \quad (22.1)$$

где

$$\mathcal{L}_0(\psi, \varphi) = i : \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial} \psi : + \frac{1}{2} : [\partial_\nu \varphi(x)]^2 : - m_0 \bar{\psi} \psi; \quad (22.2)$$

ψ — спинорное поле с массой m_0 ; φ — псевдоскалярное безмассовое поле.

С помощью унитарного преобразования Дайсона [61] для спинорного поля $\psi'(x) = \exp\{-ig\gamma^5\varphi(x)\}\psi(x)$ можно избавиться от производной в лагранжиане взаимодействия (22.1), после чего этот лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(\psi', \varphi) - m : \bar{\psi}'(x) \{\exp[-i2g\gamma^5\varphi(x)] - 1\} \psi'(x) : \quad (22.3)$$

Если знак нормального упорядочения в (22.3) считать относящимся ко всем полям, то между массами m_0 и m возникает следующая связь*:

$$m = m_0 \exp\{-i2g^2\Delta_0^c(0)\}. \quad (22.4)$$

Далее будем считать лагранжиан (22.3) нормально упорядоченным, а массу m — конечной величиной. В работе [94] показано, что лагранжианы (22.1) и (22.3) приводят к полностью эквивалентным теориям.

* В формуле (22.4) вместо $\Delta_0^c(0)$ следовало бы писать $\Delta_0^{(-)}(0)$. Но поскольку на световом конусе эти функции имеют одинаковые главные особенности вида $[i(2\pi)^2 x^2]^{-1}$, то вместо $\Delta_0^{(-)}(0)$ всегда можно писать $\Delta_0^c(0)$.

Теория возмущений будет строиться по «эффективной» константе (mg), возникающей в (22.3) при разложении экспоненты и вычитании из нее единицы. В каждом порядке по (mg) учитываются все порядки по g . В окончательных выражениях, если считать константу g малой, можно будет ограничиться членами с низшими степенями по g . Во втором порядке по (mg) возникает только СП типа F :

$$\exp\{-i(2g)^2\Delta^c_0(x)\},$$

в то время как в третьем порядке по (mg) появляется и СП типа Φ [52, 53, 94]:

$$\exp\{i(2g)^2\Delta^c_0(x)\}.$$

Не останавливаясь подробно на изучении этой модели, ограничимся проведением одного расчета, характерного для такой теории. А именно, покажем, как вычисляется поправка к массе спинорной частицы во втором порядке теории возмущений по (mg) [89].

Спинорная функция Грина $G(x, x')$ в двухвершинном приближении имеет вид [см. (8.7)]:

$$G(x, x') = S^c(x - x') + m^2 \int \int dy^4_1 d^4_2 y_2 S^c(x - y_1) \times \\ \times S^c(y_1 - y_2) \{ \exp[-i(2g)^2\Delta^c_0(y_1 - y_2)] - 1 \} S^c(y_2 - x'),$$

где $\Delta^c_0(y_1 - y_2)$ и $S^c(x - x')$ даны в (8.8). Пропагатор спинорной частицы $S^c(x - x')$ можно записать в форме:

$$S^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \exp(ipx) (m + \hat{p}) / (m^2 - p^2 - i\epsilon).$$

В импульсном пространстве функция G выглядит так:

$$\tilde{G}(p) = (m - \hat{p} - i\epsilon)^{-1} - (m - \hat{p} - i\epsilon)^{-1} \Sigma(\hat{p}) (m - \hat{p} - \\ - i\epsilon)^{-1} \approx (m + \Sigma(p) - \hat{p} - i\epsilon)^{-1},$$

где массовый оператор $\Sigma(p)$ равен [см. (8.7)]

$$\Sigma(p) = -m^2 \int d^4x \exp(ipx) S^c(x) \{ \exp[-i(2g)^2\Delta^c_0(x)] - 1 \}.$$

Используя представление (19.1) для СП, функцию $\Sigma(p)$ можно привести к виду

$$\Sigma_\gamma(p) = \frac{\kappa m^2}{2\pi^2} \int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} dz \operatorname{ctg} \pi z (\kappa \exp(-i\pi))^z \frac{\Gamma(-\gamma z)}{\Gamma(z)\Gamma(z+2)} f(p, z),$$

(22.5)

где $f(p, z) = \int d^4q (m + \widehat{q}) / \{(q^2 - m^2 + i\varepsilon) \times$
 $\times [(p - q)^2 + i\varepsilon]^{1-z}\}; \kappa = (g/2\pi)^2.$

Покажем теперь, как вычисляется интеграл в функции $f(p, z)$. Если считать, что контур по z пересекает реальную ось около точки -1 ($\text{Re } z = -1 + \delta$, где δ — малая положительная величина), то интеграл в $f(p, z)$ будет сходящимся. Для его вычисления можно воспользоваться формулами:

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dt \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{[at + b(1-t)]^{\alpha+\beta}}; \quad (22.6)$$

$$\int \frac{d^4q}{(q^2 - 2qp + m^2 - i\varepsilon)^\alpha} = i\pi^2 \frac{\Gamma(\alpha - 2)}{\Gamma(\alpha)} (m^2 - p^2 - i\varepsilon)^{2-\alpha}; \quad (22.7)$$

$$\int \frac{d^4q q^\nu}{(q^2 - 2qp + m^2 - i\varepsilon)^\alpha} = i\pi^2 p^\nu \frac{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)^{2-\alpha}}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}. \quad (22.8)$$

С помощью формулы (22.6) для $f(p, z)$ напомним следующее представление:

$$f(p, z) = (1 - z) \int_0^1 dt t^{-z} \int d^4q (m + \widehat{q}) / [q^2 - 2qpt +$$

 $+ m^2(2t - 1) + i\varepsilon]^{2-z},$

после чего интегралы по импульсам легко берутся [см. формулы (22.7) и (22.8)]:

$$f(p, z) = -i \frac{\pi^2}{z} \int_0^1 dt t^{-z} (m + \widehat{p}t) [-m^2(1-t)^2 + i\varepsilon]^z.$$

Здесь выражение в квадратных скобках с учетом $i\varepsilon$ перепишем в виде

$$[-m^2(1-t)^2 + i\varepsilon]^z = \exp(i\pi z) [m(1-t)]^{2z}.$$

Тогда интегралы по t легко выразятся через Γ -функции [82]:

$$f(p, z) = -i\pi^2 [m^2 \exp(i\pi)]^z \frac{\Gamma(2-z)\Gamma(1+2z)}{z\Gamma(2+z)} \times$$

 $\times \left[\frac{m}{1-z} + \frac{\widehat{p}}{2+z} \right]. \quad (22.9)$

Поскольку нас интересует поправка к массе спинорной частицы, то значение $\Sigma(p)$ необходимо определять в точке $p^2=m^2$. Это условие уже использовалось при получении выражения (22.9). Можно также считать, что $p=m$, а это еще больше упрощает выражение для $f(p, z)$:

$$f(p, z) = -i\pi^2 3m [m^2 \exp(i\pi)]^z \Gamma(1-z) \times \\ \times \Gamma(1+2z) / [z\Gamma(3+z)]. \quad (22.9a)$$

Подставляя теперь (22.9a) в (22.5), деформируя контур интегрирования по z так, чтобы он шел около реальной положительной оси, и устремляя γ к единице, получаем

$$\Sigma(m) = i \frac{3}{2} \pi \kappa m^3 \int_{L'} dz \frac{\cos \pi z}{\sin^2 \pi z} (\kappa m^2)^z \frac{\Gamma(1-z)\Gamma(1+2z)}{\Gamma^2(1+z)\Gamma(2+z)\Gamma(3+z)}.$$

Этот интеграл легко вычисляется. Не будем выписывать здесь полного выражения для $\Sigma(m)$ ввиду его сложности, а ограничимся членом низшего порядка по κ , считая эту константу малой:

$$\Delta m^{(1)}/m = \Sigma^{(1)}(m)/m = (3/2) \kappa m^2 [\ln(\kappa m^2) - \psi(1) - \\ - \psi(2) - \psi(3)] = (3/2) \kappa m^2 [\ln(\kappa m^2) + 3C - 5/2].$$

Здесь C — константа Эйлера; ψ — пси-функция Эйлера.

Если предположить, что лагранжиан (22.1) описывает реальное сильное взаимодействие нуклонов с мезонами, то константа g будет связана с константой \bar{g} , входящей в (6.9), соотношением $\bar{g} = 2M_N g$, где M_N — масса нуклона, $\bar{g}^2/4\pi \approx 14,7$ — безразмерная константа сильного взаимодействия. Тогда κM_N^2 приближенно равно единице и поправка $\Delta M^{(1)}$ равна массе самого нуклона.

§ 23. Слабое взаимодействие нейтрального векторного мезона со спинорным полем

В 1968 г. появилась работа Ли [95], в которой он рассмотрел неперенормируемую теорию с не сохраняющим четность слабым взаимодействием нейтрального векторного мезона со спинорным полем. В этой работе Ли пытался предложить рецепт для устранения из теории наиболее сингулярных членов. Подход его заключался в суммировании максимально расходящихся членов в ряду теории возмущений и дальнейшем устранении их с помощью бесконечных перенормировок. Покажем, как с использованием нашего метода можно в этой же тео-

рии прийти к конечным результатам более последовательно и просто. В общих чертах будет показано, как поставленная здесь задача сводится к задаче, уже разобранный в § 22. Более подробные вычисления можно найти в работе [96].

Лагранжиан слабого взаимодействия записывается в форме

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = G : \bar{\psi}(x) \gamma^{\nu} (a - \gamma^5 b) \psi(x) W_{\nu}(x) :, \quad (23.1)$$

где G — константа слабого взаимодействия; ψ — спинорное поле; W_{ν} — векторное мезонное поле с массой m_W ; a, b — параметры (их обычно выбирают равными: $a=1, b=-1$). Чтобы облегчить анализ УФ-расходимостей, в этой модели Ли использовал преобразование Штюкельберга для векторных полей $W_{\nu}(x)$ [95]:

$$W_{\nu}(x) = \varphi_{\nu}(x) + m_W^{-1} \partial_{\nu} \theta(x).$$

Здесь $\theta(x)$ — скалярное поле; $\varphi_{\nu}(x)$ — векторное поле с пропагаторами

$$\Delta_{\mu\nu}^{(\varphi)}(p) = g_{\mu\nu} / (m_W^2 - p^2 - i\epsilon); \quad \Delta^{(\theta)}(p) = 1 / (m_W^2 - p^2 - i\epsilon).$$

Спин-нулевая часть поля $\varphi_{\nu}(x)$ имеет отрицательную метрику. Появление отрицательной метрики могло бы привести к нарушению унитарности S -матрицы. Но этого не случается по следующим причинам.

Из уравнений движения для полей $\varphi_{\nu}(x)$ и $\theta(x)$ следует, что всегда должно выполняться равенство

$$(\square - m_W^2) (\partial^{\nu} \varphi_{\nu}(x) + m \theta(x)) = 0.$$

Это приводит к тому, что все радиационные процессы, вовлекающие нефизическую бесспиновую компоненту поля $\varphi_{\nu}(x)$, полностью компенсируются соответствующими процессами, вовлекающими θ -мезоны. Поэтому если ограничиться реакциями, в которых начальные и конечные состояния не содержат бесспиновых компонент φ_{ν} -мезонов и θ -мезонов, то результирующая S -матрица будет унитарной (более подробно об этом см. в работе [95]).

После преобразования Штюкельберга та часть лагранжиана (23.1), которая содержит поле φ_{ν} , приводит

к перенормируемой теории подобие квантовой электродинамике, поскольку пропагатор поля φ_ν не содержит импульсных переменных в числителе [напомним, что пропагатор векторного поля W_ν содержит в числителе квадратичный полином по импульсам

$$\Delta_{\mu\nu}^{(W)}(p) = (g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / m_W^2) / (m_W^2 - p^2 - i\epsilon).$$

Оставшаяся часть лагранжиана (23.1) содержит связь с производной и преобразованием Дайсона ее опять можно привести к неполиномиальной форме

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}^{(2)}(x) = \frac{G}{m_W} : \bar{\psi}(x) \gamma^\nu (a - \gamma^5 b) \psi(x) \partial_\nu \theta(x) :.$$

Преобразование Дайсона на этот раз выглядит несколько иначе:

$$\psi'(x) = \exp\{-iG(a - \gamma^5 b)\theta(x)/m_W\} \psi(x).$$

После применения преобразований Штюкельберга для векторных полей и Дайсона для спинорных полей общий лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_{\text{вз}}(x), \quad (23.2)$$

где

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{2} [: (\partial_\nu \varphi_\mu)^2 : + : (\partial_\nu \theta)^2 : - m_W^2 (: \varphi_\mu^2 : + : \theta^2 :)] -$$

$$- i : \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial} \psi : + m : \bar{\psi} \psi :,$$

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x) = G : \bar{\psi} \gamma^\nu (a - \gamma^5 b) \psi \varphi_\nu : -$$

$$- m : \bar{\psi} \left\{ \exp \left[-i2b\gamma^5 \frac{G}{m_W} \theta \right] - 1 \right\} \psi :.$$

Заметим, что, как и в § 22, масса спинорного поля m , входящая в лагранжиан (23.2), конечна в отличие от массы, входившей в первоначальный лагранжиан до применения к нему преобразования Дайсона и последующего нормального упорядочения экспоненциального взаимодействия.

Таким образом, мы пришли к теории, в которой будут встречаться диаграммы трех типов. Неполиномиальная часть лагранжиана (23.2) приведет к появлению в теории СП экспоненциального вида. В § 22 было рас-

смотрено такое взаимодействие, и мы убедились в том, что построенная на его основе теория не приводит к УФ-расходимостям. Оставшаяся часть взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}^{(1)}(x) = G : \bar{\psi}(x) \gamma^{\nu} (a - \gamma^5 b) \psi(x) \varphi_{\nu}(x) :$$

приводит к ренормируемой теории. Расходимости, возникающие при рассмотрении диаграмм с такими вершинами, можно устранить с помощью перенормировки конечного числа наблюдаемых величин.

Наконец, в диаграммах смешанного типа, где одновременно присутствуют вершины, связанные с полиномиальной и неполиномиальной частями лагранжиана взаимодействия, СП могут выступать в роли регулирующих форм-факторов.

§ 24. Электродинамика с учетом гравитации

В 1970 г. Саламом совместно с его сотрудниками был выпущен ряд работ, посвященных построению гравитационно-модифицированной электродинамики, приводящей к конечным перенормировкам наблюдаемых величин [92, 93, 97]. Это достигалось учетом неполиномиальности гравитационного взаимодействия и применением СП-методов при проведении расчетов.

К проблеме построения лагранжианов взаимодействия с учетом гравитационных полей мы еще вернемся. Здесь же рассмотрим взаимодействие в той форме, в которой оно исследовалось Саламом с сотрудниками. Они использовали экспоненциальное тензорное представление для эйнштейновского метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$ и пытались построить электродинамику с конечными перенормировками, градиентно-инвариантную в низших порядках.

Не вдаваясь в детали расчетов, попытаемся в общих чертах продемонстрировать основную идею этих работ на примере вычисления электромагнитной поправки к массе электрона.

Гравитационно-модифицированный лагранжиан для квантовой электродинамики можно записать в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \mathcal{L}_{\text{гп}}(x) - g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} F_{\mu'\nu'}(x) F_{\mu\nu}(x) (4 \det r(x))^{-1} + \\ & + [i r^{\mu\alpha}(x) \bar{\psi}(x) \gamma_{\alpha} (\nabla_{\mu} - ie A_{\mu}) \psi(x) - \\ & - m_e \bar{\psi}(x) \psi(x)] (\det r(x))^{2W_{\psi} + 1}. \end{aligned}$$

Здесь $r^{\mu a}(x)$ — релятивистская тетрада, связанная с метрическим тензором соотношением $g_{\alpha\beta}(x) = r_{\alpha a}(x)r_{\beta b}(x)g^{ab}$. В экспоненциальной параметризации она выражается через $\exp\{\kappa\beta_{\lambda\tau}h^{\lambda\tau}(x)\}$, где $\beta_{\lambda\tau}$ — 4×4 -псевдосимметрическая матрица; $h^{\lambda\tau}(x)$ — тензорное квантовое поле гравитона; ∇_{μ} — ковариантная производная; $F_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x)$; W — параметр; $\mathcal{L}_{\text{гр}}(x)$ — лагранжиан гравитационного поля.

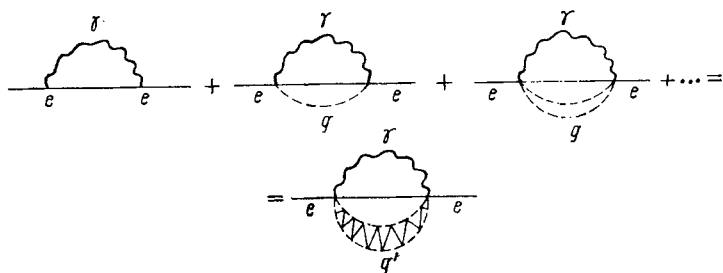


Рис. 10. Диаграммы, соответствующие собственной массе электрона (δm_e), в приближении однофотонного обмена с учетом гравитационного суперпропэгатора (обмен любым числом гравитонов):

γ — фотон; e — электрон; g — гравитон; g' — гравитационный СП

Салам с сотрудниками сначала находит градиентно-инвариантное выражение для двухточечной функции фотона в форме СП (с учетом гравитационных полей). Затем эта функция используется для вычисления электромагнитного сдвига массы электрона.

Чтобы в общих чертах продемонстрировать, как это происходит, рассмотрим лагранжиан, описывающий взаимодействие электронов с фотонами и гравитонами, в упрощенной форме:

$$\bar{\mathcal{L}}(x) = : \partial_{\nu} (\exp [\kappa h(x)]) \partial^{\nu} (\exp [\kappa h(x)]) : + \\ + : \bar{\psi}(x) \exp [\kappa h(x)] [\gamma^{\nu} (\partial_{\nu} - ieA_{\nu}(x)) - m_e] \psi(x) :.$$

Здесь $A_{\nu}(x)$ — поле фотона; $h(x)$ — поле гравитона, где для простоты не учитывается спин; $\psi(x)$ — поле электрона; κ — гравитационная постоянная, равная примерно $0,22 \cdot 10^{-21} m_e^{-1}$ *. Диаграммы, описывающие собствен-

* $\kappa^2 = 8\pi G_N / c^4$; G_N — постоянная Ньютона; c — скорость света.

ную энергию электрона, даны на рис. 10. Основной диаграммой является та, которая соответствует однофотонному обмену; все остальные соответствуют тому же процессу, но с участием все большего и большего числа гравитонов. Пренебрежение этими обменами гравитонов равносильно пренебрежению кривизной пространственно-временной метрики.

Массовый оператор электронов с учетом экспоненциального взаимодействия с гравитационным полем имеет вид (см. рис. 10):

$$\begin{aligned} \Sigma(x) &= -ie^2 \gamma_\mu S^c(x) \gamma_\nu g^{\nu\mu} D_0(x) \exp\{-i\kappa^2 \Delta_{\text{гр}}^c(x)\} = \\ &= (e/\kappa)^2 \gamma_\nu S^c(x) \gamma^\nu \sum_1^\infty \{[-i\kappa^2 \Delta_0^c(x)]^n / \Gamma(n)\}, \end{aligned}$$

где $S^c(x)$ — пропагатор электрона; $g^{\mu\nu} D_0(x)$ — пропагатор фотона; $\Delta_{\text{гр}}^c(x)$ — пропагатор гравитона. Два последних пропагатора выражаются через пропагатор скалярной безмассовой частицы.

Вновь используя представление (19.1), запишем для оператора Σ следующее выражение в импульсном пространстве:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_\gamma(p) &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} dz \operatorname{ctg} \pi z \exp(-i\pi z) \times \\ &\times \left(\frac{\kappa}{4\pi}\right)^{2z} \frac{\Gamma(-\gamma z)}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)} \int d^4 q \frac{(\hat{q} - 2m)}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)[(p-q)^2 + i\epsilon]^{1-z}}. \end{aligned}$$

Интеграл по $d^4 q$ очень похож на тот, который уже встречался в выражении (22.5). Вычисляя его при значении $p^2 = m^2$ и переходя к пределу $\gamma = 1$, получаем

$$\tilde{\Sigma}(p) = -i \frac{e^2 m}{16\pi} \int_{L'} dz \frac{\cos \pi z}{\sin^2 \pi z} \frac{(z+3)(\kappa m/4\pi)^{2z}}{\Gamma^2(z+1) \Gamma(z+3)},$$

где L' — контур, окружающий реальную положительную ось. Ввиду малого значения гравитационной константы можно ограничиться членом, соответствующим низшему порядку по κ . Поэтому берем вычет только в точке $z=0$ и получаем

$$\Delta m_e/m_e \approx (3\alpha/4\pi) \ln(4\pi/\kappa m_e)^2 \quad (\alpha = e^2/4\pi = 1/137).$$

Здесь ψ -функции отброшены ввиду их малости по сравнению с логарифмом. Это и есть основной результат, полученный Саламом.

Теперь кратко опишем те заключения, к которым приходит Салам на основании полученной формулы [98]. Во-первых, бесконечность, содержащаяся в выражении для собственной массы электрона в обычной электродинамике, здесь регуляризована, причем возникающий импульс обрезания соответствует шварцшильдовскому радиусу электрона $R_{ш}$:

$$\begin{aligned} \delta m_e &\approx (3\alpha/4\pi) m_e \ln [4\pi / (\kappa m_e)]^2 \approx \\ &\approx (3\alpha/4\pi) m_e \ln [1 / (R_{ш} m_e)]^2. \end{aligned}$$

Во-вторых, если подставить в эту формулу численные значения констант, то получится $\delta m_e / m_e \approx 2/11$. Поэтому в низшем порядке по α гравитационно-модифицированная электродинамика приводит к результату, показывающему, что существенная часть собственной массы электрона δm_e имеет электромагнитное происхождение. Тем самым включение в рассмотрение гравитации не только позволяет получить конечный результат для δm_e , но и дает новые аргументы в пользу предположения Лоренца о том, что вся собственная масса электрона может быть результатом таких взаимодействий. Действительно, если учитывать все высшие порядки по α и многофотонные обмены (с эффективным параметром разложения $\sim \alpha \ln \kappa m_e$), то можно прийти к результату

$$\delta m_e / m_e = \sum_n a_n |\alpha \ln \kappa m_e|^n = 1,$$

т. е. $\delta m_e = m_e$. Другими словами, возможно, существует фундаментальное соотношение между константами α , κ и m_e , которое имеет форму $1 = \delta m_e / m_e = F(\alpha \ln [4\pi / (\kappa m_e)])$ и где функция F — степенной ряд с первым членом разложения, равным $(3\alpha/4\pi) \ln [4\pi / (\kappa m_e)]$.

Выводы

В этой главе рассмотрены простые модели неполиномиальных теорий, описывающие взаимодействие четырех типов — сильные во втором разделе, слабые — в третьем и электромагнитные с учетом гравитации — в четвертом. Показано, что если лагранжиан имеет неполиномиальную форму хотя бы по одному из взаимодействующих

полей, то СП-метод позволяет построить конечную теорию. Особенно сильными регуляризирующими свойствами обладают СП, возникающие в теориях с экспоненциальными лагранжианами. Сильные регуляризирующие свойства экспоненциальных СП позволяют, в частности, использовать их для регуляризации даже обычных ренормируемых теорий, вводят туда неполиномиальное взаимодействие с еще одним полем (см. пример электродинамики с учетом гравитации, где перенормировки становятся конечными). Лагранжианы нелокализуемого вида могут дать СП, которые лишь сами конечны, но регуляризуют не все полюсные расходимости, возникающие в теории от наличия других полей, входящих полиномиально в лагранжиан взаимодействия.

В следующих главах будет показано, что нелинейная реализация динамических симметрий приводит именно к экспоненциальным лагранжианам.

После поверхностного рассмотрения модельных примеров перейдем к более детальному изучению возможных физических приложений описанных выше методов к реальным вариантам сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий квантовых полей.

МЕТОД ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ ЛАГРАНЖИАНОВ

§ 25. Общие замечания

До сих пор речь шла о построении квантовой теории поля с неполиномиальными лагранжианами. Далее будут изложены методы построения самих лагранжианов в современной физике элементарных частиц.

Каждое взаимодействие элементарных частиц обладает своей динамической симметрией (см. гл.1). Эта симметрия получается расширением группы алгебраической симметрии, связанной с законами сохранения. Такое расширение, как правило, сопровождается введением частиц с нулевой массой, называемых голдстоуновскими.

В настоящей главе изложен общий метод построения лагранжианов по группе динамической симметрии. Этот метод получил название *метода феноменологических лагранжианов*. Он возник вначале как простой способ описания результатов алгебры токов. Построение лагранжианов в этом методе сводится к нахождению нелинейных реализаций групп. Общая теория нелинейных реализаций была разработана Э. Картаном [99]. В физике элементарных частиц такой подход был впервые использован Д. В. Волковым [13, 14] и Калланом, Коулменом, Весом и Зумино [11, 12]. Нелинейные реализации позволяют воспроизвести все следствия группы динамической симметрии по ее алгебре. Внутренний механизм возникновения голдстоуновских частиц остается при этом вне области рассмотрения.

В изложении метода феноменологических лагранжианов будем следовать пионерским работам Картана [99]. Основная идея метода заключается в отождествлении голдстоуновских полей с теми параметрами динамической группы, которые соответствуют генераторам, не связанным с законами сохранения. Изучение геометрической структуры пространства указанных параметров позволяет получить явный вид инвариантов группы, т. е. лагранжианов, и сохраняющиеся токи.

В § 26 дается общий метод исследования римановых пространств с помощью ортогональных реперов Картана [100, 101]. В § 27 этот метод применяется для исследования групповых пространств, т. е. пространств групповых параметров [99].

В § 28 излагается метод феноменологических лагранжианов [11—14].

§ 26. Риманова геометрия в ортогональном репере

Метод Картана. Основную идею метода Картана рассмотрим сначала для плоского евклидова пространства n измерений. Присоединим к каждой точке \mathbf{M} пространства ортогональный единичный репер $\mathbf{I}_i(\mathbf{M})$. Положение репера в точке $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$ задается относительно репера, помещенного в бесконечно близкую точку \mathbf{M} :

1) координатами инфинитезимального смещения начала репера $d\mathbf{M}$

$$d\mathbf{M} = \omega^i \mathbf{I}^i(\mathbf{M}); \quad (26.1)$$

2) инфинитезимальным поворотом каждого из единичных векторов относительно репера в точке \mathbf{M}

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{I}_i(\mathbf{M} + d\mathbf{M}) &= \mathbf{I}_i(\mathbf{M}) + d\mathbf{I}_i; \\ d\mathbf{I}_i &= \omega^j {}_i \mathbf{I}_j(\mathbf{M}). \end{aligned} \right\} \quad (26.2)$$

Формы ω^i и $\omega^i{}_j$ представляют собой движение ортогональных реперов. Они зависят от выбора точки \mathbf{M} и выражаются линейными дифференциальными формами от координат пространства x^h : $\omega = a_h(x) dx^h$, при этом предполагаются непрерывность и дифференцируемость $a_h(x)$. Здесь возникает основная проблема: могут ли произвольно заданные формы ω^i и $\omega^i{}_j$ представлять движение ортогонального репера в определенном пространстве? Оказывается, для того чтобы указанные формы описывали произвольное движение ортогональных реперов в заданном пространстве, необходимо и достаточно, чтобы эти формы удовлетворяли уравнениям Мауэра — Картана, которые полностью определяют структуру пространства и называются также *уравнениями структуры*.

Вывод уравнений Мауэра — Картана. Дадим определения некоторых важных операций. Пусть имеются две формы Картана

$$\omega(d) = a_i dx^i; \quad \theta(\delta) = b_i \delta x^i.$$

Внешним произведением форм ω , θ называется антисимметризованное произведение

$$\omega(d)\theta(\delta) - \theta(d)\omega(\delta) = (a_i b_k - b_i a_k) dx_i \delta x_k,$$

которое обозначается * $[\omega(d), \theta(\delta)]$. Внешним дифференциалом формы ω называется выражение

$$\begin{aligned} \omega' &= d\omega(\delta) - \delta\omega(d) \equiv da_i \delta x^i - \delta a_i dx^i \equiv \\ &\equiv (\partial a_i / \partial x^k - \partial a_k / \partial x^i) dx^k \delta x^i. \end{aligned}$$

Если обыкновенное дифференцирование соответствует сдвигу вдоль одной из осей координат, то внешнее диф-

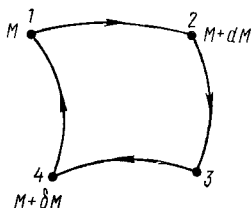


Рис. 11. Замкнутый цикл внешнего дифференцирования: $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1)$

ференцирование соответствует обходу по замкнутому бесконечно малому циклу, изображенному на рис. 11. Внешний дифференциал равен разности путей $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) - (1 \rightarrow 4 \rightarrow 3)$ из точки 1 в точку 3. Если форма Картана является полным дифференциалом: $\omega \equiv d\psi \equiv (\partial a / \partial x^k) dx^k$, то внешнее дифференцирование этой формы приводит к тождественному нулю (теорем Пуанкаре [100]). Это происходит в силу очевидного равенства

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^k}.$$

Структурные уравнения Картана получают внешним дифференцированием уравнений (26.1), (26.2). Дифференцирование левых частей этих уравнений приводит к нулю в силу теоремы Пуанкаре. Дифференцируя правые части (26.1), (26.2), получаем соответственно

$$0 = [d\mathbf{I}_i, \omega^i(\delta)] + \mathbf{I}_i(\omega^i)';$$

$$0 = [d\mathbf{I}_j, \omega^j_i(\delta)] + \mathbf{I}_j(\omega^j_i)';$$

* Часто используется также обозначение $\omega \wedge \theta = \omega(d)\theta(\delta) - \theta(d)\omega(\delta)$.

Подставляя (26.2) в полученные уравнения, находим

$$0 = I_i \{(\omega^i)' + [\omega^i_j, \omega^j]\}; \quad 0 = I_j \{(\omega^j)' + [\omega^j_k, \omega^k_i]\}.$$

Отсюда из линейной независимости I_i следуют структурные уравнения евклидова пространства:

$$\begin{aligned} (\omega^i)' + [\omega^i_j, \omega^j] &= 0; \\ (\omega^j)' + [\omega^j_k, \omega^k_i] &= 0. \end{aligned} \quad (26.3)$$

В евклидовом пространстве репер, связанный с точкой M при обходе по контуру, изображенному на рис. 11, не изменяется.

Как известно, в общем случае римановой геометрии репер при обходе по бесконечно малому циклу претерпевает движение *

$$\begin{aligned} (\omega^i)' + [\omega^i_k \omega^k] &= \Omega^i; \\ (\omega^j)' + [\omega^j_k \omega^k_i] &= \Omega^j_i. \end{aligned} \quad (26.3a)$$

Дополнительное движение, которое возвратило бы репер в исходное положение, определяет кручение и кривизну риманова пространства. Кручение задается сдвигом $\Omega^i = -T^i_{kh} [\omega^k \omega^h] / 2$, который возвратил бы начало репера в исходное положение, а кривизна риманова пространства — дополнительным вращением репера в исходное положение на величину $\Omega^j_i = -R^j_{ikh} [\omega^k \omega^h] / 2$. Здесь T^i_{kh} и R^j_{ikh} — антисимметричные по индексам k, h постоянные коэффициенты, называемые тензорами кручения и кривизны соответственно. Структурные уравнения Картана для рассматриваемого пространства ** имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (\omega^i)' + [\omega^i_j, \omega^j] &= -T^i_{jk} [\omega^j \omega^k] / 2; \\ (\omega^j)' + [\omega^j_k \omega^k_i] &= -R^j_{ikl} [\omega^k \omega^l] / 2. \end{aligned} \right\} \quad (26.4)$$

Нормальные координаты. Рассмотрим риманово пространство с нулевым кручением $T=0$ и $R \neq 0$. Любая точка M в достаточно малой окрестности точки O лежит на определенной геодезической линии, выходящей из точки O . Пусть a^i — направляющие косинусы ее кас-

* Группа, которая порождается отображениями вектора при всевозможных замкнутых путях обхода, начинающихся и кончающихся в одной точке, называется *группой голономии*.

** Рассматриваемые пространства называются *пространствами аффинной связности*, к каждой точке которых отнесен декартов репер и задан закон, позволяющий определить положение двух бесконечно близких реперов.

тельной в начале линий и t — длина дуги геодезической OM . Тогда нормальными координатами точки M называются n величин x^i , определяемых уравнениями $x^i = a^i t$. Пусть в точке O задан ортогональный репер R_0 . Присоединим к каждой точке M в окрестности точки O ортогональный репер R_M , получаемый параллельным переносом репера R_0 вдоль дуги геодезической OM .

Найдем формы ω^i , ω^j_i , определяющие инфинитезимальный перенос и вращение при переходе от репера в точке M к реперу, присоединенному к инфинитезимально близкой точке M' .

Будем пользоваться переменными a^i , t , полагая в конце $t=1$; $a^i = x^i$. Если положить $a^i = \text{const}$ и менять t , то репер R будет переноситься параллельно:

$$\omega^i = a^i dt; \omega^j_i \equiv 0.$$

Обозначим $\bar{\omega}^i$ и $\bar{\omega}^j_i$ значения форм ω^i и ω^j_i при $dt=0$ и меняющихся a^i . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \omega^i(t, a^i; dt, da^i) &= a^i dt + \bar{\omega}^i(t, a^i; da^i); \\ \omega^j_i(t, a; dt, da) &= \bar{\omega}^j_i(t, a^i; da^i). \end{aligned} \right\} \quad (26.5)$$

Теперь определим формы $\bar{\omega}^i$, $\bar{\omega}^j_i$ как функции t , рассматривая a^i , da^i как параметры. Исходным пунктом являются уравнения структуры пространства с нулевым кручением:

$$\left. \begin{aligned} (\omega^i)' &= [\omega^k \omega^i_k]; \\ (\omega^j_i)' &= [\omega^k_i \omega^j_k] - R^j_{ikh} [\omega^k \omega^h] / 2. \end{aligned} \right\} \quad (26.6)$$

Заменяя ω^i , ω^j_i выражениями (26.5) и выделяя члены, содержащие dt , получаем

$$\begin{aligned} [da^i, dt] + [dt, \partial \bar{\omega}^i / \partial t] + d_a \bar{\omega}^i &= [a^k dt + \bar{\omega}^k, \bar{\omega}^i_k]; \\ [dt, \partial \bar{\omega}^j_i / \partial t] + d_a \bar{\omega}^j_i &= [\bar{\omega}^k_i \bar{\omega}^j_k] - \\ &- R^j_{ikh} [a^k dt + \bar{\omega}^k, a^h dt + \bar{\omega}^h] / 2, \end{aligned}$$

где d_a означает дифференцирование по всем a^i при $t = \text{const}$. Сравнивая члены, содержащие множитель dt , находим уравнения, которые Картап назвал *фундаментальными*:

$$\left. \begin{aligned} \partial \bar{\omega}^i / \partial t &= da^i + a^k \bar{\omega}^i_k; \\ \partial \bar{\omega}^j_i / \partial t &= -R^j_{ikh} (a^k \bar{\omega}^h - a^h \bar{\omega}^k) / 2. \end{aligned} \right\} \quad (26.6a)$$

Решения этих уравнений при $t=1$, $a^i = x^i$ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega^i(x, dx)|_{t=1} &= \sum_1^\infty (m^n)^t_k \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} dx^k; \\ \omega^i_j(x, dx)|_{t=1} &= - \sum_0^\infty (m^n)^t_p \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} dx^p R^i_{jkl} x^k, \end{aligned} \right\} (26.7)$$

где $m^i_k = R^i_{nlk} x^n x^l$; $(m^2)^i_j = m^i_{k_1} m^{k_1}_j$.

Символически выражения (26.7) можно записать короче:

$$\left. \begin{aligned} \omega^i(x, dx) &= (\sin \sqrt{\bar{m}} / \sqrt{\bar{m}})^t_k dx^k; \\ \omega^i_j(x, dx) &= R^i_{jkl} x^k [(1 - \cos \sqrt{\bar{m}}) / \bar{m}]^t_p dx^p. \end{aligned} \right\} (26.8)$$

Для евклидова пространства $R^i_{jhl} \equiv 0$ и формы Картана в нормальных координатах: $\omega^i(x, dx) = dx^i$; $\omega^i_j \equiv 0$. Квадрат интервала длины между двумя бесконечно близкими точками M и $M + dM$ определяется выражением

$$(ds)^2 = \omega^i(x, dx) \omega_i(x, dx) \equiv g_{ab}(x) dx^a dx^b \quad (26.9)$$

в соответствии с геометрическим смыслом формы ω^i (26.1). Здесь g_{ab} — метрический тензор рассматриваемого пространства. Группа преобразований пространства, оставляющая инвариантной квадратичную форму (26.9), называется *группой движения риманова пространства*.

Полезно установить связь со стандартными понятиями дифференциальной геометрии — метрическим тензором и символом Кристоффеля. Для этого нужно перейти к так называемым натуральным реперам N_a : $(N_a N_b) = g_{ab}$; $I_i = e^a_i(x) N_a$; $e^a_i e^j_a = \delta_{ij}$; $e^{ai} = e^a_i$, в которых формула (26.1) выражается через дифференциалы dx^a :

$$dM = N_a(M) dx^a. \quad (26.1a)$$

Легко видеть, что $e^a_i(x)$ — коэффициенты разложения форм Картана $\omega^i(x, dx)$ по дифференциалам dx^a : $\omega^i(x, dx) = e^i_a(x) dx^a$.

Законы изменения произвольного вектора \mathbf{A} в патуральном базисе имеют вид

$$\begin{aligned} d(A^i I_i) &= (dA^i + A^j \omega^i_j) I^i \equiv d(A^a N_a) = \\ &= dA^a N_a + A^a d(e^i_a I_i) = [dA^b + A^a (de^i_a e^b_i + \\ &+ e^i_a \omega^i_j e^b_j)] N^b = [dA^b + A^a \mathcal{F}^b_{ac} dx^c] N^b, \end{aligned}$$

где $\mathcal{F}^b_{ac} dx^c = (e^b_i de^i_a + e^b_i \omega^i_j e^j_a)$; \mathcal{F} — символ Кристоффеля.

§ 27. Геометрия групп Ли

Изложение этого вопроса основано на работах Картана [99], в которых показано, что любую полупростую группу Ли G с заданной на ней замкнутой подгруппой H всегда можно истолковать как группу движения некоторого однородного пространства со стационарной подгруппой H , т. е. подгруппой преобразований, оставляющих неподвижной нулевую точку пространства. Дадим вначале ряд определений, поясняющих постановку задачи.

Группа Ли. *Абстрактной группой* называется множество элементов, на котором определена операция умножения, ставящая в соответствие всяким двум элементам A, B третий элемент, обозначаемый AB . Причем существует элемент единица: $IA=AI=A$; всякому элементу A соответствует $A^{-1}: AA^{-1}=I$; кроме того, имеет место равенство $(AB)C=A(BC)$.

2. Абстрактная группа называется *конечной непрерывной группой порядка n* , если ее элементы составляют n -мерное конечное непрерывное многообразие.

3. Подгруппа H группы G есть подмножество элементов G , удовлетворяющее групповым свойствам. (Подгруппа замкнута, если всякая предельная точка H принадлежит H .)

Подгруппа H называется *инвариантной подгруппой* (нормальным делителем), если все элементы, преобразованные из элементов H с помощью элементов G , снова принадлежат H .

4. Группа называется *полупростой*, если она не содержит абелевых инвариантных подгрупп (группа абелева, если любые два ее элемента A, B удовлетворяют соотношению $AB=BA$).

5. Множество $АН(НА)$ называют *левым (правым) классом смежности группы G* по подгруппе H . Множе-

ство классов смежности называют *фактор-пространством* и обозначают G/H .

6. Конечная непрерывная группа называется группой Ли, если в достаточно малой окрестности единичного элемента I этой группы можно пайти такую систему параметров a_1, \dots, a_n , что параметры c_i элемента $C \equiv AB$, получающегося при умножении элемента A с параметрами a_i на элемент B с параметрами b_i , выражаются с помощью функций $c_i = \varphi_i(a, b)$, допускающих непрерывные частные производные двух первых порядков. Все параметры — вещественные.

Любая операция группы, ставящая в соответствие элементу C бесконечно близкий элемент B , может быть порождена n линейно-независимыми бесконечно малыми преобразованиями* X_1, \dots, X_n , которые называются *инфинитезимальными операторами*. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$X_i X_j - X_j X_i \equiv [X_i, X_j] = C^{s_{ij}} X_s,$$

где $C^{s_{ij}}$ — структурные константы группы. Полная система инфинитезимальных операторов называется алгеброй Ли данной группы. Структурные константы группы удовлетворяют соотношениям

$$C^{l_{ij}} C^{h_{lk}} + C^{l_{jk}} C^{h_{li}} + C^{l_{ki}} C^{h_{lj}} = 0,$$

которые эквивалентны тождествам Якоби:

$$\{[X_i, [X_j, X_k]]\} + (\text{перестановки}) \equiv 0.$$

Содержание п. 6 составляет две первые основные теоремы Ли.

Групповое пространство. Рассмотрим конечную непрерывную группу G , зависящую от $n+r$ параметров $a_1, a_2, \dots, a_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r = \{a, \eta\}$. Параметры $\{a, \eta\}$ можно рассматривать как координаты точки A в $n+r$ -мерном пространстве, которое называется *групповым пространством*. Каждой точке этого пространства $(a, \eta) = A$ поставлено в соответствие преобразование группы $G_{(a, \eta)} = G_A$ и наоборот. Условимся называть точку, соответствующую тождественному преобразованию, начальной точкой пространства. Совокупность двух точек задает вектор.

* Будем рассматривать только полупростые группы.

Исходным пунктом для исследования геометрии группового пространства является определение равенства векторов.

Будем говорить, что два вектора A_1A_2 и B_1B_2 равны, если элемент G_{A_1} переходит в G_{A_2} и элемент G_{B_1} переходит в G_{B_2} с помощью одного и того же преобразования $G(g)$, действующего по правилу: $G(g)G_{A_1} = G_{A_2}$; $G(g)G_{B_1} = G_{B_2}$.

Отсюда $G_{A_2}G_{A_1}^{-1} = G_{B_2}G_{B_1}^{-1}$. Можно рассматривать также другие определения векторов [99].

Всякая точка, бесконечно близкая к начальной точке, аналитически определяется бесконечно малым преобразованием группы. Любое бесконечно малое преобразование выражается линейно через $n+r$ генераторов X_k, Y_α :

$$G_{(da^k, d\eta^\alpha)} = I + dG_{(a^k, \eta^\alpha)};$$

$$dG_{(a^k, \eta^\alpha)} = i [da^k X_k + d\eta^\alpha Y_\alpha]; \quad k = 1, \dots, n; \quad \alpha = 1, \dots, r. \quad (27.1)$$

(В дальнейшем латинские буквы используются для обозначения величин, связанных с генераторами X_i , а греческие — с генераторами Y_α .) Здесь a^k, η^α — параметры группы; Y_α — генераторы преобразований подгруппы H ; X_k — генераторы, дополняющие H до полной группы G (т. е. генераторы фактор-пространства G/H). Эти генераторы удовлетворяют алгебре коммутационных соотношений

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = iC_{\alpha\beta}^\gamma Y_\gamma; \quad [X_k, Y_\alpha] = iC_{k\alpha}^l X_l;$$

$$[X_i, X_k] = iC_{ik}^\alpha Y_\alpha.$$

Генераторы группы можно рассматривать как аналог базисных векторов декартова репера, помещенного в начало координат. Определение равенства векторов в групповом пространстве позволяет ввести преобразование, соответствующее бесконечно малому вектору с началом в произвольной точке пространства (a, η) (рис. 12).

Именно, вектор $(0, 0; da', d\eta')$ равен вектору $(a, \eta; a + da, \eta + d\eta)$, если точка $(0, 0)$ переходит в точку $(da',$

$d\eta')$, точка (a, η) переходит в точку $(a+da, \eta+d\eta)$ с помощью одного и того же преобразования

$$G(g) \equiv G(a+da, \eta+d\eta) G^{-1}(a, \eta) = \\ = G(da', d\eta') G^{-1}(0, 0) = G(da', d\eta').$$

Таким образом, можно с каждой точкой пространства (a, η) связать декартов репер, равный (в групповом смысле) тому реперу, который связан с начальной точкой. Вектор $(a, \eta; a+da, \eta+d\eta)$ имеет поэтому точно

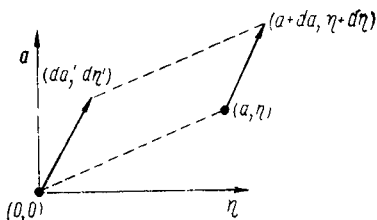


Рис. 12. Определение равенства векторов в групповом пространстве

такое же аналитическое выражение, что и (27.1). Обозначая $da'^i = \omega^i(a, \eta; da, d\eta)$, $d\eta'^\alpha = \theta^\alpha(a, \eta; da, d\eta)$, получаем

$$G_{(a, \eta)} dG_{(a, \eta)}^{-1} = i(\omega^i X_i + \theta^\alpha Y_\alpha). \quad (27.2)$$

Структурные уравнения. Пусть f — функция переменных пространства, в котором задано представление группы. Тогда бесконечно малое действие группы на функцию f имеет вид

$$df = i[\omega^i(d) X_i + \theta^\alpha(d) Y_\alpha] f. \quad (27.3)$$

Построим билинейный дифференциал

$$\delta df = i[\delta\omega^i(d) X_i + \delta\theta^\alpha(d) Y_\alpha] f + \\ + i[\omega^i(d) \delta(X_i f) + \theta^\alpha(d) \delta(Y_\alpha f)],$$

где дифференциал от функций $(X_i f)$ и $(Y_\alpha f)$ определяется согласно (27.3). Внешний дифференциал левой стороны равенства (27.3) равен нулю (см. § 26): $(df)' = \delta df - d\delta f = 0$. Приравнивание нулю коэффициентов при одинаковых линейно-независимых генераторах во внешнем дифференциале правой стороны (27.3) приводит

к системе структурных уравнений:

$$\begin{aligned}(\omega^i)' &= [\omega^k \theta^{\beta}] C_{k\beta}^i; \\ (\theta^\gamma)' &= [\theta^\alpha \theta^\beta] C_{\alpha\beta}^\gamma / 2 + C_{ki}^\gamma [\omega^k \omega^i] / 2,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}(\omega^k)' &= -\delta \omega^k (d) + d\omega^k (\delta); \\ [\omega^k \theta^\beta] &= \omega^k (d) \theta^\beta (\delta) - \omega^k (\delta) \theta^\beta (d).\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что от полученных структурных уравнений можно перейти к структурным уравнениям, в которых имеется зависимость только от латинских индексов, связанных с пространством параметров a^i смежных классов G/H . Определим для этого новые формы

$$\omega_k^i = \theta^\beta C_{k\beta}^i \quad (27.4)$$

и воспользуемся тождеством Якоби

$$\{[X_i [Y_\alpha, Y_\beta]]\} + (\text{перестановки}) \equiv 0,$$

которое приводит к соотношению

$$C_{\alpha\beta}^k C_{jk}^l = (C_{\beta k}^l C_{\alpha j}^k - C_{\alpha k}^l C_{\beta j}^k).$$

Окончательно для форм ω^i , ω_k^i получим уравнения

$$\left. \begin{aligned}(\omega^i)' &= [\omega^k \omega_k^i], \\ (\omega_j^i)' &= -R_{jki}^l [\omega^k \omega^l] / 2 + [\omega_k^j \omega_k^i],\end{aligned} \right\} \quad (27.5)$$

где $-R_{jki}^l = C_{ji}^l C_{kl}^\gamma$; и зависимость осталась только от латинских индексов.

Уравнения (27.5) совпадают по форме со структурными уравнениями Мауэра — Картана для риманова n -мерного пространства с ненулевой кривизной (26.5). Далее будем рассматривать только групповое пространство параметров a^i , полагая параметры $\eta=0$. В соответствии с § 26, можно трактовать формы ω^i как компоненты бесконечно малого смещения начала репера относительно репера в точке a , а ω_j^i — как изменение компонент самого репера. Согласно такой геометрической интерпретации форм ω^i и θ^γ как сдвига и вращения, естественно считать, что преобразование группы G является враще-

нием, если оно принадлежит подгруппе H , и сдвигом, если оно порождено бесконечно малым преобразованием $\omega^i X_i$. Преобразования подгруппы H оставляют неподвижными начало координат группового пространства и носят название *стационарной подгруппы данного пространства*. Нетрудно получить реализацию указанных преобразований, представляя общее преобразование группы G в виде произведения

$$G = K(a)H(\eta), \quad (27.6)$$

где $K(a)$ — преобразование, принадлежащее левому смежному классу G/H группы G по подгруппе H . Действуя слева на элемент группы G произвольным преобразованием $G(g)$ и разделяя полученный элемент по (27.6):

$$G(g)K(a)H(\eta) = K(a'(a, g))H(\eta'(a, g)), \quad (27.7)$$

можно определить, каким образом преобразуются параметры a, η .

Параметризация $K(a)$, т. е. явный вид конечных преобразований группы, может быть совершенно произвольной. (Это соответствует произвольным движениям реперов в дифференциальной геометрии Картана.) Каждая параметризация K эквивалентна определенному выбору координат в пространстве G/H .

Экспоненциальная параметризация (нормальные координаты). Рассмотрим подробно экспоненциальную параметризацию

$$K(a) = \exp(i a^j X_j). \quad (27.8)$$

Определим явный вид форм Картана и бесконечно малых преобразований в этом случае. Уравнения для форм Картана (27.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \exp(-i X_k a^k) d \exp(i X_k a^k) = & i [\omega^i(a, da) X_i + \\ & + \theta^\alpha(a, da) Y_\alpha]. \end{aligned} \quad (27.9)$$

Введем в (27.8) параметр t с помощью преобразования $a^k \rightarrow a^k t$. Получим

$$\begin{aligned} \exp(-i X_k a^k t) d \exp(i X_k a^k t) = \\ = i [\omega^i(ta, tda) X_i + \theta^\alpha(ta, tda) Y_\alpha]. \end{aligned}$$

Дифференцируя по t левую и правую части этого равенства, приходим к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \partial \omega^i / \partial t &= da^i + a^k \theta^{\beta} C_{k\beta}^i; \\ \partial \theta^{\alpha} / \partial t &= a^i \omega^i C_{ii}^{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (27.10)$$

После подстановки (27.4) в терминах форм ω^i , ω^i_j уравнения (27.10) совпадают с фундаментальными уравнениями Картана (26.6), которые описывают движение реперов по геодезическим линиям и определяют формы Картана в нормальных координатах. Таким образом, экспоненциальная параметризация конечных преобразований группы эквивалентна выбору нормальных координат в пространстве G/H [см. (26.8)]:

$$\left. \begin{aligned} \omega^i(a, da) &= (\sin \sqrt{m}/\sqrt{m})^i_k da^k; \\ \theta^{\alpha}(a, da) &= [(1 - \cos \sqrt{m})/m]^i_k da^k C_{ii}^{\alpha} a^i; \\ m_i^i &= -C_{i\alpha}^i C_{kl}^{\alpha} a^j a^k. \end{aligned} \right\} \quad (27.11)$$

Определим изменения координат a при бесконечно малом сдвиге, порождаемом преобразованием $\varepsilon^i X_i$, $\varepsilon_i \rightarrow \rightarrow 0$. Полагая в (27.6) $G(g) = (1 + i\varepsilon^i X_i) + O(\varepsilon^2)$, получаем

$$\begin{aligned} &(1 + i\varepsilon^i X_i) \exp(iX_i a^i) = \\ &= \exp[iX_i(a^i + \delta a^i(a, \varepsilon))] \exp[i\delta \eta^{\alpha}(a, \varepsilon) Y_{\alpha}]. \end{aligned} \quad (27.12)$$

Далее, используя метод упорядочения по параметру Фейнмана [102], разложим экспоненты по операторам:

$$\begin{aligned} \exp(\widehat{A} + \widehat{B}) &= \exp \left[\int_0^1 dt (\widehat{A}(t) + \widehat{B}(t)) \right] = \exp \left[\int_0^1 dt \widehat{A}(t) \right] + \\ &+ \int_0^1 dt \exp \left[\int_t^1 dt' A(t') \right] B(t) \exp \left[\int_0^t dt'' A(t'') \right] + \dots, \end{aligned}$$

где t_y является такой вспомогательной переменной, что $\int_x^y A(t) dt = A(y - x)$.

Учитывая разложения в ряд

$$\begin{aligned} \exp[iX_i(a^i + \delta a^i)] &= \exp(iX_i a^i) + i \exp(iX_i a^i) \times \\ &\times \int_0^1 dt \exp(-iX_i a^i t) (\delta a^i X_i) \exp(iX_i a^i t) + \dots, \end{aligned}$$

можно привести выражение (27.12) к виду

$$i\varepsilon^i X_i(1) = i \int_0^1 dt \delta a^i X_i(t) + i \delta \eta^\alpha(a, \eta) Y_\alpha, \quad (27.13)$$

здесь

$$X_k(t) = \exp(-iX_i a^i t) X_k \exp(iX_i a^i t).$$

Определяя $Y_\alpha(t)$ аналогичным образом и дифференцируя $X_k(t)$ и $Y_\alpha(t)$ по параметру t , получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} X_k(t) = i C_{ki}^\alpha a^i Y_\alpha(t); \quad X_k(0) = X_k;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Y_\alpha(t) = i C_{\alpha k}^l a^k X_l(t); \quad Y_\alpha(0) = 0.$$

Решение этой системы можно записать в форме (27.11):

$$X_i(t) = (\cos \sqrt{m} t)^k_i X_k + i (\sin \sqrt{m} t / \sqrt{m})^l_i C_{lk}^\alpha a^k Y_\alpha.$$

Подставляя найденное решение в уравнение (27.13) и приравнявая коэффициенты при одинаковых генераторах $X_i Y_\alpha$ получаем

$$\delta a^i(a, \eta) = -(\sqrt{m} \operatorname{ctg} \sqrt{m} t)^i_k \varepsilon^k + O(\varepsilon^2); \quad (27.14)$$

$$\delta \eta^\alpha(a, \eta) = \left\{ [\sin \sqrt{m} t - \operatorname{ctg} \sqrt{m} t (1 - \cos \sqrt{m} t)] \frac{1}{\sqrt{m}} \right\}^l_i \varepsilon^i C_{lk}^\alpha a^k. \quad (27.15)$$

Точно так же можно определить форму изменения координат a^i при вращении на параметр ξ^α [см. (27.12)]:

$$G(g')(1 + i\xi^\alpha Y_\alpha); \quad \xi^\alpha \rightarrow 0;$$

$$\delta a^i(\xi) = -C_{\alpha k}^i \xi^\alpha a^k + O(\eta^2); \quad (27.16)$$

$$\delta \eta^\alpha(a, \xi) = \xi^\alpha. \quad (27.17)$$

§ 28. Метод феноменологических лагранжианов

В методе феноменологических лагранжианов роли полной динамической группы и ее алгебраической подгруппы играют группа G и стационарная подгруппа H .

При этом параметры a^i фактор-пространства G/H отождествляются с полями голдстоуновских частиц. Формы Картана ω^i , θ^α можно использовать для построения инвариантов группы, т. е. феноменологических лагранжианов. Естественно отождествить с лагранжианом голдстоуновских частиц a^i , минимальным по числу производных, квадрат интервала геодезической линии между двумя бесконечно близкими точками a^i и $a^i + da^i$. Инвариантом относительно сдвигов и вращений будет выражение

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \omega^i(a, \partial_\mu a) \omega^j(a, \partial_\mu a) C_{ii}^\alpha C_{\alpha j}^i \quad (28.1)$$

Здесь $C_{ii}^\alpha C_{\alpha j}^i = g_{ij}(0)$ — метрический тензор группового пространства; для всех физически интересных примеров, рассматриваемых ниже, этот тензор пропорционален символу Кронекера δ_{ik} .

Формы θ^α , описывающие изменение базиса, используются для определения ковариантного дифференцирования различных геометрических величин, которые отождествляются с полями частиц Ψ , взаимодействующих с голдстоунионами. Например, минимальный по числу производных лагранжиан, описывающий взаимодействие полей Ψ , имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\Psi, \partial_\mu \Psi + \theta^\alpha(a, \partial_\mu a) T_\alpha \Psi), \quad (28.2)$$

где $\mathcal{L}_0(\Psi, \partial_\mu \Psi)$ — лагранжиан не взаимодействующих частиц Ψ , которые классифицируются по линейным представлениям T_α подгруппы H .

Лагранжианы (28.1) и (28.2) инвариантны относительно преобразований сдвига (27.14), (27.15) и вращения (27.16), (27.17). Эти преобразования следует дополнить преобразованиями полей Ψ :

$$\Psi' = (\exp[i\eta'^\alpha(a, g) T_\alpha]) \Psi, \quad (28.3)$$

где $\eta'^\alpha(a, g)$ определяются из выражения (27.7), которое в экспоненциальной параметризации имеет вид

$$\begin{aligned} G(g) \exp(ia^i X_i) \exp(i\eta^\alpha Y_\alpha) = \\ = \exp[ia^i(a, g) X_i] \exp[i\eta'^\alpha(a, g) Y_\alpha]. \end{aligned}$$

Параметры бесконечно малого преобразования $\eta'^{\alpha}(a, g)$ заданы формулами (27.15), (27.17). Зная явный вид лагранжианов и преобразований, относительно которых эти лагранжианы инвариантны, можно построить сохраняющиеся токи. В физике адронов токи используются для построения лагранжианов слабого и электромагнитного взаимодействий.

Существует простой способ построения физических токов и получения их дивергенций, предложенный Гелл-Маном и Леви [102]. Пусть взаимодействия полей описываются лагранжианом

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\Phi, \partial_{\mu}\Phi)$$

и уравнениями Эйлера

$$\frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta \Phi_i} = \partial_{\lambda} \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta (\partial_{\lambda} \Phi_i(x))}. \quad (28.4)$$

Подвергнем поля бесконечно малому преобразованию с параметрами, зависящими от координат

$$\Phi^j(x) \rightarrow \Phi^j(x) + \varepsilon(x)^k \Pi^j_k(\Phi), \quad (28.5)$$

где $\Pi^j_k(\Phi)$ — нелинейная функция от полей. Тогда лагранжиан изменится на

$$\delta(\mathcal{L}) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varepsilon^k} \varepsilon^k + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_{\alpha} \varepsilon^k)} \partial_{\alpha} \varepsilon^k,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varepsilon^k} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_j} \Pi^j_k + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_{\alpha} \Phi_j)} \partial_{\alpha} \Pi^j_k; \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_{\alpha} \varepsilon^k)} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_{\alpha} \Phi_j)} \Pi^j_k. \end{aligned} \right\} \quad (28.6)$$

Ток, связанный с преобразованиями (28.4), имеет вид

$$J_k^{\alpha} \equiv -\delta \mathcal{L} / \delta (\partial_{\alpha} \varepsilon^k) = -\Pi^j_k(\Phi) \delta \mathcal{L} / \delta (\partial_{\alpha} \Phi^j), \quad (28.7)$$

а его дивергенция, в силу уравнения Эйлера и уравнений (28.6) и (28.7), равна

$$\partial_{\alpha} J_k^{\alpha} = -\delta \mathcal{L} / \delta \varepsilon^k.$$

Отсюда следует, что если лагранжиан инвариантен относительно константных преобразований, то ток (28.7) сохраняется. Далее будем опускать индексы, связанные

с 4-мерным пространством-временем. Вычислим сохраняющиеся токи для лагранжиана (28.1). В нормальных координатах в соответствии с формулами (27.11), (27.14), (27.16) получим

$$j_k = g_{kl}(0) (\sin 2\sqrt{m}/2\sqrt{m})^l \partial a^l = g_{kl}(0) \omega^l(2a, \partial a); \quad (28.8)$$

$$j_\alpha = -[(1 - \cos 2\sqrt{m})/2m]{}^l{}_k g_{jl} 0C^l{}_{\alpha l} a^l \partial a^k. \quad (28.9)$$

В частности, для фактор-пространства

$$SU(n) \times SU(n) / SU(n)$$

приходим к простым соотношениям между токами и формами Картана [103]:

$$j^k(a, \partial a) \equiv \omega^k(2a, \partial a); \quad j^\alpha(a, \partial a) \equiv \theta^\alpha(2a, \partial a). \quad (28.10)$$

Выводы

Здесь изложен метод построения лагранжианов по алгебре генераторов группы динамической спонтанно нарушенной симметрии G с подгруппой стабильности вакуума H . Метод заключается в отождествлении параметров фактор-пространства G/H с полями голдстоуновских частиц. Геометрическая структура пространства и его инварианты изучались с помощью дифференциальных форм Картана, описывающих произвольное перемещение ортогональных реперов в пространстве.

Подробно рассматривались нормальные координаты пространства голдстоунионов, где были вычислены в явном виде формы Картана, инфинитезимальные преобразования группы, лагранжианы и сохраняющиеся токи для произвольной полупростой группы Ли G .

КИРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СИЛЬНЫХ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

§ 29. Киральная динамическая симметрия

Совокупность экспериментальных данных свидетельствует о том, что динамической симметрией сильных взаимодействий при низких энергиях является так называемая *киральная симметрия*. Согласно этой симметрии, сильные взаимодействия приблизительно инвариантны относительно некоторой группы преобразований, включающих в себя наряду с изотопическими преобразованиями преобразования, перепутывающие состояния с различной четностью. Пример линейного представления группы симметрии такого типа — правое и левое пейтрино. (Отсюда происходит название киральной симметрии. Кира — по-гречески рука, которая традиционно используется для иллюстраций правой и левой спиральности.)

Идея киральной симметрии впервые высказана и физически обоснована Фейнманом и Гелл-Маном [104]. В их работе проводится следующий путь рассуждений:

а) исходным пунктом является эмпирический факт — универсальность электромагнитного взаимодействия лептонов и адронов, т. е. одно и то же значение заряда электрона, протона и пиона, несмотря на сильное взаимодействие между пионом и протоном, которые могли бы перенормировать (изменить) электрические заряды адронов. Такая универсальность может свидетельствовать о наличии сохраняющихся токов и, следовательно, о наличии группы симметрии;

б) по аналогии с электродинамикой предлагается гипотеза о сохранении векторного тока в слабых взаимодействиях*;

* Эта гипотеза была высказана еще раньше С. С. Герштейном и Я. Б. Зельдовичем [105], что позволило предсказать вероятность β -распада пиона. Такое предсказание подтвердилось в эксперименте, выполненном в Объединенном институте ядерных исследований (Дубна).

в) точно так же, исходя из универсальности (приближенной) слабого взаимодействия аксиальных токов в распадах мюона и нейтрона, предлагается гипотеза о сохранении аксиального тока и включение в группу всех преобразований адронов преобразования, перепутывающего состояния с различной четностью.

Идея киральной симметрии затем была развита Гелл-Маном [106], Намбу [7], Гюрсеем [65] и др. Коммутационные соотношения для векторных и аксиальных адронных токов [106] получили название *киральная алгебра токов*.

Гюрсей [65], Гелл-Ман и Леви [102] предложили также модели теории поля с киральной динамической симметрией (исторически первая полевая модель с киральной симметрией с чисто теоретической точки зрения рассматривалась Швингером [107]). Намбу и Йона-Лазинио [108] была рассмотрена наглядная модель, в которой делалась попытка объяснения динамического происхождения киральной симметрии по аналогии со спонтанным нарушением симметрии вакуума в статистической физике [6]. Динамический путь реализации алгебры токов оказался весьма плодотворным в области низких энергий $\ll 1$ Гэв, где адроны приближенно можно представить как точечные, массивные частицы.

Для понимания сути динамической реализации полезно рассмотреть простой пример аксиальных токов в β -распаде нуклона с константой связи g_A :

$$J_{\mu}^{(N)i} = \bar{N}(p_1) \tau^i \gamma_5 \gamma_{\mu} N(p_2) g_A; \quad p_{1\mu} - p_{2\mu} = q_{\mu},$$

где N, \bar{N} — волновые функции свободных нуклонов; τ^i — матрицы Паули. Как следует из уравнения Дирака:

$$N(p_2) (\hat{p}_2 - M) = 0; \quad \bar{N}(p_1) (\hat{p}_1 - M) = 0,$$

ток $J_{\mu}^{(N)i}$ не сохраняется

$$q_{\mu} J_{\mu}^{(N)i} = 2M \bar{N} \tau^i \gamma_5 N g_A \neq 0.$$

Добавим к этому току полюсной член, описывающий излучение нуклоном безмассовой псевдоскалярной частицы с константой слабого распада F_{π} и константой аксиального взаимодействия с нуклоном \bar{g}/M :

$$J_{\mu}^i = \bar{N}(p_1) \tau^i \gamma_5 \left(\gamma_{\mu} g_A - \frac{F_{\pi}}{M} g \frac{\hat{q} q_{\mu}}{q^2} \right) N(p_2). \quad (29.1)$$

Нетрудно видеть, что можно обеспечить сохранение аксиального тока $q_\mu J_\mu^i = 0$ и, следовательно, существование соответствующей симметрии, если потребовать выполнения условия

$$g_A = \bar{g} F_\pi / M. \quad (29.2)$$

Киральная симметрия в данном случае диктует динамику взаимодействия пуклонов с псевдоскалярной частицей, которую обычно называют *голдстоуновской частицей*. Если отождествить эту частицу с пионом, то равенство (29.2), полученное впервые Голдбергером и Трейманом [26] с помощью дисперсионных соотношений, выполняется с погрешностью до 7%. Пион имеет ненулевую массу, поэтому дивергенция аксиального тока равна

$$-i q_\mu J_\mu^i = m_\pi^2 F_\pi \Pi^i, \quad (29.3)^*$$

где π — пионное поле. Вследствие того что величины, входящие в соотношение (29.2) как функции переданного импульса q , слабо изменяются на расстояниях порядка массы пиона (гипотеза гладкости), правую часть равенства (29.3) можно рассматривать как слабое возмущение, т. е. «почти нуль». Равенство (29.3) называют *гипотезой частичного сохранения аксиального тока* (ЧСАТ). Оно определяет механизм нарушения киральной симметрии. ЧСАТ и коммутационные соотношения алгебры токов составляют суть алгебраического подхода и позволяют получить целый ряд правил сумм для матричных элементов слабых и электромагнитных адронных токов, хорошо согласующихся с экспериментом.

Однако возможности такого подхода даже в области низких энергий ограничены по следующим обстоятельствам: 1) большинство результатов получено для нефизических значений импульсов; 2) с ростом энергии предсказания теряют смысл, так как не удовлетворяют условию унитарности.

Методом, в котором можно было бы обойти трудности алгебраического подхода, является метод феномено-

* Равенство (29.3) написано для тока (29.1), где сделана замена $1/q^2 \rightarrow 1/(q^2 - m_\pi^2)$, и следует из уравнения движения для π -поля:

$$(q^2 - m_\pi^2) \pi^i = -i \dot{N} \gamma_5 \tau^i \hat{q} N g / M.$$

логических лагранжианов*, позволяющий просто воспроизводить результаты алгебры токов на уровне первого борновского приближения. При этом киральная симметрия должна обеспечивать самосогласованность сильных взаимодействий в том смысле, что эффективные низкоэнергетические константы связи слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий не перепормируются за счет высших порядков по сильному взаимодействию [19]. Тем самым требуется универсальность взаимодействия, — именно то, что и привело к формулировке киральной симметрии.

Таким образом, вследствие симметрии разложение по сильной константе связи в низших порядках совпадает с низкоэнергетическим разложением. Напомним, что аналогичная ситуация имеет место и в квантовой электродинамике, первые порядки теории возмущения в которой содержали бы основную информацию при низких энергиях даже при больших константах связи [109].

Метод феноменологических лагранжианов не только воспроизводит низкоэнергетические результаты алгебры токов, но и позволяет продвинуться дальше по энергиям, используя хорошо разработанный аппарат квантовой теории поля. За последние десять лет появилось множество работ, посвященных квантованию феноменологических киральных лагранжианов [110—117] и описанию в рамках такой квантовой киральной теории большой совокупности экспериментальных данных по низкоэнергетическим процессам взаимодействий адронов [118—134].

§ 30. Киральные лагранжианы (нелинейная реализация)

Нелинейные реализации $SU(2) \times SU(2)$. В гл. 7 был изложен метод феноменологических лагранжианов. Применим этот метод для исследования динамической киральной симметрии. Рассмотрим вначале изотопическую киральную группу $SU(2) \times SU(2)$ с шестью параметрами, три из которых соответствуют изотопическим преобразованиям, а три — собственно киральным преобразованиям, перепутывающим состояния с различной четностью. Изотопические преобразования образуют

* Развитие метода феноменологических лагранжианов стимулировали работы Вейнберга [10] и Швингера [67].

алгебраическую подгруппу $SU(2)$ киральной группы $SU(2) \times SU(2)$. [Как известно, все адроны можно классифицировать по линейным представлениям группы $SU(2)$.]

Три параметра собственно киральных преобразований, относительно которых лагранжиан свободных полей инвариантен, отождествим (см. § 28) с тремя голдстоуновскими полями — пионами (π^i/F_π), где F_π — константа с размерностью поля (энергии), которую необходимо ввести при таком отождествлении физических полей с безразмерными параметрами группы. Удобно положить эту константу равной единице ($F_\pi=1$). Ее можно восстанавливать из анализа размерностей при вычислении физических величин. Шесть генераторов группы, соответствующих изотопическим I^i и киральным K^i преобразованиям, удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [I_i, I_j] &= i\varepsilon_{ijh} I_h; \quad [I_i, K_j] = i\varepsilon_{ijl} K_l; \\ [K_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijh} I_h. \end{aligned} \quad (30.1)$$

Лагранжианы, описывающие взаимодействующие частицы, строятся из форм Картапа ω , θ , уравнение для которых имеет вид

$$\begin{aligned} \exp(-iK_i \pi^i) \partial_\mu \exp(iK_i \pi^i) = \\ = i[\omega^i(\pi, \partial_\mu \pi) K_i + \theta^i(\pi, \partial_\mu \pi) I_i]. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения дается формулой (27.11), которую легко представить в свернутом виде, используя соотношение

$$(m^{(n)})^i_j = (\pi^2)^{n-1} (m^{(1)})^i_j,$$

где

$$m^i_j = \varepsilon_{ilk} \varepsilon_{kjm} \pi^l \pi^m = \pi^2 \delta_{ij} - \pi^i \pi^j.$$

Окончательно получаем

$$\left. \begin{aligned} \omega^i_\mu &= \omega^i(\pi, \partial_\mu \pi) = \partial_\mu \pi^i + (\delta_{ik} - \pi^i \pi^k / \pi^2) \times \\ &\times (\sin \sqrt{\pi^2} / \sqrt{\pi^2} - 1) \partial_\mu \pi^k; \\ \theta^i_\mu &= \theta^i(\pi, \partial_\mu \pi) = [(1 - \cos \sqrt{\pi^2}) / \pi^2] \partial_\mu \pi^l \varepsilon_{il} \pi^j. \end{aligned} \right\} \quad (30.2)$$

Выражения для сохраняющихся токов, векторного V^i_μ и аксиального A^i_μ , можно получить из (28.10):

$$A^i_\mu = \omega^i_\mu (2\pi, \partial_\mu \pi); \quad V^i_\mu = \eta^i_\mu (2\pi, \partial_\mu \pi).$$

Выпишем минимальные по производным лагранжианы для $\pi\pi$ -, πN - и πK -взаимодействий:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi\pi} = & \omega^i_\mu \omega^i_\mu / 2 \equiv (\partial_\mu \pi)^2 / 2 + (\delta_{ik} - \pi^i \pi^k / \pi^2) \times \\ & \times (\sin^2 \sqrt{\pi^2} / \sqrt{\pi^2} - 1) \partial_\mu \pi^i \partial_\mu \pi^k / 2; \end{aligned} \quad (30.3)$$

$$\mathcal{L}_{K\pi} = D\bar{K}DK - m^2_K \bar{K}K + \lambda \bar{K} (\omega^i_\mu \tau^i / 2) (\omega^k_\mu \tau^k / 2) K; \quad (30.4)$$

$$\mathcal{L}_{N\pi} = \bar{N} i \gamma_\mu (D_\mu + i \gamma_5 g_A \omega^i_\mu \tau^i / 2) N - M \bar{N} N, \quad (30.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_\mu K &= \partial_\mu K + i \frac{\tau_k}{2} \theta^k_\mu K; \quad K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}; \\ D_\mu N &= \partial_\mu N + i \frac{\tau_k}{2} \theta^k_\mu N; \quad N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (30.6)$$

В отличие от лагранжиана (28.2) здесь добавлены взаимодействия, построенные с помощью форм ω того же порядка по производным, что и члены с ковариантной производной. Эти дополнительные минимальные взаимодействия входят в лагранжианы с произвольными константами [λ в (30.4) и g_A в (30.5)], которые определяются или из эксперимента (g_A), или расширением группы $SU(2) \times SU(2)$ до $SU(3) \times SU(3)$ (λ). Анализ экспериментов по пион-нуклонному рассеянию приводит к значению $g_A \approx 1,25$, редукция $SU(3) \times SU(3)$ к $SU(2) \times SU(2)$ дает значение $\lambda = 1$.

Предполагается, что члены, ответственные за нарушение киральной симметрии и приводящие к возникновению массы у пиона, преобразуются по определенному представлению киральной группы. В частности, выбирая представление $(1/2, 1/2)$

$$\exp(i\pi\tau) = \cos \sqrt{\pi^2} + i\pi\tau \sin \sqrt{\pi^2} / \sqrt{\pi^2}, \quad (30.7)$$

в качестве массового члена можно взять изоскаляр

$$\mathcal{L}_m = m^2_\pi \cos \sqrt{\pi^2}. \quad (30.8)$$

Существует также другой способ введения массы пиона [66], не связанный с определенными представлениями и фиксирующий лагранжиан из условия ЧСАТ:

$$\partial_{\mu} A^i = F_{\pi} m^2 \pi^i.$$

Для нормальных координат нетрудно проверить, что

$$\mathcal{L}_m = -m^2 \pi^2 / 2. \quad (30.9)$$

В дальнейшем будем использовать оба эти определения.

Нелинейные реализации $SU(3) \times SU(3)$. Генераторы группы $SU(3) \times SU(3)$ удовлетворяют алгебре перестановочных соотношений:

$$\begin{aligned} [I_i, I_k] &= if_{ijk} I_j; \quad [I_i, K_j] = if_{ijl} K_l; \\ [K_i, K_j] &= if_{ijk} I_k. \end{aligned} \quad (30.10)$$

Здесь I_i — восемь генераторов унитарных преобразований подгруппы $SU(3)$; f_{ijk} — структурные постоянные; K_i — собственно киральные генераторы. Параметры фактор-пространства $SU(3) \times SU(3) / SU(3)$ отождествляются с октетом псевдоскалярных мезонов M^i :

$$\xi = \sum_{i=1}^8 M^i \lambda^i = \begin{pmatrix} \pi\tau + \frac{\eta^I}{\sqrt{3}} & K\sqrt{2} \\ \bar{K}\sqrt{2} & -\frac{2\eta}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}; \quad (30.11)$$

где

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} M^4 - iM^5 \\ M^6 - iM^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix};$$

$\pi_i = M_i$ ($i=1, 2, 3$); $\eta = M_8$; λ^i — матрицы Гелл-Мана. Формы Картана (27.11)

$$\omega^i(M, \partial_{\mu} M) = \partial_{\mu} M^i + O(M^3);$$

$$\theta^k(M, \partial_{\mu} M) = -f_{kij} \partial_{\mu} M_j M_i / 2 + O(M^4)$$

имеют значительно более сложный вид, чем в случае $SU(2)$. Поэтому токи и лагранжианы удобно выразить с помощью матрицы $(\exp(i\xi))$, преобразующейся по

представлению $(3, 3^*) - (3^*, 3)$ [ξ определено в (30.11)]:

$$\exp [i\xi] = \begin{pmatrix} (\exp [i\xi])_{ij} & (\exp [i\xi])_{i3} \\ (\exp [i\xi])_{3i} & (\exp [i\xi])_{33} \end{pmatrix}. \quad (30.12)$$

Здесь $i, j = 1, 2$.

Явный вид аксиальных и векторных мезонных токов можно получить из выражений

$$i\lambda^i_\mu \lambda^j = i\lambda^j (V^i_\mu - A^j_\mu) = \exp (i\xi) \partial_\mu \exp (-i\xi); \quad (30.13)$$

$$i\lambda^j (V^i_\mu + A^j_\mu) = \exp (-i\xi) [\partial_\mu \exp (i\xi)]. \quad (30.14)$$

Киральный лагранжиан мезон-барионного взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \omega^i_\mu \omega^i_\mu / 2 + \bar{B}_i \{ i\gamma_\mu [D_{\mu ij} + ig_A (\bar{\alpha} D^k_{ij} + \\ & + (1 - \bar{\alpha}) F^k_{ij}) \gamma_5 \omega^k_\mu] - M\delta_{ij} \} B_j, \end{aligned} \quad (30.15)$$

где $D_{\mu ij} B_j = (\delta_{ij} \partial_\mu + F^k_{ij} \theta^k) B_j$; B — октет барионов; $F^k_{ij} = -if^k_{ij}$; $D^k_{ij} = d_{kij}$; $\bar{\alpha}$ — параметр смешивания F - и D -связей.

При введении мезонных массовых членов, согласно Гелл-Ману, Оаксу и Ренеру [135], исходная симметрия $SU(3) \times SU(3)$ нарушается сначала до $SU(2) \times SU(2)$ по представлению $(3, 3^*) + (3^*, 3)$:

$$\exp (i\xi) = \sum_0^8 (s^a \lambda^a + ip^a \lambda^a); \quad \lambda^0 = \sqrt{3/2} I. \quad (30.16)$$

При этом массовый член имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & m^2_{K^0} \sqrt{2/3} (s^0 - \sqrt{2} s^8) \equiv m^2_{K^0} \operatorname{Re} (\exp [i\xi])_{33} = \\ = & m^2_{K^0} \cos K \cos 2\eta / \sqrt{3} \approx m^2_{K^0} [1 - (K^2 + 4\eta^2/3)/2 + \dots]. \end{aligned} \quad (30.17)$$

Затем нарушается $SU(2) \times SU(2)$.

Оакс [136] предположил, что происхождение последнего нарушения имеет ту же природу, что и происхождение угла Кабиббо в слабых взаимодействиях. Как известно, для того чтобы правильно описать лептонные и полулептонные распады гиперонов и каонов, необходимо заряженный адронный ток подвергнуть преобразованию, повернув его вокруг седьмой оси на двойной угол Кабиббо θ_c . Аналогичное преобразование в (30.17) приводит к выражению *

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_m &= m^2_{K^0} \operatorname{Re} (\exp [i\lambda_7 \theta_c] \exp [i\xi] \exp [-i\lambda_7 \theta_c])_{33} = \\ &= m^2_{K^0} \{ \sqrt{2/3} s^0 - \sqrt{4/3} (1 - 3 \sin^2 \theta_c / 2) s^8 - \\ - \sin^2 \theta_c s^3 \} &= -m^2_{K^0} \{ -2 + \sin^2 \theta_c [K^2_6 + K^2_7 + \pi^2 + \eta^2 / 3] + \\ + \cos^2 \theta_c [K^2 + 4\eta^2 / 3] - (2/\sqrt{3}) \sin^2 \theta_c \pi^0 \eta \} / 2 + \dots \quad (30.18) \end{aligned}$$

Тем самым возникает связь между углом Кабиббо и отношением масс нейтральных каона и пиона:

$$\sin^2 \theta_c = m^2_{\pi^0} / m^2_{K^0}; \quad \sin \theta_c = 0,27. \quad (30.19)$$

Соотношение (30.19) хорошо согласуется с экспериментом. При этом возникает также разность масс в изомультиплете каонов порядка электромагнитной:

$$m^2_{K^0} - m^2_{K^+} = \sin^2 \theta_c m^2_{K^0} \approx 0,017 (\Gamma \text{эв})^2. \quad (30.20)$$

После диагонализации \mathcal{L}'_m по полям π^0 и η получается хорошо соответствующая эксперименту разность масс заряженных и нейтральных пионов

$$m^2_{\pi^+} - m^2_{\pi^0} \approx 0,001 (\Gamma \text{эв})^2. \quad (30.21)$$

Полученные разности масс позволяют устранить трудность, возникающую при вычислении электромагнитной разности масс с помощью алгебры токов. Вычисления с использованием алгебры токов дают для пионов и

* $\exp [i\lambda_7 \theta] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$

каонов один и тот же знак разности масс, в то время как в эксперименте знаки разные. Учет дополнительной разности масс (30.20) улучшает согласие с экспериментом.

Масса η мезона также находится в полном согласии с экспериментальными данными:

$$m_{\eta}^2 = m_{K^0}^2 (1 + 3 \cos^2 \theta_c) / 3 \approx 0,31 (\Gamma \text{эВ})^2. \quad (30.22)$$

Помимо правильного описания всех мезонных масс, входящих в октет, учет члена, связанного с $\pi^0 \eta$ смешиванием в (30.18), позволяет удовлетворительно описать экзотический с точки зрения строгой киральной теории распад $\eta \rightarrow 3\pi$ [137].

§ 31. Приближение деревьев

Киральные лагранжианы в силу симметрии обладают тем свойством, что в пределе низких энергий хорошо описывают амплитуды адронных процессов в приближении деревьев. Петлевые диаграммы (квантовые поправки), соответствующие следующим порядкам разложения по сильной константе связи ($1/F_{\pi}$), дают вклад в более высокие порядки низкоэнергетического разложения [138].

Амплитуда слабого распада пиона. Продемонстрируем этот факт на простом примере слабого распада пиона на лептонную пару. А именно, покажем, что в пределе нулевой массы пиона вклады от всех диаграмм теории возмущений, соответствующих высшим порядкам по сильным взаимодействиям, взаимно сокращаются, за исключением вклада от диаграммы, описывающей первое борновское приближение.

Рассмотрим лагранжиан кирального типа, симметричный относительно группы $SU(2) \times SU(2)$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\pi\pi} + \mathcal{L}_{\pi N} + G [(J_{5\mu}^1 + iJ_{5\mu}^2) J_{(l)}^{\mu} + \text{с.с.}] / \sqrt{2}. \quad (31.1)$$

Здесь $\mathcal{L}_{\pi\pi}$ и $\mathcal{L}_{\pi N}$ заданы формулами (30.3) и (30.5), а последний член описывает слабый распад пиона на лептонную пару. Лептонный ток $J_{(l)}^{\mu}$ приведен в (6.3); а аксиальный ток $J_{5\mu}^k$ имеет форму

$$J_{5\mu}^k(x) = F_{\pi} \omega^k (2\pi, \partial_{\mu} \pi) + i\psi(x) \gamma_5 \gamma_{\mu} \tau^k \psi(x) \varphi(\tau^2 / F_{\pi}^2). \quad (31.2)$$

Функции, входящие в (31.2), удовлетворяют следующим условиям ($m_\pi = 0$):

$$\partial_\mu J_{5\mu}^k(x) = 0. \quad (31.3)$$

В первом приближении по константе G амплитуда распада пиона приобретает вид

$$\frac{G}{\sqrt{2}} \langle 0 | J_{5\mu}^{k\Gamma}(0) | \pi^k(p) \rangle^\Gamma L^\mu(p),$$

где индекс « Γ » означает, что используется представление Гейзенберга; $L^\mu(p)$ соответствует матричному элементу от лептонного тока $J_{(l)}^\mu$:

$$\langle 0 | A^\Gamma | 0 \rangle^\Gamma = \langle 0 | T A \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x) \right\} | 0 \rangle^\Gamma;$$

$$L^\mu(p) = \langle \mu(k_1) \nu(k_2) | J_{(l)}^\mu(0) | 0 \rangle;$$

$\mu(k_1)$ и $\nu(k_2)$ — поля мюона и нейтрино; $k_1 + k_2 = p$.

Вычислим функцию $F(p^2)$, определенную равенством

$$-i p_\mu F(p^2) = \langle 0 | J_{5\mu}^{i\Gamma}(0) | \pi^i(p) \rangle^\Gamma. \quad (31.4)$$

Используя редукционную технику*, правую часть формулы (31.4) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | J_{5\mu}^{i\Gamma}(0) | \pi^i(p) \rangle^\Gamma = \\ & = -i \int d^4x \exp(-ipx) \square_x \langle 0 | T (J_{5\mu}^{i\Gamma}(0) \pi^{i\Gamma}(x)) | 0 \rangle^\Gamma. \end{aligned}$$

Умножая теперь левую и правую части равенства (31.4) на $(-ip^\mu)$, получаем

$$\begin{aligned} & p^2 F(p^2) = \\ & = i \int d^4x \exp(-ipx) \square_x \partial_x^\mu \langle 0 | T (J_{5\mu}^{i\Gamma}(0) \pi^{i\Gamma}(x)) | 0 \rangle^\Gamma = \\ & = -i p^2 \int d^4x \exp(ipx) \partial_\mu^\Gamma \langle 0 | T (J_{5\mu}^{i\Gamma}(x) \pi^{i\Gamma}(0)) | 0 \rangle^\Gamma. \end{aligned} \quad (31.5)$$

* Редукционные формулы, полученные впервые Лоу, Леманом, Симанзиком и др. в 1955 г., можно найти в книге Швебера [3, гл. 17, § 4].

Введение производной ∂_μ под знак матричного элемента приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \langle 0 | \partial_\mu [\theta(x_0) J_{5\mu}^i(x) \pi^i(0) + \theta(-x_0) \pi^i(0) J_{5\mu}^i(x)] | 0 \rangle = \\ = \langle 0 | \delta(x_0) \{ J_{5\mu}^i(x) \pi^i(0) \}_{x_0=0} | 0 \rangle = i F_\pi \delta^{(4)}(x)^*. \end{aligned} \quad (31.6)$$

Здесь был использован закон сохранения аксиального тока (31.3). Фигурные скобки означают коммутатор. Подставляя (31.6) в (31.5), окончательно получаем $F(p^2) = F_\pi$.

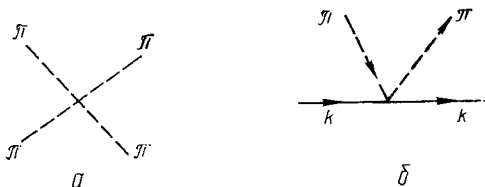


Рис. 13. Диаграммы, соответствующие приближению деревьев для процессов $\pi\pi$ (а)- и $K\pi$ (б)-рассеяний:

--- — пионные линии; — каонные линии

Таким образом, результат, найденный с учетом всех поправок от сильных взаимодействий, совпадает с результатом, получающимся в «древесном» приближении. Ниже (см. § 41) подобное сокращение вкладов от высших порядков по $(1/F_\pi)$ будет продемонстрировано на примере однопетлевого приближения прямым вычислением.

Сравнение вероятности распада

$$W = (G^2 F_\pi^2 / 4\pi) m_\pi m_\mu^2 (1 - m_\mu^2 / m_\pi^2)^2,$$

вычисленной в первом борновском приближении, с экспериментальным значением фиксирует один из немногих параметров киральной теории $F_\pi = 92$ Мэв.

Длины $\pi\pi$ - и $K\pi$ -рассеяния. Вычислим, используя киральные лагранжианы (30.3), (30.4), длины $\pi\pi$ - и $K\pi$ -рассеяния в приближении деревьев (рис. 13). Матрич-

* Канонический импульс совпадает с киральным током $J_{5\mu}^i(x)$ с точностью до членов, которые не дают вклада в (31.6).

ный элемент $\pi\pi$ -рассеяния определяется из формулы

$$\begin{aligned} \langle i_1 i_2 | S | i_3 i_4 \rangle = & I + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \times \\ & \times [\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} A(s, t, u) + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} A(t, s, u) + \\ & + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} A(u, t, s)], \end{aligned} \quad (31.7)$$

где

$$\begin{aligned} s = (p_1 + p_2)^2; \quad t = (p_1 - p_3)^2; \quad u = (p_1 - p_4)^2; \\ s + t + u = 4m_\pi^2 \end{aligned}$$

— мандельштамовские переменные.

Амплитуды в каналах с изоспинами 0, 1 и 2 имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}^0 &= 3\mathcal{A}(s, t, u) + \mathcal{A}(t, s, u) + \mathcal{A}(u, t, s); \\ \mathcal{A}^1 &= \mathcal{A}(t, s, u) - \mathcal{A}(u, t, s); \\ \mathcal{A}^2 &= \mathcal{A}(t, s, u) + \mathcal{A}(u, t, s). \end{aligned} \right\} \quad (31.8)$$

Лагранжианы (30.3) и (30.9) в низшем порядке по $1/F_\pi$

$$\mathcal{L}_{\pi\pi}(\text{int}) = -[\pi^2 (\partial_\mu \pi^2) - c(\pi^2)^2 m_\pi^2] / 4F_\pi^2, \quad c = 1/3,$$

приводят к амплитуде

$$\begin{aligned} (1/32\pi) \mathcal{A}(s, t, u) = & (3\bar{s} - 1)(1/3)(m_\pi/2\pi F_\pi)^2 \pi/2 \\ & (\bar{s} = s/4m_\pi^2). \end{aligned} \quad (31.9)$$

Длины рассеяния определяются по формуле

$$a_l^I = [32\pi k^{2l} \sqrt{s}]^{-1} \int_{-1}^1 dx P_l(x) \mathcal{A}^I(s, t, u) \Big|_{\bar{s}=1, k^2=0}, \quad (31.10)$$

где

$$s = 4(k^2 + m_\pi^2); \quad t = -2k^2(1 - x); \quad u = -2k^2(1 + x).$$

Используя формулы (31.8) — (31.10), получаем

$$\left. \begin{aligned} a_0^0 &= L(3 - 5c) \approx 0,13 m_\pi^{-1}; \\ a_0^2 &= -L2c \approx -0,06 m_\pi^{-1}; \\ a_1^1 &= \frac{L}{3} m_\pi^{-2} = \frac{\pi}{2} a_0 m_\pi^{-3} \approx 0,033 m_\pi^{-3}; \\ L &= m_\pi/8\pi F_\pi^2 \approx 0,1 m_\pi^{-1}; \quad c = 1/3. \end{aligned} \right\} \quad (31.11)$$

Эти значения находятся в удовлетворительном согласии с экспериментом [139].

Аналогично можно вычислить длины $K\pi$ -рассеяния, определяя амплитуды $T^{(\pm)}(T_{1/2}$ и $T_{3/2})$ по формулам:

$$\begin{aligned} \langle \pi_{i_1} K_{\alpha_1} | S | \pi_{i_2} K_{\alpha_2} \rangle &= I + i (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) T_{\alpha_1 \alpha_2 i_1 i_2}; \\ T_{\alpha_1 \alpha_2 i_1 i_2} &= \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{i_1 i_2} T^{(+)} + i \varepsilon_{i_2 i_1}^l \tau_{\alpha_2 \alpha_1}^l T^{(-)}; \\ T_{1/2} &= T^{(+)} + 2T^{(-)}; \quad T_{3/2} = T^{(+)} - T^{(-)}. \end{aligned}$$

Киральный лагранжиан (30.4) в приближении деревьев приводит к следующим амплитудам:

$$T^{(+)} = -p_1 p_2 / 2F_\pi^2; \quad T^{(-)} = (k_1 + k_2)(p_1 + p_2) / 4F_\pi^2.$$

Вычисляя длины рассеяния по формуле

$$\begin{aligned} a_l^I &= [16\pi k^2 l \sqrt{s}]^{-1} \int_{-1}^1 dx P_l(x) T_l(s, t)|_{s=(m_\pi + M_K)^2, k^2=0} \\ s &= (\sqrt{m_\pi^2 + k^2} + \sqrt{M_K^2 + k^2})^2; \quad t = -2k^2(1-x), \end{aligned}$$

получаем

$$a_{1/2}^0 = \pi \frac{m_\pi}{(4\pi F_\pi)^2} \frac{(4M_K - m_\pi)}{(m_\pi + M_K)} = 0,13 m_\pi^{-1};$$

$$a_{3/2}^0 = -\pi \frac{m_\pi (2M_K + m_\pi)}{(4\pi F_\pi)^2 (m_\pi + M_K)} \approx -a_{1/2}^0 / 2 \approx -0,08 m_\pi^{-1}$$

в качественном соответствии с экспериментом [140].

Нелептонные распады каонов. Нелептонные слабые распады адронов являются загадочными с точки зрения теории Кабиббо, описывающей лептон-лептонные и лептон-адронные слабые взаимодействия.

Согласно теории Кабиббо, существует единый слабый ток, равный сумме лептонного тока (5.3) и адронного тока (5.6) J_μ :

$$J_\mu^+ = \cos \theta_c (J_\mu^1 - iJ_\mu^2) + \sin \theta_c (J_\mu^4 - iJ_\mu^5). \quad (31.12)$$

Последний можно получить преобразованием нестрогого заряженного тока

$$J_\mu (\Delta s = 0) = J_\mu^1 - iJ_\mu^2$$

поворотом вокруг седьмой оси на двойной угол Кабиббо θ_c (как было отмечено в § 30, физическая природа этого преобразования, возможно, тесно связана с нарушением изотопической киральной симметрии (30.18) [136]).

Лагранжиан слабого взаимодействия адронов с изменением странности в теории Кабиббо

$$\mathcal{L}_c = \frac{G_w}{\sqrt{2}} \cos \theta_c \sin \theta_c [(J^1_\mu - iJ^2_\mu)(J^4_\mu + iJ^5_\mu) + \text{э. с.}] \quad (31.13)$$

не описывает правила $\Delta T=1/2$ и порядка величин амплитуд нелептонных распадов, которые характеризуются скорее константой связи $\sim G_w/\sqrt{2}$.

Существуют два пути решения этой проблемы: первый, в котором предполагается «динамическое усиление» за счет учета высших порядков по сильной константе связи (сейчас интенсивно обсуждается в кварковых моделях единой теории поля типа Вейнберга—Салама [141]); второй— это введение нового дополнительного взаимодействия, соответствующего правилу $\Delta T=1/2$.

Киральная симметрия, устанавливающая соотношения между амплитудами с различным числом пионов, приводит к теоремам о связи амплитуд $K \rightarrow 2\pi$, $K \rightarrow 3\pi$ [142, 143]. Как следствие этих соотношений из справедливости правила $\Delta T=1/2$ для распадов $K \rightarrow 2\pi$ вытекает справедливость его и для распада $K \rightarrow 3\pi$.

В работах [144] показано, что феноменологический лагранжиан слабого взаимодействия, построенный из киральных токов (30.14) в соответствии с правилом $\Delta T=1/2$ и с универсальной фермиевской константой взаимодействия $G_w/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w(\Delta s=1) &= \frac{G_w}{\sqrt{2}} \left\{ (0, 1) \begin{pmatrix} (J^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} J^8)_\mu (J^1 - iJ^2)_\mu \\ (J^1 + iJ^2)_\mu (-J^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} J^8)_\mu \end{pmatrix} \right. \\ &\times \left. \begin{pmatrix} (J^4 - iJ^5)_\mu \\ (J^6 - iJ^7)_\mu \end{pmatrix} + \text{э. с.} \right\} = \frac{G_w}{\sqrt{2}} \left[(J^1_\mu + iJ^2_\mu)(J^4_\mu - iJ^5_\mu) - \right. \\ &\quad \left. - \left[J^3_\mu + \frac{1}{\sqrt{3}} J^8_\mu \right] (J^6_\mu - iJ^7_\mu) + \text{э. с.} \right] = \\ &= G_w \sqrt{2} d_{\text{с}ab} J^a_\mu J^b_\mu \approx G_w F^3_\pi [(\partial_\mu \bar{K}_R \partial_\mu U^{-1}) \gamma + \text{э. с.}] \quad (13.14) \end{aligned}$$

[см. обозначения (30.11), (30.13), (30.14); $\chi=(0, 1)$] описывает совокупность экспериментальных данных по распадам каонов на пионы в пределах той точности, которая обеспечивается алгеброй токов [10—20%, табл. 2].

Таблица 2

Вероятность распадов $K \rightarrow 2\pi, 3\pi$

Вид распада	Вероятность распада	
	теория	эксперимент [145]
$K^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ (10^{10} сек $^{-1}$)	0,342	$0,364 \pm 0,06$
$K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ (10^{10} сек $^{-1}$)	0,744	$0,796 \pm 0,007$
$K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ (10^{10} сек $^{-1}$)	$0,1696 \cdot 10^{-2}$	$(0,1691 \pm 0,0024) \cdot 10^{-2}$
$K^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ (10^6 сек $^{-1}$)	3,84	$4,14 \pm 0,13$
$K^0 \rightarrow \pi^0\pi^+\pi^-$ (10^6 сек $^{-1}$)	2,56	$2,44 \pm 0,06$
$K^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$ (10^6 сек $^{-1}$)	4,82	$4,51 \pm 0,02$
$K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^0$ (10^6 сек $^{-1}$)	1,23	$1,36 \pm 0,06$

В лагранжиане Кабиббо (31.13) имеются члены, нарушающие правило $\Delta T=1/2$, т. е. описывающие распад $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$. Однако вероятность этого распада, следующая из (31.13), почти в шесть раз больше экспериментально наблюдаемой величины. Можно прийти к согласию с экспериментом, если сделать поворот на угол Кабиббо заряженных токов в лагранжиане (31.14). В результате возникает дополнительное слагаемое с правилом $\Delta T=3/2$, которое имеет вид $G_w (-2 \sin^2 \theta_c) \times [(J_\mu^1 - iJ_\mu^2)(J_\mu^4 + iJ_\mu^5) + \text{э.с.}]/\sqrt{2}$. Складывая это выражение с (31.13), получаем

$$\mathcal{L}_w (\Delta T=3/2) = G_w (\sin \theta_c \cos \theta_c - 2 \sin^2 \theta_c) [(J_\mu^1 - iJ_\mu^2) \times (J_\mu^4 + iJ_\mu^5) + \text{э.с.}]/\sqrt{2}. \quad (31.15)$$

Лагранжиан (31.15) описывает нарушение правила $\Delta T=1/2$ как в распаде $K \rightarrow 2\pi$, так и в распаде $K \rightarrow 3\pi$ в хорошем согласии с экспериментом (см. табл. 2). Диаграммы, описывающие нелептонные распады каонов, приведены на рис. 14.

При вычислении вкладов от этих диаграмм используют лагранжианы сильного (30.3), (30.4) и слабого (31.14), (31.15) взаимодействий мезонов.

Вероятности распадов вычисляются по формулам:

$$W^{(2\pi)} = \frac{1}{(2\pi)^2} |T_{2\pi}|^2 \int \frac{d\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d\mathbf{p}_2}{2E_2} \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - k)}{2m_K} =$$

$$= \frac{|T_{2\pi}|^2 \sqrt{m_K^2 - 4m_\pi^2}}{16\pi m_K^2}; \quad (31.16)$$

$$W^{(3\pi)} = \frac{1}{(2\pi)^5} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d\mathbf{p}_2}{2E_2} \frac{d\mathbf{p}_3}{2E_3} \times$$

$$\times \frac{|T_{3\pi}|^2}{2m_K} \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 - k) \Big|_{T_{3\pi}=\text{const}} \sim$$

$$\sim \frac{|T_{3\pi}|^2 (m_K - 3m_\pi)^2}{2^7 \pi^2 3 \sqrt{3} m_K}, \quad (31.17)$$

где k и p_i — импульсы каона и пиона соответственно.

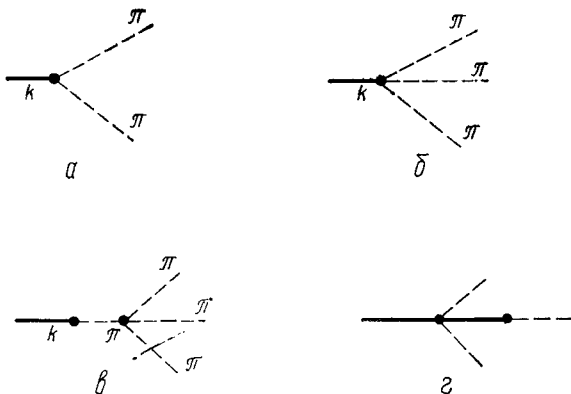


Рис. 14. Диаграммы, описывающие распады $K \rightarrow 2\pi$, 3π в приближении деревьев: обозначения те же, что и на рис. 13

Для примера приближенно оценим амплитуды распадов $K^0_S \rightarrow \pi^+ \pi^-$, $K^0_L \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-$. Учитывая, что основной вклад в распад K_L дает диаграмма рис. 14,б, получаем из (31.14) с учетом изотопических коэффициентов:

$$|T_{K^0_S \rightarrow \pi^+ \pi^-}|^2 \approx \left| 2 \frac{G_w}{\sqrt{2}} m_K^2 F_\pi \right|^2;$$

$$|T_{K^0_L \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-}|^2 \approx \left| \frac{G_w}{\sqrt{2}} \frac{m_K^2}{3} \right|^2.$$

Выводы

Принцип универсальности слабых и электромагнитных взаимодействий адронов и лептонов при низких энергиях сыграл важную роль при установлении исходных положений киральной алгебры токов. Динамические реализации киральной симметрии с помощью феноменологических лагранжианов привели к самосогласованному описанию сильных взаимодействий адронов при низких энергиях. Самосогласованность киральной теории состоит в том, что в пределе низких энергий выживает лишь приближение деревьев (первые борновские члены), а низкоэнергетические константы связи не перенормируются за счет высших поправок, т. е. удовлетворяется требование универсальности. В результате для первых порядков теории возмущений происходит совпадение разложения по степеням энергии с разложением по сильной константе связи.

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЛАГРАНЖИАНОВ С ДИНАМИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Киральные лагранжианы вначале было принято трактовать как феноменологические, которые можно использовать только в классическом приближении. При этом рассматривались лишь древесные диаграммы и описывался предел низких энергий. Затем стала развиваться другая интерпретация киральной теории, согласно которой считалось обоснованным построение квантовой теории для киральных лагранжианов (*квантовой киральной теории*). В настоящей книге мы будем придерживаться последней точки зрения. Будет показано, что квантование киральной теории позволяет продвинуться от области низкоэнергетического предела несколько дальше, и найти коэффициенты низкоэнергетического разложения амплитуд различных мезонных процессов. В результате удастся получить информацию о таких фундаментальных свойствах мезонов, как электромагнитный радиус и поляризуемость, длины рассеяния мезонов и форм-факторы.

Рассмотрим в этой главе общие вопросы, которые связаны с построением квантовой киральной теории и теории возмущений, инвариантной относительно киральной группы.

§ 32. Ковариантная теория возмущений

В первых главах книги была изложена математическая теория, позволяющая получать физически разумные результаты при вычислении петлевых диаграмм в неполиномиальной теории поля. Существенный момент такой теории — суммирование по бесконечному числу степеней обычных пропагаторов с коэффициентами, определяемыми из неполиномиальной формы лагранжиана. Однако функциональная зависимость лагранжиана от полей с одной и той же динамической симметрией может быть

разной в зависимости от выбора координат в пространстве голдстоуновских полей. Поэтому одним из первых шагов должно быть построение теории возмущений, не зависящей от того или иного выбора координат в пространстве голдстоуновских полей. (Далее под словом координаты будет подразумеваться выбор голдстоуновских полей в пространстве G/H .)

Редукции и теорема эквивалентности. Существуют два различных подхода к этой проблеме. В первом — теория возмущений формулируется в полностью инвариантных терминах токов [111]. Во втором — исходными моментами построения инвариантной S -матрицы в произвольной системе координат являются учет всевозможных перестроек матричных элементов за счет «перебрасывания» производных в вершинах на пропагаторы и сведение последних к δ -функциям. Такая перестройка матричных элементов, приводящая к изменению структуры диаграмм Фейнмана (сжатию линий и уменьшению числа вершин), называется *редукцией*. Программа построения редуцированной теории возмущений, т. е. теории возмущений, где сделаны все возможные редукции, в приближении деревьев была выполнена Д. В. Волковым [13, 14]. Он показал, что учет всевозможных редукций полюсных диаграмм к эффективному контактному взаимодействию эквивалентен на массовой поверхности явно ковариантной процедуре перехода от произвольной системы координат к нормальной. Таким образом, в приближении деревьев редуцированная S -матрица в произвольных координатах совпадает с S -матрицей в нормальных координатах, а редукция — механизм, обеспечивающий выполнение теоремы эквивалентности.

Для более четкой постановки задачи полезно рассмотреть простейший пример теории с лагранжианом

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)^2 / 2 - \lambda \varphi^4. \quad (32.1)$$

Физическая теория, соответствующая этому лагранжиану, на массовой поверхности инвариантна относительно точечных преобразований:

$$\varphi = \varphi' f(\varphi'); \quad f(0) = 1. \quad (32.2)$$

Подстановка (32.2) в (32.1) приводит к сложному неполиномиальному лагранжиану взаимодействия с двумя производными.

Учет всех редукций на уровне матричных элементов эквивалентен замене переменных, обратной (32.2). В итоге получаются матричные элементы, соответствующие теории (32.1), в которой редукции отсутствуют.

Основным вопросом, который становится в работах [13, 14, 115], является вопрос: к чему приводит полный учет редукций в произвольной системе координат? Теорема эквивалентности позволяет подойти к проблеме редукций несколько с другой стороны, а именно: как сформулировать теорию возмущений с наиболее простыми редукционными свойствами? Другими словами, как в любой произвольной теории найти аналог лагранжиана $\lambda\phi^4$, для которого отсутствуют редукции, среди всего класса возможных эквивалентных лагранжианов.

Таким образом, задача построения теории возмущений, не зависящей от выбора координат, сводится к построению теории возмущений, где нет перестроек диаграмм — редукций. Такая теория возмущений очень удобна при использовании СП-метода регуляризации, поскольку в ней автоматически происходит разбиение всей совокупности диаграмм на инвариантные множества диаграмм с фиксированным числом вершин. Указанная теория возмущений получила название ковариантной теории возмущений. Она сформулирована непосредственно в терминах форм Картана в работе [117].

Ковариантная теория возмущений. Запишем лагранжиан взаимодействия в теории с динамической симметрией в виде

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = da^i da^j g^I_{ij}(a) + da^i B_i(a, \psi).$$

Здесь a^i — голдстоуновские поля, $i=1, 2, \dots, n$; $g^I_{ij}(a)$ и $B_i(a, \psi)$ — функции от поля a и произвольного поля ψ , которое пока можно рассматривать как классическое. Наличие производных в лагранжиане взаимодействия может приводить к перестройкам матричных элементов в теории возмущений — редукциям. Основная цель этого раздела — формулировка такой теории возмущений, где нет перестроек-редукций. При формулировке этой теории возмущений будем исходить из поиска наиболее простых свойств самого лагранжиана по отношению к редукциям.

Рассмотрим, например, матричный элемент типа

$$\langle 0 | T^* \left(\int d^4x : \mathcal{L}^I(x) : \right)^2 | 0 \rangle.$$

Очевидно, что перестроек-редукций не будет, если при взятии интегралов по частям подынтегральное выражение останется прежним, т. е. если лагранжиан взаимодействия удовлетворяет условию

$$da^i [g_{ij}^i da^j + B_i(a, \psi)] = -a^i d [g_{ij}^i da^j + B_i(a, \psi)]. \quad (32.3)$$

Легко доказать, что такая система координат в пространстве голдстоуновских полей существует и что она единственна. Это — нормальные координаты. Действительно, в этих координатах производные от голдстоуновских полей входят в лагранжиан взаимодействия в комбинации со структурными константами группы

$$da^i C_{ji}^3 a^j \Phi_3(a, \psi, da), \quad (32.4)$$

где Φ_3 — сокращенное обозначение оставшихся сомножителей. Выражение (32.4) удовлетворяет условию (32.3) в силу антисимметрии структурных констант группы C_{ji}^3 по нижним индексам. Переход к любым другим системам координат делается с помощью преобразований

$$a = a' f(a'); \quad f(0) = 1. \quad (32.5)$$

Лагранжиан взаимодействия в нормальных координатах (32.4) после подстановки (32.5) по-прежнему удовлетворяет условию отсутствия редукций (32.3) (в этом смысле по своим редукционным свойствам до и после преобразования (32.5) лагранжиан взаимодействия в нормальных координатах напоминает лагранжианы без производных в теориях типа $\lambda\varphi^4$, где нет редукций, так как нет производных). Однако новый лагранжиан взаимодействия кроме преобразованного выражения (32.4) содержит также кинетическую часть, которая возникает из-за преобразований (32.5) в свободном лагранжиане:

$$da_i da_i / 2 = da'_i da'_i / 2 + \\ + \{d[a'_i f(a')] d[a'_i f(a')] - da'_i da'_i\} / 2.$$

Именно слагаемое в фигурных скобках нарушает условие (32.3) и ответственно (так же как в теории $\lambda\varphi^4$) за появление редукций.

Рассмотрим теперь выражение для S -матрицы:

$$S(\pi) = T \exp \left\{ i \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{вз}}(\pi, \psi) \right\}, \quad (32.6)$$

где

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(\pi, \psi) = \mathcal{L}(\omega(\pi, d\pi), \theta(\pi, d\pi), \psi) - \mathcal{L}_0(\psi) \mathcal{L}_0(\pi).$$

Это выражение эквивалентно производящему функционалу для S -матрицы в виде континуального интеграла с источниками (см., например, [146]) *:

$$S(\pi^{\text{in}}) = (1/N) \int \mu(a) \Pi da \times$$

$$\times \exp \left\{ i \int d^*x [\mathcal{L}(\omega(a, \partial a), \theta(a, \partial a), \psi) - \partial a^i \partial \pi_i^{\text{in}}] \right\}; \quad (32.7)$$

здесь N — нормировка; π^{in} — асимптотическое поле; $\mu(a) \Pi da$ — инвариантная мера на группе, т. е.

$$\begin{aligned} \mu(a) \Pi da &= \mu(a') \Pi da' = \\ &= [\omega^{i_1}(a, da), \omega^{i_2}(a, \delta a), \dots, \omega^{i_n}(a, \partial a)], \end{aligned} \quad (32.8)$$

если $G_a \rightarrow G_b G_a$, где G_b — преобразование группы G .

В интеграле (32.7) можно сделать любой выбор переменных интегрирования. В данном случае выбираем нормальные координаты: $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^N$; $\mu(a) \rightarrow \mu^N(a)$; $G \rightarrow G^N$.

Рассмотрим квазиклассическое разложение функционала (32.7) (вокруг классических полей). Для этого разложения делают замену переменных интегрирования, выделяя классические поля φ , удовлетворяющие уравнению $\delta \mathcal{L}(\varphi) / \delta \varphi^i = -\partial^2 \pi_i^{\text{in}}$, и квантованные поля Γ , по которым ведется интегрирование. Обычная замена переменных

$$a \rightarrow \varphi + \Gamma \quad (32.9)$$

и разложение функции действия в ряд по квантованным полям Γ нарушают условие отсутствия редукций (32.3). Мы должны сделать такую замену переменных, чтобы: 1) выполнялось условие отсутствия редукций относительно полей Γ ; 2) лагранжиан в (32.7) при $\Gamma=0$ являлся лагранжианом от классических полей φ в нормальных координатах. В этом случае производящий функционал для S -матрицы в приближении диаграмм-

* Как известно, выражения для S -матрицы в любой теории можно записать в виде континуального интеграла в фазовом пространстве $\int dpd\varphi \exp \left[i \int dx (p\dot{\varphi} - H(p, \varphi)) \right]$ по независимым каноническим переменным. В киральных теориях интегрирование по каноническому импульсу p приводит к выражению (32.7), которое является прямым обобщением на риманово пространство континуальных интегралов по полям в обычных полевых пространствах.

деревьев

$$S(\pi^{in})_{\text{деp}} = \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(\omega^N(\varphi, \partial\varphi), \theta^N(\varphi, \partial\varphi), \psi) - \right. \\ \left. - \partial\varphi^i \partial\pi_i^{in}] \right\}$$

согласно результатам, полученным Д. В. Волковым [13], дает матричные элементы без редуций.

Естественный путь выделения классических полей без нарушения условий отсутствия редуций — использовать геометрические свойства искривленного риманова пространства гольдстоуновских полей. Это означает, что под суммой векторов (32.9) следует понимать сложение векторов в кривом изопространстве гольдстоуновских частиц (сложение векторов в фактор-пространстве G/H), т. е.

$$K_a^N \rightarrow K_\varphi^N K_\Gamma^N, \quad a \rightarrow \varphi (+) \Gamma \quad (32.10)$$

[K_φ^N определяется (27.6)]. Преобразование (32.10) имеет простой геометрический смысл. Оно определяет систему нормальных координат с началом координат в точке φ . Сами координаты точки φ являются также нормальными координатами.

Формы Картана в новых координатах Γ получаются подстановкой (32.10) в равенство (27.9):

$$[K_\varphi^N K_\Gamma^N]^{-1} d[K_\varphi^N K_\Gamma^N] = i \bar{\omega}^i(\Gamma, d\Gamma | \varphi, d\varphi) X_i + \\ + \bar{\theta}^\alpha(\Gamma, d\Gamma | \varphi, d\varphi) Y_\alpha. \quad (32.11)$$

Вводя параметр $t: \Gamma^i \rightarrow t\Gamma^i$ и дифференцируя правую и левую части уравнения (32.11) по t , приходим к фундаментальным уравнениям Картана, тем же самым, что и в классическом случае (27.10):

$$\partial \bar{\omega}^i / \partial t = \partial \Gamma^i + \Gamma^k \bar{\theta}^3 C_{k\beta}^i; \quad \partial \bar{\theta}^\alpha / \partial t = \Gamma^j \bar{\omega}^i C_{j\beta}^\alpha, \quad (32.12)$$

но с ненулевыми граничными условиями (в нормальных координатах):

$$\bar{\omega}^i(0, 0 | \varphi, d\varphi) = \omega^i(\varphi, d\varphi); \quad \bar{\theta}^\alpha(0, 0 | \varphi, d\varphi) = \theta^\alpha(\varphi, d\varphi). \quad (32.13)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}^t|_{t=1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (m_{\Gamma}^n)^t|_t [\omega^t/(2n)! + \\ &\quad + (D\Gamma)^t/(2n+1)!]; \\ \bar{\theta}^{\beta}|_{t=1} &= \Gamma^j C_{jk}^{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (m_{\Gamma}^n)^k|_t [\omega^t/(2n+1)! + \\ &\quad + (D\Gamma)^t/(2n+2)!] + \theta^{\beta}, \end{aligned} \right\} (32.14)$$

где

$$(D\Gamma)^t = d\Gamma^t + \Gamma^k C_{k\beta}^t \theta^{\beta}(\varphi, d\varphi); (m_{\Gamma}^n)^t|_t = -C_{k\beta}^t \Gamma^k C_{\mu}^{\beta} \Gamma^{\mu}.$$

Для киральной теории $SU(2) \times SU(2)$ в безразмерных переменных получаем

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}^t &= \omega^t + (D\Gamma)^t + (\delta_{it} - \Gamma_i \Gamma_t / \Gamma^2) \times \\ &\quad \times [(D\Gamma)^t (\sin \Gamma / \Gamma - 1) + \omega^t (\cos \Gamma - 1)]; \\ \bar{\theta}^{\beta} &= \Gamma^j \varepsilon_{\beta jk} \left[\frac{\sin \Gamma}{\Gamma} \omega^k + (D\Gamma^k) \frac{1 - \cos \Gamma}{\Gamma^2} \right] + \theta^{\beta}; \\ (D\Gamma)^t &= d\Gamma^t + \varepsilon_{t k \beta} \Gamma^k \theta^{\beta}(\varphi, d\varphi); \Gamma = \sqrt{\Gamma^t \Gamma^t}, \end{aligned} \right\} (32.15)$$

где $\omega^t(\varphi, d\varphi)$, $\theta^{\beta}(\varphi, d\varphi)$ определяются формулами (30.2).

Точно так же, как и формы Картана (27.11), формы (32.14) удовлетворяют условиям отсутствия редукций в силу самого построения этих форм с помощью структурных констант, антисимметричных по нижним индексам.

Итак, учитывая инвариантность меры $\mu(a) \prod da$ при преобразованиях (32.10) [см. (32.8)], производящий функционал для S -матрицы без редукций в переменных (32.10) приведем к виду

$$\begin{aligned} S(\pi^{(in)}) &= \int \mu^N(\Gamma) \Pi d\Gamma \exp \left\{ i \int d^4x \times \right. \\ &\quad \left. \times [\mathcal{L}(\bar{\omega}(\Gamma, d\Gamma | \varphi, d\varphi), \bar{\theta}(\Gamma, d\Gamma | \varphi, d\varphi), \psi) - d\varphi^t d\pi_t^{in}] \right\}. \end{aligned} \quad (32.16)$$

Таким образом, производящий функционал для S -матрицы без редукций есть производящий функционал в нормальных координатах для квантованных полей Γ

с началом координат в точке, нормальными координатами которой являются классические поля φ .

В принципе можно не фиксировать систему координат для полей φ , т. е. при разделении переменных a на φ и Γ в (32.10) использовать преобразование K_{φ} в произвольной параметризации. Это приведет к формам $\bar{\omega}$, $\bar{\theta}$, удовлетворяющим тем же фундаментальным уравнениям, но с граничными условиями (32.13) в произвольной системе координат.

В заключение выпишем минимальный лагранжиан для π - N -взаимодействия с учетом преобразования Гюрсея [65] $\psi = \exp(-i\gamma_5 \tau_i \pi_i / 2) N$ для $g_A = 1$.

Лагранжиан для классических полей φ равен [(30.3), (30.5)]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi) = & \omega^i(\varphi, \partial\varphi) \omega^i(\varphi, \partial\varphi) / 2 + \\ & + \bar{\psi} (i\hat{\partial} - M \exp\{-i\gamma_5 \tau_i \varphi_i\}) \psi. \end{aligned} \quad (32.17)$$

Тогда лагранжиан для классических и квантованных полей имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Gamma + \varphi, \psi) = & \bar{\omega}^i \bar{\omega}^i / 2 + \bar{\psi} [i\hat{\partial} - M \exp\{-i\gamma_5 \tau_i \varphi_i / 2\}] \times \\ & \times \exp\{-i\gamma_5 \tau_i \Gamma_i\} \exp\{-i\gamma_5 \tau_i \varphi_i / 2\} \psi; \end{aligned} \quad (32.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^i \bar{\omega}^i / 2 = & (D_{\mu} \Gamma^a) (D_{\mu} \Gamma^b) g_{ab}(\Gamma) / 2 + \\ & + \omega_{\mu}^a(\varphi) (D_{\mu} \Gamma^b) f_{ab}(\Gamma) + \omega_{\mu}^a(\varphi) \omega_{\mu}^b(\varphi) f(z) \times \\ & \times [\Gamma^a \Gamma^b - \Gamma^2 \delta_{ab}] / 2; \end{aligned} \quad (32.19)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{ab}(\Gamma) = & \delta_{ab} - [f(z) - 1] (\Gamma^a \Gamma^b / \Gamma^2 - \delta_{ab}); \\ f_{ab}(\Gamma) = & (1 - g(z)) (\delta_{ab} - \Gamma^a \Gamma^b / \Gamma^2); \quad z = \sqrt{\Gamma^2}; \\ f(z) = & (\sin z/z)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} C_f(k) \Gamma^{2k}; \quad g(z) = \sin 2z/2z = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} C_g(k) \Gamma^{2k}. \end{aligned} \right\} \quad (32.20)$$

Для вычисления конкретных физических процессов S -матрицу (32.16) удобно представить в виде вакуум-

ного среднего от T -произведения квантованных полей Γ :

$$\left. \begin{aligned} S(\varphi) &= \langle 0 | T^* \left\{ i \int : \mathcal{L}_{\text{вз}}(\Gamma(+)\varphi, \psi) : d^4x \right\} | 0 \rangle, \\ \mathcal{L}_{\text{вз}}(\Gamma(+)\varphi, \psi) &= \mathcal{L}(\Gamma(+)\varphi, \psi) - \mathcal{L}_0(\Gamma) - \mathcal{L}_0(\psi). \end{aligned} \right\} \quad (32.21)$$

Здесь по аналогии с обычной квантовой электродинамикой введено нормальное упорядочение полей Γ в лагранжиане.

§ 33. Вычисление коэффициентов разложения двухточечного суперпропагатора

Рассмотрим для примера упругий процесс пионного рассеяния и вычислим в ковариантной теории возмущений коэффициенты разложения по степеням пропагаторов свободных пионов (рис. 15).

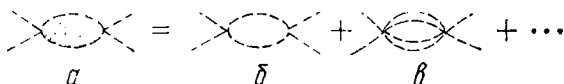


Рис. 15. Суперпропагатор для $\pi\pi$ -рассеяния

Соответствующий функционал S -матрицы четвертого порядка по асимптотическому пионному полю имеет вид

$$S(\pi) = \frac{i^2}{2} \langle 0 | T^*_{\Gamma} \left[: \int d^4x \mathcal{L}^{(2)}(\pi(+)\Gamma) : \right]^2 | 0 \rangle_{\Gamma}, \quad (33.1)$$

где $\mathcal{L}^{(2)}(\pi(+)\Gamma) = \mathcal{L}_I(\pi|\Gamma) + \mathcal{L}_{II}(\pi|\Gamma)$;

$$\mathcal{L}_I(\pi|\Gamma) = (\pi^a \partial_{\mu} \pi^b - \pi^b \partial_{\mu} \pi^a) \Gamma^b \partial_{\mu} \Gamma^a f(z) / 2F_{\pi}^2; \quad (33.2)$$

$$\mathcal{L}_{II}(\pi|\Gamma) = \partial_{\mu} \pi^a \partial_{\mu} \pi^b (\Gamma^a \Gamma^b - \Gamma^2 \delta_{ab}) f(z) / 2F_{\pi}^2 \quad (33.3)$$

есть второй порядок разложения лагранжиана (32.19) по внешним полям π , а $f(z)$ определено в (32.20).

В силу различной симметрии по внешним полям у лагранжианов (33.2) и (33.3) интерференционный член между ними в (33.1) будет отсутствовать. Поэтому выражение (33.1) принимает вид

$$S_I(\pi) = -i \int d^4x_1 d^4x_2 \rho_{\mu}^{ab}(x_1) \rho_{\nu}^{ab}(x_2) \sigma_{\mu\nu}^i(x_1 - x_2) / 2; \quad (33.4)$$

$$S_{II}(\pi) = -i \int d^4x_1 d^4x_2 [(\partial_{\mu} \pi_1)^2 (\partial_{\mu} \pi_2)^2 \times$$

$$\times \sigma_1^{\text{II}}(x_1 - x_2) + (\partial_\mu \pi_1 \partial_\mu \pi_2)^2 \sigma_2^{\text{II}}(x_1 - x_2)]/2, \quad (33.5)$$

где $\rho_\mu^{ab}(x_i) = \pi_i^a \partial_\mu \pi_i^b - \pi_i^b \partial_\mu \pi_i^a$; $\pi_i = \pi(x_i)$.

Чтобы найти $\sigma_{\mu\nu}^{\text{I}}(x_1 - x_2)$, необходимо вычислить выражения типа:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_f(n))^2 \exp\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \Gamma_i} \Delta^c(x_1 - x_2) \frac{\partial}{\partial L_i}\right) \rho_\mu^{ab}(x_1) \times \\ \times \Gamma^\nu \partial_\mu \Gamma^a \Gamma^{2n} \rho_\nu^{cd}(x_2) L^c \partial_\nu L^d L^{2n} |_{L \equiv \Gamma \equiv 0}. \quad (33.6)$$

Выражение (33.6) легко вычисляется с помощью рекуррентных формул, связывающих два ближайших слагаемых под знаком суммы [с индексами (n) и $(n-1)$]. В итоге для (33.6) имеем

$$\rho_\mu^{ab}(x_1) \rho_\nu^{ab}(x_2) \sum_{n=0}^{\infty} (C_f(n))^2 \left[\frac{(2n+3)(2n+1)!}{3} \right] \times \\ \times [-i \Delta^c(x_1 - x_2)]^{2n} i^2 (\partial_\mu \Delta^c(x_1 - x_2) \partial_\nu \Delta^c(x_1 - x_2) - \\ - \partial_\mu \partial_\nu \Delta^c(x_1 - x_2) \Delta^c(x_1 - x_2)), \quad (33.6a)$$

где $\partial_\mu = \partial/\partial x_{1\mu}$.

Окончательно для $\sigma_{\mu\nu}^{\text{I}}(x)$, $\sigma_1^{\text{II}}(x)$, $\sigma_2^{\text{II}}(x)$ получаем

$$\sigma_{\mu\nu}^{\text{I}}(x) = -\frac{i}{4F_\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} (\partial_\mu \Delta^c(x) \partial_\nu \Delta^c(x) - \\ - \Delta^c(x) \partial_\mu \partial_\nu \Delta^c(x)) [-i \Delta^c(x)]^{2n} a^{\text{I}}(n); \quad (33.7)$$

$$\sigma_f^{\text{II}} = -\frac{i}{2F_\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} [\Delta^c(x)]^2 a_f^{\text{II}}(n) [-i \Delta^c(x)]^{2n}; \quad (33.8)$$

$$\left. \begin{aligned} a^{\text{I}}(n) &= R(n) C_f^2(n); & a_1^{\text{II}} &= \frac{6n+5}{5} a^{\text{I}}(n); \\ a_2^{\text{II}} &= \frac{2n+5}{5} a^{\text{I}}(n); & R(n) &= \frac{2(n+3)(2n+1)!}{3}; \\ C_f(n) &= \frac{2^{2n+1}(-1)^n}{F_\pi^{2n}(2n+2)!}. \end{aligned} \right\} \quad (33.9)$$

Заметим, что в нековариантной теории возмущений, не учитывающей редукций, основные результаты зависят от выбора координат; кроме того, выражения, возникающие при раскрытии T -произведения, на порядок сложнее, чем в ковариантной теории возмущений [118].

Характер коэффициентов $a(n)$ определяется геометрией геодезических линий в пространстве голдстоуновских полей. Поскольку для всех физических теорий с динамической симметрией, рассмотренных в гл. 7, структурные уравнения пространства одни и те же, то все эти теории относятся к классу локализуемых теорий (см. гл. 3) в силу факториального характера разложений по нормальным координатам пространства голдстоуновских полей.

Вычисляя вклад от пионной петли в амплитуду рассеяния (31.7) с помощью СП-метода для безмассовых пионов, получаем выражение для амплитуды

$$A^{(\text{петля})}(s, t, u) = -\frac{1}{(4\pi F_\pi)^2 F_\pi^2} \{3s^2 \ln[\alpha_1(-s - i\epsilon)] + t(t-u) \ln[\alpha_2(-t - i\epsilon)] + u(u-t) \ln[\alpha_2(-u - i\epsilon)]\}, \quad (33.10)$$

где $\alpha_1 = (2\pi F_\pi)^{-2} \exp(3C - 101/60)$; $\alpha_2 = (2\pi F_\pi)^{-2} \exp(3C - 57/20)$; $C = 0,577\dots$

§ 34. Перенормировки в нелинейной киральной теории

Рассмотрим здесь схему перенормировок в квантовой киральной теории поля с лагранжианом (32.17)

$$L = \bar{\psi} i \hat{D} \psi - M \bar{\psi} \psi \exp\left(-i\gamma_5 \frac{\pi\pi}{F_\pi}\right) \psi + \omega^i(\pi, \partial_\mu \pi) \omega^i(\pi, \partial_\mu \pi) / 2 \quad (34.1)$$

и исследуем вопрос обоснования разложения в ряд теории возмущений по сильной пион-нуклонной константе связи. Для этой цели найдем низкоэнергетическое разложение поляризационного оператора собственной энергии пиона, соответствующее одно- и двух-петлевому приближению.

Схема перенормировок, тождества Уорда. При вычислении расходящихся диаграмм в теории возмущений будем использовать СП-метод. Наша теория оказывается конечной и без введения контрчленов. Однако независимо от проблемы УФ-расходимостей вычисления по теории возмущений требуют проведения перенормировок различных физических величин. В связи с этим введем в лагранжиан только такие контрчлены, которые дадут перенормировку входящих в исходный лагранжиан (34.1) величин (полей, масс и зарядов), и не будем вводить контрчлены, содержащие новые структуры. При этом нужно позаботиться, чтобы перенорми-

ровки не нарушали исходную киральную симметрию. Такое требование накладывает определенные соотношения на константы перенормировки, что находит свое выражение в существовании киральных тождеств Уорда.

Итак, введение контрчленов в лагранжиан эквивалентно перенормировке входящих в теорию физических величин

$$L(M, F, \psi, \pi) + \Delta L(M, F, \psi, \pi) = L(MZ_M, FZ, \psi \sqrt{Z_\psi}, \pi \sqrt{Z_\pi}). \quad (34.2)$$

Контрчлены, возникающие при перенормировке функции Грина, имеют вид

$$\bar{\psi} i \hat{\partial} \psi (Z_\psi - 1); M \bar{\psi} \psi (Z_2 - 1); \frac{M}{F} \bar{\psi} \pi \psi (Z_3 - 1), \dots; \frac{M}{F^n} \bar{\psi} \pi^n \psi (Z_{n+2} - 1)$$

плюс контрчлены, не содержащие спинорные поля. Из уравнения (34.2) имеем

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_M Z_\psi; \\ Z_3 &= Z_M Z_\psi Z_\pi^{1/2} Z^{-1}; \\ &\dots \\ Z_{n+2} &= Z_M Z_\psi Z_\pi^{n/2} Z^{-n}. \end{aligned} \quad (34.3)$$

Теперь, если мы хотим, чтобы контрчлены в лагранжиане были кирально-инвариантны и повторяли структуру лагранжиана, необходимо потребовать выполнения равенства

$$Z_2 = Z_3 = \dots = Z_{n+2} = \dots \quad (34.4)$$

Это, в свою очередь, приводит к соотношению

$$Z = Z_\pi^{1/2}. \quad (34.5)$$

Полученные тождества Уорда (34.3)–(34.5) являются следствием требования (34.2), а также киральной симметрии лагранжиана. Рассмотрение пион-пионных взаимодействий также приводит к ряду

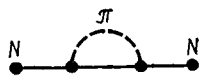


Рис. 16. Диаграмма для оператора собственной энергии нуклона:

— — — пионная линия; — — — — — нуклонная линия

тождеств, связывающих между собой константы перенормировки пионных вершин.

Таким образом, имеем три независимые константы перенормировки: Z_ψ, Z_π, Z_M . Они фиксируются перенормировкой соответствующих перенормированных функций Грина *

$$\Sigma_R(M) = 0; \Sigma'_R(M) = 0; \Pi'_R(0) = 0,$$

где Σ и Π — поляризационные операторы нуклона и пиона соответственно.

* В безмассовом случае $\Pi_R(0) = 0$ при $m_\pi = 0$.

Учитывая тождества (34.3)–(34.5), получаем однозначные конечные выражения для всех функций Грина:

$$G_R = Z_\psi^{-1} G; \quad D_R = Z_\pi^{-1} D; \quad \Gamma_R = Z_\Gamma \Gamma; \quad \square_R = Z_\square \square,$$

где Γ и \square — пнон-пуклонная и пнон-пнонная вершины. Константы перенормировки определяются следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} Z_\psi &= 1 + \Sigma'(M); \quad Z_M = 1 - \Sigma(M)/M; \quad Z_\pi = 1 + \Pi'(0); \\ Z_\Gamma &= Z_M Z_\psi = 1 + \Sigma'(M) - \Sigma(M)/M; \quad Z_\square = Z_\pi. \end{aligned} \right\} \quad (34.6)$$

Вычислим Z_M , Z_ψ , Z_Γ в однопетлевом приближении. Определим сначала константу перенормировки $Z_\Gamma = Z_M Z_\psi$. В однопетлевом приближении вклад в Z_Γ дает только одна диаграмма (рис. 16):

$$\Sigma(p) = -i \frac{3M^2}{(2\pi)^4 F^2} \int \frac{dk(M - \hat{k})}{(k^2 - M^2 + i\varepsilon)[(p - k)^2 + i\varepsilon]}.$$

Этот интеграл, а также все последующие можно выразить через один и тот же расходящийся интеграл J :

$$\Sigma(M) = - (3/2) M \beta (1 + J); \quad \Sigma'(M) = (3/2) \beta (1 + J),$$

где $\beta = [M/(4\pi F)]^2 \approx 0,66$;

$$J(M) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dk}{(k^2 - 2kp + i\varepsilon)(k^2 + i\varepsilon)}, \quad p^2 = M^2. \quad (34.7)$$

Продемонстрируем, как вычисляется конечная часть интеграла $J(M)$ с использованием СП-метода. Для этого рассмотрим, например, выражение, соответствующее перенормировке массы нуклона $\Sigma(M)$ в двухвершинном приближении с любым числом виртуальных пнонов между двумя вершинами. Используя лагранжиан (32.18), получаем для этой величины следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= M^2 \int d^4x \exp(ipx) \left[(M - i\hat{\partial}) \Delta_M(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3)}{(2n+1)!} \times \right. \\ &\times \left. \frac{[-i\Delta_0(x)]^{2n+1}}{F^{1n}} - (M + i\hat{\partial}) \Delta_M(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{(2n)!} \frac{[-i\Delta_0(x)]^{2n}}{F^{1n}} \right]. \end{aligned}$$

Выделяя из него члены без производной, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma(M) &= -M^3 \int d^4x \exp(ipx) \Delta_M(x) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)}{n!} \frac{(i\Delta_0)^n}{F^{2n}} + \right. \\ &\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\Delta_0)^{2n}}{(2n)! F^{1n}} \right] \Big|_{p^2=M^2}. \end{aligned}$$

Для вычисления однопетлевого приближения нам потребуется лишь первая сумма. Записывая ее в виде интеграла Зоммерфельда — Ватсона и вводя промежуточную регуляризацию с помощью параметра γ (см. § 21), получаем

$$\Sigma_{\gamma}(M) = \frac{i\pi^2 M^3}{2F^2} \int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty} dz \frac{\Gamma(-\gamma z)(z+3) \exp(-i\pi z)}{\sin \pi z \Gamma(z) \Gamma(z+2) (4\pi F)^{2z}} J(M, z),$$

де

$$J(M, z) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dk}{(k^2 - 2kp + i\epsilon)(k^2 + i\epsilon)^{1-z}} \Big|_{p^2=M^2} = \\ = -(M^2 \exp(i\pi))^z \Gamma(-z) \Gamma(1+2z) / \Gamma(2+z). \quad (34.8)$$

Интеграл $J(M, z)$ при значении $z=0$ совпадает с интересующим нас интегралом $J(M)$. Однако, в отличие от $J(M)$, интеграл $J(M, z)$ хорошо определен при $\text{Re} z < 0$. В точке же $z=0$ он имеет полюсную особенность. Значение $z=0$ соответствует однопетлевой диаграмме. Выделяя поэтому из $\Sigma(M)$ вклад, соответствующий вычету в точке $z=0$, для функции $J(M)$ находим конечное выражение

$$J_{(\gamma=1)}^{\text{СП}}(M) = \frac{i\pi}{6} \oint_{(z=0)} \left(\frac{M}{4\pi F} \right)^{2z} \frac{\Gamma(1-z) \Gamma(1+2z)(z+3) dz}{\sin^2 \pi z \Gamma^2(1+z) \Gamma^2(2+z)} = \\ = \ln [M/(4\pi F)]^2 + 3c - 5/3 \approx -0,35. \quad (34.9)$$

Заметим, что в ковариантной теории возмущений коэффициенты при $(i\Delta_0)^n$ в сумме по n одинаковы во всех интересующих нас диаграммах. Поэтому величина $J^{\text{СП}}(M)$ не зависит от того, какую диаграмму мы используем для получения СП. Далее, согласно (34.6) находим:

$$\left. \begin{aligned} Z_M &= 1 - \Sigma(M)/M = 1 + (3/2) \beta(1+J); \\ Z_{\psi} &= 1 + \Sigma'(M) = 1 + (3/2) \beta(1+J); \\ Z_{\Gamma} &= Z_M Z_{\psi} = 1 + 3\beta(1+J). \end{aligned} \right\} \quad (34.10)$$

Оценка вклада одно- и двухпетлевого приближений. При вычислении таких величин, как электромагнитный форм-фактор пиона или поляризуемость пиона, в однопетлевом приближении будут рассмотрены диаграммы, содержащие две вершины сильного взаимодействия (см. § 37). При этом естественно возникает вопрос о том, каков будет вклад от высших порядков теории возмущений по сильной константе связи. Чтобы ответить на него, рассмотрим однопетлевую диаграмму с двумя сильными вершинами и оценим вклад от двухпетлевого приближения, представленного на рис. 17. Диаграмме рис. 17,а соответствует следующее выражение:

$$\delta_{ij} \Pi^{(1)}(p^2) = \delta_{ij} (p^2 R(p^2) + \text{const}) = \\ = i \frac{M^2}{(2\pi)^4 F^2} \int dk \text{Sp} \{ \gamma_5 \tau_i (M - \hat{k})^{-1} \tau_j \gamma_5 (M - \hat{k} - \hat{p})^{-1} \},$$

где $R(p^2) = -i \left(\frac{M}{2\pi^2 F} \right)^2 \int \frac{dk}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)((k+p)^2 - M^2 + i\epsilon)}$.

В дальнейшем (см. § 37) будет показано, что электромагнитный радиус пиона, вычисленный в однопетлевом приближении, совпадает со значением второй производной от функции $\Pi^{(1)}(p^2)$, взятой при $p^2 = m_\pi^2$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p^2} \right)^2 \Pi^{(1)}(p^2) \Big|_{p^2=m_\pi^2} = \frac{2}{3} \frac{1}{(4\pi F_\pi)^2} = a. \quad (34.11)$$

Покажем теперь, к каким поправкам приведет учет следующего, двухпетлевого приближения (см. рис. 17,б—17,д). Прежде всего заметим, что эти четыре диаграммы с вершинами из лагранжиана

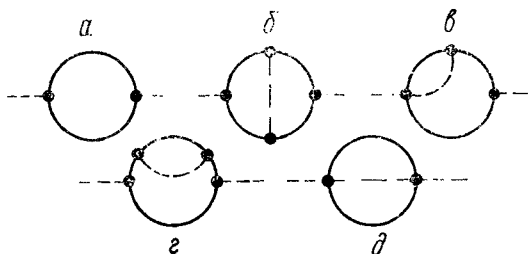


Рис. 17. Диаграммы для оператора собственной энергии пиона (двухпетлевые приближения).

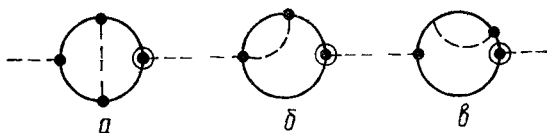


Рис. 18. Набор двухпетлевых диаграмм для оператора собственной энергии пиона с одной аксиальной вершиной, эквивалентный двухпетлевым диаграммам рис. 17, где все вершины — псевдоскалярные.

взаимодействия (34.1), эквивалентны трем диаграммам, изображенным на рис. 18, где одна из вершин с псевдоскалярной связью заменена вершиной с псевдовекторной связью. Этим диаграммам соответствует выражение

$$\Pi^{(2)} = \Pi_a^{(2)} + \Pi_b^{(2)} + \Pi_g^{(2)},$$

где

$$\delta_{ij} \Pi_a^{(2)} = \frac{i^2}{(2\pi)^8} \frac{M^4}{F^4} \int \frac{dk dq}{[-(k-q)^2]} \text{Sp} \{ \gamma_5 \tau_i G(k) \tau_k \gamma_5 G(q) \times \\ \times \widehat{p} \gamma_5 \tau_j G(p+q) \gamma_5 \tau_k G(p+k) \} = -\frac{4}{(4\pi F)^2} \beta (2A + B_1) \delta_{ij};$$

$$\delta_{ij}\Pi_6^{(2)} = -\frac{1^2}{(2\pi)^8} \frac{M^4}{F^4} 2 \int \frac{dkdq}{[-(k-q)^2]} \text{Sp} \{G(q)\gamma_5\tau_i G(k) \times \\ \times \widehat{p}\gamma_5\tau_j G(p+k)\} = -\frac{2 \cdot 4}{(4\pi F)^2} \beta (-2A + B_2) \delta_{ij};$$

$$\delta_{ij}\Pi_8^{(2)} = \frac{1^2}{(2\pi)^8} \frac{M^4}{F^4} 2 \int \frac{dkdq}{[-(k-q)^2]} \text{Sp} \{\gamma_5\tau_i G(k)\gamma_5\tau_k G(q)\gamma_5\tau_k \times \\ \times G(k)\widehat{p}\gamma_5\tau_j G(p+k)\} = -\frac{6 \cdot 4}{(4\pi F)^2} \beta (A + B_3) \delta_{ij}.$$

Здесь A и B_i выражаются через расходящиеся интегралы:

$$A = \frac{M^2}{\pi^4} \int dkdq \frac{p(k-q)}{[(p+k)^2 - M^2][k^2 - M^2][q^2 - M^2](k-q)^2};$$

$$B_1 = \frac{M^2 p^2}{\pi^4} \left[\int \frac{dk}{[(p+k)^2 - M^2][k^2 - M^2]} \right]^2;$$

$$B_2 = \frac{1}{\pi^4} \int dkdq \frac{pq - p^2/2}{[(p+k)^2 - M^2][(q+k)^2 - M^2]q^2};$$

$$B_3 = \frac{M^4 p^2}{\pi^4} \int \frac{dk}{[(p+k)^2 - M^2][k^2 - M^2]^2} \int \frac{dq}{(q^2 - M^2)q^2}.$$

Вторые производные от этих величин в отличие от (34.11) уже не выражаются через конечные интегралы, а содержат логарифмическую расходимость. Оказывается, что все эти величины опять можно выразить через интеграл J [см. (34.7)], который вычисляется с использованием СП-метода, причем форма СП останется прежней. С учетом указанного выше получаем

$$(\partial/\partial p^2)^2 A/2 = -(2 + J)/24; \quad (\partial/\partial p^2)^2 B_1/2 = (2 + J)/3;$$

$$(\partial/\partial p^2)^2 B_2/2 = (7/6 + J)/24; \quad (\partial/\partial p^2)^2 B_3/2 = -J/12.$$

Таким образом, полный вклад от перенормированных диаграмм рис. 18, а—в (или рис. 17, б—д) оказывается равным

$$\alpha x_1 = \alpha \beta [(3/2)J + 5/12 - 3]. \quad (34.12)$$

Учет перенормировки вершин в диаграмме рис. 17, а дает дополнительно вклад [см. (34.10)]

$$\alpha x_2 = 6\alpha \beta (1 + J). \quad (34.13)$$

Наконец, остается учесть еще вклады от перенормировок нулевых функций Грина и массы нуклона [см. (34.10)]. Эти перенормировки приводят соответственно к величинам

$$\alpha x_3 = -3\alpha \beta (1 + J); \quad \alpha x_4 = -3\alpha \beta J. \quad (34.14)$$

Складывая выражения (34.12)—(34.14), окончательно получаем для двухпетлевого приближения

$$x = \beta [(3/2)J + 5/12] \approx 0,1\beta \approx 0,066.$$

Таким образом, вторую производную по p^2 от выражения, соответствующего диаграммам рис. 17, можно записать в форме

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p^2} \right)^2 [\Pi^{(1)}(p^2) + \Pi^{(2)}(p^2)]|_{p^2=0} = \\ & = (1+x) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p^2} \right)^2 \Pi^{(1)}(p^2), \end{aligned}$$

где x — величина, существенно меньшая единицы. Отсюда видно, что основной вклад в функцию Грина пиона с концами, лежащими на массовой поверхности, дает однопетлевое приближение.

Выводы

При построении теории возмущений для киральных лагранжианов возникают две основные проблемы:

1) формулировка теории возмущений, в которой результаты вычисления СП не должны зависеть от выбора координат в пространстве голдстоуновских полей;

2) проблема обоснования теории возмущений по сильной константе связи при вычислениях низкоэнергетического разложения амплитуд.

Прежде чем вычислять СП в неполиномиальных теориях с динамической симметрией, необходимо сделать все возможные перестройки диаграмм Фейнмана, называемые редукциями. Учет всех редукций ведет к результатам, не зависящим от выбора координат в пространстве голдстоуновских полей. Он эквивалентен явно ковариантному переходу от произвольной системы координат к системе нормальных координат, где внешние (связанные с внешними концами) и внутренние (связанные с пропагаторами) поля разделены по правилу сложения векторов в кривом изопространстве. Теория возмущений в таких координатах является ковариантной. При этом коэффициенты разложения СП носят факториальный локализуемый (гл. 3) характер для всех динамических теорий. Эти коэффициенты определяются геометрией геодезических линий в пространстве полей, а структура пространства одна и та же для всех спонтанно нарушенных теорий с произвольной полупростой группой G .

В киральной теории $SU(2) \times SU(2)$ показано, что разложение по петлям поляризационного оператора пиона совпадает в первом порядке с разложением по импульсу. Двухпетлевое приближение дает вклад только в высшие порядки низкоэнергетического разложения.

ОПИСАНИЕ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ
В КВАНТОВОЙ КИРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

В последующих трех главах будут изложены результаты вычисления амплитуд сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий мезонов в однопетлевом приближении квантовой теории поля с киральной динамической симметрией. Скажем еще несколько слов об используемой здесь теории возмущений. Симметрия лагранжиана приводит к тому, что первые порядки разложения амплитуд по степеням энергии начинают совпадать с первыми порядками теории возмущений по константе связи. Этот факт хорошо установлен для приближения деревьев Дашеном и Вайнштейном [138]. Какие имеются основания утверждать, что однопетлевое приближение столь же корректно? Для выяснения этого вопроса рассмотрим отдельно мезон-мезонные и мезон-барионные взаимодействия.

Прежде всего заметим, что в киральной теории возникает внутренний масштаб энергии, равный $4\pi F_\pi \approx 1,2 \text{ Гэв}$ (F_π — константа распада пиона). В дальнейшем все процессы будут рассматриваться при энергиях существенно меньших этого значения. Для мезон-мезонных взаимодействий имсет место следующая ситуация. При построении теории возмущений параметрами разложения служат

$$[m_\pi/(4\pi F_\pi)]^2 \approx 0,015; [m_K/(4\pi F_\pi)]^2 \approx 0,17;$$

$$q^2/(4\pi F_\pi)^2 \ll 1,$$

т. е. использование теории возмущений вполне оправдано. Однако существует другая трудность, связанная с УФ расходимостями, которые нельзя устранить методами обычной ренормируемой теории поля. Поэтому здесь приходится использовать СП-метод, пригодный для описания теории поля с неполиномиальными лагранжианами [44].

Для мезон-барионного взаимодействия УФ расходимости в однопетлевом приближении устраняются обычными методами ренормируемых теорий поля с привлечением условий градиентной инвариантности теории и с использованием низкоэнергетических теорем алгебры токов и условий ЧСАТ. Но трудность возникает здесь при использовании теории возмущений, так как параметр разложения уже не является малым: $[M_N/(4\pi F_\pi)] \approx 0,66$.

Однако сильные вершины в барионных петлях при низких энергиях мезонных концов оказываются в том же энергетическом режиме, что и в древесных диаграммах. Поэтому, согласно низкоэнергетическим теоремам, эти диаграммы должны дать основной вклад в соответствующий им низший порядок разложения амплитуд по энергиям, что подтверждается прямыми вычислениями (см. § 34).

Прежде чем перейти к изложению результатов, полученных в однопетлевом приближении, заметим, что в нашем подходе будут использованы три известных параметра: 1) константа распада пиона $F_\pi = 92 \text{ Мэв}$; 2) параметр смешивания f - и d -связей $SU(3)$ -теории $\alpha = 2/3$; 3) константа связи аксиального тока, входящая в тождество Голдбергера — Треймана: $\bar{g} = g_A M_N / F_\pi$ (\bar{g} — сильная константа; $g_A = 1,25$).

§ 35. Вычисление амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния в однопетлевом приближении

В гл. 9 уже говорилось о том, что многие авторы используют киральные лагранжианы для построения квантовой теории поля. Здесь рассмотрим один из примеров такого подхода. Речь будет идти о работах [118—120, 124, 125], в которых изучалось низкоэнергетическое рассеяние пионов на основе квантовой киральной теории. Все расчеты в этих работах проводились в однопетлевом приближении. Это приближение будет использоваться и ниже для изучения электромагнитных и слабых взаимодействий мезонов. Кроме того, будет использован СП-метод регуляризации, характерный для неполиномиальных теорий.

Для простоты полезно вычислить сначала амплитуду рассеяния безмассовых пионов с точной киральной сим-

метрией. Далее будет рассмотрен реальный случай мезонов с массой m_π .

Киральный лагранжиан для $\pi\pi$ -взаимодействия в низшем порядке по константе $1/F_\pi$ имеет вид [см. (6.2)]:

$$\mathcal{L}_{\pi\pi} = -\pi^2 (\partial_\mu \pi)^2 / (2F_\pi)^2. \quad (35.1)$$

Покажем, какой вклад дает этот лагранжиан в «древесном» приближении в амплитуду $\pi\pi$ -рассеяния. Эту амплитуду в общем виде можно записать в форме [см. (31.7)]:

$$\left. \begin{aligned} \langle i_1 i_2 | S | i_3 i_4 \rangle = & I + i (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 + p_2 - p_3 - \\ & - p_4) [\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \mathcal{A}(s, t, u) + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \mathcal{A}(t, s, u) + \\ & + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} \mathcal{A}(u, t, s)]; \\ \mathcal{A}(s, t, u) = & \mathcal{A}(s, u, t), \end{aligned} \right\} \quad (35.2)$$

где I — единичная матрица; s, t, u — мандельштамовские переменные; i_h — изотопические индексы; δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда в древесном приближении лагранжиан (35.1) приводит для амплитуды $\mathcal{A}(s, t, u)$ к выражению

$$\mathcal{A}(s, t, u) = s/F_\pi^2, \quad (35.3)$$

согласующему с низкоэнергетическими теоремами алгебры токов. Оставшаяся часть амплитуды должна содержать члены с более высокими степенями по импульсам пионов. Попытаемся найти их, исходя из низкоэнергетического приближения (35.3) и унитарности амплитуды.

Сначала найдем мнимую часть амплитуды, содержащую члены, пропорциональные q^4 , где q — импульс пионов в системе центра масс*. Вычисления надо проводить в s -, t - и u -каналах. Можно показать, что мнимая часть амплитуды, содержащая q^4 -члены, определяется однопетлевой пионной диаграммой (см. рис. 15,б), где в вершинах стоит лагранжиан (35.1).

Действительно, при использовании уравнений, следующих из унитарности S -матрицы и позволяющих выразить $\text{Im } \mathcal{A}$ через билинейную по \mathcal{A} сумму по полному набору двух пионных амплитуд, нам необходимо будет

* В системе центра масс все мандельштамовские переменные выражаются через q^2 : $s = 4q^2$; $t = -q^2(1 - \cos \theta)$; $u = -2q^2(1 + \cos \theta)$; θ — угол между налетающей частицей I и вылетающей Z .

удержать лишь члены с двумя пионами в промежуточном состоянии. Это происходит по следующим причинам. Промежуточные состояния с n пионами имеют множитель q^{2n-1} от фазового объема с n безмассовыми частицами [см. (13.5)]. Так как произведение амплитуд помимо фазового множителя содержит еще и собственный множитель, пропорциональный q^4 [см. (35.3)], то уже первый неупругий вклад в $\text{Im } \mathcal{A}$ (от процесса $2\pi \rightarrow 4\pi$) будет порядка q^8 и им можно пренебречь в нашем приближении. Неупругие каналы, вовлекающие массивные частицы, также не существенны при малых значениях q^2 .

Итак, мнимая часть $\pi\pi$ -амплитуды в q^4 -приближении полностью определяется однопетлевой пионной диаграммой с четырехпионными вершинами (35.1). Прямое вычисление дает результат

$$\text{Im } \mathcal{A}(s, t, u) = [3s^2\theta(s) + t(t-u)\theta(t) + u(u-t) \times \\ \times \theta(u)] / 6\pi (2F_\pi)^4. \quad (35.4)$$

Зная поведение мнимой части амплитуды при малых значениях импульса q^2 , можно попытаться восстановить и реальную часть, используя, например, дисперсионные соотношения. Не прибегая к строгому выводу, покажем качественно, как восстанавливается реальная часть \mathcal{A} .

При фиксированных значениях t величину $\mathcal{A}(s, t, u)$ можно считать граничным значением аналитической функции с разрезами при $s > 0$ и $u > 0$. Поведение этой функции в точке $s = u = 0$ определяется разрывом вблизи начала разреза, который задан мнимой частью (35.4). Чтобы определить полный вид $\mathcal{A}(s, t, u)$, заметим, что функции

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\pi^2 (2F_\pi)^4} s^2 \ln[\alpha_1(-s - i0)], \\ -\frac{1}{6} \frac{1}{\pi^2 (2F_\pi)^4} u(u-t) \ln[\alpha_2(-u - i0)]$$

обладают разрывом, целиком совпадающим с тем, который требуется формулой (35.4). Зависимость амплитуды от t можно определить, используя условие поперечной симметрии $\mathcal{A}(s, t, u)$ (t - и u -симметрия). Остающийся при этом произвол, имеющий порядок q^4 , представляется квадратичной формой по s, t, u , которая симметрична по переменным t и u . Ее можно записать в виде $c_1 s^2 +$

$+c_2(t-u)^2$. Этот произвол уже учтен введением параметров α_1 и α_2 в логарифмические члены.

Итак, в q^4 -приближении амплитуда $\mathcal{A}(s, t, u)$ должна иметь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s, t, u) = & \frac{s}{F_\pi^2} - \frac{1}{6\pi^2(2F_\pi)^4} \{3s^2 \ln[\alpha_1(-s-i0)] + \\ & + t(t-u) \ln[\alpha_2(-t-i0)] + u(u-t) \ln[\alpha_2(-u-i0)]\} + \\ & + O(q^6), \end{aligned} \quad (35.5)$$

где α_1 и α_2 — два неопределенных параметра. В дальнейшем мы определим их, используя однопетлевое приближение и СП-метод.

Основанием для использования теории возмущений при определении параметров α_1 и α_2 служит теорема Адлера — Вейнберга, согласно которой низкоэнергетический предел первого порядка теории возмущений дает точный результат. Следовательно, поправки от высших порядков теории возмущений должны быть малы при малых значениях импульсов. Поэтому использование кирально-инвариантного лагранжиана дает возможность получить основные результаты по описанию низкоэнергетических взаимодействий адронов в первых порядках теории возмущений.

Вклад в амплитуду $\mathcal{A}(s, t, u)$ от пионной петли был вычислен в § 33 [см. (33.10)]. Полученное там выражение для амплитуды совпадает с (35.5), но только включает известные параметры $\alpha_1^{(\pi)}$ и $\alpha_2^{(\pi)}$. Остановимся теперь на вычислении вкладов в α_i от барионных петель. Прежде всего рассмотрим пион-нуклонные взаимодействия.

Для расчетов в однопетлевом приближении нам понадобятся лишь низшие порядки разложения по $1/F_\pi$ кирального лагранжиана (30.5), описывающего π - N -взаимодействие [см. (6.9a)]:

$$\mathcal{L}_{\pi N} = +i \frac{M_N}{F_\pi} : \bar{\Psi} \gamma^5 \tau \pi \Psi : + \frac{M_N}{2F_\pi^2} : \bar{\Psi} \Psi \pi^2 :. \quad (35.6)$$

Учет взаимодействия (35.6) приводит к появлению трех петлевых нуклонных диаграмм, изображенных на рис. 19, а, в, д. Условия, следующие из низкоэнергетических теорем, позволяют вычислить вклад от этих диа-

грамм в амплитуду рассеяния без появления каких-либо неопределенных параметров. Действительно, из этих теорем следует, что сумма всех диаграмм, пропорциональных $1/F_\pi^4$, не должна давать вклада в члены, не зависящие от q^2 или пропорциональные q^2 . Вычисление вклада в члены, пропорциональные q^4 , дает конечный результат, равный

$$\mathcal{A}_{(a)} = 2s^2/[5\pi^2 (2F_\pi)^4]; \quad \mathcal{A}_{(b)} = -2s^2/[15\pi^2 (2F_\pi)^4];$$

$$\mathcal{A}_{(d)} = (-9s^2 + 5t^2 + 5u^2)/[15\pi^2 (2F_\pi)^4].$$

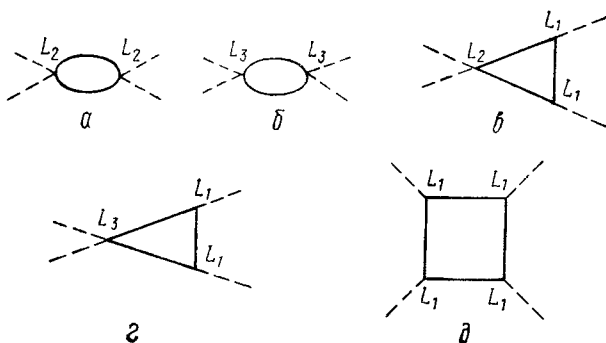


Рис. 19. Барийные однопетлевые диаграммы для $\pi\pi$ -рассеяния из лагранжиана (35.6a)

Следовательно, общий вклад от всех нуклонных диаграмм

$$\mathcal{A}_N = -(s^2 - t^2 - u^2)/[3\pi^2 (2F_\pi)^4] + O(q^6). \quad (35.7)$$

Остающиеся члены имеют порядок малости $(q^2/M_N^2) \times (q^4/F_\pi^4)$, и их можно отбросить при малых q^2 .

Следует обратить внимание на тот факт, что пион-нуклонные вершины, входящие в лагранжиан (35.6), должны быть дополнительно перенормированы. Это следует уже из тождества Голдбергера — Треймана:

$$g_{\pi NN} = \bar{g} = g_A M_N / F_\pi.$$

Корректную перенормировку пион-нуклонных вершин на массовой поверхности можно получить из низкоэнергетических теорем для πN -рассеяния [138]. Лагранжиан

πN -взаимодействий, который получается из этих теорем в древесном приближении, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi N} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 = & i g_A \frac{M_N}{F_\pi} : \bar{\psi} \gamma_5 \tau \pi \psi : + \\ & + g_A^2 \frac{M_N}{2F_\pi^2} : \bar{\psi} \psi \pi^2 : + \frac{g_A^2 - 1}{4F_\pi^2} : \bar{\psi} \gamma^\mu \tau (\pi \times \partial_\mu \pi) \psi :. \end{aligned} \quad (35.6a)$$

В отличие от лагранжиана (35.6), здесь не только появилась перенормировочная константа g_A , но и дополнительный член с производной от пионного поля.

По поводу возникновения константы g_A в лагранжиане (35.6a) существуют различные мнения. Так, например, Леман считает [118, 119], что аксиальная константа $g_A = 1,25$ не является независимым параметром, а есть эффект учета поправки к сильной вершине от высших порядков теории возмущений: $g_A = g_A(M_N/F_\pi)$, $g_A(0) = 1$. Нам кажется более естественным, особенно с позиций $SU(3) \times SU(3)$ -симметричного лагранжиана (30.15), считать, что появление g_A связано с введением в лагранжиан дополнительного кирально-инвариантного члена, имеющего связь с производной вида $\bar{\psi} U + (\pi/F_\pi) \gamma^\mu \psi \partial_\mu U (\pi/F_\pi)$.

Покажем, как лагранжиан (35.6a) можно получить непосредственно из (30.15). Для этого в той части лагранжиана (30.15), которая описывает мезон-барионные взаимодействия, оставим только члены линейные и квадратичные по мезонным полям. Затем переопределим барионное поле B_i (см. [120]):

$$\begin{aligned} B_i = & \psi_i - i (g_A/F_\pi) [\bar{\alpha} d_{ijk} - i (1 - \bar{\alpha}) f_{ijk}] \gamma_5 \psi_j M_k - \\ & - (g_A^2/2F_\pi^2) [\bar{\alpha} d_{ilm} - i (1 - \bar{\alpha}) f_{ilm}] [\bar{\alpha} d_{jkn} - i (1 - \bar{\alpha}) f_{jkn}] M_e M_k \psi_j. \end{aligned}$$

S -матричные элементы при этом преобразовании не меняются. После преобразования приходим к трем лагранжианам:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & 12 g_A \frac{M}{F_\pi} [\bar{\alpha} d_{ijk} - i (1 - \bar{\alpha}) f_{ijk}] \bar{\psi}_i \gamma_5 \psi_j M_k; \\ \mathcal{L}_2 = & 2 g_A^2 \frac{M}{F_\pi^2} [\bar{\alpha} d_{kim} - i (1 - \bar{\alpha}) f_{kim}] [\bar{\alpha} d_{ljm} - i (1 - \bar{\alpha}) f_{ljm}] \times \\ & \times \bar{\psi}_i \psi_l M_j M_k; \\ \mathcal{L}_3 = & \frac{i}{2F_\pi^2} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_l M_j \partial_\mu M_k \left\{ f_{ilm} f_{kjm} (g_A^2 - 1) + \right. \\ & + g_A^2 \left[\frac{2\bar{\alpha}^2}{3} (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl}) + \right. \\ & \left. \left. + 2\bar{\alpha} (\bar{\alpha} - 1) f_{kjm} (f_{ilm} - i d_{ilm}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (30.15b)$$

Если оставить здесь лишь пионные и нуклонные поля, то получим точно лагранжиан (35.6а).

Во всех дальнейших приложениях нам будут необходимы только те части мезон-барионных лагранжианов, которые содержат мезонные поля в степенях не выше второй, поэтому можно использовать только что полученную форму лагранжиана взаимодействия.

Теперь в приближении $q^4(1/F_\pi^4)$ в амплитуду $\mathcal{A}(s, t, u)$ будут давать вклад уже пять однопетлевых нуклонных диаграмм (см. рис. 19,а—д). Две из них (см. рис. 19,б и г) содержат вершины, в которые входит связь с производной \mathcal{L}_3 , причем диаграмме рис. 19,б (с двумя вершинами \mathcal{L}_3) соответствует расходящийся коэффициент даже в q^4 -члене.

Однако, поскольку вершины, связанные с \mathcal{L}_3 содержат малый множитель $(g_A^2 - 1)$, Леман [118, 119] не рассматривал диаграмму рис. 19,б и г. Тогда оставшиеся диаграммы дают конечный вклад в амплитуду \mathcal{A} , равный

$$\mathcal{A}_N = g_A^4 (-s^2 + t^2 + u^2) / [3\pi^2 (2F_\pi)^4]. \quad (35.7a)$$

Наконец, чтобы учесть вклад в амплитуду от петлевых диаграмм всех остальных членов барионного октета, следует рассмотреть $SU(3) \times SU(3)$ -симметричный лагранжиан (30.15). Подобные расчеты проделаны в работе [120]. Не останавливаясь на деталях этих вычислений, укажем только, что та часть лагранжиана, которая соответствует взаимодействию с производной, уже не будет содержать перед всем выражением малого множителя $(g_A^2 - 1)$. Поэтому в работе [120] рассмотрены также и диаграммы рис. 19,б и г. Сделанные там оценки показали, что если неопределенную константу, содержащуюся в выражении, соответствующем диаграмме рис. 19,б, зафиксировать, исходя из правильного положения ρ -резонанса в p -волне, то можно увидеть, что вклад в амплитуду от этой диаграммы очень мал по сравнению с остальными вкладами. Так что ее можно будет не учитывать в дальнейших вычислениях. Оставшиеся четыре диаграммы дают следующее значение для барионных вкладов в \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}_B = [-2s^2 + 3(t^2 + u^2)] / [3(4\pi F_\pi^2)^2]. \quad (35.8)$$

Учет K -мезонных петель в области малых q^2 мало существен.

Итак, учтены все вклады однопетлевого приближения в q^4 -члены амплитуды $\mathcal{A}(s, t, u)$. Это соответствует рассмотрению всех диаграмм в $(1/F_\pi^4)$ -порядке теории возмущений. В заключение этого параграфа покажем, как обобщаются полученные здесь формулы при последовательном учете массы пиона [124, 125]:

$$\mathcal{A}(s, t, u)/(4\pi)^2 = \alpha_0(3\bar{s} - 1) + \alpha_0^2 \Pi(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}); \quad (35.9)$$

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}) = & (A_\pi + A_B)\bar{s}^2 + (B_\pi + B_B)(\bar{t}^2 + \bar{u}^2) + \\ & + C_\pi\bar{s} + D_\pi - J(\bar{s})(3\bar{s} - 1)^2 - J(\bar{u})[3(\bar{u} - 1)(\bar{u} - \bar{t}) + \\ & + 3\bar{u} - 1] - J(\bar{t})[3(\bar{t} - 1)(\bar{t} - \bar{u}) + 3\bar{t} - 1], \quad (35.10) \end{aligned}$$

где $\bar{\zeta} = \zeta/4m_\pi^2$; ($\zeta = s, t, u$); $\alpha_0 = [m_\pi/(2\pi F_\pi)]^2/3$;

$$\begin{aligned} J(\bar{\zeta}) = & 1 - \frac{1}{2} \sum_1^\infty (4\bar{\zeta})^n \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \\ = & \begin{cases} Y \operatorname{arctg} Y^{-1}; & 0 < \bar{\zeta} < 1; & Y = (1/\bar{\zeta} - 1)^{1/2}; \\ \bar{Y}/2 \{-i\pi + \ln[(1 + \bar{Y})/(1 - \bar{Y})]\}; & 1 < \bar{\zeta}; \\ \bar{Y}/2 \{\ln[(\bar{Y} + 1)/(\bar{Y} - 1)]\}; & \bar{\zeta} < 0; & \bar{Y} = (1 - 1/\bar{\zeta})^{1/2}. \end{cases} \quad (35.11) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в (35.9) — борновское приближение, второе — вклад от петлевых диаграмм. Вклад от барионных петель дается коэффициентами A_B, B_B : $A_B = -6$, $B_B = 9$.

Коэффициенты A_π, B_π, C_π и D_π фиксируются с помощью СП-метода вычисления: $A_\pi = 5,5$; $B_\pi = 11$; $C_\pi = 3$; $D_\pi = -3/2$. В области энергий, существенно меньших $4\pi F_\pi$, формула (35.9) является разложением амплитуды упругого рассеяния пионов по малому параметру α_0 :

$$\alpha_0 = [m_\pi/(2\pi F_\pi)]^2/3 \approx 2/103. \quad (35.12)$$

Массовый пионный член в лагранжиане, нарушающий киральную симметрию, выбирается здесь согласно работе [66] [см. (30.9)].

§ 36. Фазовый анализ, длины парциальных волн и неравенства Мартена

Фазовый анализ для s - и p -волн. При вычислении парциальных амплитуд удобно использовать формулу

$$J_n(a) = \int_0^a dx J(-x) x^n = \frac{a^{n+1}}{2(n+1)} \left(\Gamma - \frac{1}{n+1} \right) +$$

$$+ \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+2} (n+1)!} \left[\frac{L}{2} + \sum_{l=1}^n (-2a)^l \frac{(l-1)!}{(2l-1)!!} \left(\Gamma - \frac{1}{l} \right) \right],$$

где $\Gamma = Y \ln [(Y+1)/(Y-1)]$; $L = [\ln(Y+1)/(Y-1)]^2$; $Y = (1+1/a)^{1/2}$; $a = \bar{s} - 1$. В результате приходим к выражению

$$t_l^I = \frac{\pi}{2} a_0 B_l^I(\bar{s}) + i \left(\frac{\pi}{2} a_0 B_l^I(\bar{s}) \right)^2 (1 - 1/\bar{s})^{1/2} +$$

$$+ \frac{\pi}{2} a^2 \Pi_l^I(\bar{s}). \quad (35.13)$$

Здесь B_l^I — вклад от борновского члена; Π_l^I — реальная часть вклада от однопетлевых диаграмм;

$$B_0^0 = 2(3\bar{s} - 1); \quad B_0^2 = -(3\bar{s} - 1); \quad B_1^1 = (\bar{s} - 1);$$

$$\Pi_0^0 = -\operatorname{Re} J(\bar{s}) 4(3\bar{s} - 1)^2 - 12 [5J_2(a)/a +$$

$$+ (3/a - 1)J_1(a) - J_0(a)] + 2a^2(4B + A)/3 +$$

$$+ \bar{s}^2(2B + 3A) + C_\pi(2\bar{s} + 1) + 5D_\pi;$$

$$\Pi_0^2 = -\operatorname{Re} J(\bar{s})(3\bar{s} - 1)^2 - 6 [4J_2(a)/a + (a+3)J_1(a)/a +$$

$$+ (a+1)J_2(a)/a] + 2a^2(A+B)/3 + 2B\bar{s}^2 - aC_\pi + 2D_\pi;$$

$$\Pi_1^1 = -\operatorname{Re} J(\bar{s})a^2 + \frac{2}{a} [6(2J_2(a)/a - J_2(a)) -$$

$$- 3(a-1)(2J_2(a)/a - J_1(a)) - (3a+1)(2J_1(a)/a -$$

$$- J_0(a))] + a^2(B-A)/3 + aC/3.$$

Фазы рассеяния будем вычислять, используя хорошо известную формулу двухчастичной унитарности:

$$(\operatorname{ctg} \delta_l' - i)^{-1} = (1 - 1/\bar{s})^{1/2} t_l'. \quad (35.14)$$

Формула (35.13) унитарна в околороговой области энергий $\bar{s} \approx 1$ с точностью до α^3_0 . Для того чтобы извлечь информацию о фазе рассеяния из амплитуды

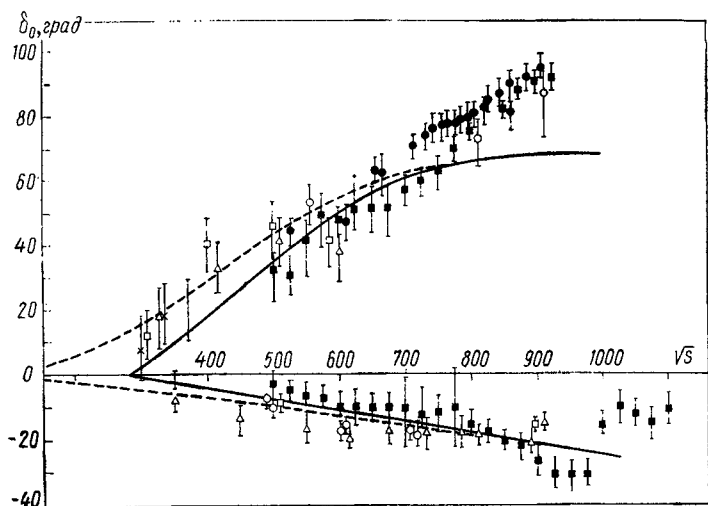


Рис. 20. Поведение S волновых фаз δ^0_0 и δ^2_0 амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния:

— — — — теоретические кривые для $m_\pi \neq 0$ [124]; - - - - то же для $m_\pi = 0$ [119], [20]; ■●○ — экспериментальные точки из работ [147 — 149] соответственно (точки Δ, \times, \square см. в работе [120])

(35.13) в области энергий $\bar{s} \approx 7 \div 8$, где вклад от однопетлевых диаграмм по порядку величины совпадает с вкладом от борновского приближения, проведем процедуру унитаризации. Эта процедура заключается в разложении (35.14) по параметру α_0 и фактически совпадает с надежным приближением:

$$\operatorname{ctg} \delta_l' = [B_l'(\bar{s}) - \alpha_0 \Pi_l'(\bar{s})] / [\pi \alpha_0 (1 - 1/\bar{s})^{1/2} [B_l'(\bar{s})]^2 / 2]. \quad (35.15)$$

При $m_\pi = 0$ это выражение соответствует тому, которое получил Леман [118, 119], разлагая $\text{ctg } \delta_l^j$ при малых q^2 (приближение эффективного радиуса). Поведение фаз δ_0^0 , δ_2^0 и δ_1^1 дано на рис. 20 и 21. В p -волне хорошо заметен ρ -мезонный резонанс при энергии примерно 800 Мэв. Из рисунков видно, что при энергиях около 800 Мэв учет масс пионов совершенно несуществен. Отметим также, что поведение δ_0^0 в околопороговой области зависит от выбора массового члена, нарушающего киральную симметрию. Например, при выборе наруше-

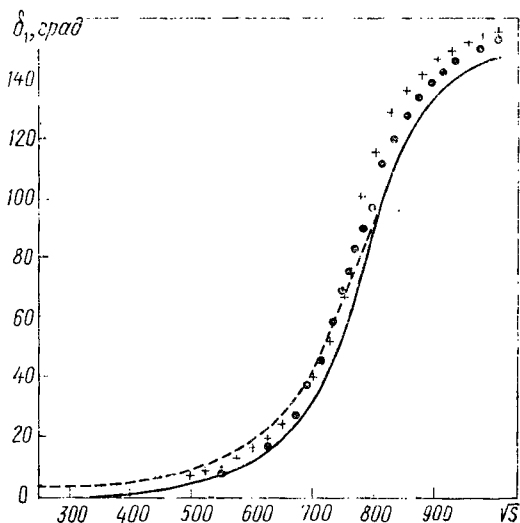


Рис. 21. Поведение P -волновой фазы δ_1^1 амплитуды лл-рассеяния:

— — — — — теоретическая кривая для $m_\pi \neq 0$ [124];
 - - - - - то же для $m_\pi = 0$ [119, 120]; + и ● — экспериментальные точки из работ [147, 148] соответственно

ния по Вейнбергу угол наклона фазы δ_0^0 в области порога, а значит и длина рассеяния a_0^0 , увеличивается на 30%; соответствующая кривая фазы δ_0^0 начиная с порога идет между кривыми с $m_\pi = 0$ и $m_\pi \neq 0$ (см. рис. 20).

Монотонность поведения и знак фаз можно получить из формул (35.5) и (35.15), т. е. из соображений киральной инвариантности и двухчастичной унитарности.

Длины парциальных волн и параметры эффективной области π -взаимодействия. Следуя работе [139], введем обозначения:

$$\alpha_l^{I(n)} = \lim_{\bar{s} \rightarrow 1} \frac{1}{4^n} \frac{\partial^n}{\partial \bar{s}^n} \mathcal{A}_l^I(\bar{s});$$

$$\alpha_l^{I(0)} = a_l^I; \quad \alpha_l^{I(1)} = b_l^I; \quad \alpha_l^{I(2)} = c_l^I;$$

$$\mathcal{A}_l^I(\bar{s}) = \frac{1}{2(\bar{s}-1)^l} \int_{-1}^1 dx P_l(x) \mathcal{A}^I(\bar{s}, x)$$

$$(\bar{t} = -(\bar{s}-1)(1-x)/2, \quad \bar{u} = -(\bar{s}-1)(1+x)/2).$$

Здесь a_l^I — длины рассеяния; b_l^I и c_l^I — параметры эффективной области; $P_l(x)$ — полином Лежандра. Тогда для длины рассеяния и параметров эффективной области π -системы получаются значения, данные в табл. 3.

Таблица 3

Значения длин π -рассеяния и параметров эффективной области

$\alpha_l^{I(n)}$	Киральная теория [125]	Эксперимент [147—150]	Феноменологический анализ [139]
a_0^0	0,15	0,10; 0,60	$0,15 \pm 0,02$
a_0^2	-0,042	-0,10; -0,03	$-0,065 \pm 0,025$
a_1^1	0,031	0,042; 0,040	$0,0341 \pm 0,0036$
b_1^1	$1,14 \cdot 10^{-3}$	—	$(1,07 \pm 0,27) \cdot 10^{-3}$
a_2^0	$1,85 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$; $1,8 \cdot 10^{-3}$	$(1,48 \pm 0,08) \cdot 10^{-3}$
a_2^2	$2,6 \cdot 10^{-4}$	$-2 \cdot 10^{-4}$; $3 \cdot 10^{-4}$	$(-3 \pm 8) \cdot 10^{-5}$
b_2^0	$-1,02 \cdot 10^{-4}$	—	$(-3,8 \pm 1,1) \cdot 10^{-5}$
b_2^2	$-5,1 \cdot 10^{-5}$	—	$(-4,4 \pm 1,1) \cdot 10^{-5}$
c_2^0	$2 \cdot 10^{-5}$	—	$(1,13 \pm 0,36) \cdot 10^{-5}$
c_2^2	$1,06 \cdot 10^{-5}$	—	$(1,27 \pm 0,36) \cdot 10^{-5}$
a_3^1	$1,33 \cdot 10^{-5}$	—	$(3,8 \pm 0,5) \cdot 10^{-5}$
a_4^0	$5 \cdot 10^{-6}$	—	$(4,8 \pm 0,8) \cdot 10^{-6}$
a_4^2	$2 \cdot 10^{-6}$	—	$(1,7 \pm 0,8) \cdot 10^{-6}$

При $l \geq 3$ из приведенных выше формул можно получить следующие простые выражения для длины рассеяния:

$$a^0_l = (2l + 1)(4l + 7) Z_l; \quad a^1_l = (4l^2 - 2l - 1) Z_l / 3;$$

$$a^2_l = (4l^2 + 3l + 8) Z_l;$$

$$Z_l = 3\pi\alpha_0^2 4^{l-1} \Gamma^3(l+1) \Gamma(l-2) / [\Gamma(2l+2)]^2.$$

Вычисленные параметры (см. табл. 3), хорошо согласуются с известными экспериментальными данными [147—150], а также с результатами феноменологического подхода [139], где существенно используется представление Фруассара — Грибова. Результаты табл. 3 соответствуют такому выбору параметров в этой модели, который даст значение $a^0_0 = 0,15$ (см. [139, табл. 2]).

Все длины рассеяния для $l \geq 3$ удовлетворяют неравенству $a^{l+2}_l \leq a^l_l (l+1)(l+2) / [4(2l+3)(2l+5)]$, найденному в работе [151] из унитарности и аналитичности амплитуды рассеяния. Отметим, что в борновском приближении все длины рассеяния равны нулю, за исключением a^0_0, a^2_0, a^1_1 . Приведем их значения:

$$m_{\pi} a^0_{00} = 2\pi\alpha_0 = 0,12; \quad m_{\pi} a^2_{00} = -\pi\alpha_0 = -0,06;$$

$$m_{\pi}^2 a^1_{10} = \pi\alpha_0 / 2 = 0,03.$$

Проверка неравенств Мартена. Из условий унитарности и поперечной симметрии Мартеном в работе [152] получены различные строгие неравенства для парциальной s -волны амплитуды $\pi^0\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ при $0 \leq \bar{s} \leq 1$:

$$f_0^{00}(\bar{s}) = \int_{-1}^1 dx [\mathcal{A}(s, t, u) + \mathcal{A}(t, s, u) + \mathcal{A}(u, t, s)] / 64\pi.$$

Выпишем эти неравенства:

$$f_0^{00}(\bar{s}) < f_0^{00}(1), \quad 0 \leq \bar{s} \leq 1;$$

$$df_0^{00}(\bar{s})/d\bar{s} > 0, \quad 0,5 \leq \bar{s} \leq 1;$$

$$f_0^{00}(0) \geq 2 \int_{0,5}^1 f_0^{00}(\bar{s}) d\bar{s};$$

$$f_0^{00}(0) > f_0^{00}[(1 + 1/\sqrt{3})/2];$$

$$df_0^{00}(\bar{s})/d\bar{s} < 0, \quad 0 \leq \bar{s} \leq 1,29/4;$$

$$df_0^{00}(\bar{s})/d\bar{s} > 0, \quad 1,7/4 \leq \bar{s} \leq 1,76/4;$$

$$f_0^{00}(0,8) > f_0^{00}(0,21/4) > f_0^{00}(2,98/4).$$

(35.16)

Прямые вычисления показывают, что амплитуда (35.10) удовлетворяет всем перечисленным выше неравенствам. Более просто в этом можно убедиться из следующих рассуждений.

Амплитуда $\mathcal{A}(s, t, u)$ в области $0 \leq \bar{s} \leq 1$ с довольно хорошей точностью воспроизводится приближенной формулой

$$\mathcal{A}(s, t, u) \approx \pi \alpha_0 (3\bar{s} - 1)/2 + \pi \alpha^2_0 [A\bar{s}^2 + B(\bar{t}^2 + \bar{u}^2) + C\bar{s} + D]/2;$$

где $A = A_\pi + A_B = 0,63$; $B = B_\pi + B_B = 20,5$; $C = 3$; $D = -3/2$; отсюда $f_0^{00}(s) \approx \pi \alpha^2_0 [(2B + A)(5\bar{s}^2 - 4\bar{s} + 2) + 3D + C]/6$. Легко видеть, что параболическая функция $f_0^{00}(\bar{s}) = \beta(5\bar{s}^2 - 4\bar{s} + 2) + \gamma$ удовлетворяет условиям (35.16) при произвольных $\beta > 0$ и γ .

Таким образом, для выполнения неравенств Мартена достаточно, чтобы $2B + A > 0$. Поскольку это условие у нас выполнено, то все неравенства Мартена удовлетворяются.

Выводы

В теории поля с неполиномиальным киральным лагранжианом вычисляются вклады от барионных и пионных петлевых диаграмм в амплитуду $\pi\pi$ -рассеяния. Неопределенные параметры возникают лишь при вычислении пионных петель. Эти параметры фиксируются применением СП-метода вычислений. В пределе $m_\pi \rightarrow 0$ амплитуда имеет вид простой функции от мандельштамовских переменных, плавно изменяющейся на расстояниях порядка 1 Гэв. Разложение по константе $1/F_\pi$ совпадает с разложением по степеням импульсов. Учет двух первых порядков разложения амплитуды (приближение деревьев и однопетлевое приближение) позволяет провести ее унитаризацию с помощью паде-приближения и описать фазы s - и p -волн рассеяния в удовлетворительном согласии с экспериментом. В p -волне получается правильное положение ρ -резонанса с шириной ~ 150 Мэв.

Применение паде-приближения для $m_\pi \neq 0$ показывает, что фазы рассеяния не зависят от массы пиона в резо-

пансой области энергий. Однако, для вычисления длин рассеяния парциальных волн учет массы пиона имеет принципиальное значение. При этом, в пороговой области энергий разложение по петлям (по $1/F_\pi$) совпадает с разложением по малому параметру $\sim 1/100$. Так что все длины рассеяния, начиная с d -волны, с точностью до третьего порядка по этому параметру, определяются однопетлевыми диаграммами*. Вычисленные длины рассеяния и параметры эффективной области взаимодействия приведены в табл. 3.

* Длины рассеяния всех парциальных волн с $l \geq 3$ определяются одной пионной петлей.

ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ МЕЗОНОВ В КВАНТОВОЙ КИРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Строительство «мезонных фабрик» с интенсивными пучками частиц открывает широкие возможности для изучения электромагнитных и других свойств мезонов. В связи с этим теоретическая оценка низкоэнергетических параметров взаимодействия мезонов актуальна и приобретает большое значение для проектирования и постановки различных мезонных экспериментов. В настоящей главе будут исследованы электромагнитные взаимодействия мезонов.

§ 37. Электромагнитные взаимодействия пионов

После введения в киральный лагранжиан [см. (30.3)—(30.5)] взаимодействия с электромагнитным полем

$$\begin{aligned}\partial_\mu \psi_p &\rightarrow \partial_\mu \psi_p + ie \mathcal{A}_\mu \psi_p; \\ \partial_\mu \pi^\pm &\rightarrow \partial_\mu \pi^\pm \pm ie \mathcal{A}_\mu \pi^\pm; \\ \pi^\pm &= (\pi_1 \mp i\pi_2)/\sqrt{2}\end{aligned}$$

появляется возможность описывать электромагнитные свойства пиона. Покажем, как вычисляются электромагнитный форм-фактор пиона, его среднеквадратический радиус и поляризуемость, а также амплитуды процессов $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^- (\pi^0\pi^0)$.

Форм-фактор пиона. Выпишем матричный элемент для пиона, находящегося во внешнем электромагнитном поле \mathcal{A}_μ :

$$\langle p_1 | S | p_2 \rangle = ie p_\mu \mathcal{A}_\mu(q) \Phi(q),$$

где p_1 и p_2 — импульсы пионов (рис. 22,а); $p = p_1 + p_2$, $q = p_1 - p_2$. В однопетлевом приближении форм-фактор

$\Phi(q)$ можно представить в виде

$$\Phi(q) = 1 + \Phi^\pi(q) + \Phi^B(q) + O(1/F_\pi^4). \quad (37.1)$$

Здесь 1 — борновский член; $\Phi^\pi(q)$ — вклад от однопетлевой пионной диаграммы; $\Phi^B(q)$ — вклад от барионных петель.

Вычислим вклад от пионной петли (см. диаграмму на рис. 22, б). Интеграл, соответствующий этой диаграмме, квадратично расходится. Чтобы получить конечное выражение для этой части форм-фактора, необходимо использовать СП-метод. Рассмотрим бесконечный ряд диаграмм с двумя вершинами и произвольным числом

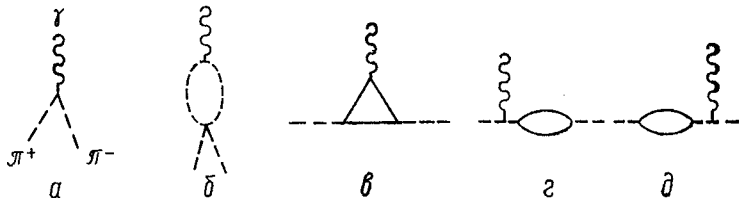


Рис. 22. Диаграммы, соответствующие древесному и однопетлевому приближению (порядок e/F_π^2) для форм-фактора пиона:

----- — фотонные линии

внутренних линий. S -матрица, соответствующая таким диаграммам, имеет вид

$$S_\pi = -i^2 e N_\varphi T^*_{\Gamma} \left[\int d^4 x_1 L_I(\varphi | \Gamma) \int d^4 x_2 f(\Gamma^2) \mathcal{A}_\mu(x_2) (\partial_\mu \Gamma \times \Gamma)_3 \right] \quad (33.2) \text{ и } (33.4).$$

После перехода от T^* к N -произведению полей Γ получаем

$$\langle p_1 | S_\pi | p_2 \rangle = i e p_\mu \mathcal{A}_\nu(q) \bar{\Phi}_{\mu\nu}^\pi(q);$$

$$\bar{\Phi}_{\mu\nu}^\pi(q) = i \frac{4}{3F_\pi^2} \int d^4 x \exp(iq x) [\partial_\mu \Delta^c(x) \partial_\nu \Delta^c(x) - \Delta^c(x) \partial_\mu \partial_\nu \Delta^c(x)] \sum_0^\infty \left(\frac{-4i\Delta^c(x)}{F_\pi^2} \right)^{2n} \frac{2n+3}{(2n+2)(2n+2)!}.$$

Выражение $\bar{\Phi}_{\mu\nu}^\pi$ с точностью до коэффициента совпадает с выражением $\sigma_{\mu\nu}^I$ [см. (33.7)]. Таким образом, для $\Phi^\pi(q)$ находим

$$\begin{aligned} \Phi^\pi(q) &= \alpha_0 \{ \bar{\zeta}^I \gamma^I - 1 + (1 - \bar{\zeta}) J(\bar{\zeta}) \} = \\ &= \frac{q^2}{6} \frac{1}{(2\pi F_\pi)^2} \frac{1}{2} \left(\gamma^I - \frac{4}{3} \right) + O(q^4), \end{aligned} \quad (37.2)$$

где $\bar{\zeta} = q^2/4m_\pi^2$; $J(\bar{\zeta})$ и α_0 определены формулами (35.11) и (35.12);

$$\gamma' = \ln(2\pi F_\pi/m_\pi) - 3c/2 + 11/6 \approx 2,4.$$

Из (37.2) видно, что пионная петля дает следующий вклад в квадратичный радиус:

$$\langle r^2 \rangle_\pi = \frac{1}{(2\pi F_\pi)^2} \frac{1}{2} \left(\gamma' - \frac{4}{3} \right) \approx 0,065 \text{ ферми}^2. \quad (37.2)$$

При энергиях $q^2 > 4m_\pi^2$ форм-фактор становится комплексным и в приближении двухчастичной унитарности можно с погрешностью до α_0^2 написать

$$1 + \Phi^\pi(q) \approx |\Phi| \exp(i\delta_1^1),$$

где δ_1^1 — фаза p -волны $\pi\pi$ -рассеяния. Длина p -волны находится в полном соответствии с вычислениями, проведенными в § 36:

$$m_\pi^3 a_1^1 = \alpha_0 \pi/2 \approx 0,03.$$

Вклад от барионных диаграмм вычисляется с точностью до q^2 , поскольку члены с более высокими степенями по q^2 порядка $O([q^2/M_B^2]^2)$ и незначительны в области низких энергий. Константные члены в барионных диаграммах взаимно компенсируются в силу тождеств Уорда (см. рис. 22, в — д). Остающиеся интегралы уже конечны, и их можно вычислить обычным способом. В результате для $\Phi^B(q)$ получаем*

$$\begin{aligned} \Phi^B(q) = & \frac{q^2}{6} \left(\frac{g}{2\pi M_N} \right)^2 \left[1 + \frac{4}{9} \left(\frac{M_N}{M_\Sigma} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{16}{27} \left(\frac{M_N}{M_{\Lambda\Sigma}} \right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{M_N}{M_\Xi} \right)^2 \right] \approx \frac{q^2}{6} \left(\frac{g_A}{2\pi M_N} \right)^2 1,73; \quad (37.4) \end{aligned}$$

* Здесь использованы известные соотношения между сильными константами, следующие из $SU(3)$ -теории с параметром смешивания F - и D -связей $\alpha=2/3$:

$$|g_{\pi\Sigma\Sigma}| = \sqrt{2} \frac{g}{3}; \quad |g_{\pi\Sigma\Lambda}| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} g;$$

$$|g_{\pi\Xi\Xi}| = g/3; \quad |g_{\pi NN}| = g.$$

В случае точной $SU(3)$ -симметрии все однопетлевые барионные диаграммы для собственной энергии мезона, его форм-фактора и амплитуды комптон-эффекта оказываются пропорциональными величине $f(\alpha) = 3(1-\alpha)^2 + 5\alpha^2/3$. Минимальное значение функции $f(\alpha)$ соответствует весьма разумному параметру смешивания $\alpha = 9/14 = 0,65$.

$$\langle r^2 \rangle_B = 0,356 \text{ ферми}^2.$$

Из (37.3) и (37.4) следует для радиуса π -мезона $V\langle r^2 \rangle = V\langle r^2 \rangle_\pi + \langle r^2 \rangle_B = 0,65 \text{ ферми}$, что находится в удовлетворительном согласии с последними экспериментальными данными. Подставляя в (37.1) найденные функции $\Phi^\pi(q)$ и $\Phi^B(q)$, приходим к выражению

$$\Phi(q) = 1 + \alpha_0 \{-1 + 8,6\bar{\zeta} + (1 - \bar{\zeta})J(\bar{\zeta})\}. \quad (37.5)$$

Эта формула хорошо описывает поведение форм-фактора в области малых q^2 , а также в пороговой области.

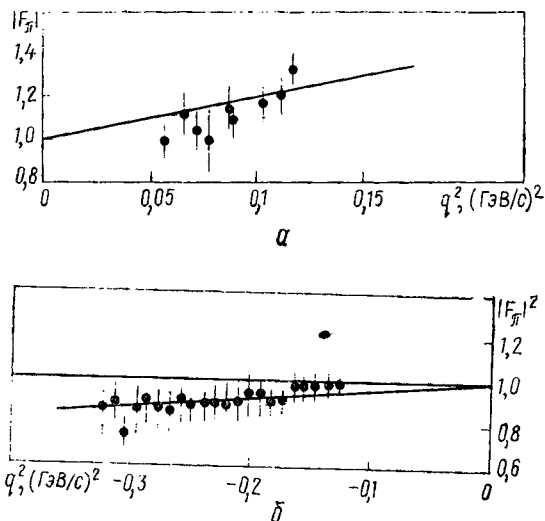


Рис. 23. Поведение форм-фактора пиона в области:

$a - q^2 > 0$; $b - q^2 < 0$; ———— — теоретическая кривая [123];
 ● (a) и ● (б) — экспериментальные точки из работ [154] и [155] соответственно (точки из работы [154] взяты с учетом нормировочных множителей, указанных авторами этой работы)

Абсолютные значения форм-фактора π -мезона, вычисленные по (37.5) в области энергий $|q| \ll 1 \text{ ГэВ}$, хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными в Дубне [154], в Серпухове и Батавии [155]. Соответствующие значения форм-фактора приведены на рис. 23.

Эти вычисления показывают, что радиус π -мезона почти целиком определяется вкладом барионных треугольных диаграмм в π -мезонный форм-фактор. π -Мезонные петли, так же как и K -мезонные петли, дают малый вклад в q^2 -член форм-фактора. В то же время учет π -мезонной петли важен для правильного описания порогового поведения форм-фактора. Тем самым совокупность рассмотренных диаграмм полностью определяет поведение форм-фактора в низкоэнергетической области.

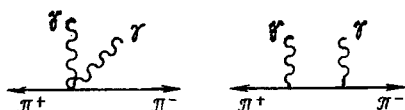


Рис. 24. Диаграммы, описывающие комpton-эффект на пионе в приближении де-Ревьев

Амплитуда процесса $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$ и поляризуемость пиона*. Амплитуда процесса $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$ определяется формулой

$$\begin{aligned} & \langle \pi^a(p_1) \pi^b(p_2) | S | \gamma_{\lambda_1}(q_1) \gamma_{\lambda_2}(q_2) \rangle = \\ & = (2\pi)^4 i \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \varepsilon_{\lambda_1}^\mu \varepsilon_{\lambda_2}^\nu T_{ab}^{\mu\nu}(p_1 p_2 | q_1 q_2), \end{aligned} \quad (37.6)$$

где q_1, q_2 — импульсы фотонов; $\varepsilon_{\lambda_1}^\mu, \varepsilon_{\lambda_2}^\nu$ — их поляризации; p_1, p_2 — импульсы пионов; a, b — их изотопические индексы. Не приводя здесь общего вида ковариантной амплитуды $T_{ab}^{\mu\nu}$, выпишем лишь ту форму, которая получается в первых двух порядках теории возмущений:

$$\begin{aligned} T_{ab}^{\mu\nu} = & 2e^2 \{ \delta_{a'} - \delta_{a3} \delta_{b3} \} \{ g^{\mu\nu} - p_1^\mu p_2^\nu / (p_1 q_1) - \\ & - p_1^\nu p_2^\mu / (p_1 q_2) + (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^\nu q_2^\mu) [\beta^{(\pi)}(q_1 q_2) + \beta^{(N)}] \} + \\ & + 4e^2 \delta_{a3} \delta_{b3} (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^\nu q_2^\mu) \beta^{(\pi)}(q_1 q_2). \end{aligned} \quad (37.7)$$

Первые три члена в фигурных скобках являются борновскими членами (рис. 24); $\beta^{(\pi)}(q_1 q_2)$ — вклад в амплитуду от пионных петель (рис. 25); $\beta^{(N)}$ — вклад от нуклонных петель (рис. 26). В $\beta^{(N)}$ удержаны лишь постоянные чле-

* Связь между поляризуемостью элементарной частицы и параметрами, характеризующими амплитуду комптоновского рассеяния, обсуждалась Клейном [156], А. М. Балдиным [157], В. А. Петрунькиным [158]. Задача о поляризуемости детально исследовалась В. С. Барашенковым и Б. М. Барбашовым [159].

ны, так как остальные члены малы в рассматриваемой области энергий, и учтены равенства

$$p^2_1 = p^2_2 = m^2 (m = m_\pi); \quad q^2_1 = q^2_2 = (q_1 \epsilon_1) = (q_2 \epsilon_2) = 0.$$

Для $\beta^{(\pi)}(q_1, q_2)$ и $\beta^{(V)}$ получаются следующие выражения:

$$\beta^{(\pi)}(q_1, q_2) = \left(1 - \frac{2}{3} \frac{m^2}{q_1 q_2}\right) \left\{ \frac{2m^2}{q_1 q_2} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2m^2}{q_1 q_2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \right] - 1 \right\} \frac{1}{(4\pi F_\pi)^2}. \quad (37.8)$$

$$\beta^{(V)} = (1/6) [g_A / (2\pi F_\pi)]^2 \approx 1 / (4\pi F_\pi)^2. \quad (37.9)$$

Покажем теперь, как вычисляются эти величины.

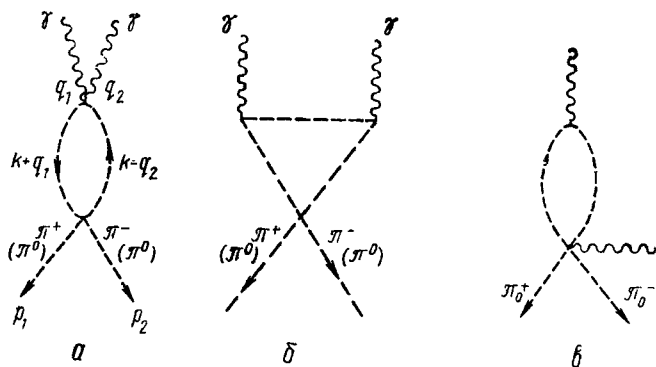


Рис. 25 Мезонные однопетлевые диаграммы для комптон-эффекта

Пионные петли. Нетрудно убедиться в том, что совместный вклад диаграмм, изображенных на рис. 25, а, б, калибровочно-инвариантен и не содержит никаких расходимостей. Вклад от диаграммы, изображенной на рис. 25, в, на массовой поверхности фотона равен нулю. Часть S-матрицы, соответствующая диаграммам рис. 25, а, б:

$$S_{\pi\gamma} = N_\pi N_A T^*_{\Gamma} \left\{ i \int d^4 x \left[-m^2 \varphi^a \varphi^b / 3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \partial_\mu \varphi^a \partial_\mu \varphi^b \right] : (\Gamma^a \Gamma^b - \Gamma^2 \delta_{ab}) : \left[\frac{(ie)^2}{2!} \left(\int d^4 y \mathcal{A}_\mu(y) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times (\partial_\mu \Gamma \times \Gamma)_3 \right)^2 + \frac{ie^2}{2} \int d^4 y \mathcal{A}_\mu^2 : (\Gamma^2_1 + \Gamma^2_2) : \right] \right\},$$

приводит к следующему интегралу Фейнмана в матричном элементе:

$$\Lambda_{\mu\nu}^{(m)}(q_1, q_2) = \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{d^4k}{(m^2 - (k + q_1)^2 - i\epsilon)(m^2 - (k - q_2)^2 - i\epsilon)} \times \\ \times [g_{\mu\nu} + 4k_\mu k_\nu / (m^2 - k^2 - i\epsilon)]. \quad (37.10)$$

В результате имеем конечное выражение

$$\Lambda_{\mu\nu}^{(m)}(q_1, q_2) = (g^{\mu\nu} - q_1^\nu q_2^\mu / q_1 q_2) \left\{ \frac{2m^2}{q_1 q_2} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2m^2}{q_1 q_2 - 1} \right) - 1 \right] \right\}.$$

Отсюда сразу следует (37.8). Отметим важное свойство поляризационной функции (37.8). С увеличением энергии $\sqrt{s} = \sqrt{2q_1 q_2}$ от нуля до порога двухпионного рождения эта функция резко изменяется:

$$(4\pi F_\pi)^2 \beta^{(\pi)}(q_1, q_2) |_{q_1, q_2=0} = -1/9;$$

$$(4\pi F_\pi)^2 \beta^{(\pi)}(q_1, q_2) |_{q_1, q_2=2m^2} = 2[\pi^2/4 - 1]/3 \approx 1.$$

В пределе $m=0$ (или $q_1 q_2 \gg m^2$)

$$(4\pi F_\pi)^2 \beta^{(\pi)}(q_1, q_2) |_{q_1, q_2 \gg m^2} = -1.$$

Результат (37.8) получен при нарушении киральной симметрии по Чангу и Гюрсею [66] [см. формулы (30.9)] и при использовании экспоненциальной параметризации (нормальные координаты). Скажем несколько слов о возможном произволе, связанном с выбором массового члена в лагранжиане $\pi\pi$ -взаимодействия:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{(2F_\pi)^2} [\pi^2 (\partial_\mu \pi)^2 - c m^2 ((\pi)^2)^2] + O(\pi^6),$$

где $c=1/3$ для нормальных координат; $c=1/4$ для параметризации Вайнберга и для определения массового члена с помощью линейной реализации киральной симметрии [представление (1/2, 1/2)]. Расчет амплитуды (37.7) для произвольного c приводит к следующему выраже-

НИЮ:

$$T_{ab}^{\mu\nu} = (T_{ab}^{\mu\nu})^{\text{борн}} + (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^\nu q_2^\mu) 2e^2 (\delta_{ab} - \delta_{a_3} \delta_{b_3}) \beta^{(N)} + 4e^2 \frac{m_2^2}{(4\pi F_\pi)^2} \Lambda_{\mu\nu}^{(m)}(q_1 q_2) \{(\delta_{ab} - \delta_{3a} \delta_{3b}) \left[\frac{q_1 q_2}{2m^2} + 2c - 1 \right] + \delta_{3a} \delta_{3b} [q_1 q_2 / m^2 + c - 1]\}.$$

Существуют физические аргументы в пользу возможного ограничения константы c . Предполагая, что фазы $\pi\pi$ -рассеяния не зависят от пионной массы при энергиях около 800 Мэв и не меняют своего знака от порога до этой энергии (гипотеза гладкости), получаем следующие ограничения на длины рассеяния*:

$$\left. \begin{aligned} a_0^0 &= L(3 - 5c) \geq 0 \\ a_2^0 &= -L2c \leq 0 \end{aligned} \right\} L = 3\pi\alpha_0 m^{-1} / 2 \sim 0,1 m^{-1};$$

отсюда $0 \leq c \leq 3/5$.

Нуклонные петли. Матричный элемент, соответствующий диаграмме, изображенной на рис. 26,а, выражается через интеграл Фейнмана (37.10) с заменой $m \rightarrow M$ и сходящийся интеграл $\Lambda^{(M)}$:

$$\Lambda_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu}^{(M)} - (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^\nu q_2^\mu) \Lambda^{(M)}; \\ \Lambda^{(M)} = \frac{1}{i\pi^2} \times$$

$$\times \int \frac{d^4 k}{(M^2 - k^2 - i\epsilon)(M^2 - (k + q_1)^2 - i\epsilon)(M^2 - (k - q_2)^2 - i\epsilon)}.$$

Вклад в амплитуду (37.7) от этой диаграммы равен

$$T_{ab}^{\mu\nu} = 2e^2 \delta_{ab} (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^\nu q_2^\mu) \frac{g^2 A}{3(2\pi F_\pi)^2} \left[1 + o\left(\frac{q^2}{M^2}, \frac{m^2}{M^2}\right) \right]. \quad (37.11)$$

Матричные элементы, соответствующие диаграммам, изображенным на рис. 26,б—ж, следует вычислять совместно. Результат будет конечным и калибровочно-ин-

* Напомним, что монотонное поведение фаз $\pi\pi$ -рассеяния δ_0^0 и δ_2^0 в обсуждаемой области энергий следует из формулы (35.5), полученной при весьма общих предположениях (борновский член и двухчастичная унитарность)

вариантным:

$$T_{ab}^{\mu\nu} = 2e^2 (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^\nu q_2^\mu) \left[-\frac{g^2 \Lambda}{3 (2\pi F_\pi)^2} \delta_{ab} + \right. \\ \left. + \frac{g^2 \Lambda}{6 (2\pi F_\pi)^2} (\delta_{ab} - \delta_{a3} \delta_{b3}) \right] [1 + O(q^2/M^2, m^2/M^2)]. \quad (37.12)$$

Из (37.11) и (37.12) следует (37.9). Таким образом, вклад нуклонных диаграмм в амплитуду рождения нейтральных пионов $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$ равен нулю, а в амплитуду

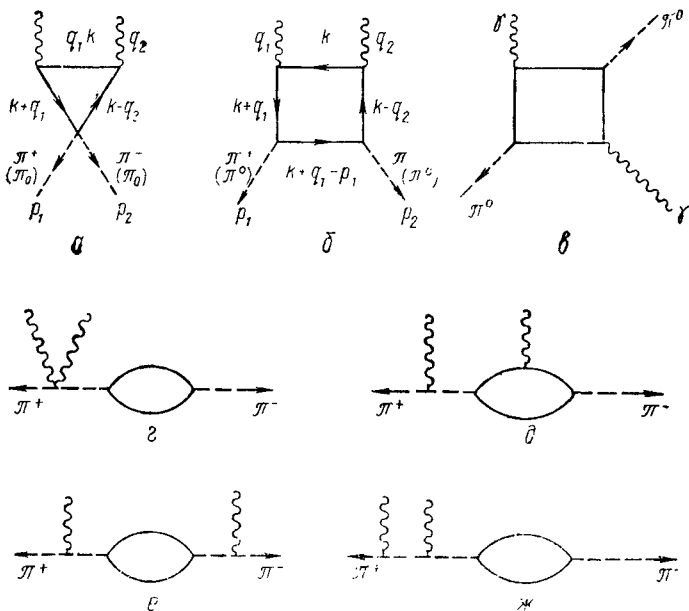


Рис. 26. Барнонные однопетлевые диаграммы для компон-эффекта

рождения заряженных пионов — на порядок больше, чем вклад от пионных петель, при $q_1 q_2 \ll m_\pi^2$.

Учет остальных гиперонных петель приводит к появлению коэффициента перед $\beta^{(N)}$, равного

$$1 + \frac{44}{27} \left(\frac{M_N}{M_\Sigma} \right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{M_N}{M_\Xi} \right)^2 - \frac{16}{27} \left(\frac{M_N}{M_{\Sigma\Lambda}} \right)^2 \approx 1,7.$$

Каонные петли дают пренебрежимо малую поправку к $\beta^\pi(q_1q_2)$ порядка $o(m_\pi^2/m_K^2)$.

Определяя поляризуемость пиона как коэффициент эффективного взаимодействия пиона с внешним электромагнитным полем

$$V_{\text{int}} = -\alpha_\pi (E^2 - H^2)/2,$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\pi^\pm} &= \alpha_{\pi^\pm}(q_1q_2)|_{q_1q_2=0} = e^2 (\beta^{(\pi)}(0) + \beta^{(B)})/m = \\ &= 0,31\alpha/m^2; \\ \alpha_{\pi^0} &= \alpha_{\pi^0}(q_1q_2)|_{q_1q_2=0} = 2e^2\beta^{(\pi)}(0)/m = \\ &= -0,04\bar{\alpha}/m^2; \\ \alpha &= e^2/4\pi. \end{aligned} \right\} (37.13)$$

Как уже было отмечено, функция $\beta^{(\pi)}(q_1q_2)$ быстро меняется в пороговой области. В результате при $q_1q_2 = 2m^2$ имеем

$$\alpha_{\pi^\pm}(2m^2) = 0,51\bar{\alpha}/m^2; \quad \alpha_{\pi^0}(2m^2) = 0,36\bar{\alpha}/m^2.$$

Значение α_{π^\pm} по порядку величины согласуется с теми результатами, которые получены из алгебры токов [160] и в кварковых моделях [161]. Значение α_{π^0} отличается от значений работы [160], где найдено $\alpha_{\pi^0} = 0$.

§ 38. Электромагнитное взаимодействие каонов

Форм-факторы каонов. Форм-факторы каонов вычисляются точно так же, как форм-факторы пионов. Обозначим проекционный резонатор на состояние заряженного каона $I_{ab}^{(+)}$:

$$I_{ab}^{(+)} = (I_{ab} + (\tau_3)_{ab})/2, \quad I_{ab} = \delta_{ab}.$$

Нормируем форм-фактор Π таким образом, чтобы вклад от диаграммы-дерева $\Pi_{ab} = I_{ab}^{(+)}$. Тогда сумма вкладов от дерева, барионных петель и пионной петли записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{ab}(q) &= I_{ab}^{(+)} \left[1 + \frac{\langle r^2 \rangle^B}{6} q^2 \right] + (\tau_3)_{ab} \times \\ &\times \left\{ \frac{\langle r^2 \rangle^\pi}{6} q^2 + \frac{m_\pi^2}{3(2\pi F_\pi)^2} \left[-1 + \frac{4}{3} \zeta + (1 - \zeta) J(\zeta) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (38.1)$$

где $\xi = q^2/4m_\pi^2$; $J(\xi)$ определена формулой (35.11);

$$\left. \begin{aligned} \langle r^2 \rangle^B &= \frac{g^2}{M^2} \frac{1,4}{(2\pi)^2} \approx 0,3 \text{ ферми}^2; \\ \langle r^2 \rangle^\pi &= \frac{1}{(4\pi F_\pi)^2} \left[\ln \frac{8\pi^2 F_\pi^2}{m_\pi^2} - 3c + 1 \right] \approx 0,08 \text{ ферми}^2. \end{aligned} \right\} \quad (38.2)$$

Изотопическая структура вклада от барионной петли задается проекционным оператором $I^{(+)}$, в то время как вклад от пионной петли пропорционален оператору τ_3 . Вследствие этого нейтральный каон в отличие от нейтрального пиона приобретает электромагнитный форм-фактор. Из (38.1) и (38.2) получаем

$$\left. \begin{aligned} \langle r^2 \rangle_{K^+} &\approx \langle r^2 \rangle^B + \langle r^2 \rangle^\pi \approx 0,38 \text{ ферми}^2; \\ \langle r^2 \rangle_{K^0} &\approx -\langle r^2 \rangle^\pi \approx -0,08 \text{ ферми}^2. \end{aligned} \right\} \quad (38.3)$$

Вкладом от каонных петель можно пренебречь.

Полученные значения радиусов согласуются с предсказанием, сделанным на основе модели векторной доминантности Кроллом, Б. Ли и Зумино [162], и подтверждаются по порядку величины экспериментами [163]: $|\langle r^2 \rangle_{K^0}| = 0,08 \pm 0,05 \text{ ферми}^2$.

Амплитуды комптон-эффектов и поляризуемость каонов. Амплитуду комптон-эффекта запишем стандартным способом:

$$\left. \begin{aligned} \langle K^0{}^+(p_1) K^0{}^-(p_2) | S | \gamma_{\lambda_1}(q_1) \gamma_{\lambda_2}(q_2) \rangle &= \\ &= t_{\lambda_1 \lambda_2}^{\mu\nu} T_{(p_1 p_2 | q_1 q_2)}^{\pm}; \\ t_{\lambda_1 \lambda_2}^{\mu\nu} &= i\delta^{(\pm)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \varepsilon_{\lambda_1}^\mu \varepsilon_{\lambda_2}^\nu, \end{aligned} \right\} \quad (38.4)$$

где q_1 и q_2 — импульсы фотонов; $\varepsilon_{\lambda_1}^\mu, \varepsilon_{\lambda_2}^\nu$ — поляризации фотонов; p_1, p_2 — импульсы каонов. В борновском приближении

$$T_{\mu\nu}^{\pm(1)} = 2e^2 [g^{\mu\nu} - p_1^\mu p_2^\nu / (p_1 q_2) - p_1^\nu p_2^\mu / (p_1 q_2)];$$

$$T_{\mu\nu}^{0(1)} = 0.$$

Здесь будут использованы соотношения: $p_1^2 = p_2^2 = m_K^2$; $q_1^2 = q_2^2 = 0$; $(q_1 \varepsilon_{\lambda_1}) = (q_2 \varepsilon_{\lambda_2}) = 0$.

Перейдем к рассмотрению следующего порядка теории возмущений — e^2/F_π^2 . Подобно тому как это делалось в § 37, будем вычислять совместные вклады от всех петлевых диаграмм, типа изображенных на рис. 25, 26. В результате придем к конечному выражению для амплитуды комптон-эффекта в e^2/F_π^2 -приближении:

$$\left. \begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\pm(2)} &= \frac{2e^2}{(4\pi F_\pi)^2} (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^\nu q_2^\mu) [\beta^{(\pi)}(q_1, q_2) + \\ &\quad + \beta_+^{(K)}(q_1, q_2) + \beta^{(B)}]; \\ T_{\mu\nu}^{0(2)} &= \frac{2e^2}{(4\pi F_\pi)^2} (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^\nu q_2^\mu) [\beta^{(\pi)}(q_1, q_2) + \\ &\quad + \beta_0^{(K)}(q_1, q_2)]. \end{aligned} \right\} (38.5)$$

Поясним, что означают функции $\beta^{(\pi)}(q_1, q_2)$, $\beta_\pm^{(K)}(q_1, q_2)$, $\beta_0^{(K)}(q_1, q_2)$, $\beta^{(B)}$ и как они вычисляются.

Функция $\beta^{(\pi)}(q_1, q_2)$ соответствует вкладу от двух диаграмм с внутренними пионными линиями, подобных тем, которые изображены на рис. 25. Как показано в § 37, при совместном вычислении эти две диаграммы дают конечный вклад в амплитуду рассеяния без использования какой-либо специальной регуляризации. Этот вклад одинаков как для заряженных, так и для нейтральных внешних каонов и равен

$$\beta^{(\pi)}(q_1, q_2) = \frac{q_1 q_2}{4m_\pi^2} J\left(\frac{q_1 q_2}{2m_\pi^2}\right), \quad (38.6)$$

где

$$J(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \left\{ \frac{1}{\zeta} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\zeta} - 1\right) \right]^{-1/2} - 1 \right\}. \quad (38.7)$$

Чтобы показать, как меняется функция $J(\zeta)$, приведем ее значения в двух точках: $J(0) = 1/3$ и $J(1) = (\pi/2)^2 - 1 \approx 3/2$.

Отсюда видно, что если при значении $(q_1, q_2) = 0$ функция $\beta^{(\pi)}(q_1, q_2)$ не дает вклада в амплитуды (38.5), то уже при значениях (q_1, q_2) , близких к порогу рождения двух пионов, этот вклад в $T_{\mu\nu}^{\pm(2)}$, а значит и в поляризуемость каона, будет довольно заметным.

Функция $\beta_\pm^{(K)}(q_1, q_2)$ соответствует вкладу от двух диаграмм с внутренними каонными линиями и заряженны-

ми внешними каонами. Вычисления, подобные предыдущим, приводят к функции

$$\beta_{\pm}^{(K)}(q_1, q_2) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q_1 q_2}{2m^2_k} \right) J \left(\frac{q_1 q_2}{2m^2_k} \right). \quad (38.8)$$

Несколько иное выражение получается для нейтральных внешних каонов:

$$\beta_0^{(K)}(q_1, q_2) = \frac{q_1 q_2}{2m^2_k} J \left(\frac{q_1 q_2}{2m^2_k} \right). \quad (38.9)$$

Отсюда видно, что при $(q_1, q_2) = 0$ отличный от нуля вклад в $T_{\mu\nu}^{\pm(2)}$ даст лишь функция $\beta_{\pm}^{(K)}(0) \approx 0,08$. Как убедимся ниже, этот вклад существенно меньше соответствующего вклада от диаграммы с барионными петлями.

Перейдем, наконец, к оценке вклада от барионных петель. Не останавливаясь на деталях вычислений, поскольку они подобны описанным в § 37, сразу приведем конечный результат. Для нейтральных внешних каонов совместный вклад в амплитуду $T_{\mu\nu}^{0(2)}$ от диаграмм типа изображенных на рис. 26 равен нулю. Для заряженных внешних каонов совместный вклад от этих диаграмм равен

$$\begin{aligned} \beta^{(B)} \approx & \frac{2}{3} g_A^2 \left\{ 4 \left[\frac{\alpha^2}{3} + (1 - \alpha)^2 - \frac{\alpha(1 - \alpha)}{4} \right] + \right. \\ & + 4 \left[\frac{\alpha^2}{3} + (1 - \alpha)^2 + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{4} \right] \left(\frac{M_N}{M_{\Sigma}} \right)^2 + 2 \left(\frac{M_N}{M_{\Sigma}} \right)^2 + \\ & + 2(1 - 2\alpha)^2 \left(\frac{M_N}{M_{\Sigma}} \right)^2 - \left(\frac{M_N}{M_{\Sigma\Sigma}} \right)^2 - (2\alpha - 1)^2 \left(\frac{M_N}{M_{n\Sigma}} \right)^2 - \\ & - \frac{(2\alpha - 1)^2}{2} \left(\frac{M_N}{M_{\Sigma p}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{M_N}{M_{\Sigma\Sigma}} \right)^2 - \frac{(3 - 2\alpha)^2}{6} \times \\ & \left. \times \left(\frac{M_N}{M_{\Lambda p}} \right)^2 - \frac{(4\alpha - 1)^2}{6} \left(\frac{M_N}{M_{\Lambda\Sigma}} \right)^2 \right\} \approx 1,4. \quad (38.10) \end{aligned}$$

Здесь оставлены лишь константные члены, поскольку следующие члены разложения по степеням (q_1, q_2) малы, типа $o(q_1 q_2 / M_N^2)$. Отсюда видно, что при $(q_1, q_2) = 0$ барионные петли дают определяющий вклад в амплитуду $T_{\mu\nu}^{\pm(2)}(0)$. Амплитуда же $T_{\mu\nu}^{0(2)}(0) = 0$.

Перейдем теперь к вычислению поляризуемости каона. Поляризуемость α_K определяется как коэффициент эффективного взаимодействия каона с внешним электромагнитным полем $V_{вз} = -\alpha_K (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)/2$. Как и для пионов, электрическая и магнитная поляризуемости каона равны по абсолютной величине и различны по знаку.

Коэффициент α_K связан с функцией $\beta(q_1 q_2)$, стоящей в квадратных скобках в (38.5), следующим соотношением:

$$\alpha_K = \frac{e^2}{(4\pi F_\pi)^2} \frac{\beta(0)}{m_K}.$$

Отсюда нетрудно получить, что

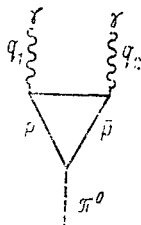
$$\alpha_{K^+} \approx \left(\frac{e}{4\pi F_\pi} \right)^2 \frac{1,5}{m_K} \approx 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ ферми}^3; \quad \alpha_{K^0} = 0. \quad (38.11)$$

Эти значения согласуются с теоретическими оценками, полученными М. В. Терентьевым с использованием алгебры токов и ЧСАТ [164]: $\alpha_{K^\pm} \approx 10^{-3} \text{ ферми}^3$, и с экспериментальными данными, имеющими пока, к сожалению, большие погрешности [165]: $\alpha_{K^\pm}^{\text{эксп}} = -(4 \pm 11) \times 10^{-3} \text{ ферми}^3$.

§ 39. Электромагнитные распады мезонов

Рассмотрим электромагнитные распады π^0 - и η -мезонов (рис. 27). Вычислим вначале π^0 -распад в киральной $SU(2) \times SU(2)$ инвариантной теории с лагранжианом

Рис. 27. Диаграмма, описывающая электромагнитный распад пиона



(30.5). В низшем однопетлевом приближении амплитуда $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ в киральной теории выглядит точно так же, как в теории с обычной псевдоскалярной связью (см.

[166, 167]):

$$T_{\mu_1 \mu_2}^{(\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma)} = 2 \left(\frac{M}{F_\pi} g_A \right) \frac{e^2}{(2\pi)^4} i \int d^4 k \text{Sp} \left[\gamma_\varepsilon \frac{1}{(M - (\hat{k} + \hat{q}_1))} \times \right. \\ \left. \times \gamma_{\mu_1} \frac{1}{M - \hat{k}} \gamma_{\mu_2} \frac{1}{(M - (\hat{k} - \hat{q}_2))} \right] = f \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \alpha \beta} q_{1\alpha} q_{2\beta},$$

где $\varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \alpha \beta}$ — полностью антисимметричный тензор;

$$f = - e^2 g_A / [(2\pi)^2 F_\pi]. \quad (39.1)$$

Учет гиперонной петли (Ξ) с использованием лагранжиана (30.15) увеличивает это значение. Окончательно

$$f_{\pi^0} = - \frac{e^2 g_A}{(2\pi)^2 F_\pi} 1,24 \approx - 0,7\alpha / m_\pi; \quad \alpha = e^2 / 4\pi. \quad (39.2)$$

Аналогичный расчет амплитуды η -распада приводит к величине

$$f_\eta = - \frac{e^2 g_A}{(2\pi)^2 F_\pi} 0,73 \approx - 1,7\alpha / m_\eta. \quad (39.3)$$

В настоящее время известны следующие экспериментальные данные [145]:

$$|f_\pi| = 0,47\alpha / m_\pi; \quad |f_\eta| = 1,5\alpha / m_\eta.$$

Заметим, что результаты (39.2), (39.3) противоречат классическим уравнениям движения и гипотезе ЧСАТ, из которых следует $f_{\pi^0} = f_\eta \equiv 0$. Адлером [168] было предложено модифицированное условие ЧСАТ, приводящее к ненулевой амплитуде электромагнитного распада, и показано, что диаграмма, изображенная на рис. 27, дает основной вклад в амплитуды этих процессов.

Распад $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$ интересен тем, что, несмотря на отсутствие одной электромагнитной вершины по сравнению с распадом $\eta \rightarrow 2\gamma$, его вероятность почти на порядок меньше, чем у последнего. Вычислим ее в однопетлевом приближении.

Мезонные петли (как и диаграммы-деревья) не могут дать вклада, так как мезонные вершины в киральном лагранжиане всегда содержат четные числа мезонных линий, а в этом распаде — нечетное число внешних мезонных линий. Из барионных петель в однопетлевом приближении ненулевой вклад в амплитуду дают:

четырёхугольные диаграммы с тремя сильными вершинами типа (30.15а); треугольные диаграммы с одной вершиной типа (30.15а), в другой — типа (30.15в). Первые диаграммы дают здесь основной вклад*.

Суммируя все вклады, приходим к следующему выражению для амплитуды $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$ распада:

$$T_{\mu}^{(\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma)} = \frac{\pi e g_A C}{V \sqrt{3} (2\pi F_{\pi})^3} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_1^{\nu} p_2^{\rho} q^{\sigma}, \quad (39.4)$$

где p_1, p_2, q — импульсы пионов и фотона соответственно; C — фактор, учитывающий вклады от всех однопетлевых барионных диаграмм:

$$C = 6\alpha - g^2_A [1 + (2\alpha - 1)^2] = 2,38. \quad (39.5)$$

Для ширины распада получается выражение

$$\Gamma_{(\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma)} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{e g_A C}{6} \right)^2 \left(\frac{m_{\eta}}{V \sqrt{2} 4\pi F_{\pi}} \right)^6 \times \left[1 - \left(\frac{2m_{\pi}}{m_{\eta}} \right)^2 \right]^5 m_{\eta} \mathcal{I}, \quad (39.6)$$

Здесь

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx x^2 (1-x)^{3/2} \{ [1 - (2m_{\pi}/m_{\eta})^2]^{-1} - x \}^{-1/2} = 0,034$$

фазовый интеграл. В результате теоретическая оценка ширины распада $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$ оказывается равной:

$$\Gamma_{(\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma)}^{\text{теор}} = 47 \text{ эв}, \quad (39.7)$$

в то время как экспериментальное значение

$$\Gamma_{(\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma)}^{\text{эксп}} = 41 \text{ эв}. \quad (39.8)$$

Это вполне удовлетворительное согласие.

Подобным же образом можно описать и радиационные распады нейтральных каонов $K_L \rightarrow \gamma \gamma$ и $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$. Для этого надо использовать полюсные диаграммы, описывающие переходы $K_L \rightarrow \eta$ и $K_L \rightarrow \pi^0$, и с их помощью выразить вероятность распада K_L через соответствующую вероятность распада η -мезона. Теоретические результаты будут тоже вполне соответствовать эксперименту.

* Во всех диаграммах имеется еще одна электромагнитная вершина.

Выводы

В однопетлевом приближении квантовой киральной теории вычислены амплитуды различных электромагнитных процессов с участием мезонов. Показано, что среднеквадратические радиусы заряженных мезонов, в основном, определяются барионными петлями, расходимости в которых устраняются перенормировками физических величин. Мезонные петли, регуляризованные с помощью СП-метода, определяют среднеквадратический радиус нейтральных каонов, а также мнимые части электромагнитных форм-факторов всех мезонов. Результаты, полученные для форм-факторов, находятся в согласии с данными последних экспериментов [154, 155, 163], а также с предсказаниями теоретических моделей, основанных на использовании дисперсионных соотношений [169] и ρ -доминантности [162]. Заметим, что процедура паде-приближения, примененная к первым двум вычисленным порядкам электромагнитного форм-фактора пиона, приводит (так же как и в предыдущей главе, при вычислении амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния) к ярко выраженному ρ -резонансу с массой ~ 800 Мэв и шириной ~ 150 Мэв. Ширина резонанса связана с длиной p -волны в $\pi\pi$ -рассеянии, поскольку обе эти величины определяются мнимой частью пионной петли, описывающей электромагнитный форм-фактор пиона.

Вычислены также амплитуды комптон-эффектов на мезонах. Разложение этих амплитуд по энергиям фотонов определяет важные статические параметры — поляризуемости мезонов. Амплитуды комптон-эффектов в однопетлевом приближении, после проведения перенормировок физических величин, не содержат расходимостей как в барионных, так и в мезонных петлях. Вычисления вкладов от этих диаграмм приводят к хорошо определенным конечным результатам, даже без применения СП-метода. Ковариантная теория возмущения упрощает вычисления для однопетлевых мезонных диаграмм и гарантирует киральную инвариантность амплитуды вне массовой поверхности в пределе $m_\pi \rightarrow 0$.

Основной результат модельного рассмотрения комптон-эффекта, приведенного здесь, состоит в том, что амплитуда этого процесса обладает аномальными свойствами с точки зрения гипотезы гладкости. Последняя предполагает плавную зависимость амплитуды от импульсов с характерным масштабом изменения — порядка

1 Гэв. Заметим, что вклады от барионных петель удовлетворяют как гипотезе гладкости, так и всем соотношениям, следующим из алгебры токов (см. § 40). Аномальное поведение амплитуды обусловлено вкладом от пионных петель, который представляет собой функцию, резко меняющуюся в интервале энергий фотонов от нуля до $2m_\pi$.

Нарушение гипотезы гладкости связано с пороговыми аномалиями в канале $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$ (из-за порога рождения двух пионов). Аналогичные аномалии присутствуют также в перенормируемой σ -модели [128]. Характер этих аномалий существенно зависит от того, удовлетворяют ли $\pi\pi$ -взаимодействия принципу Адлера в пределе $m_\pi \rightarrow 0$. (Например, в модели $\lambda\varphi^4$ мы имели бы дополнительный полюс по переменной (q_1q_2) , по сравнению с кирально инвариантной моделью.) В этой связи, экспериментальное измерение амплитуды $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$ и функции $\beta(q_1q_2)$ — «динамической поляризуемости» — могло бы дать непосредственные аргументы в пользу киральной симметрии сильных взаимодействий и принципа Адлера.

Таким образом, модельные рассуждения указывают, что поляризуемость пиона $\beta(0)$ можно измерить лишь в экспериментах, где энергии фотонов много меньше массы пиона, например, в мезоатомах; в то время как эксперименты в глубоконеупругих e^+e^- -столкновениях будут приводить к другим значениям, обусловленным резко меняющейся функцией $\beta(q_1q_2)$.

ОПИСАНИЕ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ
МЕЗОНОВ В КВАНТОВОЙ КИРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

§ 40. Вычисления амплитуд слабых распадов пиона
[126]

Вычислим в однопетлевом приближении амплитуды всех основных распадов пионов: 1) $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu$; 2) $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu \gamma$; 3) $\pi^\pm \rightarrow \pi^0 e^\pm \nu$. Как было показано в § 37, форм-фактор и поляризуемость пиона в основном определяются взаимодействием пионов с барионами. Поскольку для интересующих нас распадов пионов имеет место подобная ситуация, будем в дальнейшем пренебрегать чисто $\pi\pi$ -взаимодействием.

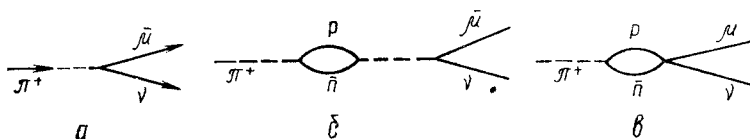


Рис. 28. Диаграммы, описывающие распад $\pi \rightarrow \mu \nu$

Исходим из следующего лагранжиана слабого взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = -L_\mu^{(+)} [V\sqrt{2}F_\pi (\partial_\mu \pi^- - ie\mathcal{A}_\mu \pi^-) + iV\sqrt{2}(\pi^- \partial_\mu \pi^0 - \pi^0 \partial_\mu \pi^-) - \bar{\psi}_p \gamma_\mu (1 + g_A \gamma_5) \psi_n];$$

$$L_\mu^{(+)} = G \cos \theta_c \bar{u}_{(\mu)} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu / \sqrt{2}.$$

$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu$ ($e^\pm \nu$). В приближении деревьев (рис. 28, а) константа F_π совпадает с константой слабого распада пиона $F_\pi (m^2)$:

$$T_{\pi \rightarrow \mu \nu}^{\text{борн}} = i p_\mu l_\mu^{(+)} \sqrt{2} F_\pi,$$

где

$l_\mu^{(+)} = G \cos \theta_c \bar{u}_{(\mu)} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_{(\nu)} / \sqrt{2}$ — лептонный ток; p_μ — импульс пиона; $F_\pi \approx F_\pi (m^2) = 92 \text{ Мэв}$. Расчет этого про-

цесса, определяющего основной параметр теории, интересен для проверки самосогласованности теории в однопетлевом приближении.

В однопетлевом приближении процесс $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ описывается двумя диаграммами (см. рис. 28, б и в). Вклады от этих диаграмм соответственно имеют вид:

$$T_1 = T^{\text{борн}} \Pi(p^2) \frac{1}{m^2 - p^2};$$

$$T_2 = -l_\mu^+ g_A \frac{M}{F_\pi} \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^4} \int d^4 k \text{Sp} \{ \gamma_5 (M - \hat{k})^{-1} \gamma_\mu \gamma_5 \times$$

$$\times (M - \hat{k} - \hat{p})^{-1} \} = T^{\text{борн}} R(m^2).$$

Здесь $\Pi(p^2)$ — поляризационный оператор, определенный в § 34

$$\Pi(p^2) = -i \frac{2g^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \text{Sp} \{ \gamma_5 (M - \hat{k})^{-1} \gamma_5 (M - \hat{k} - \hat{p})^{-1} \} =$$

$$= \text{const} + p^2 R(p^2) \equiv \Pi(m^2) - \frac{\partial}{\partial(p^2)} \Pi(p^2) \Big|_{p^2=m^2} (m^2 -$$

$$- p^2) + \dots;$$

$$R(p^2) = -i \left(\frac{g}{2\pi^2} \right)^2 \int \frac{d^4 k}{(M^2 - k^2 - i\epsilon) [M^2 - (k-p)^2 - i\epsilon]}.$$

В соответствии с теорией перенормировок, изложенной в § 34, чтобы получить окончательные результаты, необходимо сделать перенормировки массы пиона, волновой функции и константы F_π . Выражение для T_1 после перенормировки массы и волновой функции равно нулю, и T принимает вид

$$T = T^{\text{борн}} \left(1 + R(m^2) - \frac{\partial}{\partial p^2} \Pi(p^2) \Big|_{p^2=m^2} \right) =$$

$$= T^{\text{борн}} \left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{g_A m}{2\pi F_\pi} \right)^2 \right).$$

Окончательно имеем:

$$\left. \begin{aligned} T_{(\pi \rightarrow \mu \nu)} &= i \sqrt{2} p_\mu l_\mu^{(+)} F_\pi(m^2); \\ F_\pi(m^2) &= F_\pi \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{g_A m}{2\pi F_\pi} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (40.1)$$

Таким образом, вклад от нуклонных однопетлевых диаграмм не содержит никаких расходимостей и определяет зависимость константы слабого распада пиона от пионной массы.

Сокращение расходимостей является следствием частичного сохранения аксиального тока точно так же, как при вычислении электромагнитного форм-фактора пиона

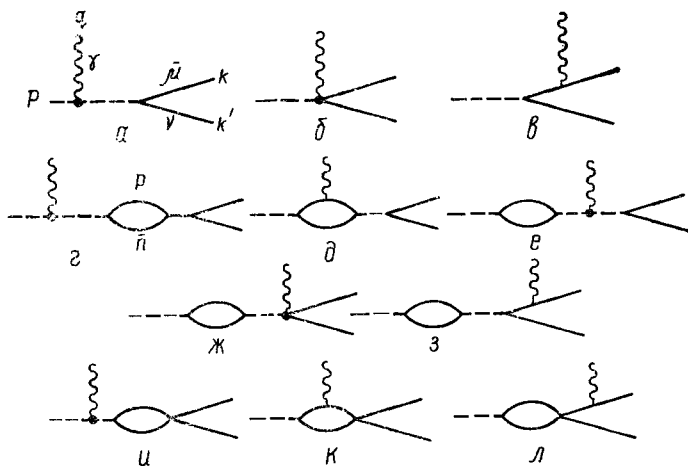


Рис. 29. Диаграммы для радиационного слабого распада $\pi \rightarrow e\nu\gamma$

сохранение векторного тока обеспечивает сокращение расходимостей в диаграммах, изображенных на рис. 22, в—д. Полагая $F_\pi(m^2) = 92 \text{ Мэв}$, получаем $F_\pi \approx 93,5 \text{ Мэв}$.

$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu \gamma$. Подробно эти процессы обсуждены М. В. Терентьевым [160] и Д. Ю. Бардиным и С. М. Биленьким [170]. Борновское приближение $T_\mu^{\text{борн}}$ определяется диаграммами, изображенными на рис. 29, а—в:

$$T_\mu^{\text{борн}} = i\sqrt{2} e F_\pi [g_{\mu\nu} + p_\mu (p - q)_\nu / (pq)] l_\nu^{(+)} - \\ - ieG \cos \theta_c F_\pi \bar{u}_{(\mu)} \gamma_\mu (\hat{k} + \hat{q} - m_{(\mu)})^{-1} \hat{p} (1 + i\gamma_5) u_{(\nu)}.$$

Однопетлевое приближение (порядок e/F_π) исчерпывается диаграммами, представленными на рис. 29, г—л.

Вклады от этих диаграмм имеют вид:

$$T_{\mu}^{(\Gamma-3)} = \left(-R(m^2) - \frac{1}{6} \left(\frac{g_A m}{2\pi F_{\pi}} \right)^2 \right) T_{\mu}^{\text{бортн}};$$

$$T_{\mu}^{(\Pi-1)} = R(m^2) T_{\mu}^{\text{бортн}} - i\sqrt{2} e [i h_{\nu} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_{\alpha} q_{\beta} - h_A (g_{\mu\nu} p q - p_{\mu} q_{\nu})] l_{\nu}^{(+)};$$

$$h_{\nu} = g_A / (8\pi^2 F_{\pi}); \quad h_A = g_A^2 / [6 (2\pi)^2 F_{\pi}]. \quad (40.2)$$

Таким образом, учет нуклонных петель сводится: к изменению константы F_{π} [см. (40.1)] и к появлению членов, описывающих структурное излучение.

Для отношения $h_A/h_{\nu} = \gamma$ получим

$$\gamma = g_A / 3 \approx 0,42, \quad (40.3)$$

в то время как эксперимент дает два возможных значения [171] $\gamma = 0,4; -2$.

Отметим, что в нашей модели выполняются следующие из алгебры токов [160] соотношения между кон-

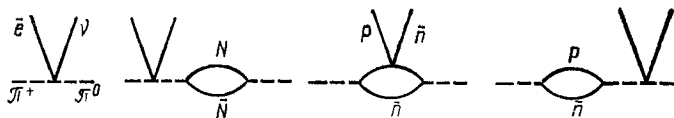


Рис. 30. Диаграммы для β -распада пиона

стантами f [см. (39.1)] и h_{ν} , а также между поляризуемостью пиона $\beta^{(N)}$ (37.9) и h_A :

$$h_{\nu} = -f / 2e^2; \quad (40.4)$$

$$h_A = F_{\pi} \beta^{(N)}. \quad (40.5)$$

Индекс (N) означает, что учтены вклады только от нуклонных петель. Вклад от чистого $\pi\pi$ -взаимодействия в поляризуемость пиона на порядок меньше.

$\pi^{\pm} \rightarrow \pi^0 e^{\pm} \nu$. Вычисление этого процесса (рис. 30) полностью аналогично вычислению электромагнитного форм-фактора пиона и приводит к следующему выраже-

нию для амплитуды распада пиона:

$$T_{(\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu)} = T^{\text{борн}} \left[1 + \frac{q^2}{6} \left(\frac{g_A}{2\pi F_\pi} \right)^2 \right] - \\ - \sqrt{2} q^\mu l_\mu^{(+)} [(m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2)/6] (g_A/2\pi F_\pi)^2, \quad (40.6)$$

где

$$T^{\text{борн}} = \sqrt{2} (p_{\pi^+} + p_{\pi^0})^\mu l_\mu^{(+)}; \quad q = p_{\pi^+} - p_{\pi^0}.$$

Последний член в (40.6) пренебрежимо мал — порядка $o(m_e/m_\pi)$.

Учет гиперонных петель сводится к следующим заменам в формулах (39.1), (40.1) — (40.2), (40.6):

$$g_A^2 \rightarrow g_A^2 \left[1 + \frac{4}{9} \left(\frac{M_N}{M_\Sigma} \right)^2 + \frac{16}{27} \left(\frac{M_N}{M_{\Sigma\Lambda}} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{9} \left(\frac{M_N}{M_\Xi} \right)^2 \right] \approx 1,73 g_A^2; \\ g_A \rightarrow g_A [1 + M_N/3M_\Xi] \approx 1,24 g_A.$$

§ 41. K_{l3} -распад

Вычислим амплитуду процесса $K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}$ в однопетлевом приближении. При этом будем учитывать вклад только от барионных петель. Вкладом от мезонных петель, в соответствии с § 37, можно пренебречь (см. также [123]).

Лагранжианы, необходимые для построения борновского и однопетлевого барионного приближения процесса $K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}$, имеют вид:

$$\mathcal{L}_{\text{с.л}} = -i L_\mu^{(-)} \{ \cos \theta_c [\sqrt{2} (\pi^+ \partial_\mu \pi^0 - \pi^0 \partial_\mu \pi^+) - \\ - K^+ \partial_\mu \bar{K}^0 + \bar{K}^0 \partial_\mu K^+] + \sin \theta_c [K^0 \partial_\mu \pi^+ - \pi^+ \partial_\mu K^0 + \\ + (K^+ \partial_\mu \pi^0 - \pi^0 \partial_\mu K^+) / \sqrt{2} + \sqrt{3/2} (K^+ \partial_\mu \eta - \eta \partial_\mu K^+)] \} + \\ + L_\mu^{(-)} \{ \cos \theta_c [\bar{n} \gamma_\mu p + \bar{\Xi}^- \gamma_\mu \Xi^0 + \sqrt{2} (\bar{\Sigma}^- \gamma_\mu \Sigma^0 - \bar{\Sigma}^0 \gamma_\mu \Sigma^+)] +$$

$$+ \sin \theta_c [\bar{\Xi}^0 \gamma_\mu \Sigma^+ - \bar{\Sigma}^- \gamma_\mu n - (\bar{\Sigma}^0 \gamma_\mu p + \bar{\Xi}^- \gamma_\mu \Sigma^0) / \sqrt{2} - \\ - \sqrt{3/2} (\bar{\Lambda} \gamma_\mu p + \bar{\Xi}^- \gamma_\mu \Lambda)];$$

$$\mathcal{L}_1 = g\pi^0 [\bar{p} \cdot p - \bar{n} \cdot n + (2\alpha - 1) (\bar{\Xi}^- \cdot \Xi^- - \bar{\Xi}^0 \cdot \Xi^0) + \\ + 2\alpha (\bar{\Sigma}^0 \cdot \Lambda + \bar{\Lambda} \cdot \Sigma^0) / \sqrt{3} + 2(1 - \alpha) (\bar{\Sigma}^+ \cdot \Sigma^+ - \bar{\Sigma}^- \cdot \Sigma^-)];$$

$$\mathcal{L}_2 = gK^+ [\sqrt{2} (2\alpha - 1) \bar{n} \cdot \Sigma^- + (2\alpha - 1) \bar{p} \cdot \Sigma^0 - \\ - (3 - 2\alpha) \bar{p} \cdot \Lambda / \sqrt{3} + \sqrt{2} \bar{\Sigma}^+ \cdot \Xi^0 - \bar{\Sigma}^0 \cdot \Xi^- + \\ + (4\alpha - 3\bar{\Lambda}) \bar{\Xi}^- / \sqrt{3}].$$

Здесь $L_\mu^{(-)} = G \bar{v} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) e / \sqrt{2}$; α — параметр смешивания ($\alpha = 2/3$; $(\cdot \equiv i\gamma^5)$).

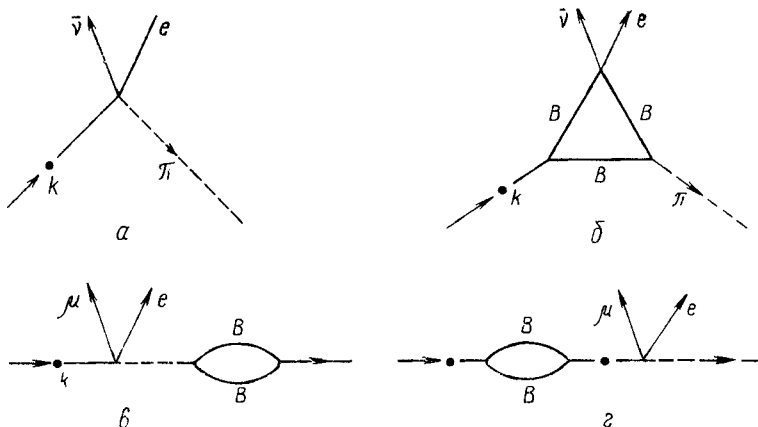


Рис. 31. Диаграммы для K_{l3} -распада:

— · — — каонная линия

В борновском приближении для амплитуды распада имеем выражение (рис. 31,а):

$$f^{\text{борн}} = i(p_k + p_\pi)^\mu \Pi_\mu^{(-)} / \sqrt{2};$$

$$\Pi_\mu^{(-)} = G \sin \theta_c \bar{u}_\nu \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_l / \sqrt{2},$$

где p_k и p_π — импульсы каона и пиона соответственно.

Вклад от полной совокупности всех треугольных барионных диаграмм (см. рис. 31,б) запишем в виде

$$f_{K^- \rightarrow \pi^0 e \bar{\nu}}^{\Delta} = V\sqrt{2} \frac{g^2}{(2\pi)^4} \Pi_{\mu}^{(-)} \left\{ J^{\mu}(2n, \Sigma) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{10}{3} \alpha^2 - 4\alpha + 1 \right) J^{\mu}(2\Sigma, n) + (2\alpha - 1)^2 J^{\mu}(2E, \Sigma) + \right. \\ \left. + 2(1 - 2\alpha^2/3) J^{\mu}(2\Sigma, E) \right\}, \quad (41.1)$$

где

$$J^{\mu}(2n, \Sigma) = \int dk \frac{\text{Sp} \{ \gamma^5 (\hat{k} + M_n) \gamma^5 (\hat{k} + \hat{p}_{\pi} + M_n) \times \\ \rightarrow \frac{\times \gamma^{\mu} (\hat{k} + \hat{p}_k + M_{\Sigma})}{\times (M_n^2 - k^2) (M_n^2 - (k + p_{\pi})^2) \times} \\ \rightarrow \frac{\times \gamma^{\mu} (\hat{k} + \hat{p}_k + M_{\Sigma})}{\times (M_{\Sigma}^2 - (k + p_k)^2)} \}. \quad (41.2)$$

Вклад в амплитуду распада каона от диаграмм рис. 31,в, г равен

$$f_{K^- \rightarrow \pi^0 e \bar{\nu}}^{\circ} = -V\sqrt{2} \frac{g^2}{(2\pi)^4} (p_k + p_{\pi})^{\mu} \Pi_{\mu}^{(-)} \times \\ \times \left\{ \sum_1^3 c_i I(M_i, M_i, p_{\pi}) + \sum_1^2 d_i I(M_i, \bar{M}_i, p_k) \right\}, \quad (41.3)$$

$$M_1 = M_1 = M_n; \quad M_2 = \bar{M}_2 = M_2; \quad M_3 = M_2 = \bar{M}_1 = M_{\Sigma};$$

$$c_1 = 1; \quad c_2 = (2\alpha - 1)^2; \quad c_3 = (4/3)(4\alpha^2 - 6\alpha + 3);$$

$$d_1 = (20\alpha^2 - 24\alpha + 9)/3; \quad d_2 = (8\alpha^2 - 12\alpha - 9)/3;$$

$$I(M_i, \bar{M}_i, p^2) = \frac{(-1)}{2(m^2 - p^2)} \int dk \times \\ \times \frac{\text{Sp} \{ \gamma^5 (M_i + \hat{k}) \gamma^5 (\bar{M}_i + \hat{k} + \hat{p}) \}}{(M_i^2 - k^2) (\bar{M}_i^2 - (k + p)^2)} \Big|_{p^2 = m^2}. \quad (41.4)$$

Интегралы (41.2) и (41.4) можно выразить через один и тот же расходящийся интеграл $R(M, \bar{M}, p^2)$ и различные конечные части. Интеграл R имеет вид

$$R(M, \bar{M}, p^2) = \int d^4k / [(M^2 - k^2) (\bar{M}^2 - (p + k)^2)]. \quad (41.5)$$

Сейчас мы покажем, что все расходящиеся интегралы типа (41.5), содержащиеся в выражениях (41.1) и (41.3), взаимно сокращаются. Остающиеся конечные выражения можно вычислить точно, но для простоты приведем здесь

выражения, соответствующие разложению этих функций по малым величинам γ , δ и q^2/M^2 с точностью до второго порядка по ним:

$$\gamma = (\bar{M} - M)/M, \quad \delta = m_k^2/M^2 (m_\pi^2/M^2 \approx 0). \quad (41.6)$$

Интегралы (41.2) и (41.4) выражаются через (41.5) и (41.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} J^\mu(2M, \bar{M}) = & i\pi^2 (p_k + p_\pi)^\mu \left\{ \gamma \left(1 - \frac{2}{3}\gamma + \frac{\delta + q^2/M^2}{12} \right) + \right. \\ & + \frac{q^2}{M^2} \frac{1}{3} \left(1 - \gamma + \frac{\delta}{10} \right) + \frac{2}{i\pi^2} R(M, \bar{M}, m_k^2) \left. \right\} + \\ & + i\pi^2 (p_k - p_\pi)^\mu \left\{ \frac{1}{3}\gamma(2 + \gamma) \left(1 - \gamma + \frac{q^2}{10M^2} \right) - \right. \\ & - \gamma \left(1 - \frac{2}{3}\gamma + \frac{\delta + q^2/M^2}{12} \right) - \frac{\delta}{3} \left(1 - \gamma + \frac{\delta + q^2/M^2}{10} \right) \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$I(M, \bar{M}, p_k^2) = R(M, \bar{M}, m_k^2) + \frac{i\pi^2}{6} (\delta - \gamma^2) (1 - \gamma + \delta/5);$$

$$I(M, \bar{M}, p_\pi^2) = R(M, \bar{M}, m_\pi^2).$$

Заметим теперь, что коэффициенты c_i и d_i в выражении (41.3) можно разделить так, что к каждой функции $J^\mu(2M, \bar{M})$ добавится выражение из (41.3) вида

$$-(p_k + p_\pi)^\mu [I(M, \bar{M}, p_\pi^2) + I(M, \bar{M}, p_k^2)].$$

Обозначая полную функцию символом $\bar{J}^\mu(2M, \bar{M})$ и используя соотношение $2R(M, \bar{M}, m_k^2) = R(M, \bar{M}, m_k^2) + R(M, \bar{M}, m_\pi^2) - (i\pi^2/6) [\gamma(2 + \gamma)(3 - 2\gamma) - \delta(1 - \gamma + \delta/10)]$, для однопетлевого вклада барионных диаграмм в амплитуду распада каона получаем конечное выражение

$$\begin{aligned} f_{K^- \rightarrow \pi^0 e \bar{\nu}}^{\Delta+0} = & \sqrt{2} \frac{g^2}{(2\pi)^4} \Pi_\mu^{(-)} \left\{ \bar{J}^\mu(2n, \Sigma) + \right. \\ & + 2 \left(\frac{10}{3} \alpha^2 - 4\alpha + 1 \right) \bar{J}^\mu(2\Sigma, n) + (2\alpha - 1)^2 \bar{J}^\mu(2E, \Sigma) + \\ & \left. + 2(1 - 2/3 \alpha^2) \bar{J}^\mu(2\Sigma, E) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{J}^\mu(2M, \bar{M}) = & \frac{i\pi^2}{3} (p_k + p_\pi)^\mu \left\{ -\gamma^2 \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{q^2}{M^2} \left(1 - \frac{3}{4}\gamma + \frac{\delta}{10} \right) \right\} - i\pi^2 (p_k - p_\pi)^\mu \left\{ \delta + \gamma \left(1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - 3\delta/4 - \gamma \right) + (q^2/M^2) (\delta/10 - \gamma/5 + \delta\gamma/4) \right\} / 3. \end{aligned}$$

Объединяя найденное выражение с борновским членом и подставляя численные значения $\bar{J}^\mu(2M, \bar{M})$ в (41.1), получаем

$$\begin{aligned} f_{\text{борн}} + f^{\Delta+0} = & i \frac{\Pi^\mu(-)}{\sqrt{2}} \left\{ (p_k + p_\pi)^\mu \left[1 + \frac{2}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(-0,06 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + 1,43 \frac{q^2}{M_n^2} \right) \right] - (p_k - p_\pi)^\mu \frac{2}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(0,81 - 0,025 \frac{q^2}{M_n^2} \right) \right\} = \\ = & i \frac{\Pi^\mu(-)}{\sqrt{2}} \left\{ (p_k + p_\pi)^\mu f_+ + (p_k - p_\pi)^\mu f_- \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $g^2/4\pi \approx 14,7$, находим для форм-факторов выражения*:

$$\left. \begin{aligned} f_+(q^2) = & 0,95 + 0,024q^2/m_\pi^2; \quad f_-(q^2) = -0,63 + \\ & + 0,0004q^2/m_\pi^2; \quad f_0(q^2) = f_+(q^2) + \\ & + \frac{q^2}{m_K^2 - m_\pi^2} f_-(q^2) = 0,95 - 0,029 \frac{q^2}{m_\pi^2}. \end{aligned} \right\} (41.7)$$

Откуда следует, что

$$\xi = f_-(0)/f_+(0) = -0,66; \quad \lambda_+ = 0,025; \quad \lambda_0 = -0,03. \quad (41.8)$$

Эти значения форм-фактора K_{l_3} -распада находятся в удовлетворительном согласии с недавними экспериментальными данными [172] $\lambda_+^{(\text{эксн})} = 0,025 \pm 0,007$; $\lambda_0^{(\text{эксн})} = -0,017 \pm 0,011$ или $\lambda_+^{(\text{экс})} = 0,025 \pm 0,007$; $\xi^{\text{экс}} = -1,3$.

§ 42. Разность масс нейтральных каонов

Оценим разность масс нейтральных каонов в предположении, что основной вклад дают диаграммы с испусканием разного числа мезонов (рис. 32). Другими словами, будем считать, что разность масс каонов обуслов-

* В случае точной $SU(3) \times SU(3)$ -симметрии $f_+(0) = 1$, $f_-(0) = 0$.

лена теми различными виртуальными состояниями, в которые могут переходить эти мезоны, с учетом их комбинированной четности.

Рассмотрим подробно только две диаграммы с одним и двумя промежуточными мезонами. Лагранжиан взаимодействия (31.14) можно привести к виду без производных перенормированием каонных полей:

$$\mathcal{L}_{(\pi, K, \eta)} = a_1 K_L (\pi + \eta/\sqrt{3}) + a_2 K_S \pi^2 + O(\eta^2) + O(\pi^3).$$

Вклад от полюсной диаграммы рис. 32,а пропорционален формуле Гелл-Мана — Окубо для масс псевдоскалярных

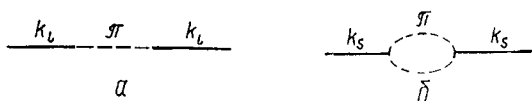


Рис. 32. Диаграммы, описывающие разность масс нейтральных каонов K^0_L и K^0_S

мезонов:

$$\frac{1}{m_\pi^2 - m_K^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{m_\eta^2 - m_K^2} = \frac{3m_\eta^2 + m_\pi^2 - 4m_K^2}{3(m_\pi^2 - m_K^2)(m_\eta^2 - m_K^2)} \approx 0.$$

Оценим вклад от петлевой диаграммы рис. 32,б, полагая массы пиона равными нулю. Мнимая часть соответствующей амплитуды пропорциональна вероятности распада каона $2\text{Im} T^{(2\pi)} \sim \omega^{(2\pi)}$, а реальная часть дает вклад в разность масс, так что

$$(m_L - m_S)^{(2\pi)} / \omega^{(2\pi)} = \text{Re} T^{(2\pi)} / [2\text{Im} T^{(2\pi)}]. \quad (42.1)$$

Восстановим реальную часть с помощью дисперсионного соотношения

$$\text{Re} T^{(2\pi)}(m_K^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds' \text{Im} T^{(2\pi)}(s')}{s' - m_K^2}. \quad (42.2)$$

Поскольку для безмассовых полей мнимая часть не зависит от импульса, можно сразу вычислить отношение (42.1).

Делая в (42.2) одно вычитание с неопределенным параметром L , получаем

$$(m_L - m_S)^{(2\pi)}/\omega^{(2\pi)} \sim (1/\pi) \operatorname{Im}(L/m_K) \sim 0,3$$

для $L \approx 4\pi F_\pi \approx 1,2$.

К такому эффективному параметру ($L \approx 4\pi F_\pi$) приводит СП-метод. Более строгая оценка, сделанная для массивных пионов с помощью СП-метода, дает [129]

$$(m_L - m_S)^{(2\pi)}/\omega^{(2\pi)} \approx 0,52,$$

в то время как экспериментальное значение равно 0,48 [145]. Вклад от петли η -мезонов не существует.

Выводы

В однопетлевом приближении квантовой киральной теории вычислены форм-факторы слабых распадов мезонов. Полученные значения паходятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными. Основной вклад в эти величины дают барионные петли, в то время как вклад от мезонных петель мал. (Подобно тому, как это было при вычислении электромагнитного форм-фактора пиона, см. гл. 11.)

При вычислении основной величины киральной теории F_π — константы пионного распада $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu$ показано, что однопетлевые диаграммы, после проведения перенормировок, приводят к малой поправке — порядка нескольких процентов от вклада древесных диаграмм. Это свидетельствует о самосогласованности однопетлевого приближения в киральной теории.

Вычисленный форм-фактор слабого радиационного распада пиона $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu \gamma$ удовлетворяет следующим из алгебры токов соотношениям, связывающим константы структурного излучения этого процесса с константами других распадов пионов и поляризуемостью.

Векторные форм-факторы β -распадов пиона и каона совпадают с электромагнитными форм-факторами и находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными. Отметим, что основной вклад в скалярный форм-фактор β -распада каона происходит от нарушения $SU(3)$ -симметрии в барионных массовых членах.

Дана также оценка вклада пионной петли в разность масс нейтральных каонов, показывающая, что этот вклад является определяющим,

§ 43. К вопросу об интерпретации

Среди существующих интерпретаций общей теории относительности Эйнштейна можно выделить две наиболее известные. В основе одной из них лежит *геометрическая* трактовка гравитации (отождествление гравитации с отклонением геометрии 4-пространства от плоского пространства). В другой, *динамической* интерпретации гравитационное поле рассматривается как тензорное поле в псевдоевклидовом пространстве*.

Существует мнение [174], что обе эти интерпретации скорее дополняют друг друга, чем находятся в противоречии, а результаты расчетов не зависят от того, как интерпретировать основные положения общей теории относительности.

Геометрическая интерпретация** весьма удобна для решения задач космологии. Однако выделение гравитационного поля среди остальных полей создает трудности, как при построении единых теорий элементарных частиц, включающих все взаимодействия, так и при квантовании гравитации.

Как неоднократно подчеркивал Гупта [176], для вопросов квантования более адекватен динамический подход, который трактует гравитационное поле как нели-

* Отметим также, что интересная интерпретация общей теории относительности развивается в работах [173].

** Отождествление геометрии и гравитации сыграло большую роль при создании Эйнштейном общей теории относительности. Эйнштейн пытался дать логическое обоснование такого отождествления, основываясь на принципе эквивалентности и логической структуре специальной теории относительности. Критику такого обоснования дал В. А. Фок [175], по мнению которого необходимо просто постулировать тождество гравитации с отклонением геометрии пространства от плоского. Следует отметить, что взгляды самого Эйнштейна по этому вопросу в последние годы жизни изменились и приблизились к позиции Фока (см., например, «Автобиографические заметки» в [5]).

нейное тензорное поле в плоском пространстве. Эта точка зрения хорошо изложена Тиррингом [177]. (Фейнман первый дал конструктивное предложение для ковариантного квантования гравитации [178]. Ковариантное квантование гравитации было проведено независимо Л. Д. Фаддеевым и В. Н. Поповым и Де Виттом [179].)

Заметим, что в своих исходных принципах общая теория относительности и киральная теория несколько напоминают друг друга.

Принцип эквивалентности можно рассматривать как физический аргумент, свидетельствующий о существовании определенной динамической симметрии гравитационного взаимодействия — общековариантной группы симметрии, подобно тому как универсальность слабых и электромагнитных взаимодействий указывает на возможную киральную симметрию сильных взаимодействий.

Общековариантная группа играет роль основного динамического принципа, точно так же, как киральная симметрия — динамический принцип при построении киральной теории сильных взаимодействий.

Существует несколько вариантов вывода уравнений Эйнштейна из группы общековариантных преобразований [17, 18, 180—182]. Роль симметрии отчетливо выделена в подходе В. И. Огиевского [17], который показал, что общековариантная бесконечно-параметрическая группа эквивалентна замыканию конечных групп аффинных и конформных преобразований. Теория гравитации Эйнштейна возникает как нелинейная совместная динамическая реализация аффинной и конформной групп [18], точно так же, как киральные лагранжианы возникают при нелинейной реализации киральной симметрии. Гравитон в таком подходе играет роль голдстоуновского поля.

Такая неожиданная трактовка теории гравитации стимулирует постановку проблем, выходящих за рамки геометрической интерпретации. В частности, здесь можно поставить вопрос о природе самой динамической симметрии гравитации, подобно тому как Памбу и др. [7, 108] поставили вопрос о природе алгебры токов, указывая при этом на глубокую аналогию между динамической симметрией и теорией фазовых переходов в статистической физике.

§ 44. Теория гравитации как теория спонтанного нарушения симметрии

Как показано А. Б. Борисовым и В. И. Огиевецким [18], теория гравитационного поля Эйнштейна может рассматриваться, как теория спонтанного нарушения аффинной и конформной симметрий подобно тому, как киральная динамика — теория спонтанного нарушения киральной симметрии.

Аффинная группа $A(4)$ есть группа всех линейных преобразований в 4-пространстве-времени $x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu + c_\mu$. Она содержит группу Пуанкаре в качестве подгруппы.

Алгебра $A(4)$ состоит из четырех генераторов трансляций P_μ , шести генераторов группы Лоренца $L_{\mu\nu}$ и десяти генераторов собственно линейных (аффинных) преобразований, включая растяжение:

$$\left. \begin{aligned} [L_{\mu\nu}, L_{\rho\tau}]/i &= \delta_{\mu\rho}L_{\nu\tau} - \delta_{\mu\tau}L_{\nu\rho} - (\mu \longleftrightarrow \nu); \\ [L_{\mu\nu}, R_{\rho\tau}]/i &= \delta_{\mu\rho}R_{\nu\tau} + \delta_{\mu\tau}R_{\nu\rho} - (\mu \longleftrightarrow \nu); \\ [R_{\mu\nu}, R_{\rho\tau}]/i &= \delta_{\mu\rho}L_{\nu\tau} + \delta_{\mu\tau}L_{\rho\nu} + (\mu \longleftrightarrow \nu); \\ [L_{\mu\nu}, P_\rho]/i &= \delta_{\mu\rho}P_\nu - (\mu \longleftrightarrow \nu); \\ [R_{\mu\nu}, P_\rho]/i &= \delta_{\mu\rho}P_\nu + (\mu \longleftrightarrow \nu). \end{aligned} \right\} \quad (44.1)$$

С истинными законами сохранения полного импульса и полного момента количества движения связана только подгруппа Пуанкаре. Остальным десяти параметрам собственно аффинных преобразований ставятся в соответствие десять компонент симметричного тензорного гольдстоуновского поля $h_{\mu\nu}$. Отметим здесь особую роль абелевой подгруппы трансляций. Параметрами ее являются координаты 4-пространства. Дифференциалы координат непосредственно участвуют в построении инвариантов. Координаты x_μ начинают играть поэтому роль гольдстоуновских полей, дополняющих десять тензорных полей, соответствующих собственно аффинным преобразованиям.

Дальнейшие рассуждения и выводы являются иллюстрацией общей теории, изложенной в гл. 7. Действие элемента группы $A(4)$ определяется согласно уравнению

$$g \exp(i x_\mu P_\mu) \exp(i h_{\mu\nu} R_{\mu\nu}/2) = \exp(i x'_\mu P_\mu) \times \\ \times \exp[i h'_{\mu\nu}(x') R_{\mu\nu}/2] \exp[i U_{\mu\nu} L_{\mu\nu}/2], \quad (44.2)$$

где x'_μ , $h'_{\mu\nu}(x')$ и $U_{\mu\nu}$ зависят от параметров преобразования g и поля $h_{\mu\nu}$. Пусть Ψ произвольное поле, являющееся линейным представлением группы Лоренца. Тогда действие группы $A(4)$ на поле Ψ определяется как

$$g\Psi = \Psi'(x) = \exp[i U_{\mu\nu}(h(x), g) L_{\mu\nu}^\Psi/2] \Psi(x), \quad (44.3)$$

где $L_{\mu\nu}^\Psi$ — матрица-генератор в линейном представлении группы Лоренца.

Инварианты, т. е. лагранжианы, относительно этих преобразований строятся с помощью форм Картана ω :

$$\exp\left\{-\frac{i}{2} h_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}\right\} \exp\{-i x_\mu P_\mu\} d \exp\{i x_\mu P_\mu\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{i}{2} h_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}\right\} = i [\omega_\mu^P(d) P_\mu + \omega_{\mu\nu}^R(d) R_{\mu\nu}/2 + \\ + \omega_{\mu\nu}^L(d) L_{\mu\nu}/2]. \quad (44.4)$$

Формы ω^P , ω^R определяют ковариантные дифференциалы координаты и голдстоуновских полей. Формы ω^L используются для определения ковариантного дифференциала полей Ψ :

$$D\Psi = (d + i \omega_{\mu\nu}^L(d) L_{\mu\nu}^\Psi/2) \Psi.$$

Ковариантное дифференцирование по координате 4-пространства определяется с помощью деления на дифференциал $\omega_\lambda^P(d)$:

$$\nabla_\lambda \Psi = D\Psi/\omega_\lambda^P. \quad (44.5)$$

Найдем теперь явный вид форм Картана для экспоненциальной параметризации, что соответствует выбору нормальных координат в 10-пространстве $h_{\mu\nu}$. Вводя в уравнение (44.4) параметр t с помощью замены $h_{\mu\nu} \rightarrow t h_{\mu\nu}$, дифференцируя по t левую и правую части (44.4) и используя коммутационные соотношения (44.1), получаем урав-

нения (см. § 27):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega_{\mu}^P(d) &= h_{\mu\nu} \omega_{\nu}^P(d); \\ \frac{\partial}{\partial t} \omega_{\mu\nu}(d) &= dh_{\mu\nu} - h_{\mu\tau} \omega_{\sigma\nu}(d) + \omega_{\mu\tau}(d) h_{\sigma\nu}; \\ \omega_{\mu}^P(d)|_{t=0} &= dx_{\mu}; \quad \omega_{\mu\nu}(d)|_{t=0} = 0; \\ \omega_{\mu\nu}^R &= (\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu})/2 \equiv \omega_{(\mu\nu)}; \\ \omega_{\mu\nu}^I &= (\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu})/2 \equiv \omega_{[\mu\nu]}. \end{aligned} \right\} (44.6)$$

Решениями этих уравнений являются выражения (при $t=1$):

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\mu}^P(d) &= r_{\mu\nu} dx_{\nu}; \quad \omega_{\mu\nu}(d) = r_{\mu\tau}^{-1} dr_{\sigma\nu}; \\ r_{\mu\nu} &= (\exp h)_{\mu\nu}; \quad r_{\mu\nu}^{-1} = (\exp -h)_{\mu\nu}. \end{aligned} \right\} (44.7)$$

Инвариантные элементы длины и объема 4-пространства-времени строятся с помощью форм ω^P :

$$\left. \begin{aligned} (ds)^2 &= \omega_{\lambda}^P \omega_{\lambda}^P = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}; \\ g_{\mu\nu} &= r_{\mu\sigma} r_{\sigma\nu}; \quad dv = (\det r) d^4 x. \end{aligned} \right\} (44.8)$$

Требование минимальности по числу производных, как правило, не фиксирует однозначно теорию, так как всегда можно добавить в ковариантную производную (44.5) ряд членов того же порядка по производной, но с произвольными коэффициентами c_1, c_2, c_3 (см. § 30) без изменения ее трансформационных свойств:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\lambda} \Psi &= \partial_{\lambda} \Psi + i V_{\mu\nu, \lambda}(c_1, c_2, c_3) L_{\mu, \nu}^{\Psi} \Psi / 2; \quad \partial_{\lambda} = r_{\lambda\gamma}^{-1} \partial_{\gamma}, \\ V_{\mu\nu, \lambda} &= \omega_{[\mu\nu]}(\partial_{\lambda}) + c_1 [\omega_{(\nu\lambda)}(\partial_{\mu}) - \omega_{(\mu\lambda)}(\partial_{\nu})] + \\ &+ c_2 [\delta_{\mu\lambda} \omega_{\sigma\nu}(\partial_{\nu}) - \delta_{\nu\lambda} \omega_{\sigma\mu}(\partial_{\mu})] + c_3 [\delta_{\mu\lambda} \omega_{(\nu\sigma)}(\partial_{\sigma}) - \\ &- \delta_{\nu\lambda} \omega_{(\mu\sigma)}(\partial_{\sigma})]; \quad \omega_{\mu\nu}(\partial_{\gamma}) \equiv r_{\mu\tau}^{-1} \partial_{\tau} r_{\sigma\nu}. \end{aligned} \right\} (44.9)$$

Как показано в работе [18], параметры c_1, c_2, c_3 однозначно определяются из требования, чтобы теория одновременно соответствовала и пелинсейной реализации конформной группы

$$c_1 = -1; \quad c_2 = c_3 = 0. \quad (44.10)$$

Это требование приводит к теории тензорного поля, уравнения которой совпадают с уравнениями Эйнштейна.

Существует другой более простой (но менее красивый, поскольку связан с выходом за рамки конечно-параметрических групп) способ устранения неоднозначности в выражении (44.9). Этот способ аналогичен требованию отсутствия скалярных полей в электродинамике в силу градиентной инвариантности. (Если лагранжиан векторного поля \mathcal{A}_μ инвариантен относительно преобразований $\mathcal{A}'_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda$, то скалярные поля не проявляют себя во взаимодействиях.)

По аналогии с электродинамикой потребуем, чтобы во взаимодействиях тензорного гольдстоуновского поля участвовала лишь частица со спином два, а частицы со спином единица полностью исключались в силу инвариантности лагранжиана относительно градиентных преобразований в фактор-пространстве, т. е. собственно аффинных преобразований, где параметр есть градиент векторного поля $C_\mu(x)$; $R'_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} (+) \partial_\mu C_\nu(x)$:

$$\exp\left\{i \frac{h_{\mu\nu}}{2} R_{\mu\nu}\right\} \rightarrow \exp\left\{i \frac{\partial_\mu C_\nu(x)}{2} R_{\mu\nu}\right\} \exp\left\{i \frac{h_{\alpha\beta}}{2} R_{\alpha\beta}\right\}. \quad (44.11)$$

Эти преобразования инфинитезимально соответствуют преобразованиям координат

$$x_\mu \rightarrow x_\mu + C_\mu(x). \quad (44.12)$$

Требую, чтобы при преобразованиях (44.11) величина $V_{\mu\nu,\lambda}(c_1, c_2, c_3)$ преобразовывалась, как при константных преобразованиях, получаем значения (44.10) для коэффициентов c_1, c_2, c_3 , что опять приводит к теории Эйнштейна. Преобразования (44.11) и (44.12) совпадают с общековариантными преобразованиями, которые в данном подходе приобретают простой физический и геометрический смысл.

В силу требований инвариантности лагранжиана относительно преобразований (44.11) формы Картана ω^R нельзя использовать для определения инвариантного лагранжиана самих гольдстоуновских полей (точно так же в электродинамике для определения лагранжиана вместо d_μ используется тензор

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu : (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) U = F_{\mu\nu} U;$$

$$D_\mu U = (\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu) U,$$

где U — заряженное поле),

Аналогично ковариантное выражение для самих гольдстоуновских полей $h_{\mu\nu}$ можно получить, рассмотрев коммутатор ковариантных производных любого поля Ψ :

$$(\nabla_\lambda \nabla_\rho - \Delta_\rho \nabla_\lambda) \Psi = i R_{\mu\nu, \lambda\rho} L_{\mu\nu}^\Psi \Psi / 2.$$

Свертка $R = R_{\mu\nu, \mu\nu}$ является скаляром относительно аффинной группы.

Тензоры $r_{\mu\nu}$ (44.7) играют важную роль в теории. Они определяют метрический тензор $g_{\mu\nu}$ (44.8), который преобразуется линейно при преобразованиях аффинной группы. Заменой переменных, соответствующих полям с целым спином, можно ввести линейно преобразующиеся контра- и ковариантные величины. Например, пусть Ψ является векторным полем $a_\mu(x)$. Тогда векторные поля

$$\mathcal{A}_\mu(x) = r_{\mu\nu}(x) a_\nu(x); \quad \mathcal{A}^\nu = r_{\mu\nu}^{-1} a_\nu(x) \equiv g^{\nu\mu} \mathcal{A}_\mu \quad (44.13)$$

будут контр- и ковариантными линейно преобразующимися векторами соответственно. Переход к линейно преобразующимся величинам аналогичен переходу от системы ортогональных реперов к системе нормальных реперов аффинного пространства (§ 26).

Ковариантная производная от \mathcal{A}_μ в натуральном репере имеет вид

$$D_\lambda \mathcal{A}_\mu = r_{\lambda\bar{\lambda}} r_{\mu\bar{\mu}}^{-1} \nabla_{\bar{\lambda}} (r_{\bar{\sigma}\mu}^{-1} \mathcal{A}_{\bar{\sigma}}) = \partial_\lambda \mathcal{A}_\mu - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \mathcal{A}_\sigma,$$

где $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma$ — символы Кристоффеля. Величины $g_{\mu\nu}$ (44.8), $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma$ и R связаны между собой обычными соотношениями, возникающими в теории тяготения Эйнштейна. Минимальное взаимодействие описывается интегралом действия

$$S(h, \Psi) = \int d^4x (\det r) \left[L_0(\Psi, \nabla_\mu \Psi) + \frac{F^2}{4} R \right], \quad (44.14)$$

где $L_0(\Psi, \nabla_\mu \Psi)$ — лагранжиан свободных полей Ψ ; $F = \sqrt{4\pi k^{-1}} \approx 10^{19} \text{ Гэв}$; k — постоянная Ньютона. Поля $h_{\mu\nu}$ безразмерны и связаны с обычными размерными полями h_p соотношением $h_p = Fh$.

При этом определение ковариантной производной спинора $D_\lambda \Psi = r_{\lambda\bar{\lambda}} \nabla_{\bar{\lambda}} \Psi$; $\nabla_{\bar{\lambda}} \Psi = (r^{-1})_{\lambda\mu} \partial_\mu + i \sigma_{\mu\nu} V_{\mu\nu, \bar{\lambda}} \Psi / 4$ оказывается в точности таким же, как в тетрадном формализме при релятивистски-симметричной калибровке тетрад [182].

Выводы

Построенная нелинейная реализация аффинной симметрии полностью совпадает с теорией тяготения Эйнштейна. Например, для электромагнитного поля возникает лагранжиан, используемый в § 24.

Интерпретация теории тяготения как теории спонтанно нарушенной симметрии позволяет установить глубокую аналогию с физикой элементарных частиц и с физикой твердого тела. В частности, возникает проблема, связанная с восстановлением аффинной симметрии вакуума.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем кратко итоги изложенному материалу. Приведенные выше примеры свидетельствуют о том, что рассмотрение КТП с неполиномиальными лагранжианами представляет большой физический интерес. Немаловажным обстоятельством является тот факт, что в широком классе существенно-нелинейных теорий поля удается сформулировать строгий принцип микропричинности и локальности теории. Развитие специфических методов, необходимых для проведения регуляризационной процедуры в таких теориях, позволяет производить квантование теоретико-полевых моделей с неполиномиальными лагранжианами.

С другой стороны, построение неполиномиальных моделей в КТП является одной из естественных возможностей реализации динамических симметрий. В настоящее время стало совершенно очевидным, что учет этих симметрий при изучении взаимодействия элементарных частиц играет важную роль.

В книге подробно описана группа динамической симметрии, присущая динамике сильных взаимодействий элементарных частиц, — группа киральной симметрии. Наряду с изложением общего математического аппарата, соответствующего этой группе симметрии (формализм, связанный с использованием форм Картана), даются многочисленные примеры конкретных физических приложений квантовой киральной теории к описанию сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий элементарных частиц. При этом используются простейшие предположения о минимальном нарушении группы $SU(3) \times SU(3)$ при введении массовых членов. Все основные распады мезонов $SU(3)$ -октета, их форм-факторы и поляризуемости, а также амплитуды рассеяния при

малых энергиях удается вполне удовлетворительно описать, используя лишь четыре хорошо известных параметра: константу распада пиона F_π , константу перенормировки аксиального тока g_A , угол Кабиббо θ_c и параметр смешивания f и d связи в $SU(3)$ -теории — α . Константы распада пиона F_π и каона F_K мы полагаем равными. При этом оказывается, что как древесное, так и однопетлевое приближения с вполне приемлемой точностью (порядка 30%) описывают широкий класс физических явлений при низких энергиях взаимодействующих частиц ($\sqrt{s} < 4\pi F_\pi \approx 1 \text{ ГэВ}$).

Отсутствие существенных поправок от высших порядков по сильным взаимодействиям является следствием проявления универсальности сильного взаимодействия, подчиняющегося киральной динамической группе (подобно тому, как это происходит в электродинамике при учете группы градиентной инвариантности).

При изучении процессов с большими энергиями взаимодействия адронов приближение точечных частиц может оказаться слишком грубой схемой, т. к. здесь становится важным учет внутренней структуры адронов. Уверенность в наличии такой структуры непрерывно возрастает, чему способствуют успехи кварковой модели алгебры токов на световом конусе и собственно кварковых моделей в объяснении процессов электророждения и нейтринных реакций при высоких энергиях, а также в описании огромного числа распадов резонансов и данных по спектроскопии адронов. В то же время эти успехи определенно указывают, что киральная симметрия является приближенной симметрией сильных взаимодействий для всех доступных в настоящее время энергий. Однако реализуется такая симметрия для различных энергий по-разному. В связи с этим весьма интересным и важным представляется исследование смены режимов реализации киральной симметрии от динамической к алгебраической в области средних энергий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М., «Наука», 1973.
2. **Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.** Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
3. **Швебер С.** Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
4. **Эйнштейн А.** Собрание научных трудов. Пер. с англ. и нем. Т. IV. М., «Наука», 1967.
5. **Вигнер Е.** Этюды о симметрии. Пер. с англ. М., «Мир», 1971.
6. **Bogolubov N. N.** On Some Problems of the Theory of Superconductivity. — «Physica», 1960, v. 26, p. 51.
7. **Nambu Y.** Axial Vector Current Conservation in Weak Interactions. — «Phys. Rev. Lett.», 1960, v. 4, p. 380.
8. **Goldstone J.** Fields Theories with «Superconductor» Solutions. — «Nuovo cimento», 1961, v. 19, p. 154.
9. **Блохинцев Д. И.** К вопросу о единой теории поля. — «Успехи физ. наук», 1951, т. 44, с. 104.
10. **Weinberg S.** Dynamical Approach to Current Algebra. — «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 18, p. 188.
11. **Coleman S., Wess I., Zumino B.** Structure of Phenomenological Lagrangians. I. — «Phys. Rev.», 1969, v. 177, p. 2239.
12. **Structure of Phenomenological Lagrangians. II.** — «Phys. Rev.», 1969, v. 177, p. 2247. Auth.: C. L. Callan, S. Coleman, I. Weiss, B. Zumino.
13. **Волков Д. В.** Феноменологические лагранжианы. — «ЭЧАЯ», 1973, т. 4, вып. 1, с. 3.
14. **Волков Д. В.** Препринт ИТФ 69-73. Киев, 1969.
15. **Фаддеев Л. Д.** Адроны из лептонов? — «Письма в ЖЭТФ», 1975, т. 21, с. 25.
16. **Faddeev L. D.** Vortex-Line Solution of a Unified Model of Electromagnetic and Weak Interactions of Leptons. München Preprint MPI-PAE/P th. 16, 1974.
17. **Ogievetsky V. I.** Infinite-Dimensional Algebra of General Covariance Group as the Closure of Finite-Dimensional Algebra of Conformal and Linear Groups. — «Lett. Nuovo cimento», 1973, v. 8, p. 988.
18. **Борисов А. Б., Огиевецкий В. И.** Теория динамических аффинной и конформной симметрий как теория гравитационного поля. — «Теор. и мат. физика», 1974, т. 21, с. 329.
19. **Weinberg S.** A Model of Leptons. — «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 1275; **Salam A.** Weak and Electromagnetic Interactions — In: Proc. of the 8 Nobel Symposium. N. Y., 1968, p. 367.

20. **Brandt R. A., Ng Wing-Chiu.** Gauge Invariance and Mass. — «Phys. Rev. D.», 1974, v. 10, p. 4198; **Иванов Е. А., Огиевецкий В. И.** Калибровочные теории как теории спонтанного нарушения. - «Письма в ЖЭТФ», 1975, т. 23, с. 661.
21. **Фаддеев Л. Д.** Калибровочно-инвариантная модель электромагнитного и слабого взаимодействий лептонов. — «Докл. АН СССР», 1973, т. 210, с. 807.
22. **Gell-Mann M.** Summary and outlook. In: Proc. of the XVII Int. Conf. on High Energy Phys. V. 4. Batavia N. A. L. 1972, p. 357.
23. **Sikivie P., Gürsey F.** Quark and lepton assignments in the E_7 model. — «Phys. Rev. D.», 1977, v. 16, p. 816.
24. **Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н.** К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц. Препринт ОИЯИ Д1968, Дубна, 1965.
25. **Адлер С., Дашен Р.** Алгебра токов. Пер. с англ. М., «Мир», 1970.
26. **Goldberger M., Treiman S.** Conserved Currents in Theory of Fermi Interactions. — «Phys. Rev.», 1958, v. 10, p. 1478.
27. **Блохинцев Д. И.** Существенно-нелинейные поля и поляризация вакуума. — «Теор. и мат. физика», 1974, т. 21, с. 155.
28. **Мейман Н. Н.** Принципы причинности и асимптотическое поведение амплитуды рассеяния. — «Журн. эксперим. и теор. физики», 1964, т. 47, с. 1966.
29. **Jaffe A. M.** Entire Functions of the Free Field. — «Ann. Phys.», 1965, v. 32, p. 127.
30. **Jaffe A. M.** Formfactors at Large Momentum Transfer. — «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 661.
31. **Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.** Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.
32. **Боголюбов Н. Н.** Доклад на международном съезде физиков-теоретиков в Сиэтле. 1956.
33. **Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С.** Об аналитическом продолжении обобщенных функций. — «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1958, т. 22, с. 15.
34. **Владимиров В. С., Логунов А. А.** Об аналитических свойствах обобщенных функций квантовой теории поля. — «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1959, т. 23, с. 661.
35. **Jost R., Lehmann H.** Integral-Darstellung Kausaler Kommutatoren. — «Nuovo cimento», 1957, v. 5, p. 1598.
36. **Dyson J. F.** Integral Representations of Causal Commutators. — «Phys. Rev.», 1958, v. 110, p. 1460.
37. **Soboleff S.** Methode Nouvelle á Resondre le Probleme de Couchy pour les Equations Limaires Hyperboliques Normales. — «Mat. сборник», 1936, т. 1(43), с. 39.
38. **Schwartz L.** Théorie des Distributions. Paris. Herman, 1957.
39. **Гельфанд И. М., Шилов К. К.** Обобщенные функции. Т. 1, 2. М., Физматгиз, 1958.
40. **Стритер Р., Вайтман А. С.** PCT, спин и статистика и все такое. Пер. с англ. М., «Наука», 1966.
41. **Йост Р.** Общая теория квантованных полей. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
42. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., «Наука», 1969.

43. **Hori S.** On the Well-ordered S -Matrix. — «*Progr. Theor. Phys.*», 1952, v. 7, p. 578.
44. **Volkov M. K.** Method of Construction of the Green's Functions in Momentum Space for Unrenormalizable Interactions. — «*Ann. Phys.*», 1968, v. 49, p. 202.
45. **Колкунов В. А.** Вычисление инвариантного фазового объема частиц. — «*Журн. эксперим. и теор. физики*», 1962, т. 43, с. 1448.
46. **Ефимов Г. В.** О построении локальной квантовой теории поля без ультрафиолетовых расходимостей. — «*Журн. эксперим. и теор. физики*», 1963, т. 44, с. 2107.
47. **Ефимов Г. В.** О нелинейных лагранжианах взаимодействия. — «*Журн. эксперим. и теор. физики*», 1965, т. 48, с. 598.
48. **Efimov G. V.** Formulation of a Scalar Quantum Field Theory with an Essentially Non-Linear Interaction. — «*Nucl. Phys.*», 1965, v. 74, p. 657.
49. **Gradkin E. S.** Application of Functional Methods in Quantum Field Theory and Quantum Statistics. I. — «*Nucl. Phys.*», 1963, v. 49, p. 624.
50. **Salam A., Strathdee J.** Momentum-Space Behavior of Integrals in Nonpolynomial Lagrangian Theories. — «*Phys. Rev. D.*», 1970, v. 1, p. 3296.
51. **Волков М. К.** Четырехмерная унитарная релятивистская модель квантовой теории поля без расходимостей. — «*Ядерная физика*», 1967, т. 6, с. 1100.
52. **Волков М. К.** Модель квантовой теории поля со спектральными функциями быстрого роста. — «*Ядерная физика*», 1967, т. 7, с. 445.
53. **Volkov M. K.** Quantum Field Model with Unrenormalizable Interaction. — «*Commun. Math. Phys.*», 1968, v. 7, p. 289.
54. **Волков М. К.** Аналитическая структура суперпропэгатора по константе связи. — «*Теор. и мат. физика*», 1971, т. 6, с. 21.
55. **Volkov M. K.** Green Functions in the Theory of Local Unrenormalizable Interactions. — «*Commun. Math. Phys.*», 1969, v. 15, p. 69.
56. **Lehmann H., Pohlmeier K.** On the Superpropagator of Fields with Exponential Coupling. — «*Comm. Math. Phys.*», 1971, v. 20, p. 101.
57. **Keck B. W., Taylor J. G.** Renormalization of Nonpolynomial Lagrangians. — «*J. Phys. A.*», 1971, v. 3, p. 441.
58. **Mitter P. K.** Analytic Renormalisation of the Exponential Interactions and Weak Interaction Singularities. — «*Commun. Math. Phys.*», 1971, v. 20, p. 251.
59. **Арбузов Б. А., Атакишиев Н. М., Филиппов А. Т.** Об аналитическом продолжении по заряду в модели неперенормируемой теории поля. — «*Ядерная физика*», 1968, т. 8, с. 385.
60. **Atakishiev N. M., Filippov A. T.** Calculation of Superpropagators in Non-Linear Quantum Field Theories. — «*Commun. Math. Phys.*», 1971, v. 24, p. 74.
61. **Dyson F. J.** The Interactions of Nucleons with Meson Fields. — «*Phys. Rev.*», 1972, v. 73, p. 929.
62. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Пер. с англ. М., «Наука», 1965.
63. **Okubo S.** Note on the Second Kind Interactions. — «*Progr. Theor. Phys.*», 1954, v. 11, p. 80.

64. Lee B. W., Zumino B. Some Considerations on the Efimov — Fradkin Method on Non-Linear Field Theories. — «Nucl. Phys. B», 1969, v. 13, p. 671.
65. Gursev F. On the Symmetries of Strong and Weak Interactions. — «Nuovo cimento», 1960, v. 10, p. 230.
66. Chang P., Gursev F. Unified Formulation of Effective Non-Linear Pion-Nucleon Lagrangians. — «Phys. Rev.», 1967, v. 164, p. 1752.
67. Schwinger J. Chiral Dynamics. — «Phys. Lett. B», 1967, v. 24, p. 473.
68. Харди Г. Расходящиеся ряды. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1951.
69. Wataghin G. Formfaktoren in der Nichtlokalen Feldtheorie. — «Z. Phys.», 1934, Bd 88, S. 92.
70. Блохинцев Д. И. Нелокальные и целлинейные теории поля. — «Успехи физ. наук», 1957, т. 61, с. 137.
71. Марков М. А. О «четырёхмерно протяженном» электропе в релятивистской квантовой области. — «Журн. эксперим. и теор. физики», 1940, т. 10, с. 1311.
72. Киржниц Д. А. Нелокальная квантовая теория поля. — «Успехи физ. наук», 1966, т. 90, с. 129.
73. Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. М., «Наука», 1970.
74. Ефимов Г. В. Нелокальная квантовая теория поля. — М., «Наука», 1977.
75. Кадышевский В. Г. Квантовая теория поля и импульсное пространство постоянной кривизны. — В кн.: Проблемы теоретической физики. (Сборник, посвященный памяти И. Е. Тамма.) М., «Наука», 1972.
76. Karowski M. Über Superpropagatoren. — «Commun. Mat. Phys.», 1970, v. 19, p. 289.
77. Speer E. J. Analytic Renormalization. — «J. Math. Phys.», 1968, v. 9, p. 1404.
78. Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С. О вычислительном формализме при умножении причинных функций. — «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1956, т. 20, с. 585.
79. Волков М. К. Метод описания неперенормируемых взаимодействий с учетом унитарности. — «Теор. и мат. физика», 1970, т. 2, с. 197.
80. Волков М. К. Преобразования Фурье в теориях с неперенормируемыми взаимодействиями. Препринт ОИЯИ P2-4050. Дубна, 1968, с. 546.
81. Filippon A. T. Partial Symmetry, Equivalence Theorems and Calculation of Higher Orders in Non-Renormalizable Field Theories. — In: Proc. of the Topical Conf. on Weak Interaction. CERN, Geneva, Jan., 1969, p. 395.
82. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
83. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., Физматгиз, 1962.
84. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М., «Наука», 1967.
85. Волков М. К. Неполномногальные лагранжианы (высшие порядки теории возмущений). — «Теор. и мат. физика», 1972, т. 11 с. 277.

86. **Pohlmeyer K.** Higher Order Perturbation Theory for Experimental Lagrangians: Third Order. — «Commun. Math. Phys.», 1972, v. 26, p. 130.
87. **Daniel M., Mitter P. K.** Analytic Renormalization of the Exponential Interaction: the Three Point Time Ordered Product with Minimum Light Cone Singularity. Preprint 72-056. University of Maryland, Maryland, 1971.
88. **Pauli W., Willars F.** On the Invariant Regularization on Relativistic Quantum Theory. — «Revs. Mod. Phys.», 1949, v. 21, p. 434.
89. **Volkov M. K.** Description of Non-Polynomial Quantum Field Theories by Superpropagator Method. — «Fortsch. Phys.», 1974, Bd 28, S. 499.
90. **Pohlmeyer K.** On Superpropagators Involving Massive Fields. Preprint Institute for Advances Study, Princeton, 1971.
91. **Fivel D. I., Mitter P. K.** Theory of Weak Interactions without Divergences. — «Phys. Res. D», 1970, v. 1, p. 3270.
92. **Isham C. J., Salam A., Strathdee J.** Infinity Suppression in Gravity-Modified Quantum Electrodynamics. — «Phys. Rev. D», 1971, v. 3, p. 1805.
93. **Isham C. J., Salam A., Strathdee J.** Infinity Suppression in Gravity-Modified Electrodynamics. — «Phys. Rev. D», 1972, v. 5, p. 2448.
94. **Волков М. К.** Модель нейтрального пион-нуклонного перенормируемого взаимодействия без ультрафиолетовых расходимостей. Препринт ИТФ 69-5. Киев, 1969.
95. **Lee T. D.** Analysis of Divergences in a Neutral-Spin-1-Meson Theory with Partly-Nonconserving Interactions. — «Nuovo cimento A», 1968, c. 59, p. 579.
96. **Delbourgo R.** Renormalization of a Weak-Interaction Model. — «Nuovo cimento A», 1972, v. 11, p. 943.
97. **Budini P., Culucci C.** Regularization of Quantum Electrodynamics through Non-Polynomial Lagrangians. — «Nuovo cimento A», 1970, v. 70, p. 419.
98. **Salam A.** Impact of Quantum Gravity Theory on Particle Physics. Preprint ICTP IC/74/55. Miramare-Trieste, 1974.
99. **Карган Э.** Геометрия групп Ли и симметрические пространства. Пер. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
100. **Карган Э.** Риманова геометрия в ортогональном репере. Пер. с франц. М., Изд-во МГУ, 1960.
101. **Карган Э.** Теория коэчных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера. Пер. с франц. М., Изд-во МГУ, 1963.
102. **Gell-Mann M., Levi M.** The Axial Vector Current in Beta Decay. — «Nuovo cimento», 1960, v. 16, p. 705.
103. **Волков Д. В., Гершун В. Д., Ткач В. И.** Токовая структура феноменологических лагранжианов. — «Теор. и мат. физ.», 1970, т. 5, с. 321.
104. **Фейнман Р., Гелл-Манн М.** Theory of Fermi Interaction. — «Phys. Rev.», 1958, v. 109, p. 193.
105. **Герштейн С. С., Зельдович Я. Б.** О мезонных поправках в теории β -распада. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1955, т. 26, с. 698.
106. **Gell-Mann M.** Symmetries of Baryons and Mesons. — «Phys. Rev.», 1962, v. 125, p. 1067.

107. Schwinger J. A Theory of the Fundamental Interactions. — «Ann. Phys.», 1959, v. 2, p. 407.
108. Nambu Y., Jona-lasinio G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. — «Phys. Rev.», 1961, v. 122, p. 345; Арбузов Б. А., Тавхелидзе А. Н., Фаустов Р. Н. К вопросу о массе фермиона в γ^5 -инвариантной модели квантовой теории поля. — «Докл. АН СССР», 1961, т. 139, с. 345; Вакс В. Г., Ларкин А. Т. О применении методов теории сверхпроводимости к вопросу о массах элементарных частиц. — «Журн. эксперим. и теор. физики», 1961, т. 40, с. 282.
109. Соловьев Л. Д. Низкоэнергетические теоремы и дисперсионные соотношения в квантовой электродинамике. — «Теор. и мат. физика», 1973, т. 15, с. 59
110. Lee B. W. Renormalization of the σ -Model. — «Nucl. Phys. B», v. 9, p. 649; Gervais J. L., Lee B. W. Renormalization of the σ -Model. II. Fermion Fields and Regularization. — «Nucl. Phys. B», 1969, v. 12, p. 627.
111. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Инвариантная теория возмущений для нелинейных киральных лагранжианов. — «Теор. и мат. физ.», 1971, т. 8, с. 217.
112. Slavnov A. A. Invariant regularization of non-linear chiral theories. — «Nucl. Phys. B», 1971, v. 31, p. 301.
113. Chiral Loops. — «Phys. Rev. D», 1971, v. 3, p. 2486. Auth.: S. Gerstein, R. Jackiw, B. W. Lee, S. Weinberg.
114. Волков М. К., Казаков Д. И., Первушин В. Н. Перенормировки в нелинейной киральной теории. — «Теор. и мат. физика», 1976, т. 28, с. 46.
115. Honerkamp J. Chiral Multi-Loops. — «Nucl. Phys. B», 1972, v. 36, p. 130.
116. Ecker G., Honerkamp J. Pion-Pion Phase Shifts from Covariant Perturbation Theory for a Chiralinvariant Field Theoretic Model. — «Nucl. Phys. B», 1973, v. 52, p. 211.
117. Первушин В. Н. О квантовании киральных теорий. — «Теор. и мат. физика», 1975, т. 22, с. 291.
118. Lehmann H. Chiral Invariance and Effective Range Expansion for Pion-Pion Scattering. — «Phys. Lett.», 1972, v. 41, p. 529.
119. Lehmann H., Trute H. Second Order Effects in Chiral-Invariant Pion Lagrangians and the Use of Superpropagators. — «Nucl. Phys. B», 1973, v. 52, p. 280.
120. Ecker G., Honerkamp J. Pion-Pion Scattering from an $SU(3) \times SU(3)$ Invariant Lagrangian. — «Nucl. Phys. B», 1973, v. 62, p. 509.
121. Chan L.-H., Haymaker R. W. Meson dynamics in $SU(3) \times SU(3)$ σ -Model. — «Phys. Rev. D», 1974, v. 10, p. 4143; Scattering in SU_2 σ -Model. — «Phys. Rev. D», 1974, v. 10, p. 4170.
122. Thung K. S., Willey R. S. Nonlinear σ -Model Pade Calculation of $\pi\pi$ -Phase Shifts. — «Phys. Rev. D», 1974, v. 9, p. 3132.
123. Волков М. К., Первушин В. Н. Электромагнитный форм-фактор π -мезона. — «Ядерная физика», 1974, т. 19, с. 652.
124. Волков М. К., Первушин В. Н. Низкоэнергетическое рассеяние массивных пионов. — «Ядерная физика», 1974, т. 20, с. 762.
125. Volkov M. K., Pervushin V. N. Description of $\pi\pi$ -Scattering and the Pion Electromagnetic Properties in Quantum Chiral Fields Theory. — «Nuovo cimento A», 1975, v. 27, p. 277.

126. Волков М. К., Первушин В. Н. Описание пионных распадов в квантовой киральной теории.— «Ядерная физика», 1975, т. 22.
127. Pervushin V. N., Volkov M. K. Pion Polarizability in Chiral Quantum Field Theory.— «Phys. Lett. B», 1975, v. 55, p. 405; Волков М. К., Первушин В. Н. Вычисления амплитуды $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$ в киральной квантовой теории.— «Ядерная физика», 1975, т. 22, с. 346.
128. Гальперин А. С., Калиновский Ю. Л. Поляризуемость пионов в линейной сигма-модели. Препринт ОИЯИ P2-10849. Дубна, 1977.
129. Pervushin V. N., Volkov M. K. K_L-K_S -Mass Difference.— «Phys. Lett. B», 1974, v. 51, p. 399.
130. Pervushin V. N., Volkov M. K. Electromagnetic Interactions of Kaons.— «Phys. Lett. B», 1975, v. 58, p. 177.
131. Kazakov D. I., Pervushin V. N., Volkov M. K. K_{13} -Decay in Quantum Field Theory with Chiral Symmetry.— «Phys. Lett. B», 1976, v. 64, p. 201.
132. Лендвел В. И., Гайсак М. И. Описание низкоэнергетического πN -рассеяния в нелинейной киральной $SU(2) \times SU(2)$ динамике.— «ЭЧАЯ», 1977, т. 8, вып. 5, с. 106.
133. Волков М. К., Первушин В. Н. Описание низкоэнергетических процессов в квантовой киральной теории.— «ЭЧАЯ», 1975, т. 6, с. 623.
134. Волков М. К., Первушин В. Н. Квантовая теория поля с киральным лагранжианом и физика мезонов низких энергий.— «Успехи физ. наук», 1976, т. 120, с. 363.
135. Gell-Mann M., Oakes R. J., Renner V. Behavior of Currents Divergences under $SU(3) \times SU(3)$.— «Phys. Rev.», 1968, v. 175, p. 2195.
136. Oakes R. J. $SU(2) \times SU(2)$ Breaking and the Cabibbo Angle.— «Phys. Lett. B», 1969, v. 29, p. 683.
137. Ebrahim E., Serdaroglu. $SU(2) \times SU(2)$ Breaking, Cabibbo Angle and $\eta \rightarrow 3\pi$ Decay in a Nonlinear Lagrangians Model.— «Phys. Lett. B», 1974, v. 48, p. 338.
138. Dashen R., Weinstein M. Soft Pions, Chiral Symmetry and Phenomenological Lagrangians.— «Phys. Rev.», 1969, v. 183, p. 1261.
139. Palou F. P., Yndurian F. J. Low-Energy $\pi\pi$ -Scattering Parameters.— «Nuovo cimento A», 1974, v. 19, p. 245.
140. Исаев П. С. $K\pi$ -взаимодействие.— «ЭЧАЯ», 1973, т. 4, с. 731.
141. Lee B. W. My Perspectives on Particle Physics. Preprint Fermi Lab.-Conf-76/20. Batavia, 1976.
142. Callan C. G., Treiman S. B. Equal-Time Commutators and K -Meson Decays.— «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 16, p. 153.
143. Lee T. D. Remarks on the $|\Delta I|=1/2$ Rule in Non-Leptonic Weak Decays and the Use of the Phenomenological Lagrangian. Preprint BNL 50260 (T-530). N. Y., 1973.
144. Sakurai J. J. Vector-Meson Dominance and Current Algebra in the Parity-Violating Nonleptonic Decays of K -mesons and Hyperons.— «Phys. Rev.», 1967, v. 156, p. 1508; Калиновский Ю. Л., Первушин В. Н. Универсальное взаимодействие адронных токов с $|\Delta T|=1/2$ и нелептонные распады каонов. Препринт ОИЯИ P2-10175. Дубна, 1976.
145. Review of Particle Physics.— «Revs Mod. Phys.», 1976, v. 48, N 2, Part II.

146. **Попов В. Н.** Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М., Атомиздат, 1976.
147. **Baton J. P., Laurens G., Reignier J.** $\pi^+\pi^-$ Elastic Cross Section from Chew-Low Extrapolations of $\pi^-p \rightarrow \pi^+\pi^-n$ Reaction of 2,77 GeV/c. — «Phys. Lett. B», 1970, v. 33, p. 525; **Алп-Phase Shifts** from Chew-Low Extrapolation of $\pi^-p \rightarrow \pi\pi N$ at 2,77 GeV/c. — «Phys. Lett. B», 1970, v. 33, p. 528.
148. **Алп-Phase Shift Analysis** from Reactions $\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^-\Delta^{++}$ and $\pi^+p \rightarrow K^+K^-\Delta^{++}$ at 7,1 GeV/c. Preprint LAL-787. Berkeley, 1972. Auth.: S. D. Protopopescu, M. Alston-Garnjost, A. Barbaro-Gallieri e. a.
149. **Study of $\pi^+\pi^-$ Scattering** in $\pi^-p \rightarrow \pi^+\pi^-X^0$ via a Chew-Low Extrapolation. — «Phys. Lett. B», 1972, v. 38, p. 55. Auth.: P. Boillon, R. K. Carnegie, E. E. Kluge, D. W. G. S. Leth, H. L. Lynch, B. Rateliff, B. Richter, H. U. Williams, S. U. Williams.
150. **Неупругие π^+p -взаимодействия** при энергиях 230 и 275 МэВ. — «Ядерная физика», 1975, т. 21, с. 309. Авт.: Ю. А. Батусов, С. А. Бунятов, Г. Р. Гулкавян, В. М. Сидоров, М. Мусаханов, Г. Иониде, Е. Лозяну, В. Михул, Д. Тувдендорж.
151. **Martin A.** Geometrical Restrictions on the Pion-Pion Partial Waves. — «Nuovo cimento A», 1967, v. 47, p. 265.
152. **Martin A.** A New Rigorous Inequality on $\pi^0\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ S-Wave Amplitude. — «Nuovo cimento», 1968, v. 58, p. 303.
153. **Serebryakov V. V., Shirkov D. V.** Short-Range Repulsion and Broken Chiral Symmetry in Low Energy Scattering. — «Fortsch. Phys.», 1970, Bd 18, S. 527--576.
154. **Определение** пионного и нуклонного форм-факторов из анализа реакции $\pi^-p \rightarrow e^+e^-n$ при энергии 275 МэВ. — Припринт ОИЯИ Р1-10311. Дубна, 1976. Авт.: С. Ф. Бережнев, Т. Д. Блохинцева, А. В. Демьянов, А. В. Купцов, В. П. Курочкин, Л. Л. Немецов, Г. И. Смирнов, Д. М. Хазинс.
155. **The Pion Radius.** — «Phys. Lett. B», 1974, v. 51, p. 402. Auth.: G. T. Adylov, F. K. Aliev, D. Yu. Bardin, W. Gajski, I. Ion, B. A. Kulakov, T. S. Nigmanov, E. N. Tsyfanov, M. Turala, A. S. Vodopianov, K. Wala, E. Dally, D. Drickey, A. Liberman, P. Shepard, J. Tourpkins, C. Buchanan, J. Foitier.
156. **Klein A.** Low-Energy Theorems for Renormalizable Field Theories. — «Phys. Rev.», 1955, v. 99, p. 998.
157. **Baldin A. M.** Polarizability of Nucleons. — «Nucl. Phys.», 1960, v. 18, p. 310.
158. **Петрунькин В. А.** Рассеяние фотонов малой энергии на системе со спином 1/2. — «Журн. эксперим. и теор. физики», 1961, т. 40, с. 1148.
159. **Barashenkov V. S., Barbashov B. M.** The Electrical Polarizability of the Meson Cloud in the Nucleon. — «Nucl. Phys.», 1958/59, v. 9, p. 426.
160. **Терентьев М. В.** Поляризуемость π -мезона, виртуальный комpton-эффект и распад $\pi \rightarrow e\nu$. — «Ядерная физика», 1972, т. 16, с. 162.
161. **Ericson T. E. O., Hüfner J.** Theory of Polarization Shifts in Exotic Atoms. — «Nucl. Phys. B», 1972, v. 47, p. 205.
162. **Kroll N. M., Lee T. D., Zumino B.** Neutral Vector Mesons and the Hadronic Electromagnetic Current. — «Phys. Rev.», 1967, v. 157, p. 1376.

163. **Measurement** of the Electromagnetic Interaction of the Neutral Kaon. — «Nucl. Phys. B», 1976, v. 102, p. 253. Auth.: F. Dydak, C. Geweniger et al.
164. **Терентьев М. В.** О поляризуемости элементарной частицы. — «Ядерная физика», 1974, т. 19, с. 1297.
165. **K⁻-Mass and K⁻-Polarizability** from Kaonic Atoms. — «Phys. Lett. B», 1973, v. 43, p. 431. Auth.: G. Backenstoss et al.
166. **Steinberger I.** On the Use of Subtraction Fields and the Lifetimes of Some Types of Meson Decay. — «Phys. Rev.», 1949, v. 76, p. 1180; **Bramon A., Penarrocha J. A.** Baryon-Loop Model for Radiative Decays of Mesons. — «Lett. Nuovo cimento», 1976, v. 17, p. 205.
167. **Волков М. К.** Описание распада $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$ в квантовой киральной теории. — «Ядерная физика», 1978, т. 27, с. 758.
168. **Adler S. L.** Consistency Conditions on the Strong Interactions Implied by a Partially Conserved Axial Vector Currents II. — «Phys. Rev. B», 1965, v. 139, p. 1638; 1969, v. 177, p. 2426; 1969, v. 182, p. 1517.
169. **Dubnicka S., Mesheryakov V. A.** Tail, Zeros and Space Like Region Behaviour of the Electromagnetic Pion Form-Factor. — «Nucl. Phys. B», 1974, v. 83, p. 311.
170. **Бардин Д. Ю., Биленький С. М.** О радиационных распадах $\pi(K) \rightarrow e\nu\gamma$. — «Ядерная физика», 1972, т. 16, с. 557.
171. **Further Measurements** on the Decay $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu \gamma$. — «Phys. Lett.», 1963, v. 7, p. 285. Auth.: G. Depommier, J. Neutze, C. Rubbia, V. Soergel.
172. **A Study** of the Semi-Leptonic Decays of K⁺-Mesons. — «Nucl. Phys. B», 1975, v. 89, p. 210. Auth.: H. Braun, M. Cornuelsen, H. Martyn, O. Erriques, S. Nodtahi, F. Romano et al.
173. **Логунов А. А., Фоломешкин В. И.** О геометризованных теориях гравитации. — «Теор. и мат. физ.», 1977, т. 32, с. 147; **Энергия-импульс** гравитационных волн в общей теории относительности. — Там же, с. 167.
174. **Кибл Т.** Квантовая теория гравитации. — «Успехи физ. наук», 1968, т. 96, с. 497.
175. **Фок В. А.** Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматгиз, 1961.
176. **Gupta S.** Einstein's and Other Theories of Gravitation. — «Revs Mod. Phys.», 1957, v. 29, p. 334.
177. **Tirring W.** An Alternative Approach to the Theory of Gravitation. — «Ann. Phys.», 1961, v. 16, p. 96.
178. **Feynman R.** Quantum Theory of Gravitation. — «Acta phys. polon.», 1963, v. 24, p. 697.
179. **Faddeev L. D., Popov V. N.** Feynman Diagrams for Yang — Mills Field. — «Phys. Lett. B», 1967, v. 25, p. 30; **De-Witt B. S.** Quantum Theory of Gravity. — «Phys. Rev.», 1967, v. 160, p. 1113; v. 162, p. 1195, 1239.
180. **Kibble T. W. B.** Lorentz Invariance and the Gravitational Field. — «J. Math. Phys.», 1961, v. 2, p. 212.
181. **Утигава К.** Invariant Theoretical Interpretation of Interaction. — «Phys. Rev.», 1956, v. 101, p. 1592.
182. **Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В.** О шнурах в теории тяготения. — «Журн. эксперим. и теор. физики», 1965, т. 48, с. 1625.

АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебра токов** 4
- Взаимодействие локализуемого (нелокализуемого) типа** 28, 55
- Гипотеза частичного сохранения аксиального тока** 139
- Группа голономии** 123
- движений пространства 125
 - Ли 126
 - непрерывная, порядка 126
 - полупростая 126
- Длина фундаментальная** 79
- Диаграммы слабосвязные, сильносвязные и несвязные** 24
- Индекс диаграммы** 25
- Классы смежности** 126
- Координаты нормальные** 113
- Лагранжиан эффективный** 27
- Лагранжианы существенно нелинейные** 5
- Метод Картана** 121
- феноменологических лагранжианов 120
- Операторы инфинитазимальные** 127
- Подгруппа пространства стационарная** 131
- Подгруппы инвариантные** 126
- Принцип локальности** 38
- минимальных сингулярностей 69
- Принципы симметрии алгебраические** 13
- — динамические 13, 14
- Пространства аффинной связности** 123
- групповые 127
 - Шварца 33
- Суперпропагатор** 57
- Теорема об «острие клина»** 32
- Теоремы низкоэнергетические** 14
- Теория квантования киральная** 155
- киральная 12
 - распределений 33
- Теории локальные (нелокальные)** 5
- реформируемые и перенормируемые 5, 24
- Уравнения Мауэра — Картина** 121
- структуры 121
- Уравнения фундаментальные** 126
- Фактор-пространство** 127
- Функции обобщенные (несобственные) и основные** 33
- Частицы (поля) голдстоуновские** 15, 139

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора	3
Предисловие	5
Обозначения	7
Глава 1. Принципы симметрии и взаимодействия элементарных частиц	11
§ 1. Развитие квантовой теории поля	11
§ 2. Роль принципов симметрии в физике элементарных частиц	12
§ 3. Алгебраические и динамические принципы	13
§ 4. Виды взаимодействий и их симметрии	16
Выводы	18
Глава 2. Классификация взаимодействий в квантовой теории поля	19
§ 5. Электромагнитные и слабые взаимодействия	19
§ 6. Сильные взаимодействия	21
§ 7. Взаимодействия первого и второго рода	23
Выводы	28
Глава 3. Локализуемые и нелокализуемые взаимодействия второго рода	30
§ 8. Запаздывающие и опережающие амплитуды	30
§ 9. Вспомогательные асимптотические амплитуды	35
§ 10. Причинность и структура допустимых обобщенных функций. Свойства основных функций	37
§ 11. Ограничения на рост для преобразований Фурье обобщенных функций из C'_0	42
Выводы	46
Глава 4. Квантовые теории поля с неполиномиальными лагранжианами	47
§ 12. S -матрица в неполиномиальных теориях	47
§ 13. Спектральные функции быстрого роста	49
§ 14. Классификация методов, используемых в теориях поля с неполиномиальными лагранжианами	57
Выводы	65
Глава 5. Суперпропагаторный метод	67
§ 15. Краткое описание метода	67
§ 16. Нелокализуемые взаимодействия (безмассовые частицы)	69
§ 17. Локализуемые взаимодействия (безмассовые частицы)	85

§ 18. Проблема однозначности метода. Принцип минимальных сингулярностей	90
§ 19. Регуляризационная процедура для построения высших порядков теории возмущений по G . Связь с регуляризацией Паули — Вилларса	96
§ 20. Суперпропагатор для массивных частиц	101
Выводы	104
Глава 6. Простые модели взаимодействий	106
§ 21. Регуляризующие свойства суперпропагаторов	106
§ 22. Модель с псевдовекторной связью скалярных и спинорных полей	109
§ 23. Слабое взаимодействие нейтрального векторного мезона со спинорным полем	112
§ 24. Электродинамика с учетом гравитации	115
Выводы	118
Глава 7. Метод феноменологических лагранжианов	120
§ 25. Общие замечания	120
§ 26. Риманова геометрия в ортогональном репере	121
§ 27. Геометрия группы Ли	126
§ 28. Метод феноменологических лагранжианов	133
Выводы	136
Глава 8. Киральная теория сильных взаимодействий при низких энергиях	137
§ 29. Киральная динамическая симметрия	137
§ 30. Киральные лагранжианы (нелинейная реализация)	140
§ 31. Приближение деревьев	146
Выводы	154
Глава 9. Теория возмущений для неполиномиальных лагранжианов с динамической симметрией	155
§ 32. Ковариантная теория возмущений	155
§ 33. Вычисление коэффициентов разложения двухточечного суперпропагатора	163
§ 34. Перенормировки в нелинейной киральной теории	165
Выводы	171
Глава 10. Описание сильных взаимодействий в квантовой киральной теории	172
§ 35. Вычисление амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния в одноплетевом приближении	173
§ 36. Фазовый анализ, длины парциальных волн и неравенства Мартена	181
Выводы	186
Глава 11. Описание электромагнитных взаимодействий мезонов в квантовой киральной теории	188
§ 37. Электромагнитные взаимодействия пионов	188
§ 38. Электромагнитные взаимодействия каонов	197
§ 39. Электромагнитные распады мезонов	201
Выводы	204

Глава 12. Описание слабых взаимодействий мезонов в квантовой киральной теории	206
§ 40. Вычисления амплитуд слабых распадов пионов	206
§ 41. K_{13} -распад	210
§ 42. Разность масс нейтральных каонов	214
Выводы	216
Глава 13. Теория гравитации Эйнштейна	217
§ 43. К вопросу об интерпретации	217
§ 44. Теория гравитации как теория спонтанного нарушения симметрии	219
Выводы	224
Заключение	225
Список литературы	227
Предметный указатель	236

ИБ № 278

**МИХАИЛ КОНСТАНТИНОВИЧ ВОЛКОВ
ВИКТОР НИКОЛАЕВИЧ ПЕРВУШИН**

**СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЕ КВАНТОВЫЕ ТЕОРИИ,
ДИНАМИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ И ФИЗИКА МЕЗОНОВ**

Редактор **А. И. Мельникова**
Художественный редактор **А. Т. Кирьянов**
Переплет художника **В. Ф. Громова**
Технические редакторы **И. Н. Подшебякин, Л. Ф. Шкилевич**
Корректор **Е. В. Журина**

Сдано в набор 6/1-1978 г.	Подписано к печати 27/IX—1978 г.	T-18211
Формат 84×108 ¹ / ₃₂	Бумага типографская № 2.	
Усл. печ. л. 12,6	Уч.-изд. л. 12,46	Тираж 3700 экз.
Цена 2 р. 10 к.	Зак. пзд. 75065	Зак. тип. 560

Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5

Московская типография № 10 «Союзполиграфпрома»
при Государственном Комитете Совета Министров СССР
по делам издательства, полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.