

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
УЧРЕЖДЕНИЕ ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТА ХИМИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. И. ВОЛЬПЕРТ, С. И. ХУДЯЕВ

АНАЛИЗ В КЛАССАХ
РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ
И УРАВНЕНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Москва 1975

Линии в классах разрывных функций и уравнения математической физики. Вольперт А. И., Худяев С. И. М., изд-во «Наука», 1975, 395 стр.

Книга содержит вводный раздел и следующие основные разделы: анализ в классах разрывных функций, уравнения математической физики, математические вопросы химической физики.

Вводный (первый) раздел «Элементы функционального анализа и теории меры», а также ряд параграфов, включенных в основные разделы, дают необходимый подготовительный материал.

Во втором разделе излагается теория функций, производные которых являются мерами. С ее помощью обобщается аппарат классического анализа на разрывные функции. В частности, получаются важные для различных приложений обобщения формулы Грина. Приведен ряд применений: вывод физических законов сохранения в классах разрывных функций, обобщения пространств Соболева и др.

В третьем разделе содержится теория обобщенных решений краевых задач для линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического и параболического типов: вопросы разрешимости, устойчивости решения, разложение по собственным функциям, принцип монотонности для обобщенных решений, теория критических значений и др. Благодаря применению изложенного в предыдущем разделе аппарата обобщены известные ранее результаты.

Четвертый раздел рассчитан в основном на специалистов по химической физике, однако и математик найдет здесь интересные вопросы, в частности, по теории уравнений на графах. Этот класс уравнений, возникший из химической кинетики, представляет самостоятельный математический интерес.

Книга рассчитана на студентов, аспирантов и научных работников, интересующихся теорией дифференциальных уравнений.

Книга будет интересна также специалистам по теории дифференциальных уравнений и химической физике.

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук В. И. МАЦАЕВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Занимаясь в течение многих лет теорией пространств BV (пространства функций, обобщенные производные которых являются мерами), авторы неоднократно убеждались в том, сколь плодотворно может быть применение этих пространств в анализе и математической физике. С одной стороны, именно в пространстве BV удается строить содержательный анализ, в котором аппарат классического анализа переносится на разрывные функции. С другой — само пространство BV с естественной нормой и порождаемые им другие пространства, особенно типа пространств Соболева, создают основу для приложений к математической физике в духе методов функционального анализа.

В книге изложены основы анализа в пространствах BV и теория краевых задач для эллиптических и параболических уравнений с точки зрения этого анализа.

Применение пространств BV позволяет обобщить ряд вопросов теории краевых задач и в то же время упростить их изложение. Помимо обобщения известных результатов в книге приводятся некоторые новые факты по теории краевых задач. Это относится, в частности, к квазилинейным эллиптическим уравнениям.

Ограниченный объем книги и стремление авторов к элементарному изложению материала не позволили включить в книгу целый ряд вопросов математической физики (исследование разрывных решений гиперболических уравнений, вырождающиеся эллиптические уравнения и др.), также представляющих большой интерес с точки зрения приложений теории пространств BV . Авторы надеются восполнить этот пробел в дальнейшем.

Другое направление, представленное в книге, — уравнения математической физики в задачах химической кинетики и горения. Объединение этих двух направлений в рамках одной книги нам кажется вполне естественным: они связаны исследованиями и приложениями уравнений с частными производными. В этом смысле некоторое исключение составляют те задачи химической физики, которые исследуются методами обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако нужно иметь в виду перспективу постановки и этих задач в терминах уравнений с частными производными, в которой уже сейчас назревает необходимость.

Как уже отмечалось, авторы стремились к элементарному изложению, доступному широкому кругу читателей (достаточно, например,

знакомства с основами высшей математики). Желая избавить читателя от необходимости частого обращения к другим литературным источникам, авторы включили в книгу сведения из функционального анализа, теории меры и интеграла, а также по обыкновенным дифференциальным уравнениям, необходимые для понимания основного материала книги.

Последний раздел книги рассчитан на специалистов в области химической физики, однако и математик может найти здесь интересные вопросы и задачи, в особенности по теории уравнений на графах. Этот класс уравнений, возникший из химической кинетики, представляет самостоятельный математический интерес.

В книге принята сквозная нумерация глав, нумерация параграфов — внутри главы, пунктов — внутри параграфа. Все ссылки в тексте на различные места книги отнесены к пунктам и обозначаются следующим образом: п. II.1.3 означает: глава II, § 1, пункт 3; п. 2.5 — § 2, пункт 5 внутри главы; п. 2 — пункт 2 внутри параграфа. Точно такая же система ссылок на формулы (с дописыванием еще одной цифры — номера формулы). Например (II.1.3.4) — формула (3.4) главы II, § 1; (2.5.4) — формула (5.4) § 2 внутри главы; (2.4) — формула внутри параграфа.

Главы I—V и VII написаны А. И. Вольпертом, главы VI, VIII—XI — С. И. Худяевым, глава XII — совместно.

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ МЕРЫ

В этом разделе излагаются основы функционального анализа, теории меры и интеграла в том объеме, который необходим для понимания следующих разделов книги.

Глава I. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. МНОЖЕСТВА

В этом параграфе будут приведены некоторые сведения из теории множеств, необходимые для дальнейшего.

1. **Основные определения.** Понятие множества является весьма общим. Под множеством понимают совокупность объектов той или иной природы. Например, множество всех целых чисел, множество всех точек прямой, множество всех кругов на плоскости. Большое число различных примеров множеств встретится на протяжении этого курса.

Мы будем использовать следующие обозначения. Утверждение, что x является элементом множества A , будет обозначаться $x \in A$. Будем говорить также: « x принадлежит множеству A ». Утверждение, что x не принадлежит множеству A , или x не является элементом множества A , будет обозначаться $x \notin A$. Элементы множества иногда называют *точками* этого множества.

Если все элементы множества A являются элементами множества B , то A называют *подмножеством* множества B , что обозначается $A \subset B$ или $B \supset A$. Например, пусть A — множество всех целых чисел, B — множество всех рациональных чисел. Тогда $A \subset B$.

Пусть даны два множества A и B . Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B называются *равными*; в этом случае пишут $A = B$.

Во многих вопросах удобно рассматривать множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество называется *пустым* и обозначается \emptyset .

2. **Действия над множествами.** *Суммой*, или *объединением* двух множеств A и B называется множество, элементами которого являются элементы множества A или множества B . Объединение двух множеств A и B обозначается $A \cup B$. Таким образом, $x \in A \cup B$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий: $x \in A$ или $x \in B$ (при этом не исключено, что x является элементом обоих множеств).

В случае, когда одно из множеств является пустым, то объединение определяется так:

$$A \cup \emptyset = A.$$

Аналогично дается определение объединения A произвольной совокупности множеств $\{A_\alpha : A = \bigcup_\alpha A_\alpha$. Именно, x является элементом множества A тогда и только тогда, когда x является элементом хотя бы одного из множеств A_α .

Примеры. 1. Пусть A — множество всех четных чисел, B — множество всех четных чисел. Тогда $A \cup B$ — множество всех четных чисел. Здесь A и B не имеют общих элементов.

2. Пусть A — множество всех вещественных чисел x , удовлетворяющих неравенству $0 < x < 2$; B — множество всех вещественных чисел x , удовлетворяющих неравенству $1 < x < 3$. Тогда $A \cup B$ есть множество всех вещественных чисел, удовлетворяющих неравенству $0 < x < 3$. В этом примере, очевидно, множества A и B имеют общие элементы.

3. Пусть A_k есть множество всех вещественных чисел x , удовлетворяющих неравенству $k < x < k + 1$. Тогда если k пробегает все целые числа, то $\bigcup_k A_k$ есть множество всех вещественных чисел.

Произведением, или пересечением двух множеств A и B называется множество, элементы которого принадлежат множеству A и множеству B . Пересечение множеств A и B обозначается $A \cap B$. Таким образом, $x \in A \cap B$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ и $x \in B$. В случае, когда A и B не имеют общих элементов, то по определению $A \cap B = \emptyset$.

Аналогично дается определение пересечения A любой совокупности множеств $\{A_\alpha\}$: $A = \bigcap A_\alpha$. Именно, x есть элемент множества A тогда и только тогда, когда x принадлежит всем множествам A_α .

Примеры. 4 Пусть A и B — множества, введенные в примере 1. Тогда $A \cap B = \emptyset$.

5. Пусть A и B — множества примера 2. Тогда $A \cap B$ есть множество вещественных чисел x , удовлетворяющих неравенству $1 < x < 2$.

6 Пусть A_k — круг с центром в точке 0 радиуса k . Тогда, если k пробегает все натуральные числа, то $\bigcap_k A_k = A_1$.

Для введенных действий объединения и пересечения множеств имеют место коммутативный и дистрибутивный законы:

$$A \cup B = B \cup A, \quad (2.1)$$

$$A \cap B = B \cap A, \quad (2.2)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (2.3)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \quad (2.4)$$

Первые два равенства очевидны.

Докажем равенство (2.3). Пусть $x \in (A \cup B) \cap C$. Тогда $x \in C$ и либо $x \in A$, либо $x \in B$. В первом случае $x \in A \cap C$, во втором $x \in B \cap C$. Следовательно, x принадлежит множеству, стоящему в правой части равенства (2.3).

Обратно, пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тогда либо $x \in A \cap C$, либо $x \in B \cap C$. В обоих случаях $x \in C$. В первом случае $x \in A$, во втором — $x \in B$. Следовательно, $x \in A \cup B$. Таким образом, x принадлежит множеству, стоящему в левой части равенства (2.3).

Равенство (2.4) доказывается аналогично.

Разностью $A - B$ множеств A и B называется множество всех тех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B . Таким образом, $x \in A - B$ тогда и только тогда, когда $x \in A$, $x \notin B$. Если $B \subset A$, то по определению $A - B = \emptyset$.

Пример 7. Пусть A и B — множества, приведенные в примере 2. Тогда $A - B$ — множество вещественных чисел, удовлетворяющих неравенству $0 < x < 1$.

Упражнение 1. Доказать, что $A - B = A - (A \cap B)$.

Упражнение 2. Доказать, что из $A - B = C$ следует $A = B \cup C$ тогда и только тогда, когда $B \subset A$.

Если $B \subset A$, то множество $A - B$ называют *дополнением* множества B до множества A .

Упражнение 3 Будем рассматривать подмножества некоторого множества S и обозначать дополнение любого из этих подмножеств A до множества S через SA .

Доказать равенства:

$$C(A \cup B) = CA \cap CB, \quad - \quad (25)$$

$$C(A \cap B) = CA \cup CB, \quad (26)$$

где A и B — подмножества множества S .

3. Ограниченные множества. В отличие от п 1.2, где речь шла о множествах произвольной природы, здесь мы будем рассматривать множества, элементами которых являются вещественные числа.

Пусть X — некоторое подмножество множества вещественных чисел. Множество X называется *ограниченным сверху*, если существует такое число K , что выполняется неравенство

$$x \leq K \quad (3.1)$$

для всех элементов x множества X . При этом число K называется *верхней гранью* множества X . Назовем *точной верхней гранью* множества X число K_0 такое, что:

- 1) $x \leq K_0$ при всех $x \in X$;
- 2) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется элемент x множества X такой, что

$$x > K_0 - \varepsilon. \quad (3.2)$$

Пример. Пусть X есть множество всех отрицательных рациональных чисел. Тогда точная верхняя грань множества X есть число нуль.

Легко видеть, что точная верхняя грань K_0 множества X есть наименьшая из его верхних граней. Действительно, из (3.1) и (3.2) следует $K_0 - \varepsilon < K$ для любого числа $\varepsilon > 0$, и, следовательно, $K_0 \leq K$.

Точная верхняя грань множества X обозначается $\sup x$ ($x \in X$) (читается *супремум*).

При построении теории вещественных чисел существование точной верхней грани для каждого ограниченного сверху подмножества множества вещественных чисел принимается в качестве *аксиомы полноты* множества вещественных чисел.

Понятия множества, ограниченного снизу, нижней грани и точной нижней грани вводятся совершенно аналогично. Именно, множество X называется *ограниченным снизу*, если существует число L такое, что выполняется неравенство $L \leq x$ для всех $x \in X$. Число L_0 называется *точной нижней гранью* множества X , если:

- 1) $L_0 \leq x$ при всех $x \in X$;
- 2) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется элемент x множества X такой, что

$$x_0 < L_0 + \varepsilon.$$

Как и выше, доказывается, что точная нижняя грань есть наибольшая из нижних граней. Точная нижняя грань обозначается $\inf x$ ($x \in X$) (читается *инфимум*).

4. Функции. Пусть заданы два множества X и Y . Говорят, что на множестве X задана *функция* f со значениями в множестве Y , если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие один и только один элемент $f(x)$ множества Y .

Частным случаем этого общего определения функции являются *вектор-функции, функционалы, операторы*. Соответствующие определения будут даны в последующих главах.

Если Y является множеством вещественных или комплексных чисел, то функция f называется *вещественной* или *комплексной*. Над вещественными и комплексными функциями можно производить обычные алгебраические операции. Именно, если f и g — две такие функции, определенные на множестве X , то $f + g$ есть функция, которая каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие число $f(x) + g(x)$. Аналогично определяется произведение fg и умножение функции на число a . Именно, fg и af — функции, которые ставят в соответствие каждому $x \in X$ числа $f(x)g(x)$ и $af(x)$ соответственно.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. **Двумерное векторное пространство как пример линейного пространства.** Из аналитической геометрии известно определение двумерного вектора, который может задаваться как пара чисел — его проекций на координатные оси. Если заданы два вектора $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$, то определена их сумма $z = (z_1, z_2)$. Именно, под суммой двух векторов x и y понимается такой вектор z , проекции которого равны суммам соответствующих проекций векторов x и y . Таким образом, равенство $z = x + y$ по определению означает, что

$$z_1 = x_1 + y_1, \quad z_2 = x_2 + y_2. \quad (1.1)$$

Далее, определение произведения вектора $x = (x_1, x_2)$ на вещественное число α дается равенством

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2). \quad (1.2)$$

Обозначим через R^2 множество всех двумерных векторов. Над элементами этого множества — векторами — определены операции сложения и умножения на вещественные числа так, что сумма двух векторов и произведение вектора на число есть также двумерный вектор. Легко видеть, что для введенных операций над двумерными векторами справедливы многие известные из алгебры законы сложения и умножения.

2. **Определение линейного пространства.** В п. 1 приведен пример множества (множество R^2 всех двумерных векторов), для элементов которого можно ввести операции сложения и умножения на числа так, что выполняются многие обычные законы алгебры.

Можно привести большое число других примеров множеств, обладающих такими же свойствами: они встретятся в этой и последующих главах. Ввиду большой важности множеств с введенными над их элементами операциями сложения и умножения на числа как в теоретической, так и прикладной математике, эти множества, называемые линейными, или векторными, пространствами, стали самостоятельным объектом изучения. Дадим точное определение.

О п р е д е л е н и е. Множество L называется *линейным*, или *векторным*, *пространством*, если:

а) для любых двух элементов x и y этого множества определена их *сумма* $x + y$, также являющаяся элементом множества L ;

б) для любого вещественного числа α и любого элемента x множества L определено *произведение* αx , также являющееся элементом этого множества;

в) эти операции сложения и умножения на числа удовлетворяют следующим условиям (*аксиомам*):

1) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);

3) в L существует такой элемент Θ , что для любого $x \in L$ $0 \cdot x = \Theta$ (существование нулевого элемента);

4) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ } (дистрибутивность);

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ }

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (ассоциативность умножения);

7) $1 \cdot x = x$.

Здесь x, y и z — элементы пространства L ; α и β — вещественные числа.

Элементы линейного (векторного) пространства будем называть *векторами*.

3. Примеры линейных пространств. 1. *n*-мерное координатное пространство (R^n). Элементами этого пространства являются упорядоченные последовательности из *n* чисел:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Сложение и умножение на число определяются равенствами:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n),$$

нулевой элемент

$$\Theta = (0, 0, \dots, 0).$$

Предоставляем читателю в качестве упражнения проверить выполнение всех аксиом 1) — 7).

Пространство R^2 , рассмотренное в п. 1, является частным случаем при $n = 2$. Другим частным случаем, известным из аналитической геометрии, является трехмерное координатное пространство ($n = 3$).

2. *Пространство (M) ограниченных функций.* Будем рассматривать множество (M) всех ограниченных вещественных функций, заданных на некотором множестве X. При этом функция *f*, заданная на множестве X, называется *ограниченной*, если существует неотрицательная константа K такая, что для всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq K. \quad (3.1)$$

Заметим, что при этом для различных функций *f* константы K могут быть разными. Сложение и умножение функций на числа будут пониматься так, как это определено в п. 1.4. Ясно, что сумма двух ограниченных функций и произведение ограниченной функции на число есть также ограниченная функция. Введем нулевой элемент как функцию, равную нулю при всех $x \in X$. Легко проверяется выполнение аксиом 1) — 7) линейного пространства. Таким образом, множество (M) всех ограниченных функций, заданных на множестве X, является линейным пространством.

3. *Пространство (P) полиномов.* Элементами этого пространства являются полиномы $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$, где *n* может принимать любые натуральные значения. Полиномы рассматриваются как функции, заданные на отрезке $[a, b]$ вещественной оси. Рассуждая, как в предыдущем примере, получим, что P есть линейное пространство.

4. *Пространство (C) непрерывных функций,* заданных на отрезке $[a, b]$. Выполнение всех аксиом линейного пространства легко проверяется.

4. Действия над векторами. Правила действия над векторами, которые ниже предлагаются в виде упражнений, должны получаться не из свойств конкретных пространств (например, R^2), а только из свойств 1) — 7) операций сложения и умножения на числа, входящих в определение линейного пространства (п. 2). В этих упражнениях *x, y, z, u* обозначают векторы из заданного линейного пространства L, α, β — вещественные числа.

Упражнение 1. Доказать, что для любого вектора *x* и нулевого вектора Θ справедливо равенство

$$x + \Theta = x.$$

Решение. На основании свойств 3), 7) и 4) имеем

$$x + \Theta = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0)x = 1 \cdot x = x.$$

2. Существует ли для каждого вектора *x* противоположный вектор *y*, т. е. такой, что $x + y = \Theta$?

Решение. В качестве *y* можно взять $y = (-1)x$. Тогда

$$x + y = 1 \cdot x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = \Theta.$$

3. Доказать единственность противоположного вектора.

Решение. Пусть для вектора *x* существуют два противоположных вектора *y* и *z*, так что $x + y = \Theta$, $x + z = \Theta$. Требуется доказать, что $y = z$.

Используя коммутативность и ассоциативность сложения, получим

$$y = y + \Theta = y + (x + z) = (y + x) + z = \Theta + z = z.$$

Вектор, противоположный x , будем обозначать $-x$. Из решения упражнения 2 следует, что

$$-x = (-1)x.$$

4. Доказать равенства

$$-(ax) = (-a)x = a(-x).$$

Решение. Из 6) следует:

$$-(ax) = (-1)(ax) = (-a)x,$$

$$a(-x) = a((-1)x) = (-a)x.$$

5. Доказать, что для любых двух векторов x и y существует единственный вектор z такой, что

$$z + y = x. \quad (4.1)$$

Решение. Положим $z = x + (-y)$. Тогда $z + y = (x + (-y)) + y = x + ((-y) + y) = x + \Theta = x$. Докажем единственность. Пусть $u + y = x$. Тогда $u = x + \Theta = u + (y + (-y)) = (u + y) + (-y) = x + (-y) = z$.

Вектор z , входящий в равенство (4.1), называется разностью векторов x и y и обозначается

$$z = x - y.$$

Из решения упражнения следует, что $x - y = x + (-y)$.

6. Доказать равенства

$$a(x - y) = ax - ay,$$

$$(a - \beta)x = ax - \beta x.$$

Решение $a(x - y) = a(x + (-y)) = ax + a(-y) = ax + (-ay) = ax - ay$.

$$(a - \beta)x = [a + (-\beta)]x = ax + (-\beta)x = ax + (-\beta x) = ax - \beta x$$

7. Доказать равенство

$$a \cdot \Theta = \Theta.$$

Решение. $a \cdot \Theta = a(0 \cdot x) = (a \cdot 0)x = 0 \cdot x = \Theta$.

8. Пусть $ax = y$, $a \neq 0$. Доказать, что $x = \frac{1}{a}y$.

Решение. $x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{a}a\right)x = \frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}y$.

Если задано n векторов x_1, x_2, \dots, x_n , то сумма

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (4.2)$$

определяется как результат последовательного сложения, т. е.

$$x_1 + x_2 + x_3 = (x_1 + x_2) + x_3,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (x_1 + x_2 + x_3) + x_4 \text{ и т. д.}$$

Упражнение. Доказать, что сумма (4.2) не изменяется от перестановки слагаемых

5. Линейная комбинация векторов. Пусть заданы: линейное пространство L , векторы $x_i \in L$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и вещественные числа a ($i = 1, 2, \dots, n$). Вектор x :

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

называется *линейной комбинацией* векторов x_1, x_2, \dots, x_n .

Примеры. 1. Рассмотрим следующие векторы в пространстве R^n :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Проверим, что любой вектор $x \in R^n$ есть линейная комбинация этих векторов. Действительно, пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда, очевидно,

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (5.2)$$

В случае $n = 2$ и $n = 3$ векторы (5.1) имеют известный из курса аналитической геометрии геометрический смысл: это единичные векторы в направлении координатных осей

2. В пространстве P ($n = 3$) положим

$$x_1 = 1, x_2 = t, x_3 = t^2, \dots, x_n = t^{n-1}. \quad (5.3)$$

Очевидно, любой многочлен степени n есть линейная комбинация этих векторов (элементов пространства P). Действительно, пусть

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 t + \dots + \alpha_n t^{n-1}. \quad (5.4)$$

Тогда

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

6. Линейная зависимость и независимость векторов. Пусть L — линейное пространство,

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (6.1)$$

— векторы из L .

Определение. Векторы (6.1) называются *линейно-независимыми*, если равенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \Theta \quad (6.2)$$

возможно только тогда, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Векторы (6.1) называются *линейно-зависимыми*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, что имеет место равенство (6.2).

Примеры. 1. Если $x \in L$, то x и $-x$ линейно зависимы:

$$1 \cdot x + 1 \cdot (-x) = \Theta.$$

2. Векторы (5.1) линейно независимы. Действительно, пусть

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \Theta. \quad (6.3)$$

Тогда, учитывая, что вектор $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ равен левой части равенства (6.3), получаем

$$x = \Theta$$

А это значит, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

3. Пусть $x \in R^n$, e_1, e_2, \dots, e_n — векторы (5.1). Тогда векторы e_1, e_2, \dots, e_n, x линейно зависимы

Действительно, пусть

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тогда $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n + (-1)x = \Theta$.

4. Векторы (5.3) линейно независимы в P . Действительно, равенство (6.2) в данном случае имеет вид

$$\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots + \alpha_n t^{n-1} = 0, \quad (6.4)$$

причем это равенство следует понимать как тождественное равенство нулю, т. е. равенство нулю при всех $t \in [a, b]$. Считая для определенности, что $a < 0 < b$, и полагая в (6.4) $t = 0$, получим $\alpha_1 = 0$. Дифференцируя левую и правую части равенства (6.4) k раз и полагая затем $t = 0$, получаем

$$\alpha_{k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

5. Очевидно, векторы (5.3) и (5.4) линейно зависимы в P .

Уп ра ж н е н и я. 1. Если x есть линейная комбинация векторов x_1, x_2, \dots, x_n , то векторы x_1, x_2, \dots, x_n, x линейно зависимы (доказать)

2. Если векторы x_1, x_2, \dots, x_n линейно зависимы, то один из них является линейной комбинацией остальных (доказать).

3. Пусть векторы x_1, x_2, \dots, x_n линейно независимы. Тогда любые k ($k < n$) из них также линейно независимы (доказать)

4. Пусть k из векторов x_1, x_2, \dots, x_n ($k < n$) линейно зависимы. Тогда все эти векторы зависимы (доказать)

7. Размерность пространства. Определение 1. Линейное пространство L называется *конечномерным*, если в нем существует конечное число линейно-независимых векторов таких, что каждый вектор из L является их линейной комбинацией. Эти векторы называются *базисом* пространства.

В конечномерном пространстве могут быть различные базисы.

В приложении к этой главе (п. 93) доказано, что все базисы данного конечномерного пространства содержат одинаковое число векторов. Это дает основание для введения следующего определения.

Определение 2. *Размерностью* конечномерного пространства называется число векторов, входящих в его базис.

Пример. Как показано в п. 6, в пространстве R^n векторы (5.1) линейно независимы и любой вектор из R^n является их линейной комбинацией. Следовательно, векторы (5.1) образуют базис в R^n . Таким образом, пространство R^n является n -мерным пространством в соответствии с определением 2.

Упражнение Доказать, что множество полиномов вида (5.4) (где n предполагается фиксированным, a_1, a_2, \dots, a_n могут принимать любые вещественные значения) образует линейное пространство и это последнее является n -мерным.

Определение 3. Линейное пространство называется *бесконечномерным*, если для любого числа n в нем имеется n линейно-независимых векторов.

Пример. Пространство P бесконечномерно. Действительно, для любого n векторы (5.3) линейно независимы.

8. Подпространства. Пусть дано линейное пространство L . Множество L_0 элементов этого пространства называется его *подпространством*, если L_0 является линейным пространством по отношению к определенным в L операциям сложения и умножения на числа.

Примеры 1. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — некоторая система векторов линейного пространства L . Рассмотрим множество L_0 всех возможных линейных комбинаций $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, где a_1, a_2, \dots, a_n могут принимать произвольные вещественные значения. Легко видеть, что L_0 является подпространством пространства L .

2 Рассмотрим множество P_0 всех полиномов $p(t)$, заданных на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяющих условию $p(0) = 0$. Тогда P_0 есть подпространство пространства P .

Упражнения 1 Множество L_0 элементов пространства L является его подпространством тогда и только тогда, когда в L_0 вместе с любыми двумя его элементами содержатся все их линейные комбинации (доказать)

2 Подпространство L_0 примера 1 является конечномерным, а подпространство P_0 примера 2 бесконечномерным (доказать).

9. Линейная оболочка. Пусть в линейном пространстве L задана конечная система векторов

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \quad (9.1)$$

Линейной оболочкой этой системы векторов называется множество векторов

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \quad (9.2)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n принимают всевозможные вещественные значения. Линейная оболочка системы векторов (9.1) образует подпространство L . Действительно, как легко видеть, сумма двух векторов вида (9.2) и произведение вектора (9.2) на число являются векторами того же вида. Это подпространство является, очевидно, конечномерным.

Любое подпространство в L , содержащее векторы (9.1), содержит также векторы (9.2), т. е. линейную оболочку векторов (9.1). В этом смысле линейная оболочка векторов (9.1) является наименьшим подпространством в L , содержащим векторы (9.1).

Пример В пространстве R^3 с базисом $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ линейная оболочка вектора e_k ($k = 1, 2, 3$) есть множество векторов ae_k , где a принимает любые вещественные значения. Это одномерное пространство — координатная ось. Линейная оболочка векторов e_1 и e_2 есть множество $a_1e_1 + a_2e_2$. Это двумерное пространство — координатная плоскость. Линейная оболочка векторов e_1, e_2, e_3 есть множество векторов $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$. Оно совпадает со всем пространством R^3 .

Если x — произвольный ненулевой вектор в R^3 , то его линейная оболочка есть прямая. Линейная оболочка любых двух линейно-независимых векторов в R^3 есть плоскость, любых трех линейно-независимых векторов — пространство R^3 .

Дадим определение линейной оболочки бесконечной последовательности векторов:

$$\lambda_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (9.3)$$

Линейной оболочкой последовательности векторов (9.3) называется множество векторов

$$\lambda = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \quad (9.4)$$

где n принимает любые натуральные, a_1, a_2, \dots, a_n — любые вещественные значения. Так как сумма двух векторов вида (9.4) и произведение

вектора (9.4) на число являются векторами такого же вида, то линейная оболочка последовательности векторов есть подпространство в R , причем, очевидно, наименьшее в смысле, указанном выше.

10. **Линейно-независимые последовательности.** Пусть в линейном пространстве L задана бесконечная последовательность векторов

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (10.1)$$

Она называется *линейно-независимой*, если любая конечная система этих векторов линейно независима.

Предоставляем читателю доказать, что для линейной независимости последовательности (10.1) необходимо и достаточно, чтобы для любого натурального числа n система из первых n векторов этой последовательности была линейно-независимой (см. п. 6, упражнение 3).

§ 3. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

1. **Определение евклидова пространства.** Линейное пространство E называется *евклидовым*, если каждой паре векторов $x, y \in E$ поставлено в соответствие число (x, y) так, что удовлетворяются следующие условия:

1) $(x, x) > 0$, причем $(x, x) = 0$ лишь при $x = \Theta$ (неотрицательность);

2) $(x, y) = (y, x)$ (симметричность);

3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ (однородность);

4) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (аддитивность).

Число (x, y) называется *скалярным произведением* векторов x и y .

Примеры. 1. В пространстве R^n скалярное произведение вводится так:

$$\text{если } x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (1.1)$$

$$\text{то } (x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (1.2)$$

Легко проверяются все условия 1)–4).

В дальнейшем под *евклидовым пространством* R^n будет пониматься пространство R^n со скалярным произведением (1.2).

2. Введем скалярное произведение в пространстве C . Если $x = x(t)$, $y = y(t)$ — две непрерывные функции, заданные на отрезке $[0, 1]$, то

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t) dt. \quad (1.3)$$

По причине, которая будет объяснена в гл. II, пространство C с так введенным скалярным произведением будем обозначать CL^2 .

Упражнения 1. Проверить выполнение условий 1)–4) для скалярного произведения (1.3).

2. Доказать, что наряду с (1.2) в пространстве R^n может быть введено скалярное произведение равенством $(x, y) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \dots + \lambda_n x_n y_n$, где λ_k — заданные положительные числа, x, y — векторы (1.1). Какое из условий 1)–4) нарушится, если не все λ_k положительны?

3. В пространстве C каждой паре функций $x(t)$ и $y(t)$ поставим в соответствие число

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)\mu(t) dt, \quad (1.4)$$

где $\mu(t)$ — заданная непрерывная функция. Доказать, что (1.4) есть скалярное произведение, если $\mu(t) > 0$, и не является таковым, если $\mu(t)$ принимает значения разных знаков.

2. **Свойства скалярного произведения.** 1. Пусть E — евклидово пространство, $x, y, z \in E$. Тогда для любых вещественных чисел α и β имеет место равенство

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z). \quad (2.1)$$

Действительно, $(\alpha x + \beta y, z) = (\alpha x, z) + (\beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.

Полагая, в частности, $\alpha = 1, \beta = -1$, из (2.1) получим

$$(x - y, z) = (x, z) - (y, z).$$

2. Пусть $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$. Тогда

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_1) + (x_1, y_2) + (x_2, y_2). \quad (2.2)$$

Действительно, обозначим $y = y_1 + y_2$. Тогда

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) = (x_1, y_1 + y_2) + \\ &+ (x_2, y_1 + y_2) = (y_1 + y_2, x_1) + (y_1 + y_2, x_2) = (y_1, x_1) + \\ &+ (y_2, x_1) + (y_1, x_2) + (y_2, x_2), \end{aligned}$$

откуда следует (2.2).

3. $(x, \Theta) = 0$.

Действительно, $(x, \Theta) = (\Theta, x) = (0 \cdot x, x) = 0 \cdot (x, x) = 0$.

У п р а ж н е н и я. 1. Доказать неравенство

$$(x, y) \leq \frac{1}{2} [(x, x) + (y, y)]$$

для любых $x, y \in E$.

У к а з а н и е. Раскрыть левую часть неравенства $(x - y, x - y) \geq 0$.

2. Пусть $x_k, y_l \in E, \alpha_k, \beta_l$ — вещественные числа ($k = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, n$). Тогда имеет место равенство

$$\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k x_k, \sum_{l=1}^n \beta_l y_l \right) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \alpha_k \beta_l (x_k, y_l)$$

(доказать).

3. **Норма вектора.** Определение. Нормой вектора x , принадлежащего евклидову пространству E , называется число

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (3.1)$$

Очевидно, $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \Theta$.

П р и м е р ы. 1. В пространстве R^n на основании (1.2) имеем

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (3.2)$$

В частности, при $n = 3$ это совпадает с известным из аналитической геометрии определением длины вектора. Таким образом, норма вектора есть обобщение понятия длины.

2. В пространстве CL^2 , в котором скалярное произведение задано равенством (1.3), норма имеет вид

$$\|x\| = \sqrt{\int_0^1 x^2(t) dt}. \quad (3.3)$$

У п р а ж н е н и я. 1. Пусть $x, y \in E, x$ и y ортогональны: $(x, y) = 0, z = x - y$, так что тройка векторов x, y, z образует прямоугольный треугольник, в котором x и y — катеты, z — гипотенуза. Доказать теорему Пифагора

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Р е ш е н и е. $\|z\|^2 = \|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

2. Пусть $x, y \in E$. Векторы $x + y$ и $x - y$ можно трактовать как диагонали параллелограмма, построенного на векторах x и y . Доказать, что имеет место аналог известной геометрической теоремы

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (3.4)$$

4. **Неравенство Коши—Буняковского.** В трехмерном евклидовом пространстве R^3 скалярное произведение введено равенством (1.2) при $n = 3$. В аналитической геометрии доказывается, что такое определение эквивалентно следующему:

$$(x, y) = \|x\| \|y\| \cos \varphi,$$

где φ — угол между векторами x и y . Таким образом, при $\|x\| \neq 0$, $\|y\| \neq 0$

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}. \quad (4.1)$$

Это равенство можно принять за определение угла между векторами x и y в произвольном евклидовом пространстве. Для того чтобы такое определение имело смысл, необходимо, чтобы правая часть (4.1) по абсолютной величине не превосходила единицу. Это следует из неравенства

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|, \quad (4.2)$$

справедливого для любых двух векторов x и y евклидова пространства. Неравенство (4.2) называется *неравенством Коши—Буняковского*.

Докажем, это неравенство. Если $y = \Theta$, то $(x, y) = 0$, и (4.2) очевидно. Пусть $y \neq \Theta$. Тогда, подставив число $\alpha = \frac{(x, y)}{\|y\|^2}$ в равенство

$$\|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 - 2\alpha(x, y) + \alpha^2 \|y\|^2,$$

получим

$$\|x - \frac{(x, y)}{\|y\|^2} y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{(x, y)^2}{\|y\|^2}.$$

Так как левая часть неотрицательна, то

$$\|x\|^2 - \frac{(x, y)^2}{\|y\|^2} \geq 0,$$

откуда следует (4.2).

Будем называть угол φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), определяемый равенством (4.1), углом между векторами x и y (при этом предполагается, что $x \neq \Theta$, $y \neq \Theta$). В частности, если $(x, y) = 0$, то $\varphi = \pi/2$. В этом случае векторы x и y называются *ортогональными*.

Примеры. 1. В пространстве R^n со скалярным произведением (1.2) неравенство (4.2) имеет вид

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}. \quad (4.3)$$

2. В пространстве CL^2 со скалярным произведением (1.3) получаем

$$\left| \int_0^1 x(t) y(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 x^2(t) dt} \sqrt{\int_0^1 y^2(t) dt}. \quad (4.4)$$

Упражнение. Пользуясь неравенствами (4.3) и (4.4), доказать неравенства

$$\sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}, \quad \int_0^1 |x(t)| dt \leq \sqrt{\int_0^1 x^2(t) dt}. \quad (4.5)$$

5. Неравенство треугольника. Для любых двух векторов x и y евклидова пространства имеет место неравенство

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (5.1)$$

Доказательство:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2.$$

На основании (4.2)

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

откуда следует (5.1).

Неравенство (5.1) называется неравенством треугольника. Это название исходит из геометрической трактовки: в R^3 x , y и $x + y$ являются сторонами треугольника, и (5.1) выражает тот факт, что сторона треугольника не превосходит суммы двух других сторон.

§ 4. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. **Определение нормированного пространства.** Линейное пространство B называется *нормированным*, если каждому вектору $x \in B$ поставлено в соответствие число $\|x\|$ так, что удовлетворяются следующие условия (*аксиомы*):

- 1) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ лишь при $x = \Theta$ (неотрицательность);
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (однородность);
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Число $\|x\|$ называется *нормой* вектора x .

Примеры. 1. *Евклидово пространство E .* Норма вводится равенством (3.3.1)

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Условие 1) следует из аксиомы 1) скалярного произведения (п. 3.1).

Условие 2) легко проверяется:

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = |\alpha| \|x\|.$$

Условие 3) выполняется, как показано в п. 3.5.

2. *Пространство C непрерывных функций.* Пусть $x = x(t)$ — непрерывная функция на отрезке $[0, 1]$. Положим

$$\|x\| = \max_{0 < t < 1} |x(t)|. \quad (1.1)$$

Проверим, что выполняются условия 1)–3).

1) Очевидно, $\|x\| \geq 0$. Если $\|x\| = 0$, то $|x(t)| = 0$ при всех $t \in [0, 1]$. Следовательно, $x = \Theta$.

2) $\|\alpha x\| = \max_t |\alpha x(t)| = \max_t |\alpha| |x(t)| = |\alpha| \max_t |x(t)| = |\alpha| \|x\|$.

3) При $t \in [0, 1]$ имеет место неравенство

$$|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Следовательно,

$$\|x + y\| = \max_t |x(t) + y(t)| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Упражнения. 1. Рассмотрим пространство C функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$. Показать, что в нем можно ввести норму

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt.$$

2. Показать, что в пространстве R^n могут быть введены следующие нормы для вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\|x\| = \max_k |x_k|, \quad \|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

2. **Свойства нормы.** 1. $\|\Theta\| = 0$.

Действительно, на основании 2)

$$\|\Theta\| = \|0 \cdot x\| = 0 \cdot \|x\| = 0.$$

2. $\|-x\| = \|x\|$ ($x \in B$).

3. $\|\alpha x + \beta y\| \leq |\alpha| \|x\| + |\beta| \|y\|$ ($x, y \in B$, α, β — вещественные числа).

Действительно, на основании 3) и 2)

$$\|\alpha x + \beta y\| \leq \|\alpha x\| + \|\beta y\| = |\alpha| \|x\| + |\beta| \|y\|.$$

Аналогично доказывается более общее неравенство

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n\| \leq |\alpha_1| \|x_1\| + |\alpha_2| \|x_2\| + \dots + |\alpha_n| \|x_n\|.$$

4. Для любых векторов $x, y \in B$

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|. \quad (2.1)$$

Действительно, так как $x = (x - y) + y$, то на основании 3) $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, откуда $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Аналогично из равенств

ва $y = (y - x) + x$ получим $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$. Отсюда следует (2.1).

Геометрический смысл неравенства (2.1) в пространстве R^3 : разность длин двух сторон треугольника не превосходит длины третьей стороны.

3. Сходимость. Понятие нормы дает возможность перенести на произвольные нормированные пространства понятие сходимости, известное для числовых последовательностей.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного пространства B называется *сходящейся к элементу $x_0 \in B$* , если для любого положительного числа ε можно указать такой номер m , что при всех $n > m$ имеет место неравенство

$$\|x_n - x_0\| < \varepsilon.$$

Тот факт, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу x_0 , обозначается $x_n \rightarrow x_0$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Элемент x_0 называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Очевидно, сходимость $x_n \rightarrow x_0$ в B эквивалентна сходимости числовой последовательности: $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$.

Упражнение Доказать, что можно переходить к пределу под знаком нормы. Точнее, если $x_n \rightarrow x_0$ в B , то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - y\| = \|x_0 - y\|$ ($y \in B$).

Решение. На основании неравенства (2.1)

$$|\|x_0 - y\| - \|x_n - y\|| \leq \|x_n - x_0\| \rightarrow 0.$$

Наряду со сходящимися последовательностями часто бывает необходимо рассматривать сходящиеся ряды. Пусть задан ряд

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots, \quad (3.1)$$

членами которого являются элементы пространства B . Сумма $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ называется *частичной суммой* ряда (3.1). Ряд (3.1) называется *сходящимся*, если существует предел S частичных сумм S_n при $n \rightarrow \infty$: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Элемент S пространства B называется *суммой* ряда (3.1). При этом пишут

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

4. Сходимость в пространстве R^n . Пусть задана последовательность $\{x_k\}$ векторов пространства R^n : $x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)$, $k = 1, 2, \dots$, и вектор $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$.

Теорема. Последовательность $\{x_k\}$ сходится к x_0 в R^n тогда и только тогда, когда имеет место *покоординатная сходимость*:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = x_0^i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.1)$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_k\}$ сходится к x_0 в R^n . Тогда $\|x_k - x_0\| \rightarrow 0$. Отсюда и из неравенства

$$|x_k^i - x_0^i| \leq \|x_k - x_0\|$$

($i = 1, 2, \dots, n$) следует $|x_k^i - x_0^i| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, т. е. имеет место (4.1).

Обратно, пусть имеется покоординатная сходимость (4.1). Тогда для любого положительного числа ε можно найти такое число m , что

$$|x_k^i - x_0^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad (4.2)$$

при $k > m_i$. Пусть m — максимальное из чисел m_i . Тогда неравенство (4.2) имеет место для всех i при $k > m$. Следовательно,

$$\|x_k - x_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_k^i - x_0^i)^2} < \varepsilon$$

при $k > m$, т. е. $x_k \rightarrow x_0$. Теорема доказана.

5. Открытые и замкнутые множества. Будем рассматривать множества, точками которого являются элементы данного нормированного пространства B . Дадим основные определения. Под расстоянием между двумя точками $x \in B$ и $y \in B$ будем понимать норму их разности: $\|x - y\|$.

Из свойств нормы (п. 2) следует $\|x - y\| = \|y - x\|$ (свойство симметрии расстояния).

Открытым шаром в пространстве B с центром в точке x_0 и радиуса r будем называть множество точек $x \in B$, расстояние которых до x_0 меньше r :

$$\|x - x_0\| < r. \quad (5.1)$$

r-Окрестностью точки x будем называть открытый шар с центром в точке x радиуса r . Множество называется *открытым*, если каждая точка этого множества имеет окрестность, принадлежащую этому множеству. Таким образом, множество G является открытым тогда и только тогда, когда для каждой точки $x_0 \in G$ можно указать число r такое, что все точки x , принадлежащие шару (5.1), являются точками множества G .

Пусть A — произвольное множество элементов пространства B . *Дополнением* множества A до пространства B называется множество точек пространства B , не принадлежащих A . Дополнение множества A будет обозначаться CA . Очевидно, $C(CA) = A$.

Множество F называется *замкнутым*, если его дополнение CF является открытым множеством. Очевидно, если G — открытое множество, то CG замкнуто, так как $C(CG) = G$.

Теорема. *Множество F является замкнутым тогда и только тогда, когда каждая сходящаяся последовательность элементов множества F имеет своим пределом точку множества F .*

Доказательство. Пусть F — замкнутое множество. Зададим произвольную последовательность $\{x_n\}$ элементов множества F , сходящуюся к некоторой точке x_0 . Требуется доказать, что $x_0 \in F$. Предположим противное. $x_0 \in CF$. Так как множество CF открытое, то в CF содержится некоторая окрестность точки x_0 . В этой окрестности не могут находиться точки x_n , что противоречит предположению о сходимости последовательности $\{x_n\}$ к точке x_0 . Таким образом, доказано, что $x_0 \in F$.

Обратно, пусть каждая сходящаяся последовательность элементов множества F имеет своим пределом точку множества F . Докажем, что F замкнуто, т. е. что CF — открытое множество. Предположим противное. Это значит, что найдется такая точка $x_0 \in CF$, что в любой ее окрестности имеются точки множества F . Построим последовательность $\{x_n\}$ точек множества F , сходящуюся к x_0 . В качестве x_1 возьмем произвольную точку множества F . Пусть точки x_1, x_2, \dots, x_n уже построены. Тогда в качестве x_{n+1} возьмем точку множества F , удовлетворяющую условию

$$\|x_0 - x_{n+1}\| \leq \frac{1}{2} \|x_0 - x_n\|. \quad (5.2)$$

Из неравенства (5.2) следует, что для построенной последовательности имеем $\|x_0 - x_n\| < \frac{1}{2^{n-1}} \|x_0 - x_1\|$ ($n = 2, 3, \dots$). Следовательно, $\|x_0 - x_n\| \rightarrow 0$, т. е. $x_n \rightarrow x_0$. Итак, x_0 есть предел последовательности точек множества F . Следовательно, по предположению $x_0 \in F$, что не-

возможно, так как $x_0 \in CF$. Полученное противоречие доказывает теорему.

В качестве примера применения этой теоремы докажем, что сфера S радиуса r с центром в точке x_0 , т. е. множество точек, удовлетворяющих равенству

$$\|x - x_0\| = r, \quad (5.3)$$

является замкнутым. Действительно, пусть задана последовательность $\{x_n\}$ точек сферы S , сходящаяся к точке $y \in B$. Так как $\|x_n - x_0\| = r$, то, переходя в этом равенстве к пределу (см. п. 3, упражнение), получим $\|y - x_0\| = r$, т. е. $y \in S$. Следовательно, S — замкнутое множество.

Пусть A — произвольное множество элементов пространства B . *Границей* множества A называется множество точек, в каждой окрестности которых содержатся точки множества A и его дополнения CA . Таким образом, точка x_0 принадлежит границе множества A тогда и только тогда, когда в каждой окрестности точки x_0 содержатся точки, принадлежащие множеству A , и точки, не принадлежащие ему.

Докажем, что *граница Γ множества A является замкнутым множеством*. Пусть задана последовательность $\{x_n\}$ точек множества Γ и пусть $x_n \rightarrow x_0$. Требуется доказать, что $x_0 \in \Gamma$. Обозначим через U произвольную окрестность точки x_0 . Тогда найдется такой номер n , что $x_n \in U$. Так как U — открытое множество, то существует окрестность V точки x_n , принадлежащая U . Ввиду того что x_n есть точка границы Γ , в ее окрестности V имеются точки $x \in A$ и $y \in CA$. Следовательно, x и y принадлежат окрестности U точки x_0 , а так как в качестве U была выбрана произвольная окрестность, то $x_0 \in \Gamma$.

У п р а ж н е н и е. Доказать, что сфера (5.3) является границей шара (5.1)

У к а з а н и е. При $x_1 \in S$ рассмотреть множество точек $x = x_0t + x_1(1-t)$, где t — вещественные числа, удовлетворяющие неравенству $|t| < \frac{\epsilon}{r}$.

6. Подпространства нормированного пространства. Множество B_0 называется *подпространством* нормированного пространства B , если: 1) B_0 является подпространством линейного пространства B (см. п. 2.8); 2) B_0 является замкнутым множеством в B .

Таким образом, по сравнению с введенным ранее (п. 2.8) определением подпространства линейного пространства дополнительно требуется замкнутость.

Примеры. 1. В пространстве C функций, заданных и непрерывных на отрезке $[0, 1]$, с нормой (1.1) рассмотрим множество C_0 функций $x(t)$, равных нулю в точке 0: $x(0) = 0$. Ясно, что C_0 является подпространством линейного пространства C . Покажем, что C_0 является замкнутым множеством в C . Действительно, пусть задана равномерно сходящаяся последовательность функций $x_n(t)$, принадлежащих множеству C_0 , т. е. равных нулю при $t = 0$. Очевидно, предельная функция также обращается в нуль при $t = 0$ и поэтому принадлежит множеству C_0 . Следовательно, на основании теоремы п. 5 C_0 есть замкнутое множество. Итак, C_0 есть подпространство нормированного пространства C .

2. Рассмотрим множество P всех полиномов, заданных на отрезке $[0, 1]$. Ясно, что P есть подпространство *линейного* пространства C . Однако это множество не замкнуто в C . Действительно, функция e^t не принадлежит множеству P и является пределом равномерно сходящейся последовательности элементов этого множества (чтобы в этом убедиться, достаточно взять конечные суммы ряда Тейлора для e). Поэтому на основании теоремы п. 5 множество P не является замкнутым в C . Таким образом, множество P полиномов не образует подпространства *нормированного* пространства C .

7. Сепарабельные пространства. Пусть A — некоторое множество в нормированном пространстве B . Это множество называется *плотным* в пространстве B , если любой шар содержит хотя бы одну точку этого множества.

Отсюда следует, что A плотно в B тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in B$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует вектор $y \in A$ такой, что $\|x - y\| < \varepsilon$.

Пусть в пространстве B задана последовательность векторов

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad (7.1)$$

Эта последовательность называется *полной* в B , если ее линейная оболочка плотна в пространстве B . Из определения линейной оболочки (см. п. 2.9) последовательности векторов заключаем, что последовательность (7.1) является полной тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in B$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется линейная комбинация $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ векторов (7.1) такая, что $\|x - y\| < \varepsilon$.

Нормированное пространство, в котором существуют полные последовательности, называется *сепарабельным*. Большинство важнейших пространств, встречающихся в математической физике, являются сепарабельными.

Покажем, что в каждом сепарабельном пространстве существует полная *линейно-независимая последовательность* векторов. Действительно, если последовательность (7.1) не является линейно-независимой, то ее можно сделать таковой, последовательно вычеркивая векторы, которые являются линейными комбинациями предыдущих. Предоставляем читателю самостоятельно это доказать. Ясно, что линейная оболочка полученной последовательности векторов совпадает с линейной оболочкой векторов (7.1). Поэтому полученная последовательность векторов является полной.

Пример. Последовательность $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ *полна* в пространстве C . Это следует из теоремы Вейерштрасса о том, что для каждой непрерывной функции $x(t)$ на отрезке $[0, 1]$ и любого положительного числа ε существует полином $p(t)$ такой, что $|x(t) - p(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [0, 1]$. Таким образом, пространство C является сепарабельным.

8. Полные пространства. Прежде чем давать точное определение полноты пространства, сделаем некоторые пояснения. Рассмотрим пространство P полиномов, заданных на отрезке $[0, 1]$, снабженное нормой пространства C . Рассмотрим далее последовательность полиномов $\{p_n\}$, равномерно сходящуюся к функции e^t , не являющейся, очевидно, полиномом. Мы видим, что для того чтобы последовательность $\{p_n\}$ оказалась сходящейся, в пространстве P уже не хватило элементов. Пришлось выйти в более широкое пространство C . В этом смысле пространство P является неполным. Однако для того чтобы обнаружить этот факт, пришлось привлечь элемент (e^t) более широкого пространства C . В общем случае такое более широкое пространство может быть неизвестным, и поэтому условие полноты должно формулироваться в терминах исходного пространства. С этой целью вводится понятие фундаментальной последовательности.

Дадим точные определения.

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ в нормированном пространстве B называется *фундаментальной*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер m , что $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$ при всех $k > m, l > m$.

Теорема. *Сходящаяся последовательность в нормированном пространстве является фундаментальной.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу x_0 . Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер m такой, что $\|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > m$. Для любых $k > m, l > m$ в силу неравенства треугольника имеем

$$\|x_k - x_l\| \leq \|x_k - x_0\| + \|x_0 - x_l\| < \varepsilon,$$

откуда следует, что последовательность — фундаментальная. Теорема доказана.

Обратное утверждение: всякая фундаментальная последовательность является сходящейся — неверно. Чтобы это показать, вернемся к примеру, рассмотренному в начале этого пункта. Последовательность $\{p_n\}$ сходится в S и поэтому является фундаментальной в S . Но так как в пространствах P и S введены одинаковые нормы, то последовательность $\{p_n\}$ является также фундаментальной и в пространстве P . Но эта последовательность не является сходящейся в пространстве P . Итак, мы показали, что существуют фундаментальные последовательности, не являющиеся сходящимися. Кроме того, с помощью понятия фундаментальной последовательности мы описали в терминах самого пространства P тот факт, который в начале этого пункта был описан с привлечением элементов более широкого пространства. Интуитивно понимаемое отсутствие полноты пространства P выражено с помощью следующего утверждения: нашлась фундаментальная последовательность, которая не является сходящейся в пространстве P .

Определение 2. Нормированное пространство называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность в нем является сходящейся.

Докажем, что каждое *подпространство полного нормированного пространства является полным пространством*. Действительно, пусть B — полное нормированное пространство, B_0 — его подпространство и $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в B_0 . Тогда $\{x_n\}$ есть фундаментальная последовательность в B , и поэтому она сходится к некоторому элементу $x_0 \in B$. В силу замкнутости множества B_0 элемент x_0 принадлежит ему, откуда следует полнота пространства B_0 . Можно доказать, что каждое нормированное пространство может быть дополнено до полного. Мы, однако, этим заниматься не будем.

Полное бесконечномерное нормированное пространство называется *санаховым* пространством по имени Банаха. Полные бесконечномерные евклидовы пространства называются *гильбертовыми* пространствами по имени Гильберта.

9. Полнота пространства R^n . Рассмотрим евклидово пространство R^n (п. 3.1, пример 1) векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с нормой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (9.1)$$

При $n = 1$ получаем пространство R^1 , которое состоит из множества вещественных чисел с обычными операциями сложения и умножения, в котором нормой является абсолютная величина числа. Ясно, что сходимость по такой норме является обычной сходимостью числовых последовательностей. *Полнота пространства R^1* является следствием *аксиомы полноты множества вещественных чисел*: всякая фундаментальная последовательность вещественных чисел является сходящейся. Заметим, что при построении теории вещественных чисел в качестве аксиомы полноты может быть взята либо аксиома о сходимости фундаментальной последовательности, либо аксиома о существовании точной верхней грани у любого ограниченного множества (п. 1.3). Доказано, что эти аксиомы эквивалентны.

Перейдем к пространству R^n при произвольном n .

Теорема. *Евклидово пространство R^n является полным.*

Доказательство. Пусть в пространстве R^n задана фундаментальная последовательность $\{x^{(k)}\}$ векторов $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. Это значит, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер m , что $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \varepsilon$ при $k > m, l > m$. Отсюда и из (9.1) следует, что $|x_i^{(k)} - x_i^{(l)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \varepsilon$ $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому при каждом

$i = 1, 2, \dots, n$ последовательность $\{x_i^{(k)}\}$ является фундаментальной и на основании полноты пространства R^1 сходящейся: существуют такие числа x_i , что $x_i^{(k)} \rightarrow x_i$ ($k \rightarrow \infty$; $i = 1, 2, \dots, n$). Учитывая, что сходимости в R^n является покоординатной сходимостью (п. 4), получаем, что последовательность $\{x^{(k)}\}$ сходится к вектору $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Теорема доказана.

10. Пространство (M) ограниченных функций. В п. 2.3 было рассмотрено линейное пространство M ограниченных функций, заданных на некотором множестве X . Покажем, что в этом пространстве можно ввести норму так, что оно станет полным нормированным пространством. Именно, пусть $f \in M$. Тогда положим

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|. \quad (10.1)$$

Выражение, стоящее в правой части, нужно понимать так. Рассмотрим множество вещественных чисел $|f(x)|$, когда x пробегает все множество X , которое в силу ограниченности функции $f(x)$ является ограниченным. Выражение, стоящее в правой части (10.1), есть точная верхняя грань этого множества.

Таким образом, имеет место неравенство

$$0 \leq |f(x)| \leq \|f\| \quad (10.2)$$

при всех $x \in X$. Кроме того, в силу свойства точной верхней грани (см. п. 1.3) для любой константы K такой, что $|f(x)| \leq K$ при всех $x \in X$, имеет место неравенство $\|f\| \leq K$.

Покажем, что норма, введенная равенством (10.1), удовлетворяет всем аксиомам нормы (п. 1):

1) Ясно, что $\|f\| \geq 0$. Пусть $\|f\| = 0$. Тогда из (10.2) получаем $f(x) = 0$ при всех $x \in X$, т. е. f есть нулевой элемент пространства M .

2) Покажем, что для любого вещественного числа α имеет место равенство

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|. \quad (10.3)$$

При $\alpha = 0$ равенство очевидно. Пусть $\alpha \neq 0$. Умножая (10.2) на $|\alpha|$, получаем $|\alpha f(x)| \leq |\alpha| \|f\|$ при всех $x \in X$. Следовательно,

$$\|\alpha f\| \leq |\alpha| \|f\|. \quad (10.4)$$

Так как это неравенство справедливо при всех вещественных числах α и любых $f \in M$, то можно записать

$$\|f\| = \left\| \frac{1}{\alpha} \alpha f \right\| \leq \left| \frac{1}{\alpha} \right| \|\alpha f\| = \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha f\|.$$

Сравнивая это с (10.4), получаем (10.3).

3) Пусть $f \in M$, $g \in M$. Требуется доказать, что

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|. \quad (10.5)$$

В силу (10.2) при всех $x \in X$ имеем $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$. Взяв точную верхнюю грань, получим (10.5).

Итак, доказано, что M есть нормированное пространство с нормой (10.1).

Докажем, что M есть полное пространство. Пусть задана фундаментальная последовательность $\{f_n\}$ элементов пространства M . Это значит, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число m такое, что

$$\|f_k - f_l\| < \varepsilon \quad (10.6)$$

при $k > m$, $l > m$. Из (10.1) получаем

$$\sup_{x \in X} |f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon,$$

т. е.

$$|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon \quad (10.7)$$

при $k > m$, $l > m$ и всех $x \in X$.

При каждом $x \in X$ $\{f_n(x)\}$ есть числовая последовательность, и из неравенства (10.7) следует, что она фундаментальна. Ввиду полноты пространства R^1 существует число $\hat{f}(x)$ такое, что $f_k(x) \rightarrow \hat{f}(x)$ при $k \rightarrow \infty$. Так как x — произвольный элемент множества X , то определена функция $\hat{f}(x)$ на множестве X .

Перейдем в неравенстве (10.7) к пределу при $k \rightarrow \infty$. Получим

$$|f(x) - f_l(x)| < \varepsilon \quad (10.8)$$

при всех $x \in X$, $l > m$. Отсюда $|f(x)| < |f_l(x)| + \varepsilon$, а так как $f_l(x)$ есть ограниченная функция, то $f(x)$ есть также ограниченная функция, т. е. $f \in M$. Взяв в неравенстве (10.8) точную верхнюю грань, получим

$$\|f - f_l\| \leq \varepsilon$$

при всех $l > m$. Отсюда следует, что $\|f - f_l\| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Итак, доказано, что $\{f_n\}$ есть сходящаяся последовательность, т. е. пространство M — полное.

Выясним, что значит сходимость по норме (10.1). Пусть последовательность $\{f_n\}$ функций из M сходится по норме к функции $f_0 \in M: \|f_n - f_0\| \rightarrow 0$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер m такой, что при $n > m$ $\|f_n - f_0\| < \varepsilon$, т. е.

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon. \quad (10.9)$$

Отсюда следует: для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер m , что при всех $n > m$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon \quad (10.10)$$

при всех $x \in X$. Такая сходимость называется *равномерной сходимостью* последовательности функций. Обратное, если последовательность $\{f_n\}$ сходится к f_0 равномерно, то, взяв в (10.10) точную верхнюю грань, получим (10.9), т. е. имеет место сходимость по норме (10.1). Таким образом, доказано, что *сходимость по норме пространства M есть равномерная сходимость последовательности функций*.

Ясно, что если последовательность функций сходится равномерно, то она сходится при каждом $x \in X$. Обратное — неверно. Например, на интервале $0 \leq x < 1$ последовательность $f_n(x) = x^n$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится к нулю в каждой точке. Однако эта сходимость не является равномерной. Читателю, не знакомому с понятием равномерной сходимости, можно рекомендовать подробно разобрать приведенный пример, чтобы увидеть различие между равномерной и поточечной сходимостью. Для сравнения можно рассмотреть ту же последовательность функций на отрезке $0 \leq x \leq a$, где $a < 1$, и проверить, что на этом отрезке сходимость равномерная.

Мы рассмотрели функции, заданные на произвольном множестве X со значениями в множестве вещественных чисел. Для различных приложений важны более общие классы функций, функции со значениями в линейном пространстве. Обозначим через L множество всех функций f , заданных на множестве X , со значением в заданном линейном пространстве Y (см. п. 1.4). Ясно, как определить сумму двух таких функций и произведение функции на вещественное число. Именно, если $f, g \in L$, α — вещественное число, то $f + g$ и αf есть функции, которая в точке $x \in X$ ставит в соответствие элемент $f(x) + g(x)$ и $\alpha f(x)$ пространства Y . Следующие утверждения (они подчеркнуты) доказываются точно так же, как для функций со значениями в множестве вещественных чисел. Рекомендуем их доказать самостоятельно.

При указанных операциях сложения и умножения на числа L есть *линейное пространство*, нулевым элементом которого является функция, которая при всех $x \in X$ принимает значения Θ — нуль простран-

Если Y — нормированное пространство (норму в этом пространстве обозначим $\|\cdot\|$), то вводится понятие ограниченной функции: функция $f(x)$ называется ограниченной, если существует такое число $K \geq 0$, что $\|f(x)\| \leq K$ при всех $x \in X$. Множество (M) ограниченных функций со значениями в нормированном пространстве образуют линейное пространство (подпространство в L). В пространстве M можно ввести норму

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|. \quad (10.11)$$

Пространство M с нормой (10.11) является нормированным. Это пространство полное, если Y — полное пространство.

11. Пространство (C) ограниченных непрерывных функций. Продолжим изучение пространства M ограниченных функций, заданных на множестве X , со значениями в нормированном пространстве Y . Однако мы не будем теперь считать множество X произвольным, а будем предполагать, что X есть множество элементов некоторого нормированного пространства B .

Определение. Функция $f(x)$, заданная на множестве X , со значениями в нормированном пространстве Y называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ элементов множества X , сходящейся к x_0 по норме пространства B , последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к элементу $f(x_0)$ по норме пространства Y , т. е. если $\|x_n - x_0\|_B \rightarrow 0$, то $\|f(x_n) - f(x_0)\|_Y \rightarrow 0$ (индекс указывает, в каком пространстве берется норма).

Функция называется непрерывной на множестве X , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Обозначим через C множество всех ограниченных непрерывных функций, заданных на множестве X , со значениями в пространстве Y . Непосредственно из определения непрерывной функции следует, что C есть линейное пространство — подпространство линейного пространства M . Является ли оно подпространством нормированного пространства M , т. е. образует ли пространство C замкнутое множество в M ? Утвердительный ответ будет следовать из теоремы (равномерная сходимость понимается как сходимость по норме (10.11)).

Теорема. Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных ограниченных функций есть непрерывная ограниченная функция.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ есть последовательность элементов пространства C , сходящаяся по норме (10.11) к функции $f(x)$. Покажем, что $f(x)$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in X$. Пусть $\{x_k\}$ — произвольная последовательность точек множества X , сходящаяся к x_0 по норме пространства B . Тогда имеем следующую оценку $\|f(x_k) - f(x_0)\| \leq \|f(x_k) - f_n(x_k)\| + \|f_n(x_k) - f_n(x_0)\| + \|f_n(x_0) - f(x_0)\|$. Учитывая определение нормы (10.11), получим

$$\|f(x_k) - f(x_0)\| \leq 2\|f - f_n\| + \|f_n(x_k) - f_n(x_0)\|. \quad (11.1)$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Выберем n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Затем выберем число m настолько большим, чтобы при $k > m$ имело место неравенство $\|f_n(x_k) - f_n(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, что возможно в силу непрерывности функции $f_n(x)$. Из (11.1) получаем $\|f(x_k) - f(x_0)\| < \varepsilon$ при всех $k > m$. Непрерывность функции $f(x)$ установлена. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что C есть подпространство нормированного пространства M . Действительно, для доказательства замкнутости множества C достаточно установить (см. п. 5, теорема), что всякая последовательность элементов множества C , сходящаяся в M , имеет своим

пределом точку множества C . Но это есть следствие доказанной теоремы.

Заметим, что если Y есть полное пространство, то C также является полным пространством как подпространство полного пространства M (см. п. 8).

12. Понятие о компактности. Множество X , принадлежащее нормированному пространству B , называется *компактным*, если каждая бесконечная последовательность элементов множества X содержит подпоследовательность, сходящуюся в пространстве B .

Если пространство B конечномерно, то существует весьма простой критерий компактности: всякое ограниченное множество является компактным

В бесконечномерном случае ограниченные множества могут не быть компактными. Это следует, в частности, из такого утверждения: *бесконечная ортонормированная последовательность векторов в евклидовом пространстве не является компактной*. При этом под ортонормированной понимается такая последовательность $\{e_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) векторов, которые попарно ортогональны: $(e_k, e_l) = 0$ ($k \neq l$) и нормы которых равны единице: $\|e_k\| = 1$ (подробней о таких последовательностях будет сказано в § 5). Легко найти расстояние между любыми двумя векторами этой последовательности. Имеем

$$\|e_k - e_l\|^2 = (e_k - e_l, e_k - e_l) = \|e_k\|^2 + \|e_l\|^2 = 2. \quad (12.1)$$

Если бы рассматриваемая последовательность содержала сходящуюся подпоследовательность, то расстояния между элементами этой подпоследовательности с ростом номеров должны были бы стремиться к нулю, что противоречит (12.1).

Известны критерии компактности множеств для широкого класса бесконечномерных пространств. Для пространства L^2 эти критерии будут сформулированы в дальнейшем.

§ 5. ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

1. Ортонормированная система векторов. Пусть E — евклидово пространство. Система (конечная или бесконечная)

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \quad (1.1)$$

векторов пространства E называется *ортogonalной*, если эти векторы попарно ортогональны:

$$(e_i, e_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots; i \neq k). \quad (1.2)$$

Если, кроме того, норма каждого вектора (1.1) равна единице

$$\|e_k\| = 1 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (1.3)$$

то система (1.1) называется *ортонормированной*.

Очевидно, если система (1.1) ортогональная и $\|e_k\| \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots$), то система $\left\{ \frac{e_k}{\|e_k\|} \right\}$ ортонормированная.

Покажем, что каждая ортонормированная последовательность линейно независима. Действительно, пусть (1.1) — ортонормированная последовательность. Тогда, если $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \theta$, то, умножив скалярно левую и правую части этого равенства на e_k , получим на основании равенств (1.2) и (1.3)

$$\alpha_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, для любого числа n (не превосходящего числа членов последовательности (1.1), если она конечна) векторы e_1, e_2, \dots, e_n линейно независимы. Это и значит, что последовательность (1.1) линейно независима.

Примеры. 1. В евклидовом пространстве R^n векторы (2.51) образуют ортонормированную систему.

2 В пространстве CL^2 со скалярным произведением (3.1.3) последовательность $\sin 2\pi t, \sin 4\pi t, \dots, \sin 2n\pi t, \dots$

образует ортогональную систему. Это легко проверяется вычислением соответствующих интегралов.

2. Ортогонализация последовательности векторов. Пусть в евклидовом пространстве E задана линейно-независимая последовательность векторов

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (2.1)$$

(конечная или бесконечная). Следующий процесс построения ортонормированной системы векторов

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \quad (2.2)$$

называется *ортогонализацией* последовательности (2.1).

Обозначим $y_1 = x_1$. Положим $e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$. Очевидно, $\|e_1\| = 1$. Далее,

обозначим $y_2 = x_2 - (x_2, e_1)e_1$ и положим $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$. Ясно, что $\|e_2\| = 1$,

$(y_2, e_1) = 0$, так что $(e_1, e_2) = 0$. Пусть уже построены векторы e_1, e_2, \dots, e_{n-1} так, что они образуют ортонормированную систему. Покажем, как построить вектор e_n . Обозначим

$$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, e_k) e_k \quad (2.3)$$

и положим

$$e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} \quad (2.4)$$

Очевидно, $\|e_n\| = 1$, $(y_n, e_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), так что $(e_n, e_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Поэтому система e_1, e_2, \dots, e_n является ортонормированной. Таким образом, процесс построения последовательности (2.2) указан.

В процессе ортогонализации последовательности (2.1) неявно предполагалось, что векторы y_n , определенные равенством (2.3), отличны от нуля, иначе e_n в равенстве (2.4) не имело бы смысла.

Докажем, что $y_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Одновременно покажем, что *каждый вектор e_n построенной последовательности (2.2) является линейной комбинацией векторов x_1, x_2, \dots, x_n* :

$$e_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad (2.5)$$

Доказательство проведем индукцией по числу n . При $n = 1$ это очевидно. Пусть утверждение уже доказано для $n \leq m$. Докажем его для $n = m + 1$. Подставляя в равенство

$$y_{m+1} = x_{m+1} - \sum_{n=1}^m (x_{m+1}, e_n) e_n$$

выражение (2.5), получим

$$y_{m+1} = x_{m+1} + \sum_{n=1}^m c_n x_n \quad (2.6)$$

где c_n — некоторые вещественные числа. Ввиду линейной независимости векторов x_1, x_2, \dots, x_{m+1} отсюда следует, что $y_{m+1} \neq 0$. Далее, так как в силу (2.4) $e_{m+1} = \frac{y_{m+1}}{\|y_{m+1}\|}$, то из (2.6) следует (2.5) при $n = m + 1$. Утверждение доказано.

Из (2.3) и (2.4) следует также, что *каждый вектор x_n есть линейная комбинация векторов e_1, e_2, \dots, e_n :*

$$x_n = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i. \quad (2.7)$$

Из определения линейной оболочки конечной и бесконечной последовательности векторов (п. 2.9) и из равенства (2.5) и (2.7) заключаем:

- 1) для каждого числа n линейные оболочки систем x_1, x_2, \dots, x_n и e_1, e_2, \dots, e_n совпадают;
- 2) линейные оболочки последовательностей (2.1) и (2.2) совпадают.

3. Ортонормированный базис конечномерного пространства. Теорема. *В каждом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть E — n -мерное евклидово пространство, x_1, x_2, \dots, x_n (3.1)

— его базис. Проведя ортогонализацию системы векторов (3.1), получим ортонормированную систему

$$e_1, e_2, \dots, e_n. \quad (3.2)$$

Она линейно независима (см. п. 1), и ее линейная оболочка совпадает с линейной оболочкой векторов (3.1) и, следовательно, с пространством E . Таким образом, векторы (3.2) образуют ортонормированный базис пространства E . Теорема доказана.

Пусть E — n -мерное евклидово пространство, (3.2) — его ортонормированный базис. Тогда каждый вектор x из E имеет вид

$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n, \quad (3.3)$$

где c_k — вещественные числа. Найдем эти числа. Умножим скалярно левую и правую части равенства (3.3) на e_k . Пользуясь равенствами (1.2) и (1.3), получим

$$c_k = (x, e_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.4)$$

Норма вектора x легко выражается через коэффициенты c_k :

$$\|x\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2}. \quad (3.5)$$

Действительно, умножим левую и правую части равенства (3.3) скалярно на x и воспользуемся равенством (3.4). После извлечения квадратного корня получим (3.5).

Ниже будет показано, что аналогичные результаты имеют место и для бесконечномерных сепарабельных пространств.

4. Проекция вектора на подпространство. Пусть E — евклидово пространство, F — его подпространство. Для любого вектора $x \in E$ определим его проекцию x_0 на подпространство F как элемент пространства F , наименее удаленный от x . Дадим точное определение.

Элемент x_0 подпространства F называется *проекцией* вектора x на это подпространство, если для любого $y \in F$ имеет место неравенство

$$\|x - x_0\| \leq \|x - y\|. \quad (4.1)$$

Теорема 1. *Проекция x_0 вектора x на подпространство F единственна, причем вектор $x - x_0$ ортогонален ко всем векторам подпространства F .*

Доказательство. Докажем сначала, что $x - x_0$ ортогонален ко всем векторам подпространства F . Предположим противное. Пусть существует вектор $y \in F$ такой, что

$$(x - x_0, y) = \sigma \neq 0. \quad (4.2)$$

Обозначим $z = x_0 + ay$, где a — вещественное число. Ясно, что $z \in F$. Покажем, что a можно подобрать так, что

$$\|x - z\| < \|x - x_0\|. \quad (4.3)$$

Действительно, имеем на основании (4.2)

$$\|x - z\|^2 = \|x - x_0\|^2 - 2a\sigma + a\|y_0\|^2.$$

Положим $a = \frac{\sigma}{\|y\|^2}$. Тогда получим

$$\|x - z\|^2 = \|x - x_0\|^2 - \frac{\sigma^2}{\|y\|^2},$$

откуда следует (4.3). Но неравенство (4.3) противоречит определению проекции. Это противоречие и доказывает утверждение.

Докажем единственность проекции. Пусть x_0 и x_1 — две проекции вектора x на подпространство F . Тогда $x_0 - x_1 \in F$, и поэтому по доказанному

$$(x - x_0, x_0 - x_1) = 0,$$

$$(x - x_1, x_0 - x_1) = 0.$$

Вычитая эти равенства, получим

$$(x_0 - x_1, x_0 - x_1) = 0.$$

Таким образом, $x_0 = x_1$. Теорема доказана.

Возникает вопрос, существует ли проекция вектора x на подпространство F . Мы покажем сейчас, что это действительно так, если F — полное пространство (см. п. 4.8). Заметим, что при этом мы не требуем, чтобы пространство E было полным. Например, если F — конечномерное подпространство пространства E , то F является полным пространством независимо от полноты E . Если E — полное пространство, то любое его подпространство F является полным (п. 4.8).

Теорема 2. Пусть F — подпространство пространства E , являющееся полным пространством. Тогда для любого вектора $x \in E$ существует проекция на подпространство F .

Доказательство. Обозначим

$$\delta = \inf_{y \in F} \|x - y\|. \quad (4.4)$$

По определению точной нижней грани для любого натурального числа n существует вектор $y_n \in F$ такой, что

$$\delta \leq \|x - y_n\| \leq \delta + \frac{1}{n}. \quad (4.5)$$

Следовательно,

$$\lim_n \|x - y_n\| = \delta. \quad (4.6)$$

Далее, имеем

$$\delta \leq \|x - \frac{y_m + y_n}{2}\| \leq \frac{1}{2} \|x - y_n\| + \frac{1}{2} \|x - y_m\|.$$

Отсюда и из (4.6) получаем

$$\lim_{m, n} \|x - \frac{y_m + y_n}{2}\| = \delta. \quad (4.7)$$

Воспользуемся равенством (3.3.4):

$$\|x' - y'\|^2 + \|x' + y'\|^2 = 2(\|x'\|^2 + \|y'\|^2), \quad (4.8)$$

справедливым для любых двух векторов x' и y' пространства E . Положим

$$x' = x - y_n, \quad y' = x - y_m. \quad (4.9)$$

Подстановка в (4.8) дает

$$\|y_n - y_m\|^2 + 4\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2). \quad (4.10)$$

Переходя здесь к пределу по n и m и пользуясь равенствами (4.6) и (4.7), получим

$$\lim_{m, n} \|y_n - y_m\|^2 = 0. \quad (4.11)$$

Таким образом, $\{y_n\}$ является фундаментальной последовательностью в пространстве F . Ввиду полноты этого пространства она сходится к некоторому элементу x_0 этого пространства

$$\lim_n y_n = x_0. \quad (4.12)$$

Мы можем теперь перейти к пределу под знаком нормы в (4.6) (см. п. 4.3):

$$\|x - x_0\| = \delta.$$

Сравнивая это с (4.4), приходим к выводу, что имеет место неравенство (4.1) для всех $y \in F$. Следовательно, x_0 есть проекция вектора x на подпространство F . Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть x_0 есть проекция вектора x на подпространство F . Тогда имеет место равенство

$$\|x - x_0\|^2 = \|x\|^2 - \|x_0\|^2 \quad (4.13)$$

Доказательство. На основании теоремы 1 $(x - x_0, x_0) = 0$. Поэтому из равенства $x = x_0 + (x - x_0)$ получаем $\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \|x - x_0\|^2$, откуда следует (4.13).

Следствие 2. Пусть F — конечномерное подпространство пространства E и

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad (4.14)$$

— его ортонормированный базис. Тогда для любого вектора $x \in E$ его проекция x_0 на подпространство F имеет вид

$$x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e_i, \quad (4.15)$$

где

$$c_i = (x, e_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.16)$$

причем

$$\|x - x_0\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n c_i^2. \quad (4.17)$$

Доказательство. Из (4.15) получаем (см. п. 3)

$$c_i = (x_0, e_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.18)$$

На основании теоремы 1

$$(x - x_0, e_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.19)$$

Отсюда и из (4.18) следует (4.16).

Равенство (4.17) непосредственно следует из (4.13).

5. Ряды Фурье. Пусть E — бесконечномерное евклидово пространство, x — элемент этого пространства. Пусть, далее, в E задана ортонормированная система векторов (1.1). Числа

$$c_k = (x, e_k) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.1)$$

называются *коэффициентами Фурье* элемента x по системе (1.1). Заметим, что в конечномерном пространстве именно такой вид имели коэффициенты (3.4) разложения (3.3). Возникает вопрос, не будет ли иметь место аналогичное разложение в бесконечномерном пространстве:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k. \quad (5.2)$$

Оказывается, это действительно так, если последовательность (1.1) является полной (см. п. 4.7). Именно, имеет место следующая теорема.

теорема. Пусть задана полная ортонормированная система (1.1) в евклидовом пространстве E , x — произвольный элемент этого пространства, c_k — его коэффициенты Фурье по системе (1.1). Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится и имеет место равенство (5.2).

Доказательство. Обозначим

$$x_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k. \quad (5.3)$$

Требуется доказать, что для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N , что при $n > N$ имеет место неравенство $\|x - x_n\| < \varepsilon$. Ввиду глотности линейной оболочки системы (1.1) в пространстве F (см. п. 4.7) существует такой вектор $y = \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k$, что $\|x - y\| < \varepsilon$. Обозначим

через E_n линейную оболочку первых n векторов системы (1.1). Тогда, очевидно, при $n > N$ $y \in E_n$, и так как x_n есть проекция элемента x на подпространство E_n , то $\|x - x_n\| \leq \|x - y\| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Ряд (5.2) называется *рядом Фурье* элемента x по системе (1.1). Ряд Фурье является обобщением равенства (3.3) на бесконечномерные пространства. Покажем, что равенство (3.5) также обобщается. Именно, при тех предположениях, которые сформулированы в теореме, имеет место равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \quad (5.4)$$

Оно называется *равенством Парсеваля*. Докажем его. Применяя те же обозначения, что и при доказательстве теоремы, и учитывая равенство (4.17) для проекции вектора, получим

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

Так как $\|x - x_n\| \rightarrow 0$, то отсюда следует (5.4).

6. Ортонормированный базис сепарабельного пространства. Если в евклидовом пространстве задана полная ортонормированная последовательность (1.1), то каждый вектор x представляется в виде (5.2). Поэтому полная ортонормированная последовательность называется *ортонормированным базисом* евклидова пространства.

Покажем, что в каждом *сепарабельном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис*.

Действительно, пусть в евклидовом пространстве E задана полная линейно-независимая последовательность векторов

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (6.1)$$

Проведя процесс ортогонализации (п. 2), получим ортонормированную последовательность векторов. Она является полной, так как по доказанному в п. 2 ее линейная оболочка совпадает с линейной оболочкой последовательности (6.1).

7. Разложение по ортогональным системам. Пусть в евклидовом пространстве задана полная ортогональная система

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \quad (7.1)$$

и выполняется условие $\|f_n\| \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда система векторов $\{e_n\}$, где $e_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}$ ($n = 1, 2, \dots$), является ортонормированной. Подставляя в (5.1) и (5.2) выражение e_n через f_n , получим

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x, \frac{f_k}{\|f_k\|} \right) \frac{f_k}{\|f_k\|}. \quad (7.2)$$

Обозначим

$$c_k = \frac{(x, f_k)}{\|f_k\|^2} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (7.3)$$

Будем называть c_k коэффициентами Фурье элемента x по ортогональной системе (7.1). Тогда ряд Фурье (7.2) будет иметь вид

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k. \quad (7.4)$$

Далее, равенство Парсеваля (5.4) запишется в виде

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x, \frac{f_k}{\|f_k\|} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, f_k)^2}{\|f_k\|^2}.$$

Отсюда и из (7.3) получаем

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|f_k\|^2. \quad (7.5)$$

Пример Рассмотрим разложение в тригонометрический ряд Фурье, т. е. разложение по системе

$$1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots \quad (7.6)$$

на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Для простоты ограничимся пространством CL^2 функций $u(x)$, заданных и непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)dx. \quad (7.7)$$

Легко видеть, что последовательность (7.6) является ортогональной в этом пространстве. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx = \\ &= \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (m \neq n). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Аналогично

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx = 0 \quad (m \neq n), \quad (7.9)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nxdx = 0. \quad (7.10)$$

Далее, имеет место равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2nx \right) dx = \pi \quad (7.11)$$

и точно так же

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = \pi. \quad (7.12)$$

Поэтому разложение (7.4) в рассматриваемом случае имеет вид

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (7.13)$$

где на основании (7.3)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx. \quad (7.14)$$

Более полное исследование разложения в тригонометрический ряд Фурье будет проведено в п. VII 35, где, в частности, будет доказана полнота последовательности (7.6).

8. Ортогональные дополнения. Пусть E — евклидово пространство, X — произвольное множество элементов этого пространства.

Определение 1. Ортогональным дополнением множества X в пространстве E называется множество Y элементов пространства E , ортогональных ко всем элементам множества X .

Таким образом, y есть элемент множества Y тогда и только тогда, когда

$$(x, y) = 0 \quad (8.1)$$

при всех $x \in X$.

Теорема 1. Ортогональное дополнение Y множества X в пространстве E является подпространством в E .

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in Y$, так что $(x, y_1) = 0$, $(x, y_2) = 0$. Но тогда $(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = 0$ и поэтому $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. Таким образом, Y есть линейное пространство.

Остается доказать, что Y — замкнутое множество. Пусть $y_n \rightarrow y$ ($y_n \in Y$). Тогда в силу равенства $(x, y_n) = 0$ получаем $(x, y) = 0$, так что $y \in Y$. Следовательно, Y — замкнутое множество. Теорема доказана.

Определение 2. Евклидово пространство E называется ортогональной суммой своих подпространств X и Y , если:

1) любые два элемента $x \in X$ и $y \in Y$ ортогональны:

$$(x, y) = 0; \quad (8.2)$$

2) любой элемент $u \in E$ представим в виде

$$u = x + y \quad (x \in X, y \in Y). \quad (8.3)$$

Утверждение, что E есть ортогональная сумма подпространств X и Y , будет обозначаться так:

$$E = X \oplus Y. \quad (8.4)$$

Теорема 2. Если E — полное евклидово пространство, X — его подпространство, Y — ортогональное дополнение X в E , то пространство E является ортогональной суммой подпространства X и Y .

Доказательство. Равенство (8.2) имеет место для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ в силу определения ортогонального дополнения. Далее, пусть u — произвольный элемент пространства E , x — его проекция на подпространство X . Тогда на основании теоремы 1 п. 5.4 вектор $y = u - x$ ортогонален по всем векторам пространства X и поэтому принадлежит пространству Y . Таким образом, имеет место равенство (8.3). Теорема доказана.

Следствие. Пусть E — n -мерное евклидово пространство, X — его k -мерное подпространство. Тогда ортогональное дополнение Y подпространства X в E является $(n-k)$ -мерным подпространством.

Доказательство. Пусть e_1, e_2, \dots, e_k — ортонормированный базис пространства X , а f_1, f_2, \dots, f_l — ортонормированный базис пространства Y . Тогда на основании (8.2) и (8.3) векторы

$$e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_l$$

образуют ортонормированный базис пространства E . Следовательно, $n = k + l$, что и требовалось доказать.

§ 6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. **Определение комплексного линейного пространства.** В п. 2.2 было введено понятие линейного пространства как множества, в котором определены операции сложения и умножения на вещественные числа. Все данные там определения дословно переносятся на случай, когда вещественные числа заменены на комплексные. В этом случае линейное пространство называется комплексным. Дадим точное определение.

Определение. Множество L называется *комплексным линейным (или векторным) пространством*, если:

- а) для любых двух элементов x и y этого множества определена их сумма $x + y$, также являющаяся элементом множества L ;
- б) для любого комплексного числа α и любого элемента x определено произведение αx , также являющееся элементом этого множества;
- в) эти операции сложения и умножения на числа удовлетворяют условиям 1) — 7) п. 2.2, где x, y, z — элементы множества L ; α, β — комплексные числа.

В качестве примера комплексного линейного пространства можно привести комплексное n -мерное координатное пространство C^n . Элементами его являются упорядоченные последовательности из n комплексных чисел: $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, где z_1, z_2, \dots, z_n — комплексные числа. Если заданы другой элемент $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ и комплексное число α , то по определению $z + \zeta = (z_1 + \zeta_1, z_2 + \zeta_2, \dots, z_n + \zeta_n)$, $\alpha z = (\alpha z_1, \alpha z_2, \dots, \alpha z_n)$. Легко проверяется выполнение всех аксиом линейного пространства).

В комплексном линейном пространстве понятия линейной зависимости, размерности пространства и другие, введенные в § 2, определяются вполне аналогично.

2. **Комплексные евклидовы и нормированные пространства.** Дадим определение комплексного евклидова пространства, вполне аналогичное тому, которое было дано в вещественном случае в п. 3.1. При этом черта наверху будет обозначать переход к комплексно-сопряженным величинам.

Определение. *Комплексным евклидовым пространством* называется комплексное линейное пространство, в котором каждой паре векторов x и y поставлено в соответствие комплексное число (x, y) так, что выполняются следующие условия (аксиомы):

- 1) (x, x) есть вещественное неотрицательное число, причем $(x, x) = 0$ лишь при $x = \Theta$;
- 2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
- 3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
- 4) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.

Число (x, y) называется *скалярным произведением*.

Обратим внимание на то, что в отличие от вещественного случая перестановка элементов в скалярном произведении изменяет его (на комплексно-сопряженное, аксиома 2)). Отсюда и из аксиомы 3) следует, что $(x, \alpha y) = \overline{\alpha(x, y)}$.

В качестве примера рассмотрим пространство C^n . Оно становится евклидовым, если скалярное произведение ввести следующим образом:

$$(z, \zeta) = \sum_{k=1}^n z_k \overline{\zeta_k}.$$

Все аксиомы скалярного произведения выполняются.

Норма в комплексном евклидовом пространстве определяется, как и в вещественном случае: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Очевидно, $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, где α — модуль комплексного числа α . Действительно,

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha} (x, x)} = |\alpha| \|x\|.$$

Неравенство Коши—Буняковского имеет вид

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

где слева стоит модуль скалярного произведения. Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в п. 3.4. Неравенство треугольника (3.5.1) доказывается точно так же, как в вещественном случае.

Нормированные комплексные пространства определяются, как и в вещественном случае (п. 4.1), но только в аксиоме 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ стоит модуль комплексного числа α . На случай комплексных нормированных пространств переносятся понятия сходимости, открытых и замкнутых множеств и другие.

Приложение к главе I

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 7. МАТРИЦЫ

1. Матрицы. Матрицей называется прямоугольная таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

из чисел a_{ik} , вещественных или комплексных. Эти числа называются *элементами* матрицы. В случае, когда необходимо различать, являются ли элементы матрицы вещественными или комплексными числами, мы будем говорить, что задана вещественная или комплексная матрица соответственно. Числа a_{ik} ($k=1, 2, \dots, n$) образуют i -ю *строку* матрицы A , а числа a_{ik} ($i=1, 2, \dots, m$) — k -й *столбец* этой матрицы. Таким образом, матрица (1.1) содержит m строк и n столбцов.

Если $m=n$, то матрица A называется *квадратной* порядка n . В общем случае эта матрица называется *прямоугольной* размера $m \times n$.

Будем применять сокращенное обозначение $A=(a_{ik})$.

С помощью матрицы A может быть задана функция (см. п. 1.4), определенная на пространстве R^n со значениями в пространстве R^m . Именно, каждому вектору $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ поставим в соответствие вектор $y=(y_1, y_2, \dots, y_m)$ по следующему правилу:

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (1.2)$$

Чтобы не вводить новых обозначений, мы будем эту функцию обозначать той же буквой A и писать $y = Ax$.

2. Действия над матрицами. В п. 4.10 были определены действия над функциями со значениями в линейном пространстве. Нетрудно понять, что те правила сложения матриц и умножения матрицы на число, которые будут здесь определены, соответствуют указанным действиям над функциями, задаваемыми равенством (1.2).

1. Пусть даны две матрицы $A=(a_{ik})$ и $B=(b_{ik})$ одинаковых размеров $m \times n$. Суммой матриц A и B называется матрица $C=(c_{ik})$ тех же размеров, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B , т. е. $C=A+B$, если $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ ($i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n$). Например,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

Обратим внимание на то, что складываться могут только матрицы одинаковых размеров.

2. Пусть α — число, вещественное или комплексное в зависимости от того, является матрица A вещественной или комплексной. Произведением матрицы $A = (a_{ik})$ на число α называется матрица $C = (c_{ik})$, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением на число α , т. е. $C = \alpha A$, если $c_{ik} = \alpha a_{ik}$ ($i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$).

Например,

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \end{pmatrix}$$

Обозначим через L множество всех матриц размера $m \times n$. Мы видим, что на множестве L определены действия сложения и умножения на числа так, что в результате получаются элементы того же множества. Легко проверить, что выполняются все аксиомы 1)–7) линейного пространства (см. п. 2.2). Таким образом, множество L есть линейное пространство. Нулевым элементом (нулевой матрицей) является матрица, все элементы которой равны нулю. Из сказанного следует, что на матрицы переносятся все правила действия над элементами линейного пространства, указанные в п. 2.4. В частности, разность двух матриц получается вычитанием соответствующих элементов матрицы.

3. Определим *умножение* матриц. Пусть даны две матрицы $A = (a_{ik})$ размера $m \times n$ и $B = (b_{ik})$ размера $n \times p$. Рассмотрим соответствующие функции: B действует из R^p в R^n ($y = Bx$), A действует из R^n в R^m ($z = Ay$). В результате последовательного применения этих функций получится функция C , действующая из R^p в R^m : $z = Cx$. Эту функцию будем называть произведением A на B . Выразим это на языке матриц. Имеем:

$$y_k = \sum_{l=1}^p b_{kl} x_l \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Подстановка приводит к равенству

$$z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{l=1}^p b_{kl} x_l \right) = \sum_{l=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} \right) x_l$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Таким образом, функция C может быть задана с помощью матрицы $C = (c_{il})$ размера $m \times p$, элементы которой определяются равенствами

$$c_{il} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} \quad (i = 1, 2, \dots, m, l = 1, 2, \dots, p). \quad (2.1)$$

Это приводит к следующему правилу умножения матриц. *Произведением*

$$C = AB$$

матрицы $A = (a_{ik})$ размера $m \times n$ на матрицу $B = (b_{kl})$ размера $n \times p$ называется матрица $C = (c_{il})$ размера $m \times p$, элементы которой задаются равенствами (2.1).

Заметим, что умножение матрицы A на матрицу B возможно только в том случае, когда число элементов в строках матрицы A равно числу элементов в столбцах матрицы B . При этом (см. (2.1)) элемент

c_{il} произведения есть скалярное произведение i -й строки матрицы A на l -ю строку матрицы B , рассматриваемых как векторы координатного пространства R^n .

Умножение матриц не обладает свойством коммутативности, т. е. $AB \neq BA$ даже в том случае, когда оба произведения имеют смысл (размеры матриц допускают умножение). В этом можно убедиться уже на простейшем примере

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Конечно, это не исключает того, что для некоторых матриц A и B имеет место равенство

$$AB = BA.$$

Такие матрицы называются *перестановочными*, или *коммутирующими*.

Для умножения матриц имеют место *ассоциативный* и *дистрибутивный* законы:

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC); \\ A(B+C) &= AB+AC; \\ (A+B)C &= AC+BC \end{aligned}$$

в предположении, что размеры матриц допускают указанные действия. Рекомендуем читателю самостоятельно проверить эти равенства и распространить их на случай большего числа слагаемых и сомножителей.

4. Квадратная матрица порядка n

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

у которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы нули, называется *единичной* матрицей порядка n . Это название связано с тем, что для любой матрицы A размера $n \times p$ и матрицы B размера $m \times n$ имеют место равенства:

$$EA = A, \quad BE = B.$$

3. **Обратимые матрицы.** Квадратная матрица A порядка n называется *обратимой*, если существует квадратная матрица A^{-1} порядка n такая, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \quad (3.1)$$

В следующем параграфе будет указано необходимое и достаточное условие обратимости матрицы.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A .

Покажем, что любая обратимая матрица A имеет *единственную* обратную. Действительно, если $AB = E$, то, умножая слева на A^{-1} используя ассоциативность умножения матриц, получим $B = A^{-1}$.

Заметим, что из равенства (3.1) следует, что A^{-1} есть обратимая матрица и $(A^{-1})^{-1} = A$.

Упражнение. Доказать, что если A и B — обратимые матрицы порядка n , то AB также обратима и

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (3.2)$$

4. **Транспонирование матриц.** Пусть $A = (a_{ik})$ — матрица размера $m \times n$. Матрица $A' = (a'_{ik})$ размера $n \times m$, где $a'_{ik} = a_{ki}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$) называется *транспонированной* к матрице A . Переход к транспонированной матрице называется *транспонированием*.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

Легко проверяются следующие свойства транспонирования:

$$(A + B)' = A' + B', \quad (\alpha A)' = \alpha A', \\ (AB)' = B'A', \quad (A^{-1})' = (A')^{-1}.$$

Квадратная матрица A , совпадающая со своей транспонированной, называется *симметричной*: $A' = A$. Очевидно, симметричная матрица обладает тем свойством, что ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, совпадают.

§ 8. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Здесь будет введена функция, определенная на квадратных матрицах, играющая особую роль в теории матриц и называемая *определителем*, или *детерминантом* матрицы.

1. **Конструктивное определение.** Определение будет дано по индукции по порядку матрицы. Для матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

назовем определителем число

$$\Delta(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.1)$$

Пусть уже дано определение определителя для матриц порядка $n-1$ и пусть задана матрица порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Назовем *минором* элемента a_{ik} матрицы A определитель M_{ik} матрицы порядка $n-1$, полученной из матрицы A вычеркиванием строки и столбца, содержащих этот элемент. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} матрицы A называется число

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Определителем, или *детерминантом*, матрицы A называется число

$$\Delta(A) = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k}. \quad (1.3)$$

Ясно, что указанным способом могут быть вычислены определители для матриц любого порядка.

2. **Аксиоматическое определение.** Определение, данное в п. 1, имеет тот недостаток, что непосредственно из него трудно вывести свойства определителя. Кроме того, сам прием вычисления определителя, вытекающий из его определения, является чрезвычайно громоздким. Значительно проще вычислять определитель, опираясь на его свойства. Поэтому здесь будет дано другое определение определителя как некоторой функции матрицы, заданной ее свойствами, и будет доказана эквивалентность этих определений. Определение п. 1 будет использовано для доказательства существования такой функции.

Будем рассматривать столбцы матрицы A как векторы комплексного координатного пространства C^n . Функция (комплексная), задан-

ная на векторах пространства C^n , называется *линейной*, если для любых комплексных чисел α и β и любых двух векторов $x, y \in C^n$ имеет место равенство

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Функция матрицы $f(A)$ называется *линейной функцией столбцов* этой матрицы, если она линейна как функция каждого столбца.

Функция $f(A)$ называется *кососимметрической функцией столбцов* матрицы A , если при перестановке любых двух столбцов этой матрицы она не изменяется по абсолютной величине и меняет знак на противоположный. Для дальнейшего понадобятся следующие утверждения.

1 Если $f(A)$ есть кососимметрическая функция столбцов и в матрице A два столбца равны между собой, то $f(A) = 0$.

Доказательство. Пусть α есть значение функции f после перестановки равных между собой столбцов. Тогда $\alpha = -f(A)$ в силу кососимметричности и $\alpha = f(A)$ в силу равенства столбцов. Отсюда $\alpha = 0$.

2. Если линейная функция столбцов матрицы A обращается в нуль при совпадении любых двух соседних столбцов, то она является кососимметрической функцией столбцов.

Доказательство. Обозначим столбцы матрицы A через a_1, a_2, \dots, a_n и запишем $f(A)$ в виде $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$. По предположению $f(a_1 + a_2, a_1 + a_2, a_3, \dots, a_n) = 0$. Пользуясь линейностью, получим

$$f(a_1, a_1, a_3, \dots, a_n) + f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + f(a_2, a_1, a_3, \dots, a_n) + f(a_2, a_2, a_3, \dots, a_n) = 0.$$

Но в силу условия теоремы первое и последнее слагаемые равны нулю. Отсюда следует, что f кососимметрична относительно двух первых столбцов. Точно так же это доказывается для любых двух соседних столбцов. Пусть теперь делается перестановка столбцов a_r и a_s ($r + 1 < s$). Ее можно свести к последовательной перестановке соседних столбцов. Для этого делается последовательная перестановка a_r с соседними столбцами справа $s - r$ раз, а затем последовательная перестановка a_s с соседними столбцами слева $s - r - 1$ раз. Таким образом, делается нечетное число $2(s - r) - 1$ перестановок и поэтому функция f изменяет знак.

3. Функцию f , заданную на квадратных матрицах, назовем *нормированной*, если она равна единице на единичных матрицах E любого порядка:

$$f(E) = 1.$$

Докажем, что построенный в п. 1 определитель $\Delta(A)$ является *нормированной линейной кососимметрической функцией столбцов*.

Доказательство будет проведено индукцией по порядку матрицы. При $n = 2$ утверждение проверяется непосредственно. Пусть утверждение уже доказано для матриц порядка $n - 1$. Докажем его для матриц A порядка n . Докажем сначала линейность $\Delta(A)$ как функции столбцов. Для простоты записи рассмотрение проведем для первого столбца. По предположению индукции все определители A_{1k} ($k > 1$) являются линейными функциями первого столбца матрицы A . Этим же свойством обладает элемент a_{11} . Кроме того, a_{1k} ($k > 1$) и A_{11} не зависят от первого столбца. Поэтому из (1.3) следует, что $\Delta(A)$ есть линейная функция первого столбца матрицы A .

Докажем кососимметричность определителя. На основании утверждения 2 достаточно доказать, что $\Delta(A) = 0$, если совпадают какие-нибудь два соседних столбца. Пусть для определенности совпадают два первых. Тогда по предположению индукции $A_{1k} = 0$ при $k > 2$. Очевидно, далее, что $a_{11} = a_{12}$, $A_{11} = -A_{12}$, так что из (1.3) следует, что $\Delta(A) = 0$. Кососимметричность доказана.

Если A есть единичная матрица, то $a_{11} = 1$, $a_{1k} = 0$ ($k > 1$), $A_{11} = 1$ по предположению индукции, так что $\Delta(A) = 1$ на основании (1.3). Утверждение доказано.

4. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n , f — произвольная линейная кососимметрическая функция столбцов матрицы, заданная на всех квадратных матрицах. Тогда

$$f(AB) = f(A) \cdot \Delta(B). \quad (2.1)$$

Доказательство. Пусть $B = (b_{ik})$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$), a_1, a_2, \dots, a_n — столбцы матрицы A , $C = AB$, c_1, c_2, \dots, c_n — столбцы матрицы C . Тогда

$$c_i = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.2)$$

Подставим в $f(C)$ вместо столбцов матрицы C их выражения (2.2). Пользуясь линейностью f , рассматриваемой как функция столбцов, получим сумму слагаемых вида

$$a_{k_1, k_2, \dots, k_n} f(a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}), \quad (2.3)$$

где a_{k_1, k_2, \dots, k_n} — некоторое число, зависящее от матрицы B и не зависящее от f и A ; k_1, k_2, \dots, k_n — некоторый набор из чисел $1, 2, \dots, n$. Если в этом наборе есть равные числа, то слагаемое (2.3) равно нулю. В противном случае можно перестановками столбцов получить

$$f(a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}) = \pm f(A).$$

Таким образом, во всех слагаемых (2.3) имеется общий множитель $f(A)$. Вынося его за скобки, получим

$$f(AB) = \gamma f(A), \quad (2.4)$$

где γ есть число, не зависящее от матрицы A и функции f . Последнее можно понимать так: если вместо f взять любую другую функцию, удовлетворяющую условию утверждения 4, то, произведя все указанные выше действия в том же порядке, мы получим тот же множитель γ . Возьмем, в частности, $f = \Delta$, $A = E$. Тогда из (2.4) получим $\Delta(B) = \gamma$, и (2.1) доказано.

Дадим аксиоматическое определение определителя.

Определение. *Определителем, или детерминантом*, называется нормированная функция, определенная на всех квадратных матрицах и являющаяся линейной и кососимметрической функцией столбцов.

То, что такая функция существует, следует из утверждения 3. Ее единственность следует из утверждения 4, так как, положив там $A = E$, получим $f(B) = \Delta(B)$.

3. Свойства определителя. 1. *Определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей:*

$$\Delta(AB) = \Delta(A) \cdot \Delta(B). \quad (3.1)$$

Доказательство. Равенство (3.1) получается из (2.1) при $f = \Delta$.

2. *Для определителя $\Delta(A)$ имеет место следующее разложение по элементам i -й строки:*

$$\Delta(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.2)$$

где A_{ik} — алгебраические дополнения (см. п. 1).

Доказательство. Обозначим

$$f(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

и докажем, что $f(A)$ удовлетворяет условиям, входящим в определение п. 2. Если $A = E$, то $a_{ii} = 1$, $A_{ii} = 1$, $a_{ik} = 0$ при $k \neq i$, так что $f(E) = 1$.

Далее, A_{ik} ($k > 1$) и a_{i1} являются линейными функциями первого столбца матрицы A , а A_{i1} и a_{ik} ($k > 1$) от него не зависят. Следовательно, $f(A)$ — линейная функция первого столбца. Для других столбцов аналогично.

Наконец, для доказательства кососимметричности достаточно доказать, что $f(A) = 0$, если совпадают два соседних столбца (п. 2). Пусть, например, совпадают два первых столбца. Тогда $A_{ik} = 0$ ($k > 2$), $a_{i1} = a_{i2}$, $A_{i1} = -A_{i2}$, так что $f(A) = 0$. Итак, доказано выполнение всех условий определения п. 2 и поэтому $f(A) = \Delta(A)$.

3. *Определитель есть линейная кососимметрическая функция строк матрицы.*

Доказательство. Линейность определителя как функции i -й строки сразу следует из равенства (3.2), так как A_{ik} не зависят от i -й строки.

Кососимметричность докажем индукцией по n . При $n = 2$ это очевидно. Пусть это верно для матриц порядка $n-1$. Поменяем местами в матрице (1.2) r -ю и s -ю строки и рассмотрим равенство (3.2) при i , отличном от r и s . Тогда по предположению индукции все A_{ik} поменяют знаки и, следовательно, $\Delta(A)$ тоже поменяет знак.

4. *При транспонировании матрицы определитель не изменяется:*

$$\Delta(A') = \Delta(A). \quad (3.3)$$

Доказательство. Введем функцию матрицы $A: f(A) = \Delta(A')$. На основании 3 это линейная кососимметрическая функция столбцов, так как при транспонировании матриц столбцы переходят в строки. Кроме того, $f(E) = 1$. Следовательно, $f(A) = \Delta(A)$.

5. *Имеет место следующее разложение по элементам столбца:*

$$\Delta(A) = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.4)$$

Доказательство следует из утверждений 2 и 4.

6. *Определитель обращается в нуль, если равны между собой какие-нибудь два столбца или две строки.*

Доказательство. Для столбцов это следует из утверждения 1 п. 2. Утверждение для строк затем следует из 4.

7. *Значение определителя не изменяется, если к некоторому столбцу (строке) прибавить другой столбец (строку), умноженный на некоторое число.*

Доказательство следует из 6 и линейности определителя как функции строк и столбцов.

8. *Если между строками или столбцами матрицы есть линейная зависимость, то определитель равен нулю.*

Доказательство. Если между строками матрицы есть линейная зависимость, то одна из строк является линейной комбинацией других, и, пользуясь свойством 7, мы можем, не меняя значения определителя, сделать ее нулевой. Но тогда в силу свойства 2 определитель равен нулю. Аналогично для столбцов.

4. **Обратные матрицы.** На свойствах определителя основано вычисление обратной матрицы. Докажем сначала следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} A_{ki} = \delta_{ik} \Delta(A) \quad (4.1)$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} A_{ik} = \delta_{ik} \Delta(A) \quad (4.2)$$

где a_{ki} — элементы матрицы A ; A_{ki} — их алгебраические дополнения; $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Для этого рассмотрим матрицу B^{ik} , которая получится, если в матрице A на место k -й строки поставлена i -я. Тогда при $i \neq k$ B^{ik} содержит две одинаковые строки и поэтому $\Delta(B^{ik}) = 0$. При $i = k$ $B^{ik} = A$. Таким образом, $\Delta(B^{ik}) = \delta_{ik} \Delta(A)$. С другой стороны, разложение $\Delta(B^{ik})$ по элементам k -й строки дает левую часть равенства (4.1).

Равенство (4.2) доказывается аналогично.

Из равенств (4.1) и (4.2) следует, что если

$$\Delta(A) \neq 0, \quad (4.3)$$

то матрица A^{-1} , элементы $(A^{-1})_{ik}$ которой, стоящие на пересечении i -й строки и k -го столбца, задаются равенством

$$(A^{-1})_{ik} = \frac{A^{ki}}{\Delta(A)} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (4.4)$$

является обратной к матрице A .

Таким образом, условие (4.3) является достаточным для обратимости матрицы A . Но оно, очевидно, и необходимо, так как из равенства $AA^{-1} = E$ следует $\Delta(A) \cdot \Delta(A^{-1}) = 1$, так что имеет место (4.3). Доказана следующая теорема.

Теорема. Для обратимости квадратной матрицы A необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля. При выполнении этого условия элементы обратной матрицы вычисляются по формуле (4.4).

§ 9. РАНГ МАТРИЦЫ

1. Ранг матрицы. Пусть задана прямоугольная матрица (7.1.1) размера $m \times n$. Выделим произвольные k строк и k столбцов этой матрицы. На их пересечении получится квадратная матрица. Определитель ее называется *минором k -го порядка* матрицы A .

Определение. Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Таким образом, если ранг матрицы равен r , то в этой матрице существует минор порядка r (его будем называть *ранговым*), отличный от нуля, а все миноры порядков, больших r (если они существуют), равны нулю.

2. Линейная зависимость строк и столбцов. **Лемма.** Если ранг матрицы на единицу меньше числа ее строк, то строки этой матрицы линейно зависимы.

Доказательство. Пусть ранг матрицы (7.1.1) равен $m-1$. Рассмотрим $m-1$ столбцов, проходящих через ранговый минор. Матрицу (очевидно, порядка $m \times (m-1)$), составленную из этих столбцов, обозначим через A_0 . Рассмотрим, далее, матрицу A_k , полученную дописыванием к A_0 в качестве последнего столбца произвольного столбца a_k матрицы A . Ясно, что $\Delta(A_k) = 0$. Действительно, если a_k совпадает с одним из столбцов матрицы A_0 , то это следует из свойств определителя. Если a_k не совпадает со столбцом матрицы A_0 , то $\Delta(A_k)$ (с точностью до порядка столбцов) есть минор порядка m матрицы A .

Разложим $\Delta(A_k)$ по элементам последнего столбца. Получим

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i a_{ik} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1)$$

Здесь числа α_i не зависят от k , так как они вычисляются с помощью миноров матрицы A_0 , и хотя бы одно из них отлично от нуля, поскольку среди этих миноров есть ранговый. Из равенства (2.1) следует, что строки матрицы A линейно зависимы. Лемма доказана.

Теорема 1. *Максимальное число линейно-независимых строк матрицы равно ее рангу.*

Доказательство. Пусть s — максимальное число линейно-независимых строк матрицы (7.1.1), а r — ранг этой матрицы. Будем называть ранговыми строки матрицы A , пересечение которых с соответствующими столбцами образует ранговый минор. Ясно, что ранговые строки линейно независимы, иначе были бы линейно зависимы строки рангового минора. Поэтому $s \geq r$. Пусть $s > r$. Рассмотрим матрицу \tilde{A} , составленную из s линейно-независимых строк матрицы A . Очевидно, ранг \tilde{r} этой матрицы не превосходит r . Далее, взяв $\tilde{r} + 1$ строку матрицы \tilde{A} , из которых \tilde{r} являются ранговыми для этой матрицы, получим в силу леммы, что эти строки линейно зависимы. Но это противоречит линейной независимости строк матрицы \tilde{A} . Таким образом, предположение, что $s > r$, привело к противоречию. Следовательно, $s = r$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Максимальное число линейно-независимых столбцов матрицы равно ее рангу.*

Доказательство. Так как при транспонировании ранг матрицы не изменяется (предлагаем это самостоятельно доказать читателю), то эта теорема является следствием предыдущей.

Следствие 1. *Максимальное число линейно-независимых столбцов матрицы равно максимальному числу ее линейно-независимых строк.*

Следствие 2. *Определитель матрицы тогда и только тогда равен нулю, когда между его строками (столбцами) есть линейная зависимость.*

Доказательство. Если строки или столбцы линейно зависимы, то определитель равен нулю (см. п. 8.3). Если определитель равен нулю, то ранг матрицы меньше ее порядка и между строками (столбцами) есть линейная зависимость.

3. Базис конечномерного пространства. Покажем, как полученные результаты могут быть использованы для изучения базиса конечномерного пространства. В частности, докажем утверждение, сформулированное в п. 2.7, являющееся основанием для введения понятия размерности линейного пространства.

Теорема 1. *Пусть в линейном пространстве задано n векторов*

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (3.1)$$

и пусть векторы

$$y_1, y_2, \dots, y_m \quad (3.2)$$

являются их линейными комбинациями:

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (3.3)$$

Тогда если $m > n$, то векторы (3.2) линейно зависимы.

Доказательство. Матрица (a_{ik}) , определенная коэффициентами линейных комбинаций (3.3), имеет m строк и n столбцов. Так как ее ранг $r \leq n < m$, то строки линейно зависимы, т. е. существуют не все равные нулю числа α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) такие, что

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i a_{ik} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i a_{ik} \right) x_k = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. В конечномерном линейном пространстве любые два базиса имеют одинаковое число векторов.

Доказательство. Пусть (3.1) и (3.2) — два базиса конечномерного пространства. Так как векторы (3.2) являются линейными комбинациями векторов (3.1) и линейно независимы, то на основании теоремы 1 $m \leq n$. Поменяв ролями системы векторов, получим $n \leq m$. Следовательно, $m = n$. Теорема доказана.

Теорема 3. Любая система из n линейно-независимых векторов n -мерного линейного пространства образует базис этого пространства.

Доказательство. Пусть (3.1) — произвольная линейно-независимая система векторов n -мерного пространства L и x — произвольный вектор из этого пространства. Векторы x_1, x_2, \dots, x_n, x являются линейными комбинациями n векторов, образующих базис пространства L , и поэтому на основании теоремы 1 эти векторы линейно зависимы:

$$\alpha x + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0, \quad (3.4)$$

где числа $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не все равны нулю.

Ясно, что $\alpha \neq 0$, иначе между векторами (3.1) была бы линейная зависимость. Из (3.4) следует, что x есть линейная комбинация векторов (3.1), и так как x — произвольный вектор из L , то (3.1) образует базис в L .

Упражнения. 1. Доказать, что любая система из k линейно-независимых векторов n -мерного линейного пространства при $k < n$ может быть дополнена до базиса этого пространства.

2. Доказать, что определение: размерностью конечномерного пространства называется максимальное число линейно-независимых векторов этого пространства — эквивалентно определению п. 2.7.

Глава II. МЕРА И ИНТЕГРАЛ

§ 1. МЕРА

1. **Аддитивные функции множества.** В геометрии и физике мы часто встречаемся с функциями, определенными на множествах. Например, длина отрезка, площадь фигуры, объем и масса тела и т. д. Такие функции мы будем называть функциями множества.

Дадим точное определение. Пусть заданы некоторое множество S и некоторое множество A его подмножество. В соответствии с общим определением функции (см. п. 1.1.4) мы будем говорить, что на множестве A задана (вещественная) функция μ , если каждому элементу X множества A поставлено в соответствие вещественное число $\mu(X)$. Так как элементами множества A являются множества X , то μ является функцией множества.

Например, пусть S есть вещественная ось, A — множество всевозможных интервалов $X = (a, b)$, где a и b — произвольные вещественные числа, $a < b$. Функция $\mu(X) = b - a$ есть пример функции множества, заданной на A .

Для дальнейшего удобнее более общий подход: мы будем рассматривать функции множеств со значениями в некотором банаховом пространстве B . Это значит, что каждому множеству $X \in A$ поставлен в соответствие элемент $\mu(X)$ пространства B .

Функции множества, о которых шла речь в приведенных выше примерах, обладают свойством аддитивности: при сложении непересекающихся множеств они складываются. Например, объем и масса тела есть сумма объемов и масс его частей.

Точное определение состоит в следующем.

Определение 1. Пусть заданы множество S и некоторое множество A его подмножеств. Функция μ , определенная на A , со значениями в банаховом пространстве B называется *аддитивной*, если $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$, для каждой пары непересекающихся множеств $X, Y \in A$, объединение $X \cup Y$ которых принадлежит A .

Мы всегда будем предполагать, что пустое множество \emptyset принадлежит A и что $\mu(\emptyset) = \Theta$, где Θ — нуль пространства B .

Обычно бывает также удобным предполагать, что семейство множеств, на которых определена аддитивная функция μ , содержит объединения и разности входящих в него множеств, т. е. что функция μ определена на алгебре множеств.

Определение 2. Алгеброй подмножеств данного множества S называется множество A подмножеств этого множества, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) A содержит пустое множество \emptyset ;
- 2) если X принадлежит A , то его дополнение $SX = S - X$ также принадлежит A ;
- 3) если X и Y принадлежат A , то их объединение $X \cup Y$ также принадлежит A .

Пример. Будем через $[a, b)$ обозначать интервалы (полуоткрытые), т. е. множества вещественных чисел, удовлетворяющих неравенству $a \leq x < b$. Возьмем в качестве S интервал $[0, 1)$, а в качестве подмножеств X — объединения конечного числа интервалов $[a, b)$, принадлежащих S . Легко проверить, что такое семейство A подмножеств X образует алгебру. Далее, если X представлено в виде конечной суммы непересекающихся интервалов, то функция $\mu(X)$, равная сумме длин этих интервалов, есть аддитивная функция, определенная на A .

Рассмотрим вопрос о том, какие действия над множествами, входящими в алгебру A , не выводят из этой алгебры. Прежде всего, ясно, что вместе с каждой конечной системой множеств X_1, X_2, \dots, X_n в алгебру входит их объединение $\bigcup_{k=1}^n X_k$. Далее, из равенства

$$\bigcap_{k=1}^n X_k = C \left(\bigcup_{k=1}^n C X_k \right)$$

следует, что вместе с каждой конечной системой множеств в алгебре содержится их пересечение. Наконец, если X и Y — элементы алгебры A , то разность $X - Y$ множеств X и Y также является элементом этой алгебры, так как $X - Y = X \cap C Y$.

2. Мера. Естественным требованием, налагаемым на функции множества, является их непрерывность в следующем смысле. Пусть задана монотонно возрастающая последовательность множеств $\{X_n\}$. Это значит, что каждое следующее множество содержит предыдущее:

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots, \quad (2.1)$$

Назовем пределом этой последовательности множеств их объединение

$$X = \bigcup_n X_n \quad (2.2)$$

и будем писать

$$\lim_n X_n = X. \quad (2.3)$$

Требование непрерывности функции множества μ , о которой идет речь, состоит в том, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_n \mu(X_n) = \mu(X). \quad (2.4)$$

Чтобы объяснить, что это требование действительно является естественным, заметим, что уже в элементарной геометрии при вычислении площадей и объемов используется указанное свойство непрерывности. Например, площадь круга рассматривается как предел площадей вписанных правильных многоугольников. Последние образуют возрастающую последовательность множеств, предел (т. е. объединение) которых есть круг (мы имеем в виду внутренние части круга и многоугольников).

Мы будем рассматривать аддитивные функции множества μ , определенные на некоторой алгебре A подмножеств множества S . Так как нас будут интересовать предельные переходы вида (2.3), то мы будем рассматривать такие алгебры, которые вместе с каждой последовательностью множеств вида (2.1) содержат их объединения (2.2). Такие алгебры множеств называются σ -алгебрами. Дадим более общее определение.

Определение 1. σ -Алгеброй множеств называется алгебра, содержащая вместе с каждой последовательностью множеств их объединение.

Мы не включили в определение требование монотонного возрастания последовательности множеств, но легко видеть, что такое определение было бы эквивалентно данному.

Определение 2. Аддитивная функция множества μ , определенная на σ -алгебре A , со значениями в банаховом пространстве B , называется *мерой*, если для любой монотонно возрастающей последовательности множеств $\{X_n\}$, принадлежащих A , имеет место равенство

$$\lim \mu(X_n) = \mu(\lim X_n). \quad (2.5)$$

Таким образом, мера есть аддитивная функция множества, обладающая указанным выше свойством непрерывности. Это свойство непрерывности меры дает возможность вычислять меры путем монотонной аппроксимации множеств более простыми множествами, на которых значение меры известно. Именно это свойство и использовалось в приведенном выше геометрическом примере.

Предельный переход (2.5) можно также делать по монотонно убывающей последовательности множеств, т. е. такой последовательности множеств $\{X_n\}$, в которой каждое следующее содержится в предыдущем:

$$X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots \quad (2.6)$$

Под пределом $X = \lim_n X_n$ такой последовательности множеств понимается пересечение этих множеств

$$X = \bigcap_n X_n. \quad (2.7)$$

Если убывающая последовательность (2.6) принадлежит σ -алгебре A , то ее предел X также принадлежит этой алгебре. Это следует из легко проверяемого равенства

$$CX = \bigcup_n CX_n.$$

Покажем, что равенство (2.5) распространяется и на пределы монотонно убывающих последовательностей множеств. Действительно, последовательность $\{CX_n\}$ является монотонно возрастающей, и поэтому

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \mu(S) - \mu(CX) = \mu(S) - \lim_n \mu(CX_n) = \\ &= \lim_n \{ \mu(S) - \mu(CX_n) \} = \lim_n \mu(X_n). \end{aligned}$$

Наряду с определением 2 полезно бывает также еще и следующее определение.

Определение 2'. Функция множества μ , определенная на σ -алгебре A , со значениями в банаховом пространстве B называется *мерой*, если она счетно-аддитивна, т. е. для любой последовательности $\{Y_n\}$ попарно не пересекающихся множеств из A имеет место равенство

$$\mu(\cup_n Y_n) = \sum_n \mu(Y_n); \quad (2.8)$$

Докажем эквивалентность этих определений. Пусть $\{Y_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств, т. е. $Y_n \cap Y_m = \emptyset$ для любых m и n , $m \neq n$.

Обозначим

$$X_m = \bigcup_{n=1}^m Y_n, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n. \quad (2.9)$$

Если μ есть мера в смысле определения 2, то в силу равенства $\mu(X) = \lim_m \mu(X_m)$ имеем

$$\mu(X) = \lim_m \mu(X_m) = \lim_m \sum_{n=1}^m \mu(Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Y_n),$$

т. е. μ счетно-аддитивна.

Обратно, пусть μ счетно-аддитивна, $\{X_n\}$ — возрастающая последовательность множеств и $X = \lim X_n$. Обозначим $Y_1 = X_1$, $Y_n = X_n - X_{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$). Тогда множества Y_n попарно не пересекаются, имеют место равенства (2.9). Следовательно,

$$\mu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Y_n) = \lim_m \sum_{n=1}^m \mu(Y_n) = \lim_m \mu(X_m).$$

Эквивалентность определений 2 и 2' доказана.

Множества, принадлежащие σ -алгебре A , на которой определена мера μ , будем называть *измеримыми по мере μ* , или *μ -измеримыми*.

3. Полная вариация меры. Пусть на σ -алгебре множеств A задана мера μ со значениями в банаховом пространстве B , $|\cdot|$ есть норма в пространстве B .

Определение. Полной вариацией меры μ называется функция множества $v(\mu, X)$, определенная равенством

$$v(\mu, X) = \sup \sum_{i=1}^n |\mu(X_i)|, \quad (3.1)$$

где точная верхняя грань берется по всем конечным системам $\{X_i\}$ попарно не пересекающихся множеств из A таких, что $X_i \subset X$.

В частности, в качестве указанной системы множеств можно взять само множество X . Получим неравенство

$$|\mu(X)| \leq v(\mu, X). \quad (3.2)$$

Мы будем предполагать, что

$$v(\mu, S) < \infty. \quad (3.3)$$

Функция множества μ , удовлетворяющая условию (3.3), называется *функцией ограниченной вариации*.

Теорема. Полная вариация меры, определенной на σ -алгебре A , является мерой, определенной на этой σ -алгебре.

Доказательство. Пусть μ — мера, определенная на σ -алгебре A . Пусть, далее, $X = \bigcup_k X_k$, где система множеств $\{X_k\}$ состоит из попарно не пересекающихся множеств, принадлежащих σ -алгебре A . Требуется доказать, что

$$v(\mu, X) = \sum_k v(\mu, X_k). \quad (3.4)$$

Зададим конечную систему $E_l \in A$ попарно не пересекающихся множеств $E_i \in X$. Обозначим $E_{ik} = E_i \cap X_k$.

Тогда

$$E_i = \bigcup_k E_{ik}, \quad E_{ik} \cap E_{il} = \emptyset \quad \text{при } k \neq l.$$

Поэтому

$$\mu(E_i) = \sum_k \mu(E_{ik}),$$

так что

$$\sum_l |\mu(E_i)| \leq \sum_i \sum_k |\mu(E_{ik})|, \quad (3.5)$$

В силу соотношений $E_{ik} \subset X_k$, $E_{ik} \cap E_{jk} = \emptyset$ имеем

$$\sum_i |\mu(E_{ik})| \leq v(\mu, X_k).$$

Отсюда и из (3.5) следует

$$\sum_l |\mu(E_i)| \leq \sum_k v(\mu, X_k).$$

Взяв точную верхнюю грань в левой части, получим

$$v(\mu, X) \leq \sum_k v(\mu, X_k). \quad (3.6)$$

Докажем противоположное неравенство. С этой целью для каждого множества X_k зададим конечную систему множеств $X_{ik} \in A$ такую, что

$$v(\mu, X_k) \leq \sum_i |\mu(X_{ik})| + \frac{\varepsilon}{2^k},$$

где ε — произвольное число. Отсюда

$$\sum_{k=1}^n v(\mu, X_k) \leq \sum_{k=1}^n \sum_i |\mu(X_{ik})| + \varepsilon \leq V(\mu, X) + \varepsilon,$$

так как $X_{ik} \subset X$. При $n \rightarrow \infty$ (в случае, если $\{X_k\}$ содержит бесконечное число множеств) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(\mu, X_k) \leq V(\mu, X) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует, что

$$\sum_k v(\mu, X_k) \leq V(\mu, X).$$

Сравнивая с (3.6), получим (3.4). Теорема доказана. Укажем также следующие свойства полной вариации.

1. Если $X \subset Y$ ($X, Y \in A$), то

$$v(\mu, X) \leq v(\mu, Y). \quad (3.7)$$

Действительно,

$$v(\mu, Y) = v(\mu, X) + v(\mu, Y - X) \geq v(\mu, X)$$

ввиду неотрицательности полной вариации.

Из неравенства (3.7), в частности, следует, что

$$V(\mu, X) \leq v(\mu, S). \quad (3.8)$$

Поэтому функции $\mu(X)$ и $v(\mu, X)$ ограничены (см. (3.2) и (3.3)).

2. Если $X \subset \bigcup_k X_k$, где X и X_k — множества, принадлежащие σ -алгебре A , то

гебре A , то

$$v(\mu, X) \leq \sum_k v(\mu, X_k). \quad (3.9)$$

Действительно, положим $Y_1 = X_1$, $Y_n = X_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k$. Тогда множества Y_n попарно не пересекаются, $Y_n \subset X_n$ и $X \subset \bigcup_n Y_n$.

Поэтому

$$v(\mu, X) \leq v(\mu, \bigcup_n Y_n) = \sum_n v(\mu, Y_n) \leq \sum_n v(\mu, X_n).$$

4. Пространство мер. Обозначим через CA множество всех мер ограниченной вариации, заданных на σ -алгебре A , со значением в банаховом пространстве B . Так как меры являются функциями со значениями в пространстве B , то можно ввести операции сложения и умножения на числа, как это сделано в п. 1.4.10. Ясно, что сумма двух мер, а также произведение меры на число являются мерами.

Покажем, что полная вариация суммы двух мер не превосходит суммы их полных вариаций:

$$v(\mu_1 + \mu_2, X) \leq v(\mu_1, X) + v(\mu_2, X). \quad (4.1)$$

Действительно, обозначим $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Пусть $\{X_i\}$ — конечная система попарно не пересекающихся подмножеств множества X . Тогда

$$|\mu(X_i)| \leq |\mu_1(X_i)| + |\mu_2(X_i)|,$$

откуда

$$\sum_i |\mu(X_i)| \leq \sum_i |\mu_1(X_i)| + \sum_i |\mu_2(X_i)| \leq v(\mu_1, X) + v(\mu_2, X).$$

Зная точную верхнюю грань сумм, стоящих в левой части, получим (4.1).

Далее, покажем, что для любого числа α имеет место равенство

$$v(\alpha\mu, X) = |\alpha| v(\mu, X). \quad (4.2)$$

Действительно, согласно (3.1)

$$v(\alpha\mu, X) = \sup \sum_i |\alpha\mu(X_i)| = |\alpha| \sup \sum_i |\mu(X_i)| = |\alpha| v(\mu, X).$$

Из (4.1) и (4.2) мы заключаем, что сложение и умножение на числа не выводит из множества CA , и поэтому множество CA всех мер ограниченной вариации образует линейное пространство.

Введем норму в пространстве CA . Именно, для любой меры $\mu \in CA$ положим

$$\|\mu\| = v(\mu, S). \quad (4.3)$$

Проверим, что это действительно норма. Из (4.1) и (4.2) следует, что

$$\begin{aligned} \|\mu_1 + \mu_2\| &\leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\|, \\ \|\alpha\mu\| &= |\alpha| \|\mu\|. \end{aligned}$$

Далее, если $\|\mu\| = 0$, то для любого множества $E \in A$ имеем $|\mu(E)| \leq v(\mu, E) \leq \|\mu\| = 0$.

Таким образом, доказано, что CA есть нормированное пространство с нормой (4.3).

Заметим, что из (4.1) и (4.2) следует

$$|v(\mu_1, X) - v(\mu_2, X)| \leq v(\mu_1 - \mu_2, X). \quad (4.4)$$

Действительно, из (4.2) имеем

$$v(\mu_1, X) \leq v(\mu_1 - \mu_2, X) + v(\mu_2, X),$$

откуда

$$v(\mu_1, X) - v(\mu_2, X) \leq v(\mu_1 - \mu_2, X). \quad (4.5)$$

Аналогично,

$$v(\mu_2, X) - v(\mu_1, X) \leq v(\mu_2 - \mu_1, X). \quad (4.6)$$

На основании (4.2) правые части в (4.5) и (4.6) совпадают. Отсюда следует (4.4).

Из (4.4) получаем

$$|v(\mu_1, X) - v(\mu_2, X)| \leq \|\mu_1 - \mu_2\|. \quad (4.7)$$

Из неравенства (3.2) также следует

$$|\mu_1(X) - \mu_2(X)| \leq v(\mu_1 - \mu_2, X) \leq \|\mu_1 - \mu_2\|. \quad (4.8)$$

Докажем, что CA является полным пространством. Действительно, пусть $\{\mu_n\}$ — фундаментальная последовательность в CA . На основании (4.8) имеем

$$|\mu_n(E) - \mu_m(E)| \leq \|\mu_n - \mu_m\|$$

для любого множества $E \in A$. Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что

$$|\mu_n(E) - \mu_m(E)| < \varepsilon \quad (4.9)$$

при всех $n, m > N$ и всех $E \in A$. Это значит, что последовательность $\{\mu_n(E)\}$ фундаментальна в пространстве B и поэтому сходится

$$\lim_n \mu_n(E) = \mu(E) \quad (4.10)$$

для любого $E \in A$. Из (4.10) сразу следует, что μ есть аддитивная функция. При $m \rightarrow \infty$ из (4.9) получаем

$$|\mu_n(E) - \mu(E)| < \varepsilon \quad (4.11)$$

при всех $n > N$ и $E \in A$.

Покажем, что функция μ непрерывна, т. е. что для любой монотонно возрастающей последовательности $\{E_k\}$, $E_k \in A$, $E_k \rightarrow E$ имеем $\mu(E_k) \rightarrow \mu(E)$.

Действительно, при $n > N$ на основании (4.11) имеем

$$|\mu(E) - \mu(E_k)| \leq |\mu(E) - \mu_n(E)| + |\mu_n(E) - \mu_n(E_k)| + |\mu_n(E_k) - \mu(E_k)| \leq 2\varepsilon + |\mu_n(E) - \mu_n(E_k)|.$$

При фиксированном n ввиду непрерывности меры μ_n можно выбрать число k_0 такое, что

$$|\mu_n(E) - \mu_n(E_k)| < \varepsilon$$

при $k > k_0$. Таким образом, при $k > k_0$

$$|\mu(E) - \mu(E_k)| < 3\varepsilon.$$

Непрерывность функции μ доказана. Тем самым доказано, что μ есть мера, определенная на σ -алгебре A .

Далее, для любой конечной системы попарно не пересекающихся множеств E_i имеем

$$\sum_i |\mu_n(E_i) - \mu_m(E_i)| \leq v(\mu_n - \mu_m, S) = \|\mu_n - \mu_m\|.$$

Поэтому при $n, m < N$ получаем

$$\sum_i |\mu_n(E_i) - \mu_m(E_i)| < \varepsilon.$$

Переход к пределу при $m \rightarrow \infty$ дает

$$\sum_i |\mu_n(E_i) - \mu(E_i)| < \varepsilon \quad (n > N). \quad (4.12)$$

Это значит, что мера $\mu_n - \mu$ имеет ограниченную вариацию. Следовательно, μ имеет ограниченную вариацию, т. е. $\mu \in CA$.

Далее, из (4.12) получаем

$$v(\mu_n - \mu, S) < \varepsilon \quad (n > N).$$

А это значит, что $\|\mu_n - \mu\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Полнота пространства CA доказана.

5. Абсолютная непрерывность. Определение. Мера $\lambda \in CA$ называется абсолютно непрерывной относительно меры $\mu \in CA$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что

$$v(\lambda, E) < \varepsilon$$

для любого множества E такого, что

$$v(\mu, E) < \delta.$$

Теорема. Для того чтобы мера λ была абсолютно непрерывной относительно меры μ , необходимо и достаточно, чтобы из равенства $v(\mu, E) = 0$ следовало $v(\lambda, E) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть λ абсолютно непрерывна относительно μ и пусть для некоторого множества E $v(\mu, E) = 0$. Тогда из определения абсолютной непрерывности следует, что $v(\lambda, E) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Это значит, что $v(\lambda, E) = 0$.

Достаточность. Пусть из равенства $v(\mu, E) = 0$ следует, что $v(\lambda, E) = 0$. Покажем, что λ абсолютно непрерывна относительно μ . Предположим противное. Тогда найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для любого натурального числа n существует множество E_n такое, что

$$v(\mu, E_n) < \frac{1}{2^n}, \quad (5.1)$$

$$v(\lambda, E_n) \geq \varepsilon. \quad (5.2)$$

Обозначим:

$$X_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m, \quad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n. \quad (5.3)$$

Так как $E_n \subseteq X_n$, то из (5.2) следует, что $v(\lambda, X_n) \geq \varepsilon$, а так как $\{X_n\}$ образуют монотонно убывающую последовательность, сходящуюся к E , то

$$v(\lambda, E) = \lim_n v(\lambda, X_n) \geq \varepsilon. \quad (5.4)$$

Далее, из (5.1) и (5.3), пользуясь свойством (3.9) полной вариации, получаем

$$v(\mu, X_n) \leq \sum_{m=n}^{\infty} v(\mu, E_m) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отсюда

$$v(\mu, E) = \lim_n v(\mu, X_n) = 0. \quad (5.5)$$

Неравенства (5.4) и (5.5) противоречат предположению. Это противоречие устанавливает абсолютную непрерывность меры λ относительно меры μ . Теорема доказана.

Следствие. Множество всех абсолютно непрерывных мер относительно заданной меры μ образует подпространство в CA .

6. Регулярные меры. Будем считать, что множество S принадлежит нормированному пространству с нормой $\|\cdot\|$. На этом множестве определено расстояние между точками: расстоянием между точками $x \in S$ и $y \in S$ является число $\|x - y\|$. Множество S с расстоянием между точками, введенным таким образом, будем называть пространством S . Подобно тому, как это сделано в п. I.4.5 для нормированного пространства, мы можем определить понятие открытого и замкнутого подмножества в S . Именно, r -окрестностью точки $x_0 \in S$ будем называть множество точек $x \in S$ таких, что $\|x - x_0\| < r$. Множество $Y \subset S$ называется *открытым*, если каждая точка этого множества имеет ок-

рестность, принадлежащую этому множеству. Множество $F \subset S$ называется *замкнутым*, если $S - F$ является открытым.

Пусть задана σ -алгебра A подмножеств пространства S и на ней мера μ . Как и выше, мы будем называть множества, принадлежащие σ -алгебре A , *измеримыми* (по мере μ).

Определение 1. Мера μ называется *регулярной*, если:

- 1) все открытые в S множества измеримы по этой мере;
- 2) для любого измеримого множества E и любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое множество G и замкнутое множество F такие, что

$$F \subseteq E \subseteq G, \quad \nu(\mu, G - F) < \varepsilon.$$

Рассмотрим вопрос о том, какие множества являются измеримыми по регулярной мере. Дадим сначала следующее определение.

Определение 2. Наименьшая σ -алгебра, содержащая все открытые подмножества пространства S , называется *борелевской алгеброй* этого пространства, а множества, принадлежащие этой алгебре, — *борелевскими множествами*.

При этом под наименьшей понимается такая σ -алгебра, которая содержится в любой другой σ -алгебре, содержащей все открытые множества.

В силу самого определения борелевскими являются все открытые множества, а также все замкнутые множества как дополнения к открытым. Отправляясь от открытых и замкнутых множеств, мы можем с помощью операций объединения и пересечения последовательности множеств, а также дополнения образовывать новые классы множеств. Так как все указанные операции не выводят из σ -алгебры, то полученные множества также являются борелевскими.

Определение 3. Множество E есть множество меры нуль, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует открытое множество G_ε такое, что $E \subset G_\varepsilon$ и $\nu(\mu, G_\varepsilon) < \varepsilon$.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что *все множества меры нуль измеримы*, т. е. принадлежат σ -алгебре A , на которой определена мера μ .

Теорема 1. Для того чтобы множество E было измеримым по регулярной мере μ , необходимо и достаточно, чтобы оно было представимо в виде

$$E = X \cup Y, \quad (6.1)$$

где X — борелевское множество, Y — множество меры нуль.

Доказательство. Докажем сначала достаточность. Для этого требуется доказать, что все борелевские множества измеримы по регулярной мере. Но это следует из определения борелевской алгебры, так как σ -алгебра A измеримых по мере μ множеств содержит все открытые множества.

Перейдем к доказательству необходимости. Пусть E — измеримое множество. По определению регулярной меры для каждого натурального числа n существуют открытое множество G_n и замкнутое множество F_n такие, что

$$F_n \subset E \subset G_n, \quad \nu(\mu, G_n - F_n) < \frac{1}{n}. \quad (6.2)$$

Без ограничения общности можно считать, что F_n ($n = 1, 2, \dots$) образуют возрастающую, а G_n — убывающую последовательности множеств. Действительно, если это не так, то мы можем заменить множества F_n и G_n множествами $F'_n = \bigcup_{k=1}^n F_k$, $G'_n = \bigcap_{k=1}^n G_k$, которые уже образуют монотонные последовательности.

Пусть $F = \lim F_n$, $G = \lim G_n$. Тогда $F \subset E \subset G$ и

$$\nu(\mu, G - F) = \lim \nu(\mu, G_n - F_n) = 0. \quad (6.3)$$

Поэтому $\nu(\mu, E - F) = 0$. Полагая $X = F$, $Y = E - F$, получим (6.1). Теорема доказана.

Следствие. σ -Алгебра A , на которой определена регулярная мера, есть наименьшая σ -алгебра, содержащая все открытые множества и множества меры нуль.

Доказательство. Пусть \tilde{A} — указанная наименьшая σ -алгебра. Тогда $\tilde{A} \subset A$, так как A содержит все открытые множества и множества меры нуль. Обратное, очевидно, \tilde{A} содержит все борелевские множества. Поэтому если $E \in A$, то в силу (6.1) $E \in \tilde{A}$, так что $A \subset \tilde{A}$. Следовательно, $\tilde{A} = A$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Регулярная мера полностью определена своими значениями на замкнутых (или открытых) множествах.

Доказательство. Пусть известны значения регулярной меры μ на всех замкнутых подмножествах пространства S . Тогда оно известно на всех борелевских множествах. Действительно, для любого борелевского множества E в тех же обозначениях, которые были использованы при доказательстве теоремы 1, мы получаем

$$\mu(E) = \mu(F) + \mu(E - F) = \lim_n \mu(F_n). \quad (6.4)$$

Так как F_n — замкнутые множества, то $\mu(E)$ определена равенством (6.4).

На основании теоремы 1 для любого измеримого множества E существует борелевское множество $X \subset E$ такое, что $\mu(E) = \mu(X)$. Поэтому при определении полной вариации меры μ (п. 3) можно пользоваться только борелевскими подмножествами данного множества. Следовательно, определена полная вариация на всех открытых множествах. Тем самым в силу определения 3 известны все множества меры нуль. На основании следствия из теоремы 1 известна σ -алгебра A , на которой определена мера μ . В силу равенства (6.1) известно также значение меры μ на всех измеримых множествах. Теорема доказана.

7. Мера Лебега. Мера Лебега строится на подмножествах n -мерного координатного пространства R^n . При $n = 1$ она является обобщением понятия длины отрезка, при $n = 2$ — площади фигуры, при $n = 3$ — объема тела.

Для определения меры Лебега понадобится ввести понятие n -мерного промежутка. Пусть заданы два n -мерных вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, причем $a_i < b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда *открытым промежутком* (a, b) называется множество точек x , координаты x которых удовлетворяют неравенствам $a_i < x_i < b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Аналогично определяется *замкнутый промежуток* $[a, b]: a_i \leq x_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и *полуоткрытый промежуток* $[a, b): a_i \leq x_i < b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Объемом $V(Q)$ каждого из промежутков $Q = (a, b)$, $Q = [a, b]$ называется число

$$V(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Определим сначала меру Лебега для ограниченных множеств.

Определение. n -Мерной мерой Лебега называется функция множества, принимающая на всех промежутках значения, равные их объему, и являющаяся регулярной мерой в каждом шаре.

Легко видеть, что такая функция множества однозначно определена на всех ограниченных множествах. Действительно, пусть S_m — шар $x \leq m$, где m — натуральное число. Тогда однозначно определяются измеримые подмножества этого шара и значения меры Лебега на них.

Действительно, пользуясь аддитивностью меры, мы можем определить меру «ступенчатых тел», состоящих из конечного числа попарно не пересекающихся промежутков. Затем, пользуясь непрерывностью меры, мы можем определить меру открытых множеств в S_m , так как такие множества являются пределами возрастающих последовательностей ступенчатых тел. Как показано в п. 6, регулярная мера полностью определена своими значениями на открытых множествах. Ясно, что если множество E принадлежит шару S_m при некотором m , то его мера Лебега не изменится при возрастании m .

Меру Лебега множества E будем обозначать $|E|$.

Будучи регулярной мерой в шаре, мера Лебега определена на всех ограниченных борелевских множествах, и каждое измеримое по мере Лебега ограниченное множество есть объединение борелевского множества и множества меры нуль.

Определение меры Лебега для неограниченного множества дается так же, как и для интеграла Лебега (п. 3.6).

8. Мера Хаусдорфа. Мы введем здесь k -мерную меру в пространстве R^n ($k=1, 2, \dots, n$). При $k=1$ эта мера обобщает понятие длины кривой, расположенной в R^n , при $k=2$ — площади поверхности.

Пусть ω_k есть k -мерная мера Лебега единичного шара в пространстве R^k . Очевидно, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$. Приведем для справок рекуррентную формулу для вычисления ω_k :

$$\omega_k = \frac{2\pi}{k} \omega_{k-2} \quad (k=3, 4, \dots)$$

(см., например, [47, стр. 297]).

Пусть X — некоторое множество, расположенное в пространстве R^n . Покроем это множество последовательностью шаров $\{C_i\}$. Обозначим через r_i радиус шара C_i и составим сумму

$$\omega_k \sum_i r_i^k \quad (8.1)$$

(в случае, когда последовательность $\{C_i\}$ бесконечна, (8.1) есть ряд; если этот ряд расходящийся, то мы считаем, что сумма (8.1) равна $+\infty$).

Введем функцию множества

$$H_{k, \varepsilon}(X) = \inf \omega_k \sum_i r_i^k, \quad (8.2)$$

где точная нижняя грань берется по всем суммам (8.1), соответствующим покрытиям множества X последовательностью шаров $\{C_i\}$, радиусы r_i которых меньше ε .

Легко понять, что с уменьшением ε функция $H_{k, \varepsilon}(X)$ не убывает. Поэтому существует ее предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим

$$H_k(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{k, \varepsilon}(X). \quad (8.3)$$

Функция множества H_k , определенная равенством (8.3), называется *внешней мерой Хаусдорфа*.

Можно доказать, что если X есть ограниченное замкнутое множество, то $H_k(X)$ не изменится, если мы будем рассматривать лишь покрытия конечными множествами шаров.

Приведем пример вычисления функции H_k .

Пример. Вычислим $H_1(X)$, где X — окружность в пространстве R^2 . Впишем в окружность правильный n -угольник. Обозначим через ε его сторону. Тогда легко доказать, что $H_{1, \varepsilon}(X)$ есть периметр этого многоугольника. При $n \rightarrow \infty$ получим, что $H_1(X)$ есть длина окружности.

Приведем без доказательства некоторые утверждения, относящиеся к мере Хаусдорфа. Пусть S — некоторое борелевское множество в R^n , причем $H_k(S) < \infty$. Примем S в качестве пространства, о котором шла речь в п. 6 при определении регулярной меры. Будем называть измеримыми по мере H_k подмножества X пространства S , которые могут быть представлены в виде $X = Y \cup Z$, где Y — борелевское множество и $H_k(Z) = 0$. Тогда оказывается, что все измеримые множества образуют σ -алгебру, на которой H_k является регулярной мерой.

Если в качестве S взять шар в пространстве R^n , то определенная выше мера H_n совпадает с n -мерной мерой Лебега.

§ 2. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Все функции, которые здесь будут рассматриваться, предполагаются заданными на некотором множестве S со значениями в банаховом пространстве B . Далее, мы будем считать заданной меру μ , определенную на некоторой σ -алгебре A подмножеств множества S . Как и выше, мы будем называть элементы σ -алгебры A измеримыми (по мере μ) множествами.

1. **Сходимость последовательностей функций.** Пусть задана последовательность функций $\{f_n(x)\}$. Нам известны два вида сходимости: 1) сходимость в каждой точке $x \in S$, т. е. сходимость последовательности элементов $\{f_n(x)\}$ пространства B при каждом $x \in S$; 2) равномерная сходимость на множестве $E \subset S$ к функции $f(x)$. Последнее значит, что $\|f_n - f\|_E \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где обозначено

$$\|f\|_E = \sup_{x \in E} |f(x)|, \quad (1.1)$$

$| \cdot |$ — норма в пространстве B .

В связи с интегрированием понадобятся некоторые расширения этих понятий сходимости.

Определение 1. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся почти всюду на множестве S к функции $f(x)$, если существует множество $E \subset S$ такое, что $\nu(\mu, S - E) = 0$ и последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ в каждой точке множества E .

Пример 1. Пусть $f_n(x) = (-x)^n$ ($n = 1, 2, \dots$), S есть отрезок $[0, 1]$ числовой оси, μ есть мера Лебега. Ясно, что $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x) = 0$ почти всюду, именно на множестве $E: 0 \leq x < 1$, причем $\mu(S - E) = 0$ (так как мера Лебега неотрицательна, то ее полная вариация совпадает с ней).

Определение 2. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется почти равномерно сходящейся к функции $f(x)$ на множестве S , если для любого числа $\delta > 0$ существует такое измеримое множество E , что $\nu(\mu, S - E) < \delta$, и последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции f на множестве E .

Таким образом, почти равномерная сходимость отличается от равномерной тем, что речь идет о равномерной сходимости не на всем множестве S , а на подмножествах, мера которых как угодно близка к S . Ясно, что из равномерной сходимости на множестве S следует почти равномерная сходимость, однако обратное неверно.

Пример 2. Пусть $f_n(x) = x^n$ ($n = 1, 2, \dots$), S — полуинтервал $[0, 1)$, μ — мера Лебега. Эта последовательность сходится к нулю в каждой точке множества S . Сходимость является почти равномерной, так как имеет место равномерная сходимость на любом отрезке $[0, \alpha]$, где $\alpha < 1$, и α может быть взято как угодно близким к единице. Легко проверить, что указанная последовательность не является равномерно сходящейся на множестве S .

2. **Простые измеримые функции.** Будем говорить, что задано разбиение множества S , если задана конечная система измеримых мно-

$$E_1, E_2, \dots, E_n \quad (2.1)$$

такая, что $S = \bigcup_{i=1}^n E_i$, $E_k \cap E_l = \emptyset$ ($k, l = 1, 2, \dots, n$; $k \neq l$).

Определение. Функция $f(x)$ называется *простой измеримой функцией*, если существует такое разбиение (2.1) множества S , что

$$f(x) = a_k \quad (x \in E_k; k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.2)$$

где a_k — заданные элементы пространства B .

Примером простой измеримой функции может служить *характеристическая функция* измеримого множества E :

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E), \\ 0 & (x \notin E). \end{cases} \quad (2.3)$$

В этом примере производится разбиение пространства S на два множества E и $S-E$.

Легко видеть, что с помощью характеристических функций множеств любую простую функцию (2.2) можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}(x). \quad (2.4)$$

Обозначим через P множество всех простых измеримых функций, определенных на S , со значениями в пространстве B . Покажем, что P есть *линейное пространство*. Действительно, пусть заданы две простые измеримые функции: функция f , определенная равенством (2.2), и функция

$$g(x) = b_k \quad (x \in F_k; k = 1, 2, \dots, m), \quad (2.5)$$

где $\{F_k\}$ образует разбиение пространства S . Заметим, что система множеств $G_{kl} = E_k \cap E_l$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $l = 1, 2, \dots, m$) образует разбиение пространства S , что легко непосредственно проверить. При этом пустые множества G_{kl} можно отбросить.

Ясно, что функция

$$f(x) + g(x) = a_k + b_l \quad (x \in G_{kl}, k = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, m) \quad (2.6)$$

является простой измеримой функцией.

Таким образом, сумма двух простых измеримых функций есть простая измеримая функция. Ясно, что если $f(x)$ есть простая измеримая функция, то $\alpha f(x)$, где α — число, есть также простая измеримая функция. Итак, доказано, что P есть линейное пространство.

3. Измеримые функции. **Определение.** Функция называется *измеримой*, если она является пределом почти всюду сходящейся последовательности простых измеримых функций.

Пример. Пусть $f(x)$ — вещественная неотрицательная функция. Предположим, что множество $\{x: f(x) < a\}$, т. е. множество всех тех точек $x \in S$, для которых $f(x) < a$, измеримо для любого числа a . Тогда $f(x)$ — измеримая функция. Действительно, обозначим

$$E_{m, n} = \left\{ x : \frac{m-1}{n} \leq f(x) < \frac{m}{n} \right\},$$

где $m, n = 1, 2, \dots$. Очевидно, это измеримые множества, так как они могут быть представлены в виде разностей измеримых множеств. Пусть

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{n^2} \frac{m}{n} \chi_{E_{m, n}}(x) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.1)$$

Ясно, что на множестве $\{x: 0 \leq f(x) < n\}$ имеет место неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \quad (3.2)$$

и что $f_n(x)$ являются простыми измеримыми функциями. Из (3.2) следует, что $f_n(x) \rightarrow f(x)$ при всех $x \in S$. Таким образом, $f(x)$ — измеримая функция.

Имеет место также и обратное утверждение: если $f(x)$ — измеримая функция, то для любого числа a множество $\{x: f(x) < a\}$ измеримо (см., например, [25]).

Множество всех измеримых функций образует линейное пространство, так как множество простых измеримых функций является линейным пространством.

Из определений, данных в п. 1, легко следует, что всякая почти равномерно сходящаяся последовательность функций сходится почти всюду. Обратное, вообще говоря, неверно. Однако имеет место следующий весьма важный результат (см. [25]).

Теорема Егорова. *Если последовательность измеримых функций сходится почти всюду, то эта сходимость является почти равномерной.*

Доказано также, что предел почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций является измеримой функцией.

§ 3. ИНТЕГРАЛ

При построении интеграла понадобится умножать измеримые функции на меры. При этом мы будем предполагать, что либо измеримые функции принимают значения в банаховом пространстве B , а меры берутся со значениями в пространстве вещественных чисел, либо, наоборот, измеримые функции являются вещественными, а меры берутся со значениями в B . В обоих случаях произведение функции на меру есть элемент пространства B . Все дальнейшие рассуждения будут одинаковыми в обоих случаях.

1. Интегрирование простых измеримых функций. Пусть заданы: множество S , мера μ , определенная на некоторой σ -алгебре A подмножеств множества S (измеримых множеств), и простая измеримая функция $f(x)$ (2.2.2.).

Определение. *Интегралом* от функции $f(x)$ по измеримому множеству E называется элемент пространства B , задаваемый равенством

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(EE_k). \quad (1.1)$$

Здесь и иногда в дальнейшем для сокращения записи пересечение множеств обозначаются EE_k вместо $E \cap E_k$.

Для оправдания данного выше определения требуется доказать, что интеграл не зависит от способа задания функции f . Пусть наряду с представлением (2.2.2) функция f записывается в виде

$$f(x) = b_l \quad (x \in F_l; \quad l = 1, 2, \dots, m),$$

где $F_l \in A$, $F_k F_l = \emptyset$ ($k \neq l$), $\cup_l F_l = S$.

Ясно, что на пересечении $E_k F_l$ имеет место равенство $a_k = b_l$. Поэтому ввиду аддитивности меры

$$\begin{aligned} \sum_k a_k \mu(EE_k) &= \sum_{k,l} a_k \mu(EE_k F_l) = \\ &= \sum_{k,l} b_l \mu(EE_k F_l) = \sum_l b_l \mu(EF_l). \end{aligned}$$

Независимость интеграла (1.1) от способа задания функции f доказана.

Укажем некоторые свойства интеграла от простых измеримых функций.

1. *Линейность.*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_F f d\mu + \beta \int_E g d\mu, \quad (1.2)$$

где f и g — две простые измеримые функции, α и β — вещественные числа.

Доказательство. Пусть функции f и g задаются равенствами (2.2.2) и (2.2.5). Тогда на основании (2.2.6) имеем

$$\begin{aligned} \int_E (\alpha f + \beta g) d\mu &= \sum_{k,l} (\alpha a_k + \beta b_l) \mu(EE_k F_l) = \\ &= \alpha \sum_k a_k \sum_l \mu(EE_k F_l) + \beta \sum_l b_l \sum_k \mu(EE_k F_l) = \\ &= \alpha \sum_k a_k \mu(EE_k) + \beta \sum_l b_l \mu(EF_l) = \alpha \int_E \varphi d\mu + \beta \int_E \psi d\mu. \end{aligned}$$

Линейность доказана.

Наряду с мерой μ будем рассматривать ее полную вариацию (п. 1.3), которая также является мерой, определенной на σ -алгебре A . Заметим, что если $f(x)$ есть простая измеримая функция (2.2.2), то $|f(x)|$ есть также простая измеримая функция:

$$|f(x)| = |a_k| \quad (x \in E_k; \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно, определен интеграл

$$\int_E |f(x)| d\nu(\mu) = \sum_{k=1}^n |a_k| \nu(\mu, EE_k). \quad (1.3)$$

Отсюда и из неравенства (1.3.2) следует оценка интеграла.

2. *Оценка интеграла.*

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\nu(\mu) \leq M \nu(\mu, E), \quad (1.4)$$

где

$$|f(x)| \leq M.$$

3. *Аддитивность.* Интеграл (1.1) может рассматриваться как функция множества E . Покажем, что эта функция аддитивна, т. е. если $E = X \cup Y$ и $X \cap Y = \emptyset$, то

$$\int_E f d\mu = \int_X f d\mu + \int_Y f d\mu. \quad (1.5)$$

Доказательство. Очевидно, $\mu(EE_k) = \mu(XE_k) + \mu(YE_k)$. Подставляя в (1.1), получим (1.5).

4. *Положительность.* Если f и μ принимают вещественные неотрицательные значения, то

$$\int_E f d\mu \geq 0.$$

Это следует непосредственно из (1.1.)

5. *Монотонность.* Пусть f и g — неотрицательные простые измеримые функции, причем

$$f(x) \leq g(x) \quad (x \in S).$$

Пусть, далее, мера μ неотрицательна, X и Y — два измеримых множества, $X \subset Y$. Тогда

$$\int_X f d\mu \leq \int_Y g d\mu.$$

На основании свойств 1, 3 и 4 мы можем записать следующую цепочку неравенств:

$$\int_Y g d\mu = \int_X g d\mu + \int_{Y-X} g d\mu \geq \int_X g d\mu = \int_X f d\mu + \int_X (g-f) d\mu \geq \int_X f d\mu,$$

что и требовалось доказать.

6. *Предельный переход под знаком интеграла.* Если последовательность $\{f_n\}$ простых измеримых функций фундаментальна

$$\lim_{m, n} \int_S |f_n - f_m| d\nu(\mu) = 0$$

и почти всюду сходится к нулю: $f_n(x) \rightarrow 0$, то

$$\lim_n \int_E f_n d\mu = 0$$

для любого измеримого множества E .

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Ввиду фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ существует такое число N , что

$$\int_S |f_n - f_m| d\nu(\mu) < \frac{\varepsilon}{4} \quad (1.6)$$

при $n > N, m > N$.

Зафиксируем некоторое число $m > N$ и обозначим (см. (2.1.1))

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4 \|f_m\|_S \nu(\mu, S)}. \quad (1.7)$$

Так как по условию последовательность $\{f_n\}$ сходится к нулю почти всюду на S , то по теореме Егорова (п. 2.3) она сходится к нулю почти равномерно. Это значит, что существует измеримое множество X такое, что $\nu(\mu, X) < \delta$, и последовательность $\{f_n\}$ сходится к нулю на $S-X$ равномерно.

Имеем

$$\int_X |f_n| d\nu(\mu) \leq \int_X |f_m| d\nu(\mu) + \int_X |f_n - f_m| d\nu(\mu).$$

Отсюда, из (1.6) и (1.7) получаем для всех $n > N$

$$\int_X |f_n| d\nu(\mu) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.8)$$

Выберем теперь N столь большим, чтобы при $n > N$ выполнялось не только неравенство (1.8), но также и неравенство

$$\|f_n\|_{S-X} < \frac{\varepsilon}{2\nu(\mu, S)}, \quad (1.9)$$

что возможно ввиду равномерной сходимости к нулю последовательности $\{f_n\}$ на множестве $S-X$. Мы получаем следующую оценку при всех $n > N$:

$$\begin{aligned} \left| \int_E f_n d\mu \right| &\leq \int_E |f_n| d\nu(\mu) \leq \int_S |f_n| d\nu(\mu) \leq \\ &\leq \int_X |f_n| d\nu(\mu) + \int_{S-X} |f_n| d\nu(\mu). \end{aligned}$$

На основании (1.8) и (1.9) отсюда следует

$$\left| \int_E f_n d\mu \right| \leq \varepsilon \quad (n > N),$$

что и требовалось доказать.

7. Интеграл как функция множества. Пусть $f(x)$ — заданная простая измеримая функция. Тогда функция множества

$$\Phi(E) = \int_I f d\mu \quad (1.10)$$

есть мера, определенная на σ -алгебре A .

Полная вариация этой меры имеет вид

$$v(\Phi, E) = \int_E |f| d\nu(\mu). \quad (1.11)$$

Мера Φ абсолютно непрерывна относительно μ .

Доказательство. Аддитивность функции $\Phi(E)$ доказана выше (свойство 3). Пусть $\{X_m\}$ — возрастающая последовательность множеств, $X_m \in A$. Положим $X = \lim_m X_m$. Тогда имеем $\mu(X_m E_k) \rightarrow \mu(X E_k)$. Из определения интеграла (1.1) получаем $\Phi(X_m) \rightarrow \Phi(X)$. Таким образом, доказано, что Φ есть мера.

Далее, пусть $\{X_i\}$ — конечная система множеств, $X_i \in A$, $X_i \subset E$, $X_i \cap X_k = \emptyset$ ($i \neq k$). Тогда на основании (1.4)

$$\sum_i |\Phi(X_i)| \leq \sum_i \int_{X_i} |f| d\nu(\mu) \leq \int_E f d\nu(\mu).$$

Следовательно,

$$v(\Phi, E) \leq \int_E |f| d\nu(\mu). \quad (1.12)$$

Для получения противоположного неравенства рассмотрим сначала тот случай, когда $X \subset E_k$, $X \in A$, где E_k — одно из множеств, входящих в (1.1). В этом случае

$$\int_X f d\mu = a_k \mu(X), \quad \int_X |f| d\nu(\mu) = |a_k| v(\mu, X). \quad (1.13)$$

В силу определения полной вариации (п. 1.3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная система множеств

$$\{X_i\}, X_i \in A, X_i \subset X, X_i \cap X_k = \emptyset \quad (i \neq k),$$

что

$$v(\mu, X) \leq \sum_i |\mu(X_i)| + \varepsilon.$$

Отсюда и из (1.13) получаем

$$\begin{aligned} \int_X |f| d\nu(\mu) &\leq |a_k| \sum_i |\mu(X_i)| + \varepsilon |a_k| = \\ &= \sum_i \left| \int_{X_i} f d\mu \right| + \varepsilon |a_k| = \sum_i |\Phi(X_i)| + \varepsilon |a_k| \leq v(\Phi, X) + \varepsilon |a_k|. \end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ отсюда следует

$$\int_X |f| d\nu(\mu) \leq v(\Phi, X). \quad (1.14)$$

Если теперь положить $X_k = EE_k$ и учесть, что $E = \bigcup_k X_k$, то будем иметь в силу (1.14)

$$\int_E |f| d\nu(\mu) = \sum_k \int_{X_k} |f| d\nu(\mu) \leq \sum_k v(\Phi, X_k) = v(\Phi, E).$$

Отсюда и из (1.12) получаем (1.11).

Если $v(\mu, E) = 0$, то из (1.3) следует, что интеграл в правой части равенства (1.11) равен нулю. Следовательно, $v(\Phi, E) = 0$. Поэтому на

основании теоремы п. 1.5 мера Φ абсолютно непрерывна относительно μ .

2. Суммируемые функции. Интеграл. Как и в п. 1, предполагаются заданными множество S , мера μ и σ -алгебра A измеримых подмножества S .

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *суммируемой*, если существует такая последовательность простых измеримых функций $\{f_n\}$, сходящаяся почти всюду на S к $f(x)$, что

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_S |f_m - f_n| d\nu(\mu) = 0. \quad (2.1)$$

Такую последовательность $\{f_n\}$ будем называть *определяющей* для функции $f(x)$.

Непосредственно из определений суммируемой и измеримой функций следует, что каждая суммируемая функция измерима. Кроме того, из определения следует, что функция суммируема по мере μ тогда и только тогда, когда она суммируема по мере $\nu(\mu)$.

Из (2.1) заключаем, что последовательность

$$\int_E f_n d\mu \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

где E — измеримое множество, является фундаментальной в пространстве B . Действительно, пользуясь свойствами интеграла от простой функции, получаем

$$\left| \int_E f_n d\mu - \int_E f_m d\mu \right| \leq \int_E |f_n - f_m| d\nu(\mu) \rightarrow 0.$$

Из фундаментальности последовательности (2.2) и полноты пространства B следует существование предела этой последовательности.

Определение 2. *Интегралом* от суммируемой функции $f(x)$ по множеству E называется предел последовательности (2.2), где $\{f_n\}$ — определяющая последовательность для функции f .

Так определенный интеграл будем обозначать

$$\int_E f(x) d\mu. \quad (2.3)$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\int_E f(x) d\mu = \lim_n \int_E f_n(x) d\mu, \quad (2.4)$$

где $\{f_n\}$ — определяющая последовательность для функции f .

Рассмотрим функцию множества

$$F_n(E) = \int_E f_n(x) d\mu. \quad (2.5)$$

На основании свойства 7 интеграла от простой измеримой функции $F_n(E)$ есть элемент пространства (CA) мер (п. 1.4), причем его норма $\|F_n\|$ определяется равенством

$$\|F_n\| = \int_S |f_n| d\nu(\mu).$$

Поэтому в силу равенства (2.1)

$$\lim_{m, n} \|F_n - F_m\| = 0.$$

Таким образом, последовательность $\{F_n\}$ является фундаментальной в пространстве CA . Ввиду полноты этого пространства (п. 1.4) она сходится. Обозначим $F = \lim F_n$. Очевидно,

$$F(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in A). \quad (2.6)$$

Итак, мы показали, что интеграл от суммируемой функции f , рассматриваемый как функция множества, является мерой.

Покажем, что интеграл (2.3) не зависит от произвола в выборе определяющей последовательности для функции f . Действительно, пусть имеются две определяющие последовательности: $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$. Обозначим

$$h_n = f_n - g_n. \quad (2.7)$$

Очевидно, $h_n(x) \rightarrow 0$ почти всюду в S .

Далее,

$$\lim_{m, n} \int_S |h_n - h_m| d\nu = 0,$$

так как такое равенство имеет место для $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$. Следовательно, (п. 1, свойство б),

$$\lim_n \int_E h_n d\nu = 0$$

для любого измеримого множества E . Таким образом,

$$\lim_n \int_E f_n d\nu = \lim_n \int_E g_n d\nu,$$

что и доказывает независимость интеграла от произвола в выборе определяющей последовательности.

3. Основные свойства интеграла. 1. *Линейность.* Если f и g — суммируемые функции, то $\alpha f + \beta g$, где α и β — числа, также является суммируемой функцией, и имеет место равенство

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\nu = \alpha \int_E f d\nu + \beta \int_E g d\nu \quad (3.1)$$

для любого измеримого множества E .

Доказательство. Если $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — определяющие последовательности для f и g соответственно, то $\{\alpha f_n + \beta g_n\}$ является определяющей последовательностью для $\alpha f + \beta g$. Поэтому эта функция суммируема. Равенство (3.1) получается из соответствующего равенства для простых измеримых функций предельным переходом.

2. *Оценка интеграла.* Если $f(x)$ — функция, суммируемая по мере μ , а $|f(x)|$ суммируема по мере $\nu(\mu)$, и имеет место оценка

$$\left| \int_E f d\nu \right| \leq \int_E |f| d\nu(\mu). \quad (3.2)$$

Доказательство. Если $\{f_n\}$ есть определяющая последовательность для функции $f(x)$ по мере μ , то, очевидно, $\{|f_n|\}$ является определяющей последовательностью для функции $|f(x)|$ по мере $\nu(\mu)$. Отсюда следует суммируемость $|f(x)|$ по мере $\nu(\mu)$. Оценка (3.2) получается из соответствующей оценки для простых измеримых функций предельным переходом.

3. *Интеграл как функция множества.* Пусть $f(x)$ — суммируемая функция. Тогда функция множества

$$F(E) = \int_E f d\nu \quad (3.3)$$

есть мера, определенная на σ -алгебре A , абсолютно непрерывная относительно μ . Полная вариация меры F имеет вид

$$\nu(F, E) = \int_E |f| d\nu(\mu). \quad (3.4)$$

Доказательство. То, что $F(E)$ есть мера, доказано в п. 2. Ее абсолютная непрерывность следует из абсолютной непрерывности мер

(2.5). Остается доказать равенство (3.4). Так как $F \rightarrow F$ по норме пространства CA , то

$$v(F_n, E) \rightarrow v(F, E). \quad (3.5)$$

По определению интеграла, стоящего в правой части равенства (3.4),

$$\int_E |f| d\nu(\mu) = \lim_n \int_E |f_n| d\nu(\mu) = \lim_n v(F_n, E). \quad (3.6)$$

Последнее равенство написано на основании свойства 7 интеграла от простой функции (п. 1). Из (3.5) и (3.6) следует (3.4).

4. *Положительность.* Если f — неотрицательная суммируемая функция и μ — неотрицательная мера, то

$$\int_E f d\mu \geq 0.$$

Это следует непосредственно из (3.2).

5. *Монотонность.* Пусть f и g — неотрицательные суммируемые функции, $f(x) \leq g(x)$ ($x \in S$), μ — неотрицательная мера, X и Y — измеримые множества, $X \subset Y$. Тогда

$$\int_X f d\mu \leq \int_Y g d\mu.$$

Доказательство проводится точно так же, как для простых функций (п. 1).

6.
$$\int_E 1 \cdot d\mu = \mu(E). \quad (3.7)$$

Это равенство непосредственно следует из (1.1).

7. Если f — суммируемая функция, а χ_E — характеристическая функция измеримого множества E , то $f\chi_E$ суммируема, и имеет место равенство

$$\int_S f\chi_E d\mu = \int_E f d\mu. \quad (3.8)$$

Доказательство. Если $\{f_n\}$ — определяющая последовательность для функции f , то, как легко непосредственно проверить, $\{f_n\chi_E$ есть определяющая последовательность для функции $f\chi_E$. Отсюда следует ее суммируемость. Равенство (3.8) получится, если интеграл в левой части представить как сумму интегралов по множеству E и $S-E$.

8. Если $f(x)$ — неотрицательная суммируемая функция, μ — неотрицательная мера и

$$\int_S f d\mu = 0,$$

то $f(x) = 0$ почти всюду на множестве S (последнее значит, что множество точек $x \in S$, в которых $f(x) \neq 0$, имеет меру нуль).

Доказательство. Обозначим через E_n множество всех тех $x \in S$, для которых $f(x) \geq \frac{1}{n}$. Тогда имеем

$$0 = \int_S f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n),$$

откуда следует, что $\mu(E_n) = 0$. Очевидно, множество E всех тех $x \in S$, для которых $f(x) = 0$, имеет вид $E = \lim_n E_n = \bigcup_n E_n$, так что $\mu(E) = 0$,

что и доказывает утверждение.

4. **Предельный переход под знаком интеграла.** Пусть задана последовательность суммируемых функций $\{f_n(x)\}$, сходящаяся почти всюду к функции $f(x)$. Возникает вопрос: имеет ли место равенство

$$\lim_n \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu. \quad (4.1)$$

Следующий простой пример показывает, что это не так. Пусть E — интервал $(0,1)$, μ — мера Лебега,

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{при } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{при } \frac{1}{n} \leq x < 1 \end{cases} \\ (n = 1, 2, \dots).$$

Известно, что $f_n(x) \rightarrow 0$ при всех $x \in E$, но

$$\int_E f_n d\mu = 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, равенство (4.1) не имеет места.

Следующая важная теорема, доказанная Лебегом, устанавливает условие возможности предельного перехода (4.1).

Теорема. Если последовательность $\{f_n\}$ суммируемых функций сходится почти всюду на S к функции f и существует суммируемая неотрицательная функция $F(x)$ такая, что почти всюду¹ на S

$$|f_n(x)| \leq F(x) \quad (4.2)$$

при всех n , то $f(x)$ — суммируемая функция, и для любого измеримого множества E имеет место равенство (4.1).

Доказательство. Мы проведем доказательство в предположении суммируемости функции $f(x)$. Ее суммируемость следует из теоремы п. 5 и неравенства (4.3).

Обозначим $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Очевидно, $g_n(x) \rightarrow 0$ почти всюду на S . Переходя к пределу в (4.2) при $n \rightarrow \infty$, получим

$$|f(x)| \leq F(x) \quad (4.3)$$

почти всюду на S .

Отсюда

$$|g_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x)| \leq 2F(x)$$

почти всюду на S .

Докажем, что

$$\lim_n \int_S |g_n(x)| d\nu(\mu) = 0. \quad (4.4)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Ввиду абсолютной непрерывности интеграла как функции множества (п. 3) можно подобрать такое число $\delta > 0$, что

$$\int_E F d\nu(\mu) < \frac{\varepsilon}{4} \quad (4.5)$$

для любого измеримого множества E такого, что $\nu(\mu, E) < \delta$.

Функции $f_n(x)$ суммируемы и поэтому измеримы. Поэтому измерима и функция $f(x)$ как предел почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций. Отсюда следует, что измеримы функции g_n . Из теоремы Егорова следует, что $g_n(x) \rightarrow 0$ почти равномерно на S . Это значит, что существует такое измеримое множество E , что

¹ Т. е. во всех точках множества $E \subset S$ такого, что $\nu(\mu, S - E) = 0$.

$v(\mu, E) < \delta$ и $g_n(x) \rightarrow 0$ равномерно на множестве $S-E$. Следовательно, найдется такое число N , что

$$\int_{S-E} |g_n(x)| dv(\mu) < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $n > N$. Таким образом, при $n > N$

$$\begin{aligned} \int_S |g_n| dv(\mu) &= \int_E |g_n| dv(\mu) + \int_{S-E} |g_n| dv(\mu) < \\ &< 2 \int_E F dv(\mu) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

на основании (4.5). Равенство (4.4) доказано.

Далее,

$$\left| \int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f_n - f| dv(\mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

в силу равенства (4.4). Теорема доказана.

5. Критерий суммируемости функций. Как указывалось в п. 2, каждая суммируемая функция измерима. Обратное неверно. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема. Если измеримая функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f(x)| \leq F(x)$$

почти всюду на S , где $F(x)$ — суммируемая функция, то $f(x)$ суммируема.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность простых измеримых функций, сходящаяся к $f(x)$ почти всюду на S . Положим $f_n(x) = \varphi_n(x)$, если $|\varphi_n(x) - f(x)| \leq 1$, и $f_n(x) = 0$ в противном случае. При этом мы получили последовательность $\{f_n\}$ простых измеримых функций, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду и удовлетворяющую условию

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| + 1 \leq F(x) + 1$$

при всех n почти всюду на S . Ясно, что почти всюду на S

$$\lim_{m, n} |f_n(x) - f_m(x)| = 0 \quad \text{и} \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq 2F(x) + 2.$$

Заметим, что доказательство теоремы п. 4 дословно переносится и на случай, когда речь идет о пределе по паре индексов. Поэтому согласно этой теореме

$$\lim_{m, n} \int_S |f_n(x) - f_m(x)| dv(\mu) = 0.$$

Это значит, что $\{f_n(x)\}$ является определяющей последовательностью для функции $f(x)$, суммируемость которой тем самым доказана. Теорема доказана.

Следствие. Для того чтобы измеримая функция $f(x)$ была суммируемой, необходимо и достаточно, чтобы функция $|f(x)|$ была суммируемой.

Доказательство. Необходимость следует из утверждения 2 п. 3, достаточность — из теоремы.

6. Интеграл Лебега. Если μ есть мера Лебега (п. 1.7), то интеграл (2.3) будем обозначать

$$\int_E f(x) dx \tag{6.1}$$

и называть интегралом Лебега.

Преыдущие построения позволяют определить интеграл Лебега лишь для ограниченных множеств E .

Распространим понятие суммируемой функции на случай, когда интегрирование производится по всему пространству R^n . Функцию $f(x)$ назовем суммируемой (по пространству R^n), если она суммируема в каждом шаре $|x| < m$ ($m = 1, 2, \dots$) и выполняется условие

$$\lim_m \int_{|x| < m} |f(x)| dx < \infty. \quad (6.2)$$

Для суммируемой функции $f(x)$ положим¹

$$\int f(x) dx = \lim_m \int_{|x| < m} f(x) dx. \quad (6.3)$$

Существование предела следует из (6.2), так как в силу неравенства

$$\left| \int_{|x| < m} f(x) dx \right| \leq \int_{|x| < m} |f(x)| dx$$

последовательность интегралов, стоящих в правой части равенства (6.3), фундаментальна.

Для любого измеримого множества E положим

$$\int_E f(x) dx = \int f(x) \chi_E(x) dx,$$

где χ_E — характеристическая функция множества E , в предположении суммируемости функции $f \chi_E$.

7. Произведение мер. Теорема Фубини. Пусть S_1 и S_2 — множества, принадлежащие пространствам R^m и R^n соответственно. Рассмотрим множество S , принадлежащее пространству R^{m+n} , точки z которого определены равенством $z = (x, y)$, когда x пробегает все точки множества S_1 , а y — множества S_2 . Мы будем обозначать $S = S_1 \times S_2$ и называть S *прямым произведением множеств* S_1 и S_2 .

Например, пусть S_1 есть интервал (a, b) в пространстве R^1 , S_2 — интервал (c, d) в пространстве R^1 . Тогда $S = S_1 \times S_2$ есть прямоугольник: $a < x < b, c < y < d$ в пространстве R^2 .

Другой пример: S_1 — круг в пространстве R^2 , S_2 — отрезок в пространстве R^1 . Тогда $S = S_1 \times S_2$ есть круговой цилиндр в пространстве R^3 .

Пусть задана мера μ_i , определенная на σ -алгебре A_i измеримых подмножеств множества S_i ($i = 1, 2$). Для любой пары множеств $E_1 \in A_1$ и $E_2 \in A_2$ определено их прямое произведение $E = E_1 \times E_2$. Множество E принадлежит, очевидно, множеству $S = S_1 \times S_2$. Вся совокупность множеств $E = E_1 \times E_2$, когда E_1 пробегает все элементы σ -алгебры A_1 , а E_2 — все элементы σ -алгебры A_2 , образует некоторую систему M подмножеств множества S . Эта система M не является σ -алгеброй. Однако существует минимальная σ -алгебра A подмножеств множества S , содержащая M . Оказывается, что существует мера μ , и притом только одна², определенная на σ -алгебре A и удовлетворяющая условию

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1) \mu_2(E_2)$$

для всех множеств $E_i \in A_i$ ($i = 1, 2$). Эта мера μ называется *произведением мер* μ_1 и μ_2 .

Например, двумерная мера Лебега является произведением двух одномерных мер Лебега. Вообще $(m+n)$ -мерная мера Лебега есть произведение m -мерной и n -мерной мер Лебега.

Следующая теорема об интегрировании по произведению мер имеет многочисленные приложения.

¹ При интегрировании по R^n мы не будем в обозначениях интеграла указывать область интегрирования.

² Доказательство этого утверждения, а также приводимых ниже результатов об интегрировании по произведению мер см., например, в [17].

Теорема Фубини. Пусть на σ -алгебре, содержащей подмножества множества S_i , задана мера μ_i ($i=1, 2$) и μ есть произведение мер μ_1 и μ_2 . Пусть, далее, $f(x, y)$ — функция, заданная на $S = S_1 \times S_2$ и суммируемая по мере μ . Тогда почти для всех $x \in S_1$ (по мере μ_1) функция $f(x, y)$ суммируема на S_2 по мере μ_2 ; функция

$$\int_{S_2} f(x, y) d\mu_2(y)$$

суммируема по S_1 по мере μ_1 , и имеет место равенство

$$\int_S f d\mu = \int_{S_1} \left\{ \int_{S_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right\} d\mu_1(x). \quad (7.1)$$

Из этой теоремы, в частности, следует возможность перестановки порядка интегрирования. Именно, пусть выполняются условия теоремы. Тогда ввиду равноправности мер μ_1 и μ_2 мы можем наряду с (7.1) написать также равенство

$$\int_S f d\mu = \int_{S_2} \left\{ \int_{S_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right\} d\mu_2(y). \quad (7.2)$$

Таким образом, правые части равенств (7.1) и (7.2) равны между собой. В этом и состоит содержание утверждения о перестановке порядка интегрирования.

Теорема Фубини утверждает, что из существования интеграла в левой части равенства (7.1) следует существование интегралов в правой части. Обратное, вообще говоря, неверно. Однако если функция $f(x, y)$ и меры μ_1 и μ_2 неотрицательны и функция f измерима по мере μ , то оказывается, что из существования интегралов, стоящих в правой части равенства (7.1), следует суммируемость функции $f(x, y)$ по мере μ и равенство (7.1).

§ 4. Пространство L^p

В этом параграфе мы будем считать заданными множество S и вещественную меру μ , определенную на σ -алгебре подмножеств этого множества.

1. **Функции, суммируемые в степени p .** Обозначим через L^p множество всех вещественных функций $f(x)$, заданных на S , измеримых по мере μ и таких, что функция $|f(x)|^p$ суммируема по этой мере. Здесь p — некоторое вещественное число, $p \geq 1$.

Будем обозначать

$$\|f\|_p = \left(\int_S |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.1)$$

Теорема 1. Пусть p и q — вещественные числа, $p > 1$, $q > 1$, удовлетворяющие условию

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (1.2)$$

Тогда если $f \in L^p$, $g \in L^q$, то fg суммируема и

$$\int_S |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (1.3)$$

(неравенство Гельдера).

Доказательство. Для любых двух неотрицательных чисел a и b имеет место неравенство

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (1.4)$$

Для доказательства этого неравенства рассмотрим кривую $\eta = \xi^{p-1}$ ($\xi > 0$) (рис. 1).

Имеем

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p}.$$

та же кривая задается уравнением $= \eta^{q-1}$. Поэтому

$$S_2 = \int_0^b \eta^{q-1} d\eta = \frac{b^q}{q}.$$

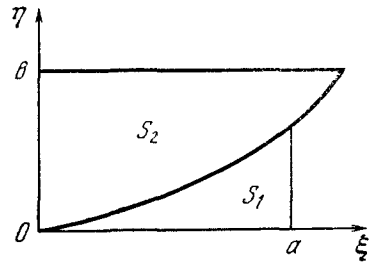


Рис. 1

Так как $S_1 + S_2 \geq ab$, то мы получаем (1.4).

Подставим в неравенство (1.4)

$$a = |f(x)| \cdot \|f\|_p^{-1}, \quad b = |g(x)| \cdot \|g\|_p^{-1}.$$

Получим

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)| &\leq \frac{1}{p} |f(x)|^p \|f\|_p^{1-p} \|g\|_q + \\ &+ \frac{1}{q} |g(x)|^q \|f\|_p \|g\|_q^{1-q}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Отсюда следует суммируемость функции $f(x)g(x)$. Проинтегрировав (1.5), получим (1.3). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $p > 1$, $f, g \in L^p$. Тогда $f + g \in L^p$ и

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (1.6)$$

(неравенство Минковского).

Доказательство. При $p = 1$ утверждения следуют из свойств интеграла.

Рассмотрим случай $p > 1$. Пусть ξ и η — вещественные числа, удовлетворяющие условиям:

$$\xi + \eta = 1, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0. \quad (1.7)$$

Функция $\xi^p + \eta^p$ непрерывна и нигде на замкнутом множестве (1.7) не обращается в нуль. Поэтому существует константа $\rho > 0$ такая, что

$$\xi^p + \eta^p \geq \rho \quad (1.8)$$

при всех ξ и η , удовлетворяющих условию (1.7).

Подставим в неравенство (1.8)

$$\xi = |f| (|f| + |g|)^{-1}, \quad \eta = |g| (|f| + |g|)^{-1}.$$

Получим

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq \frac{1}{\rho} (|f|^p + |g|^p).$$

Отсюда следует, что $f + g \in L^p$.

Далее, имеем

$$(|f| + |g|)^p = (|f| + |g|)^{p-1} |f| + (|f| + |g|)^{p-1} |g|. \quad (1.9)$$

Так как

$$[(|f| + |g|)^{p-1}]^q = (|f| + |g|)^p,$$

то

$$(|f| + |g|)^{p-1} \in L^q.$$

Из неравенства Гельдера получаем

$$\int_S |f| (|f| + |g|)^{p-1} d\nu \leq \|f\|_p \| |f| + |g| \|_q^{p/q}.$$

Аналогично для второго слагаемого в (1.9). Интегрирование (1.9) приводит к неравенству

$$\| |f| + |g| \|_p^p \leq \| |f| + |g| \|_p^p (\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Отсюда следует неравенство

$$\| |f| + |g| \|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Теорема доказана.

2. Пространство L^p . Пусть p — вещественное число, $p \geq 1$. На основании теоремы 2 п. 1 $f + g \in L^p$, если $f, g \in L^p$. Далее, очевидно, что если $f \in L^p$ и α — вещественное число, то $\alpha f \in L^p$. Поэтому L^p есть линейное пространство.

Поставим вопрос о том, можно ли ввести в этом пространстве норму равенством (1.1). Проверим выполнение аксиом нормы. Из теоремы 2 п. 1 следует, что неравенство треугольника выполнено. Кроме того, непосредственно легко проверить равенство $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$, где $f \in L^p$; α — вещественное число. Однако свойство нормы, состоящее в том, что из

$$\|f\|_p = 0 \tag{2.1}$$

должно следовать $f = \Theta$, не выполняется. Действительно, из равенства (2.1) мы можем заключить только, что $f(x) = 0$ почти всюду на S (см. п. 3.3, свойство 8).

Чтобы выполнялось указанное свойство нормы, нам придется прибегнуть к следующему соглашению. Говоря об элементах пространства L^p , мы будем отождествлять между собой функции, которые отличаются друг от друга на множестве меры нуль. Точнее это нужно понимать так. Назовем эквивалентными между собой две функции, которые отличаются друг от друга на множестве меры нуль. Будем считать элементами пространства L^p классы эквивалентных между собой суммируемых в степени p функций. Действия над такими классами производятся по их представителям. Так, если имеется два класса с представителями f и g , то сумма этих классов есть класс с представителем $f + g$. Произведение класса с представителем f на число α есть класс с представителем αf . Легко понять, что результат не зависит от выбора представителя класса и что так определенное пространство L^p является линейным пространством. Кроме того, очевидно, что при определении нормы равенством (1.1) мы получаем одинаковую норму для всех эквивалентных между собой функций. Следовательно, норма элемента пространства L^p — класса эквивалентности — определяется по любому его представителю.

Можно доказать (см., например, [60]), что так определенное пространство L^p является полным пространством.

Особенно важен для приложений случай $p = 2$. В предположении, что мера μ неотрицательна, в пространстве L^2 вводится скалярное произведение равенством

$$(f, g) = \int_S f g d\mu.$$

Суммируемость функции fg следует из теоремы 1 п. 1, аксиомы скалярного произведения — из свойств интеграла (п. 3.3). Из предыдущего ясно, что L^2 есть гильбертово пространство.

3. Критерий компактности. В п. I.4.12 было введено понятие компактности множества в нормированном пространстве. Мы приведем здесь критерий компактности множеств в пространстве L^p (доказательство см. [48]). При этом мы будем предполагать, что μ есть мера Лебега.

Пусть S — ограниченное открытое множество в R^n . Рассмотрим пространство L^p функций, заданных на множестве S и суммируемых

в степени p . Мы будем считать функции доопределенными нулем вне S и, таким образом, заданными во всем пространстве R^n .

Теорема. Для того чтобы множество $F \subset L^p$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы:

1) существовала такая константа K , что $\|f\|_p < K$ для всех $f \in F$;

2) для любого числа $\varepsilon > 0$ нашлось бы $\delta > 0$ такое, что для всех $f \in F$

$$\int_S |f(x+y) - f(x)|^p dx < \varepsilon,$$

если только $|y| < \delta$.

Глава III. ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Линейные операторы. Пусть заданы два банаховых пространства X и Y . Функция $f(x)$, область определения D которой лежит в пространстве X , а область значений — в пространстве Y , называется *оператором*, действующим из пространства X в пространство Y . Если $Y = X$, то говорят, что оператор действует в пространстве X .

Оператор A , действующий из пространства X в пространство Y , называется *линейным*, если:

1) его область определения D есть линейное пространство;

2) для любых $x_1, x_2 \in D$

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \quad (\text{аддитивность});$$

3) для любого $x \in D$ и любого числа α

$$A(\alpha x) = \alpha Ax \quad (\text{однородность}).$$

2. Примеры линейных операторов. *1. Матрицы.* Пусть X — n -мерное координатное пространство R^n , Y — m -мерное координатное пространство R^m . Покажем, что если задана матрица $A = (a_{ki})$ размера $m \times n$, то ею определен оператор, действующий из пространства X в пространство Y и заданный на всем пространстве X . Именно, если

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, то полагаем

$$y_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (2.1)$$

Таким образом, вектору x поставлен в соответствие вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, т. е. определен оператор.

Легко проверить, что этот оператор является линейным.

2. Интегральный оператор. Рассмотрим пространство L^2 функций $x(t)$, заданных на отрезке $[0, 1]$ и суммируемых в квадрате:

$$\|x\|^2 \equiv \int_0^1 x^2(t) dt < \infty. \quad (2.2)$$

Рассмотрим, далее, функцию $K(t, \tau)$ двух переменных t, τ , заданную в квадрате $Q: 0 < t < 1, 0 < \tau < 1$. Будем предполагать, что квадрат этой функции суммируем:

$$\int_0^1 \int_0^1 K^2(t, \tau) dt d\tau < \infty. \quad (2.3)$$

На основании теоремы 1 п. II.4.1 функция $K(t, \tau)x(\tau)$ суммируема по Q , и поэтому по теореме Фубини функция

$$y(t) = \int_0^1 K(t, \tau)x(\tau)d\tau \quad (2.4)$$

суммируема. В силу оценки

$$y^2(t) \leq \int_0^1 K^2(t, \tau)d\tau \|x\|^2 \quad (2.5)$$

функция $y(t)$ принадлежит пространству L^2 .

Итак, доказано, что оператор

$$Ax = \int_0^1 K(t, \tau)x(\tau)d\tau \quad (2.6)$$

действует в пространстве L^2 . Этот оператор называется *интегральным оператором*, а функция $K(t, \tau)$ — его *ядром*.

Из свойств интеграла следует, что интегральный оператор является линейным.

3. Оператор дифференцирования. В пространстве C функций, заданных и непрерывных на интервале $(0, 1)$, рассмотрим оператор $Ax = \frac{dx}{dt}$. Его областью определения D является множество функций x , производные которых dx/dt непрерывны, так что оператор A каждой функции $x(t) \in D$ ставит в соответствие функцию $\frac{dx}{dt} \in C$. Из дифференциального исчисления известно, что производная сумма двух функций равна сумме их производных и что постоянный множитель можно выносить за знак производной. Это и значит, что оператор дифференцирования является линейным.

3. Ограниченные операторы. Определение 1. Линейный оператор A , действующий из пространства X в пространство Y с областью определения D , называется *ограниченным*, если существует такая константа K , что

$$\|Ax\| \leq K\|x\| \quad (3.1)$$

при всех $x \in D$.

В левой части неравенства (3.1) стоит норма в пространстве Y , а в правой — норма в пространстве X .

Если $\|x\| = 1$, $x \in D$, то из (3.1) следует, что

$$\|Ax\| \leq K. \quad (3.2)$$

Определение 2. Нормой оператора A (обозначение: $\|A\|$) называется число

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|=1, \\ x \in D}} \|Ax\| \quad (3.3)$$

Из (3.2) следует, что

$$\|A\| \leq K, \quad (3.4)$$

а из (3.3) получаем, что при $x \in D$, $\|x\| = 1$ имеет место неравенство

$$\|Ax\| \leq \|A\|. \quad (3.5)$$

Пусть $x \neq \theta$ — произвольный элемент из области определения оператора A . Обозначим $x_0 = \frac{x}{\|x\|}$. Тогда $\|x_0\| = 1$ и, следовательно, на основании (3.5) получаем

$$\left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|A\|.$$

В силу однородности нормы отсюда следует, что

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad (x \in D). \quad (3.6)$$

Это неравенство остается, очевидно, справедливым и при $x = \theta$. Поэтому оно верно при всех $x \in D$.

4. **Примеры ограниченных операторов.** 1. Рассмотрим пример 1. п. 2. Из (2.1) в силу неравенства Коши — Буняковского следует

$$y_k^2 \leq \sum_{l=1}^n a_{kl}^2 \sum_{l=1}^n x_l^2.$$

Складывая по k и обозначая

$$C = \sqrt{\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl}^2}, \quad (4.1)$$

получим

$$\|y\| \leq C \|x\|.$$

Таким образом, оператор, определенный матрицей (a_{kl}) , ограничен и его норма не превосходит числа C , заданного равенством (4.1).

2. Рассмотрим интегральный оператор, определенный в примере 2 п. 2. Из (2.5) имеем

$$\int_0^1 y^2(t) dt \leq \int_0^1 \int_0^1 K^2(t, \tau) dt d\tau \|x\|^2. \quad (4.2)$$

Обозначим

$$M = \left(\int_0^1 \int_0^1 K^2(t, \tau) dt d\tau \right)^{1/2}. \quad (4.3)$$

Из (4.2) получаем

$$\|y\| \leq M \|x\|.$$

Таким образом, интегральный оператор ограничен и его норма не превосходит числа M , определенного равенством (4.3).

5. **Пример неограниченного оператора.** Покажем, что оператор дифференцирования, определенный в примере 3 п. 2, неограничен. Предположим противное. Тогда должно существовать число K такое, что

$$\sup_{0 < t < 1} |x'(t)| \leq K \|x\|. \quad (5.1)$$

Положим $x = \sin n\pi t$, где n — натуральное число. Ясно, что $\|x\| = 1$, $x'(t) = n\pi \cos n\pi t$; так что

$$\sup_{0 < t < 1} |x'(t)| = n\pi.$$

Из (5.1) теперь следует, что

$$n\pi \leq K$$

при всех n , что невозможно. Это противоречие доказывает неограниченность оператора дифференцирования в пространстве C .

6. **Непрерывность линейных операторов.** Так как понятие оператора является частным случаем общего понятия функции, то определение непрерывности функции, данное в п. I.4.11, сохраняется для операторов. Повторим его. Оператор A называется *непрерывным*, если для любого элемента x , принадлежащего области D определения оператора A , и для любой последовательности $\{x_n\}$ ($x_n \in D$), сходящейся к элементу x , имеет место равенство

$$\lim Ax_n = Ax. \quad (6.1)$$

Следующая теорема указывает связь между ограниченностью и непрерывностью линейных операторов.

Теорема. Для того чтобы линейный оператор был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.

Доказательство. Пусть A — линейный оператор, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y , с областью определения D . Предположим, что оператор A ограничен. Тогда для любой последовательности $\{x_n\}$ элементов, принадлежащих области определения оператора и сходящейся к элементу $x \in D$, имеем

$$\|Ax_n - Ax\| \leq \|A\| \|x_n - x\| \rightarrow 0,$$

откуда следует (6.1), и, таким образом, оператор A непрерывен.

Обратно, пусть A — непрерывный оператор. Предположим, что он не ограничен. Это значит, что для любого натурального числа n найдется такой элемент $x_n \in D$, что

$$\|Ax_n\| > n \|x_n\|. \quad (6.2)$$

Обозначим $y_n = \frac{x_n}{n \|x_n\|}$. Ясно, что $y_n \rightarrow \theta$, и поэтому в силу непрерывности A должно иметь место равенство

$$\lim_n Ay_n = \theta.$$

С другой стороны, из (6.2) получаем

$$\|Ay_n\| > 1.$$

Это противоречие показывает, что предположение о неограниченности оператора было неправильно. Теорема доказана.

7. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. **1. Сложение.** Как и вообще для функций (п. 1.10), сложение операторов определяется следующим образом. Пусть A и B — два ограниченных линейных оператора, действующих из пространства X в пространство Y и определенных на всем X . Тогда $C = A + B$, если $Cx = Ax + Bx$ для всех $x \in X$. Линейность оператора C легко проверяется. Из неравенства

$$\|(A + B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|) \|x\|$$

следует, что $A + B$ — ограниченный оператор и

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|. \quad (7.1)$$

2. Умножение на число. Пусть A обозначает то же, что и выше, α — число. Тогда по определению

$$(\alpha A)x = \alpha Ax. \quad (7.2)$$

Очевидно, αA — линейный оператор.

Далее, из (7.2)

$$\|(\alpha A)x\| \leq |\alpha| \|Ax\|,$$

откуда следует, что αA — ограниченный оператор, причем

$$\|\alpha A\| \leq |\alpha| \|A\|. \quad (7.3)$$

Пользуясь этим неравенством, можно записать при $\alpha \neq 0$

$$\|A\| = \left\| \frac{1}{\alpha} \alpha A \right\| \leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha A\|,$$

откуда

$$\|A\| \geq |\alpha| \|A\|.$$

Поэтому на основании неравенства (7.3)

$$\|A\| = |\alpha| \|A\|. \quad (7.4)$$

Следовательно, это равенство справедливо также при $\alpha = 0$.

3. Умножение операторов. Пусть заданы три нормированных пространства X , Y и Z и линейные ограниченные операторы A и B , действу-

ющие из Y в Z и из X в Y соответственно. Предполагается, что областями определений операторов A и B являются пространства Y и X соответственно.

Определим оператор $C = AB$ следующим равенством:

$$Cx = A(Bx)$$

для всех $x \in X$. Тогда C есть оператор, действующий из X в Z . Его линейность легко проверяется. Ограниченность получается из оценки

$$\|Cx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|.$$

Из этой оценки получаем также

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (7.5)$$

Предоставим читателю проверить, что справедлив *ассоциативный* закон умножения операторов:

$$(AB)C = A(BC).$$

Пусть n — натуральное число, A — ограниченный оператор, действующий в пространстве X и определенный на всем этом пространстве. Степень A^n оператора A определяется по индукции: $A^n = A^{n-1}A$. Пользуясь ассоциативным законом умножения операторов, легко проверить, что для любых натуральных чисел m и n имеет место равенство

$$A^m A^n = A^{m+n}.$$

4. Обратный оператор. Оператор I , действующий в банаховом пространстве X , называется *единичным*, если имеет место равенство $Ix = x$ для всех элементов $x \in X$.

Пусть задан линейный ограниченный оператор A , действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y и определенный на всем пространстве X . Линейный оператор B , определенный на всем пространстве Y и действующий из Y в X , называется *обратным* к оператору A , если имеют место равенства:

$$AB = I, \quad (7.6)$$

$$BA = I. \quad (7.7)$$

Заметим, что в (7.6) I есть единичный оператор в пространстве Y , а в (7.7) — в пространстве X .

Оператор, обратный к оператору A , обозначается A^{-1} .

Вопрос о существовании обратного оператора связан с разрешимостью уравнения

$$Ax = y \quad (x \in X; y \in Y). \quad (7.8)$$

Если существует обратный оператор A^{-1} , то уравнение (7.8) имеет решение

$$x = A^{-1}y. \quad (7.9)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно подставить (7.9) в (7.8). Это решение является единственным, так как если бы существовало два решения x_1 и x_2 уравнения (7.8): $Ax_1 = y$, $Ax_2 = y$, то, обозначая $x = x_1 - x_2$, получили бы $Ax = \theta$, откуда $x = A^{-1}Ax = A^{-1}\theta = \theta$, так что $x_1 = x_2$.

Можно доказать и обратное утверждение: если уравнение (7.8) однозначно разрешимо при любом $y \in Y$, то существует обратный оператор A^{-1} . Действительно, каждому $y \in Y$ ставится в соответствие элемент $x \in X$ — решение уравнения (7.8). Следовательно, определен B :

$$x = By \quad (7.10)$$

так, что $ABy = y$ для всех элементов y пространства Y . Следовательно, имеет место равенство (7.6). Далее, если x — произвольный эле-

мент пространства X , то, обозначив $y = Ax$, получим, что $x = By$. Поэтому $x = BAx$, что и доказывает равенство (7.7). Линейность оператора B легко проверяется. Действительно, пусть $By_1 = x_1$, $By_2 = x_2$. Тогда $y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$ и поэтому $B(y_1 + y_2) = x_1 + x_2$, откуда следует аддитивность оператора B . Так же доказывается его однородность. Итак, мы доказали существование обратного оператора при условии однозначной разрешимости уравнения (7.8).

При определении обратного оператора мы не требовали его ограниченности. И, действительно, этого заранее требовать и не нужно, так как имеет место следующая теорема (см., например, [25]).

Теорема Банаха. Если линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y и определенный на всем X , имеет обратный, определенный на всем пространстве Y , то этот обратный оператор ограничен.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

1. Линейные функционалы. Если в определении оператора, данного п. 1.1, в качестве пространства Y принять одномерное координатное пространство, то такой оператор называется *функционалом*. В дальнейшем мы будем рассматривать линейные ограниченные функционалы, определенные на всем пространстве X , причем будем их называть просто *линейными функционалами*. Повторим еще раз определение специально для этого случая.

Определение. Будем говорить, что задан линейный функционал $f(x)$, определенный на банаховом пространстве X , если каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие число $f(x)$ так, что выполняются следующие условия:

$$1) f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \text{ для любых } x_1, x_2 \in X;$$

$$3) \text{ существует такая константа } K, \text{ что } |f(x)| \leq K \|x\| \text{ для всех } x \in X.$$

Определение нормы, данное в общем случае для операторов, в применении к функционалам выглядит так:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|. \quad (1.1)$$

Неравенство (1.3.6) записывается в виде

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|. \quad (1.2)$$

Из теоремы п. 1.6 следует, что, рассматривая ограниченные функционалы, мы имеем дело с непрерывными функционалами.

2 Примеры линейных функционалов. 1. Пусть E — евклидово пространство, $x_0 \in E$. Определим функционал $f(x)$ равенством

$$f(x) = (x, x_0) \quad (2.1)$$

для всех $x \in E$. Из свойств скалярного произведения и неравенства Коши—Буняковского

$$|f(x)| \leq \|x_0\| \|x\| \quad (2.2)$$

следует, что $f(x)$ есть линейный функционал.

Покажем, что

$$\|f\| = \|x_0\|. \quad (2.3)$$

Действительно, из (2.2) имеем

$$\|f\| \leq \|x_0\|. \quad (2.4)$$

с другой стороны, так как $\left\| \frac{x_0}{\|x_0\|} \right\| = 1$, то

$$\|f\| \geq \left| f\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) \right| = \left| \left(\frac{x_0}{\|x_0\|}, x_0\right) \right| = \|x_0\|.$$

равнявая с (2.4), получим равенство (2.3).

2. Пусть S — некоторое борелевское множество в нормированном пространстве B и задана борелевская мера μ_0 . Тогда определено пространство L^p функций x , заданных на S и суммируемых со степенью p (см. п. II.4.2). При $p > 1$ определим число q равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Покажем, что если $y \in L^q$, то

$$f(x) = \int_S xy d\mu \quad (2.5)$$

есть линейный функционал, определенный на пространстве L^p . Действительно, как показано в п. II.4.1, функция xy суммируема по мере μ , и имеет место оценка

$$|f(x)| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \quad (2.6)$$

Аддитивность и однородность функционала $f(x)$ следуют из свойств интеграла.

Из (2.6) получаем

$$\|f\| \leq \|y\|_q. \quad (2.7)$$

Можно показать (см., например [17]), что в действительности $\|f\|$ имеет место знак равенства

$$\|f\| = \|y\|_q. \quad (2.8)$$

Задавая в (2.5) различные функции $y \in L^q$, мы будем получать различные функционалы. Оказывается, что таким образом могут быть получены все линейные функционалы, т. е. для любого линейного функционала $f(x)$, определенного на пространстве L^p , существует функция $y \in L^q$ такая, что имеет место равенство (2.5) (см., например, [17]).

3. Пусть G — открытое множество в пространстве R , $C(G)$ — пространство ограниченных и непрерывных функций $x(t)$, заданных в G , с нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in S} |x(t)|$$

(см. п. I.4.11).

Пусть t_0 — некоторая фиксированная точка множества G . Введем функционал

$$\delta(x) = x(t_0),$$

т. е. функционал δ ставит в соответствие каждой функции $x \in C(G)$ ее значение в точке t_0 . Аддитивность и однородность этого функционала очевидны. Далее,

$$|\delta(x)| = |x(t_0)| \leq \|x\|,$$

так что $\delta(x)$ есть линейный функционал, причем $\|\delta\| \leq 1$.

Покажем, что

$$\|\delta\| = 1, \quad (2.9)$$

для чего достаточно доказать, что $\|\delta\| \geq 1$. Имеем для $x(t) \equiv 1$: $\|\delta\| \geq |\delta(x)| = x(t_0) = 1$.

Введенный здесь линейный функционал называется *дельта-функцией*, сосредоточенной в точке t_0 .

3. **Сопряженное пространство.** Для линейных функционалов так же, как и вообще для операторов, определены действия сложения и умножения на числа, причем в результате этих действий мы снова получаем линейный функционал (см. п. 1.7). Легко проверяется, что при этом выполняются все аксиомы линейного пространства.

Далее, если ввести норму равенством (1.1), то с так введенной нормой пространство линейных функционалов является *нормированным*

пространством. Это доказывается так же, как и в п. I.4.10. Аналогично тому, как это сделано в п. I.4.10, доказывается, что это пространство является полным. Таким образом, множество всех линейных функционалов, определенных на банаховом пространстве X , образует *полное нормированное пространство*, которое называется *сопряженным* к пространству X и обозначается X' .

Часто для приложений бывает важным построение сопряженных пространств для некоторых конкретных банаховых пространств. Для этого необходимо находить общий вид линейных функционалов, определенных на этом пространстве. Так, например, как показано в примере 2 п. 2, общий вид линейных функционалов на пространстве L^p задается равенством (2.5), им устанавливается взаимно-однозначное соответствие между линейными функционалами и элементами пространства L^q . Это значит, что каждому линейному функционалу $f(x)$, заданному на пространстве L^p , соответствует один и только один элемент y пространства L^q такой, что имеет место равенство (2.5). При таком соответствии, как это легко проверить, сумме функционалов соответствует сумма элементов пространства L^q и произведению функционала f на число соответствует произведение элемента y на это же число.

Такое взаимно-однозначное соответствие между элементами линейных пространств, при котором сохраняются линейные операции (сложение и умножение на число), называется *изоморфизмом*. Если пространства нормированные и при указанном соответствии сохраняется норма (т. е. нормы соответствующих элементов равны между собой), то такой изоморфизм называется *изометрическим*. В рассмотренном примере, как видно из равенства (2.8), пространство линейных функционалов, заданных на пространстве L^p , изометрически изоморфно пространству L^q . Часто в теории линейных нормированных пространств не различают изометрически-изоморфные пространства. В этом смысле иногда просто говорят, что пространство, сопряженное к L^p , есть пространство L^q , имея при этом в виду изометрический изоморфизм этих пространств.

4. Линейные функционалы в гильбертовом пространстве. В примере I п. 2 мы показали, что если x_0 есть элемент евклидова пространства E , то

$$f(x) = (x, x_0) \quad (4.1)$$

есть линейный функционал в E , причем имеет место равенство (2.3):

$$\|f\| = \|x_0\|. \quad (4.2)$$

Оказывается, что если E является полным пространством, то равенством (4.1) задается общий вид линейных функционалов. Точнее, имеет место следующая теорема

Теорема. *Каждый линейный функционал $f(x)$ в гильбертовом пространстве E имеет вид (4.1), где x_0 — элемент пространства E , однозначно определенный функционалом $f(x)$. При этом имеет место равенство (4.2).*

Доказательство. Обозначим через F множество всех тех элементов x пространства E , для которых $f(x) = 0$. В силу линейности и непрерывности функционала f множество F образует подпространство в E .

Если F совпадает со всем пространством, то в качестве x_0 в равенстве (4.1) можно взять нулевой элемент Θ . Если же F не совпадает со всем пространством E , то существует элемент $y \neq \Theta$, ортогональный к F . Действительно, пусть $z \notin F$. Обозначим через z_0 проекцию элемента z на подпространство F . Тогда элемент $y = z - z_0$ ортогонален к F (см. п. I.5.4).

Покажем, что элементы вида

$$f(x)y - f(y)x, \quad (4.3)$$

где x — произвольный элемент из E , принадлежат подпространству F . Действительно,

$$f(f(x)y - f(y)x) = f(x)f(y) - f(y)f(x) = 0.$$

В силу принадлежности элементов (4.3) к пространству F имеет место равенство

$$(f(x)y - f(y)x, y) = 0$$

и, следовательно,

$$f(x)\|y\|^2 = (x, f(y)y).$$

Обозначая $x_0 = \frac{f(y)y}{\|y\|^2}$ получим (4.1).

Покажем, что элемент x_0 определен функционалом f однозначно. Действительно, если бы наряду с (4.1) имело место также равенство $f(x) = (x, x_1)$ ($x_1 \in E$) для всех $x \in E$, то мы имели бы равенство $(x, x_1 - x_0) = 0$. Так как это равенство справедливо при всех $x \in E$, то, полагая $x = x_1 - x_0$, получили бы $\|x_1 - x_0\|^2 = 0$, так что $x_1 = x_0$. Теорема доказана.

5. Линейные функционалы в пространстве непрерывных функций.

Пусть S — ограниченное замкнутое множество в пространстве R^n . Обозначим через $C(S)$ множество всех непрерывных функций $x(t)$, заданных на S , с нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in S} |x(t)|.$$

Пусть, далее, μ — произвольная регулярная мера, заданная на борелевских подмножествах множества S . Тогда интеграл

$$f(x) = \int_S x d\mu \quad (5.1)$$

есть линейный функционал. Действительно, его аддитивность и однородность следуют из свойств интеграла, а ограниченность из оценки

$$|f(x)| \leq \int_S |x(t)| d\mu \leq \|x\| \nu(\mu, S).$$

Отсюда также следует, что

$$\|f\| \leq \nu(\mu, S).$$

Обозначим через V пространство регулярных мер ограниченной вариации с нормой $\|\mu\| = \nu(\mu, S)$. Мы видим, таким образом, что каждая мера $\mu \in V$ порождает линейный функционал в пространстве $C(S)$, причем имеет место неравенство $\|f\| \leq \|\mu\|$.

Оказывается, что так описываются все линейные функционалы в пространстве $C(S)$. Именно, имеет место следующая теорема, доказанная Риссом.

Теорема. *Каждый линейный функционал $f(x)$ в пространстве $C(S)$ имеет вид (5.1), где μ — мера, принадлежащая пространству V . Мера μ однозначно определяется функционалом f , и имеет место равенство*

$$\|f\| = \|\mu\|. \quad (5.2)$$

С доказательством этой теоремы можно ознакомиться, например, в [17].

Легко показать, что соответствие между функционалами в $C(S)$ и мерами из пространства V является изоморфизмом (см. п. 3), причем в силу (5.2) изометрическим. Таким образом, пространство, сопряженное к пространству $C(S)$ непрерывных функций, есть пространство V регулярных мер ограниченной вариации (с точностью до изометрического изоморфизма пространств).

Важным частным случаем функционалов (5.1) являются функционалы вида

$$f(x) = \int_S x(t)y(t)dt, \quad (5.3)$$

где $y(t)$ — функция, суммируемая на S по мере Лебега. В этом случае мера μ имеет вид

$$\mu(E) = \int_E y(t)dt. \quad (5.4)$$

§ 3. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Сопряженный оператор. Пусть заданы два гильбертова пространства X и Y и линейный ограниченный оператор A , действующий из пространства X в пространство Y и определенный на всем пространстве X .

Определение. Оператор A^* , действующий из пространства Y в пространство X и определенный на всем пространстве Y , называется *сопряженным* к оператору A , если для всех элементов $x \in X$ и $y \in Y$ имеет место равенство

$$[Ax, y] = (x, A^*y). \quad (1.1)$$

Здесь (\quad) и $[\quad]$ — скалярные произведения в пространствах X и Y соответственно.

Мы докажем сейчас, что такой оператор существует.

Теорема. Для любого линейного ограниченного оператора A , действующего из пространства X в пространство Y , существует сопряженный оператор A^* , который является линейным и ограниченным и его норма совпадает с нормой оператора A :

$$\|A^*\| = \|A\|. \quad (1.2)$$

Сопряженный оператор A^* определяется по оператору A однозначно.

Доказательство. Рассмотрим функционал в пространстве X :

$$f(x) = [Ax, y], \quad (1.3)$$

где y — заданный элемент пространства Y . Очевидно, $f(x)$ есть линейный функционал. Действительно, для $x_1, x_2 \in X$

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= [A(x_1 + x_2), y] = [Ax_1 + Ax_2, y] = \\ &= [Ax_1, y] + [Ax_2, y] = f(x_1) + f(x_2). \end{aligned}$$

Аддитивность функционала $f(x)$ доказана. Аналогично доказывается однородность.

Из оценки

$$|f(x)| \leq \|Ax\| \|y\| \leq \|A\| \|x\| \|y\|$$

следует ограниченность функционала $f(x)$.

По теореме об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве (п. 2.4) мы можем утверждать, что существует такой элемент $x^* \in X$, что

$$[Ax, y] = (x, x^*). \quad (1.4)$$

Мы видим, что каждому элементу $y \in Y$ поставлен в соответствие элемент $x^* \in X$. В силу общего определения оператора это значит, что на всем пространстве Y определен оператор со значениями в пространстве X . Этот оператор обозначим через A^* , так что по определению $A^*y = x^*$. Подставляя в (1.4), получим (1.1). Итак, существование сопряженного оператора доказано.

Докажем его единственность. Пусть B — оператор, действующий из пространства Y в пространство X , такой, что

$$[Ax, y] = (x, By) \quad (1.5)$$

для всех $x \in X, y \in Y$. Тогда из (1.1) и (1.5) следует

$$(x, A^*y - By) = 0$$

для всех $x \in X$. В частности, полагая здесь $x = A^*y - By$, получаем $\|A^*y - By\| = 0$ и, следовательно,

$$A^*y = By.$$

Так как это равенство доказано для произвольного элемента y пространства Y , то операторы A^* и B равны между собой. Единственность сопряженного оператора доказана.

Докажем, что оператор A^* линейный. Именно, запишем равенство (1.1) для $y = y_1$ и $y = y_2$, где y_1 и y_2 — заданные элементы пространства Y , и сложим эти равенства. Получим

$$[Ax, y_1 + y_2] = (x, A^*y_1 + A^*y_2). \quad (1.6)$$

Запишем, далее, равенство (1.1) для элемента $y = y_1 + y_2$

$$[Ax, y_1 + y_2] = (x, A^*(y_1 + y_2)).$$

Сравнивая это с (1.6) и учитывая, что эти равенства верны при всех $x \in X$, заключаем, что

$$A^*(y_1 + y_2) = A^*y_1 + A^*y_2.$$

Аддитивность оператора A^* доказана. Точно так же доказывается однородность.

Докажем ограниченность оператора A^* . Для этого подставим в равенство (1.1) $x = A^*y$. Получим

$$[A^*y, y] = \|A^*y\|^2 = \|AA^*y, y\| \leq \|A\| \|A^*y\| \|y\|.$$

Следовательно,

$$\|A^*y\| \leq \|A\| \|y\|.$$

Это и значит, что оператор A^* ограничен. При этом мы получили также оценку $\|A^*\| \leq \|A\|$. Если мы подставим в равенство (1.1) $y = Ax$, то вполне аналогично получим оценку $\|A\| \leq \|A^*\|$. Таким образом, равенство (1.2) доказано. На этом завершается доказательство теоремы.

2. Примеры сопряженных операторов. 1. Матрицы. Пусть задана матрица $A = (a_{kl})$ размера $m \times n$, элементы которой для простоты будем считать вещественными числами. В п. 1.2 показано, как по матрице A строится линейный оператор, действующий из пространства R^n в пространство R^m . Будем обозначать этот оператор той же буквой A . Обозначим, далее, (\cdot, \cdot) и $[\cdot, \cdot]$ скалярные произведения в R^n и R^m соответственно. Тогда на основании равенства (1.2.1) для любого вектора $z \in R^m$ получим

$$[Ax, z] = \sum_{k=1}^m y_k z_k = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l z_k. \quad (2.1)$$

Рассмотрим матрицу A' , транспонированную к матрице A (см. п. 1.7.4). Мы покажем, что транспонированная матрица определяет сопряженный оператор. Действительно, матрица A' переводит вектор $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in R^m$ в вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in R^n$, где

$$x_i^* = \sum_{k=1}^m a_{ki} z_k.$$

Поэтому

$$(x, A'z) = (x, x^*) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m x_l a_{kl} z_k.$$

Сравнивая с равенством (2.1), получим

$$[Ax, z] = (x, A'z),$$

что и требовалось доказать.

2. *Интегральные операторы.* Пусть A — оператор, определенный равенством (1.2.6)

$$Ax = \int_0^1 K(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Рассмотрим интегральный оператор

$$Bx = \int_0^1 K(\tau, t) x(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

ядро которого получается из ядра $K(t, \tau)$ оператора A перестановкой переменных t и τ . Мы будем применять обозначения и предположения, введенные в п. 1.2, в примере 2. Из неравенства (1.2.3) следует, что ядро оператора (2.2) суммируемо в квадрате по Q . Поэтому (см. п. 1.2) мы можем утверждать, что B есть ограниченный оператор, действующий в L^2 . Для любых x и y из L^2 имеем

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \int_0^1 Ax \cdot y dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(t, \tau) x(\tau) d\tau \right) y(t) dt = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K(t, \tau) y(t) dt \right) x(\tau) d\tau = (x, By). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для того чтобы оправдать перестановку порядка интегрирования, произведенную в равенстве (2.4), согласно теореме Фубини (п. II.3.7) достаточно проверить, что функция $K(t, \tau)x(\tau)y(t)$ суммируема на множестве Q . Но это следует из того, что функция $[x(\tau)y(t)]^2$ суммируема по Q , и теоремы 1 п. II.4.1.

Из равенства (2.4) заключаем, что оператор (2.3) является сопряженным к оператору (2.2).

3. **Свойства сопряженных операторов.** В дальнейшем запись

$$A: X \rightarrow Y$$

будем обозначать, что оператор A действует из пространства X в пространство Y и определен на всем пространстве X .

Укажем некоторые свойства сопряженных операторов.

1. Пусть A — ограниченный линейный оператор, $A: X \rightarrow Y$, где X и Y — гильбертовы пространства. Тогда, как показано в п. 1, сопряженный оператор A^* есть ограниченный линейный оператор, $A^*: Y \rightarrow X$. Следовательно, для него также может быть определен сопряженный оператор $(A^*)^*$. Из (1.1) непосредственно следует, что этот оператор совпадает с A :

$$(A^*)^* = A. \quad (3.1)$$

2. Если A и B — два линейных ограниченных оператора, действующих из гильбертова пространства X в гильбертово пространство Y , α — вещественное число, то

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (3.2)$$

$$(\alpha A)^* = \alpha A^*. \quad (3.3)$$

Эти свойства легко следуют из определения сопряженных операторов.

3. Пусть X, Y, Z — гильбертовы пространства, A и B — ограниченные линейные операторы, $B: X \rightarrow Y$, $A: Y \rightarrow Z$. Тогда определен оператор $AB: X \rightarrow Z$ (п. 1.7). Покажем, что

$$(AB)^* = B^*A^*. \quad (3.4)$$

Для этого обозначим через (\cdot, \cdot) , $[\cdot, \cdot]$ и $\{\cdot, \cdot\}$ скалярные произведения в X , Y и Z соответственно. Тогда по определению сопряженных операторов имеем для любых элементов $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$:

$$[Bx, y] = (x, B^*y), \quad (3.5)$$

$$\{Ay, z\} = [y, A^*z]. \quad (3.6)$$

Подставим в качестве y в (3.5) A^*z , а в (3.6) — Bx . Получим:

$$[Bx, A^*z] = (x, B^*A^*z),$$

$$\{ABx, z\} = [Bx, A^*z].$$

Отсюда

$$\{ABx, z\} = (x, B^*A^*z),$$

что и доказывает равенство (3.4).

4. Пусть A — ограниченный линейный оператор, $A: X \rightarrow Y$, где X и Y — гильбертовы пространства. Предположим, что существует обратный оператор $A^{-1}: Y \rightarrow X$ (см. п. 1.7). Тогда

$$AA^{-1} = I, \quad A^{-1}A = I.$$

Пользуясь свойством (3.4), отсюда получаем

$$(A^{-1})^* A^* = I, \quad A^*(A^{-1})^* = I.$$

Это значит, что оператор A^* имеет обратный, причем

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*. \quad (3.7)$$

4. **Самосопряженные операторы.** Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве X и определенный на всем пространстве.

Определение. Оператор A называется *самосопряженным*, если он совпадает со своим сопряженным:

$$A^* = A. \quad (4.1)$$

В силу определения сопряженного оператора это значит, что

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (4.2)$$

для всех $x, y \in X$.

Самосопряженный оператор называют также *симметричным*.

Примеры 1 Пусть $A: X \rightarrow Y$, где X и Y — гильбертовы пространства. Тогда оператор A^*A действует в пространстве X . Из равенств (3.4) и (3.1) получаем

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$$

Следовательно, A^*A — самосопряженный оператор.

Точно так же доказывается, что оператор AA^* , действующий в пространстве Y , является самосопряженным.

2 Рассмотрим симметричную квадратную матрицу A порядка n . Определенный ею оператор, действующий в пространстве R^n , является самосопряженным (см п. 2, пример 1).

3 Интегральный оператор (2.2) является самосопряженным, если его ядро $K(t, \tau)$ симметрично:

$$K(t, \tau) = K(\tau, t)$$

Это следует из вида (2.3) сопряженного оператора

5. **Квадратичные формы.** Пусть A — линейный ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве X . Функцию

$$(Ax, x), \quad (5.1)$$

спределенную на всех элементах x пространства X , будем называть *квадратичной формой*.

Теорема. $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$. (5.2)

Доказательство. Обозначим

$$\lambda = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

1 как как при $\|x\| = 1$ имеет место неравенство

$$|(Ax, x)| \leq \|A\|,$$

то

$$\lambda \leq \|A\|. \quad (5.3)$$

Докажем обратное неравенство. Имеем для любых $x, y \in X$:

$$(A(x+y), x+y) = (Ax, x) + (Ay, y) + 2(Ax, y),$$

$$(A(x-y), x-y) = (Ax, x) + (Ay, y) - 2(Ax, y).$$

Вычитая эти равенства, получим

$$4(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y). \quad (5.4)$$

Заметим, что для любого вектора $z \in X$ имеет место оценка

$$(Az, z) = \|z\|^2 \left(A \frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|} \right) \leq \lambda \|z\|^2.$$

Пользуясь этой оценкой, мы получаем из (5.4)

$$4(Ax, y) \leq \lambda (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \lambda ((x+y, x+y) + (x-y, x-y)) = 2\lambda (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Таким образом,

$$2(Ax, y) \leq \lambda (\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (5.5)$$

Пусть теперь $y = \alpha Ax$, где α — произвольное вещественное число. Подстановка в (5.5) дает

$$\lambda \alpha^2 \|Ax\|^2 - 2\alpha \|Ax\|^2 + \lambda \|x\|^2 \geq 0.$$

Мы получили квадратный трехчлен, неотрицательный при всех α . Поэтому имеет место неравенство для его дискриминанта

$$\|Ax\|^4 - \lambda^2 \|Ax\|^2 \|x\|^2 \leq 0.$$

Отсюда следует

$$\|Ax\| \leq \lambda \|x\|$$

и поэтому $\|A\| \leq \lambda$. Сравнивая это с неравенством (5.3), получаем окончательно $\|A\| = \lambda$. Теорема доказана.

§ 4. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ И ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Все операторы, которые здесь будут рассматриваться, предполагаются линейными, ограниченными, действующими из гильбертова пространства X в гильбертово пространство Y и определенными на всем пространстве X .

1. **Конечномерные операторы.** Оператор P называется *конечномерным*, если его область значений есть конечномерное пространство.

Найдем вид конечномерного оператора. Пусть R — область значений конечномерного оператора P . Так как R есть конечномерное подпространство пространства Y , то в R может быть выбран ортонормированный базис

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Для любого $x \in X$ имеет место равенство

$$Px = \sum_{i=1}^n c_i y_i. \quad (1.1)$$

Умножая скалярно на y_k , получим

$$c_k = [Px, y_k] \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.2)$$

где [] обозначает скалярное произведение в пространстве Y . Обозначая $x_k = P^*y_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), мы можем записать (1.2) также в виде

$$c_k = (x, x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, мы получаем

$$Px = \sum_{k=1}^n (x, x_k) y_k. \quad (1.3)$$

Ясно, что каковы бы ни были элементы x_k, y_k ($k = 1, 2, \dots, n$) пространств X и Y , оператор, задаваемый равенством (1.3), является конечномерным.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Каждый линейный ограниченный конечномерный оператор, действующий из гильбертова пространства X в гильбертово пространство Y , имеет вид (1.3), где x_k и y_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — некоторые элементы пространств X и Y соответственно.*

Найдем оператор, сопряженный к оператору P . По определению сопряженного оператора

$$[Px, y] = (x, P^*y) \quad (1.4)$$

для всех $x \in X, y \in Y$. Из (1.3) получаем

$$[Px, y] = \sum_{k=1}^n (x, x_k) [y, y_k] = (x, \sum_{k=1}^n x_k [y, y_k]).$$

Сравнение с (1.4) приводит к равенству

$$P^*y = \sum_{k=1}^n [y, y_k] x_k. \quad (1.5)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Оператор, сопряженный к конечномерному оператору (1.3), является конечномерным оператором и имеет вид (1.5).*

2. Вполне непрерывные операторы. Оператор T , действующий из гильбертова пространства X в гильбертово пространство Y , называется *вполне непрерывным*, если он каждое ограниченное множество переводит в компактное (см. п. I.4.12).

Другими словами, это значит, что какова бы ни была бесконечная последовательность $\{x_i\}$ элементов пространства X такая, что $\|x_i\| < C$, последовательность $\{Tx_i\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в пространстве Y .

Простейшим примером вполне непрерывного оператора является конечномерный оператор. Действительно, если $\|x_i\| < C$, то $\|Px_i\| \leq \|P\| C$, так что $\{Px_i\}$ есть ограниченное множество в конечномерном пространстве и, следовательно, компактное (см. п. I.4.12).

Теорема 1. *Пусть X, Y и Z — гильбертовы пространства, A и B — ограниченные операторы, действующие из Y в Z и из X в Y соответственно. Тогда если один из этих операторов является вполне непрерывным, то их произведение AB также является вполне непрерывным оператором.*

Короче, произведение вполне непрерывного оператора на ограниченный есть вполне непрерывный оператор.

Доказательство. Пусть A — вполне непрерывный, B — ограниченный оператор. Если $\{x_i\}$ — ограниченная последовательность в X , то Bx_i есть ограниченная последовательность в Y и, следовательно, $(AB)x_i = A(Bx_i)$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в Z . Таким образом, AB — вполне непрерывный оператор.

Для случая, когда A ограниченный, а B — вполне непрерывный оператор, доказательство столь же просто.

Теорема 2. Пусть $A: X \rightarrow Y$ — ограниченный линейный оператор. Тогда если вполне непрерывен один из следующих операторов: A, A^*, AA^*, A^*A , то вполне непрерывны и все остальные.

Доказательство. Пусть A^*A — вполне непрерывный оператор в пространстве X . Покажем, что A есть вполне непрерывный оператор. Действительно, пусть $\{x_i\}$ — ограниченная последовательность в пространстве X : $\|x_i\| \leq C$. Тогда существует подпоследовательность $\{x'_i\}$ такая, что $\{A^*Ax'_i\}$ сходится в пространстве X . Имеем

$$\begin{aligned} \|Ax'_k - Ax'_i\|^2 &= (x'_k - x'_i, A^*A(x'_k - x'_i)) \leq \\ &\leq \|x'_k - x'_i\| \|A^*A(x'_k - x'_i)\| \leq 2C \|A^*A(x'_k - x'_i)\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$k, i \rightarrow \infty$

Таким образом, последовательность $\{Ax'_k\}$ является фундаментальной в Y и, следовательно, сходящейся. Полная непрерывность оператора A доказана.

Точно так же доказывается, что из полной непрерывности оператора AA^* в пространстве Y следует полная непрерывность оператора $A^*: Y \rightarrow X$.

Для полного доказательства теоремы остается только показать, что из полной непрерывности оператора $A(A^*)$ следует полная непрерывность оператора $AA^*(A^*A)$. Но это утверждение является прямым следствием теоремы 1. Теорема доказана.

§ 5. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве X .

Определение. Вектор $x \in X$, не равный нулю, называется *собственным вектором* оператора A , если существует число λ такое, что

$$Ax = \lambda x.$$

Это число λ называется *собственным значением* оператора A .

Мы рассмотрим собственные значения различных классов операторов.

1. Операторы в конечномерных пространствах. Прежде чем изучать собственные значения операторов в конечномерных пространствах, мы рассмотрим этот вопрос для матриц. Пусть A — квадратная матрица порядка n , x — n -мерный вектор, который мы будем изображать в виде столбца из n элементов, так что Ax следует понимать как произведение матриц. Вектор $x \neq \Theta$ называется *собственным вектором* матрицы A , соответствующим *собственному значению* λ , если имеет место равенство $Ax = \lambda x$ или

$$(A - \lambda I)x = 0, \tag{1.1}$$

где I — единичная матрица. Но это равенство при ненулевом векторе x имеет место тогда и только тогда, когда

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{1.2}$$

(см. п. I 9.2, следствие 2).

Поэтому все собственные значения матрицы A являются корнями уравнения (1.2), и обратно, все корни уравнения (1.2) являются собственными значениями матрицы A .

Уравнение (1.2) есть уравнение n -й степени относительно λ .

Перейдем теперь к изучению собственных значений операторов в конечномерных пространствах.

Пусть X — конечномерное евклидово пространство, A — оператор, действующий в X . Пусть, далее, x — собственный вектор оператора A , соответствующий собственному значению λ :

$$Ax = \lambda x. \tag{1.3}$$

Выберем ортонормированный базис в пространстве X : e_1, e_2, \dots, e_n . Тогда

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i. \quad (1.4)$$

Подставляя в (1.3), получим

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i A e_i = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i. \quad (1.5)$$

Далее, пусть

$$A e_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k. \quad (1.6)$$

Подстановка в (1.5) дает

$$\sum_{i, k=1}^n \alpha_k a_{ik} e_i = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i,$$

Откуда

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k a_{ik} = \lambda \alpha_i. \quad (1.7)$$

Заметим, что из (1.6) следует

$$a_{ki} = (A e_i, e_k) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.8)$$

Таким образом, вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ есть собственный вектор матрицы (a_{ik}) , соответствующий собственному значению λ .

Обратно, если λ есть собственное значение матрицы (a_{ik}) и α есть соответствующий собственный вектор, то λ является собственным значением оператора A , а вектор x , определяемый равенством (1.4), является соответствующим ему собственным вектором.

Таким образом, мы видим, что определение собственных значений и собственных векторов оператора A сводится к определению их для матрицы, элементы которой задаются равенствами (1.8).

2 Самосопряженные операторы. Теорема. *Собственные векторы самосопряженного оператора A , соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда

$$\lambda_1 (x_1, x_2) = (Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = \lambda_2 (x_1, x_2).$$

Следовательно, $(x_1, x_2) = 0$. Теорема доказана.

3 Самосопряженные вполне непрерывные операторы. Теорема 1. *Пусть A — самосопряженный вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве X . Тогда функция $|(Ax, x)|$ достигает своей точной верхней грани*

$$\mu = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \quad (3.1)$$

а сфере $\|x\| = 1$, т. е. существует такой вектор y ($\|y\| = 1$), что

$$\mu = |(Ay, y)|. \quad (3.2)$$

Этот вектор является собственным вектором оператора A , соответствующим собственному значению $\lambda = (Ay, y)$.

Доказательство. По определению точной верхней грани существует последовательность $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$ такая, что

$$\mu = \lim_n |(Ax_n, x_n)|.$$

При этом (Ax_n, x_n) — ограниченная последовательность и поэтому существует сходящаяся подпоследовательность. Мы можем заранее

считать, что последовательность $\{x_n\}$ выбрана так, что (Ax_n, x_n) сходится. Обозначим

$$\lambda = \lim_n (Ax_n, x_n).$$

Ясно, что

$$|\lambda| = \rho. \quad (3.3)$$

Покажем, что

$$\lim_n (Ax_n - \lambda x_n) = 0. \quad (3.4)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|Ax_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Ax_n\|^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \lambda^2 \leq \\ &\leq \|A\|^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \lambda^2 \rightarrow \|A\|^2 - \lambda^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

На основании теоремы п. 3.5

$$|\lambda| = \|A\|,$$

откуда следует (3.4).

Так как оператор A вполне непрерывный, то найдется подпоследовательность x_{n_i} такая, что Ax_{n_i} сходится. На основании (3.4) существует также $\lim x_{n_i}$, который обозначим через y . Переходя в (3.4) к пределу по подпоследовательности x_{n_i} , получим

$$Ay = \lambda y, \quad (3.6)$$

причем, так как $\|x_n\| = 1$, то $\|y\| = 1$.

Таким образом, y есть собственный вектор оператора A .

Из (3.6) получаем

$$\lambda = (Ay, y),$$

а из (3.3) следует (3.2). Теорема доказана.

Из теоремы следует, что *каждый самосопряженный вполне непрерывный оператор, не являющийся тождественно нулевым, имеет хотя бы одно отличное от нуля собственное значение.* Заметим, что, как следует из (3.5), абсолютная величина собственного значения равна норме оператора A .

Пользуясь доказанной теоремой, мы можем указать алгоритм нахождения собственных векторов и собственных значений вполне непрерывных самосопряженных операторов. Именно, обозначим вектор y , найденный из условия (3.2), через x_1 . Соответствующее собственное значение обозначим через λ_1 . Дальнейшее построение будем вести по индукции.

Пусть уже найдены собственные векторы x_1, x_2, \dots, x_n и соответствующие собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда вектор x_{n+1} находится как вектор, на котором достигает своего наибольшего значения функционал $|(Ax, x)|$ при условиях:

$$\|x\| = 1, \quad (3.7)$$

$$(x, x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.8)$$

т. е.

$$|(Ax_{n+1}, x_{n+1})| = \sup |(Ax, x)| \quad (3.9)$$

при условиях (3.7) и (3.8).

Ясно, что так построенный вектор x_{n+1} в силу (3.7) ортогонален ко векторам x_i ($i = 1, \dots, n$) и его норма равна единице. Существование такого вектора следует из теоремы. Действительно, обозначим через X_n подпространство в X , состоящее из элементов x , удовлетворяющих условию (3.8), и будем рассматривать оператор A на подпространстве X_n . Легко видеть, что X_n — инвариантное подпространство,

т. е. если $x \in X_n$, то $Ax \in X_n$. Действительно, если $x \in X_n$, то выполняются условия (3.8) и поэтому

$$(Ax, x_i) = (x, Ax_i) = \lambda_n(x, x_i) = 0$$

($i = 1, 2, \dots, n$). Следовательно, Ax ортогонален ко всем x_i , т. е. $Ax \in X_n$.

Итак, рассматривая оператор A , как действующий в X_n , мы получаем самосопряженный вполне непрерывный оператор в X_n . В силу теоремы 1, примененной к этому оператору, существует вектор x_{n+1} , определяемый равенством (3.9). Этот вектор является собственным вектором оператора A . Соответствующее собственное значение λ_{n+1} удовлетворяет условию

$$|\lambda_{n+1}| = \sup | (Ax, x) |, \quad (3.10)$$

где \sup берется по векторам $x \in X_n$.

Заметим, что $|\lambda_n| = \sup | (Ax, x) |$ при $x \in X_{n-1}$, $\|x\| = 1$, и так как $X_{n-1} \supset X_n$, то

$$|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}| \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.11)$$

Теорема 2. Для любого вполне непрерывного самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве X существует ортонормированная последовательность $\{x_m\}$ собственных векторов, соответствующая последовательности значений $\{\lambda_m\}$, такая, что каждый элемент $x \in X$ представляется в виде

$$x = \sum_m (x, x_m) x_m + y, \quad (3.12)$$

где $(y, x_m) = 0$ и $Ay = \Theta$. Если последовательность $\{x_m\}$ бесконечна, то

$$\lim_m \lambda_m = 0. \quad (3.13)$$

Доказательство. Проводя указанный выше процесс построения собственных векторов, мы получим две такие возможности.

1. Процесс оборвется после конечного числа (n) шагов. Это произойдет в случае, если оператор A , рассматриваемый на подпространстве X_n , есть тождественный нуль:

$$Ay = \Theta \quad \text{при всех } y \in X_n. \quad (3.14)$$

Пусть x — произвольный элемент из X . Положим

$$y = x - \sum_{m=1}^n (x, x_m) x_m.$$

Ясно, что $y \in X_n$, и поэтому имеет место (3.14). Следовательно, имеет место (3.12), и теорема в этом случае доказана.

2. Процесс построения собственных векторов будет продолжаться неограниченно. Тогда будут построены бесконечная ортонормированная последовательность $\{x_m\}$ $m = 1, 2, \dots$ собственных векторов и соответствующая последовательность собственных значений $\{\lambda_m\}$, причем будут выполняться условия (3.11).

Покажем, что имеет место (3.13). Предположим противное. Тогда последовательность $\left\{ \begin{smallmatrix} x_m \\ \lambda_m \end{smallmatrix} \right\}$ будет ограниченной, а так как оператор A вполне непрерывный, то $x_m = A \left(\frac{x_m}{\lambda_m} \right)$ является компактной последовательностью. Но это невозможно, так как $\{x_m\}$ — ортонормированная последовательность (см. п. I.4.12).

Пусть x — произвольный элемент пространства X . Положим

$$y_n = x - \sum_{i=1}^n (x, x_i) x_i. \quad (3.15)$$

Ясно, что $(y_n, x_m) = 0$ ($m = 1, 2, \dots, n$) и поэтому $y_n \in X_n$. Рассматривая A как оператор, действующий на подпространстве X_n , получим

$$\|Ay_n\| \leq \|A\| \|y_n\| = |\lambda_{n+1}| \|y_n\|, \quad (3.16)$$

так как $|\lambda_{n+1}| = \|A\|$.

Кроме того, из (3.15)

$$\|x\|^2 = \|y_n\|^2 + \sum_{i=1}^n |(x, x_0)|^2,$$

так что $\|y_n\| \leq \|x\|$. Отсюда из (3.16) и (3.13) получаем $\lim_n Ay_n = \theta$.

Но

$$Ay_n = Ax - \sum_{i=1}^n \lambda_i (x, x_i) x_i.$$

Следовательно,

$$Ax = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (x, x_m) x_m. \quad (3.17)$$

Пусть

$$y = x - \sum_{m=1}^{\infty} (x, x_m) x_m. \quad (3.18)$$

Тогда

$$Ay = Ax - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (x, x_m) x_m = \theta.$$

Таким образом, имеет место равенство (3.12). Умножая (3.18) скалярно на x_k , получим $(x_k, y) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Теорема доказана.

4. Самосопряженные операторы в конечномерных пространствах, матрицы и квадратичные формы. Пусть A — самосопряженный оператор в n -мерном евклидовом пространстве X . Так как оператор A конечномерный, то он является вполне непрерывным и поэтому к нему применима теорема 2 п. 3. Пусть x_1, x_2, \dots, x_k — все собственные векторы, соответствующие собственным значениям, отличным от нуля. Если $k < n$, то мы можем их дополнить ортонормированной системой векторов y_1, y_2, \dots, y_l таких, что $(y_i, x_m) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, l; m = 1, 2, \dots, n$),

$$Ay_i = \theta \quad (i = 1, 2, \dots, l), \quad (4.1)$$

На основании теоремы 2 п. 3 векторы $x_1, x_2, \dots, x_l, y_1, y_2, \dots, y_l$ образуют ортонормированный базис пространства X . В силу (4.1) y_i являются собственными векторами оператора A , соответствующими нулевому собственному значению. Доказана теорема.

Теорема 1. Пусть A — самосопряженный оператор в конечномерном евклидовом пространстве. Тогда существует ортонормированный базис этого пространства, состоящий из собственных векторов оператора A .

Следствие. Пусть a — симметричная матрица порядка n . Тогда существует ортонормированный базис пространства R^n , состоящий из собственных векторов матрицы a .

Пусть задана квадратичная форма

$$F(\xi) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k, \quad (4.2)$$

где (a_{ik}) — симметричная матрица.

Пусть u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — ортонормированная система собственных векторов матрицы a , соответствующая собственным значениям λ_i , так что

$$au_i = \lambda_i u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(u_i — столбцы). Введем вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и пусть ξ' — транспонированная матрица к ξ . Мы можем тогда квадратичную форму (4.2) записать в виде

$$F(\xi) = \xi a \xi'. \quad (4.3)$$

Разложим ξ' по ортонормированной системе u_i :

$$\xi' = \sum_{i=1}^n \eta_i u_i. \quad (4.4)$$

Тогда

$$a \xi' = \sum_i \lambda_i \eta_i u_i.$$

Подстановка в (4.3) дает

$$F(\xi) = \sum_{i=1}^n \eta_i u_i' \sum_{k=1}^n \lambda_k \eta_k u_k = \sum_k \lambda_k \eta_k^2.$$

Заметим, что если записать векторы u_i в проекциях

$$u_i' = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то (4.4) можно записать

$$\xi_k = \sum_{i=1}^n u_{ki} \eta_i \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (4.5)$$

Векторы u_i образуют ортонормированную систему. Преобразование вида (4.5) с матрицей (u_{ki}) , столбцы которой образуют ортонормированную систему, называется *ортгональным*. (Можно показать, что и строки матрицы (u_{ki}) образуют ортонормированную систему векторов.)

Доказана теорема.

Теорема. Пусть

$$F(\xi) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \quad (4.6)$$

— квадратичная форма с симметричной матрицей (a_{ik}) . Тогда, сделав ортогональное преобразование

$$\xi_k = \sum_{i=1}^n u_{ki} \eta_i,$$

где (u_{ki}) — матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы (a_{ik}) , мы приведем квадратичную форму (4.6) к виду

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \eta_k^2, \quad (4.7)$$

где λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — собственные значения матрицы (a_{ik}) .

§ 6. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Мы будем рассматривать в этом параграфе операторы $A(x)$ (нелинейные), действующие в банаховом пространстве X . Многие уравнения, встречающиеся в различных задачах, в том числе в задачах математической физики, удобно записывать с помощью операторов и изучать общие подходы к решению таких уравнений, используя тео-

рию операторов. Здесь будет изложен важный метод решения уравнений — метод последовательных приближений.

1. Неподвижные точки. Пусть оператор $A(x)$ переводит свою область определения D в себя. Это значит, что если $x \in D$, то $A(x) \in D$.

Рассмотрим уравнение

$$A(x) = x \quad (x \in D). \quad (1.1)$$

Решение этого уравнения называется *неподвижной точкой* оператора A .

К нахождению неподвижной точки оператора могут быть сведены различные уравнения. Приведем некоторые примеры.

Примеры 1 Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0, \quad (1.2)$$

где $f(x)$ есть вещественная функция вещественной переменной x .

Положим

$$A(x) = x + \lambda f(x),$$

где λ — некоторое число, отличное от нуля. Тогда уравнение (1.2) эквивалентно уравнению

$$A(x) = x.$$

2 Рассмотрим систему уравнений

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.3)$$

Введем вектор-функцию

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)),$$

где обозначено $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рассмотрим в пространстве R^n оператор

$$A(x) = x + \lambda f(x),$$

где λ — число, отличное от нуля. Тогда система уравнений (1.3) эквивалентна уравнению (1.1)

3 Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \lambda \int_0^1 K(t, \tau) x(\tau) d\tau + f(t), \quad (1.4)$$

где в отношении интегрального оператора мы сохраним предположения, сделанные в п. 1.2 (пример 2). Считая, что $f \in L^2$, мы обозначим через $A(x)$ оператор, стоящий в правой части равенства (1.4), и будем его рассматривать как оператор, действующий в пространстве L^2 . Тогда уравнение (1.4) запишется в виде (1.1).

2. Метод последовательных приближений. Будем решать уравнение (1.1) следующим способом. Зададим некоторый элемент $x_0 \in D$ и будем последовательно находить элементы x_n таким образом:

$$x_n = A(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.1)$$

Мы получим последовательность элементов, принадлежащих области D определения оператора $A(x)$. Предположим, что эта последовательность сходится к некоторому элементу $x \in D$:

$$\lim_n x_n = x. \quad (2.2)$$

Предположим далее, что можно перейти к пределу под знаком оператора в (2.1). Тогда получим $x = A(x)$. Таким образом, получается решение уравнения (1.1). Изложенный метод называется *методом последовательных приближений*. Нашей ближайшей задачей будет формулировка условий, при которых имеет место указанная сходимость.

3. Операторы сжатия. Оператор $A(x)$, действующий в банаховом пространстве X , называется *оператором сжатия*, если существует такое число $0 \leq \lambda < 1$, что

$$\|A(x_1) - A(x_2)\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\| \quad (3.1)$$

для любых двух элементов x_1 и x_2 пространства X , принадлежащих области определения оператора A .

Если A — линейный оператор, то, очевидно, он является оператором сжатия при условии $\|A\| < 1$.

Следующую теорему, доказанную Банахом, называют *принципом сжатых отображений*.

Теорема. Если оператор сжатия $A(x)$ отображает замкнутое множество F банахова пространства в себя, то он имеет единственную неподвижную точку.

К этой точке сходятся последовательные приближения (2.1) при любой начальной точке x_0 .

Доказательство. Из (2.1) в силу определения оператора сжатия имеем

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \lambda \|x_n - x_{n-1}\|. \quad (3.2)$$

При $n = 1$ получаем отсюда

$$\|x_2 - x_1\| \leq \lambda \|x_1 - x_0\|,$$

при $n = 2$

$$\|x_3 - x_2\| \leq \lambda \|x_2 - x_1\| \leq \lambda^2 \|x_1 - x_0\|.$$

Продолжая так далее, получим

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|. \quad (3.3)$$

Пусть m и n — натуральные числа, $m > n$. Тогда из неравенства (3.3) следует

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \dots \\ &\dots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \dots + \lambda^n) \|x_1 - x_0\| = \\ &= \frac{\lambda^n - \lambda^m}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Так как $\lambda < 1$, то мы можем для данного $\varepsilon > 0$ выбрать число N столь большим, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство

$$\frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\| < \varepsilon.$$

При таком выборе N мы получаем из (3.4), что при $m > n > N$

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной и в силу полноты пространства X сходящейся. Пусть $x = \lim x_n$. Так как множество F замкнуто и $x_n \in F$ ($n = 1, 2, \dots$), то $x \in F$.

Покажем, что x является неподвижной точкой оператора $A(x)$. Имеем

$$\|x - A(x)\| \leq \|x - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - A(x)\|.$$

На основании (2.1) это можно записать в виде

$$\begin{aligned} \|x - A(x)\| &\leq \|x - x_{n+1}\| + \|A(x_n) - A(x)\| \leq \\ &\leq \|x - x_{n+1}\| + \lambda \|x_n - x\|. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Так как $x_n \rightarrow x$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n , что

$$\|x - x_{n+1}\| + \lambda \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Из (3.5) имеем

$$\|x - A(x)\| < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует, что $x = A(x)$.

Для полного доказательства теоремы остается доказать единственность неподвижной точки. Если x и \bar{x} — две неподвижные точки, то

$$\|x - \bar{x}\| = \|A(x) - A(\bar{x})\| \leq \lambda \|x - \bar{x}\|.$$

Так как $\lambda < 1$, то это неравенство возможно лишь при $x = \bar{x}$. Теорема доказана.

4. **Линейные уравнения.** Теорема. Пусть A — линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X и определенный на всем X . Если $\|A\| < 1$, то уравнение

$$x = Ax + f \quad (f \in X) \quad (4.1)$$

имеет единственное решение при любом $f \in X$, которое получается методом последовательных приближений

$$x_{n+1} = Ax_n + f$$

из любой начальной точки x_0 .

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы предыдущего пункта.

Пример Рассмотрим интегральное уравнение (1.4). Если A есть оператор

$$Ax = \lambda \int_0^1 K(t, \tau) x(\tau) d\tau,$$

а M — число, определенное равенством (1.4.3):

$$M = \left(\int_0^1 \int_0^1 K^2(t, \tau) dt d\tau \right)^{1/2},$$

то при $\lambda < M^{-1}$ имеем $\|A\| < 1$ (см п. 1.4). Таким образом, при указанных λ интегральное уравнение (1.4) однозначно разрешимо при любой правой части $f \in L^2$ и решение может быть получено методом последовательных приближений.

АНАЛИЗ В ПРОСТРАНСТВАХ BV

Классическое дифференциальное исчисление имеет дело с непрерывными функциями. Введение понятия обобщенных функций и обобщенных производных дало возможность дифференцировать более широкие классы функций, в том числе разрывные. Однако существенное расширение класса функций, дав выигрыш в возможности дифференцирования, сузило другие возможности в операциях над функциями. Например, обобщенные функции нельзя перемножать. Поэтому если бы мы хотели перенести, например, обычную формулу дифференцирования произведения

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = u \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (1)$$

на разрывные функции, нам прежде всего следовало бы ответить на вопрос, как понимать произведение, стоящее в правой части. Аналогичный вопрос возникает, конечно, и вообще при дифференцировании суперпозиции функций.

Таким образом, требуется выделить такой класс функций, который содержал бы разрывные функции и обобщенные производные которых допускали бы умножение на функции этого класса. Оказывается, что такой класс образуют функции, производные которых являются мерами (класс, или *пространство*, BV).

В классе BV естественно рассматриваются и другие вопросы анализа. Хорошо известно, сколь важна в анализе и его приложениях формула Грина

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_S u \nu_i dS, \quad (2)$$

где D — некоторая область r -мерного пространства, S — его граница, ν_i — проекция единичного вектора нормали к S на ось x_i . К этой формуле мы прибегаем, например, при выводе основных уравнений математической физики. Если функция u разрывна и в левой части равенства (2) стоит ее обобщенная производная, то левая часть имеет смысл только в том случае, когда эта производная является мерой.

Заметим, что формулы (1) и (2) в том виде, как они записаны, неверны для разрывных функций. Изучение структуры функций, принадлежащих пространству BV , дает возможность правильно записать и обосновать эти и более общие формулы.

Так как класс BV содержит разрывные функции, то, в частности, он содержит и характеристические функции некоторых множеств. Тем самым выделяется класс множеств, именно таких, характеристические функции которых принадлежат BV . Такие множества называются *множествами с конечным периметром*. Оказывается, что этот класс весьма широк. В него входят, в частности, все множества (принадлежащие пространству R^n), граница которых имеет конечную $(n-1)$ -мерную меру, так что никаких условий гладкости границы не требуется. Эти множества замечательны тем, что, несмотря на отсутствие гладкости

грани, для них записывается формула Грина и могут быть поставлены граничные задачи для уравнений математической физики (что будет сделано в следующем разделе).

В этом разделе излагается теория функций, обобщенные производные которых являются мерами, и изучается структура этих функций. Полученные результаты применяются затем к построению анализа в классе разрывных функций: выводу формулы дифференцирования суперпозиции, обобщению формулы Грина, изучению разрывных аналитических функций и т. д.

Эти результаты используются затем для построения функциональных пространств. Здесь вводится пространство $BV^2(G)$ — пространство функций из BV , первые обобщенные производные которых суммируемы в квадрате в области G и след которых суммируем в квадрате на границе этой области (мы ограничились здесь только такими пространствами, хотя можно было бы рассматривать и суммируемость с другими степенями). Пространство BV^2 играет существенную роль при изучении граничных задач (раздел III) для уравнений математической физики, поставленных для областей G с конечным периметром.

В качестве иллюстрации непосредственного применения развитого здесь аппарата приводится вывод физических законов сохранения — законов сохранения массы и энергии — в классах BV . В частности, получаются различные виды уравнений гидродинамики, записанные для разрывных функций. Показано, что и в классах разрывных функций возможна недивергентная запись таких уравнений. Она вполне аналогична известной записи уравнений для гладких функций с тем отличием, что физические величины должны быть взяты либо как средние по объему, либо как средние по массе в зависимости от формы записи уравнения.

Как уже указывалось, построенный в этом разделе аппарат имеет различные приложения к уравнениям математической физики. В следующем разделе он будет использован в теории граничных задач для линейных и квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов. Ввиду ограниченности объема книги мы не включили приложений к гиперболическим уравнениям (для случая нелинейных уравнений первого порядка с ними можно познакомиться в статье [12]). Нелинейные гиперболические уравнения характерны тем, что даже при гладких начальных условиях появляются разрывные решения: начальные условия переносятся по характеристикам и при пересечении характеристик образуются разрывы решений. Изложенное в этом разделе исследование по структуре многообразия разрывов создает удобный аппарат для исследования подобного рода разрывных решений, принадлежащих пространству BV .

Ввиду ограниченности объема книги мы не могли привести все результаты по теории функций, обобщенные производные которых являются мерами, с полными доказательствами. Читатель, интересующийся этими вопросами, может найти опущенные доказательства в статьях, цитированных в тексте. Однако и в приведенном здесь виде эта теория вполне достаточна для понимания ее приложений.

Глава IV. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 1. ОБОБЩЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Различные приложения математического анализа и, в частности, приложения в математической физике потребовали обобщения понятия производной (см. [48]). При таком обобщении дифференцируемыми оказываются более широкие классы функций. Ниже будет изложено

это обобщение в таком виде, чтобы охватить дифференцирование разрывных функций.

1. Понятие обобщенной производной. Чтобы ввести понятие обобщенной производной, начнем с простейшего случая непрерывно дифференцируемой функции. Пусть $u(x)$ — функция, заданная на открытом множестве G пространства R^n и имеющая непрерывные первые производные. Обозначим через $C_1^0(G)$ класс непрерывно дифференцируемых финитных в G функций. При этом под финитной понимается функция, равная нулю вне некоторого ограниченного замкнутого подмножества множества G .

Пусть $\varphi \in C_1^0(G)$. Тогда интегрированием по частям получаем

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx = - \int \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (1.1)$$

Обозначим

$$f_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (1.2)$$

так что равенство (1.1) запишется в виде

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx = - \int \varphi f_i dx. \quad (1.3)$$

Это равенство имеет место для всех функций φ класса $C_1^0(G)$.

Ясно, что если заранее не предполагать, что f_i является производной (1.2), но считать, что равенство (1.3) справедливо для всех $\varphi \in C_1^0(G)$, то отсюда следует, что имеет место равенство (1.2).

Действительно, из (1.1) и (1.3) мы получаем

$$\int \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - f_i \right) dx = 0 \quad (1.4)$$

при всех $\varphi \in C_1^0(G)$. Ввиду произвольности φ отсюда заключаем, что выражение в круглых скобках равно нулю.

Таким образом, для непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$ можно наряду с обычным определением производной дать еще следующее: функция f_i называется производной функции u по переменной x_i , если имеет место равенство (1.3) при всех $\varphi \in C_1^0(G)$.

Это и есть тот путь, по которому можно пойти для обобщения понятия производной, так как указанное определение может быть применено не только к непрерывно дифференцируемым функциям. Итак, дадим следующее определение.

Определение 1. Пусть $u(x)$ и $f_i(x)$ — суммируемые функции на множестве G . Тогда если имеет место равенство (1.3) для всех $\varphi \in C_1^0(G)$, то функция $f_i(x)$ называется обобщенной производной функции u по переменной x_i и обозначается

$$f_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (1.5)$$

Если такая функция f_i существует, то мы будем говорить, что функция u имеет суммируемую на множестве G обобщенную производную $\partial u / \partial x_i$.

Можно показать, что функция f_i , входящая в определение 1, единственна (если она существует).

Определение, которое было дано, еще не является достаточно общим, так как не допускает дифференцирования разрывных функций. Оно может быть обобщено следующим образом.

Определение 2. Пусть $u(x)$ — функция, суммируемая на множестве G . Пусть, далее, существует регулярная конечная мера μ_i такая, что для любой функции $\varphi \in C_1^0(G)$ имеет место равенство

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx = - \int \varphi d\mu_i. \quad (1.6)$$

Тогда будем говорить, что *обобщенная производная функции u по переменной x_i является мерой*, и писать

$$\int_G f \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_G f d\mu_i \quad (1.7)$$

для любой функции f , суммируемой по мере μ_i .

В частности, полагая в (1.7) $f = \varphi$, где $\varphi \in C_1^0(G)$, получим из (1.6)

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx = - \int \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (1.8)$$

Легко установить связь между определениями 1 и 2. Именно, если f_i есть функция, входящая в определение 1, то, введя меру

$$\mu_i(E) = \int_E f_i dx, \quad (1.9)$$

мы можем записать (1.3) в виде (1.6).

Таким образом, определение 1 является частным случаем определения 2. В этом частном случае левая часть равенства (1.7) имеет смысл обычного интеграла по мере Лебега от произведения $f \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Ясно, что обобщенная производная может быть мерой, не являясь суммируемой функцией. Действительно, из (1.9) следует, что если производная $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ суммируема, то мера μ_i должна быть абсолютно непрерывной (см. п. II.3.3). Однако, как показывает следующий пример, существуют функции, обобщенные производные которых не являются абсолютно непрерывными мерами.

Пример. Рассмотрим одномерный случай ($n = 1$). Пусть $u(x)$ — функция, равная нулю при $x < 0$ и равная единице при $x > 0$. Введем меру μ , определенную на всех открытых подмножествах E вещественной оси следующим образом: $\mu(E) = 0$, если множество E не содержит точку нуля, и $\mu(E) = 1$, если нуль принадлежит множеству E . Тогда для любой функции $\varphi \in C_1^0$ имеем

$$\int \frac{d\varphi}{dx} u dx = \int_0^{\infty} \frac{d\varphi}{dx} dx = -\varphi(0) = - \int \varphi d\mu. \quad (1.10)$$

Отсюда мы получаем, что $\frac{du}{dx}$ есть мера, причем, очевидно, не абсолютно непрерывная

До сих пор мы говорили о суммируемых функциях $u(x)$ и конечных мерах μ . Так как все свойства, связанные с дифференцированием, являются локальными, то имеет смысл говорить о *локально суммируемых* функциях и о функциях, производные которых *локально являются мерами*. Это значит, что функция $u(x)$ задана на некотором открытом множестве D и для любой точки этого множества существует окрестность G такая, что на множестве G функция $u(x)$ суммируема и ее обобщенная производная $\frac{du}{dx_i}$ является мерой в смысле определения 2.

2 Обобщенная производная как функционал. Мы трактовали обобщенные производные как меры. Однако их можно рассматривать и как функционалы. Действительно, левая часть равенства (1.6)

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx \quad (2.1)$$

является линейным функционалом, определенным на функциях $\varphi \in C_1^0(G)$. Оценим его. В силу равенства (1.6) имеем

$$\left| \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx \right| \leq \sup_{x \in G} |\varphi(x)| v(\mu_i, G), \quad (2.2)$$

где, как и выше (см. п. II.1.3), $v(\mu_i, G)$ обозначает полную вариацию меры μ_i на множестве G .

Если мы введем в линейном пространстве $C_1^0(G)$ норму

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in G} |\varphi(x)|, \quad (2.3)$$

то это пространство будет нормированным (но не полным). В силу оценки (2.2) функционал (2.1) является ограниченным в этом пространстве. Оказывается, что это свойство является не только необходимым, но и достаточным, чтобы производная du/dx_i была мерой. Именно, имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а. Пусть $u(x)$ — функция, заданная и суммируемая на открытом множестве G . Тогда для того чтобы ее обобщенная производная du/dx_i была мерой, необходимо и достаточно, чтобы для всех $\varphi \in C_1^0(G)$ имела место оценка

$$\left| \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx \right| \leq K \|\varphi\|, \quad (2.4)$$

где K — константа, не зависящая от φ ; $\|\varphi\|$ задается равенством (2.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость следует из оценки (2.2). Докажем достаточность. Пусть имеет место оценка (2.4). Рассмотрим пространство C функций φ , заданных, ограниченных и непрерывных на множестве G с нормой (2.3). По теореме Банаха — Хана о продолжении линейных функционалов (см., например, [25]) существует линейный ограниченный функционал $F(\varphi)$, заданный на пространстве C и совпадающий с функционалом (2.1) на множестве $C_1^0(G)$. По теореме Рисса об общем виде линейных функционалов в пространстве непрерывных функций (см. п. III.2.5) мы можем утверждать, что существует регулярная конечная мера μ_i такая, что

$$-F(\varphi) = \int_G \varphi(x) d\mu_i \quad (\varphi \in C). \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что при $\varphi \in C_1^0(G)$ имеет место равенство (1.6). Теорема доказана.

Доказанная теорема дает удобный критерий для проверки того, что обобщенная производная данной функции u является мерой.

П р и м е р. Рассмотрим на плоскости R^2 квадрат $Q: 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$. Пусть $u(x)$ — характеристическая функция этого квадрата, т. е. $u(x) = 1$ при $x \in Q$ и $u(x) = 0$ при $x \notin Q$. Это разрывная функция. Покажем, что ее первые обобщенные производные являются мерами. Рассмотрим, например, производную du/dx_1 . Имеем для $\varphi \in C_1^0(R^2)$

$$\begin{aligned} F(\varphi) &\equiv \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} u dx = \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx = \int_0^1 dx_2 \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 = \\ &= \int_0^1 [\varphi(1, x_2) - \varphi(0, x_2)] dx_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|F(\varphi)| \leq 2 \|\varphi\|.$$

Таким образом, функционал $F(\varphi)$ ограничен и поэтому обобщенная производная du/dx_1 является мерой.

§ 2. МНОЖЕСТВА С КОНЕЧНЫМ ПЕРИМЕТРОМ

1. Множества с конечным периметром. Пусть E — ограниченное измеримое множество, принадлежащее пространству R^n ; $\chi(x)$ — его характеристическая функция. Дадим следующее определение (см. [69]).

О п р е д е л е н и е. Множество E называется *множеством с конечным периметром*, если обобщенные производные $d\chi/dx_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) его характеристической функции χ являются мерами.

Заметим, что мы рассматриваем функцию $\chi(x)$ как заданную во всем пространстве R^n . В соответствии с этим пространство $C_1^0(G)$, фигурирующее в определении 2 п. 1.1, есть пространство функций, заданных непрерывно, дифференциально и финитно в R^n . Мы будем его обозначать C_1^0 .

В силу определения 2 (п. 1.1) E является множеством с конечным периметром тогда и только тогда, когда существуют конечные меры ν_i ($i = 1, 2, \dots, n$) такие, что для любой функции $\varphi \in C_1^0$ имеет место равенство

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int \varphi d\nu_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.1)$$

Теорема дает критерий того, что множество E имеет конечный периметр.

Теорема. Для того чтобы ограниченное измеримое множество E имело конечный периметр, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа K такая, что

$$\left| \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq K \sup_x |\varphi(x)| \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

для всех функций $\varphi \in C_1^0$.

Множества с конечным периметром образуют весьма широкий класс. Ниже мы укажем некоторые критерии принадлежности к этому классу, а пока рассмотрим простой пример.

Пример. Пусть E — ограниченное открытое множество с кусочно-гладкой границей S , так что может быть применена формула Грина

$$\int_E \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_S \varphi \nu_i dH_{n-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.3)$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ — нормаль к S ; H_{n-1} — $(n-1)$ -мерная мера Хаусдорфа. Тогда из (1.3) получаем

$$\left| \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq \sup |\varphi(x)| H_{n-1}(S)$$

$i = 1, 2, \dots, n$). Следовательно, множество E имеет конечный периметр.

2. Множества ограниченной вариации. Мы укажем здесь еще одно необходимое и достаточное условие того, что множество E имеет конечный периметр. Им является ограниченность вариации множества, которая будет определена ниже. Для простоты мы будем рассматривать ограниченные множества.

Начнем с одномерного случая. Множество E вещественных чисел называется *множеством ограниченной вариации*, если с точностью до меры нуль оно состоит из конечного числа (N) замкнутых попарно не пересекающихся промежутков. Удвоенное число ($2N$) этих промежутков называется вариацией ($v(E)$) множества E .

Таким образом, E является множеством ограниченной вариации, если существуют числа

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_N < b_N$$

такие, что множество E состоит из почти всех точек промежутков

$$a_i \leq x \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

некоторого множества меры нуль.

Перейдем к многомерному случаю. Пусть E — множество в пространстве R^n . Пусть, далее, задан некоторый единичный вектор a . Мы определим вариацию множества E в направлении вектора a . С этой целью обозначим через Π_a плоскость, ортогональную к вектору a . Пусть

$l(x')$ — прямая, параллельная вектору a и проходящая через точку $x' \in \Pi_a$.

О п р е д е л е н и е 1. E называется *множеством ограниченной вариации в направлении вектора a* , если:

1) для почти всех $x' \in \Pi_a$ (по $(n-1)$ -мерной мере) множество $l(x') \cap E$ имеет ограниченную одномерную вариацию $v_a(x', E)$;

2) эта вариация $v(x', E)$ суммируема по плоскости Π_a , т. е. интеграл

$$v_a(E) = \int_{\Pi_a} v_a(x', E) dH_{n-1} \quad (2.2)$$

существует.

Число $v_a(E)$, определяемое равенством (2.2), называется *вариацией множества E в направлении вектора a* .

Для иллюстрации этого определения приведем следующие примеры.

П р и м е р 1. В трехмерном пространстве R^3 рассмотрим шар E с центром в начале координат радиусом единица. В качестве вектора a выберем единичный вектор в направлении оси x_3 . Тогда плоскость Π_a есть координатная плоскость $x_3 = 0$. Далее, $l(x')$ есть прямая, параллельная оси x_3 и проходящая через точку $x' = (x_1, x_2)$. Обозначим через K единичный круг $x_1^2 + x_2^2 < 1$. Тогда при $x' \in K$ прямая $l(x')$ пересекает шар E по некоторому интервалу, так что в этом случае $v_a(x', E) = 2$. При $x' \notin K$, очевидно, $v_a(x', E) = 0$. Следовательно,

$$v_a(E) = \int_K v_a(x', E) dx' = 2 \int_K dx' = 2\pi.$$

П р и м е р 2. В двумерном пространстве R^2 рассмотрим круговое кольцо E :

$$1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4.$$

В качестве вектора a выберем единичный вектор в направлении оси x_2 . В рассматриваемом случае Π_a есть ось x_1 :

$$v_a(x_1, E) = \begin{cases} 4 & \text{при } -1 < x_1 < 1, \\ 2 & \text{при } -2 < x_1 \leq -1, 1 < x_1 < 2, \\ 0 & \text{при } x_1 \geq 2, x_1 \leq -2. \end{cases}$$

Поэтому

$$v_a(E) = 4 \int_{-1}^1 dx_1 + 2 \left(\int_{-2}^{-1} dx_1 + \int_1^2 dx_1 \right) = 12.$$

Пусть e_1, e_2, \dots, e_n — ортонормированный базис пространства R^n .

О п р е д е л е н и е 2. Множество E называется *множеством ограниченной вариации*, если все вариации $v_{e_1}(E), v_{e_2}(E), \dots, v_{e_n}(E)$ конечны.

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а. Для того чтобы ограниченное измеримое множество E имело конечный периметр, необходимо и достаточно, чтобы оно имело ограниченную вариацию.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем доказательство достаточности. Пусть E имеет ограниченную вариацию. Рассмотрим сначала вариацию в направлении вектора e_1 . Обозначим через Π_1 координатную плоскость $x_1 = 0$. Тогда для почти всех $x' \in \Pi_1$ множество $l(x') \cap E$ имеет ограниченную одномерную вариацию. Поэтому по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_{l(x') \cap E} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 = \sum_{i=1}^N [\varphi(b_i, x') - \varphi(a_i, x')], \quad (2.3)$$

где $[a_i, b_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) — промежутки, из которых состоит множество $l(x') \cap E$ (с точностью до множества меры нуль), под знаком φ точка x записана в виде $x = (x_1, x')$.

Из равенства (2.3) получаем

$$\left| \int_{\mu(x') \cap E} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 \right| \leq \| \varphi \| v_{e_1}(x', E), \quad (2.4)$$

где $\| \varphi \| = \sup_x | \varphi(x) |$.

Проинтегрировав (2.4) по x' и пользуясь равенством (2.2), найдем

$$\int_{\Pi_1} \left| \int_{\mu(x') \cap E} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 \right| dx' \leq \| \varphi \| v_{e_1}(E). \quad (2.5)$$

Но по теореме Фубини

$$\int_E \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx = \int_{\Pi_1} dx' \int_{\mu(x') \cap E} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1.$$

Отсюда и из (2.5)

$$\left| \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx \right| \leq \| \varphi \| v_{e_1}(E). \quad (2.6)$$

Точно так же доказывается неравенство

$$\left| \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq \| \varphi \| v_{e_i}(E) \quad (2.7)$$

для индексов $i = 2, \dots, n$.

Пользуясь теоремой п. 1, заключаем, что множество E имеет конечный периметр. Достаточность доказана. (Доказательство необходимости см. [66, 71].)

Мы доказали, что множество ограниченной вариации имеет конечный периметр. Это дает некоторые простые критерии того, что данное множество имеет конечный периметр. Укажем один из них.

Пусть E — ограниченное измеримое множество. Будем проводить всевозможные прямые, параллельные осям координат. Если каждая из этих прямых пересекает границу множества E не более чем в N точках, где N — некоторое число, то множество E имеет ограниченную вариацию и, следовательно, конечный периметр.

В указанном критерии вместо всех прямых, параллельных осям координат, можно говорить о почти всех прямых. Это нужно понимать так: для каждого e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) на координатной плоскости $x_i = 0$ можно указать множество полной $(n-1)$ -мерной меры такое, что прямые, проходящие через точки этого множества и параллельные вектору e_i , пересекают границу множества E не более чем в N точках.

3. Алгебра множеств с конечным периметром. Теорема. Пусть S — ограниченное множество с конечным периметром. Тогда множество A всех его подмножеств, имеющих конечный периметр, образует алгебру.

Доказательство. В силу определения алгебры множеств (п. II.1.1) нам надлежит доказать, что если $E \in A$, то $S - E \in A$ и если $E_1, E_2 \in A$, то $E_1 \cup E_2 \in A$.

Пусть $E \in A$. Обозначим через χ_S и χ_E характеристические функции множеств S и E . Тогда $\chi_S - \chi_E$ есть характеристическая функция множества $S - E$. Так как обобщенные производные функций χ_S и χ_E являются мерами, то этим же свойством обладает и функция $\chi_S - \chi_E$. Следовательно, $S - E \in A$.

Пусть $E_1, E_2 \in A$. Тогда согласно теореме п. 2 множества E_1 и E_2 имеют ограниченную вариацию. Пусть $E = E_1 \cup E_2$. Покажем, что множество E также имеет ограниченную вариацию.

Пусть a — вектор, направленный по одной из координатных осей в R^n ; Π_a и $l(x')$ обозначают то же, что и в п. 2. Тогда при почти всех

$x' \in \Pi_a$ множества $l(x') \cap E_i$ имеют ограниченную вариацию $v_a(x', E_i)$ ($i = 1, 2$). Ясно, что множество $l(x') \cap E$ также имеет ограниченную вариацию $v_a(x', E)$, причем

$$v_a(x', E) \leq v_a(x', E_1) + v_a(x', E_2).$$

Отсюда и из (2.2) получаем

$$v_a(E) \leq v_a(E_1) + v_a(E_2).$$

Следовательно, множество E имеет ограниченную вариацию и поэтому $E \in A$. Теорема доказана.

4. Периметр множества. Пусть E — ограниченное множество с конечным периметром, $\chi(x)$ — его характеристическая функция. В силу определения п. 1 обобщенные производные $\partial\chi/\partial x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) являются мерами. Мы введем в рассмотрение обобщенный градиент

$$\nabla\chi = \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}, \frac{\partial\chi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\chi}{\partial x_n} \right). \quad (4.1)$$

Это есть мера со значениями в пространстве R^n . Полную вариацию этой меры (см. п. II.1.3) будем обозначать $|\nabla\chi|$.

О п р е д е л е н и е. Периметром $P(E)$ множества E называется число

$$P(E) = |\nabla\chi|(R^n), \quad (4.2)$$

т. е. полная вариация меры $\nabla\chi$ по всему пространству R^n . (Вместо R^n можно было бы взять любое множество, содержащее E вместе с границей.)

Поясним смысл введенного определения на простом примере. Пусть E — открытое множество с гладкой границей S . Тогда для любой функции $\varphi \in C_1^0$ имеем на основании (1.1.8)

$$\int \nabla\varphi\chi dx = - \int \varphi \nabla\chi dx, \quad (4.3)$$

что можно записать также в виде

$$\int_E \nabla\varphi dx = - \int \varphi \nabla\chi dx. \quad (4.4)$$

Применяя формулу Грина к левой части этого равенства, получим

$$\int_S \varphi \nu dH_{n-1} = \int \varphi \nabla\chi dx, \quad (4.5)$$

где ν — внутренняя нормаль к S . С помощью предельного перехода, учитывая регулярность рассматриваемых мер, нетрудно показать, что из (4.5) следует равенство

$$\int_{S \cap B} \nu dH_{n-1} = \int_B \nabla\chi dx, \quad (4.6)$$

где B — произвольное борелевское множество. Взяв полную вариацию левой и правой частей, получим

$$H_{n-1}(S \cap B) = |\nabla\chi|(B). \quad (4.7)$$

Отсюда при $B = R^n$ следует

$$H_{n-1}(S) = |\nabla\chi|(R^n). \quad (4.8)$$

В правой части, согласно данному выше определению, стоит периметр множества E . Таким образом,

$$P(E) = H_{n-1}(S). \quad (4.9)$$

Мы получили, что периметр открытого множества с гладкой границей есть мера Хаусдорфа границы.

Например, при $n = 3$ это площадь поверхности, ограничивающей множество, а при $n = 2$ — длина кривой.

Мы увидим в дальнейшем, что равенство (4.9) имеет место не только для рассмотренного частного случая множества с гладкой границей.

Оно справедливо для произвольного множества с конечным периметром, однако при этом придется несколько уточнить само понятие границы.

В качестве иллюстрации к понятию меры $\nabla\chi$ и ее вариации $|\nabla\chi|$ обратим внимание читателя на равенства (4.6) и (4.7). Аналогичные равенства при упомянутом выше обобщении понятия границы верны для произвольных множеств с конечным периметром.

§ 3. ПРОСТРАНСТВО BV

1. Пространство BV . Определение. Пространство $BV(G)$ есть пространство функций, заданных и суммируемых на открытом множестве G , первые обобщенные производные которых являются мерами.

Таким образом, функция $u(x)$ принадлежит пространству $BV(G)$, если она суммируема на множестве G и обобщенные производные du/dx_i ($i = 1, 2, \dots, n$) являются мерами.

Теорема п. 1.2 устанавливает критерий принадлежности функций к пространству $BV(G)$. Именно, суммируемая функция $u(x)$ принадлежит пространству $BV(G)$ тогда и только тогда, когда существует константа K такая, что

$$\left| \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx \right| \leq K \sup_{x \in G} |\varphi(x)| \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

для всех $\varphi \in C_1^0(G)$.

Пространство $BV(G)$ является линейным. Действительно, если $u_1, u_2 \in BV(G)$, то для этих функций имеет место неравенство (1.1) с некоторыми константами K_1 и K_2 . Поэтому для функции $u = u_1 + u_2$ имеет место неравенство (1.1) с константой $K = K_1 + K_2$. Следовательно, $u \in BV(G)$. Аналогично доказывается, что вместе с функцией $u(x)$ пространству $BV(G)$ принадлежит функция $au(x)$, где a — вещественное число.

В пространстве $BV(G)$ может быть введена норма следующим образом. Пусть $u \in BV(G)$. Будем обозначать через $|\nabla u|$ полную вариацию меры du/dx . Введем норму

$$\|u\| = \int_G |u(x)| dx + \sum_{i=1}^n \int_G \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx. \quad (1.2)$$

Интеграл во втором слагаемом справа в (1.2) следует понимать как интеграл по мере $|\nabla u|$ по множеству G , т. е. значение этой меры на множестве G .

Пользуясь определением полной вариации меры (п. II.1.3), можно проверить, что для нормы, определенной равенством (1.2), выполняются все аксиомы нормы. Можно также доказать, что пространство $BV(G)$ с нормой (1.2) является *полным* нормированным пространством.

В дальнейшем мы будем считать, что $G = R^n$, и в этом случае будем писать просто BV (вместо $BV(R^n)$). Кроме того, так как нас будет интересовать поведение функций в конечной части пространства (а не на бесконечности), то для дальнейшего достаточно считать, что рассматриваемые функции финитны.

Мы ввели пространство BV как пространство функций, обобщенные производные которых являются мерами. Однако существуют и другие подходы к определению пространства BV . Мы укажем сейчас некоторые из них.

2. Функции ограниченной вариации. Начнем со случая функции одной переменной. Пусть $u(x)$ — функция, заданная на всей вещест-

венной оси и финитная. Пусть, далее, $[a, b]$ — отрезок, вне которого эта функция равна нулю. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части гочками

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b \quad (2.1)$$

и составим сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)|. \quad (2.2)$$

Определение 1. Точная верхняя грань множества всевозможных сумм (2.2) называется *полной вариацией* функции $u(x)$ и обозначается $V(u)$.

Если

$$V(u) < +\infty, \quad (2.3)$$

то $u(x)$ называется *функцией ограниченной вариации*.

Нас в дальнейшем будут интересовать функции с точностью до их значений на множестве меры нуль. Поэтому мы введем следующее определение.

Определение 2. *Существенной полной вариацией* функции $u(x)$ называется число

$$\overline{V}(u) = \inf_z V(u + z), \quad (2.4)$$

где точная нижняя грань берется по всем функциям z , равным нулю почти всюду на отрезке $[a, b]$.

Можно доказать, что имеет место равенство $\overline{V}(u) = V(\bar{u})$, где

$$\bar{u}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} u(\xi) d\xi.$$

Если

$$\overline{V}(u) < +\infty, \quad (2.5)$$

то $u(x)$ называется *функцией существенно ограниченной вариации*.

Перейдем к многомерному случаю. Пусть $u(x)$ — функция, заданная в пространстве R^n и финитная. Будем рассматривать $u(x)$ как функцию переменной x_i при фиксированных других переменных. Обозначим $v_i(x_i')$ существенную полную вариацию функции $u(x)$ по x_i при фиксированной точке $x_i' = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Определение 3. Функция $u(x)$ называется *функцией существенно ограниченной вариации*, если существуют интегралы

$$\int v_i(x_i') dx_i' \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.6)$$

Например, пусть u есть функция двух переменных: $u = u(x_1, x_2)$. Тогда $v_1(x_2)$ есть существенная полная вариация функции $u(x_1, x_2)$ по переменной x_1 при фиксированной переменной x_2 ; $v_2(x_1)$ есть существенная полная вариация функции $u(x_1, x_2)$ по переменной x_2 при фиксированной переменной x_1 . Функция u имеет существенно ограниченную вариацию, если существуют интегралы

$$\int v_1(x_2) dx_2, \quad \int v_2(x_1) dx_1.$$

Обратим внимание читателя на то, что определение множества ограниченной вариации, данное в п. 2.2, есть частный случай определения 3, когда $u(x)$ является характеристической функцией этого множества.

Теперь мы можем указать новую характеристику пространства BV (см. [66, 71]).

Теорема. Пусть $u(x)$ — финитная суммируемая функция, заданная в R^n . Для того чтобы функция $u(x)$ принадлежала пространству

BV , необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела существенно ограниченную вариацию.

3 Интегральное условие. Укажем еще одно условие принадлежности функции к пространству BV , удобное в приложениях.

Теорема. Пусть $u(x)$ — финитная суммируемая функция, заданная в R^n . Для того чтобы функция $u(x)$ принадлежала пространству BV , необходимо и достаточно, чтобы существовала константа K такая, что для любого вектора $h \in R^n$ имеет место неравенство

$$\int |u(x+h) - u(x)| dx \leq K |h|. \quad (3.1)$$

4 Полная вариация градиента. Пусть задана функция $u(x)$, принадлежащая пространству BV . Тогда в силу определения п. 1 ее обобщенные производные являются мерами. Векторную меру

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \quad (4.1)$$

будем называть *обобщенным градиентом* функции $u(x)$. Обобщенный градиент есть мера со значениями в R^n . Ее полную вариацию будем обозначать $|\nabla u|$. Нас будет интересовать полная вариация, взятая по всему пространству R^n : $|\nabla u|(R^n)$.

Обозначим через E_t множество тех $x \in R^n$, для которых $u(x) > t$. Оказывается (см. [28, 68]), что почти при всех t множество E_t имеет конечный периметр $P(E_t)$ и имеет место равенство

$$|\nabla u|(R^n) = \int_{-\infty}^{\infty} P(E_t) dt. \quad (4.2)$$

§ 4. АППРОКСИМАТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Изучение структуры функций, принадлежащих пространству BV , а также некоторые необходимые для дальнейшего понятия (например, понятие следа функции на границе) связаны с аппроксимативным пределом функции. Здесь будут изложены необходимые сведения о нем.

1. Точки плотности. Пусть E — множество, принадлежащее пространству R^n и измеримое по мере Лебега. Обозначим через $K_r(x_0)$ шар: $|x - x_0| < r$.

Определение 1. Точка x_0 есть *точка плотности* множества E , если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|K_r(x_0) \cap E|}{|K_r(x_0)|} = 1, \quad (1.1)$$

и *точка разрежения* множества E , если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|K_r(x_0) \cap E^c|}{|K_r(x_0)|} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем $|E|$ обозначает меру Лебега множества E .

Пример 1. Пусть G — открытое множество, S — его граница. Тогда точки множества G являются его точками плотности, точки дополнения G^c до всего пространства — точками разрежения множества G . Точки границы S требуют специального исследования. Например, пусть G состоит из двух кругов, ограниченных окружностями, соприкасающимися внешним образом в точке P . Тогда P есть точка плотности множества G , остальные точки границы не являются ни точками плотности, ни точками разрежения множества G . Если множество G расположено между двумя окружностями, касающимися внутренним образом в точке P , то точка P является точкой разрежения множества G .

Определение 2. Пусть E и F — два измеримых множества и пусть выполняется условие

$$|K_r(x_0) \cap F| > 0 \quad (1.3)$$

при всех $r > 0$. Тогда если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|K_r(x_0) \cap E \cap F|}{|K_r(x_0) \cap F|} = 1, \quad (1.4)$$

то x_0 называется *точкой плотности множества E относительно множества F* ; если

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|K_r(x_0) \cap E \cap F|}{|K_r(x_0) \cap F|} = 0, \quad (1.5)$$

то x_0 называется *точкой разрежения множества E относительно множества F* .

В первом случае мы будем кратко называть x_0 *точкой F -плотности*, а во втором — *точкой F -разрежения множества E* .

Пример 2 Пусть E — окружность $x_1^2 + x_2^2 < 1$ в плоскости (x_1, x_2) , P — точка $(0, -1)$. Эта точка не является ни точкой плотности, ни точкой разрежения множества E . Она является *точкой F -плотности* множества E , если F — полуплоскость $x_1 > -1$, и *точкой F -разрежения* множества E , если F есть полуплоскость $x_1 < -1$.

2. Аппроксимативный предел. Пусть $f(x)$ — измеримая функция.

Определение 1. Число α называется *аппроксимативным пределом* функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ точка x_0 является *точкой плотности* множества $\{x: |f(x) - \alpha| < \varepsilon\}$.

Здесь $\{x: |f(x) - \alpha| < \varepsilon\}$ обозначает множество тех точек $x \in R^n$, для которых $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

Аппроксимативный предел функции мы будем обозначать так же, как и обычный предел:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha. \quad (2.1)$$

Такое обозначение вполне оправданно, так как легко показать, что если существует обычный предел функции, то существует и аппроксимативный предел, и оба они совпадают.

Определение 2. Число α называется *аппроксимативным пределом по множеству E* функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ точка x_0 является *точкой E -плотности* множества

$$\{x: |f(x) - \alpha| < \varepsilon\}.$$

Для так определенного предела мы будем применять обозначение

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f(x) = \alpha. \quad (2.2)$$

Ясно, что первое определение есть частный случай второго при $E = R^n$.

Пример Пусть $f(x)$ есть характеристическая функция круга $K: x_1^2 + x_2^2 < 1$; E — полуплоскость $x_2 < 1$, $x_0 = (0, 1)$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f(x) = 1$. Действительно, $\{x: |f(x) - 1| < \varepsilon\}$ есть круг K . Заметим, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ в рассматриваемом случае не существует.

Мы будем рассматривать также *аппроксимативный предел* вектор-функций $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$: $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f(x) = \alpha$, где α — p -мерный вектор. Определения 1 и 2 переносятся на этот случай без изменения, но только $| \quad |$ обозначает не абсолютную величину, а норму в R^n .

3. Основные теоремы о пределах. Теорема 1. Если существует *аппроксимативный предел* $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f(x)$, то этот предел единственный.

Доказательство. Пусть существуют два числа α и β , которым равен указанный предел, и пусть $\alpha \neq \beta$. Мы получим противоречие. Действительно, пусть для определенности $\alpha < \beta$ и $\varepsilon > 0$ столь малое число, что $\alpha + \varepsilon < \beta - \varepsilon$. Тогда множества $A = \{x: |f(x) - \alpha| < \varepsilon\}$ и $B =$

$= \{x: |f(x) - \beta| < \varepsilon\}$ не имеют общих точек. Поэтому имеют место следующие соотношения:

$$1 \geq \frac{|K_r(x_0) \cap (A \cup B) \cap E|}{|K_r(x_0) \cap E|} = \\ = \frac{|K_r(x_0) \cap A \cap E|}{|K_r(x_0) \cap E|} + \frac{|K_r(x_0) \cap B \cap E|}{|K_r(x_0) \cap E|} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 2.$$

Это противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. Пусть в окрестности некоторой точки $u_0 \in R^p$ задана функция $f(u)$, непрерывная в точке u_0 . Пусть, далее, $u(x)$ — функция, заданная в окрестности точки $x_0 \in R^n$, и существует аппроксимативный предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} u(x) = u_0. \quad (3.1)$$

Тогда имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f(u(x)) = f(u_0), \quad (3.2)$$

причем указанный аппроксимативный предел существует.

Доказательство. Ввиду непрерывности функции $f(u)$ в точке u_0 для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$, если $|u - u_0| < \delta$. Пусть

$$A_\varepsilon = \{x: |f(u(x)) - f(u_0)| < \varepsilon\}, \\ B_\delta = \{x: |u(x) - u_0| < \delta\}.$$

Тогда $B_\delta \subset A_\varepsilon$. Так как x_0 есть точка E -плотности множества B_δ , то она является также точкой E -плотности множества A_ε . Теорема доказана.

Как следствие из этой теоремы, взяв в качестве $f(u)$ функции $u_1 + u_2$, $u_1 u_2$, u_1/u_2 , получим теоремы об аппроксимативном пределе суммы, произведения и частного, которые формулируются так же, как и теоремы об обычных пределах.

Установим теперь связь между аппроксимативными пределами по различным множествам. Пусть A, B и C — множества из R^n , $f(x)$ — функция, заданная в некоторой окрестности точки x_0 .

Теорема 3. Если $A \subset B$ и x_0 не является точкой разрежения множества A , то из существования аппроксимативного предела $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in B} f(x)$ следует существование аппроксимативного предела $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x)$ и равенство этих пределов.

Доказательство. Обозначим $\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in B} f(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$,

$$E_\varepsilon = \{x: |f(x) - \alpha| < \varepsilon\}. \quad (3.3)$$

Тогда по условию

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|E_\varepsilon \cap K_r(x_0) \cap B|}{|K_r(x_0) \cap B|} = 1. \quad (3.4)$$

Обозначим через E'_ε дополнение множества E_ε до пространства R^n . Тогда из (3.4)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|E'_\varepsilon \cap K_r(x_0) \cap B|}{|K_r(x_0) \cap B|} = 0. \quad (3.5)$$

Следовательно,

$$\frac{|E'_\varepsilon \cap K_r(x_0) \cap A|}{|K_r(x_0) \cap A|} \leq \frac{|E'_\varepsilon \cap K_r(x_0) \cap B|}{|K_r(x_0) \cap B|} \cdot \frac{|K_r(x_0) \cap B|}{|K_r(x_0) \cap A|} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Таким образом, x_0 есть точка A плотности множества E и поэтому $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = \alpha$. Теорема доказана.

Непосредственным следствием этой теоремы является следующая теорема.

Теорема 4. Если x_0 не является точкой разрежения множества $A \cap B$, то из существования аппроксимативных пределов

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_0, x \in B} f(x)$$

следует, что эти пределы равны между собой.

Теорема 5. Если $C = A \cup B$, существуют аппроксимативные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in B} f(x)$ и если эти пределы равны между собой, то существует $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in C} f(x)$.

Доказательство. Пусть α — общая величина указанных пределов по множествам A и B , E_ϵ задается равенством (3.3) и E — дополнение множества E_ϵ до пространства R^n . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{|K_r(x_0) \cap E'_\epsilon \cap C|}{|K_r(x_0) \cap C|} &\leq \frac{|K_r(x_0) \cap E'_\epsilon \cap A|}{|K_r(x_0) \cap A|} \frac{|K_r(x_0) \cap A|}{|K_r(x_0) \cap C|} + \\ &+ \frac{|K_r(x_0) \cap E'_\epsilon \cap B|}{|K_r(x_0) \cap B|} \frac{|K_r(x_0) \cap B|}{|K_r(x_0) \cap C|} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 6. Если x_0 не является точкой разрежения множества A , $A \subset B$ и x_0 есть точка B -разрежения множества $B - A$, то из существования аппроксимативного предела $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x)$ следует существование аппроксимативного предела $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in B} f(x)$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in B} f(x)$ и E_ϵ задается равенством (3.3). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{|K_r(x_0) \cap E'_\epsilon \cap B|}{|K_r(x_0) \cap B|} &\leq \frac{|K_r(x_0) \cap E'_\epsilon \cap A|}{|K_r(x_0) \cap A|} \frac{|K_r(x_0) \cap A|}{|K_r(x_0) \cap B|} + \\ &+ \frac{|K_r(x_0) \cap B - A|}{|K_r(x_0) \cap B|} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

4. Регулярные точки. Пусть $f(x)$ — функция одной переменной и ограниченной вариации. Тогда в каждой точке x_0 существуют два предельных значения:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0 + 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = f(x_0 - 0).$$

Если они равны между собой, то такую точку можно назвать точкой непрерывности функции $f(x)$, так как, изменив функцию в этой точке, мы сделаем ее непрерывной. Если указанные предельные значения не равны между собой, то точка x_0 есть точка скачка функции. Таким образом, функции ограниченной вариации в случае одной независимой переменной имеют либо точки непрерывности, либо точки скачка. Такая структура этих функций чрезвычайно важна для различных исследований.

В одномерном случае есть только одно направление (с точностью до знака), и поэтому получалось два указанных выше предельных значения. При переходе к многомерному случаю мы сталкиваемся с тем обстоятельством, что направлений много, и на первый взгляд не ясно, ка-

кому из них отдать предпочтение. В действительности оказывается, что можно выделить одно направление (с точностью до знака) и притом совершенно естественным образом. Точнее это нужно понимать так. Имеются следующие возможности. Либо в заданной точке x_0 существует аппроксимативный предел функции, и поэтому, изменив значение этой функции в точке x_0 , мы получим, что она аппроксимативно непрерывна. Либо если x_0 не является такой точкой, то найдется $(n-1)$ -мерная плоскость (и притом только одна) такая, что в этой точке существуют аппроксимативные пределы по каждому из полупространств, на которые указанная плоскость разобьет пространство R^n . Нормаль к этой плоскости и есть то направление, о котором шла речь.

Точки двух указанных видов мы будем называть регулярными. Кроме двух указанных возможностей, есть, конечно, и третья, состоящая в том, что отсутствуют указанные пределы, т. е. точка x_0 не является регулярной. Но оказывается, что для широкого класса функций, в том числе и для функций из пространства BV (см. п. 5.5), множество точек, не являющихся регулярными, столь мало по мере (имеет $(n-1)$ -мерную меру нуль), что оно несущественно для исследований, которые будут проводиться.

Перейдем к точным определениям. Пусть a — единичный вектор в R^n . Обозначим $\Pi_a(x_0)$ полупространство $(x - x_0, a) > 0$. Для функции $f(x)$, заданной в окрестности точки x_0 , введем обозначение

$$f_a(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Pi_a(x_0)} f(x). \quad (4.1)$$

Определение 1. Точка x_0 называется *регулярной точкой* функции $f(x)$, если найдется такой единичный вектор a , что существуют аппроксимативные пределы $f_a(x_0)$ и $f_{-a}(x_0)$.

Вектор a будем называть *определяющим*.

Теорема. Пусть x_0 — регулярная точка функции $f(x)$, a — определяющий вектор.

Тогда: 1) если $f_a(x_0) = f_{-a}(x_0)$, то существует аппроксимативный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и для любого единичного вектора b имеет место равенство

$$f_b(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x); \quad (4.2)$$

2) если $f_a(x_0) \neq f_{-a}(x_0)$, то вектор a определен однозначно (с точностью до знака).

Доказательство. Если $f_a(x_0) = f_{-a}(x_0)$, то существование аппроксимативного предела $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ следует из теорем 5 и 6.

Если существует указанный предел, то на основании теоремы 3 существует $f_b(x_0)$ для любого единичного вектора b и имеет место равенство (4.2).

Пусть

$$f_a(x_0) \neq f_{-a}(x_0). \quad (4.3)$$

Покажем, что не существует $f_b(x_0)$, если только единичный вектор b не совпадает с вектором $\pm a$. Предположим противное. Ясно, что x_0 не является точкой разрежения множеств $\Pi_a(x_0) \cap \Pi_b(x_0)$ и $\Pi_{-a}(x_0) \cap \Pi_b(x_0)$. Поэтому на основании теоремы 4 $f_a(x_0) = f_b(x_0)$, $f_{-a}(x_0) = f_b(x_0)$, что противоречит (4.3).

Теорема доказана.

Будем говорить, что функция $f(x)$ аппроксимативно непрерывна в точке x_0 , если существует аппроксимативный предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad (4.4)$$

равный $f(x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (4.5)$$

Если функция $f(x)$ суммируема, то она почти всюду аппроксимативно непрерывна (см., например, [45]).

В точках x_0 , в которых существует аппроксимативный предел (4.4), но не имеет места равенство (4.5), мы можем изменить значение функции так, что это равенство будет иметь место. При этом, как было указано выше, мы изменим суммируемую функцию на множестве меры нуль.

Дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2. 1) если в точке x_0 существует аппроксимативный предел (4.4), то эту точку мы будем называть *точкой аппроксимативной непрерывности* функции $f(x)$;

2) регулярную точку, не являющуюся точкой аппроксимативной непрерывности, будем называть *точкой скачка*. Если a — определяющий вектор в регулярной точке x_0 , то число $|f_a(x_0) - f_{-a}(x_0)|$ будем называть скачком функции $f(x)$, а вектор $[f_a(x_0) - f_{-a}(x_0)]a$ — *направленным скачком*.

Ясно, что в каждой регулярной точке скачок и направленный скачок однозначно определены.

Оба определения, данные в этом пункте, дословно переносятся на вектор-функции.

Пример Рассмотрим кусочно-постоянную функцию $f(x)$ на плоскости $x = (x_1, x_2)$:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{при } |x| < 1, \\ \beta & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

где α и β — вещественные числа. Проверим, что все точки плоскости являются регулярными точками этой функции. Для точек вне окружности $S: |x| = 1$, это очевидно. Пусть $x_0 \in S$. Обозначим через a единичный вектор, направленный по радиусу окружности, проходящему через точку x_0 . Касательная к окружности S , проведенная в точке x_0 , делит плоскость на две части: $\Pi_a(x_0)$ и $\Pi_{-a}(x_0)$. Непосредственно проверяется существование аппроксимативных пределов $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Pi_a(x_0)} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Pi_{-a}(x_0)} f(x)$, причем

первый из них равен β , а второй α . Таким образом, $f_a(x_0) = \beta$, $f_{-a}(x_0) = \alpha$. Если $\alpha \neq \beta$, то все точки окружности S являются точками скачка функции $f(x)$, причем скачок функции $f(x)$ равен $|\beta - \alpha|$.

§ 5. СТРУКТУРА ФУНКЦИЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ПРОСТРАНСТВУ BV

1. Существенная граница. Пусть E — измеримое множество, принадлежащее пространству R^n . Введем следующие обозначения: E_* — множество точек плотности множества E ; E^* — дополнение к множеству точек его разрежения.

О п р е д е л е н и е. Множество $\partial E = E^* - E_*$ называется *существенной границей* множества E .

Таким образом, точка x принадлежит существенной границе множества E тогда и только тогда, когда она не является ни точкой плотности, ни точкой разрежения этого множества.

Во многих случаях существенная граница совпадает с границей множества. Например, пусть E — шар $|x - x_0| < r$. Тогда сфера $|x - x_0| = r$ является границей множества E и его существенной границей.

Однако не всегда граница и существенная граница множеств совпадают. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть множества, приведенные в примере 1 п. 4.1.

Приведем еще один пример. Пусть E — множество на плоскости R^2 , состоящее из точек круга $x_1^2 + x_2^2 < 1$ без точек, принадлежащих поло-

жительной полуоси x_1 . Границей множества E является объединение точек окружности $S: x_1^2 + x_2^2 = 1$ и радиуса $x_2 = 0, 0 \leq x_1 < 1$. Существенная граница не совпадает с границей, так как все точки указанного радиуса являются точками плотности множества E , и поэтому существенной границей этого множества является окружность S .

2. Нормаль. Мы выделили точки плотности и точки разрежения множества E , т. е. такие точки, в которых имеют место равенства (4.1.1) и (4.1.2). Остальные точки образуют существенную границу S . Можно и на ней выделить точки по тому же принципу, применяя, однако, уже не шары, а *полушары*.

Введем следующие обозначения. Пусть a — единичный вектор в пространстве R^n . Через $K_{r,a}(x_0)$ будем обозначать полушар

$$|x - x_0| \leq r, \quad (x - x_0, a) > 0. \quad (2.1)$$

Первое из неравенств (2.1) описывает шар $K_r(x_0)$ с центром в точке x_0 радиусом r . Второе указывает на то, что взяты только те точки x этого шара, для которых радиус $x - x_0$, проходящий через точку x , образует с вектором a острый угол.

О п р е д е л е н и е [65]. Пусть E — измеримое множество, принадлежащее пространству R^n ; S — его существенная граница, $x_0 \in S$. Пусть для некоторого единичного вектора a имеют место равенства:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|K_{r,a}(x_0) \cap E|}{|K_{r,a}(x_0)|} = 1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|K_{r,-a}(x_0) \cap E|}{|K_{r,-a}(x_0)|} = 0. \quad (2.2)$$

Тогда будем говорить, что в точке x_0 существует *нормаль* к S . При этом вектор a будем называть *внутренней нормалью*, а вектор $-a$ *внешней нормалью*.

Мы увидим в дальнейшем, что внутренняя (внешняя) нормаль в точке x_0 единственна (если она существует).

Пример Пусть E — шар в пространстве $R^n: |x| \leq 1$. Пусть, далее, x_0 — точка сферы $S: |x| = 1$. Непосредственно проверяется, что равенство (2.2) будет иметь место, если в качестве a взять единичный вектор, направленный по радиусу сферы из точки x_0 к центру.

Таким образом, для сферы внутренняя нормаль направлена по радиусу к центру.

В случае, когда граница множества E гладкая, нормаль может быть выражена аналитически по уравнению границы. Рассмотрим, например, случай, когда E задается как множество точек $x \in R^n$, удовлетворяющих неравенству

$$f(x) > 0, \quad (2.3)$$

где $f(x)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что во всех точках x , удовлетворяющих равенству

$$f(x) = 0, \quad (2.4)$$

выполняется условие

$$\nabla f(x) \neq 0, \quad (2.5)$$

где $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ — градиент функции f . Тогда граница S множества E описывается уравнением (2.4), и в каждой точке $x_0 \in S$ существует нормаль. Вектор a внутренней нормали в точке x_0 задается равенством

$$a = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}. \quad (2.6)$$

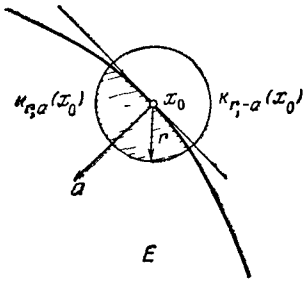


Рис. 2

В приведенном выше примере

$$f(x) = 1 - |x|^2.$$

Так как понятие нормали является локальным, то достаточно, чтобы все условия (2.3)—(2.5) выполнялись в некоторой окрестности точки x_0 .

Укажем связь между введенными здесь понятиями и точками скачка характеристической функции множества E (см. п. 4.4).

Т е о р е м а. *Для того чтобы точка x_0 принадлежала существенной границе S множества E и в этой точке существовала нормаль, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была точкой скачка характеристической функции множества E .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\chi(x)$ — характеристическую функцию множества E . Покажем, что первое из равенств (2.2) эквивалентно существованию аппроксимативного предела $\chi(x_0)$ и равенству

$$\chi_a(x_0) = 1. \quad (2.7)$$

Действительно, согласно (4.4.1)

$$\chi_a(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Pi_a(x_0)} \chi(x). \quad (2.8)$$

По определению аппроксимативного предела (см. п. 4.2, определение 2) равенство (2.8) означает, что x_0 является точкой Π_a — плотности множества $E = \{x: |\chi(x) - 1| < \varepsilon\}$. Последнее в силу определения 2 п. 4.1 может быть записано в виде

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|K_r(x_0) \cap E \cap \Pi_a(x_0)|}{|K_r(x_0) \cap \Pi_a(x_0)|} = 1.$$

Но это совпадает с первым из равенств (2.2), так как

$$K_r(x_0) \cap \Pi_a(x_0) = K_{r,a}(x_0).$$

Точно так же доказывается, что второе из равенств (2.2) эквивалентно существованию аппроксимативного предела $\chi_{-a}(x_0)$ и равенству

$$\chi_{-a}(x_0) = 0. \quad (2.9)$$

Таким образом, если точка x_0 принадлежит существенной границе S множества E и в этой точке существует нормаль, то x_0 является точкой скачка функции $\chi(x)$.

Обратно, пусть x_0 есть точка скачка функции $\chi(x)$. Тогда в силу определения регулярной точки для некоторого вектора a существуют аппроксимативные пределы $\chi_a(x_0)$ и $\chi_{-a}(x_0)$. Кроме того, так как x_0 есть точка скачка, то эти пределы не равны между собой (см. п. 4.4, определение 2). Поэтому x_0 не является ни точкой плотности множества E , ни точкой разрежения, так что $x_0 \in S$.

Функция $\chi(x)$ принимает два значения: 1 и 0. Легко показать, что числа $\chi_a(x_0)$ и $\chi_{-a}(x_0)$ могут быть только нулем или единицей. Поэтому (с точностью до знака) имеют место равенства (2.7) и (2.9). Следовательно, имеют место равенства (2.2), и вектор a является внутренней нормалью. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы видно, что нормаль является определяющим вектором для функции χ (см. определение 1, п. 4.4). Поэтому внутренняя (или внешняя) нормаль единственна (п. 4.4, теорема).

3. Существование нормали. Если E — открытое множество в R^n с гладкой границей (2.4) и выполняется условие (2.5), то в каждой точке границы существует нормаль. Если граница кусочно-гладкая, т. е. состоит из конечного числа гладких частей, то на множествах, где «стыкуются» эти гладкие части, нормаль может не существовать. Как правило, во всех тех вопросах математической физики, в которых используется нормаль, сама постановка вопроса может быть сформулирована так, что достаточно наличие нормали не в каждой точке границы, а почти всюду по $(n-1)$ -мерной мере. Поэтому для приложений

в математической физике важны такие множества, на границе (или, точнее, на существенной границе) которых почти всюду по $(n-1)$ -мерной мере существует нормаль. Оказывается, что этим свойством обладают множества с конечным периметром.

Теорема [70, 12]. Пусть E — множество с конечным периметром, S — его существенная граница. Тогда почти всюду по $(n-1)$ -мерной мере на S существует нормаль.

4. Простые функции. При определении понятия интеграла (см. гл. II) мы уже встречались с простыми функциями (п. II.2.2). Именно рассматривались простые измеримые функции. Нас будут сейчас интересовать простые функции, принадлежащие пространству BV . Мы изучим структуру этих функций.

Пусть $f(x)$ — простая функция:

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^m a_k \chi_k(x), \quad (4.1)$$

где a_k — вещественные числа; $\chi_k(x)$ — характеристические функции множеств $E_k \subset R^n$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Мы будем предполагать, что все множества E_k ограничены и попарно не пересекаются. Если к множествам E_k присоединить еще множество $E_0 = R^n - \bigcup_{k=1}^m E_k$, то вся совокупность множеств

$$E_0, E_1, \dots, E_m \quad (4.2)$$

образует разбиение пространства R^n :

$$R^n = \bigcup_{k=0}^m E_k, \quad E_k \cap E_l = \emptyset \quad (4.3)$$

$$(k, l = 0, 1, \dots, m; k \neq l).$$

При формулировке необходимого условия в следующей теореме мы будем считать, что все числа a_k , входящие в равенство (4.1), различны. В остальном в этой теореме и в дальнейшем их можно считать произвольными вещественными числами.

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(x)$, заданная равенством (4.1), принадлежала пространству BV , необходимо и достаточно, чтобы множества (4.2) имели конечный периметр.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in BV$. Тогда мы можем воспользоваться равенством (3.4.2), в котором интеграл имеет конечное значение. Но это возможно только в том случае, когда все множества (4.2) имеют конечный периметр (конечность периметра множества E_0 является следствием того, что остальные множества имеют конечный периметр).

Достаточность. Если все множества (4.2) имеют конечный периметр, то $\chi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) принадлежат пространству BV . Ввиду линейности этого пространства (п. 3.1) к нему принадлежит и функция $f(x)$. Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем предполагать, что множества (4.2) имеют конечный периметр.

Изучим свойство разбиения пространства R^n , заданного равенством (4.3). Рассмотрим сначала простой пример. Пусть $n = 2$. На плоскости проведем конечное число прямых, параллельных осям координат. Обозначим все полученные при этом ограниченные прямоугольники через E_1, E_2, \dots, E_m , а всю оставшуюся часть плоскости через E_0 . Полученное так разбиение плоскости обладает следующими свойствами. Если считать вершин прямоугольников (множество одномерной меры), то каждая точка плоскости либо является внутренней точкой одного из множеств E_k ($k = 0, 1, \dots, m$), либо принадлежит линии, разделяющей какие-нибудь два из этих множеств, например E_k и E_l .

В последнем случае из каждой такой точки можно провести внутренние нормали к границам множеств E_k и E_l — векторы, параллельные между собой и противоположно направленные.

Оказывается, что таким же свойством обладает разбиение (4.3) в общем случае произвольных множеств E_k с конечным периметром. При этом только роль внутренних точек играют точки плотности множеств. Множество точек плотности множества E_k мы, как и выше, будем обозначать через E_{k^*} . Имеет место следующая теорема [12].

Теорема 2 (о структуре разбиения). Пусть задано разбиение (4.3) пространства R^n множествами с конечным периметром. Тогда имеет место равенство

$$R^n = \left(\bigcup_{k=0}^m E_{k^*} \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{k, l=0 \\ (k \neq l)}}^m \Gamma_{kl} \right) \cup F, \quad (4.4)$$

где Γ_{kl} принадлежит общей части существенных границ множеств E_k и E_l ; $H_{n-1}(F) = 0$. Множества, входящие в правую часть равенства (4.4), попарно не пересекаются. В каждой точке $x_0 \in \Gamma_{kl}$ (если это множество не пусто) существуют внутренние нормали v_k и v_l к существенным границам множеств E_k и E_l , причем $v_k + v_l = 0$.

Теорема 3 (о структуре простых функций). Пусть $f(x)$ — простая функция, принадлежащая пространству BV и заданная равенством (4.1). Тогда все точки пространства R^n , за исключением, быть может, точек множества $(n-1)$ -мерной меры нуль, являются регулярными точками этой функции. Точки множества E_{k^*} ($k = 0, 1, \dots, m$) являются точками аппроксимативной непрерывности, а точки множеств Γ_{kl} (см. (4.4)) при $a_k \neq a_l$ — точками скачка функции $f(x)$, причем скачок функции в этих точках равен $|a_k - a_l|$.

Доказательство. Воспользуемся разложением (4.4). Пусть $x_0 \in E_{k^*}$. Тогда непосредственно из определения аппроксимативного предела следует, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \chi_k(x) = 1. \quad (4.5)$$

Ясно, что точка x_0 является точкой разрежения дополнения до множества E_k , а поэтому и всех множеств E_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m; i \neq k$). Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \chi_i(x) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m; i \neq k). \quad (4.6)$$

Поэтому существует аппроксимативный предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_k. \quad (4.7)$$

Таким образом, точки множества E_{k^*} ($k = 0, 1, \dots, m$) являются точками аппроксимативной непрерывности функции $f(x)$.

Рассмотрим теперь точку x_0 , принадлежащую множеству Γ_{kl} . Пусть $a = v_k$ (см. формулировку теоремы 2). Тогда согласно равенствам (2.7) и (2.9) имеем:

$$\chi_{k, a}(x_0) = 1, \quad \chi_{k, -a}(x_0) = 0; \quad (4.8)$$

$$\chi_{l, a}(x_0) = 0; \quad \chi_{l, -a}(x_0) = 1. \quad (4.9)$$

Обозначим $\chi(x) = \chi_k(x) + \chi_l(x)$. Очевидно, $\chi(x)$ есть характеристическая функция множества $E_k \cup E_l$. Из (4.8) и (4.9)

$$\chi_a(x_0) = \chi_{-a}(x_0) = 1. \quad (4.10)$$

На основании теорем 5 и 6 п. 4.3 из (4.10) следует, что существует аппроксимативный предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \chi(x) = 1. \quad (4.11)$$

Это значит, что x_0 есть точка плотности множества $E_k \cup E_l$ и поэтому является точкой разрежения множеств E_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m; i \neq k; i \neq l$), так что

$$\chi_{i, \pm a}(x_0) = 0 \quad (i \neq k, i \neq l). \quad (4.12)$$

Пользуясь равенствами (4.8), (4.9) и (4.12), из (4.1) получаем, что существуют аппроксимативные пределы $f_a(x_0)$ и $f_{-a}(x_0)$ и имеют место равенства

$$f_a(x_0) = a_k, \quad f_{-a}(x_0) = a_l.$$

Таким образом, точка $x_0 \in \Gamma_{kl}$ есть точка скачка функции $f(x)$, при этом скачок равен $|a_k - a_l|$.

Мы показали, что все точки пространства R^n , за исключением точек множества F (см. (4.4)), являются регулярными точками функции $f(x)$. Так как $H_{n-1}(F) = 0$, то все утверждения теоремы доказаны.

5. Структура функций, принадлежащих пространству BV . Пусть $f(x)$ — функция, заданная в R^n и принадлежащая пространству BV . По самому определению пространства BV как множества суммируемых функций, обобщенные производные которых являются мерами, функция $f(x)$ задается с точностью до значений на множестве n -мерной меры нуль

Для различных целей: дифференцирование, интегральные формулы, постановка граничных задач и т. д. — эти функции должны быть доопределены так, чтобы они были известны всюду, за исключением, быть может, множества $(n-1)$ -мерной меры нуль. Это значит, например, что если $n = 3$, то существенны значения функций на двумерных поверхностях и не существенны их значения на конечном или счетном числе линий (и вообще на множестве двумерной меры нуль).

Дадим некоторые пояснения (более подробно эти вопросы, связанные с дифференцированием, рассматриваются в дальнейшем в этой главе, с интегральными формулами — в гл. V, с граничными задачами — в гл. VII и VIII). При дифференцировании функций, принадлежащих пространству BV , мы получаем меры, которые могут быть сосредоточены на множествах n -мерной меры нуль. Например, производные характеристических функций множеств с конечным периметром сосредоточены на существенных границах этих множеств. Это же относится и к простым функциям, рассмотренным в предыдущем пункте. Оказывается, что меры, которые получаются дифференцированием функций из BV , обращаются в нуль на множествах $(n-1)$ -мерной меры нуль. Для построения аппарата дифференцирования в пространствах BV нам понадобится интегрировать функции $f \in BV$ по мерам — производным функций из BV . Поэтому для нас будут существенны значения функций f всюду, за исключением, быть может, множества $(n-1)$ -мерной меры нуль.

Интегральные формулы (например, формула Грина), связывающие интегралы от производных по некоторым n -мерным множествам с интегралами от функций по существенным границам этих множеств, требуют определения значений этих функций на указанных границах с точностью до значений на множествах $(n-1)$ -мерной меры нуль. С аналогичной ситуацией мы встречаемся и при постановке граничных задач, когда нужно задавать значения искомых функций на границах n -мерных областей, и во многих других случаях.

Итак, перед нами возникает вопрос, как из класса эквивалентных между собой функций, т. е. функций, отличающихся друг от друга на множестве n -мерной меры нуль, выбрать представителя, определенного с точностью до значений на множестве $(n-1)$ -мерной меры нуль. Во всех упомянутых выше случаях такой выбор можно производить с помощью аппроксимативного предела. Мы уже говорили о том, что суммируемые функции аппроксимативно непрерывны почти всюду по

n -мерной мере. Поэтому, считая функцию равной ее аппроксимативно-му пределу во всех точках, в которых он существует, мы получим функцию, совпадающую с заданной, на множестве полной n -мерной меры. Однако таким способом мы не получим полного ответа на поставленный вопрос, так как множество точек, в которых отсутствует аппроксимативный предел, может иметь положительную (и даже бесконечную) $(n - 1)$ -мерную меру. Например, функция $f(x)$, равная единице почти всюду в шаре $|x| < 1$ и равная нулю почти всюду вне этого шара, указанным способом определяется всюду, кроме сферы $S: |x| = 1$. В точках этой сферы функцию таким способом доопределить невозможно. Более того, не имея никакой дополнительной информации о функции, мы вообще не можем этого сделать.

Мы не будем сейчас обсуждать вопрос, какая именно дополнительная информация о функции должна быть известна для ее доопределения на множествах точек, в которых отсутствует аппроксимативный предел этой функции. Это будет делаться в дальнейшем в зависимости от того, какая задача решается. Здесь же мы хотим подчеркнуть, что во всех тех случаях, которые будут встречаться в дальнейшем, доопределение функции, использующее дополнительную информацию о ней, будет производиться с помощью аппроксимативных пределов f_a и f_{-a} , т. е. в регулярных точках этой функции (см. п. 4.4). Поэтому важными являются классы функций, для которых все точки, за исключением быть может, множества $(n - 1)$ -мерной меры нуль, являются регулярными. Следующая теорема показывает, что функции, принадлежащие пространству BV , образуют именно такой класс функций.

Т е о р е м а. Пусть $f(x)$ — вектор-функция, принадлежащая пространству BV . Тогда множество точек, не являющихся регулярными точками этой вектор-функции, имеют $(n - 1)$ -мерную меру нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы проведем, опуская некоторые детали, для случая финитной ограниченной функции $f(x)$. Полное доказательство приведено в [12].

Пусть $f \in BV$,

$$|f(x)| < M. \quad (5.1)$$

Обозначим

$$E_t = \{x: f(x) > t\}. \quad (5.2)$$

При почти всех t множества E_t имеют конечный периметр (п. 3.4). Разделим отрезок $[-M, M]$ на части конечным числом точек деления t_k так, чтобы множества E_{t_k} имели конечный периметр и чтобы расстояние между соседними точками деления было меньше заданного положительного числа ε .

Так как разность двух множеств с конечным периметром есть также множество с конечным периметром (п. 2.3), то множества

$$E_k = \{x: t_k < f(x) \leq t_{k+1}\} \quad (5.3)$$

также являются множествами с конечным периметром. Простая функция

$$\sum_k t_k \chi_k(x), \quad (5.4)$$

где $\chi_k(x)$ — характеристическая функция множества E_k , отличается от функции $f(x)$ меньше, чем на ε . Множества (5.3) производят разбиение пространства R , структура которого описана в предыдущем пункте (теорема 2).

Будем проводить последовательные разбиения отрезка $[-M, M]$ точками деления так, как это было указано выше, дополнительно требуя, чтобы каждое следующее разбиение было подразделением предыдущего и чтобы ε стремилось к нулю. Тогда получится последовательность простых функций (5.4), равномерно сходящаяся к функции $f(x)$. Далее

образуется последовательность разбиений пространства R^n множествами (5.3), каждое из которых является подразделением предыдущего. Пользуясь теоремой 2 п. 4, можно доказать, что все точки пространства R^n , за исключением точек некоторого множества $(n-1)$ -мерной меры нуль, делятся на два множества A и B . К множеству A относятся точки, которые во всех последовательных разбиениях принадлежат множествам вида E_{k^*} (см. (4.4)). К множеству B относятся точки, которые, начиная с некоторого разбиения, принадлежат множествам вида Γ_{kl} и для которых нормаль a к Γ_{kl} не меняется в последующих разбиениях. В точках множества A существует аппроксимативный предел функции $f(x)$, так как он существует для всех простых функций (5.4) (см. п. 4, теорему 3) и последовательность простых функций сходится равномерно. Для точек x_0 множества B по той же причине существуют аппроксимативные пределы $f_a(x_0)$ и $f_{-a}(x_0)$, где a — указанная выше нормаль. Таким образом, множество $A \cup B$ состоит из регулярных точек функции $f(x)$, откуда следует утверждение теоремы.

Из теоремы следует, что если задана функция $f(x)$ ($x \in R^n$), принадлежащая пространству BV , то множество всех точек пространства R^n , за исключением, быть может, множества $(n-1)$ -мерной меры нуль, состоит из точек аппроксимативной непрерывности и точек скачка этой функции. Обозначим множество точек скачка функции f через $\Gamma(f)$. В каждой точке этого множества существует определяющий вектор a (см. п. 4.4), заданный однозначно (с точностью до знака).

Дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е. Нормалью к множеству $\Gamma(f)$ точек скачка функции f в точке x_0 называется определяющий вектор функции $f(x)$ в этой точке.

Примеры 1 Пусть E — множество с конечным периметром, $\chi(x)$ — характеристическая функция этого множества. Из теоремы п. 2 и ее доказательства, а также из теоремы п. 3 следует, что множество $\Gamma(\chi)$ совпадает с существенной границей S множества E с точностью до множества $(n-1)$ -мерной меры нуль. Нормаль к $\Gamma(\chi)$ в смысле данного здесь определения совпадает с нормалью к S в смысле определения п. 2.

2. Мы рассмотрим функцию, имеющую гладкую поверхность разрывов, и покажем, что нормаль к этой поверхности в ее обычном определении совпадает с нормалью в смысле определения этого пункта.

Именно, пусть E_+ — открытое множество, заданное неравенством (2.3), E_- — открытое множество, заданное неравенством

$$f(x) < 0,$$

S — множество, заданное уравнением (2.4). Будем предполагать выполненным условие (2.5). Тогда в каждой точке $x_0 \in S$ существует нормаль (2.6)

Пусть на множествах $E_+ \cup S$ и $E_- \cup S$ заданы непрерывные функции $u_+(x)$ и $u_-(x)$ соответственно. Предположим, что в каждой точке $x_0 \in S$ имеет место неравенство $u_+(x_0) \neq u_-(x_0)$. Рассмотрим функцию

$$u(x) = \begin{cases} u_+(x) & x \in E_+; \\ u_-(x) & x \in E_- . \end{cases}$$

Ясно, что во всех точках $x \in E_+ \cup E_-$ функция $u(x)$ непрерывна. Легко проверить, что во всех точках $x_0 \in S$.

$$u_a(x_0) = u_+(x_0), \quad u_{-a}(x_0) = u_-(x_0),$$

где a — вектор (2.6). Следовательно, x_0 — точка скачка функции $u(x)$ и a — определяющий вектор. Мы получим, таким образом, что $\Gamma(u) = S$ и нормаль в смысле определения этого пункта совпадает с (2.6)

Можно показать (см. п. V.1.6), что для любой функции $f \in BV$ множество точек скачка $\Gamma(f)$ может быть покрыто последовательностью множеств, каждое из которых является существенной границей множества с конечным периметром. Для каждого такого множества существует нормаль в смысле определения п. 2. Оказывается, что с точностью до множества $(n-1)$ -мерной меры нуль во всех точках множества $\Gamma(f)$

нормаль в смысле определения этого пункта совпадает с нормалью к покрывающему множеству.

Резюмируя сказанное в этом пункте, мы можем сформулировать следующее утверждение о структуре функции f , принадлежащей пространству BV (меняя в случае надобности ее значения на множества n -мерной меры нуль и пренебрегая ее значениями на множествах $(n-1)$ -мерной меры нуль). *Функция $f(x)$ аппроксимативно непрерывна во всех точках, за исключением некоторого множества $\Gamma(f)$. В каждой точке $x_0 \in \Gamma(f)$ определен вектор a — нормаль к этому множеству, причем существуют аппроксимативные пределы $f_a(x_0)$ и $f_{-a}(x_0)$.*

6. Среднее значение. Мы введем ядро усреднения следующим образом. Пусть $\varphi(x)$ — ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая условиям:

$$\varphi(x) \geq 0, \quad \varphi(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > 1, \quad \int \varphi(x) dx = 1.$$

Под *ядром усреднения* понимается функция

$$\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n} \varphi\left(\frac{x}{r}\right). \quad (6.1)$$

Примеры 1. Шаровое ядро усреднения.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n} & \text{при} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{при} \quad |x| \geq 1. \end{cases} \quad (6.2)$$

Здесь ω_n — объем единичного n -мерного шара: $|x| < 1$.

2 Непрерывно дифференцируемое ядро усреднения

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{при} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{при} \quad |x| \geq 1, \end{cases} \quad (6.3)$$

где

$$\alpha = \int \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) dx.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать *симметричные* ядра усреднения, т. е. такие, для которых функция φ зависит только от $|x|$. Приведенные выше примеры являются примерами симметричных ядер.

Пусть $f(x)$ — ограниченная измеримая (по мере Лебга) функция, заданная на некотором открытом множестве G . Будем рассматривать функцию

$$\bar{f}_r(x_0) = \int \varphi_r(x - x_0) f(x) dx \quad (x_0 \in G). \quad (6.4)$$

Легко показать, что если ядро усреднения является гладким, то и функция $\bar{f}_r(x_0)$ также является гладкой.

Средним значением функций $f(x)$ в точке x_0 мы будем называть число

$$\bar{f}(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{f}_r(x_0). \quad (6.5)$$

Конечно, этот предел может и не существовать или, если он существует, то может зависеть от ядра усреднения. Мы покажем сейчас, что если x_0 — регулярная точка функции $f(x)$, то указанный предел существует и не зависит от ядра усреднения.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — функция, заданная, ограниченная и измеримая в окрестности точки x_0 . Если x_0 есть регулярная точка этой функции, то в этой точке существует среднее значение $\bar{f}(x_0)$, причем имеет место равенство*

$$\bar{f}(x_0) = \frac{1}{2} [f_a(x_0) + f_{-a}(x_0)], \quad (6.6)$$

где a — определяющий вектор.

Доказательство. Как и в п. 4.4, обозначим через $\Pi_a(x_0)$ полу-пространство $(x - x_0, a) > 0$.

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} I_a^r(x_0) &= \int_{\Pi_a(x_0)} \varphi_r(x - x_0) f(x) dx = \\ &= f_a(x_0) \int_{\Pi_a(x_0)} \varphi_r(x - x_0) dx + F_a^r(x_0), \end{aligned} \quad (6.7)$$

где

$$F_a^r(x_0) = \int_{\Pi_a(x_0)} \varphi_r(x - x_0) [f(x) - f_a(x_0)] dx. \quad (6.8)$$

Учитывая, что ядро $\varphi_r(x)$ симметрично, получим

$$\int_{\Pi_a(x_0)} \varphi_r(x - x_0) dx = \frac{1}{2}. \quad (6.9)$$

Покажем, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_a^r(x_0) = 0. \quad (6.10)$$

Для этого обозначим

$$A_\varepsilon = \left\{ x : |f(x) - f_a(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (6.11)$$

Так как $\varphi_r(x - x_0) = 0$ при $|x - x_0| > r$, то интегрирование в (6.8) можно проводить по множеству $B = \Pi_a(x_0) \cap K_r(x_0)$, где $K_r(x_0)$ — шар: $|x - x_0| < r$. Мы представим интеграл (6.8) как сумму двух по множествам $B \cap A_\varepsilon$ и $B \cap A'_\varepsilon$ (A'_ε — дополнение A_ε до всего пространства) и обозначим эти интегралы через I_1 и I_2 . В силу (6.11) для первого интеграла имеем оценку

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{B \cap A_\varepsilon} \varphi_r(x - x_0) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.12)$$

Второе неравенство следует из того, что стоящий здесь интеграл не превосходит интеграла, взятого по всему пространству и равного единице.

Оценим интеграл I_2 . В силу ограниченности функции $f(x)$ имеет место неравенство

$$|f(x) - f_a(x_0)| \leq M.$$

Кроме того, из (6.1) следует, что

$$|\varphi_r(x)| \leq \frac{C}{r^n},$$

где C — некоторая константа. Следовательно,

$$I_2 \leq M |B \cap A'_\varepsilon| \frac{C}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \quad (6.13)$$

Последнее следует из определения аппроксимативного предела (п. 4.2). Из (6.13) мы заключаем, что существует такое число $\delta > 0$, что

$$I_2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6.14)$$

для всех $r < \delta$.

Из неравенств (6.12) и (6.14) получаем $F(x_0) < \varepsilon$ при всех $r < \delta$. Следовательно, имеет место равенство (6.10).

Из равенств (6.7), (6.9) и (6.10) следует

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_a^r(x_0) = \frac{1}{2} f_a(x_0). \quad (6.15)$$

Точно так же доказывается равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_{-a}^r(x_0) = \frac{1}{2} f_{-a}(x_0). \quad (6.16)$$

Так как $\bar{f}_r(x_0) = I_a^r(x_0) + I_{-a}^r(x_0)$, то из (6.15) и (6.16) мы окончательно получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{f}_r(x_0) = \frac{1}{2} [f_a(x_0) + f_{-a}(x_0)].$$

Теорема доказана.

Требование ограниченности функции $f(x)$, которое содержится в формулировке теоремы, не обязательно [12]. Мы, однако, не будем распространять эту теорему на неограниченные функции и примем (6.6) за определение среднего значения $\bar{f}(x_0)$ для любой измеримой функции $f(x)$ в регулярной точке x_0 .

С л е д с т в и е. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две измеримые функции и точка x_0 является регулярной для каждой из них, причем хотя бы для одной из них она является точкой аппроксимативной непрерывности. Тогда x_0 является регулярной точкой произведения $f(x)g(x)$ и имеет место равенство

$$\overline{f(x_0)g(x_0)} = \bar{f}(x_0)\overline{g(x_0)} \quad (6.17)$$

(среднее значение произведения равно произведению средних значений).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x_0 есть точка аппроксимативной непрерывности функции $f(x)$; a — определяющий вектор функции $g(x)$ (см. п. 4.4). Тогда на основании теоремы об аппроксимативном пределе произведения (п. 4.3) существует аппроксимативный предел

$$(fg)_a(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in P_a(x_0)} f(x)g(x)$$

и имеет место равенство

$$(fg)_a(x_0) = f_a(x_0)g_a(x_0) = \bar{f}(x_0)g_a(x_0).$$

Точно так же получаем

$$(fg)_{-a}(x_0) = \bar{f}(x_0)g_{-a}(x_0).$$

Взяв полусумму, получим (6.17).

Из теоремы 1 и теоремы п. 5 получаем следующий результат.

Т е о р е м а 2. Пусть $f(x)$ — функция, принадлежащая пространству BV . Тогда множество точек, в которых не существует среднее значение $f(x)$, имеет $(n-1)$ -мерную меру нуль.

§ 6. ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. **Введение.** Классическое дифференциальное исчисление строится для непрерывных и дифференцируемых функций. Мы поставим вопрос о том, можно ли перенести аппарат дифференциального исчисления на более широкий класс функций так, чтобы охватить и разрывные функции. Ясно, что тогда можно говорить только об обобщенных производных. Рассмотрим, например, следующую формулу дифференцирования степени:

$$\frac{\partial u^m}{\partial x_i} = m u^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (1.1)$$

известную для гладких функций $u(x)$.

Предположим, что функция $u(x)$ разрывна. Верна ли эта формула? Прежде всего, мы должны придать смысл произведению, стоящему в правой части. Так как $\partial u / \partial x_i$ является мерой, то нам нужно определить умножение функции на меру. Мы сделаем это в общем случае.

Определение. Пусть задана мера μ , определенная на борелевских множествах $E \subset R^n$. Пусть, далее, задана функция $f(x)$ ($x \in R^n$), суммируемая по мере μ . Тогда *произведением* функции $f(x)$ на меру μ называется мера $\lambda = f\mu$, заданная на любом борелевском множестве $E \in R^n$ равенством

$$\lambda(E) = \int_E f(x) d\mu(x). \quad (1.2)$$

Такое определение произведения функции на меру вполне согласуется с обычным умножением функций. Действительно, будем ставить в соответствие каждой суммируемой функции $g(x)$ меру — неопределенный интеграл этой функции:

$$\mu(E) = \int_E g(x) dx. \quad (1.3)$$

При так определенной мере равенство (1.2) примет вид

$$\lambda(E) = \int_E f(x)g(x)dx$$

в полном соответствии с обычным умножением функций.

Вернемся к равенству (1.1). В силу данного выше определения умножения функции на меру в правой части этого равенства стоит мера, в левой части — обобщенная производная, которая также может трактоваться как мера. В этом смысле равенство (1.1) не содержит никаких противоречий. Однако в действительности оно неверно. Чтобы это показать, возьмем в качестве $u(x)$ характеристическую функцию какого-нибудь множества, так что для положительных m $u^m(x) = u(x)$.

По формуле (1.1)

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = m u \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

и поэтому $u \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Вычитая два таких равенства при различных m , получим $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, что, очевидно, неверно.

Это противоречие вовсе не означает, что нельзя получить формулы, обобщающие обычные формулы дифференцирования на разрывные функции. В дальнейшем мы такое обобщение укажем. Однако для этого нам понадобится ввести понятие усредненной суперпозиции

2. Усредненная суперпозиция. Пусть $f(u)$ — функция, заданная и непрерывная при всех u , принадлежащих пространству R^p . Пусть, далее, $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_p(x))$ — вектор-функция, заданная на некотором множестве G пространства R^n . Тогда определена *суперпозиция* функций f и u :

$$f(u(x)). \quad (2.1)$$

Наряду с такой суперпозицией мы определим еще одно понятие суперпозиции. Именно, пусть x — регулярная точка вектор-функции $u(x)$, a — определяющий вектор (см. п. 4.4). Тогда положим

$$\bar{f}(u(x)) = \int_0^1 f(u_a(x)t + u_{-a}(x)(1-t)) dt. \quad (2.2)$$

Функцию $\bar{f}(u(x))$, определенную равенством (2.2), будем называть *усредненной суперпозицией* функций f и u .

Заметим, что правая часть равенства (2.2) не зависит от произвола в выборе определяющего вектора a . Действительно, если x есть точка скачка, то вектор a определяется однозначно с точностью до знака. Однако замена a на $-a$ не изменит правой части равенства (2.2), в чем легко убедиться, сделав в интеграле замену переменной $t = 1 - t$.

Если x есть точка аппроксимативной непрерывности функции $u(x)$, то, обозначая ее аппроксимативный предел в точке x через $\bar{u}(x)$, получим

$$u_a(x) - u_{-a}(x) = \bar{u}(x).$$

Из (2.2) теперь следует

$$f(u(x)) = f(\bar{u}(x)). \quad (2.3)$$

Следовательно, и в этом случае $\bar{f}(u(x))$ не зависит от вектора a .

Если функция $u(x)$ аппроксимативно непрерывна в точке x , так что $\bar{u}(x) = u(x)$, то из (2.3) следует, что усредненная суперпозиция в этой точке совпадает с обычной суперпозицией (2.1):

$$\bar{f}(u(x)) = f(u(x)). \quad (2.4)$$

Если вектор-функция $u(x)$ суммируема в области G , то она почти всюду по n -мерной мере аппроксимативно непрерывна. Поэтому для суммируемой функции $u(x)$ равенство (2.4) имеет место почти всюду в G по n -мерной мере. Однако n -мерная мера слишком груба для целей обобщенного дифференцирования. Если $u \in BV$, то на основании теоремы п. 5.5 суперпозиция (2.2) определена почти всюду по $(n-1)$ -мерной мере.

3. Дифференцирование суперпозиции. Пусть задана суперпозиция функций (2.1). Если $f(u)$ и $u(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, то, как известно, имеет место формула

$$\frac{\partial f(u(x))}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^p f_{u_k}(u(x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.1)$$

где обозначено $f_{u_k}(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u_k}$.

Мы уже видели в п. 1, что для разрывных функций эта формула неверна. Однако она становится верной, если в правую часть вместо суперпозиции $f_{u_k}(u(x))$ подставить усредненную суперпозицию $\bar{f}_{u_k}(u(x))$.

Теорема. Пусть $f(u)$ — функция, заданная при всех $u \in R^p$, непрерывная и непрерывно дифференцируемая. Пусть, далее $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_p(x)) \in BV$ и усредненная суперпозиция $\bar{f}_{u_k}(u(x))$ локально суммируема по мере $du_k/\partial x_i$ ($k = 1, 2, \dots, p$; $i = 1, 2, \dots, n$). Тогда $f(u(x)) \in BV$ и имеет место формула

$$\frac{\partial f(u(x))}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^p \bar{f}_{u_k}(u(x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.2)$$

Мы ограничимся доказательством лишь одного частного случая этой формулы — формулы дифференцирования произведения, которое будет приведено в следующем пункте. Доказательство теоремы в общем виде имеется в [12].

Сделаем некоторые пояснения по поводу формулы (3.2). Локальную суммируемость функции $\bar{f}_{u_k}(u(x))$ по мере $du_k/\partial x_i$ следует понимать как существование интеграла

$$\int_E \bar{f}_{u_k}(u(x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx \quad (3.3)$$

для любого ограниченного борелевского множества E . На основании правила умножения функции на меру (см. п. 1) правая часть равенства (3.2) определена как сумма мер вида (3.3). В силу утверждения теоремы $f(u(x)) \in BV$, и поэтому левая часть также является мерой. Таким образом, равенство (3.2) понимается как равенство мер.

Дополнительно к теореме приведем следующее утверждение [12]: если $u(x)$ есть вектор-функция из BV , $f(u)$ — непрерывная функция, заданная в R^p , то усредненная суперпозиция $\bar{f}(u(x))$ измерима по мере $d\nu/dx_i$, где ν — произвольная функция из BV .

Из этого утверждения мы делаем важное заключение: если вектор-функция $u(x)$ ограничена, то интеграл (3.3) существует, так как каждая ограниченная измеримая функция суммируема.

Отсюда следует, что для ограниченных вектор-функций $u(x)$ теорема верна без требования локальной суммируемости суперпозиции $\bar{f}_{u_k}(u(x))$ по мере du_k/dx_i .

Ясно, что указанная измеримость и суммируемость возможны лишь в том случае, когда функция $\bar{f}_{u_k}(u(x))$ определена почти всюду по мере $d\nu/dx_i$ для произвольного $\nu \in BV$. В этом и состоит, в частности, применение теоремы о регулярных точках функций из BV , доказанной в п. 5.5: в силу этой теоремы функция $\bar{f}_{u_k}(u(x))$ определена почти всюду по $(n-1)$ -мерной мере, т. е. она не определена лишь на множествах $(n-1)$ -мерной меры нуль. Но можно доказать, что на таких множествах обращается в нуль мера $d\nu/dx_i$ для произвольной функции $\nu \in BV$.

Равенство (3.1) является частным случаем формулы (3.2). Действительно, если обобщенная производная du_k/dx_i суммируема (и тем более непрерывна), то в интеграле (3.3) можно заменить усредненную суперпозицию обычной, так как обе они совпадают почти всюду по n -мерной мере.

4. Дифференцирование произведения. Формула дифференцирования произведения двух функций u и v , принадлежащих пространству BV , является частным случаем общей формулы (3.2). Ввиду важности этой формулы мы ее рассмотрим отдельно.

В качестве $f(u)$ возьмем функцию $f(u) = u_1 u_2$ ($p = 2$). Для удобства записи введем новые обозначения: $u_1 = u$, $u_2 = v$, так что будет рассматриваться функция $f(u, v) = uv$. Имеем $f_u = v$, и поэтому по определению усредненной суперпозиции

$$\bar{f}_u = \int_0^1 [v_a(x)t + v_{-a}(x)(1-t)] dt = \frac{1}{2} [v_a(x) + v_{-a}(x)] = \bar{v}(x),$$

где $\bar{v}(x)$ обозначает среднее значение функции $v(x)$ (см. (5.6.6)).

Точно так же $\bar{f}_v = \bar{u}(x)$. Поэтому в рассматриваемом случае формула (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.1)$$

где \bar{u} и \bar{v} — средние значения u и v .

Согласно общей теореме п. 3 мы можем утверждать, что если $u, v \in BV$, функция $\bar{u}(x)$ локально суммируема по мере $d\nu/dx_i$, а $\bar{v}(x)$ локально суммируема по мере du/dx_i , то $uv \in BV$ и имеет место равенство (4.1).

В случае ограниченных функций u и v требовать указанную выше локальную суммируемость не нужно (см. п. 3), и формулировка утверждения упрощается: если $u, v \in BV$, то $uv \in BV$ и имеет место равенство (4.1).

Докажем равенство (4.1) в предположении ограниченности функций u и v .

Пусть $\varphi_r(x)$ — непрерывно дифференцируемое ядро усреднения (см. п. 5.6) и

$$\begin{aligned} u_r(x) &= \int \varphi_r(y-x) u(y) dy, \\ v_r(x) &= \int \varphi_r(y-x) v(y) dy. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для любой финитной непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ имеем

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u v dx = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_r(x) v_\rho(x) dx. \quad (4.3)$$

Далее,

$$-\int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_r v_\rho dx = \int \varphi \frac{\partial u_r}{\partial x_i} v_\rho dx + \int \varphi u_r \frac{\partial v_\rho}{\partial x_i} dx = A_{r\rho} + B_{r\rho}. \quad (4.4)$$

Найдем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 0} A_{r\rho} = \lim_{r \rightarrow 0} \int \varphi v \frac{\partial u_r}{\partial x_i} dx. \quad (4.5)$$

Из (4.2) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial x_i} &= \int \frac{\partial \varphi_r(y-x)}{\partial x_i} u(y) dy = - \int \frac{\partial \varphi_r(y-x)}{\partial y_i} u(y) dy = \\ &= \int \varphi_r(y-x) \frac{\partial u}{\partial y_i} dy. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \varphi(x) v(x) \frac{\partial u_r}{\partial x_i} dx &= \int \left[\int \varphi(x) v(x) \varphi_r(y-x) dx \right] \times \\ &\times \frac{\partial u}{\partial y_i} dy \xrightarrow{r \rightarrow 0} \int \varphi(x) \bar{v}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для обоснования возможности указанного предельного перехода под знаком внешнего интеграла заметим, что согласно теореме 2 п. 5.6 среднее значение функции φv (т. е. предел внутреннего интеграла) существует почти всюду по $(n-1)$ -мерной мере, а поэтому и почти всюду по мере $du/\partial x_i$ (см. п. 3). Кроме того, ввиду ограниченности функций φ и v внутренний интеграл есть ограниченная функция переменной r .

Из (4.5) и (4.6) получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 0} A_{r\rho} = \int \varphi(x) \bar{v}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (4.7)$$

Далее, имеем

$$B_{r\rho} = - \int \frac{\partial \varphi u_r}{\partial x_i} v_\rho dx.$$

Следовательно,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} B_{r\rho} = - \int \frac{\partial \varphi u_r}{\partial x_i} v dx = \int \varphi u_r \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \xrightarrow{r \rightarrow 0} \int \varphi \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Таким образом,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 0} B_{r\rho} = \int \varphi \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \quad (4.8)$$

Из (4.3), (4.4), (4.7) и (4.8) получаем

$$-\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} u \cdot v dx = \int \varphi \left[\bar{u} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] dx$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда в силу определения обобщенной производной следуют $uv \in BV$ и равенство (4.1).

Глава V. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

§ 1. ФОРМУЛА ГРИНА

В этом параграфе будут рассмотрены важные формулы анализа — формулы Грина, связывающие интеграл от градиента функции по некоторому множеству с интегралом от функции по границе этого множества.

1. **Градиент характеристической функции множества.** Пусть E — множество с конечным периметром (см. п. IV.2.1), χ — его характеристическая функция. Как и в п. IV.2.4, мы будем рассматривать обобщенный градиент

$$\nabla\chi = \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}, \frac{\partial\chi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\chi}{\partial x_n} \right) \quad (1.1)$$

— меру со значением в пространстве R^n .

Рассмотрим вопрос о том, где сосредоточена мера $\nabla\chi$. Это нужно понимать следующим образом: борелевская мера *сосредоточена на множестве* A , если на любом борелевском множестве, не имеющем общих точек с множеством A , эта мера равна нулю.

Теорема 1. Пусть E — множество с конечным периметром, χ — его характеристическая функция. Тогда мера $\nabla\chi$ сосредоточена на существенной границе множества E .

Доказательство. Продифференцируем равенство $\chi^2(x) = \chi(x)$; пользуясь формулой дифференцирования произведения (п. IV.6.4), получим

$$2\bar{\chi}\nabla\chi = \nabla\chi. \quad (1.2)$$

Отсюда

$$\left(\bar{\chi} - \frac{1}{2}\right)\nabla\chi = 0. \quad (1.3)$$

Пусть A — множество тех точек x пространства R^n , для которых $\bar{\chi}(x) = \frac{1}{2}$.

Из (1.3) следует, что мера $\nabla\chi$ сосредоточена на множестве A . Действительно, пусть B — произвольное борелевское множество, не имеющее общих точек с множеством A . Взяв полную вариацию меры, стоящей в левой части равенства (1.3), получим

$$\int_B \left| \bar{\chi} - \frac{1}{2} \right| |\nabla\chi| dx = 0, \quad (1.4)$$

где $|\nabla\chi|$ — полная вариация меры $\nabla\chi$. Так как функция $\left| \bar{\chi} - \frac{1}{2} \right|$ не обращается в нуль ни в одной точке множества B , то равенство (1.4) может иметь место только в том случае, когда $|\nabla\chi|(B) = 0$. Итак, мы показали, что мера $\nabla\chi$ сосредоточена на множестве A .

Для полного доказательства теоремы достаточно проверить, что множество A принадлежит существенной границе множества E (определение существенной границы дано в п. IV.5.1). Но это очевидно, так как в силу определения существенной границы в каждой точке x , не принадлежащей ей, имеет место либо равенство $\bar{\chi}(x) = 1$, либо равенство $\bar{\chi}(x) = 0$. Теорема доказана.

Имеет место также следующая теорема [70, 67].

Теорема 2. Пусть E — множество с конечным периметром, χ — его характеристическая функция. Пусть, далее, B — произвольное борелевское множество, принадлежащее существенной границе множества E .

Тогда имеет место равенство

$$\int_B \nabla \chi dx = \int_B \nu dH_{n-1}, \quad (1.5)$$

где ν — внутренняя нормаль.

Пример, объясняющий эту формулу, был приведен в п. IV.2.4. (см. равенство (IV.2.4.6)).

С л е д с т в и е. Если E — есть множество с конечным периметром, то его периметр $P(E)$ равен $(n-1)$ -мерной мере Хаусдорфа его существенной границы S :

$$P(E) = H_{n-1}(S). \quad (1.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению (см. п. IV.2.4) периметр множества E есть полная вариация меры $\nabla \chi$. Взяв полную вариацию мер, стоящих в левой и правой частях (1.5), и учитывая теорему 1, получим (1.6).

2. След функции на границе. Пусть E — измеримое множество, S — его существенная граница. Мы введем здесь понятие внутреннего и внешнего следа функции $u(x)$ на существенной границе. Это понятие будет использовано в формуле Грина и в дальнейшем при постановке граничных задач.

Пусть x_0 — точка существенной границы S и пусть в окрестности точки x_0 задана измеримая функция $u(x)$.

О п р е д е л е н и е. Внутренний след $(u^+(x_0))$ функции $u(x)$ в точке x_0 есть аппроксимативный предел функции $u(x)$ при $x \rightarrow x_0$ по множеству E :

$$u^+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} u(x) \quad (2.1)$$

(см. п. IV.4.2).

Внешний след $(u^-(x_0))$ функции $u(x)$ в точке x_0 есть аппроксимативный предел функции $u(x)$ при $x \rightarrow x_0$ по дополнению E' множества E :

$$u^-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in E'} u(x). \quad (2.2)$$

Вполне аналогично тому, как в п. IV.4.3 доказывались теоремы о пределах, можно доказать следующее утверждение. Если в точке $x_0 \in S$ существует внутренняя нормаль ν к множеству E , то след $u^+(x_0)$ существует тогда и только тогда, когда существует аппроксимативный предел $u_\nu(x_0)$, причем имеет место равенство

$$u^+(x_0) = u_\nu(x_0). \quad (2.3)$$

Для внешнего следа имеют место аналогичное утверждение и равенство

$$u^-(x_0) = u_{-\nu}(x_0). \quad (2.4)$$

Здесь $u_\nu(x_0)$ и $u_{-\nu}(x_0)$ обозначают то же, что в п. IV.4.4, — аппроксимативные пределы по полупространствам, в рассматриваемом случае — по полупространствам, определяемым нормалью.

Т е о р е м а 1. Пусть $u(x)$ — функция, заданная и локально суммируемая в окрестности точки x_0 , принадлежащей существенной границе S множества E . Пусть, далее, существует внутренняя нормаль ν к E в точке x_0 . Тогда если существует внутренний след $u^+(x)$, то существует среднее значение $\overline{u\chi}(x_0)$ функции $u\chi$, где χ — характеристическая функция множества E , и имеет место равенство

$$\overline{u\chi}(x_0) = \frac{1}{2} u^+(x_0). \quad (2.5)$$

Если, кроме того, существует внешний след $u^-(x_0)$, то существует среднее значение $\bar{u}(x_0)$ и

$$\bar{u}(x_0) = \frac{1}{2} [u^+(x_0) + u^-(x_0)]. \quad (2.6)$$

Доказательство. Введем функцию $v(x) = u(x)\chi(x)$. Пусть существует $u^+(x_0)$. Тогда, как указывалось выше, существует аппроксимативный предел $u_+(x_0)$, и имеет место равенство (2.3). Кроме того, справедливо равенство $\chi_+(x_0) = 1$ (см. равенство (IV.5.2.7)). Пользуясь теоремой об аппроксимативном пределе произведения, мы заключаем, что существует аппроксимативный предел $v_+(x_0)$ и имеет место равенство

$$v_+(x_0) = u_+(x_0) = u^+(x_0). \quad (2.7)$$

Далее, из равенства $\chi_-(x_0) = 0$, пользуясь определением аппроксимативного предела, легко получить

$$v_-(x_0) = 0. \quad (2.8)$$

Таким образом, x_0 является регулярной точкой функции $v(x)$ (п. IV.4.4). Поэтому существует среднее значение $\bar{v}(x_0)$, причем

$$\bar{v}(x_0) = \frac{1}{2} [v_+(x_0) + v_-(x_0)] = \frac{1}{2} u^+(x_0)$$

на основании равенств (2.7) и (2.8).

Если существует также внешний след $u^-(x_0)$, то в силу равенств (2.3) и (2.4) мы получаем (2.6), так как

$$\bar{u}(x_0) = \frac{1}{2} [u_+(x_0) + u_-(x_0)].$$

Теорема доказана.

Следующая теорема является основной во всем дальнейшем использовании понятия следа функции.

Теорема 2. Пусть E — множество с конечным периметром, S — его существенная граница. Пусть, далее, $u(x)$ — функция, заданная в R^n и принадлежащая пространству BV . Тогда почти всюду по $(n-1)$ -мерной мере на S существуют внутренний и внешний следы функции u .

Доказательство. Пусть χ — характеристическая функция множества E . Рассмотрим вектор-функцию $v(x) = (u(x), \chi(x))$. Ясно, что $v \in BV$. Поэтому согласно теореме п. IV.5.5 все точки множества S , за исключением, быть может, точек некоторого множества $(n-1)$ -мерной меры нуль, являются регулярными точками вектор-функции v . В любой такой регулярной точке x_0 имеется определяющий вектор a для вектор-функции $v(x)$. Точка x_0 является регулярной для функций $u(x)$ и $\chi(x)$, причем вектор a является определяющим для обеих функций. Это следует из определения регулярной точки вектор-функции (см. п. IV.4.4).

Точка x_0 принадлежит существенной границе множества E и поэтому не может быть точкой аппроксимативной непрерывности функции χ . Следовательно, x_0 есть точка скачка функции χ . Отсюда следует согласно результатам п. IV.5.2, что определяющий вектор a функции χ является нормалью к S в точке x_0 . Будем для определенности считать a внутренней нормалью.

Так как вектор a является определяющим также и для функции $u(x)$, то существуют аппроксимативные пределы $u_a(x_0)$ и $u_{-a}(x_0)$. Но a есть нормаль, и поэтому $u_a(x_0)$ и $u_{-a}(x_0)$ являются внутренним и внешним следами функции $u(x)$ в точке x_0 . Теорема доказана.

3. Дифференцирование произведения функции на характеристическую функцию множества. Мы рассмотрим здесь формулу дифферен-

цирования произведения двух функций $u, v \in BV$, полученную в п. IV.6.4:

$$\frac{\partial uv}{\partial x_i} = \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

в предположении, что одна из этих функций является характеристической функцией множества с конечным периметром. Некоторые следствия из этой формулы, которые здесь будут получены, приведут к различным вариантам формулы Грина.

Пусть E — ограниченное множество с конечным периметром, S — его существенная граница, $u(x)$ — ограниченная функция, заданная в R^n и принадлежащая пространству BV .

Мы будем по-прежнему обозначать через \bar{u} среднее значение функции $u(x)$; $u^+(x)$ и $u^-(x)$ — внутренний и внешний следы функции $u(x)$ на S . Будем, как и в п. IV.5.1, обозначать через E_* множество точек плотности множества E , через E^* — дополнение к множеству точек разрежения, так что $E^* = E_* \cup S$. Будем, далее, через χ_A обозначать характеристическую функцию множества A .

Теорема. *Имеют место равенства:*

$$\nabla(u\chi_E) = \bar{u}\nabla\chi_E + \bar{\chi}_E\nabla u, \quad (3.2)$$

$$\nabla(u\chi_E) = u^+\nabla\chi_E + \chi_{E_*}\nabla u, \quad (3.3)$$

$$\nabla(u\chi_E) = u^-\nabla\chi_E + \chi_{E^*}\nabla u, \quad (3.4)$$

$$\chi_S\nabla u + (u^- - u^+)\nabla\chi_E = 0. \quad (3.5)$$

Доказательство. Равенство (3.2) следует из (3.1).

Далее, обозначая для сокращения записи $\chi = \chi_E$, будем иметь $\nabla(u\chi) = \nabla(u\chi^2) = \nabla(u\chi \cdot \chi) = \bar{u}\chi\nabla\chi + \bar{\chi}\nabla(u\chi) = \bar{u}\chi\nabla\chi + \bar{\chi}^2\nabla u + \bar{\chi}u\nabla\chi$.

Таким образом,

$$\nabla(u\chi) = \left(\bar{u}\chi + \frac{1}{2}\bar{u}\right)\nabla\chi + \bar{\chi}^2\nabla u. \quad (3.6)$$

При этом мы воспользовались равенством $\bar{\chi}\nabla\chi = \frac{1}{2}\nabla\chi^2 = \frac{1}{2}\nabla\chi$.

Вычитая из равенства (3.6) равенство (3.2), получим

$$\left(\bar{u}\chi - \frac{1}{2}\bar{u}\right)\nabla\chi + (\bar{\chi}^2 - \bar{\chi})\nabla u = 0. \quad (3.7)$$

На основании теорем 1 и 2 п. 2 почти всюду по $(n-1)$ -мерной мере на S имеют место равенства (2.5) и (2.6). Так как на множестве $(n-1)$ -мерной меры нуль мера $\nabla\chi$ обращается в нуль, что следует, например, из равенства (1.5), то мы можем подставить в (3.7) выражения $u\chi$ и u из этих равенств. Получим

$$\frac{1}{4}(u^+ - u^-)\nabla\chi + (\bar{\chi}^2 - \bar{\chi})\nabla u = 0. \quad (3.8)$$

С другой стороны, ясно, что всюду, за исключением, быть может, множества $(n-1)$ -мерной меры нуль, имеет место равенство

$$4(\bar{\chi} - \bar{\chi}^2) = \chi_S. \quad (3.9)$$

Это равенство следует из того, что $\bar{\chi}(x) = 1$ при $x \in E_*$, $\bar{\chi}(x) = 0$ при $x \notin E^*$ и $\bar{\chi}(x) = \frac{1}{2}$ почти всюду по $(n-1)$ -мерной мере на S .

Так как мера ∇u обращается в нуль на множествах $(n-1)$ -мерной меры нуль, то мы можем (3.9) подставить в равенство (3.8). Мы получим равенство (3.5).

Учитывая приведенные выше значения функции $\bar{\chi}(x)$, мы получаем равенства

$$\chi_{E^*} = \bar{\chi}_E + \frac{1}{2} \chi_S, \quad \chi_{E_*} = \bar{\chi}_E - \frac{1}{2} \chi_S$$

почти всюду по $(n-1)$ -мерной мере.

Поэтому, умножая равенство (3.5) на $1/2$ и складывая с (3.2), получим (3.4), а вычитая из (3.2), получим (3.3). Теорема доказана.

Мы требовали ограниченности функции $u(x)$. В действительности это не обязательно. Равенство (3.5) верно и для неограниченных функций u , равенства (3.2)—(3.4) верны, если потребовать суммируемости хотя бы одной из функций \bar{u} , u^+ или u^- по $(n-1)$ -мерной мере на S (при этом суммируемость двух других отсюда уже следует) [12].

4. Формула Грина. Мы получим здесь формулу Грина, вернее, варианты этой формулы для множеств с конечным периметром и функций, принадлежащих BV . Заметим, что существование различных вариантов этой формулы связано с разрывностью функции, точнее, наличием точек скачка. Если у функции отсутствуют точки скачка (с точностью до значений на множестве $(n-1)$ -мерной меры нуль), то формулы (4.2) и (4.6) совпадают. Это, в частности, имеет место для функций, обобщенные производные которых суммируемы.

Претварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Если функция $u(x)$ задана в R^n , финитна и принадлежит пространству BV , то

$$\int \nabla u dx = 0 \quad (4.1)$$

(интегрирование распространяется по всему пространству).

Доказательство. Так как функция u финитна, то она обращается в нуль на множестве $|x| > R$ при достаточно большом R . Пусть $\varphi(x)$ — гладкая финитная функция, равная единице в шаре $|x| < 2R$. Тогда ясно, что

$$\int \varphi \nabla u dx = \int \nabla u dx.$$

Отсюда в силу определения обобщенной производной

$$\int \nabla u dx = - \int \nabla \varphi u dx = 0.$$

Последнее равенство следует из того, что $u(x) = 0$ при $|x| \not\leq R$ и $\nabla \varphi = 0$ при $|x| < 2R$. Лемма доказана.

Перейдем к выводу формулы Грина. Мы будем предполагать во всех следующих утверждениях, что E — ограниченное множество с конечным периметром, а $u(x)$ — функция, заданная в R^n и принадлежащая пространству BV . Как и выше, S будет обозначать существенную границу множества E .

Теорема 1. Пусть внутренний след u^+ функции u на S суммируем по мере H_{n-1} . Тогда имеет место формула

$$\int_{E_*} \nabla u dx = \int_S u^+ \nu dH_{n-1}, \quad (4.2)$$

где E_* — множество точек плотности множества E ; ν — внешняя нормаль к S .

Доказательство. Проинтегрируем левую и правую части равенства (3.3) по всему пространству R^n . На основании леммы интеграл от левой части равен нулю, и мы получим

$$\int u^+ \nabla \chi_E dx + \int_{E_*} \nabla u dx = 0. \quad (4.3)$$

Так как мера $\nabla \chi_E$ сосредоточена на S (п. 1), то первый интеграл в (4.3) можно брать по множеству S . Для того чтобы получить (4.2) из (4.3), достаточно воспользоваться связью между мерами $\nabla \chi_E$ и H_{n-1} , заданной равенством (1.5). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть B — измеримое по мере H_{n-1} множество, принадлежащее существенной границе S . Тогда имеет место формула

$$\int_B \nabla u dx = \int_B (u^- - u^+) \nu dH_{n-1}, \quad (4.4)$$

где u^+ и u^- — внутренний и внешний следы функции u на S ; ν — внешняя нормаль к S .

Доказательство аналогично предыдущему с использованием формулы (3.5).

Теорема 3. Пусть существенная граница S представляется как объединение двух измеримых по $(n-1)$ -мерной мере непересекающихся множеств S_1 и S_2 :

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset. \quad (4.5)$$

Тогда если внутренний след u^+ на S_1 и внешний след u^- на S_2 суммируемы по мере H_{n-1} , то имеет место формула

$$\int_{E \cup S_2} \nabla u dx = \int_{S_1} u^+ \nu dH_{n-1} + \int_{S_2} u^- \nu dH_{n-1}. \quad (4.6)$$

Доказательство. Так как функция $u^+ - u^-$ суммируема на S по мере H_{n-1} , то функция $u^+ = u^- + (u^+ - u^-)$ суммируема на S_2 . Следовательно, функция u^+ суммируема на S_1 , и поэтому имеет место формула (4.2). Полагая в (4.4) $B = S$ и складывая с (4.2), получим (4.6). Теорема доказана.

5. Множества класса Γ . Определение. Множество класса Γ есть измеримое по мере H_{n-1} множество, которое может быть покрыто конечной или счетной системой множеств, являющихся существенными границами множеств с конечным периметром.

Теорема. Пусть S — множество класса Γ , $u(x)$ — функция, заданная в R^n и принадлежащая пространству BV . Тогда имеет место формула

$$\int_S \nabla u dx = \int_S \Delta u dH_{n-1}. \quad (5.1)$$

Здесь Δu обозначает направленный скачок функции (см. п. IV.4.4): $\Delta u = (u_a - u_{-a})a$, где a — определяющий вектор.

Доказательство. Из определения следует существование конечной или счетной системы множеств E_i ($i = 1, 2, \dots$) с конечным периметром таких, что

$$S \subset \bigcup_i S_i, \quad (5.2)$$

где S_i — существенная граница множества E_i ($i = 1, 2, \dots$).

Положим $S_1' = S_1$,

$$S_m' = S_m - \bigcup_{i=1}^{m-1} S_i \quad (m = 2, 3, \dots).$$

Ясно, что множества S_m' попарно не пересекаются и

$$\bigcup_m S_m = \bigcup_m S_m'. \quad (5.3)$$

Обозначим

$$B_m = S \cap S_m' \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (5.4)$$

Из (5.2) — (5.4) следует, что

$$S = \bigcup_m B_m. \quad (5.5)$$

что множества B_m попарно не пересекаются и

$$B_m \subset S_m. \quad (5.6)$$

Согласно формуле (4.4) мы можем записать

$$\int_{B_m} \nabla u dx = \int_{B_m} (u^- - u^+) \nu dH_{n-1}, \quad (5.7)$$

где u^+ и u^- — внутренний и внешний (по отношению к множеству E_m) следы функции u на S_m . Пусть B'_m — множество тех точек $x \in B_m$, для которых существуют $u^+(x)$, $u^-(x)$ и нормаль ν к множеству S_m . На основании теоремы п. IV.5.3 и теоремы 2 п. 2 $H_{n-1}(B_m - B'_m) = 0$. Пусть $x \in B'_m$. Так как в этой точке существует внешняя нормаль ν к S_m , то имеют место равенства $u^-(x) = u_\nu(x)$, $u^+(x) = u_{-\nu}(x)$ (см. (2.3) и (2.4)). Но это значит, что точка x является регулярной для функции $u(x)$ и ее скачок Δu равен $[u^-(x) - u^+(x)]\nu$. Мы можем теперь (5.7) записать в виде

$$\int_{B_m} \nabla u dx = \int_{B'_m} \Delta u dH_{n-1}. \quad (5.8)$$

На основании равенства (5.5), суммируя (5.8) по m , получим (5.1). Теорема доказана.

Обычно в приложениях удобно пользоваться формулами п. 4 в сочетании с формулой (5.1). В качестве иллюстрации выведем формулу Грина для открытого множества.

Пусть G — открытое множество, а G_* — множество его точек плотности. Предположим, что $G_* - G$ есть множество класса Γ . Заметим, что $G_* - G$ принадлежит границе множества G , так что указанное условие выполняется, если граница множества G есть множество класса Γ .

Учитывая, что каждая точка множества G является точкой плотности, получим, что

$$G \subset G_*,$$

и поэтому

$$G_* = G \cup (G_* - G).$$

Отсюда

$$\int_{G_*} \nabla u dx = \int_G \nabla u dx + \int_{G_* - G} \nabla u dx. \quad (5.9)$$

Применяя формулы (4.2) и (5.1), получаем из (5.9)

$$\int_G \nabla u dx = \int_S u^+ \nu dH_{n-1} - \int_{G_* - G} \Delta u dH_{n-1}, \quad (5.10)$$

где S — существенная граница множества G . Это и есть формула Грина в рассматриваемом случае. Заметим, что $G_* - G$ есть часть границы множества G , состоящая из точек плотности этого множества.

Пример. Пусть G — множество на плоскости R^2 , состоящее из точек круга $x_1^2 + x_2^2 < 1$ без точек, принадлежащих положительной полуоси x_1 . Границей множества является объединение точек окружности S $x_1^2 + x_2^2 = 1$ и радиуса R $x_2 = 0$, $0 \leq x_1 < 1$. Ясно, что $G_* - G = R$, существенной границей является окружность S .

6. Полный скачок. В п. IV.4.4 мы ввели понятие направленного скачка функции $u(x)$ в каждой регулярной точке x . Это есть вектор

$$\Delta u(x) = [u_a(x) - u_{-a}(x)] a, \quad (6.1)$$

где a — определяющий вектор. Пусть, как и выше, $\Gamma(u)$ обозначает множество точек скачка, т. е. регулярных точек x , в которых $u_a(x) \neq u_{-a}(x)$.

Определение. Полным скачком функции $u(x)$ на множестве E называется вектор

$$\int_{E \cap \Gamma(u)} \Delta u(x) dH_{n-1}. \quad (6.2)$$

Разумеется, такое определение имеет смысл, если интеграл (6.2) существует. Мы покажем, что для функций $u(x)$, принадлежащих пространству BV , и борелевских множеств E это действительно так, и получим формулу, связывающую градиент функции u с ее полным скачком.

Рассмотрим сначала случай, когда $u(x)$ есть простая функция, принадлежащая пространству BV , т. е. функция вида (IV.5.4.1):

$$u(x) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_k(x), \quad (6.3)$$

где $\chi_k(x)$ — характеристическая функция ограниченных множеств E_k с конечным периметром.

Теорема 1. Пусть $u(x)$ — простая функция, принадлежащая пространству BV . Тогда множество точек скачка $\Gamma(u)$ этой функции есть множество класса Γ и ее полный скачок (по всему пространству R^n) равен нулю:

$$\int_{\Gamma(u)} \Delta u(x) dH_{n-1} = 0. \quad (6.4)$$

Доказательство. Из теоремы о структуре простых функций (теорема 3, п. IV.5.4) следует, что множество точек скачка $\Gamma(u)$ есть объединение множеств Γ_{kl} (см. равенство (IV.5.4.4)). Каждое такое множество принадлежит существенной границе множества E_k с конечным периметром и поэтому является множеством класса Γ . Поэтому $\Gamma(u)$ есть множество класса Γ как объединение конечного числа множеств класса Γ .

Из равенства (6.3) мы заключаем (п. 1, теорема 1), что мера ∇u сосредоточена на существенных границах множеств E_k и поэтому на множестве $\Gamma(u)$. Следовательно,

$$\int \nabla u dx = \int_{\Gamma(u)} \nabla u dx = \int_{\Gamma(u)} \Delta u dH_{n-1}. \quad (6.5)$$

Последнее равенство записано на основании теоремы п. 5. В силу леммы п. 4 интеграл, стоящий в левой части первого равенства (6.5), равен нулю. Отсюда следует (6.4). Теорема доказана.

Теорема 2. Множество $\Gamma(u)$ точек скачка функции $u(x)$, принадлежащей пространству BV , есть множество класса Γ . Полный скачок этой функции на любом борелевском множестве E равен значению градиента на множестве $\Gamma(u) \cap E$:

$$\int_{\Gamma(u) \cap E} \nabla u dx = \int_{\Gamma(u) \cap E} \Delta u dH_{n-1}. \quad (6.6)$$

Доказательство. Пусть сначала $u(x)$ — ограниченная финитная функция, принадлежащая пространству BV . Как и при доказательстве теоремы п. IV.5.5, мы представим функцию $u(x)$ как предел последовательности простых функций $u_k(x)$, принадлежащих пространству BV . При этом оказывается, что $\Gamma(u)$ является измеримым по мере H_{n-1} множеством и $\Gamma(u) \subset \bigcup_k \Gamma(u_k)$. Отсюда следует, что $\Gamma(u)$ есть множество класса Γ .

В случае неограниченной функции $u(x)$ мы рассмотрим срезку

$$u^N(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при } |u(x)| \leq N, \\ N & \text{при } u(x) > N, \\ -N & \text{при } u(x) < -N. \end{cases}$$

Ясно, что $\Gamma(u) \subset \bigcup_N \Gamma(u^N)$ и поэтому является множеством класса Γ .

То, что рассмотрение проведено для финитных функций, не ограничивает общности, так как, очевидно, множество принадлежит классу Γ , если его пересечение с любым шаром обладает этим свойством.

Итак, мы показали, что множество $\Gamma(u)$ точек скачка функции u принадлежит классу Γ . Ясно, что множество $\Gamma(u) \cap E$, где E — борелевское множество, также принадлежит классу Γ . Поэтому на основании теоремы п 5 имеет место равенство (6.6). Теорема доказана.

7. Интегрирование по частям. Каждая из формул Грина, выведенных в предыдущих пунктах, приводит к соответствующей формуле интегрирования по частям. Мы остановимся, например, на формуле интегрирования по частям, соответствующей (4.2).

Пусть выполняются условия, при которых справедлива формула (IV.6.4.1) дифференцирования произведения функций u и v . Пусть далее, E — ограниченное множество с конечным периметром, S — его существенная граница. Предположим, что внутренний след $(uv)^+$ функции uv на S суммируем по мере H_{n-1} . Тогда, интегрируя равенство (IV.6.4.1) по множеству E_* и пользуясь формулой (4.2), получим

$$\int_{E_*} \bar{u} \nabla v dx = - \int_{E_*} \bar{v} \nabla u dx + \int_S u^+ v^- \nu dH_{n-1}. \quad (7.1)$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Иногда может быть интересен вопрос об интегрировании по частям для интеграла

$$\int_{E_*} u \nabla v dx, \quad (7.2)$$

в котором, в отличие от (7.1), не стоит среднее значение функции. В случае, когда обобщенные производные dv/dx_i являются суммируемыми функциями, левая часть равенства (7.1) совпадает с (7.2), так как $u(x)$ и $\bar{u}(x)$ совпадают на множестве полной n -мерной меры. В общем случае ответ на поставленный вопрос, естественно, зависит от того, как задана функция $u(x)$. Ее принадлежности к пространству BV недостаточно, так как функции, принадлежащие этому пространству, определены с точностью до значений на множестве n -мерной меры нуль! Предположим, что разность $u(x) - \bar{u}(x)$ равна нулю всюду, за исключением некоторого множества B класса Γ . Тогда, пользуясь теоремой п. 5, легко показать, что

$$\int_{E_*} (u - \bar{u}) \nabla v dx = \int_{E_* \cap B} (u - \bar{u}) \Delta v dH_{n-1}. \quad (7.3)$$

Поэтому формула интегрирования по частям для интеграла (7.2) сводится к формуле (7.1) с добавлением к ее правой части интеграла, стоящего в правой части равенства (7.3).

8 Формулы векторного анализа. Пусть $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$ — вектор-функция, заданная в пространстве R_n (или на каком-нибудь открытом его подмножестве) и принадлежащая пространству BV . Тогда определена мера

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad (8.1)$$

которая называется *дивергенцией* вектора u .

Пусть E — ограниченное множество с конечным периметром, S — его существенная граница. Предположим, что внутренний след $u^+(x)$ суммируем на S по мере H_{n-1} . Тогда имеет место формула

$$\int_{E_*} \operatorname{div} u dx = \int_S (u^+, \nu) dH_{n-1}. \quad (8.2)$$

Эта формула является прямым следствием формулы (4.2).

$$(u^+, v) = \sum_{i=1}^n u_i^+ v_i \quad (8.3)$$

называется *поток*ом вектора u через границу S .

Можно написать также формулу для дивергенции, используя формулу (4.6).

§ 2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Интегральные формулы, полученные в предыдущем параграфе, мы применим здесь к функциям комплексной переменной u , в частности к аналитическим функциям.

1. **Пространство BV .** Мы будем рассматривать комплексные функции точек плоскости R^2 . Координаты на этой плоскости будем обозначать (x, y) . Поставив в соответствие каждой точке (x, y) комплексное число $z = x + iy$, мы можем функции точек плоскости трактовать как функции комплексной переменной z и писать $f(z)$. Иногда удобно указывать явную зависимость функции $f(z)$ от координат точек плоскости. Мы будем писать

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (1.1)$$

где u и v — вещественная и мнимая части функции f ; $z = x + iy$.

Мы будем говорить, что функция (1.1), заданная на открытом множестве G , принадлежит пространству $BV(G)$, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ принадлежат этому пространству (см. п. IV.3.1). Это значит, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ суммируемы в G и обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ являются мерами. Если в качестве G взята вся комплексная плоскость R^2 , то мы будем писать BV вместо $BV(R^2)$.

Для функций f , принадлежащих пространству BV , мы введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{df}{d\bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right), & \frac{df}{dz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Равенства (1.2) следует понимать как равенства мер.

В п. IV.4.4 было введено понятие регулярной точки для вещественной функции. Это определение дословно переносится на комплексные функции. При этом, как легко проверить, точка z является регулярной для функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ тогда и только тогда, когда она является регулярной точкой вектор-функции $(u(x, y), v(x, y))$. Отсюда и из теоремы п. IV.5.5 следует, что если $f \in BV$, то все точки комплексной плоскости, за исключением, быть может, множества одномерной меры нуль, являются регулярными для функций f .

Понятие скачка в рассматриваемом случае удобно ввести несколько иначе, чем в п. IV. 4.4. Под скачком Δf мы будем понимать не вектор, а комплексное число. Именно, дадим такое определение.

Пусть z — регулярная точка функции $f(z)$: $a = (a_1, a_2)$ — определяющий вектор в этой точке. Скачком функции $f(z)$ в точке z называется число

$$\Delta f(z) = (f_{-a}(z) - f_a(z))(a_1 + ia_2). \quad (1.3)$$

Ясно, что в каждой регулярной точке скачок определяется однозначно.

В каждой регулярной точке существует также среднее значение

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{2} [f_a(z) + f_{-a}(z)], \quad (1.4)$$

которое можно понимать как результат предельного перехода в усреднении с симметричным ядром (п. IV.5.6). Если функция $f(z)$ непрерывна, то $\bar{f}(z) = f(z)$.

2. Формула Грина Запишем здесь формулу Грина для функции комплексной переменной. Именно, пусть $f \in BV$, E — ограниченное множество с конечным периметром на плоскости, S — его существенная граница. Мы будем через H обозначать одномерную меру Хаусдорфа. Пусть $f^+ = u^+ + iv^+$ — внутренний след функции f на существенной границе S . Будем предполагать, что функция $f^+(z)$ суммируема на S по мере H . Тогда к функции f можно применить формулу Грина (1.4.2), из которой следует на основании (1.2)

$$\iint_{F_*} \frac{df}{dz} dx dy = -\frac{1}{2} \int_S f^+(z)(v_x + iv_y) dH, \quad (2.1)$$

где $v = (v_x, v_y)$ — внешняя нормаль к S .

Мы применим к правой части другое обозначение, более принятое в теории функций комплексной переменной. Чтобы к нему прийти, предположим сначала, что E_* есть открытое множество, граница S которого задается параметрически:

$$z = z(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.2)$$

причем функция $z(t)$ имеет непрерывную производную.

Введем интеграл

$$\int_S f^+(z) dz = \int_0^T f^+(z) z'(t) dt. \quad (2.3)$$

Будем считать, что параметризация (2.2) задана так, что при возрастании t точка обходит кривую S , оставляя множество E_* слева. Из правила замены переменных в интеграле следует, что интеграл (2.3) не зависит от произвола в выборе параметризации (2.2) кривой S .

В частности, в качестве параметра может быть выбрана длина (s) дуги кривой (мера H), отсчитываемая от некоторой фиксированной точки:

$$z = z(s). \quad (2.4)$$

В этом случае равенство (2.3) можно записать в виде

$$\int_S f^+(z) dz = \int_S f^+(z) z'(s) dH. \quad (2.5)$$

Легко проверить, что $|z'(s)| = 1$. Если положить $z(s) = x(s) + iy(s)$, то вектор $(x'(s), y'(s))$ является единичным касательным вектором к S . Учитывая, что нормаль v , входящая в равенство (2.1), является внешней, мы легко установим связь между числами $v_x + iv_y$ и $z'(s)$:

$$z'(s) = i(v_x - iv_y), \quad (2.6)$$

так как умножение на число i есть поворот на $\pi/2$ против часовой стрелки. Отсюда следует, что равенство (2.5) можно записать следующим образом:

$$\int_S f^+(z) dz = i \int_S f^+(z)(v_x - iv_y) dH. \quad (2.7)$$

В этом равенстве уже можно отказаться от предположений гладкости, сделанных выше. Теперь можно считать E произвольным множеством с конечным периметром, S — его существенной границей, а вектор $v = (v_x, v_y)$ — внешней нормалью

В новых обозначениях равенство (2.1) можно записать в виде

$$\iint_{E^*} \frac{df}{dz} dx dy = \frac{1}{2i} \int_S f^+(z) dz. \quad (2.8)$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Пусть $f \in BV$, E — ограниченное множество с конечным периметром, S — его существующая граница. Пусть, далее, внутренний след f^+ функции f суммируем на S по одномерной мере Хаусдорфа H . Тогда имеет место равенство (2.8).

Заметим, что интеграл справа в (2.8) определен равенством (2.7) и, как было объяснено выше, в случае гладкой кривой S вычисляется по формуле (2.3).

3. Аналитические функции. Теорема Коши. Определение. Функция $f(z)$, заданная на открытом множестве G и принадлежащая пространству $BV(G)$, называется *аналитической* на множестве $E \subset G$, если мера df/dz равна нулю на каждом ограниченном борелевском подмножестве множества E .

Равенство

$$\frac{df}{dz} = 0, \quad (3.1)$$

входящее в определение аналитичности функции f , можно на основании (1.2) записать также в виде

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.2)$$

или, отделяя вещественную и мнимую части,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.3)$$

Равенства (3.1)–(3.3) следует понимать как равенства мер (две меры считаются равными, если они совпадают на всех ограниченных борелевских подмножествах множества E).

В случае, когда E — открытое множество, как будет показано ниже, аналитическая функция $f(z)$ имеет непрерывные частные производные по x и y . Поэтому для открытого множества E определение аналитичности можно дать следующим образом: функция $f(z)$ называется аналитической на множестве E , если она имеет непрерывные производные по x и y и в каждой точке множества E выполняется условие (3.2).

Условие (3.2) (или эквивалентное ему условие (3.3)) называется *условием Коши — Римана*.

Из самого определения аналитичности функции ясно, что любая функция, аналитическая на множестве G , является также аналитической на множестве E .

Рассмотрим, какие операции можно производить над аналитическими функциями.

Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две аналитические функции на множестве E . Тогда, очевидно, аналитической функцией будет и их линейная комбинация $\alpha f(z) + \beta g(z)$, где α и β — комплексные числа.

Далее, будем сначала для простоты считать функции f и g ограниченными в G . Тогда произведение $f(z)g(z)$ является аналитическим на множестве E функций. Действительно, применяя формулу (IV.6.4.1) дифференцирования произведения, получим

$$\frac{d(fg)}{dz} = \bar{f} \frac{dg}{dz} + \bar{g} \frac{df}{dz}. \quad (3.4)$$

Так как в силу определения аналитической функции правая часть этого равенства обращается в нуль на всех борелевских подмножествах множества E , то это же имеет место и для левой части. Отсюда сле-

дуг аналитичность произведения. Если функции f и g не ограничены, то утверждение об аналитичности их произведения остается верным при условиях, обеспечивающих возможность дифференцировать произведение. Они сформулированы в п. IV 6.4.

Точно так же можно доказать, что если функция $|g(z)|$ ограничена снизу: $|g(z)| \geq \mu > 0$, где μ — константа, а функция $f(z)$ ограничена, то частное $f(z)/g(z)$ является аналитической на множестве E функцией. Для доказательства нужно воспользоваться формулой дифференцирования суперпозиции (п. IV.6.3). Утверждение об аналитичности частного остается справедливым и без указанных ограничений, если только выполняются условия теоремы о дифференцировании суперпозиции применительно к рассматриваемому случаю.

Теорема о дифференцировании суперпозиции, сформулированная в п. IV 6.3, может быть использована также для доказательства аналитичности суперпозиции $f(u(z))$, если только f и u являются аналитическими функциями и выполняются условия этой теоремы.

Заметим, что в данном выше определении можно заменить требование принадлежности к $BV(G)$ требованием, чтобы обобщенный градиент ∇f локально был мерой.

Из формулы Грина (2.8) получается следующее утверждение (*теорема Коши*). Если выполняются условия теоремы п. 2 и функция $f(z)$ является аналитической на множестве E_+ , то

$$\int_S f^+(z) dz = 0. \quad (3.5)$$

В частности, если непрерывная функция $f(z)$ является аналитической на открытом множестве G , то для любого множества E с конечным периметром такого, что $E \cup S \subset G$, где S — существенная граница множества E , имеет место равенство

$$\int_S f(z) dz = 0. \quad (3.6)$$

4. Разрывные аналитические функции. Определение. Функция $f(z)$, заданная на открытом множестве G и локально принадлежащая пространству $BV(G)$, называется *разрывной аналитической функцией* на множестве G , если она является аналитической функцией вне множества точек скачка.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что в качестве G взята вся комплексная плоскость. Как правило, к этому случаю можно свести общий случай, доопределив функцию f нулем вне G .

С разрывными аналитическими функциями мы встречаемся при изучении граничных задач: многие задачи математической физики сводятся к определению аналитических функций по заданным условиям на скачках. Разрывные аналитические функции естественно возникают и при выполнении некоторых операций над непрерывными функциями. Например, \sqrt{z} не может быть определен по всей плоскости как непрерывная однозначная функция, но может быть определен как разрывная функция (в качестве множества точек скачка может быть взята, например, отрицательная вещественная полуось).

По поводу данного выше определения разрывной аналитической функции заметим, что множество точек скачка функции $f \in BV$ не является, вообще говоря, замкнутым. Поэтому требование аналитичности функции вне множества точек скачка должно опираться на понятие аналитической функции на множествах, не являющихся открытыми. Поэтому здесь нужно пользоваться общим определением п. 3, а не его вариантом, рассчитанным на открытые множества и гладкие функции $f(z)$.

5. Полный скачок. Для функций комплексной переменной полный скачок удобно определить, опираясь на определение скачка, данное в п. 1. Именно, если $\Delta f(z)$ есть скачок функции $f(z)$, определенный равенством (1.3), то *полным скачком* называется число

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(f)} \Delta f(z) dH, \quad (5.1)$$

где $\Gamma(f)$ — множество точек скачка функции $f(z)$. При этом мы предполагаем, что функция $f(z)$ локально принадлежит пространству BV и что интеграл (5.1) существует. Заметим, что этот интеграл заведомо существует, если $f \in BV$. Кроме того, функция $\Delta f(z)$ суммируема по одномерной мере Хаусдорфа H на множестве $\Gamma(f) \cap K$, где K — произвольный шар.

Введем понятие *вычета* функции $f(z)$ на бесконечности. Этот вычет будет обозначаться $\text{Res } f(\infty)$ и по определению

$$\text{Res } f(\infty) = - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \bar{f}(z) dz, \quad (5.2)$$

где $\bar{f}(z)$ — среднее значение (1.4), C_R — окружность $|z| = R$.

Теорема. Если $f(z)$ — разрывная аналитическая функция и существует интеграл (5.1), то существует также предел (5.2) и имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(f)} \Delta f(z) dH = \text{Res } f(\infty), \quad (5.3)$$

т. е. *полный скачок разрывной аналитической функции равен ее вычету на бесконечности.*

Доказательство. Рассмотрим круг K_R : $|z| < R$. По формуле Грина (2.8) мы можем записать

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{K_R} \frac{df}{dz} dx dy = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f^+(z) dz. \quad (5.4)$$

С другой стороны, имеем

$$K_R = (\Gamma(f) \cap K_R) \cup (K_R - \Gamma(f)).$$

Поэтому в силу определения разрывной аналитической функции и формулы (1.5.1)

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{K_R} \frac{df}{dz} dx dy = -\frac{1}{\pi} \iint_{K_R \cap \Gamma(f)} \frac{df}{dz} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{K_R \cap \Gamma(f)} \Delta f dH. \quad (5.5)$$

Сравнивая (5.4) и (5.5) и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получим, что полный скачок равен пределу правой части равенства (5.4).

Аналогично, взяв в качестве K_R шар $|z| \leq R$, получим, что *полный скачок равен пределу при $R \rightarrow \infty$ интеграла*

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f^-(z) dz,$$

где $f^-(z)$ — внешний след. Беря полусумму полученных пределов и учитывая равенство (1.4), заключаем, что имеет место равенство (5.3). Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если разрывная аналитическая функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$|z \bar{f}(z)| \rightarrow 0 \quad (5.6)$$

при $|z| \rightarrow \infty$, то *полный скачок этой функции равен нулю.*

Доказательство следует из того, что при выполнении условия $\text{Res } f(\infty) = 0$.

6. Выражение аналитической функции через скачок. Теорема. Пусть $f(z)$ — разрывная аналитическая функция, $f^{\bullet}(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Тогда имеет место равенство

$$\bar{f}(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(f)} \frac{\Delta f(z) dH}{z - z_0} \quad (6.1)$$

в каждой точке z_0 , в которой существует интеграл (6.1).

Доказательство. Пусть $r > 0$ — заданное число. Рассмотрим функцию

$$\Phi_r(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z - z_0} & \text{при } |z - z_0| > r, \\ 0 & \text{при } |z - z_0| \leq r. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет условию следствия предыдущего пункта и поэтому

$$\int_{\Gamma(f)} \Delta \Phi_r(z) dH = 0.$$

Учитывая равенство (1.3), это можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(f) \cap D_r} \frac{\Delta f(z) dH}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{f^-(z)(v_x + iv_y) dl}{z - z_0}, \quad (6.2)$$

где D_r — множество $|z| > r$; C_r — окружность $|z| = r$; $f^-(z)$ — внешний след функции f на C_r ; v — внешняя нормаль к окружности.

Интеграл в правой части (6.2) можно, очевидно, записать в виде

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} f^-(z) dH. \quad (6.3)$$

Так как существует интеграл (6.1), то существует предел левой части равенства (6.2) при $r \rightarrow 0$. Следовательно, существует предел и правой части, т. е. интеграла (6.3). Интеграл (6.3) является средним значением функции $f^-(z)$ по окружности C_r , и его предел равен пределу $\bar{f}(z_0)$ усреднения по шару (подробнее об этом см. п. VII.4.3). Переходя в (6.2) к пределу при $r \rightarrow 0$, получим (6.1). Теорема доказана.

Эта теорема может быть использована, в частности, для выражения аналитической функции через ее граничные значения. Действительно, если функция является аналитической на некотором множестве, то, доопределив ее нулем вне этого множества, мы получим, что скачок этой функции на границе равен ее внутреннему следу.

Например, пусть функция $f(z)$ задана и аналитична на ограниченном открытом множестве G с конечным периметром, граница S которого совпадает с существенной границей. Доопределим эту функцию нулем вне G . Предположим, что так полученная функция принадлежит пространству BV . Тогда в каждой точке $z_0 \in G$ будет выполняться равенство

$$\bar{f}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f^+(z) dz}{z - z_0}, \quad (6.4)$$

где $f^+(z)$ — внутренний след функции $f(z)$.

Действительно, ясно, что $\Gamma(f) \in S$. На множестве $S - \Gamma(f)$ $f^+(z) = 0$. Поэтому в силу (6.1)

$$\bar{f}(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{f^+(z)[v_x + iv_y] dH}{z - z_0},$$

где ν — внешняя нормаль. Отсюда и из (2.7) следует (6.4).

Равенство (6.4) называется *формулой Коши*. Из этой формулы следует, что если $f(z)$ — аналитическая на открытом множестве функция, то ее среднее значение $\bar{f}(z)$ является непрерывной и даже неограниченно дифференцируемой функцией.

§ 3. ПРОСТРАНСТВО BV^2

1. Пространство W_2^1 [48]. Пусть G — открытое множество в пространстве R^n . Пространство функций, заданных на множестве G , суммируемых в квадрате и имеющих первые обобщенные производные, суммируемые в квадрате, будем обозначать W_2^1 . Легко непосредственно проверить, что W_2^1 является линейным пространством. Для любых двух функций $u, v \in W_2^1$ определим скалярное произведение следующим образом:

$$(u, v) = \int_G uv dx + \int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \quad (1.1)$$

Существование интегралов, входящих в (1.1), следует из теоремы 1 п. II.4.1.

Норма в пространстве W_2^1 определяется равенством

$$\|u\|^2 = \int_G u^2 dx + \int_G \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx. \quad (1.2)$$

Пространство W_2^1 с нормой (1.2) является полным [48]. Таким образом, W_2^1 является гильбертовым пространством.

2. Пространство BV^2 . Пространство, которое будет сейчас введено, использует поведение функций на границе. Поэтому мы будем рассматривать не произвольные открытые множества, а множества с конечным периметром.

Пусть G — ограниченное открытое множество с конечным периметром, S — его существенная граница. Для простоты мы будем предполагать множество G связным. Это значит, что любые две его точки можно соединить ломаной линией, целиком лежащей в G .

Пространство BV^2 есть пространство функций $u(x)$, заданных в R^n , равных нулю вне множества G и удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $u(x) \in BV$;
- 2) $u(x)$ имеет суммируемые в квадрате обобщенные производные в G ;
- 3) внутренний след $u^+(x)$ на S суммируем в квадрате по мере H_{n-1} .

Иногда, чтобы указать, в какой области ведутся рассуждения, мы будем писать $BV^2(G)$.

Ясно, что BV^2 является линейным пространством. Скалярное произведение в BV^2 вводится следующим образом: для любых двух функций $u, v \in BV^2$ полагаем

$$(u, v) = \int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_S u^+ v^+ dH_{n-1}. \quad (2.1)$$

Проверим, что выполняются аксиомы скалярного произведения. Очевидно, $(u, u) \geq 0$. Пусть $(u, u) = 0$. Тогда

$$\int_G \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = 0 \quad (2.2)$$

и

$$\int_S u^{+2} dH_{n-1} = 0. \quad (2.3)$$

Ввиду связности множества G из (2.2) мы заключаем, что $u(x)$ есть константа. Из (2.3) следует, что эта константа равна нулю. Остальные аксиомы скалярного произведения очевидны.

Норма в пространстве BV^2 задается равенством

$$\|u\|^2 = \int_G \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_S u^{+2} dH_{n-1}. \quad (2.4)$$

3. Оценка нормы. На функциях $u(x)$, принадлежащих пространству BV^2 , введем норму BV :

$$\|u\|_{BV} = \int |\nabla u| dx. \quad (3.1)$$

Здесь интегрирование распространяется по всему пространству и понимается как полная вариация меры ∇u на пространстве R^n . Обозначим норму, заданную равенством (2.4), через $\|u\|_{BV^2}$.

Теорема. Существует константа K такая, что для любой функции $u \in BV^2$ имеет место оценка

$$\|u\|_{BV} \leq K \|u\|_{BV^2}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Имеем

$$\|u\|_{BV} = \int_G |\nabla u| dx + \int_S |\nabla u| dx + \int_{(G \cup S)'} |\nabla u| dx, \quad (3.3)$$

где $(G \cup S)'$ — дополнение множества $G \cup S$ до всего пространства.

Оценим каждое слагаемое. Легко видеть в силу определения пространства BV^2 , что первый из интегралов можно трактовать не только как полную вариацию меры ∇u на множестве G , но также как интеграл

$$\int_G \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2} dx, \quad (3.4)$$

где под знаком интеграла стоят функции $\partial u / \partial x_i$ — обобщенные производные, которые по предположению суммируемы в квадрате. Применяя к этому интегралу неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\int_G |\nabla u| dx \leq |G| \left[\int_G \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right]^{1/2}, \quad (3.5)$$

где $|G|$ — мера Лебга множества G .

Далее, по формуле (1.4.4) имеем

$$\int_B \nabla u dx = \int_B u \nu dH_{n-1}, \quad (3.6)$$

так как $u^- = 0$. Здесь B — произвольное борелевское множество, принадлежащее S ; ν — внутренняя нормаль.

Взяв полную вариацию мер (3.6) на S , получим

$$\int_S |\nabla u| dx = \int_S |u^+| dH_{n-1}. \quad (3.7)$$

Из неравенства Коши — Буняковского теперь следует

$$\int_S |\nabla u| dx \leq \sqrt{H_{n-1}(S)} \left(\int_S u^{+2} dH_{n-1} \right)^{1/2}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим последнее слагаемое в (3.3). Пользуясь формулой Грина (I.4.2), получим для любого множества E с конечным периметром, принадлежащего множеству $(G \cup S)'$:

$$\int_{E_*} \nabla u dx = \int_{\Gamma} u^+ \nu dH_{n-1} = 0,$$

где Γ — существенная граница множества E . Отсюда следует, что последнее слагаемое в (3.3) равно нулю.

Поэтому из (3.3), (3.5) и (3.8) заключаем, что имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|u\|_{BV}^2 &\leq 2 \left(\int_G |\nabla u| dx \right)^2 + 2 \left(\int_S |\nabla u| dx \right)^2 \leq \\ &\leq 2(|G| + H_{n-1}(S)) \|u\|_{BV}^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

4. Полнота. Теорема. *Пространство BV^2 является полным пространством.*

Доказательство. Пусть $\{u_m\}$ — фундаментальная последовательность в пространстве BV^2 . В силу неравенства (3.2) эта последовательность является также фундаментальной в пространстве BV . Ввиду полноты этого пространства существует функция $u(x) \in BV$ такая, что

$$\|u_m - u\|_{BV} \longrightarrow 0. \quad (4.1)$$

Отсюда, в частности, следует, что для любой финитной в G непрерывной функции φ имеем

$$\int \varphi \frac{\partial u_m}{\partial x_i} dx \longrightarrow \int \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (4.2)$$

С другой стороны, так как последовательность $\{\partial u_m / \partial x_i\}$ фундаментальна в L^2 , то существует функция $v_i \in L^2$ такая, что

$$\int_G \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} - v_i \right|^2 dx \longrightarrow 0. \quad (4.3)$$

Отсюда и из (4.2) заключаем, что $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$, так что $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2$ (в G),

и

$$\int_G \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.4)$$

Рассмотрим пространство $L^2(S)$ функций, суммируемых в квадрате на S по мере H_{n-1} . Последовательность $\{u_m^+\}$ является фундаментальной в этом пространстве. Поэтому существует функция $v \in L^2(S)$ такая, что

$$\int_S |u_m^+ - v|^2 dH_{n-1} \longrightarrow 0. \quad (4.5)$$

Но в силу (3.3), (3.7) и (4.1) имеем

$$\int_S |u_m^+ - u^+| dH_{n-1} \leq \|u - u_m\|_{BV} \longrightarrow 0. \quad (4.6)$$

Так как на основании (4.5)

$$\int_S |u_m^+ - v| dH_{n-1} \longrightarrow 0,$$

то из (4.6) мы можем заключить, что $u^+ = v$. Подстановка в (4.5) дает

$$\int_S |u_m^+ - u^+|^2 dH_{n-1} \longrightarrow 0. \quad (4.7)$$

Из (4.4) и (4.7) получаем

$$\|u_m - u\|_{BV^2} \longrightarrow 0.$$

Из (4.1) легко также получить, что $u(x) = 0$ вне множества G почти всюду. Теорема доказана.

5. Вложение в пространство L^2 . Теорема. Если функция $u(x)$ принадлежит пространству BV^2 , то она принадлежит также пространству L^2 и имеет место оценка

$$\|u\|_{L^2} \leq M \|u\|_{BV^2}, \quad (5.1)$$

где константа M не зависит от u .

Доказательство. Рассмотрим сначала одномерный случай. Так как множество G имеет конечный периметр, то G состоит из конечного числа попарно не пересекающихся отрезков: $G = \bigcup_i \Delta_i$, где

$\Delta_i = (a_i, b_i)$. Пусть $x \in G$. Тогда

$$u(x) = u^+(a_i) + \int_{a_i}^x u'(x) dx, \quad (5.2)$$

где a_i — левая граничная точка того интервала, которому принадлежит x . Из (5.2) имеем

$$u^2(x) \leq 2u^{+2}(a_i) + 2(b_i - a_i) \int_{a_i}^{b_i} u'^2(x) dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{b_i} u^2(x) dx &\leq 2(b_i - a_i)[u^{+2}(a_i) + (b_i - a_i) \int_{a_i}^{b_i} u'^2(x) dx] \leq \\ &\leq 2|G| [u^{+2}(a_i) + |G| \int_{a_i}^{b_i} u'^2(x) dx], \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $|G| = \sum_i (b_i - a_i)$.

Складывая неравенства (5.3) по всем i , получим

$$\int_G u^2(x) dx \leq 2|G| \left[\sum_i u^{+2}(a_i) + |G| \int_G u'^2(x) dx \right]. \quad (5.4)$$

Таким образом, неравенство (5.1) в одномерном случае доказано.

Рассмотрим многомерный случай. Пусть $x = (x_1, x')$, где $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Обозначим через $G(x')$ сечение множества G прямой, параллельной оси x_1 и проходящей через точку x' . Так как G есть множество с конечным периметром, то при почти всех x' (по $(n-1)$ -мерной мере на плоскости $x_1 = 0$) сечения $G(x')$ состоят из конечного числа отрезков. При каждом таком x' на основании доказанного равенства (5.4) имеем

$$\begin{aligned} \int_{G(x')} u^2(x_1, x') dx_1 &\leq 2|G(x')| \left[\sum_i u^{+2}(a_i, x') + \right. \\ &\left. + |G(x')| \int_{G(x')} u'^2_{x_1}(x_1, x') dx_1 \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ясно, что ввиду ограниченности множества G функция $|G(x')|$ ограничена: $|G(x')| < K$. Подставив в (5.5) вместо $|G(x')|$ число K и проинтегрировав по x' , получим

$$\int_G u^2(x) dx \leq 2K \left[\int_{G_1} \sum_i u^{-2}(a_i(x'), x') dx' + K \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx \right], \quad (5.6)$$

где G_1 — проекция множества G на плоскость $x_1 = 0$.

Можно показать (см. [12]), что с точностью до множества $(n-1)$ -мерной меры нуль все точки (a_i, x') принадлежат существенной границе S , а $u^+(a_i, x')$ есть внутренний след функции u . Поэтому

$$\int_{G_1} \sum_i u^{+2}(a_i, x') dx' \leq \int_S u^{+2} dH_{n-1}.$$

Подставив в (5.6), получим оценку (5.1). Теорема доказана.

6. Полная непрерывность оператора вложения. Обозначим через I оператор вложения пространства BV^2 в пространство L^2 . Это значит, что оператор I каждой функции $u(x)$, принадлежащей пространству BV^2 , ставит в соответствие ту же функцию, рассматриваемую как элемент пространства L^2 . Из теоремы п. 5 следует, что оператор I ограничен. Мы покажем здесь, что он является вполне непрерывным оператором.

Теорема 1. Пусть функция $u(x)$ принадлежит пространству $BV^2(G)$. Тогда для любого вектора h имеет место оценка

$$\int |u(x+h) - u(x)|^2 dx \leq 6n^2 |h| \left\{ |h| \int_G \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_S u^{+2}(x) dH_{n-1} \right\}. \quad (6.1)$$

Доказательство. Предположим сначала, что $n = 1$. Как и в п. 5, будем считать, что $G = \bigcup_i \Delta_i$, где Δ_i — интервалы. Обозначим

$$A = \int |h(x+h) - u(x)|^2 dx. \quad (6.2)$$

Так как G — ограниченное множество, то интегрирование производится в конечных пределах. Пусть $h > 0$. Разобьем отрезок интегрирования на части точками деления a_k с шагом h . Тогда $A = \sum_k A_k$, где

$$A_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} |u(x+h) - u(x)|^2 dx. \quad (6.3)$$

При $x \in [a_k, a_{k+1}]$ оценим $|u(x+h) - u(x)|$. Оценку будем производить в точках x , в которых функции $u(x)$ и $u(x+h)$ аппроксимативно непрерывны. Так как множество таких точек имеет полную меру, то этого достаточно для дальнейшего.

Предположим, что между точками x и $x+h$ имеются граничные точки интервалов Δ_i (в случае их отсутствия оценка только упрощается). Обозначим через α точку, ближайшую к x , а через β — точку, ближайшую к $x+h$. Тогда

$$\begin{aligned} |u(x+h) - u(x)| &\leq \int_x^\alpha |u'(\xi)| d\xi + |u^+(\alpha)| + \int_\beta^{x+h} |u'(\xi)| d\xi + |u^+(\beta)| \leq \\ &\leq \int_x^{x+h} |u'(\xi)| d\xi + |u^+(\alpha)| + |u^+(\beta)|. \end{aligned} \quad (6.4)$$

здесь u^+ обозначает аппроксимативный предел по множеству G , $u'(x)$ — функция, равная обобщенной производной $u(x)$ в G и нулю вне G . Из (6.4) получаем

$$|u(x+h) - u(x)|^2 \leq 3 \left[h \int_x^{x+h} u'^2(\xi) d\xi + u^{+2}(\alpha) + u^{+2}(\beta) \right]. \quad (6.5)$$

Обозначим все граничные точки интервалов Δ_i , принадлежащие отрезку $[a_k, a_{k+2}]$, через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$. Тогда из (6.5) следует

$$|u(x+h) - u(x)|^2 \leq 3 \left[h \int_x^{x+h} u'^2(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^s u^{+2}(\gamma_i) \right].$$

Отсюда и из (6.3) получаем

$$A_k \leq 3 \left[h \int_{a_k}^{a_{k+1}} dx \int_x^{x+h} u'^2(\xi) d\xi + h \sum_{i=1}^s u^{+2}(\gamma_i) \right].$$

Сложение по всем k приводит к неравенству

$$A \leq 3 \left[h \int dx \int_x^{x+h} u'^2(\xi) d\xi + 2h \sum_i u^{+2}(\gamma_i) \right], \quad (6.6)$$

где \sum обозначает суммирование по всем граничным точкам интервалов Δ_i .

Перестановкой порядка интегрирования получим

$$\int dx \int_x^{x+h} u'^2(\xi) d\xi = h \int u'^2(\xi) d\xi.$$

Отсюда и из (6.6) следует

$$A \leq 6|h| \left[|h| \int u'^2(x) dx + \sum_i u^{+2}(\gamma_i) \right]. \quad (6.7)$$

При этом мы заменили h на $|h|$ с тем, чтобы полученное неравенство было верным и при $h < 0$.

Перейдем к многомерному случаю. Пусть $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$. Положим $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Во всех точках x' , в которых сечение множества G прямой $l(x')$, параллельной оси x_1 и проходящей через точку x' , имеет конечный периметр и функция $u(x_1, x')$ как функция переменной x_1 принадлежит пространству BV , из (6.7) следует

$$\begin{aligned} & \int |u(x_1 + h_1, x') - u(x_1, x')|^2 dx_1 \leq \\ & \leq 6|h_1| \left[|h_1| \int_{G \cap l(x')} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 + \sum_i u^{+2}(\gamma_i(x'), x') \right]. \end{aligned}$$

Так как указанное множество точек x' имеет полную $(n-1)$ -мерную меру на плоскости $x_1 = 0$, то, интегрируя по x' (см. соответствующее место в доказательстве теоремы п. 5), получим

$$\begin{aligned} & \int |u(x_1 + h_1, x') - u(x_1, x')|^2 dx \leq \\ & \leq 6|h_1| \left[|h_1| \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx + \int_S u^{+2}(x) dH_{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Точно такая же оценка может быть получена и для всех остальных x_i ($i = 2, \dots, n$). Именно, обозначая через e_i единичный вектор в направлении оси x_i , мы можем записать

$$\int |u(x + h e_i) - u(x)|^2 dx \leq 6|h| \left[|h| \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_S u^{+2}(x) dH_{n-1} \right]. \quad (6.8)$$

Кроме того, имеет место очевидное неравенство

$$\int |u(x+h) - u(x)|^2 dx \leq n \sum_i \int |u(x + h e_i) - u(x)|^2 dx.$$

Отсюда и из (6.8) получаем (6.1). Теорема доказана.

Теорема 2. *Оператор I вложения пространства BV^2 в пространство L^2 вполне непрерывен.*

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1, теоремы п. 5 и критерия компактности множеств в пространстве L^2 (п. II 4 3).

7. Регулярные точки границы. Мы рассмотрели теоремы вложения пространства BV^2 в пространство L^2 . Другим видом теорем вложения является вложение следа функции, принадлежащей пространству $W_2^1(G)$, в пространство функций, суммируемых в квадрате на существенной границе S множества G или ее части. Такое вложение не всегда имеет место: требуется некоторое условие регулярности границы. В этом пункте мы введем понятие регулярных точек границы и получим оценки, из которых будет следовать указанное выше вложение для функций $u \in BV$. Эти оценки понадобятся в дальнейшем при изучении граничных задач.

Определение. Пусть E — множество с конечным периметром, S — его существенная граница, $\nu(x)$ — нормаль в точке $x \in S$ (для определенности — внешняя). Точка x_0 , принадлежащая замыканию существенной границы S , называется *регулярной точкой* (относительно S), если существуют шар $K(x_0)$ с центром в точке x_0 , вектор a и число $\delta > 0$ такие, что

$$(a, \nu(x)) > \delta \quad (7.1)$$

для почти всех (по $(n-1)$ -мерной мере) точек $x \in S \cap K(x_0)$.

Смысл условия (7.1) состоит в следующем: найдется такое направление a , что в некоторой окрестности точки x_0 нормали к S образуют острые углы с этим направлением и эти углы не могут неограниченно приближаться к прямому.

Простейшим примером регулярных точек являются точки множества S , в окрестности которых $\nu(x)$ есть непрерывная функция точки x . Однако непрерывность нормали вовсе не обязательна для регулярности. Например, если E есть множество

$$x_2 > |x_1|,$$

то начало координат есть регулярная точка границы, однако нормаль здесь терпит разрыв (рис. 3).

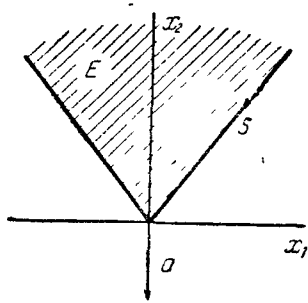


Рис 3

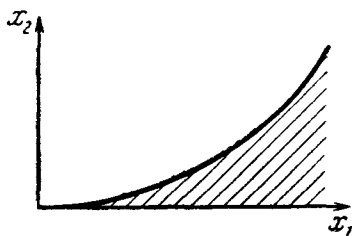


Рис 4

Приведем пример точки, не являющейся регулярной. Пусть E — множество точек на плоскости (x_1, x_2) , координаты которых удовлетворяют неравенству

$$0 \leq x_2 \leq x_1^\alpha \quad (\alpha > 1), \quad x_1 > 0. \quad (7.2)$$

Начало координат не является регулярной точкой (рис. 4).

Теорема. Пусть G — открытое множество с конечным периметром, F — замкнутое множество, все точки которого являются регулярными относительно существенной границы S множества G . Тогда для любой функции $u \in BV^2(G)$ имеет место оценка

$$\int_{F \cap S} u^{+2} dH_{n-1} \leq \varepsilon \int_G \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_G u^2 dx, \quad (7.3)$$

где u^+ — внутренний след функции u на S ; ε и C — некоторые константы, не зависящие от функции u ; число $\varepsilon > 0$ можно взять сколь угодно малым.

Доказательство. Каждой точке $x \in F$ поставим в соответствие шар, входящий в определение регулярности. Будем рассматривать шары вдвое меньших радиусов. Они покрывают все множество F . В силу определения регулярных точек множество F принадлежит замыканию существенной границы S . Поэтому оно ограничено. Так как множество F по условию замкнуто, то из указанного покрытия можно выбрать конечное покрытие. Пусть это будет

$$K^1, K^2, \dots, K^m. \quad (7.4)$$

По определению регулярной точки для каждого шара K^i из (7.4) можно указать вектор a^i и число ε^i такие, что

$$(a^i, \nu(x)) \geq \varepsilon^i \quad (7.5)$$

для почти всех по $(n-1)$ -мерной мере точек $x \in \bar{K}^i \cap S$. Здесь \bar{K}^i — шар, концентрический с K^i и имеющий вдвое больший радиус. Пусть $\rho_i(x)$ — функция, заданная во всем пространстве, равная нулю вне шара \bar{K}^i , равная единице в шаре K^i и имеющая непрерывные производные. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$2 \int_G (a^i, \nabla u) \rho_i(x) dx = \int_G (a^i, \nabla (u^2)) \rho_i(x) dx = - \int_G \operatorname{div} (\rho_i a^i) u^2(x) dx + \int_S \rho_i(x) (a^i, \nu) u^{+2}(x) dH_{n-1}.$$

Отсюда на основании (7.5) следует

$$\varepsilon_0 \int_S \rho_i(x) u^{+2}(x) dH_{n-1} \leq 2 \int_G (a^i, \nabla u) \rho_i(x) dx + \int_G \operatorname{div} (\rho_i a^i) u^2 dx. \quad (7.6)$$

Здесь ε_0 обозначает наименьшее из чисел ε^i , входящих в (7.5).

Введем обозначения:

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^m \rho_i(x), \quad a(x) = \sum_{i=1}^m a^i \rho_i(x).$$

Складывая неравенства (7.6) по i , получим

$$\varepsilon_0 \int_S \rho(x) u^{+2}(x) dH_{n-1} \leq 2 \int_G (a, \nabla u) u dx + \int_G \operatorname{div} a(x) u^2(x) dx. \quad (7.7)$$

Ясно, что функции $a(x)$ и $\operatorname{div} a(x)$ ограничены:

$$|a(x)| \leq K, \quad |\operatorname{div} a(x)| \leq K. \quad (7.8)$$

Далее, на множестве F имеет место оценка

$$\rho(x) \geq 1, \quad (7.9)$$

так как шары (7.4) покрывают множество F . Из (7.7)—(7.9) следует

$$\varepsilon_0 \int_{F \cap S} u^{+2}(x) dH_{n-1} \leq 2K \int_G |\nabla u| |u| dx + K \int_G u^2(x) dx.$$

Для получения оценки (7.3) остается только заметить, что

$$\int_G |\nabla u| |u| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_G |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_G u^2 dx,$$

где ε — произвольное положительное число. Теорема доказана.

Для дальнейшего удобна следующая терминология. Мы будем называть множество точек *регулярным* (относительно S), если его замыкание состоит из регулярных точек. В частности, существенная граница S регулярна, если ее замыкание состоит из регулярных точек.

Для случая, когда существенная граница S регулярна, неравенство (7.3) принимает вид

$$\int_S u^{+2} dH_{n-1} \leq \varepsilon \int_G \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_G u^2 dx. \quad (7.10)$$

Заметим, что неравенство (7.10) может не иметь места, если *хотя бы одна* точка замыкания существенной границы не является регулярной.

Пример Рассмотрим множество G , заданное неравенствами (7.2) при $\alpha = 3$. Пусть для определенности это множество ограничено справа прямой $x_1 = 1$. Все точки замыкания существенной границы регулярны, кроме начала координат. Покажем, что (7.10) не имеет места ни с какими константами C и ε .

Действительно, пусть

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1}}. \quad (7.11)$$

Ясно, что

$$\int_S u^{+2} dH_{n-1} = +\infty. \quad (7.12)$$

Правая часть в (7.10) ограничена, так как

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx = \int_G \frac{1}{4x_1^3} dx = \frac{1}{4}.$$

Аналогично проверяется ограниченность интеграла от u^2 по множеству G .

Если мы рассмотрим срезку $u_N(x)$ функции (7.11) $u_N(x) = u(x)$ при $u(x) < N$ и $u_N(x) = N$ при $u(x) > N$, то в силу (7.12) получим, что в (7.10) невозможно подобрать константы ε и C , общие для всех u_N .

§ 4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Мы покажем, как используются понятия и формулы этого раздела при математическом выражении физических законов сохранения — законов сохранения массы и энергии.

1. Дифференциальная форма законов сохранения. Математическое выражение законов сохранения получается сначала в интегральной форме, а затем, пользуясь формулой Грина, их записывают в дифференциальной форме. Переход к дифференциальной форме требует некоторых предположений о гладкости функций, причем тем меньших, чем более широкий класс функций можно охватить с помощью формулы Грина. Формулы, выведенные в § 1, дают возможность рассмотреть произвольные функции, принадлежащие пространству BV , в том числе разрывные.

Начнем с простого, но достаточно характерного примера — *уравнения непрерывности*: уравнения сохранения вещества в механике сплошной среды (см., например, [26]). Интегральная форма записи этого закона сохранения имеет вид

$$\int_G \rho(x, t_2) dx - \int_G \rho(x, t_1) dx = - \int_{t_1}^{t_2} \int_S \rho(x, t) (v(x, t), \nu(x)) dH_2. \quad (1.1)$$

Здесь $\rho(x, t)$ — плотность вещества, $v(x, t)$ — скорость, рассматриваемые как функции точек x трехмерного пространства и времени t ; G — область в трехмерном пространстве; S — его существенная граница; $\nu(x)$ — внешняя нормаль к ней; (v, ν) — скалярное произведение векторов v и ν ; H_2 — двумерная мера Хаусдорфа.

В левой части равенства (1.1) стоит изменение массы вещества, которое произошло с момента времени t_1 до момента t_2 , в правой части — количество вещества, которое проходит через поверхность S с момента времени t_1 до момента t_2 (предполагается, что в области G нет источников вещества).

Мы можем к левой и правой частям равенства (1.1) применить формулу Грина. Строго говоря, если функции ρ и v разрывны, то мы должны были бы писать в равенстве (1.1) внутренние (или внешние) следы этих функций. Однако это не имеет значения, так как существует достаточный набор областей G и интервалов (t_1, t_2) таких, что функции v и ρ аппроксимативно непрерывны на существенных границах множеств $G \times (t_1, t_2)$, почти всюду по трехмерной мере. Мы можем считать, что именно для таких областей записано равенство (1.1). При этом под достаточным набором множеств мы понимаем такую систему множеств, что из равенства нулю регулярной меры на всех этих множествах следует, что она равна нулю на всех борелевских множествах.

Пользуясь формулой Грина, мы получаем из (1.1)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_G \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_G \operatorname{div}(\rho v) dx dt, \quad (1.2)$$

откуда следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (1.3)$$

Подчеркнем, что обобщенные производные, входящие в это равенство, являются мерами, и поэтому это равенство следует понимать как *равенство мер*. Равенство (1.3) называют уравнением непрерывности. Оно является дифференциальной формой указанного выше *закона сохранения вещества*.

Если обобщенные производные, входящие в равенство (1.3), суммируемы, то это равенство можно понимать также как поточечное. Однако предположение о суммируемости является слишком сильным, так как оно исключает важный случай, когда ρ и v — разрывные функции.

Рассуждения, проведенные выше, носят общий характер. Они могут быть применены и в других случаях и, в частности, для других уравнений гидродинамики, выражающих законы сохранения импульса и энергии. Эти уравнения при указанном подходе будут иметь обычный вид (см., например, [26]), но только в них будут стоять обобщенные производные и равенства следует понимать как равенства мер. Именно, дифференциальная форма *закона сохранения импульса* имеет вид

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \rho v_i v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.4)$$

где p — давление, $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Дифференциальная форма закона сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho E + \frac{\rho v^2}{2} \right) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho v_k + \rho E v_k + \frac{\rho v^2 v_k}{2} \right) = 0, \quad (1.5)$$

где E — внутренняя энергия, $v^2 = \sum v_k^2$.

Формулы дифференцирования функций из BV , выведенные в гл. IV, дают возможность делать преобразование уравнений, *оставаясь в классе разрывных функций*.

Применяя формулу дифференцирования произведения (п. IV.6.4), мы можем заменить равенство (1.4) в виде

$$\bar{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{v}_i \sum_k \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} + \sum_k \bar{\rho} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0.$$

Отсюда на основании (1.3) получаются следующие уравнения:

$$\bar{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \bar{\rho} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.6)$$

Эти уравнения называют *уравнениями движения*. Напомним, что $\bar{\rho}$ и $\bar{\rho} v_k$ обозначают средние значения функций ρ и ρv_k (см. п. IV.5.6). В случае, когда функции ρ и v_k непрерывны (или даже аппроксимативно непрерывны почти всюду по трехмерной мере), мы можем в (1.6) вместо $\bar{\rho}$ и $\bar{\rho} v_k$ подставить ρ и ρv_k и получим уравнение движения в том виде, в каком оно обычно пишется для непрерывных функций.

Обратимся к уравнению (1.5). Раскрывая дифференцирование по формуле дифференцирования произведения, получим

$$\begin{aligned} \bar{E} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{v}^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\rho} \sum_i \bar{v}_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \bar{p} \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sum_l \bar{v}_l \frac{\partial p}{\partial x_l} + \\ + \bar{E} \sum_k \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} + \sum_k \bar{\rho} v_k \frac{\partial E}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \bar{v}^2 \sum_k \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} + \\ + \sum_k \bar{\rho} v_k \left(\sum_l \bar{v}_l \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) = 0. \end{aligned}$$

В силу уравнений непрерывности (1.3) и движения (1.6) подчеркнутые суммы равны нулю, и мы приходим к следующему уравнению:

$$\bar{\rho} \frac{\partial E}{\partial t} + \sum_k \bar{\rho} v_k \frac{\partial E}{\partial x_k} + \bar{p} \operatorname{div} v = 0. \quad (1.7)$$

Система уравнений (1.3), (1.6) и (1.7) является полной системой уравнений гидродинамики идеальной жидкости (предполагается известным уравнение состояния, связывающее ρ , p и E). Она записана в классе разрывных функций.

Можно доказать, что в качестве $\bar{\rho}$, $\bar{\rho} v_k$ и \bar{p} могут быть взяты средние по объему. В уравнениях (1.6) и (1.7) можно перейти также к средним по массе. Именно, имеем

$$\frac{\overline{\rho v_k}}{\bar{\rho}} = \lim_{|K_r| \rightarrow 0} \frac{\int_{K_r} \rho v_k dx}{\int_{K_r} \rho dx} = \lim_{\mu(K_r) \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(K_r)} \int_{K_r} v_k d\mu = \tilde{v}_k,$$

где K_r — концентрические шары радиусом r с центром в рассматриваемой точке, μ — масса, \tilde{v}_k — среднее по массе. Аналогично,

$$\frac{\overline{P}}{\bar{\rho}} = \frac{\tilde{P}}{\rho}.$$

Далее, введем удельный объем

$$v = \lim_{\mu(K_r) \rightarrow 0} \frac{|K_r|}{\mu(K_r)} = \frac{1}{\rho}.$$

Разделив уравнения (1.6) и (1.7) на $\bar{\rho}$, получим:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_k \tilde{v}_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.6')$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \sum_k \tilde{v}_k \frac{\partial E}{\partial x_k} + \frac{\tilde{p}}{\rho} \operatorname{div} v = 0. \quad (1.7')$$

Мы рассмотрели дифференцированные уравнения первого порядка (т. е. содержащие производные не выше первого порядка). Рассмотрим пример дифференциального уравнения второго порядка, также являющегося дифференциальной формой закона сохранения энергии, — *стационарное уравнение теплопроводности*

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = q, \quad (1.8)$$

где u — температура; k — коэффициент теплопроводности, являющийся функцией точек пространства и температуры; q — источник тепла.

Мы будем предполагать, что вектор-функция $k \nabla u$ принадлежит пространству BV , и левую часть равенства (1.8) будем трактовать как меру.

В правой части этого равенства стоит мера, физический смысл которой состоит в том, что $q(E)$ есть количество тепла, которое выделяется за счет источников тепла, находящихся на множестве E . Эта мера может быть как абсолютно непрерывной, так и сосредоточенной на множествах трехмерной меры нуль. Первый из указанных случаев физически означает источник, распределенный по всему объему, во втором случае — источник, сосредоточенный на некоторых поверхностях.

2. Условия на разрывах. Законы сохранения, записанные в дифференциальной форме как меры, дают возможность получить условия на разрывах без привлечения каких бы то ни было дополнительных физических соображений. Достаточно вычислить значения этих мер на множествах, содержащих точки разрыва, используя соответствующие интегральные формулы.

Проведем более точные рассуждения. Как и выше, мы это сделаем на примерах

В качестве первого примера рассмотрим уравнение непрерывности (1.3). По предположению вектор-функция (ρ, v) принадлежит пространству BV . Поэтому к ней может быть применена теорема о структуре функций из BV (см. п. IV.5.5). Согласно этой теореме все точки 4-мерного пространства (x, t) с точностью до множества трехмерной

меры нуль являются либо точками аппроксимативной непрерывности вектор-функции (ρ, v) , либо точками скачка. Обозначим, через S множество точек скачка этой вектор-функции. Как было показано в п. 1.6, это множество является множеством класса Γ , и поэтому для любого борелевского множества $B \subseteq S$ из (1.3) и формулы (1.5.1) получаем

$$\int_B (\rho^+ - \rho^-) v_t dH_3 + \int_B \sum_{i=1}^3 (\rho^+ v_i^+ - \rho^- v_i^-) v_i dH_3 = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $v = (v_t, v_1, v_2, v_3)$ — нормаль к множеству S ; плюс и минус обозначают аппроксимативные пределы функций по полупространствам, определяемым нормалью v и $-v$.

Ввиду произвольности множеств B из (2.1) следует

$$\rho^+ v_t + \sum_{i=1}^3 \rho^+ v_i^+ v_i = \rho^- v_t + \sum_{i=1}^3 \rho^- v_i^- v_i \quad (2.2)$$

почти всюду по трехмерной мере на S . Это и есть условие на разрывах.

Совершенно аналогично получаются условия на разрывах и для других уравнений гидродинамики.

В качестве второго примера рассмотрим уравнение теплопроводности (1.8). Пусть S — множество точек скачка вектор-функции $k \nabla u$. Пусть, далее, на борелевских множествах мера q имеет вид

$$q(B) = \int_B g(x) dH_{n-1}. \quad (2.3)$$

Рассуждая, как и выше, мы получим, что почти всюду (по двумерной мере) на S имеет место равенство

$$\sum_i k \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^+ v_i - \sum_i k \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^- v_i = g. \quad (2.4)$$

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Этот раздел содержит в основном теорию граничных (краевых) задач для эллиптических и параболических уравнений. При изложении этой теории мы последовательно придерживаемся концепции обобщенного решения, что не только позволяет ставить и решать краевые задачи при весьма слабых ограничениях на область и коэффициенты уравнений, но и существенно упрощает их исследование, избавляя от необходимости доказывать гладкость решений. Тонкие вопросы о гладкости решений на этом пути отделяются от вопросов о разрешимости и единственности и, когда это необходимо, могут быть исследованы независимо.

Новое определение обобщенного решения как функции класса BV^2 , излагаемое здесь впервые, позволяет обобщать и усиливать известные результаты для этих уравнений. При этом не требуется никакой гладкости от границ рассматриваемых областей. Краевые задачи рассматриваются в областях, являющихся открытыми множествами с конечным периметром. Коэффициенты линейных уравнений, как правило, — ограниченные измеримые функции, а правые части — функции, суммируемые с квадратом. Нужно отметить, что на практике нередко приходится иметь дело как с негладкой границей области, так и с разрывными коэффициентами, так что концепция обобщенного решения имеет не только теоретические удобства, но и вызвана потребностями практики.

При исследовании нелинейных уравнений весьма полезными оказываются теоремы о монотонной зависимости решений от граничных условий и правых частей, которые доказываются непосредственно для обобщенных решений. Это позволяет последовательно пользоваться техникой верхних и нижних функций и формулировать основные теоремы о разрешимости в терминах этих функций. Удобство такого подхода состоит в том, что не требуется специальных ограничений (типа ограничений роста функций), которые обычно накладываются для получения априорной оценки модуля решения. Во всех случаях подобного рода ограничений верхняя и нижняя функции легко строятся.

Несколько в стороне от основного материала этого раздела оказался материал главы VI, где излагаются некоторые вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Хотя она представляет собой самостоятельную область математики и обычно не включается в раздел уравнений математической физики, мы сочли уместным дать в форме справочника минимум сведений из этой теории, необходимых для понимания последнего раздела книги. Эта глава не опирается на предыдущие разделы книги. Изложение в ней носит в основном конспективный характер. Особенно это относится к последним двум параграфам. В частности, изложение понятия предельного цикла и связанных с ним вопросов является чисто описательным. Применение излагаемых

понятий и методов иллюстрируется на примерах. Ряд таких примеров читатель найдет в главе XI. Многие понятия и методы находят применение в главе XII при исследовании уравнений химической кинетики

Глава VII посвящена теории граничных задач для линейных эллиптических уравнений В § 2, 3 доказаны теоремы о разрешимости (типа теорем Фредгольма) для сопряженной пары граничных задач и установлена полнота системы собственных функций. При этом используется теорема о полной непрерывности оператора вложения пространства BV^2 в пространство L^2 , доказанная в предыдущем разделе, с помощью которой граничные задачи сводятся к эквивалентным уравнениям с вполне непрерывными операторами. Эти результаты справедливы также и для систем уравнений при выполнении определенных условий, которые легко могут быть сформулированы. Для понимания теорем о разрешимости граничных задач требуется знание теории Фредгольма для уравнений с вполне непрерывными операторами в гильбертовом пространстве. Для удобства читателя эта теория включена в виде приложения к главе VII.

В § 4 с помощью фундаментального решения для уравнения Лапласа получено потенциальное представление функций из BV , в том числе разрывных, выражающее эти функции через их первые обобщенные производные. Показано, что на множестве точек скачка рассматриваемой функции это представление имеет вид потенциала двойного слоя. В остальной части этого параграфа излагаются известные методы доказательства гладкости обобщенных решений с помощью фундаментального решения. В этом месте рассмотрение ведется строго внутри области, и аппарат анализа в классах BV не используется. Он применяется по существу в следующем параграфе (§ 5) при изучении функции Грина: граничной задачи и выражении решения через нее, так как здесь приходится учитывать влияние границы и граничных условий.

Важным свойством решений эллиптических граничных задач является свойство положительности решения при положительных правых частях. Из него следуют, в частности, оценки решений в равномерных нормах. В § 6 доказана положительность обобщенных решений, принадлежащих пространству BV^2 , без каких бы то ни было дополнительных условий гладкости решений, а также строгая положительность первой собственной функции. Эти результаты дают возможность в дальнейшем (глава IX) проводить исследование граничных задач для квазилинейных эллиптических уравнений, систематически используя аппарат верхних и нижних функций непосредственно для обобщенных решений, не заботясь об их гладкости.

Теория параболических уравнений (глава VIII) излагается для уравнений дивергентного вида. Это непринципиальное ограничение вызвано применяемым методом построения решений. Не желая дальнейшего увеличения объема книги, мы ограничиваемся построением решений с помощью разложения по собственным функциям (метод Фурье) и принципа сжатых отображений, изложенных в предыдущих главах.

В § 1 вводятся понятие обобщенного решения краевой задачи для линейного уравнения и необходимые для этого функциональные пространства. Доказаны интегральная априорная оценка решения и теорема единственности. Кроме того, доказана важная при исследовании нелинейных уравнений теорема о положительности решения.

Изложению метода Фурье посвящен § 2.

В § 3 вводится понятие верхней и нижней функций краевой задачи для квазилинейного уравнения и доказывается теорема о разрешимости задачи при наличии верхней и нижней функций. Требование о наличии таких функций менее ограничительно, чем различные условия (см. [30, 37]), служащие для оценки модуля решения. Следует отметить, что

локальная разрешимость различных задач для параболических уравнений [54, 61] имеет безусловный характер, т. е. не требует каких бы то ни было дополнительных ограничений.

В § 4 рассматривается задача Коши для простейшего вида линейных и квазилинейных параболических уравнений.

Решение краевой задачи для квазилинейного эллиптического уравнения (глава IX) мы рассматриваем как установившееся решение соответствующего параболического уравнения и строим его как предел при $t \rightarrow \infty$ решения подходящей краевой задачи для параболического уравнения. Основная теорема о разрешимости (§ 1) состоит в том, что при наличии верхней и нижней функций, связанных естественным неравенством ($\underline{u} < \bar{u}$), задача разрешима и существует хотя бы одно решение, лежащее между нижней и верхней функциями. При этом выше нижней функции всегда оказывается наименьшее решение, а ниже верхней функции — наибольшее. Единственность решения, вообще говоря, не имеет места.

На основе этой теоремы в § 2 строится теория критического значения (аналог собственного значения в линейном случае). Получены условия существования и важные количественные оценки для критического значения. Эти результаты находят приложения, например, в теории теплового взрыва (глава X).

В § 3 рассматриваются вопросы устойчивости решения. Понятие устойчивости, используемое при этом, является естественным обобщением понятия асимптотической устойчивости стационарной точки обыкновенного дифференциального уравнения. Вводится понятие отделимости решения, которое оказывается эквивалентным понятию устойчивости и является удобным критерием устойчивости. Получены простые достаточные условия устойчивости и единственности устойчивого решения.

В § 4 обосновывается некоторый метод приближенного решения нелинейных эллиптических и параболических уравнений — метод весового осреднения, который находит многочисленные приложения в задачах макрокинетики. Некоторые из них приведены в главе X.

Глава IX написана в основном по материалам работ [55, 56, 58]. Однако изложение с точки зрения обобщенных решений и примененный при этом новый подход к понятию обобщенного решения позволили существенно упростить изложение и расширить класс рассматриваемых областей и граничных условий. Хотя изложение ведется для уравнений с линейной и дивергентной главной частью, однако многие результаты переносятся на широкий класс квазилинейных эллиптических уравнений (ср. [55]). По поводу других результатов и методов теории эллиптических и параболических уравнений, а также имеющейся обширной литературы авторы отсылают читателя к фундаментальным работам [1, 21, 30, 31, 37, 49, 61].

Глава VI. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

1. Задача Коши. Мы будем рассматривать систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенную относительно производных:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по t ; f_1, \dots, f_n — известные функции переменных t, x_1, x_2, \dots, x_n ; $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — неизвестные функции, подлежащие определению.

Для краткости мы будем употреблять векторную запись системы (1.1)

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1.2)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ — вектор-функции со значениями в евклидовом пространстве R_n . Чаще мы, однако, будем опускать слово вектор и говорить просто о функциях.

Любая функция $x(t)$, обращающая в тождество (по t) соотношение (1.2) в некоторой области изменения переменной t , называется решением системы (1.2) в этой области.

Геометрически решение системы (1.2) представляет собой кривую в пространстве R_n , в каждой точке которой вектор f является касательным. Можно дать и кинематическое истолкование решения как траектории движущейся точки. При этом переменную t отождествляют со временем, а вектор f приобретает смысл скорости движущейся точки.

Обычно требуется найти решение $x(t)$, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. Мы будем рассматривать условие вида

$$x = x_0 \text{ при } t = t_0, \quad (1.3)$$

называемое обычно начальным. Отыскание решения $x = x(t)$ системы (1.2), удовлетворяющего условию вида (1.3), называют задачей с начальным условием, или задачей Коши. Если нужно подчеркнуть, что данное решение $x(t)$ удовлетворяет начальному условию (1.3), вместо $x(t)$ будем писать $x(t, t_0, x_0)$.

Основная теорема теории дифференциальных уравнений состоит в том, что при некоторых довольно слабых ограничениях на уравнения (т. е. на $f(t, x)$) решение $x(t, t_0, x_0)$ существует и оно единственно. Точная формулировка и доказательство этой теоремы приводятся в следующем пункте

Задача Коши для уравнений и систем высших порядков вида

$$\frac{d^k y}{dt^k} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}}\right),$$

где y — либо скаляр, либо вектор, определяется заданием дополнительных условий вида

$$y = c_1, \quad \frac{dy}{dt} = c_2, \dots, \quad \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} = c_k \quad \text{при } t = t_0$$

С помощью обозначений

$$x_1 = y, \quad x_2 = \frac{dy}{dt}, \dots, \quad x_k = \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}}$$

такая задача сводится к задаче Коши для системы первого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \dots, \quad \dot{x}_{k-1} = x_k, \quad \dot{x}_k = f(t, x_1, \dots, x_k)$$

с начальным условием $x_i = c_i$ при $t = t_0$ ($i = 1, \dots, k$). Решение $x(t, t_0, c)$ этой задачи определяет $y(t)$ и все ее производные до порядка $(k-1)$.

Таким образом, при исследовании задачи Коши без ограничения общности можно рассматривать системы первого порядка.

2. Основная теорема. Через $|y|$ будем обозначать абсолютную величину скаляра y , или длину вектора $y = (y_1, \dots, y_n)$, которая понимается как

$$|y| = (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}.$$

Если $y = y(t)$ — непрерывная функция (вектор-функция) в промежутке (a, b) ($a < t \leq b$), то через $\|y\|$ обозначается ее норма:

$$\|y\| = \max_{(a, b)} |y(t)|.$$

Рассмотрим промежуток в пространстве R_{n+1} :

$$(a, b) = \{ (t, x), a_0 \leq t \leq b_0, a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n \}. \quad (2.1)$$

Говорят, что функция (вектор-функция) $f(t, x)$, определенная в этом промежутке, удовлетворяет *условию Липшица* по переменной x , если существует константа L такая, что для любых двух точек вида $(t, x^{(1)})$, $(t, x^{(2)})$ этого промежутка

$$| f(t, x^{(1)}) - f(t, x^{(2)}) | \leq L | x^{(1)} - x^{(2)} |. \quad (2.2)$$

Упражнение Показать, что функция $f(t, x)$, обладающая в промежутке (2.1) ограниченными частными производными по x_1, \dots, x_n ($|\partial f / \partial x_i| \leq L$), удовлетворяет условию Липшица по x .

Теорема. Пусть функция $f(t, x)$ в системе (1.2) непрерывна в промежутке (2.1) и удовлетворяет условию Липшица по x . Тогда, какова бы ни была внутренняя точка (t_0, x_0) промежутка (2.1), можно указать число $h > 0$ такое, что в интервале $t_0 - h \leq t \leq t_0 + h$ существует и единственно решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1.2).

Доказательство. Пусть $M = \max_{(a, b)} |f(t, x)|$ — промежуток (2.1), L — константа Липшица (см. (2.2)) для $f(t, x)$, h_0 — расстояние от точки (t_0, x_0) до границы промежутка (a, b) ($h_0 > 0$ для внутренней точки (t_0, x_0)). Положим

$$h = \min \left\{ h_0, \frac{h_0}{M}, \frac{1}{2L} \right\}. \quad (2.3)$$

Замечая, что решение $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (1.2) удовлетворяет интегральному соотношению

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x) dt, \quad (2.4)$$

определим оператор

$$A(x) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (2.5)$$

на непрерывных функциях $x(s)$ в интервале $t_0 - h \leq s \leq t_0 + h$, удовлетворяющих условию

$$| x(s) - x_0 | \leq h_0 \text{ при } | t_0 - s | \leq h. \quad (2.6)$$

Оператор (2.5) переводит в себя класс функций (2.6). В самом деле, $A(x)$ — непрерывная функция t . По определению чисел h_0 и h значения $x(s)$ (см. (2.6)) при $|s - t_0| \leq h$ остаются в промежутке (a, b) и по определению M

$$\| A(x) - x_0 \| = \max_{|t - t_0| \leq h} \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| < Mh \leq h_0.$$

Таким образом, условие (2.6) выполняется и для $A(x)$.

Покажем, что A осуществляет сжатое отображение. Для любых двух непрерывных функций $x = x(s)$, $y = y(s)$ с условием (2.6) имеем согласно (2.5), (2.3) и по определению числа h

$$\begin{aligned} \| A(x) - A(y) \| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right\| \\ &\leq Lh \| x - y \| \leq \frac{1}{2} \| x - y \|. \end{aligned}$$

На основании принципа сжатых отображений (п. III.6.3) существует единственная неподвижная точка $x = x(t, t_0, x_0)$ отображения A ($A(x) = x$), которая удовлетворяет соотношению (2.4) и является, следовательно, решением системы (1.2) с начальным условием $x = x_0$ при $t = t_0$. Поскольку любое решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1.2) согласно (2.4) есть неподвижная точка отображения (2.5), то теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Теорема утверждает существование и единственность решения $x(t, t_0, x_0)$ по обе стороны от t_0 . При этом если точка $(t_0 - h, x(t_0 - h, t_0, x_0))$ ($t_0 + h, x(t_0 + h, t_0, x_0)$) является внутренней точкой промежутка (a, b) , то по теореме решение однозначно продолжается влево (вправо), причем в пределах промежутка (a, b) интервал продолжения зависит только от расстояния от этой точки до границы промежутка (a, b) (согласно (2.3) h пропорционален h_0 при достаточно малых h_0). Следовательно, решение $x(t, t_0, x_0)$ продолжается и влево, и вправо от t_0 до выхода на границу промежутка (a, b) .

Если $f(t, x)$ определена и непрерывна при всех t и x и в любом конечном промежутке удовлетворяет условию Липшица по x , то, согласно сказанному, решение $x(t, t_0, x_0)$ выходит при возрастании и уменьшении t на границу любого конечного промежутка, т. е. решение $x(t, t_0, x_0)$ определено в некотором открытом интервале (t_1, t_2) ($t_1 < t_0 < t_2$), причем либо $t_1 = -\infty$, либо $t_1 > -\infty$ и $|x(t, t_0, x_0)| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t_1$, и аналогично либо $t_2 = +\infty$, либо $t_2 < +\infty$ и $|x(t, t_0, x_0)| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t_2$.

Простой пример скалярного уравнения $\dot{x} = x^2$ показывает, что возможны случаи как конечного, так и бесконечного $t_1(t_2)$. Решение

$$x(t, 0, x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t} \quad (t_0 = 0)$$

определено в интервале $t \in \left(-\infty, \frac{1}{x_0}\right)$ при $x_0 > 0$ и в интервале $t \in \left(\frac{1}{x_0}, \infty\right)$ при $x_0 < 0$.

З а м е ч а н и е 2. Наряду с теоремой существования и единственности важное значение в теории дифференциальных уравнений имеет теорема о непрерывной зависимости решения от начального условия.

Каковы бы ни были положительное число $\varepsilon > 0$ и конечный замкнутый интервал $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ из области определения (t_1, t_2) решения $x(t, t_0, x_0)$, можно указать число $\delta > 0$ такое, что при любых $\bar{x}_0, \bar{t}_0, |t_0 - \bar{t}_0| < \delta, |x_0 - \bar{x}_0| < \delta$ решение $x(t, \bar{t}_0, \bar{x}_0)$ определено на интервале $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ и равномерно по $t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2]$:

$$|x(t, t_0, x_0) - x(t, \bar{t}_0, \bar{x}_0)| < \varepsilon.$$

Оказывается, если в системе (1.2) f зависит от некоторого набора параметров $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ и $f(t, x, \mu)$ является непрерывно дифференцируемой функцией всех своих аргументов, то решение $x(t, t_0, x_0, \mu)$ является непрерывно дифференцируемой функцией всех своих аргументов во всей области существования решения [43].

3. Скалярное уравнение. Решение $x(t, t_0, x_0)$ линейного скалярного уравнения

$$\dot{x} = a(t)x + b(t) \quad (3.1)$$

определяется формулой

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 \exp \left[\int_{t_0}^t a(s) ds \right] + \int_{t_0}^t b(\tau) \exp \left[\int_{\tau}^t a(s) ds \right] d\tau. \quad (3.2)$$

Из формулы (3.2) видно, что $x(t, t_0, x_0) \geq 0$ при $t \geq t_0$, если $x_0 \geq 0$, и $b(t) \geq 0$ при $t \geq t_0$. Это позволяет получить полезную теорему сравнения для нелинейного скалярного уравнения

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (3.3)$$

Теорема. Пусть в интервале $t_0 \leq t \leq T$ существуют непрерывно дифференцируемые функции $\underline{x}(t)$ и $\bar{x}(t)$ такие, что:

$$1) \underline{x}(t_0) \leq \bar{x}(t_0);$$

$$2) \underline{\dot{x}} - f(t, \underline{x}) \leq \dot{\bar{x}} - f(t, \bar{x}) \text{ при } t_0 < t < T.$$

Пусть, кроме того, $f(t, \bar{x}) - f(t, \underline{x}) = a(t)(\bar{x} - \underline{x})$, где $a(t)$ — некоторая ограниченная функция в интервале $t_0 \leq t \leq T$. Тогда $\underline{x}(t) \leq \bar{x}(t)$ во всем интервале $t_0 \leq t \leq T$.

Доказательство. Положим $x(t) = \bar{x} - x$, $b(t) = \dot{\bar{x}} - \dot{x} - f(t, \bar{x}) + f(t, x)$. Для $x(t)$ имеем, очевидно, тождество (3.1). Следовательно, $x(t)$ представляется в виде (3.2). Так как по условиям теоремы $x_0 = x(t_0) \geq 0$ и $b(t) \geq 0$ при $t_0 \leq t \leq T$, то во всем этом интервале $x(t) \geq 0$, что и требовалось. Если $\bar{x}(t)$ ($x(t)$) является решением уравнения (3.3), то согласно теореме $\underline{x}(t)$ ($\bar{x}(t)$) дает оценку снизу (сверху) этого решения. Отсюда вытекают часто применяемые оценки.

Следствие 1. Если $x(t)$ удовлетворяет при $t > t_0$ дифференциальному неравенству $\dot{x} \leq a(t)x + b(t)$ и $x(t_0) \leq x_0$, то при $t \geq t_0$

$$x(t) \leq x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t b(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^t a(s) ds\right) d\tau. \quad (3.4)$$

Следствие 2. Пусть $\bar{x}(t)$ и $\underline{x}(t)$ таковы, что:

$$1) \underline{x}(t_0) \leq x_0 \leq \bar{x}(t_0);$$

$$2) \underline{\dot{x}} - f(t, \underline{x}) \leq 0 \leq \dot{\bar{x}} - f(t, \bar{x}) \text{ при } t_0 < t < T.$$

Тогда для решения $x(t, t_0, x_0)$ уравнения (3.3) верна оценка

$$\underline{x}(t) \leq x(t, t_0, x_0) \leq \bar{x}(t) \text{ при } t_0 \leq t \leq T. \quad (3.5)$$

Такая теорема сравнения допускает, оказывается, далеко идущие обобщения на многие скалярные уравнения в частных производных (см. гл. VIII, IX).

4 Априорная оценка и нелокальная разрешимость. В том случае, когда решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1.2) существует лишь в конечном интервале при $t > t_0$, говорят о локальной разрешимости системы (1.2) с начальным условием $x = x_0$ при $t = t_0$. Если же $x(t, t_0, x_0)$ определено при всех $t > t_0$, то говорят о нелокальной разрешимости или разрешимости в целом. Часто бывает важно установить нелокальную разрешимость задачи Коши, не зная самого решения. Согласно замечанию I п. 2 о продолжении решения нелокальная разрешимость имеет место, если на любом конечном интервале (t_0, T) удастся установить оценку:

$$|x(t, t_0, x_0)| < K, \quad K = K(t_0, x_0, f, T). \quad (4.1)$$

Если при этом K не зависит от T , то решение $x(t, t_0, x_0)$ не только существует в целом, но и ограничено константой K . Оценку вида (4.1) неизвестного решения через заданные величины называют априорной.

Так, если для скалярного уравнения (3.3) удается построить функции $\bar{x}(t)$ и $\underline{x}(t)$, удовлетворяющие условиям следствия 2 в каждом интервале (t_0, T) , то для решения $x(t, t_0, x_0)$ согласно (3.5) имеет место априорная оценка (4.1) с константой

$$K = \max_{t_0 \leq t \leq T} \max \{ |\bar{x}(t)|, |\underline{x}(t)| \}$$

и, следовательно, решение $x(t, t_0, x_0)$ существует в целом. Приведем некоторые примеры априорных оценок для систем уравнений.

1) Пусть система уравнений имеет вид

$$\dot{x} = a(t, x)x, \quad (4.2)$$

где x — вектор-столбец, $a = a(t, x)$ — неположительная матрица. Это значит, что квадратичная форма $(a\xi, \xi) \leq 0$ при любом векторе ξ и любых значениях t и x . Для $|x|^2 = (x, x)$, где $x = x(t, t_0, x_0)$ — решение системы (4.2), имеем

$$\frac{d}{dt} |x|^2 = \frac{d}{dt} (x, x) = 2(\dot{x}, x) = 2(ax, x) \leq 0. \quad (4.3)$$

Поэтому $|x(t, t_0, x_0)| \leq |x_0|$ при $t \geq t_0$.

2) Пусть теперь матрица $a = a(t, x)$ в системе (4.2) лишь ограничена сверху, т. е. существует константа C такая, что в каждой точке t, x при любом ξ

$$(a\xi, \xi) \leq C|\xi|^2.$$

Тогда вместо (4.3) получим

$$\frac{d}{dt} |x|^2 = 2(ax, x) \leq 2C|x|^2,$$

т. е. скалярное дифференциальное неравенство относительно $z(t) = |x|^2$, где $x = x(t, t_0, x_0)$. Согласно (3.4) имеем оценку

$$|x(t, t_0, x_0)| \leq |x_0| \exp[C(t - t_0)], \quad t \geq t_0.$$

3) Пусть система уравнений имеет вид

$$\dot{x} = a(t, x)x + b(t, x), \quad (4.4)$$

где матрица $a = a(t, x)$ и вектор $b = b(t, x)$ равномерно по x и $t \in [t_0, T]$ удовлетворяют неравенствам

$$(a\xi, \xi) \leq C|\xi|^2, \quad |b|^2 \leq C \quad (4.5)$$

с некоторой константой $C = C(T)$. Ввиду простого неравенства

$$(b, x) \leq |b| \|x\| \leq \frac{1}{2} (|b|^2 + |x|^2)$$

для решения $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (4.4) с учетом (4.5) получаем линейное дифференциальное неравенство относительно $|x|^2$

$$\frac{d}{dt} |x|^2 = 2(ax, x) + 2(b, x) \leq (2C + 1)|x|^2 + C,$$

откуда согласно (3.4) при $t_0 \leq t \leq T$

$$|x(t, t_0, x_0)|^2 \leq |x_0|^2 \exp[B(t - t_0)] + \frac{C}{2B} (\exp(Bt) - 1), \quad B = 2C + 1. \quad (4.6)$$

Наличие априорной оценки гарантирует, таким образом, существование решения. Это, как увидим ниже, относится и к уравнениям в частных производных, чем и объясняется важная роль априорных оценок, особенно при исследовании нелинейных уравнений.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Структура решений. Система уравнений (1.1) (§ 1) называется линейной, если $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ линейно зависят от x_1, \dots, x_n :

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + b_i(t).$$

Мы будем предполагать, что коэффициенты $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ являются непрерывными функциями, заданными при всех значениях t . Если $a(t)$ — квадратная матрица элементов $a_{ij}(t)$, $b(t)$ — вектор коэффициентов $b_i(t)$, то в векторной форме линейная система запишется в виде

$$\dot{x} = a(t)x + b(t). \quad (1.1)$$

Требуемое условие Липшица по x для системы (1.1), конечно, имеет место.

Теорема 1. Любое решение $x(t)$ системы (1.1) с непрерывными $a(t)$ и $b(t)$ определено при всех значениях t , $-\infty < t < +\infty$.

Доказательство. Достаточно показать, что любое решение $x(t)$, определенное в окрестности $t = 0$, неограниченно продолжается в обе стороны от $t = 0$. В силу непрерывности $a(t)$ и $b(t)$ ограничены в любом интервале $-T \leq t \leq T$, т. е. существует $C = C(T)$, что

$$|a\xi, \xi| \leq C|\xi|^2, \quad |b|^2 \leq C \quad \text{при } -T \leq t \leq T.$$

Но тогда для $x(t)$ имеет место априорная оценка (1.4.6) при $0 \leq t \leq T$ ($t_0 = 0$, $x_0 = x(0)$). После замены t на $-t$ в системе (1.1) из оценки (1.4.6) вытекает априорная оценка для $x(t)$ в интервале $-T \leq t \leq 0$. Таким образом, решение $x(t)$ продолжается в любой интервал $-T \leq t \leq T$, что и требовалось показать.

Система (1.1) называется *однородной*, если $b(t) \equiv 0$. Однородная линейная система, таким образом, имеет вид

$$\dot{x} = a(t)x. \quad (1.2)$$

Теорема 2. Множество R всех решений системы (1.2) образует линейное пространство размерности n , где n — число уравнений в системе (1.2).

Доказательство. Очевидно, вместе с решениями $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ в системе (1.2) удовлетворяет любая их линейная комбинация $c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t)$ с постоянными коэффициентами, так что R — линейное пространство.

Рассмотрим матрицу $X(t)$ порядка n , столбцы которой являются решениями системы (1.2) (тогда сама матрица $X(t)$ является решением этой системы) и удовлетворяют таким начальным условиям при $t = t_0$, что $X(t_0) = E$ — единичная матрица. Такая матрица $X(t)$ существует и единственна.

Столбцы матрицы $X(t)$ как элементы пространства R линейно независимы. Действительно, их линейная зависимость означала бы, что $X(t)c = 0$ при всех t для некоторого постоянного ненулевого вектора c . Но при $t = t_0$ это равенство дает

$$X(t_0)c = Ec = c = 0.$$

Столбцы матрицы $X(t)$ образуют базис пространства R . Действительно, если $x(t)$ — любое решение, то $y(t) = X(t)x(t_0)$ также является решением, причем $y(t_0) = x(t_0)$. По теореме единственности $y(t) \equiv x(t)$. Таким образом, для любого решения $x(t)$ верна формула

$$x(t) = X(t)x(t_0)$$

и, значит, столбцы $X(t)$ образуют базис в R . Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. Любой набор из n линейно-независимых решений, т. е. любой базис пространства R , называется *фундаментальной системой решений*.

Смысл доказанной теоремы состоит в том, что если

$$x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t) \quad (1.3)$$

фундаментальная система решений, то их линейная комбинация с постоянными коэффициентами

$$x(t, c) = \sum_{i=1}^n c_i x^{(i)}(t) \quad (1.4)$$

представляет собой общее решение системы (1.2), т. е. любое решение может быть получено по этой формуле при подходящих значениях c_1, \dots, c_n . Если $X(t)$ — матрица столбцов (1.3), а c — произвольный постоянный вектор-столбец, то формулу (1.4) можно записать в виде

$$x(t, c) = X(t)c.$$

Чтобы удовлетворить условию $x = x_0$ при $t = t_0$, мы должны определить вектор c из равенства

$$X(t_0)c = x_0. \quad (1.5)$$

Так как в силу теоремы существования и единственности алгебраическая система (1.5) должна иметь единственное решение при любых t_0 и x_0 , то в каждой точке t матрица $X(t)$ невырождена и из (1.5) следует $c = X^{-1}(t_0)x_0$, так что

$$x(t, t_0, x_0) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0. \quad (1.6)$$

З а м е ч а н и е Для определителя $\Delta(t)$ матрицы $X(t)$ справедлива следующая формула Лиувилля [43]

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau,$$

где $S(t)$ — след матрицы $a(t)$ (см (1.2)): $S(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$.

У п р а ж н е н и е. Показать, что матрицы $X(t)$ и $Y(t)$ двух фундаментальных систем решений связаны равенством $Y(t) = X(t)D$, где D — постоянная невырожденная матрица.

Матрица-функция $\Phi(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$ не зависит от выбора фундаментальной системы решений. Матрицу $\Phi(t, \tau)$ называют *фундаментальной матрицей решений*: ее столбцы как функции t образуют фундаментальную систему решений и $\Phi(\tau, \tau) = E$.

С помощью матрицы $\Phi(t, \tau)$ формула (1.6), т. е. решение задачи Коши ($x = x_0$ при $t = t_0$) для системы (1.2), принимает вид

$$x(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0. \quad (1.7)$$

Обратимся теперь к неоднородной системе (1.1). Ее решение основано на том, что разность двух решений $x(t) - \bar{x}(t)$ удовлетворяет однородной системе (1.2). Пусть $\bar{x}(t)$ — некоторое частное решение системы (1.1), а $X(t)$ — матрица некоторой фундаментальной системы решений однородной системы (1.2). Тогда общее решение неоднородной системы (1.1) может быть представлено в виде

$$x(t, c) = X(t)c + \bar{x}(t), \quad (1.8)$$

где c — произвольный постоянный вектор. Заметим, что формула

$$\bar{x}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) b(\tau) d\tau, \quad (1.9)$$

где $\Phi(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений системы (1.2), при любом t_0 определяет решение системы (1.1). Если удовлетворить условию $x = x_0$ при $t = t_0$, то, используя (1.9) из (1.8), приходим к формуле

$$x(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) b(\tau) d\tau, \quad (1.10)$$

дающей общий вид решения задачи Коши для неоднородной системы (1.1). Здесь первое слагаемое (ср. (1.7)) есть решение однородной си-

стемы (1.2) с условием $x = x_0$ при $t = t_0$, второе слагаемое — решение неоднородного уравнения с нулевым условием при $t = t_0$.

Таким образом, решение линейной системы уравнений сводится к нахождению фундаментальной матрицы решений $\Phi(t, \tau)$ соответствующей однородной системы.

Отметим, что в случае скалярного уравнения

$$\Phi(t, \tau) = \exp \int_{\tau}^t a(s) ds$$

и формула (1.10) приводит к формуле (1.3.2). Для общих линейных систем построить фундаментальную матрицу решений через элементарные функции и квадратуры не удастся. Однако для важного класса систем с постоянными коэффициентами эта задача может быть доведена до конца.

2. Системы с постоянными коэффициентами. Пусть $a(t) \equiv a$ — вещественная матрица с постоянными элементами. Если λ — собственное значение, а p — соответствующий собственный вектор матрицы a ($ap = \lambda p$), то вектор-функция

$$x = p \cdot e^{\lambda t}$$

сказывается решением однородной системы

$$\dot{x} = ax. \quad (2.1)$$

При этом если λ — комплексное число, $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, то сопряженное число $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ также будет собственным значением, причем ему отвечает сопряженный собственный вектор \bar{p} . Пусть $p = q + ir$. Ясно, что $r \neq 0$ при $\beta \neq 0$, так как в противном случае $\lambda p = \bar{\lambda} p$, т. е. $p = 0$. Кроме того, q и r — линейно-независимы, так как в противном случае $r = cq$, $p = (1 + ic)q$ и q оказался бы вещественным собственным вектором. Таким образом, с парой комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ связана пара комплексно-сопряженных решений системы (2.1) $x = p e^{\lambda t} = \xi + i\eta$; $\bar{x} = \bar{p} e^{\bar{\lambda} t} = \xi - i\eta$,

$$\xi = (q \cos \beta t - r \sin \beta t) e^{\alpha t}; \quad (2.2)$$

$$\eta = (r \cos \beta t + q \sin \beta t) e^{\alpha t}.$$

Вместе с x и \bar{x} линейно-независимыми решениями системы (2.1) оказываются вещественные функции ξ и η :

$$\xi = \frac{1}{2}(x + \bar{x}), \quad \eta = \frac{1}{2i}(x - \bar{x}).$$

Их линейная независимость следует из того, что при $t = 0$ векторы $\xi = q$, $\eta = r$ линейно-независимы.

Это замечание позволяет легко построить фундаментальную систему решений в том случае, когда матрица a не имеет кратных собственных значений (все собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ попарно различны):

1) Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — вещественны. Тогда их собственные векторы p_1, \dots, p_n вещественны и линейно-независимы. Фундаментальную систему решений образуют функции

$$x^{(1)} = p_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, x^{(n)} = p_n e^{\lambda_n t}. \quad (2.3)$$

2) Если среди $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ встречаются комплексные числа, то система (2.3) по-прежнему будет фундаментальной системой решений, но среди них будут комплексные. Можно считать, что в систему (2.3) будут входить пары комплексно-сопряженных функций $x^{(k)}$ и $\bar{x}^{(k)}$. Отделяя их

вещественные и мнимые части, т. е. заменяя $x^{(k)}$ и $\overline{x^{(k)}}$ функциями вида (2.2), получим вещественную фундаментальную систему решений.

Построение фундаментальной системы решений в случае кратных собственных значений опирается на теорию элементарных делителей, и мы его не будем детализировать. Укажем лишь одну общую формулу для фундаментальной матрицы решений $\Phi(t, \tau)$ в виде некоторого интеграла в комплексной плоскости.

Ввиду инвариантности системы (2.1) относительно сдвигов по t вместе с $\Phi(t, 0)$ системе (2.1) удовлетворяет $\Phi(t - \tau, 0)$, причем по теореме единственности $\Phi(t - \tau, 0) = \Phi(t, \tau)$. Таким образом, $\Phi(t, \tau)$ оказывается функцией одной переменной, зависящей от разности $t - \tau$. Поэтому $\Phi(t, \tau)$ полностью определяется функцией $\Phi_0(t) = \Phi(t, 0)$ ($\Phi_0(0) = E$). Далее, априорная оценка решения системы (2.1) показывает, что любое решение при $t \rightarrow \infty$ возрастает не быстрее, чем $\exp \alpha t$ при некотором фиксированном α . В частности, это имеет место для $\Phi_0(t)$. Поэтому при $\operatorname{Re} \lambda > \alpha$ преобразование Лапласа

$$\tilde{\Phi}_0(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \Phi_0(t) dt$$

существует и является аналитической функцией λ . Применяя это преобразование к тождеству $\dot{\Phi}_0 = a\Phi_0$ с учетом $\Phi_0(0) = E$, получим

$$(\lambda E - a)\tilde{\Phi}_0(\lambda) = E,$$

откуда

$$\tilde{\Phi}_0(\lambda) = (\lambda E - a)^{-1}.$$

Эта функция аналитична всюду, за исключением собственных значений матрицы a , в которых $\tilde{\Phi}_0(\lambda)$ имеет особенности типа полюсов. Пусть собственные значения матрицы a лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < \beta$. Тогда согласно обращению преобразования Лапласа

$$\Phi_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda t} (\lambda E - a)^{-1} d\lambda, \quad (2.4)$$

где C — контур $\operatorname{Re} \lambda = \beta$, вдоль которого $\operatorname{Im} \lambda$ возрастает. Однако, не меняя интеграла, контур C можно деформировать достаточно произвольным образом. Можно, например, считать его замкнутой кривой конечной длины с единственным условием, чтобы все собственные значения матрицы a лежали во внутренней области, ограниченной контуром C . Это обстоятельство ниже используется при оценке $\Phi_0(t)$.

3. Скалярное уравнение высшего порядка. Для получения общего решения скалярного уравнения порядка выше, чем единица, с постоянными коэффициентами

$$Lx \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = 0, \quad (3.1)$$

конечно, нет нужды сводить его к системе первого порядка. Предполагая для простоты, что корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ алгебраического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (3.2)$$

называемого характеристическим уравнением для (3.1), попарно различны (корни простые), легко получаем n линейно-независимых решений уравнения (3.1) вида $\exp \lambda t$. При этом для комплексного λ_k отдельно вещественная и мнимая части $\exp(\lambda_k t)$ оказываются линейно-независимыми решениями, отвечающими сопряженным корням λ_k и $\overline{\lambda_k}$. Таким образом, имеем n линейно-независимых вещественных решений. Обозначим их через $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi(t)$. Поскольку независимых ре-

Общее решение уравнения $Lx = f$ записывается в виде

$$x(t, c_1, \dots, c_n) = \bar{x}(t) + c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t), \quad (3.6)$$

где c_1, \dots, c_n — произвольные постоянные.

Для однозначного определения постоянных в (3.3) или (3.6) требуется n независимых дополнительных условий. Это могут быть либо условия Коши, либо характерные для уравнений высших порядков двухточечные или даже многоточечные краевые условия.

§ 3. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

1. **Основные понятия.** Будем рассматривать систему уравнений первого порядка

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad f = (f_1, \dots, f_n) \quad (1.1)$$

и ее решение $x(t, x_0)$ ($x(0, x_0) = x_0$).

Определение 1. Решение $x(t, x_0)$ системы (1.1) называется устойчивым по Ляпунову, если:

1) существует $\rho > 0$ такое, что при $|x_1 - x_0| < \rho$ решение $x(t, x_1)$ определено при всех $t \geq 0$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что неравенство

$$|x(t, x_0) - x(t, x_1)| < \varepsilon$$

имеет место при всех $t \geq 0$, если только $|x_1 - x_0| < \delta$.

Решение $x(t, x_0)$ называется неустойчивым, если нарушается хотя бы одно из условий 1), 2).

Решение $x(t, x_0)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и, кроме того,

3) существует $\delta_1 > 0$ ($\delta_1 \leq \delta$) такое, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0) - x(t, x_1)| = 0,$$

если только $|x_1 - x_0| < \delta_1$.

Таким образом, устойчивое по Ляпунову решение определено во всем интервале $0 < t < \infty$ и остается таковым при достаточно малом возмущении начальной точки. При этом решение с возмущенным начальным условием остается близким к исходному во всем интервале $0 < t < \infty$. Другими словами, устойчивость по Ляпунову есть непрерывная зависимость решения от начального условия, равномерная по t на бесконечном интервале изменения t , $0 < t < \infty$.

Асимптотическая устойчивость означает, что влияние начального возмущения со временем исчезает (переменную t мы иногда будем называть временем).

Пример 1. Решение скалярного линейного уравнения $\dot{x} = ax + b$ с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$x(t, x_0) = \begin{cases} x_0 e^{at} + \frac{b}{a} (e^{at} - 1), & a \neq 0; \\ x_0 + bt, & a = 0. \end{cases}$$

Так как в любом случае

$$|x(t, x_0) - x(t, x_1)| = |x_0 - x_1| e^{at},$$

то непосредственно из определения следует.

- 1) любое решение асимптотически устойчиво при $a < 0$,
- 2) любое решение устойчиво, но не асимптотически устойчиво при $a = 0$;
- 3) любое решение неустойчиво при $a > 0$

Пример 2 Решение уравнения $\dot{x} = 1 - x^2$ имеет вид

$$x(t, x_0) = \frac{(1 + x_0)e^{2t} - (1 - x_0)}{(1 + x_0)e^{2t} + (1 - x_0)}.$$

Как как $x(t, x_0) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$ при любом $x_0 > -1$, то решение $x(t, -1) \equiv -1$ неустойчиво. При $x_0 < -1$ решение определено лишь в конечном интервале и поэтому неустойчиво. При любом $x_0 > -1$ решение $x(t, x_0)$, в частности $x(t, 1) \equiv 1$, асимптотически устойчиво.

Мы будем в основном рассматривать так называемые автономные системы.

Определение 2. Система (1.1) называется автономной, если $f(t, x) = f(x)$, т. е. если f не зависит от t .

Такие системы часто встречаются в различных вопросах естествознания и выражают по существу независимость физических законов от времени. В примерах 1 и 2 уравнения автономны. Рассматривая общую автономную систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.2)$$

мы будем для простоты предполагать, что $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ задана и непрерывно дифференцируема во всем n -мерном пространстве R^n , так что имеет место существование и единственность решения $x(t, x_0)$ при любом $x_0 \in R^n$. При этом в силу инвариантности системы (1.2) относительно сдвигов при любом τ решением будет $x(t + \tau, x_0)$. Если τ принадлежит области определения $x(t, x_0)$, то по теореме единственности

$$x(t + \tau, x_0) = x(t, x(\tau, x_0)). \quad (1.3)$$

В пространстве R^n (фазовое пространство системы (1.2)) функции $x(t, x_0)$ и $x(t + \tau, x_0)$ описывают одну и ту же кривую (траекторию системы (1.2)). Отличаются они лишь началом отсчета параметра t вдоль этой кривой. По теореме единственности две траектории либо совпадают, либо не имеют общих точек. Таким образом, все фазовое пространство R^n «расслаивается» на непересекающиеся траектории. Вектор $f(x)$ определяет направление и скорость движения вдоль траектории при возрастании t . Как следует из теоремы единственности, самопересекающимися траекториями могут быть лишь замкнутая траектория (описываемая периодическим решением $x(t)$) либо точка (решение вида $x(t) = \text{const}$).

Определение 3. Точка $x = x_0 \in R_n$ называется точкой равновесия системы (1.2), если $f(x_0) = 0$.

Точку равновесия называют также *положением равновесия, стационарной точкой, особой точкой*.

Заметим, что если решение $x(t, x_0)$ существует при $t \geq t_0$ ($t \leq t_0$) и имеет конечный предел \bar{x} при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$), то \bar{x} — точка равновесия системы (1.2). Действительно,

$$x(n+1, x_0) - x(n, x_0) = \int_0^1 f(x(t+n, x_0)) dt.$$

Так как левая часть стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow -\infty$), то нулем будет и предел правой части, т. е.

$$\int_0^1 f(\bar{x}) dt = f(\bar{x}) = 0.$$

Особое значение имеет исследование поведения системы (1.2) в окрестности точек равновесия. Это часто позволяет судить о качественном поведении решений системы (1.2) в целом. Ниже мы ограничимся исследованием устойчивости точек равновесия.

У п р а ж н е н и е Показать, что асимптотически устойчивая точка равновесия изолирована (в некоторой ее окрестности нет других точек равновесия).

Если решение $x(t, x_0)$ автономной системы (1.2) не имеет предела при $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$), но, например, ограничено при $t \geq t_0$ ($t \leq t_0$), то

можно говорить о предельных точках траектории $x(t, x_0)$ при $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$).

Определение 4. Точка $\bar{x} \in R^n$ называется ω -предельной (α -предельной) точкой решения $x(t, x_0)$, если существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$ ($t_k \rightarrow -\infty$) при $k \rightarrow \infty$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k, x_0) = \bar{x}.$$

Множество всех ω -предельных (α -предельных) точек траектории $x(t, x_0)$ называется ω -предельным (α -предельным) множеством. Если существует $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = \bar{x}$, то ω -предельное множество состоит из одной

точки \bar{x} . Если траектория $x(t, x_0)$ замкнута ($x(t, x_0)$ — периодическая функция), то как ω -предельное, так и α -предельное множества состоят из точек самой траектории.

Ввиду полной симметрии будем говорить только об ω -предельном множестве Ω .

Упражнения 1 Показать, что непустое множество Ω замкнуто. **2.** Показать, что при $x_0 \in \Omega$ вся траектория $x(t, x_0)$ принадлежит Ω .

Вообще имеет место следующая теорема:

Теорема. Если решение $x(t, x_0)$ автономной системы (1.2) ограничено при $t > 0$, то его ω -предельное множество Ω замкнуто, связано (т. е. любые две точки Ω можно соединить непрерывной кривой, лежащей в Ω) и состоит из целых траекторий системы (1.2).

При исследовании фиксированной точки равновесия x_0 системы (1.2) без ограничения общности можно считать $x_0 = 0$ ($f(0) = 0$), так как этого всегда можно добиться переносом начала координат, т. е. с помощью подстановки $y = x - x_0$.

2. Метод функций Ляпунова. Пусть точка $x = 0$ является точкой равновесия автономной системы уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad (2.1)$$

которую нужно исследовать на устойчивость.

Определение 1. Для произвольной функции $V(x)$, определенной и непрерывно дифференцируемой при $|x| < h$, функцию

$$W(x) = (\nabla V, f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x) \quad (2.2)$$

назовем производной функции $V(x)$ в силу системы (2.1).

Основанием для такого определения служит то, что для решения $x(t)$ системы (2.1), проходящего через точку x в момент времени t , имеет место

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x) = W(x). \quad (2.3)$$

Правая часть $W(x)$ как функция x нам известна, и мы можем судить, в частности, о знаке функции $W(x)$ в окрестности $x = 0$. Иногда этой информации бывает достаточно, чтобы из (2.3) сделать заключение об устойчивости или неустойчивости точки $x = 0$.

Определение 2. Функция $V(x)$ называется первым интегралом системы (2.1), если $W(x) \equiv 0$.

Согласно (2.3) первый интеграл сохраняет постоянное значение вдоль любого решения системы (2.1). Знание его бывает весьма полезно при исследовании уравнений. Однако нахождение первых интегралов сводится к решению уравнения в частных производных

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i = 0$$

и является обычно сложной задачей.

Функцию $V(x)$ в шаре $|x| < h$ назовем *положительно-определенной* (*отрицательно-определенной*), если $V(x) > 0$ (< 0) при $|x| > 0$ и $V(0) = 0$. $V(x)$ будем называть *неположительной* (*неотрицательной*) при $|x| < h$, если $V(x) \leq 0$ (≥ 0).

Теорема 1. Пусть $x = 0$ — точка равновесия системы (2.1) и в шаре $|x| < h$ существует непрерывно дифференцируемая положительно-определенная функция $V(x)$ с неположительной производной $W(x)$ в силу системы (2.1). Тогда точка $x = 0$ устойчива.

Если при этом $W(x)$ отрицательно определена в шаре $|x| < h$, то точка $x = 0$ асимптотически устойчива.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < h$). Положим

$$m = \min_{|x| = \varepsilon} V(x).$$

Очевидно, $m > 0$. Выберем столь малое δ , чтобы

$$\max_{|x| < \delta} V(x) < m.$$

Это возможно, так как $V(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow 0$. Пусть $|x_0| < \delta$ и $x(t, x_0)$ — решение системы (2.1) ($x(0, x_0) = x_0$). Так как $V(x(t, x_0))$ — невозрастающая функция ($W(x) \leq 0$) и $V(x_0) < m$, то для $x(t, x_0)$ имеем априорную оценку

$$|x(t, x_0)| < \varepsilon \quad \text{при } t > 0.$$

В силу произвольности x_0 , $|x_0| < \delta$, это и означает устойчивость $x = 0$.

Очевидно, для любого такого x_0 существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t, x_0)) = \alpha(x_0) \geq 0. \quad (2.4)$$

Покажем, что $\alpha(x_0) = 0$, если $W(x)$ отрицательно определена. Допустим, что это не так. Тогда $\alpha(x_0) = \alpha > 0$ для некоторого x_0 , $|x_0| < \delta$ и траектория $x(t, x_0)$ ($t > 0$) расположена в области $|x| < \varepsilon$, $V(x) \geq \alpha$, в которой $|x| \geq \varrho > 0$ ($\varrho < \varepsilon$) и $W(x) \leq -\beta$ ($\beta > 0$). Но тогда согласно (2.3) при $t > 0$

$$\frac{dV(x(t, x_0))}{dt} \leq -\beta$$

и, следовательно, $V(x(t, x_0)) \leq V(x_0) - \beta t$, что противоречит положительности $V(x)$. Таким образом, $\alpha(x_0) = 0$, если $W(x) < 0$ при $|x| > 0$. Из (2.4) теперь вытекает, что $V(x) = 0$ в каждой ω -предельной точке x решения $x(t, x_0)$, $|x_0| < \delta$. Но так как $V(x)$ обращается в нуль лишь при $x = 0$, то при любом x_0 , $|x_0| < \delta$, имеет место $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0$.

Асимптотическая устойчивость точки $x = 0$, а тем самым и теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $x = 0$ — точка равновесия системы (2.1), G — некоторая область R^n , S — часть ее границы, лежащая в шаре $|x| < h$, причем точка $x = 0$ лежит либо в G , либо на S . Пусть непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$ положительна в области G , $|x| < h$, вместе с производной $W(x)$ в силу системы (2.1) ($V(x) > 0$, $W(x) > 0$, $x \in G$, $|x| < h$) и $V(x) = 0$ при $x \in S$.

Тогда точка $x = 0$ неустойчива.

Доказательство. Зафиксируем $\varrho < h$ и пусть G_ϱ — часть G , лежащая в шаре $|x| < \varrho$, S_ϱ — часть S , лежащая в шаре $|x| < \varrho$. Пусть $x_0 \in G_\varrho$. Тогда $V(x_0) = \alpha > 0$. Рассмотрим решение $x(t, x_0)$. Функ-

ция $V(x(t, x_0))$ возрастает по t ($W > 0$), поэтому $x(t, x_0)$ не может выйти на S_ρ , где $V=0$. Остаются две возможности:

- 1) $x(t, x_0)$ остается в области G_ρ при $t > 0$;
- 2) $x(t, x_0)$ покидает область G_ρ через границу $|x| = \rho$ (см. рис. 5).

Предположим, что имеет место 1). Тогда $x(t, x_0)$ остается в той части G_ρ , где $V(x) \geq \alpha$. В этой области $W(x)$ имеет положительный минимум β , так что

$$\frac{dV(x(t, x_0))}{dt} \geq \beta > 0.$$

Отсюда следует, что $V(x(t, x_0)) \geq \alpha + \beta t$ и, значит, неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$. Это невозможно в области G_ρ , поэтому остается одна возможность — 2), т. е. какова бы ни была точка $x_0 \in G$, существует $t_0 > 0$, что $|x(t_0, x_0)| \geq \rho$. Это и означает, что точка $x=0$ неустойчива.

Функцию $V(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1 или теоремы 2, называют *функцией Ляпунова* для системы (2.1). С ее помощью, таким образом, можно определить устойчивость или неустойчивость точки равновесия. Построение функции Ляпунова требует использования специфики данной системы.

3. Некоторые примеры функции Ляпунова. 1. Консервативная механическая система с одной степенью свободы описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = f(x),$$

эквивалентным системе уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x_1), \quad (3.1)$$

где $x = x_1$ — смещение системы, x_2 — скорость, f — действующая сила. Функция полной энергии системы

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} - \int_0^{x_1} f(\xi) d\xi \quad (3.2)$$

является первым интегралом системы (3.1) ($W(x_1, x_2) \equiv 0$).

Предположим, что $f(0) = 0$ (так что $x_1 = x_2 = 0$ — точка равновесия системы (3.1)) и

$$x_1 f(x_1) < 0 \quad (x_1 \neq 0).$$

Тогда $V(x_1, x_2)$ положительна в некоторой окрестности точки $(0, 0)$; $V(0, 0) = 0$ и $W(x_1, x_2) = 0$. По теореме 1 точка $x_1 = x_2 = 0$ устойчива. Здесь, очевидно, нет асимптотической устойчивости, так как вдоль ненулевой траектории $V = \text{const} > 0$.

2. В более общем случае неконсервативной системы

$$\ddot{x} = \varphi(\dot{x}) + f(x),$$

$$\varphi(0) = f(0) = 0, \quad \xi \varphi(\xi) < 0, \quad \xi f(\xi) < 0, \quad \xi \neq 0 \quad (3.3)$$

функция (3.2) по-прежнему положительна при $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$, а ее производная $W(x_1, x_2)$ в силу эквивалентной системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \varphi(x_2) + f(x_1) \quad (3.4)$$

имеет вид

$$W(x_1, x_2) = x_2 \varphi(x_2). \quad (3.5)$$

В силу предположения (3.3) W неположительна, но обращается в нуль на координатной оси $x_2 = 0$. По теореме 1 точка $x_1 = x_2 = 0$ устойчива. Вопрос об асимптотической устойчивости требует дополнительного исследования.

3. Предположим, что в системе (3.4) вместо условий (3.3) имеют место

$$\varphi(0) = f(0) = 0, \quad \xi \varphi(\xi) > 0, \quad \xi f(\xi) > 0, \quad \xi \neq 0. \quad (3.6)$$

Тогда $F(x_1) = \int_0^{x_1} f(\xi) d\xi > 0$ при $x_1 \neq 0$ и $F(0) = 0$. В области

$$G = \{ (x_1, x_2), x_2 > (2F(x_1))^{1/2} \}$$

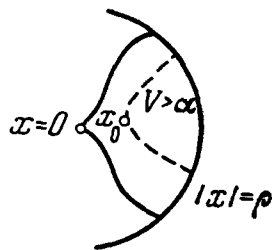


Рис. 5

функция (3.2) положительна и обращается в нуль на границе области G , содержащей точку $x_1 = x_2 = 0$. Производная $W(x_1, x_2)$ функции $V(x_1, x_2)$ в силу системы (3.4) по-прежнему имеет вид (3.5) и в силу (3.6) $W(x_1, x_2)$ положительна в области G . По теореме 2 точка $x_1 = x_2 = 0$ неустойчива.

4 В силу системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + ax_1x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - ax_1^2x_2 \end{aligned}$$

производная $W(x)$ функции $V(x) = x_1^2 + x_2^2$, как легко видеть, тождественно равна нулю ($V(x)$ — первый интеграл). Поэтому точка равновесия $x_1 = x_2 = 0$ устойчива, но не асимптотически устойчива (ненулевые траектории суть окружности $x_1^2 + x_2^2 = \text{const} > 0$).

5 Та же функция $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ имеет производную

$$W(x) = -2a(x_1^4 + x_2^4)$$

в силу системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - ax_1^3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - ax_2^3 \end{aligned}$$

По теореме 1 при $a > 0$ точка $x_1 = x_2 = 0$ асимптотически устойчива. По теореме 2 при $a < 0$ точка $x_1 = x_2 = 0$ неустойчива (область G есть $x_1^2 + x_2^2 > 0$).

Примеры 4 и 5 показывают, что при нелинейном возмущении различными способами одной и той же линейной системы

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1$$

характер устойчивости точки равновесия $x_1 = x_2 = 0$ может быть самым различным. Эта линейная система такова, что матрица ее коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет чисто мнимые собственные значения $\pm i$.

Оказывается, однако, в том случае, когда матрица коэффициентов при линейных членах не имеет нулевых и чисто мнимых собственных значений, устойчивость или неустойчивость точки равновесия полностью определяется линейными членами. В этом состоит следующий метод исследования устойчивости.

4. **Метод линеаризации.** Рассмотрим сначала линейную однородную систему

$$\dot{x} = ax, \tag{4.1}$$

где a — постоянная матрица.

Теорема 1. Пусть все собственные значения матрицы a имеют отрицательные действительные части. Тогда существуют постоянные $\alpha > 0$ и $K > 0$ такие, что для любого решения $x(t, x_0)$, $(x(0, x_0) = x_0)$ системы (4.1) имеет место оценка

$$|x(t, x_0)| \leq K |x_0| e^{-\alpha t}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Согласно формуле (2.1.7)

$$x(t, x_0) = \Phi(t, 0)x_0. \tag{4.3}$$

При этом для матрицы $\Phi(t, 0) = \Phi_0(t)$ имеет место интегральное представление (2.2.4):

$$\Phi_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda t} (\lambda E - a)^{-1} d\lambda, \tag{4.4}$$

где C — произвольный контур, охватывающий все собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы a . Положим

$$\max_k \operatorname{Re} \lambda_k = -2\alpha.$$

По условию теоремы $\alpha > 0$. В качестве контура C можно взять замкнутую кривую конечной длины l , частью которой является отрезок прямой $\operatorname{Re} \lambda = -\alpha$. На остальной части контура можно считать $\operatorname{Re} \lambda < -\alpha$. Из (4.3), (4.4) имеем

$$|x(t, x_0)| \leq |\Phi_0(t)| |x_0| \leq |x_0| M \frac{l}{2\pi} e^{-\alpha t},$$

где $M = \max_{|\xi|=1} |(\lambda E - a)^{-1}|$ (нормой матрицы A называется число $|A| = \max_{|\xi|=1} |A\xi|$). Полагая $K = M/2\pi$, имеем (4.2).

С л е д с т в и е. Все решения системы (4.1) асимптотически устойчивы, если выполнено условие теоремы 1.

В самом деле, из представления (4.3) следует

$$x(t, x_0) - x(t, x_1) = x(t, x_0 - x_1),$$

и для любого $\varepsilon > 0$ при $|x_0 - x_1| < \delta = \frac{\varepsilon}{K}$, из (4.2) вытекает

$$|x(t, x_0) - x(t, x_1)| < \varepsilon e^{-\alpha t}.$$

В частности, асимптотически устойчиво тривиальное решение $x = 0$.

З а м е ч а н и е 1 Если хотя бы одно собственное значение матрицы a имеет положительную действительную часть, то точка равновесия $x = 0$ системы (4.1) неустойчива.

Пусть λ — вещественное положительное собственное значение, а p — соответствующий собственный вектор матрицы a ($|p| = 1$). При любом начальном условии $x_0 = \rho p$ решение имеет вид

$$x(t, x_0) = \rho p e^{\lambda t},$$

и как бы мало ни было число $\rho \neq 0$, $|x(t, x_0)| = |\rho| e^{\lambda t}$ оказывается неограниченно растущей функцией t .

Случай комплексного собственного значения λ с положительной действительной частью предоставляем разобрать читателю.

Систему (4.1), удовлетворяющую условию теоремы 1, называют *устойчивой системой*. Мы построим функцию Ляпунова для устойчивой системы (4.1), с помощью которой удастся исследовать и нелинейную систему. В силу оценки (4.2) для решения $x(t, \xi)$ устойчивой системы конечен интеграл

$$V(\xi) = \int_0^{\infty} |x(\tau, \xi)|^2 d\tau. \quad (4.5)$$

Поскольку $x(t, \xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$ и линейно зависит от ξ , то $V(\xi)$ является положительно-определенной квадратичной формой от ξ . Согласно (4.5) и тождеству

$$x(\tau, x(t, \xi)) = x(t + \tau, \xi)$$

(см. (1.3)) имеем

$$V(x(t, \xi)) = \int_0^{\infty} |x(\tau, x(t, \xi))|^2 d\tau = \int_0^{\infty} |x(t + \tau, \xi)|^2 d\tau = \int_t^{\infty} |x(s, \xi)|^2 ds.$$

Отсюда

$$\frac{dV(x(t, \xi))}{dt} = - |x(t, \xi)|^2,$$

т. е. производная функция $V(x)$ в силу системы (4.1) имеет вид

$$W(x) = (\nabla V(x), ax) = - |x|^2. \quad (4.6)$$

Итак, устойчивая линейная система (4.1) допускает положительную при $x \neq 0$ функцию $V(x)$ (см. (4.5)) с отрицательной производной в силу системы вида (4.6).

Обратимся теперь к нелинейной автономной системе

$$\dot{x} = f(x). \quad (4.7)$$

Предполагая, что $x = 0$ есть точка равновесия, $f(0) = 0$ и что $f(x)$ непрерывно дифференцируема, имеем

$$\dot{x} = ax + R(x), \quad (4.8)$$

где a — постоянная матрица с элементами $a_{ij} = \partial f_i(0)/\partial x_j$, а $R(x) = o(|x|)$ (т. е. $\frac{|R(x)|}{|x|} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow 0$). Наряду с системой (4.7) будем рассматривать линеаризованную систему, т. е. систему (4.1) с матрицей a из (4.8).

Теорема 2. Если линеаризованная система устойчива, то точка равновесия $x = 0$ системы (4.7) асимптотически устойчива.

Доказательство. Рассмотрим функцию (4.5) для линеаризованной устойчивой системы (4.1). Ее производная в силу линейной системы (4.1) имеет вид (4.6). Вычислим ее производную $W_1(x)$ в силу системы (4.7). С учетом (4.8)

$$W_1(x) = (\nabla V, f) = (\nabla V(x), ax) + (\nabla V(x), R(x)).$$

Очевидно, $(\nabla V(x), R(x)) = o(|x|^2)$, так что при $|x| < h$ ($h > 0$) $(\nabla V, R) < \frac{1}{2} |x|^2$. А так как согласно (4.6) $(\nabla V(x), ax) = -|x|^2$, то в шаре $|x| < h$ имеем

$$W_1(x) \leq -\frac{1}{2} |x|^2.$$

По теореме 1, п. 2, точка $x = 0$ — асимптотически устойчивая точка равновесия системы (4.7).

Замечание 2. Если матрица a в (4.8) имеет хотя бы одно собственное значение с положительной действительной частью, то точка равновесия $x = 0$ системы (4.7) неустойчива.

Метод линеаризации не позволяет делать каких-либо заключений об устойчивости точки равновесия, когда собственные значения матрицы располагаются в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, т. е. возможно нулевое или чисто мнимое собственное значение. Исследование этого случая обычно связано с большими трудностями. В некоторых случаях, как в примерах 4 и 5 п. 3, это удается делать с помощью подходящей функции Ляпунова.

§ 4. ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ. ПОНЯТИЕ О ПРЕДЕЛЬНОМ ЦИКЛЕ

1. Классификация особых точек. В случае двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y; \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \tag{1.1}$$

возможна простая классификация особой точки $x = y = 0$ в зависимости от структуры матрицы коэффициентов

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Качественный характер особой точки не зависит от выбора системы координат и определяется только инвариантами матрицы a . Основными инвариантами являются:

$S = a_{11} + a_{22}$ — след матрицы a ;

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ — определитель матрицы a .

Собственные значения матрицы a являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 - S\lambda + \Delta = 0.$$

Корни λ_1 и λ_2 удовлетворяют соотношениям:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = S, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \Delta.$$

Ниже мы увидим, что инварианты S и Δ полностью определяют характер особой точки $x = y = 0$, за исключением, возможно, случая кратного корня $\lambda_1 = \lambda_2$. Рассмотрим всевозможные комбинации знаков S и Δ .

I. $\Delta < 0$. В этом случае корни λ_1 и λ_2 не могут быть комплексными, так как в противном случае $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ и $\Delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = |\lambda_1|^2 \geq 0$. Таким образом, λ_1 и λ_2 действительны и имеют разные знаки. Точка $x = y = 0$ в этом случае неустойчива и принадлежит, как принято называть, к типу «седло». Пусть $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, а

$$p_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

— соответствующие им собственные векторы матрицы a . Фундаментальную систему решений (1.1) образуют векторы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = p_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = p_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (1.3)$$

На фазовой плоскости (x, y) эти решения определяют прямые линии

$$p_{11}y - p_{12}x = 0; \quad (1.4)$$

$$p_{21}y - p_{22}x = 0,$$

проходящие через точку $x = y = 0$, причем вдоль первой прямой ($\lambda_1 < 0$) решения входят в точку $x = y = 0$ при $t \rightarrow +\infty$, а вдоль второй ($\lambda_2 > 0$) уходят от начала координат. Эти прямые называются *сепаратрисами* точки $(0, 0)$. Точка $(0, 0)$ и лучи сепаратрис, разделенных этой точкой, называются особыми траекториями. Общее решение системы (1.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 p_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 p_2 e^{\lambda_2 t},$$

откуда, исключая t , при $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ находим уравнение неособых траекторий в плоскости (x, y)

$$|p_{11}y - p_{12}x|^{\lambda_1} = c |p_{21}y - p_{22}x|^{\lambda_2}, \quad c > 0. \quad (1.5)$$

Эти траектории имеют вид гипербол, асимптотами которых являются сепаратрисы (рис. 6). Движение вдоль сепаратрис при возрастании t уже определяет направление движения вдоль неособых траекторий.

З а м е ч а н и е 1. Для нахождения сепаратрис, т. е. их наклонов, не требуется знания собственных значений и собственных векторов матрицы a . Если $a_{12} = a_{21} = 0$, то сепаратрисами являются, очевидно, координатные оси. Предположим, что $a_{21} \neq 0$. Тогда, составляя из системы (1.1) отношение

$$\frac{\dot{x}}{y} = \frac{a_{11} \frac{x}{y} + a_{12}}{a_{21} \frac{x}{y} + a_{22}}$$

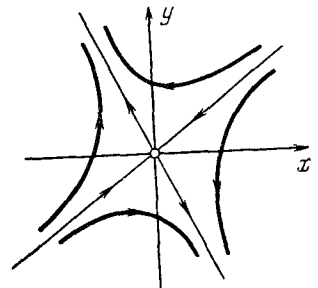


Рис. 6

и замечая, что для наклона сепаратрисы ξ имеют место равенства

$$\xi = \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} = \frac{\dot{x}}{y},$$

имеем квадратное уравнение для нахождения ξ :

$$\xi(a_{21}\xi + a_{22}) = a_{11}\xi + a_{12}.$$

При $a_{21} = 0, a_{12} \neq 0$ это уравнение даст только одно значение ξ . Другой сепаратрисой в этом случае будет координатная ось $y = 0$.

II. $\Delta > 0$. В этом случае существенным становится знак S

II₁. $\Delta > 0, S < 0$. Возможны два случая:

Первый случай. λ_1 и λ_2 — комплексно-сопряженные, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \Delta = |\lambda_1|^2, S = 2\text{Re } \lambda_1 < 0$. Поэтому точка $x = y = 0$ асимптотически устойчива. Все решения системы (1.1) при возрастании t совершают затухающие колебания вокруг точки $(0, 0)$.

На фазовой плоскости (x, y) траектории входят в точку $(0, 0)$, спирально закручиваясь и совершая бесконечное число витков. Этот случай называют устойчивым «фокусом» (рис. 7).

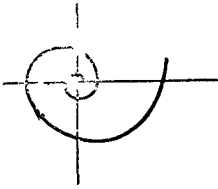


Рис 7

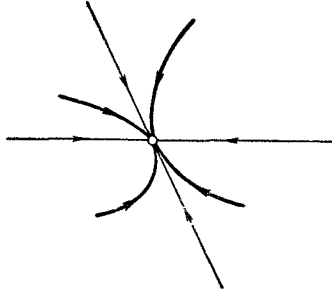


Рис. 8

Второй случай. λ_1 и λ_2 вещественные и отрицательные. Точка $x = y = 0$ асимптотически устойчива. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ и пусть (1.2) определяют собственные векторы матрицы a . Тогда (1.3) определяют фундаментальную систему решений, которые на фазовой плоскости изображаются прямыми линиями (1.4). Точка $(0, 0)$ и лучи этих прямых, разделенных точкой $(0, 0)$, и в этом случае являются особыми траекториями, только теперь при возрастании t траектории входят в точку $(0, 0)$ вдоль каждого луча ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$). Другие траектории определяются соотношением (1.5). Теперь они имеют вид парабол (рис. 8).

Этот случай называется устойчивым «узлом». Прямые (1.4) для этого случая мы также будем называть сепаратрисами «узла». Все неособые траектории входят в точку $(0, 0)$, касаясь одной из сепаратрис. Из (1.5) видно, что касательной является сепаратриса, соответствующая меньшему по абсолютной величине собственному значению.

Наклоны сепаратрис находятся точно так же, как и в случае седла (см. замечание 1).

II₂. $\Delta > 0, S > 0$. Снова возможны два случая.

Первый случай λ_1 и λ_2 — комплексно-сопряженные, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \Delta = |\lambda_1|^2 > 0, S = 2\text{Re } \lambda_1 = 2\text{Re } \lambda_2 > 0$. Точка $x = y = 0$ неустойчива. Все решения системы (1.1) при возрастании t совершают колебания с неограниченно возрастающей амплитудой. Этот случай называют неустойчивым «фокусом». Фазовая картина та же, что в случае устойчивого «фокуса», только с обращенной стрелкой: спираль разворачивается при возрастании t .

Второй случай. λ_1 и λ_2 вещественны и положительны. Точка $x = y = 0$ неустойчива. Этот случай называют неустойчивым «узлом». При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ фазовая картина такая же, как и в случае устойчивого «узла», только с обращенными стрелками: точки ненулевых траекторий при возрастании t уходят от точки $(0, 0)$.

З а м е ч а н и е 2. При описании особой точки типа «узел» (случаи II₂, второй, II₁, второй) мы намеренно опускали случай кратного корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, который называют вырожденным «узлом», устойчивым или неустойчивым в зависимости от знака λ . Оказывается, для полного опи-

сания этого случая инвариантов S и Δ недостаточно. При заданных S и Δ возможны следующие два случая.

1. Матрица a имеет два линейно-независимых собственных вектора p_1 и p_2 . В базисе из этих векторов матрица a имеет вид λE .

2. Существует только один собственный вектор p_1 матрицы a . При этом вектор p_1 может быть дополнен до базиса вектором p_2 так, что $ap_1 = \lambda p_1$, $ap_2 = \lambda p_2 + p_1$, т. е. в базисе из p_1 и p_2 матрица a имеет треугольную форму

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

В случае 1 общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t} (c_1 p_1 + c_2 p_2).$$

На фазовой плоскости (x, y) траектории суть лучи прямых линий, проходящих через точку $(0, 0)$ (рис. 9).

В случае 2 общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t} [c_1 p_1 + c_2 (t p_1 + p_2)].$$

Предоставляем выяснить читателю, что фазовая картина имеет вид, изображенный на рис. 10, где прямая линия отвечает случаю $c_2 = 0$.

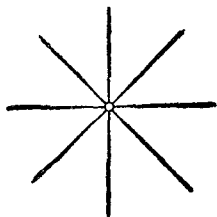


Рис. 9

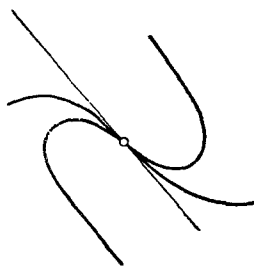


Рис. 10

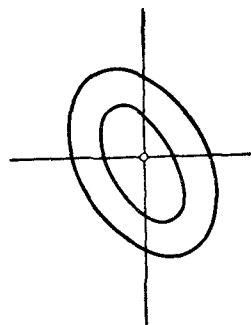


Рис. 11

В обоих случаях при возрастании t движение по траекториям происходит к точке $(0, 0)$, если $\lambda < 0$, и от точки $(0, 0)$, если $\lambda > 0$, т. е. при $\lambda < 0$ точка асимптотически устойчива, при $\lambda > 0$ — неустойчива.

III. $\Delta > 0$, $S = 0$. Корни λ_1 и λ_2 чисто мнимые. Все решения системы (1.1) периодические. На фазовой плоскости (x, y) все траектории есть замкнутые кривые (рис. 11), окружающие особую траекторию $(0, 0)$. Точка $(0, 0)$ устойчива, но не асимптотически устойчива. Этот случай называют «центром».

III. $\Delta = 0$. Хотя бы одно из собственных чисел λ_1 и λ_2 равно нулю. Матрица a вырождена и, кроме точки $(0, 0)$, все точки прямой

$$a_{11}x + a_{12}y = 0 \text{ или } a_{21}x + a_{22}y = 0$$

являются точками равновесия (при $a = 0$, т. е. при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ все точки плоскости (x, y) суть точки равновесия). При $a \neq 0$ общее решение системы (1.1) в плоскости (x, y) может быть представлено соотношением вида

$$ax + \beta y = C,$$

представляющим собой семейство параллельных прямых (C произвольно). С помощью этого соотношения система (1.1) сводится к одному уравнению, и характер движения вдоль траектории следует из примера 1, п. 3.1.

Ни одна точка равновесия не может быть асимптотически устойчивой.

2. Некоторые замечания. 1. Случаи «седла», устойчивого и неустойчивого «фокуса» и «узла» ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) являются невырожденными или грубыми точками равновесия: их характер не меняется при достаточно малых изменениях элементов матрицы a . В окрестности таких точек фазовая картина сохраняется и при нелинейных возмущениях.

Вырожденный «узел» ($\lambda_1 = \lambda_2$), «центр» и случай $\Delta = 0$ являются случаями вырождения. Их характер может измениться уже при сколь угодно малых изменениях матрицы a . Нельзя в этих случаях делать каких-либо заключений о поведении системы и при наличии нелинейных возмущений. Как мы видели на примере «центра» (примеры 4, 5, п. 3.3), замкнутый характер траекторий и характер устойчивости нарушаются уже при сколь угодно малых нелинейных возмущениях.

Вырожденный «узел» сохраняет свою устойчивость или неустойчивость при любых достаточно малых возмущениях (теорема 2, п. 3.4).

2. Исследование часто встречающегося уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad Q(x, y) \neq 0, \quad (2.1)$$

особыми точками которого являются точки (x_0, y_0) , в которых

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0,$$

введением параметра t сводится к исследованию системы

$$\frac{dx}{dt} = Q(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = P(x, y), \quad (2.2)$$

для которой особые точки (2.1) суть точки равновесия. Линеаризуя P и Q в окрестности точки равновесия, с помощью инвариантов Δ и S (или собственных значений λ_1, λ_2) матрицы коэффициентов можно определить характер особой точки. При этом с точки зрения уравнения (2.1) параметр t в системе (2.2) или $-t$ совершенно равноправны. Поэтому не имеет смысла говорить об устойчивости или неустойчивости особой точки. Важно различать лишь типы особых точек:

«седло» — λ_1, λ_2 действительны и имеют разные знаки;

«фокус» — λ_1, λ_2 комплексно-сопряженные, $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 \neq 0$;

«узел» — $\lambda_1 \neq \lambda_2$ действительны и имеют одинаковые знаки;

«центр» — λ_1, λ_2 чисто мнимые;

«вырожденный узел» — $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$.

Разбор случая, когда либо $\lambda_1 = 0$, либо $\lambda_2 = 0$, не представляет интереса, так как при линейных P и Q уравнение (2.1) не имеет особых точек (дробь P/Q сократима), а при нелинейных P и Q линеаризация ничего не дает так же, как, впрочем, в случае «центра» и «вырожденно-узла».

3. Понятие о предельном цикле. Часто бывает важно установить, имеет ли рассматриваемая система уравнений периодические решения (режимы автоколебаний). Ясно, что в случае автономной системы двух линейных уравнений это возможно лишь при наличии точки равновесия типа «центр». В этом случае все траектории на фазовой плоскости замкнуты и описываются решениями $x(t)$, имеющими один и тот же период по t . В случае нелинейных систем возможны другого типа замкнутые траектории (периодические решения) — так называемые предельные циклы.

О п р е д е л е н и е. Замкнутая траектория называется предельным циклом, если она является ω -предельным или α -предельным множеством для некоторой, не совпадающей с ней траектории.

Грубо говоря, предельный цикл характеризуется тем, что некоторая траектория «наматывается» на него при $t \rightarrow \infty$ или $t \rightarrow -\infty$.

Предельный цикл называется изолированным, если в некоторой его окрестности нет других замкнутых траекторий. Изолированный предельный цикл оказывается ω - или α -предельным множеством любой траектории $x(t, x_0)$ с достаточно близкой к циклу начальной точкой x_0 .

Система уравнений $\dot{x} = f(x)$ с аналитической функцией $f(x)$ может иметь только изолированные предельные циклы ($f = (f_1, \dots, f_n)$ называется аналитической в области G , если в окрестности каждой точки $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in G$ функции f_i раскладываются в степенной ряд по переменным x_1, \dots, x_n).

Пример. Рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x\varphi(x^2 + y^2) - y, \\ \dot{y} &= y\varphi(x^2 + y^2) + x,\end{aligned}\tag{3.1}$$

где достаточно гладкая функция $\varphi(r)$ имеет несколько положительных корней: $\varphi(r_i) = 0$ ($i = 1, \dots, k$; $0 < r_1 < \dots < r_k$).

Если $x(t), y(t)$ — решение системы (3.1), то функция

$$r(t) = x^2(t) + y^2(t)$$

удовлетворяет уравнению

$$\dot{r} = 2r\varphi(r),\tag{3.2}$$

для которого точки $r = 0, r = r_i$ ($i = 1, \dots, k$) являются точками равновесия. Это означает, что окружности

$$x^2 + y^2 = r_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)\tag{3.3}$$

являются изолированными замкнутыми траекториями системы (3.1).

Если $\varphi(r) > 0$ при $r_i < r < r_{i+1}$, то решение $r(t, r_0)$, $r_i < r_0 < r_{i+1}$ уравнения (3.2) является возрастающей функцией t и, как нетрудно видеть,

$$r_i < r(t, r_0) < r_{i+1}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} r(t, r_0) = r_i, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r(t, r_0) = r_{i+1}.$$

Если $\varphi(r) < 0$ при $r_i < r < r_{i+1}$, то решение $r(t, r_0)$ при $r_i < r_0 < r_{i+1}$ становится убывающей функцией t и предельные точки меняются местами. Таким образом, все окружности (3.3) оказываются предельными циклами системы (3.1).

Если $\varphi(r) \equiv 0$ при $r_i \leq r \leq r_i + h$ ($h > 0$) и $\varphi(r) \neq 0$ при $r_i - h < r < r_i$, то окружность $x^2 + y^2 = r_i$ является примером пензолированного предельного цикла, содержащегося в семействе замкнутых траекторий $x^2 + y^2 = r$, $r_i \leq r \leq r_i + h$. Разумеется, при этом $\varphi(r)$ не является аналитической функцией.

Изолированный предельный цикл называют:

устойчивым, если он является ω -предельным множеством для любой траектории $x(t, x_0)$ с достаточно близким к циклу начальным значением x_0 ;

неустойчивым, если для всех таких x_0 цикл является α -предельным множеством траектории $x(t, x_0)$;

полуустойчивым, если в любой близости к нему находятся точки x_1 и x_2 такие, что цикл является α -предельным множеством для $x(t, x_1)$ и ω -предельным — для $x(t, x_2)$.

Упражнение. Проверить, что цикл (3.3) системы (3.1) устойчив, если $\varphi'(r_i) < 0$; неустойчив, если $\varphi'(r_i) > 0$; полуустойчив, если $\varphi'(r_i) = 0$, $\varphi''(r_i) \neq 0$.

Пример реальной физической задачи, в которой возникает предельный цикл, рассматривается в § 4, гл. XI. При этом используется следующая полезная теорема существования периодического решения системы двух уравнений.

Теорема [43]. Пусть при $t > 0$ некоторое решение $x(t, x_0)$ ограничено (в этом случае ω -предельное множество Ω не пусто). Если среди точек Ω нет точек равновесия, то Ω состоит из замкнутой траектории..

Внутри замкнутой траектории на плоскости обязательно содержится хотя бы одна точка равновесия. Так, у системы (3.1) внутри циклов (3.3) оказывается точка равновесия $x = y = 0$. Замкнутые траектории

линейной автономной системы также окружают точку равновесия («центр»). Приведенной теоремой чаще всего удается воспользоваться в такой ситуации, когда некоторая траектория $x(t, x_0)$ при $t > 0$ не покидает ограниченной области G , в которой содержится только одна точка равновесия, являющаяся либо неустойчивым «узлом», либо неустойчивым «фокусом». Такая точка, очевидно, не может быть ω -пределной ни для какой траектории. Мы предлагаем читателю следующее полезное упражнение.

У п р а ж н е н и е Показать, что уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0, \quad (3.4)$$

имеет замкнутую траекторию на фазовой плоскости (x, \dot{x}) .

Трудной задачей является определение числа предельных циклов. В примере (3.1) их столько, сколько положительных корней у функции $\Phi(r)$. Уравнение (3.4) имеет, оказывается, только одну замкнутую траекторию. Подробный анализ уравнения (3.4) и более общих примеров читатель найдет, например, в [52].

§ 5. УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

1. **Общий подход.** Наличие малого параметра в системе уравнений часто позволяет упростить ее решение или исследование путем пренебрежения величинами порядка этого параметра. Конечно, при этом получается лишь приближенное решение. Если, например, система уравнений имеет вид

$$\dot{x} = F(x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

где F регулярно зависит от ε в окрестности $\varepsilon = 0$ (т. е. является непрерывно дифференцируемой функцией ε в окрестности $\varepsilon = 0$), то при достаточно малых ε можно ограничиться приближенным уравнением

$$\dot{x} = F(x, 0), \quad x(0) = x_0, \quad (1.2)$$

т. е. вместо решения $x_\varepsilon(t)$ системы (1.1) можно в качестве приближенного рассматривать решение $x_0(t)$ системы (1.2). По теореме о непрерывной и гладкой зависимости решения от параметра равномерно по t на любом конечном интервале $[0, T]$ из области определения $x_0(t)$ имеет место оценка

$$|x_\varepsilon(t) - x_0(t)| = O(\varepsilon). \quad (1.3)$$

Следует хорошо помнить, что соотношение (1.3) имеет место, вообще говоря, на конечном интервале изменения t . По этой причине требуют специального исследования системы уравнений вида:

$$\varepsilon \dot{x} = f(x, y), \quad x(0) = x_0; \quad (1.4)$$

$$\dot{y} = g(x, y), \quad y(0) = y_0, \quad (1.5)$$

когда малый положительный параметр стоит множителем при производной или (после деления (1.4) на ε) правая часть системы не регулярно зависит от ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Конечно, формальной заменой переменной $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ эта система сво-

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = \varepsilon g(x, y),$$

дится к системе

когда правая часть регулярно зависит от ε , и на конечном интервале изменения τ можно воспользоваться соотношением (1.3). Однако при

этом приближенное решение исходной системы (1.4)—(1.5) получается лишь в интервале изменения t , имеющем длину порядка ε . При $\varepsilon \rightarrow 0$ никакого приближенного решения по существу не получается.

Будем считать, что каждое из уравнений (1.4), (1.5) представляет собой векторную запись системы уравнений относительно неизвестных

$$x = (x_1, \dots, x_k), \quad y = (y_1, \dots, y_l).$$

Основной вопрос, возникающий при исследовании системы (1.4), (1.5), сводится к следующему: когда и как можно воспользоваться малостью параметра ε для приближенного решения системы уравнений (1.4), (1.5).

Мы ограничимся формулировкой некоторых важных результатов в этой области с кратким пояснением основных идей и методов их получения.

Согласно (1.4), (1.5) скорость движения точки (x, y) в фазовом пространстве распадается на два неравноправных вектора

$$\frac{1}{\varepsilon} f(x, y), \quad g(x, y),$$

из которых второй не зависит от ε , а первый не ограничен при $\varepsilon \rightarrow 0$ (если, конечно, $f(x, y) \neq 0$). Соответственно этому вектор x называют быстро меняющимся, а вектор y — медленно меняющимся. Основной подход к изучению системы (1.4), (1.5) заключается в том, что сперва изучается поведение быстро меняющихся переменных x при постоянных значениях медленных переменных y , т. е. рассматривается система уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, y), \quad x(0) = x_0 \quad \left(\tau = \frac{t}{\varepsilon} \right), \quad (1.6)$$

в которой y считается параметром. Мы будем предполагать, что при каждом y из некоторой области Y , содержащей начальное значение y_0 , решение $x = \varphi(\tau, y)$ системы (1.6) определено в интервале $0 < \tau < \infty$ и при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к некоторому стационарному решению, являющемуся:

а) асимптотически устойчивой точкой равновесия системы (1.6);

б) изолированным устойчивым предельным циклом системы (1.6).

В таком случае обычно решение $x = \varphi(\tau, y)$ экспоненциально приближается к своему предельному значению φ_0 и меньше, чем на ε , отличается от φ_0 уже при $\tau = \tau(y, \varepsilon) \sim \ln \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. при $t = t(y, \varepsilon) \sim \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$). Таким образом, можно считать, что время $t = t(y, \varepsilon)$, необходимое для того, чтобы решение $x = \varphi(\tau, y)$ ($\tau = \frac{t}{\varepsilon}$) достаточно приблизи-

лось к стационарному решению φ_0 , стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому в качестве приближенного решения системы (1.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует рассматривать стационарное решение φ_0 системы (1.6). Согласно (1.5) за время $t(y, \varepsilon)$ переменная y меняется незначительно, и в системе (1.5) переменную x можно заменить ее приближенным значением φ_0 , после чего решение системы (1.5) дает приближенное значение переменной y .

Таков общий подход к системе (1.4), (1.5). Все сказанное имеет строгое обоснование. Требуется лишь некоторая детализация, своя в каждом из случаев а) и б).

2. Теорема Тихонова. Рассмотрим сначала случай а), когда стационарное решение $\varphi_0 = \varphi_0(y)$ является асимптотически устойчивым положением равновесия системы (1.6) и, следовательно, является решением (корнем) уравнения

$$f(x, y) = 0. \quad (2.1)$$

Подстановка $x = \varphi_0(y)$ в систему (1.5) приводит к системе

$$\dot{y} = g(\varphi_0(y), y), \quad y(0) = y_0. \quad (2.2)$$

Если $y = \psi(t)$ — решение системы (2.2), то в качестве приближенного решения системы (1.4), (1.5) имеем

$$x = \varphi_0(\psi(t)), \quad y = \psi(t). \quad (2.3)$$

Т е о р е м а (Тихонов [51]). Пусть $x = \varphi_0(y)$ — непрерывно дифференцируемое решение системы (2.1), определенное в некоторой области $y \in Y$, содержащей точку y_0 , являющееся при каждом $y \in Y$ асимптотически устойчивым положением равновесия системы (1.6), причем при $y = y_0$ решение системы (1.6) сходится к значению $\varphi_0(y_0)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Пусть, далее, решение $y = \psi(t)$ системы (2.2) остается в области Y при $0 \leq t \leq L$.

Тогда для решения $x_\varepsilon(t)$, $y_\varepsilon(t)$ системы уравнений (1.4), (1.5) имеют место соотношения:

$$|y_\varepsilon(t) - \psi(t)| = O(\varepsilon) \text{ равномерно по } t \in [0, L]; \quad (2.4)$$

$$|x_\varepsilon(t) - \varphi_0(\psi(t))| = O(\varepsilon) \text{ равномерно по } t \in [t_0, L], \quad (2.5)$$

где t_0 — произвольно малое положительное число.

Таким образом, приближенным решением системы (1.4), (1.5) при $\varepsilon \rightarrow 0$ оказывается некоторое решение вырожденной системы (2.1), (2.2), т. е. системы (1.4), (1.5) при $\varepsilon = 0$.

Требование $\varphi(\tau, y_0) \rightarrow \varphi_0(y_0)$ для решения $x = \varphi(\tau, y_0)$ системы (1.6) при $y = y_0$, $\tau \rightarrow \infty$ означает по определению принадлежность начальной точки x_0 области притяжения (влияния) корня $\varphi_0(y_0)$. При наличии в области Y нескольких асимптотически устойчивых корней системы (2.1) в качестве приближенного значения x следует взять тот из корней, в области притяжения которого при $y = y_0$ лежит начальная точка x_0 .

Очевидно, вовсе не обязательно $x_0 = \varphi_0(y_0)$. Поэтому соотношение (2.5) может не иметь места при $t_0 = 0$. При $x_0 \neq \varphi_0(y_0)$ решение $x_\varepsilon(t)$ в узкой зоне изменения t вблизи $t = 0$ имеет характер «пограничного слоя». Если требуется найти приближенное (с точностью до ε) выражение для $x_\varepsilon(t)$ во всем интервале $t \in [0, L]$, то к $\varphi_0(\psi(t))$ следует найти поправку типа «пограничного слоя». Пусть $x = \varphi(\tau, y_0)$ — решение системы (1.6) при $y = y_0$. Можно показать, что такой поправкой будет функция

$$\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}, y_0\right) - \varphi_0(y_0) \quad (\varphi(0, y_0) = x_0),$$

так что равномерно по $t \in [0, L]$

$$\left| x_\varepsilon(t) - \varphi_0(\psi(t)) + \varphi_0(y_0) - \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}, y_0\right) \right| = O(\varepsilon). \quad (2.6)$$

З а м е ч а н и е. В связи с теоремой Тихонова возникает один интересный вопрос. Пусть решение $y = \psi(t)$ системы (2.2) является периодической функцией t периода $T > 0$. Тогда периодическим оказывается приближенное решение (2.3) системы (1.4), (1.5). Спрашивается, существует ли точное периодическое решение системы (1.4), (1.5)? Ответ на этот вопрос оказывается утвердительным. Этот результат получен Аносовым [2] при некоторых предположениях относительно $\psi(t)$, $\varphi_0(y)$.

П р и м е р. Пусть требуется найти приближенное решение системы:

$$\varepsilon \dot{x} = y - ax^2, \quad x(0) = x_0; \quad (2.7)$$

$$\dot{y} = x^2, \quad y(0) = y_0,$$

где $a > 0$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Открытой областью Y , где определены корни $x = \pm \sqrt{y/a}$ уравнения $y - ax^2 = 0$, является область положительных значений y . Поэтому теоремой Тихонова не удается воспользоваться при $y_0 < 0$. Пусть $y_0 > 0$. Частная производная

$$\frac{\partial}{\partial x} (y - ax^2) = -2ax$$

сохраняет отрицательный знак вдоль корня

$$x = \varphi_0(y) = \sqrt{y/a}, \quad (2.8)$$

который и будет единственным асимптотически устойчивым положением равновесия соответствующего (1.6) уравнения

$$\dot{x} = y - ax^2, \quad x(0) = x_0 \quad (2.9)$$

(другой корень — $x = -\sqrt{y/a}$ — неустойчив). Легко видеть, что область притяжения корня $\varphi_0(y_0)$ состоит из всех x_0 таких, что

$$x_0 > -\sqrt{y_0/a} \quad (2.10)$$

При $x_0 \leq -\sqrt{y_0/a}$ мы также не можем воспользоваться теоремой Тихонова. Нетрудно видеть, однако, что в этом случае и не существует предела при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения системы (2.7) Уравнение (2.2) принимает вид

$$\dot{y} = \frac{1}{a} y, \quad y(0) = y_0, \quad (2.11)$$

так что с учетом (2.8), (2.11) приближенное решение системы (2.7) получаем в виде

$$y = y_0 \exp \frac{t}{a}, \quad x = \sqrt{y_0/a} \exp \frac{t}{2a} \quad (y_0 > 0, x_0 > -\sqrt{y_0/a}).$$

У п р а ж н е н и е. Интегрируя (2.9) ($x_0 > -\sqrt{y_0/a}$), найти поправочный член типа «пограничного слоя» и приближение (2.6).

3. Теорема Понтрягина—Родыгина. В случае б), когда решение системы (1.6) выходит при $\tau \rightarrow \infty$ на устойчивое периодическое решение $\varphi_0 = \varphi_0(\tau, y)$ периода $T = T(y) > 0$, приближенное значение $x = \varphi_0(\tau, y) = \varphi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right)$ явно зависит от ε , и говорить о пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения системы (1.4), (1.5) не приходится. После подстановки $x = \varphi_0$ в (1.5) для нахождения y мы также получаем уравнение, зависящее от ε :

$$\dot{y} = g\left(\varphi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right), y\right), \quad y(0) = y_0. \quad (3.1)$$

Оказывается, однако, можно построить приближенное (с точностью до ε) решение $y = \psi(t)$ системы (3.1), не зависящее от ε . Процедура построения такого приближенного решения широко применяется в теории нелинейных колебаний [36] и известна под названием метода осреднения. Смысл этого метода состоит в том, что в разложении в ряд Фурье по t периодической по t (периода $\varepsilon T(y)$) правой части (3.1)

$$g\left(\varphi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right), y\right) = G(y) + \sum_{\nu > 0} \left[G_{\nu}^{+}(y) \cos\left(\frac{2\pi\nu}{\varepsilon T(y)} t\right) + G_{\nu}^{-}(y) \sin\left(\frac{2\pi\nu}{\varepsilon T(y)} t\right) \right] \quad (3.2)$$

отбрасываются быстроколеблющиеся члены при $\nu > 0$ и решается приближенное уравнение

$$\dot{y} = G(y), \quad y(0) = y_0. \quad (3.3)$$

Такая процедура равносильна, очевидно, осреднению по периоду правой части (3.1), т. е.

$$G(y) = \frac{1}{\varepsilon T(y)} \int_0^{\varepsilon T(y)} g\left(\varphi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right), y\right) dt.$$

Естественно ожидать, что отбрасываемые члены разложения (3.2) вследствие их быстрой пульсации дают малый вклад в решение уравнения (3.1) типа «мелкой дрожи» на фоне плавного изменения решения $y = \psi(t)$ системы (3.3).

Заметим, что наряду с $\varphi_0(\tau, y)$ при любой скалярной функции $\omega(y)$ стационарным решением системы (1.6) является функция

$$\varphi_0(\tau + \omega(y), y), \quad (3.4)$$

описывающая при фиксированном y ту же траекторию, но отличающаяся, быть может, началом отсчета τ вдоль этой траектории.

Выбрав должным образом функцию $\omega(y)$ в (3.4), приближенное решение системы (1.4), (1.5) можно записать в виде

$$y = \psi(t), \quad x = \varphi_0(T(\psi(t))\omega(t, \varepsilon), \psi(t)). \quad (3.5)$$

Здесь $y(t)$ — решение системы (3.3), $T = T(y)$ — период по τ функции $\varphi_0(\tau, y)$, а быстро меняющаяся функция $\omega(t, \varepsilon)$ («фаза») имеет вид

$$\omega(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{ds}{T(\psi(s))} + v(t), \quad (3.6)$$

где $v(t)$ — некоторая функция.

Т е о р е м а (Понтрягин, Родыгин [41, 42]). Пусть $x = \varphi_0(\tau, y)$ — изолированный устойчивый предельный цикл системы (1.6), $T = T(y)$ — его период по τ при каждом y из некоторой области Y , причем траектория кривой $x = \varphi_0(\tau, y_0)$ является ω -предельным множеством для решения задачи (1.6) при $y = y_0 \in Y$. Пусть, далее, решение $y = \psi(t)$ системы (3.3) остается в области Y при $0 \leq t \leq L$.

Тогда существует гладко зависящая от t функция $\omega(t, \varepsilon)$ такая, что равномерно по $t \in [t_0, L]$ ($t_0 > 0$, $x_\varepsilon(t)$, $y_\varepsilon(t)$ — решение системы (1.4), (1.5))

$$\varepsilon \frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{T(\psi(t))} = O(\varepsilon);$$

$$|y_\varepsilon(t) - \psi(t)| = O(\varepsilon);$$

$$|x_\varepsilon(t) - \varphi_0(T(\psi(t))\omega(t, \varepsilon), \psi(t))| = O(\varepsilon).$$

Помимо того что формулы (3.5), (3.6) определяют приближенное решение системы (1.4), (1.5), теорема утверждает, что компонента $x_\varepsilon(t)$ решения системы (1.4), (1.5) совершает быстрые колебания, «следя» за эволюцией цикла системы (1.6) вдоль кривой $y = \psi(t)$. Эти колебания в общем случае не являются периодическими.

З а м е ч а н и е 1. Если $y = y_0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия системы (3.3), то система (1.4), (1.5) имеет устойчивое периодическое решение, которое с точностью до ε согласно (3.5) может быть записано в виде

$$y = y_0, \quad x = \varphi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}, y_0\right).$$

Период этого решения отличается от периода $\varepsilon T(y_0)$ функции $\varphi_0\left(\frac{t}{\varepsilon}, y_0\right)$ на величину порядка ε^2 .

З а м е ч а н и е 2. Теоремы Тихонова и Понтрягина — Родыгина справедливы и для неавтономной системы (1.4), (1.5), когда

$$\dot{f} = f(x, y, t), \quad g = g(x, y, t).$$

Этот случай введением дополнительной переменной $z = t$ сводится к автономной системе:

$$\dot{x} = f(x, y, z), \quad x(0) = x_0;$$

$$\dot{y} = g(x, y, z), \quad y(0) = y_0;$$

$$\dot{z} = 1, \quad z(0) = 0.$$

Роль переменной y при этом играет вектор-функция (y, z) .

Эти теоремы остаются в силе и при регулярной зависимости от ε как функций f и g , так и начальных данных x_0 и y_0 .

Теоремы Тихонова и Понтрягина — Родыгина дают важный метод качественного исследования и приближенного решения уравнений. Некоторые их применения приводятся в гл. XI, XII.

Глава VII. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

Этот параграф носит вводный характер. Его целью является объяснить основные понятия: эллиптическое уравнение, граничная задача, сопряженная задача и т. д. В связи с этим мы не будем в нем указывать условия гладкости, которые необходимо налагать на коэффициенты уравнений, границы областей и на решения. Все это будет точно указано в следующем параграфе. Здесь же мы будем считать, что все функции, которые будут встречаться, являются достаточно гладкими, т. е. имеют все непрерывные производные нужного порядка.

1. **Эллиптические уравнения.** Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными образуют важнейший класс уравнений математической физики. Простейшим и важнейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (1.1)$$

где

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \quad (1.2)$$

Здесь $u = u(x)$ есть функция точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -мерного пространства R^n . К уравнению (1.1) приводит большое число различных задач математической физики, в частности задача о стационарном распределении температуры в теле (в этом случае $n = 3$).

Часто приходится рассматривать более общее уравнение

$$\Delta u = f(x), \quad (1.3)$$

где $f(x)$ — заданная функция, а $u(x)$ — искомая. Такое уравнение называется уравнением Пуассона. К нему приводят, например, задачи о распределении температуры в теле при наличии источника тепла.

Однако если даже говорить только о явлениях теплопроводности, то указанными уравнениями невозможно охватить многие интересные вопросы. Например, уравнение (1.3) получается в предположении, что рассматриваемое тело однородно по отношению к свойствам теплопроводности, т. е. коэффициент теплопроводности во всех точках тела одинаковый. Если это не так, то приходится рассматривать более общее уравнение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x), \quad (1.4)$$

где $k(x)$ — коэффициент теплопроводности в данной точке x пространства.

Однако и уравнением (1.4) охватывается только тот частный случай, когда тело изотропно, т. е. свойства теплопроводности в различных направлениях одинаковы. В случае, когда это не так, т. е. тело является анизотропным, вместо (1.4) нужно писать более общее уравнение. Кроме того, часто бывает важным учитывать перенос тепла не только за счет теплопроводности, но также и за счет движения вещества, например жидкости или газа. Тогда к уравнению (1.4) следует добавить еще

члены, содержащие первые производные от температуры u с коэффициентами, зависящими от скорости движения.

Все сказанное свидетельствует о том, что если мы хотим охватить более или менее широкий круг вопросов, то мы не можем ограничиваться уравнениями столь частного вида, которые были приведены.

В этой главе мы будем рассматривать уравнения следующего вида:

$$Lu = f, \quad (1.5)$$

где

$$Lu = - \sum_{i, k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u. \quad (1.6)$$

Здесь $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ — заданные функции точки x пространства R^n , причем они могут быть заданы не во всем пространстве, а на некотором открытом множестве G , в котором и будет изучаться это уравнение.

Мы будем предполагать, что имеет место равенство

$$a_{ik}(x) = a_{ki}(x) \quad (x \in G) \quad (1.7)$$

при всех $i, k = 1, 2, \dots, n$.

Уравнение (1.5) охватывает, как частный случай, все рассмотренные выше уравнения. Такими уравнениями описываются, например, стационарные распределения температуры с учетом неоднородности и анизотропии тела ($a_{ik}(x)$ — коэффициенты теплопроводности), переносов тепла за счет движения вещества ($b_i(x)$ — коэффициенты, зависящие от скорости движения), источника тепла (линейно зависящего от температуры в виде $f(x) - c(x)u$).

Уравнение (1.6) является линейным.

В этой главе мы рассматриваем только *линейные* уравнения, т. е. такие, для которых оператор L является линейным. Предположение о линейности является ограничением на рассматриваемый круг физических явлений. Например, коэффициенты теплопроводности могут зависеть от температуры. Поэтому предположение линейности значит, что мы ограничиваемся только таким случаем, когда коэффициенты теплопроводности слабо зависят от температуры и этой зависимостью можно пренебречь. Важным для приложений к химической физике является тот случай, когда источник тепла нелинейно зависит от температуры. Этот вопрос подробно рассмотрен в последующих главах.

Однако несмотря на то, что предположение о линейности является ограничением на рассматриваемый круг физических явлений, нужно иметь в виду следующие обстоятельства.

Во-первых, в большом числе случаев линейное приближение является вполне удовлетворительным. Во-вторых, и что весьма важно, никакое сколько-нибудь серьезное изучение нелинейных уравнений невозможно без достаточно хорошо развитой теории линейных уравнений. Более того, как показал накопившийся к настоящему времени опыт, изучение нелинейных уравнений требует исследования весьма тонких вопросов теории линейных уравнений.

Мы будем предполагать уравнение (1.5) *эллиптическим* в области G . Это значит, что в любой точке $x \in G$ квадратичная форма

$$Q(x, \xi) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \quad (1.8)$$

является положительно-определенной;

$$Q(x, \xi) > 0 \quad (1.9)$$

при всех $x \in G$ и всех векторах $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, отличных от нуля.

Например, для уравнения (1.4)

$$Q(x, \xi) = k(x) \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Условие эллиптичности для этого уравнения имеет вид $k(x) > 0$, что вполне согласуется с физическим смыслом, если под $k(x)$ понимать коэффициент теплопроводности. В частности, для уравнения Лапласа (1.1) $k(x) = 1$.

Условие эллиптичности (1.9) не исключает вырождения при приближении точки x к границе области G : на границе области условие эллиптичности может нарушаться. Эти случаи также важны в приложениях. Например, при изучении движения газа в соплах мы встречаемся с переходом от движения с дозвуковыми скоростями к движению со сверхзвуковыми. Дозвуковые области описываются эллиптическими уравнениями, которые, однако, вырождаются при подходе к границе этой области.

Детальное изучение вырождающихся эллиптических уравнений выходит за рамки этой книги. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что выполнено условие равномерной эллиптичности. Это значит, что существует такая константа $\mu > 0$, что

$$Q(x, \xi) \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (1.10)$$

для всех точек $x \in G$ и векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Например, уравнение (1.4) является равномерно эллиптическим, если $k(x) \geq \mu$.

Условие равномерной эллиптичности исключает вырождение.

Некоторые задачи математической физики приводят к необходимости изучать системы дифференциальных уравнений эллиптического типа. Например, такие, как система уравнений теории упругости относительно компонент вектора смещения, содержащая три уравнения с тремя неизвестными функциями, которыми являются компоненты вектора смещения.

Системы уравнений с частными производными могут быть записаны в виде (1.5), если перейти к матричным обозначениям. Это значит, что $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$ и $c(x)$ являются квадратными матрицами, например, порядка m . При этом нужно считать, что $f(x)$ и $u(x)$ — столбцы из m элементов $f(x)$ — заданный, а $u(x)$ — искомый. Дифференцирование столбца производится путем дифференцирования всех его элементов. Равенство (1.5) при указанных предположениях является матричной записью системы m уравнений с m неизвестными.

Мы не будем давать определение эллиптичности для системы уравнений, так как это не понадобится в дальнейшем изложении. Однако мы сформулируем условие, являющееся обобщением условия (1.10), из которого следует эллиптичность системы (1.5). Именно, будем теперь под ξ_i понимать не числа, а столбцы из m элементов. Положим

$$Q(x, \xi) = \sum_{i, k=1}^n \xi_i' a_{ik}(x) \xi_k, \quad (1.11)$$

где штрих обозначает транспонирование, т. е. ξ_i' есть строка из m элементов. Ясно, что (1.11) есть квадратичная форма относительно элементов столбцов ξ_k . Обобщением условия (1.10) на системы уравнений является условие

$$Q(x, \xi) \geq \mu \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad (1.12)$$

где $\mu > 0$ — заданная константа, $|\xi_i|$ — длина вектора ξ_i . Предполагается, что неравенство (1.12) имеет место для всех точек $x \in G$ и любых столбцов ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) из m элементов.

Условие (1.12) является более сильным, чем условие эллиптичности. Однако для многих эллиптических систем, встречающихся в математической физике, оно выполняется.

2. **Граничные задачи.** Каждое из приведенных в предыдущем пункте эллиптических уравнений имеет бесконечное множество решений. Примеры этому мы увидим в дальнейшем, когда будем строить фундаментальное решение уравнения Лапласа. Это, впрочем, видно и из физического смысла этих уравнений. Действительно, как уже было отмечено, уравнение Лапласа описывает стационарное распределение температуры в теле. Однако в одном и том же теле может быть бесконечное множество стационарных распределений температуры. Все зависит от того, каковы характеристики той внешней среды, в которую помещено это тело. Влияние внешней среды часто может быть описано условиями на границе тела. Вот почему наряду с уравнениями, описывающими процессы, происходящие внутри тела, задаются условия на границе. Задача нахождения решения эллиптического уравнения при заданных граничных условиях называется *граничной задачей*.

Приведем важнейшие примеры граничных задач.

1. *Первая краевая задача* (или *задача Дирихле*) состоит в нахождении решения u уравнения (1.5), если известно значение этого решения во всех точках границы:

$$u(x) = g(x) \quad (x \in S), \quad (2.1)$$

где S — граница области G , $g(x)$ — заданная функция.

Физический смысл этой задачи в случае теплопроводности состоит в нахождении стационарного распределения температуры в теле, если известно, какая температура поддерживается на поверхности этого тела.

Прежде чем формулировать остальные задачи, введем обозначения, которые будут использоваться и в дальнейшем. Пусть $\nu(x)$ — вектор внешней нормали к границе S в точке x :

$$\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \dots, \nu_n(x)). \quad (2.2)$$

Обозначим

$$D_\nu u = \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \nu_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}, \quad (2.3)$$

где x — произвольная точка границы S , $a_{ik}(x)$ — коэффициенты уравнения (1.5).

В частности, для уравнения Лапласа получаем

$$D_\nu u = \sum_{i=1}^n \nu_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}. \quad (2.4)$$

Но правая часть этого равенства есть производная функции u по направлению внешней нормали. Поэтому (2.4) можно записать также в виде

$$D_\nu u = \frac{du}{d\nu}. \quad (2.5)$$

2. *Вторая краевая задача* (или *задача Неймана*) состоит в нахождении решения u уравнения (1.5) при условии на границе

$$D_\nu u = g(x) \quad (x \in S), \quad (2.6)$$

где $g(x)$ — заданная функция.

Физический смысл этой задачи в случае теплопроводности состоит в нахождении стационарного распределения температуры в теле, если задан тепловой поток на поверхности тела.

3. *Третья краевая задача* состоит в нахождении решения u уравнения (1.5) при условии на границе

$$D_\nu u + h(x)u(x) = g(x) \quad (x \in S), \quad (2.7)$$

где $h(x)$ и $g(x)$ — заданные функции.

К такой задаче приводит нас, например, определение стационарно-то распределения температуры в теле, если происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона:

$$D, u = h(x) (u_0(x) - u(x)), \quad (2.8)$$

где $u_0(x)$ — температура окружающей среды.

Можно рассмотреть более общую постановку граничной задачи, когда граница S состоит из двух частей — S_1 и S_2 , на каждой из которых задается свое граничное условие.

4. *Смешанная задача (задача А)* состоит в нахождении решения u уравнения (1.5) при следующих условиях на границе:

$$u(x) = g_1(x) \quad (x \in S_1), \quad (2.9)$$

$$D, u + h(x)u(x) = g_2(x) \quad (x \in S_2), \quad (2.10)$$

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — функции, заданные на S_1 и S_2 соответственно.

При этом предполагается, что S_1 и S_2 не имеют общих точек:

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset. \quad (2.11)$$

Мы не исключаем случая, когда одно из множеств S_1 или S_2 является пустым, так что второе совпадает со всей границей S . Ясно, что задача A содержит как частные случаи все рассмотренные выше задачи. Именно, первая краевая задача получится при $S_1 = S$, вторая — при $S_2 = S$, $h = 0$, третья — при $S_2 = S$. Поэтому в дальнейшем мы будем заниматься только задачей A , рассматривая другие в случае надобности как примеры.

3. **Формулы Грина.** При изучении граничных задач важную роль играют две формулы, которые ниже будут получены.

Пусть u и v — две гладкие функции. Тогда, пользуясь формулой интегрирования по частям, мы получаем следующее равенство:

$$\int_G v Lu dx = \int_G \left\{ \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cv \right\} dx - \int_S D, uv dH_{n-1}. \quad (3.1)$$

Здесь Lu и D, u задаются равенствами (1.6) и (2.3), H_{n-1} — $(n-1)$ -мерная мера Хаусдорфа. Равенство (3.1) называется *первой формулой Грина*.

Если еще раз провести интегрирование по частям, то получим

$$\int_G (vLu - uMv) dx = \int_S [-D, u \cdot v + (D, v + \sigma v)u] dH_{n-1}, \quad (3.2)$$

где обозначено

$$Mv = - \sum_{i, k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x) \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i(x)v}{\partial x_i} + c(x)v, \quad (3.3)$$

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^n b_i(x)v_i(x). \quad (3.4)$$

Равенство (3.2) называют *второй формулой Грина*.

4. **Сопряженная задача.** При изучении вопросов разрешимости уравнений мы видим (см. приложение), что условие разрешимости уравнения формулируется с помощью решений сопряженного уравнения. Оказывается, что аналогичная ситуация имеет место и для граничных задач, если только должным образом сформулировать сопряженную задачу.

В качестве наводящего соображения для формулировки сопряженной задачи поставим вопрос следующим образом. Рассмотрим задачу A при однородных граничных условиях (2.9), (2.10), т. е. $g_1(x) = 0$ и $g_2(x) = 0$. Существует ли граничная задача такая, что для разрешимости задачи A необходимо выполнение следующего условия:

$$\int_G f(x)v(x)dx = 0 \quad (4.1)$$

для всех решений v такой задачи. Ответ на этот вопрос может быть получен с помощью второй формулы Грина (3.2).

Именно, если мы подберем функцию v так, чтобы $Mv = 0$ во всех точках области G и чтобы функция v удовлетворяла следующим соотношениям на границе: $v(x) = 0$ при $(x \in S_1)$ и $D_v v + (h + \sigma)v = 0$ при $x \in S_2$, то равенство (4.1) будет непосредственным следствием формулы (3.2).

Эти наводящие соображения приводят к следующей формулировке сопряженной задачи, которую мы назовем задачей A^* .

Задача A^* состоит в нахождении решения $v(x)$ уравнения

$$Mv = f^*(x) \quad (4.2)$$

в области G , удовлетворяющего следующим условиям на границе:

$$v(x) = g_1^*(x) \quad (x \in S_1), \quad (4.3)$$

$$D_v v + (h(x) + \sigma(x))v = g_2^*(x) \quad (x \in S_2). \quad (4.4)$$

Здесь Mv и σ определяются равенствами (3.3) и (3.4); $f^*(x)$ — функция, заданная в области G ; $g_1^*(x)$ и $g_2^*(x)$ — функции, заданные на S_1 и S_2 соответственно.

Если мы сравним выражения для Lu и Mv , даваемые равенствами (1.6) и (3.3), то мы заметим, что уравнение (4.2) того же вида, что и (1.5). Точно так же сравнение граничных условий задачи A^* с граничными условиями задачи A показывает, что и граничные условия аналогичны.

Таким образом, задача A^* имеет такой же вид, что и A . Поэтому мы можем сформулировать задачу, сопряженную к задаче A^* . Мы предоставим читателю проверить, что задача, сопряженная к A^* , совпадает с задачей A .

Граничную задачу будем называть *однородной*, если правые части равны нулю. Таким образом, в однородной задаче A $f = 0$, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$. В однородной задаче A^* $f^* = 0$, $g_1^* = 0$, $g_2^* = 0$.

Как уже указывалось выше, для разрешимости задачи A (в случае, когда $g_1 = 0$, $g_2 = 0$) необходимо, чтобы выполнялось условие (4.1) для всех решений v однородной задачи A^* . Аналогично с помощью формулы Грина можно написать необходимое условие разрешимости задачи A без предположения, что g_1 и g_2 равны нулю. Это условие также будет выглядеть как условие «ортогональности» в некотором смысле правых частей f , g_1 , g_2 по всем решениям v однородной задачи A . Читатель сам может легко их получить. Далеко не тривиальным оказывается тот факт, что так полученные необходимые условия являются также и достаточными для разрешимости задачи A . Это будет доказано в следующем параграфе.

Все сказанное выше без труда переносится на системы уравнений, если, конечно, сделать очевидные изменения. Так, в граничном условии (2.10) нужно в качестве $h(x)$ понимать квадратную матрицу порядка m . При переходе к сопряженной задаче все матрицы a_{ik} , b_i , c , h следует заменить на транспонированные. В формулах Грина (3.1) и (3.2) произведения под знаками интегралов нужно заменить скалярными произведениями в R^n .

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Существуют различные методы исследования граничных задач. Наиболее простым, по-видимому, является метод, основанный на применении функционального анализа. Именно он и будет здесь использован. При этом будет обобщена постановка граничной задачи. Несмотря на большую общность (или, возможно, благодаря ей), граничная задача в новой постановке допускает более простое исследование.

1. **Понятие об обобщенной постановке граничной задачи.** Оставаясь пока в рамках гладких функций, покажем, как можно перейти от постановки граничной задачи, указанной в предыдущем параграфе, к новой постановке. В этом пункте мы сохраним стиль изложения предыдущего параграфа — описательный. Точная постановка задачи с указанием класса функций будет дана в следующем пункте.

Пусть $u(x)$ — решение задачи A , сформулированной в п. 1.2, а $v(x)$ — произвольная гладкая функция, заданная в области G и удовлетворяющая условию

$$v(x) = 0 \quad (x \in S_1). \quad (1.1)$$

Применим формулу Грина (I.3.1) к этим функциям. Получим следующее равенство:

$$F(u, v) = \varphi(v), \quad (1.2)$$

где введены обозначения

$$F(u, v) = \int_G \left\{ \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv \right\} dx + \int_{S_2} h(x) u^+(x) v^+(x) dH_{n-1}, \quad (1.3)$$

$$\varphi(v) = \int_G v f dx + \int_{S_2} v^+(x) g_2(x) dH_{n-1}, \quad (1.4)$$

u^+ , v^+ — предельные значения функций u и v на границе S_2 .

Правая часть равенства (1.2) есть известный линейный функционал от v . Известный в том смысле, что он не содержит функцию u , которую требуется найти в результате решения задачи. Левая часть равенства (1.2) есть также линейный функционал относительно v . Однако, в отличие от правой части, он содержит неизвестную функцию u . Новая постановка задачи состоит в том, чтобы найти такую функцию u , для которой оба эти функционала совпадут. Точнее, *требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую граничному условию (1.2.9):*

$$u(x) = g_1(x) \quad (x \in S_1), \quad (1.5)$$

такую, что имеет место равенство (1.2) для всех функций v , равных нулю на S_1 .

Мы видели, что если функция $u(x)$ является решением задачи A в старой постановке, то она же является решением этой задачи и в новой постановке. Можно показать, что имеет место и обратное. Действительно, пусть $u(x)$ есть решение граничной задачи в новой постановке, причем u — достаточно гладкая функция (только этот случай мы пока и рассматриваем). Тогда, пользуясь формулой Грина (I.3.1), после простых преобразований получим

$$\int_G [Lu - f] v dx + \int_{S_2} [D, u + hu - g_2] v dH_{n-1} = 0. \quad (1.6)$$

Учитывая, что v — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условию (1.1), из (1.6) нетрудно получить, что выражения, стоя-

щие в квадратных скобках, обращаются в нуль. А это с учетом равенства (1.5) и значит, что u есть решение задачи A в старой постановке.

2. Задача А. Мы сформулируем здесь точную постановку граничной задачи, исследованию которой и будет посвящена вся дальнейшая часть этой главы.

Начнем с описания классов функций, в которых будет решаться эта задача, и области G , в которой она рассматривается.

Будем считать, что G есть ограниченное открытое связное множество с конечным периметром, принадлежащее пространству R^n (см. п. IV.2.1). Существенную границу множества G будем обозначать через S . Мы будем, далее, предполагать, что заданы два множества S_1 и S_2 , измеримых по мере Хаусдорфа H_{n-1} , причем

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset. \quad (2.1)$$

Будет рассматриваться функционал $F(u, v)$, задаваемый равенством (1.3). Предполагается, что коэффициенты $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ являются ограниченными измеримыми по мере Лебега на множестве G функциями, а $h(x)$ ограничена и измерима на S_2 по мере H_{n-1} .

Функционал $F(u, v)$ будет рассматриваться на функциях, принадлежащих пространству $BV^2(G)$. Это пространство определено в п. V.3.2. Для удобства приведем это определение еще раз. Пространство $BV^2(G)$ есть пространство функций $u(x)$, заданных в R_n , равных нулю вне множества G и удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $u \in BV$;
- 2) $u(x)$ имеет суммируемые в квадрате обобщенные производные в G ;

3) $u^+(x)$ суммируемо в квадрате по мере H_{n-1} на S .

Здесь u^+ — внутренний след функции $u(x)$ на S (см. п. V.1.2).

Норму в пространстве $BV^2(G)$ будем обозначать $\| \cdot \|$, так что

$$\| u \| ^2 = \int_G \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_S u^{+2} dH_{n-1}. \quad (2.2)$$

В дальнейшем важную роль будет играть пространство функций, которое мы будем обозначать через E и которое определяется следующим образом.

Пространство E есть подпространство пространства $BV^2(G)$, состоящее из функций $u \in BV^2(G)$, удовлетворяющих условию

$$u^+(x) = 0 \quad (x \in S_1). \quad (2.3)$$

Сформулируем теперь задачу A .

Задача А. Найти функцию u , принадлежащую пространству $BV^2(G)$, удовлетворяющую граничному условию

$$u^+(x) = g^+(x) \quad (x \in S_1) \quad (2.4)$$

и уравнению

$$F(u, v) = \varphi(v) \quad (2.5)$$

для всех функций v , принадлежащих пространству E .

Здесь $g^+(x)$ — заданная функция, принадлежащая пространству $BV^2(G)$, а $\varphi(v)$ — заданный линейный ограниченный функционал в пространстве E . Другими словами, g — заданный элемент пространства $BV^2(G)$, а φ — заданный элемент сопряженного пространства E^* .

Наряду с задачей A мы будем рассматривать сопряженную задачу, которую будем обозначать A^* и которая формулируется следующим образом.

Задача A^* . Найти функцию v , принадлежащую пространству $BV^2(G)$, удовлетворяющую граничному условию

$$v^+(x) = g_*^+(x) \quad (x \in S_1) \quad (2.6)$$

и уравнению

$$F(u, v) = \varphi_*(u) \quad (2,7)$$

для всех функций u , принадлежащих пространству E .

Здесь g и φ_* — заданные элементы пространства $BV^2(G)$ и сопряженного пространства соответственно.

Возникает вопрос, как связана эта задача с первоначальной постановкой сопряженной задачи, сформулированной в п. 1.4. Оказывается, что если применить те же рассуждения, которые были проведены в п. 1, к задаче A^* в ее старой постановке, то мы придем к новой постановке этой задачи именно в том виде, в котором она сейчас была сформулирована.

Заметим, что в постановке обеих задач A и A^* фигурирует один и тот же *билинейный* функционал $F(u, v)$, однако в задаче A он фигурирует как линейный функционал по второму аргументу, в задаче A^* — по первому.

В тех постановках граничных задач, которые приводились в п. 1.2, всегда шла речь о нахождении решения уравнения (I.1.5)

$$Lu = f, \quad (2,8)$$

удовлетворяющего граничным условиям.

В обобщенной постановке задачи A , сформулированной в этом пункте, явно нет речи о решении уравнения (2.8). В действительности, однако, и здесь фактически ищется решение уравнения (2.8), но только обобщенное, определение которого сейчас будет дано.

О п р е д е л е н и е. *Обобщенным решением* уравнения (2.8) на множестве G называется функция $u(x)$, принадлежащая пространству $BV^2(G)$, такая, что

$$F(u, v) = \int_G f v dx \quad (2,9)$$

для всех *финитных* в G функций v , принадлежащих пространству $BV^2(G)$.

Требование финитности функции v сразу же снимает влияние граничных условий, так как в функционале (1.3) при этом второй интеграл обращается в нуль.

Ясно, что каждое решение задачи A для функционала φ вида (1.4) есть обобщенное решение уравнения (2.8).

3. Сильная эллиптичность. Для эллиптических уравнений главную роль в исследовании граничных задач играют старшие члены уравнения (I.1.5), т. е. слагаемые в выражении (I.1.6), содержащие вторые производные. Влияние младших членов начинает сказываться только при появлении вырождения эллиптичности, однако этим мы заниматься не будем.

Рассмотрим часть функционала $F(u, v)$, содержащую старшие члены

$$F_0(u, v) = \int_G \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx + \int_{S_2} h(x) u^+(x) v^+ x dH_{n-1}. \quad (3.1)$$

Следуя Вишику [11], дадим определение сильной эллиптичности.

О п р е д е л е н и е. Задача A называется *сильноэллиптической*, если для всех функций u , принадлежащих пространству E , выполняется неравенство

$$F_0(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 - \beta \|u\|^2, \quad (3.2)$$

где α и β — некоторые положительные константы.

Напомним, что пространство E есть подпространство в $BV^2(G)$ функций, равных нулю на S_1 (см. п. 2), $\| \cdot \|$ есть норма в $BV^2(G)$, $\| \cdot \|$ есть норма в $L^2(G)$.

Ниже мы укажем явные условия сильной эллиптичности задачи A . Уточним сначала условие *равномерной эллиптичности*, которое было сформулировано в п. 1.1: существует такая константа $\mu > 0$, что

$$\sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (3.3)$$

для почти всех $x \in G$ и всех векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Явные условия сильной эллиптичности указаны в следующей теореме.

Теорема. Пусть выполняется условие равномерной эллиптичности (3.3). Пусть, далее, существует такое число $\rho > 0$, что множество точек $x \in S_2$, для которых имеет место неравенство

$$h(x) < \rho, \quad (3.4)$$

является регулярным (см. п. V.3.7).

Тогда задача A является сильноэллиптической.

Доказательство. Пусть S_2 — множество тех точек $x \in S_2$, для которых

$$h(x) \geq \rho, \quad (3.5)$$

а S_2'' — множество точек $x \in S_2$, для которых имеет место (3.4). Пользуясь равномерной эллиптичностью, мы можем записать

$$\begin{aligned} F_0(u, u) &\geq \mu \int_G \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{S_2} hu^+ dH_{n-1} = \\ &= \mu \|u\|_{w_2}^2 - \mu \|u\|^2 + \int_{S_2} hu^{+2} dH_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

На основании оценки (3.5)

$$\int_{S_2} hu^{+2} dH_{n-1} \geq \rho \int_{S_2} u^{+2} dH_{n-1} - (\rho + h_0) \int_{S_2} u^{+2} dH_{n-1}, \quad (3.7)$$

где обозначено $h_0 = \sup_{x \in S_2} |h(x)|$.

Обозначим $\alpha = \min \left\{ \frac{\mu}{2}, \rho \right\}$. Тогда из (3.6) и (3.7)

$$F_0(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 - \mu \|u\|^2 + \frac{\mu}{2} \|u\|_{w_2}^2 - (\rho + h_0) \int_{S_2} u^{+2} dH_{n-1}. \quad (3.8)$$

Но по условию теоремы S_2'' есть регулярное множество. Поэтому мы можем воспользоваться оценкой, полученной в п. V.3.7:

$$\int_{S_2} u^{+2} dH_{n-1} \leq \varepsilon \|u\|_{w_2}^2 + \frac{1}{\varepsilon} C \|u\|^2.$$

Ясно, что ε можно подобрать так, что из (3.8) получится неравенство (3.2). Теорема доказана.

Из теоремы следует, что существует два частных случая, когда задача A для равномерно эллиптических уравнений является сильноэллиптической без требований условий регулярности границы или ее частей.

1. Задача A является первой краевой задачей ($S_1 = S$).

2. Существует такое число $\rho > 0$, что

$$h(x) \geq \rho \quad (x \in S_2). \quad (3.9)$$

Это условие часто выполняется в физических задачах. Например, в задачах теплопроводности $h(x)$ есть коэффициент, характеризующий

теплообмен с окружающей средой (см. (I.2.8)), для которого условие (3.9) вполне естественно.

4. Пространство, порожденное задачей А. Пусть задача A является сильноэллиптической (определение дано в предыдущем пункте). Тогда на функциях $u(x)$, принадлежащих пространству E , можно ввести скалярное произведение следующим образом:

$$[u, v] = F_0(u, v) + \beta(u, v), \quad (4.1)$$

где $F_0(u, v)$ есть функционал (3.1) и (u, v) — скалярное произведение в пространстве $L^2(G)$; β есть константа, входящая в определение (3.2) сильной эллиптичности. Напомним, что пространство E определено в п. 2.

Ясно, что все свойства скалярного произведения выполняются. В частности, из неравенства

$$[u, u] \geq \alpha \|u\|^2, \quad (4.2)$$

которое является следствием неравенства (3.2), мы заключаем, что $[u, u] \geq 0$ и равенство нулю возможно лишь при $u = 0$.

Таким образом, мы получаем евклидово пространство, которое естественно назвать пространством, порожденным задачей A , так как скалярное произведение в нем определяется с помощью функционала $F_0(u, v)$. Это пространство будем обозначать E_A . Итак, мы даем следующее определение.

О п р е д е л е н и е. E_A есть пространство функций u , принадлежащих пространству $BV^2(G)$ и удовлетворяющих условию

$$u^+(x) = 0 \quad (x \in S_1), \quad (4.3)$$

со скалярным произведением (4.1).

Норму в пространстве E_A будем обозначать $\| \cdot \|_A$, так что

$$\|u\|_A^2 = [u, u].$$

Обратим внимание на то, что оба пространства E и E_A состоят из одних и тех же функций, но только в них введены различные скалярные произведения. Кроме того, легко понять, что E есть также пространство типа E_A . Именно, если в качестве задачи A взята задача для уравнения Лапласа и $h(x) = 1$, то соответствующее пространство E_A совпадает с пространством E .

Легко понять, почему рассматриваются два пространства: E и E_A . Пространство E связано, как это было сейчас объяснено, с простейшей граничной задачей. Поэтому свойства этого пространства легче изучить, чем свойства пространства E_A , связанного с более сложной задачей A . С другой стороны, изучение задачи A естественно проводить с помощью пространства E_A , наиболее близкого по своей природе к этой задаче. Остается только заметить, что имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а. *Нормы в пространствах E и E_A эквивалентны, т. е. существуют две положительные константы M и N такие, что*

$$\|u\|_A \leq M \|u\|, \quad \|u\| \leq N \|u\|_A. \quad (4.4)$$

(Здесь $\| \cdot \|$ обозначает норму в пространстве E , которая совпадает с нормой в пространстве $BV^2(G)$ (см. (2.2).)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Второе из неравенства (4.4) непосредственно следует из (4.2).

Чтобы получить первое из этих неравенств, мы заметим, что из (3.1) в силу ограниченности функций $a_{ik}(x)$ и $h(x)$ следует оценка

$$F_0(u, u) \leq C \|u\|^2,$$

где C — некоторая константа. Но из (4.1) следует, что

$$\|u\|_A^2 = F_0(u, u) + \beta \|u\|^2,$$

так что

$$\|u\|_A^2 \leq C \| \|u\| \|^2 + \beta \|u\|^2. \quad (4.5)$$

Но мы видели (п. V. 3.5), что

$$\| \|u\| \|^2 \leq C_1 \| \|u\| \|^2, \quad (4.6)$$

где C_1 — некоторая константа. Отсюда и из (4.5) получаем первое неравенство (4.4). Теорема доказана.

Эта теорема дает возможность делать выводы о свойствах пространства E_A , если известны соответствующие свойства пространства E .

С л е д с т в и е 1. *Пространство E_A является полным и, следовательно, гильбертовым пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно следует из теоремы и полноты пространства E . Проведем его.

Пусть $\{u_n\}$ — фундаментальная последовательность в пространстве E . Тогда на основании (4.4)

$$\| \|u_n - u_m\| \| \leq N \| \|u_n - u_m\| \| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, $\{u_n\}$ — фундаментальная последовательность в E . Ввиду полноты пространства E существует элемент $u \in E$ такой, что $\| \|u_n - u\| \| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. На основании (4.4)

$$\| \|u_n - u\| \|_A \leq M \| \|u_n - u\| \| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, последовательность $\{u_n\}$ сходится в пространстве E_A . Полнота пространства E_A доказана.

С л е д с т в и е 2. *Оператор I вложения пространства E_A в пространство $L^2(G)$ вполне непрерывен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная последовательность в пространстве E_A . На основании (4.4) эта последовательность ограничена также в пространстве E и, следовательно, в пространстве $BV^2(G)$. Поэтому (см. п. V.3.6) существует подпоследовательность, сходящаяся в $L^2(G)$. Это и значит, что оператор I вполне непрерывен.

5. Младшие члены. Мы определили скалярное произведение в пространстве E_A равенством (4.1), в которое вошла часть $F_0(u, v)$ функционала $F(u, v)$. Оставшаяся часть функционала содержит младшие члены. Естественно поставить вопрос о том, какой вклад вносит она в изучение граничной задачи.

Из равенств (1.3) и (4.1) получаем следующее равенство:

$$F(u, v) = [u, v] + F_1(u, v), \quad (5.1)$$

где

$$F_1(u, v) = \int_G \left\{ \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + [c(x) - \beta] uv \right\} dx. \quad (5.2)$$

Нашей ближайшей целью является изучение функционала (5.2). Для этого введем оператор B , определенный на всех функциях пространства E_A и действующий из E_A в $L^2(G)$ таким образом:

$$Bu = \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + [c(x) - \beta] u \quad (5.3)$$

(обобщенные производные $\partial u / \partial x_i$ рассматриваются в G).

То, что оператор (5.3) имеет смысл на функциях $u \in E_A$, легко понять. Действительно, по определению пространства E_A , данному в п. 4, элементы этого пространства принадлежат пространству $BV^2(G)$. Поэтому если $u \in E_A$, то $u(x)$ суммируема в квадрате и имеет суммируемые в квадрате производные в области G . Так как b_i и c — ограниченные функции, то ясно, что правая часть в (5.3) представляет собой функцию, суммируемую в квадрате в области G .

Покажем, что оператор B ограничен. Действительно, обозначая для сокращения записи $c_0(x) = c(x) - \beta$, мы можем записать

$$\begin{aligned} \|Bu\|^2 &= \int_G \left[\sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c_0(x)u \right]^2 dx \leq \\ &\leq \int_G \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 + c_0^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Мы применили неравенство Коши — Буняковского к векторам

$$(b_1, b_2, \dots, b_n, c_0) \text{ и } \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u \right).$$

Пользуясь ограниченностью функций $b_i(x)$ и $c_0(x)$, получаем из (5.4)

$$\|Bu\|^2 \leq K_0 (\|u\|^2 + \|u\|^2), \quad (5.5)$$

где K_0 — некоторая константа.

Напомним, что норма в пространстве E задается равенством (2.2).

Из (5.5) и (4.6) следует

$$\|Bu\|^2 \leq K_1 \|u\|^2.$$

Отсюда и из эквивалентности норм в пространствах E и E_A (см. теорему п. 4) мы окончательно получаем

$$\|Bu\| \leq K \|u\|_A, \quad (5.6)$$

где K_0 — некоторая константа.

Итак, мы доказали ограниченность оператора B .

Вернемся к функционалу $F_1(u, v)$, определенному равенством (5.2). Пусть u и v — две произвольные функции из пространства E_A . Тогда ясно, что функционал $F_1(u, v)$ может быть записан в виде

$$F_1(u, v) = (Bu, Iv), \quad (5.7)$$

где $(\ , \)$ по-прежнему обозначает скалярное произведение в $L^2(G)$, а I — оператор вложения пространства E_A в пространство $L^2(G)$.

Пользуясь равенствами (5.7) и (5.1), мы можем представить функционал в виде

$$F(u, v) = [u, v] + (Bu, Iv). \quad (5.8)$$

Как было показано, здесь B — ограниченный, а I — вполне непрерывный оператор (см. п. 4, следствие 2).

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а. *На функциях u и v , принадлежащих пространству E_A , функционал $F(u, v)$ имеет вид (5.8), где B — ограниченный, а I — вполне непрерывный операторы, действующие из E_A в $L^2(G)$.*

6. О разрешимости и единственности решения граничных задач.

В п. 1.2 мы говорили о том, что эллиптические уравнения имеют бесконечное множество решений. Чтобы выделить из этого множества то решение, которое соответствует физической постановке задачи, мы ввели граничные условия. Возникает вопрос, достаточно ли введенных граничных условий, чтобы решение было единственным.

Обратимся к примеру. Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения Лапласа: найти решение уравнения

$$\Delta u = 0 \quad (6.1)$$

в области G при граничных условиях

$$\frac{du}{dn} + hu = g_2 \quad (6.2)$$

на границе S области G . Здесь du/dn — производная по направлению внешней нормали к границе S .

Функционал $F(u, v)$ (см. (1.3)) в рассматриваемом случае имеет вид

$$F(u, v) = \int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_S h(x) u^+(x) v^+(x) dH_{n-1}, \quad (6.3)$$

а функционал $\varphi(v)$ (см. (1.4)) задается равенством

$$\varphi(v) = \int_S v^+(x) g_2(x) dH_{n-1}. \quad (6.4)$$

Обобщенная постановка задачи имеет вид

$$F(u, v) = \varphi(v) \quad (6.5)$$

при всех $v \in E$.

Однородная задача ($g_2 = 0$) превращается в задачу определения функции $u \in E$ такой, что

$$F(u, v) = 0 \quad (6.6)$$

при всех $v \in E$.

Положим в (6.6) $v = u$. Тогда получим

$$F(u, u) = 0. \quad (6.7)$$

Считая, что выполняется условие

$$h(x) \geq 0, \quad (6.8)$$

мы заключаем из (6.3), что имеют место два равенства:

$$\int_G \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = 0, \quad (6.9)$$

$$\int_S h(x) u^+{}^2 dH_{n-1} = 0. \quad (6.10)$$

Из (6.9) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.11)$$

почти всюду в G . Мы будем предполагать, что область G — связная. Тогда (6.11) возможно лишь в том случае, когда

$$u(x) = C, \quad (6.12)$$

где C — некоторая константа. Подставив эту константу в (6.10), получим

$$C \int_S h(x) dH_{n-1} = 0. \quad (6.13)$$

Рассмотрим сначала тот случай, когда

$$h(x) > 0, \quad (6.14)$$

на множестве положительной меры Хаусдорфа на S . Тогда из (6.8) и (6.13) мы сделаем вывод, что $C = 0$.

Итак, мы получили следующий результат: *если выполняется условие (6.14), то однородная задача (6.1), (6.2) имеет только нулевое решение.*

Совершенно другой результат мы получим, если предположим, что

$$h(x) = 0 \quad (x \in S_2). \quad (6.15)$$

В этом случае задача (6.1), (6.2) превращается в задачу Неймана. Теперь из (6.13) уже нельзя сделать вывод, что $C = 0$. Более того, этот вывод был бы неправильным, так как ясно, что любая константа является решением задачи (6.1), (6.2) (при $h = 0, g_2 = 0$).

Мы получили следующий результат: *решением однородной задачи Неймана является произвольная константа, и других решений эта задача не имеет.*

Мы видим, таким образом, что решение задачи Неймана не единственно. Соответствует ли это физике явлений? Мы покажем сейчас, что это действительно так. Между первым (6.14) и вторым (6.15) из рассмотренных случаев имеется качественное различие. Если мы будем трактовать задачу (6.1), (6.2) как задачу о стационарном распределении температуры в теле, то в случае (6.14) имеет место теплообмен с окружающей средой, и в теле устанавливается температура, равная температуре окружающей среды (которую мы приняли равной нулю). В случае (6.15) тело теплоизолировано, теплообмен с окружающей средой отсутствует. Поэтому в теле также устанавливается некоторая стационарная температура, однако ее значение зависит от запаса тепла, имеющегося в теле и никак не описанного в постановке задачи. Вот почему в этом случае нет единственности решения.

Таким образом, мы видим, что решение граничных задач не обязательно должно быть единственным, и это вполне оправданно с точки зрения их физического смысла.

Перейдем к вопросу о разрешимости задачи (6.1), (6.2). В следующем пункте из общей теоремы будет, в частности, следовать, что эта задача в случае (6.14) разрешима при любой правой части $g_2(x)$ (суммируемой в квадрате). Это ясно также и из физических соображений при такой трактовке, какая давалась выше. Действительно, так как имеет место теплообмен с окружающей средой, то при заданной температуре последней в теле устанавливается вполне определенное стационарное распределение температуры. Совершенно иначе обстоит дело в случае (6.15). Если мы рассмотрим интеграл

$$\int_S g_2(x) dH_{n-1}, \quad (6.16)$$

то его физический смысл состоит в том, что он выражает поток тепла через поверхность. Ясно, что стационарное распределение температуры может устанавливаться в теле только тогда, когда этот поток равен нулю, т. е. количество тепла, приходящего в тело через поверхность, равно количеству тепла, отдаваемому телом. Таким образом, рассматриваемая задача разрешима не при любой правой части. Необходимым условием ее разрешимости является равенство нулю интеграла (6.16). К этому результату можно прийти и не прибегая к физической трактовке. Для этого достаточно в (6.5) подставить $v = 1$.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. В том случае, когда однородная задача имела только нулевое решение, неоднородная оказалась разрешимой при любой правой части. В случае же, когда не было единственности решения, не имела места и разрешимость при любой правой части. Эти факты не случайны. Они следуют из тех общих закономерностей, которые будут доказаны ниже в виде теорем Фредгольма. К рассмотренному примеру мы вернемся после того, как изучим эти теоремы.

7. Теоремы Фредгольма. Здесь будут сформулированы и доказаны основные теоремы о разрешимости задачи A в предположении сильной эллиптичности (п. 3).

Для понимания материала этого пункта необходимо знание теорем Фредгольма для уравнений с вполне непрерывными операторами, изложенных в приложении к этой главе.

Напомним, что задача A и сопряженная задача A^* были сформулированы в п. 2. Наряду с ними мы будем рассматривать соответствующие однородные задачи, т. е. такие, для которых функции $g(x)$ и $g_*(x)$, а также функционалы φ и φ_* равны нулю. Эти задачи будем обозначать A_0 и A_0^* соответственно. Так как функция $u(x)$, являющаяся решением задачи A_0 , удовлетворяет граничному условию (2.3) и принадлежит пространству $BV^2(G)$, то по определению пространства E

(см. п. 2) эта функция принадлежит последнему. Поэтому ясно, что задача A_0 может быть сформулирована следующим образом.

Задача A_0 . Найти функцию u , принадлежащую пространству E и удовлетворяющую уравнению

$$F(u, v) = 0 \quad (7.1)$$

для всех функций v , принадлежащих пространству E .

Совершенно аналогично может быть сформулирована сопряженная однородная задача.

Задача A_0^* . Найти функцию v , принадлежащую пространству E и удовлетворяющую уравнению

$$F(u, v) = 0 \quad (7.2)$$

для всех функций u , принадлежащих пространству E .

Мы можем теперь сформулировать основные теоремы.

Теорема 1. Для разрешимости задачи A при любой функции $BV^2(G)$ и любом функционале $\varphi \in E^*$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная задача A_0 имела только нулевое решение.

Теорема 2. Однородные задачи A_0 и A_0^* имеют конечные и равные между собой числа линейно-независимых решений.

Теорема 3. Для разрешимости задачи A при заданной функции $\in BV^2(G)$ и заданном функционале $\varphi \in E^*$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$F(g, v) = \varphi(v) \quad (7.3)$$

для всех решений v задачи A_0^* .

Аналогичные теоремы, сформулированные и доказанные впервые для интегральных уравнений Фредгольмом, и, как было потом обнаружено, справедливые и для более широкого класса уравнений, называются теоремами Фредгольма.

Перейдем к доказательству их. Начнем с теоремы 2. Пусть u есть решение задачи A_0 . В силу определения пространства E_A (см. п. 4) функция $u(x)$ есть также элемент пространства E_A . Поэтому для любых $v \in E_A$ имеет место (5.8). Следовательно, на основании (7.1)

$$[u, v] + (Bu, Iv) = 0. \quad (7.4)$$

Это равенство можно записать также в виде

$$[u, v] + [I^*Bu, v] = 0. \quad (7.5)$$

Ввиду произвольности v мы получаем отсюда

$$u + I^*Bu = 0. \quad (7.6)$$

Но оператор I вложения пространства E_A в пространство $L^2(G)$ является вполне непрерывным оператором (п. 4). Следовательно, I^* есть также вполне непрерывный оператор, действующий из пространства $L^2(G)$ в пространство E_A (см. п. III.4.2). Далее, как показано в п. 5, оператор B есть ограниченный оператор, действующий из E в $L^2(G)$. Следовательно, оператор I^*B есть вполне непрерывный оператор, действующий в пространстве E_A , так как он является произведением вполне непрерывного на ограниченный оператор (см. п. III.4.2).

Итак, мы показали, что каждое решение задачи A_0 , рассматриваемое как элемент пространства E_A , является решением уравнения (7.6) с вполне непрерывным оператором.

Проведя рассуждение в обратном порядке, т. е. переходя от (7.6) к (7.5), (7.4) и (7.1), мы получим, что каждое решение u уравнения (7.6), если его рассматривать как элемент пространства E , является решением задачи A_0 .

Отсюда сразу следует, что пространство решений задачи A_0 конечномерно и его размерность совпадает с размерностью пространства ре-

шений уравнения (7.6). При этом мы воспользовались второй теоремой Фредгольма для уравнений с вполне непрерывным оператором (см. приложение).

Мы можем провести точно такие же рассуждения для задачи A_0^* . При этом мы получим равенство (7.4), где v есть решение задачи A_0^* , рассматриваемое как элемент пространства E_A , а u — произвольный элемент пространства E_A .

Из (7.4) следует равенство

$$[u, v] + [u, B^*Iv] = 0. \quad (7.7)$$

Ввиду произвольности $u \in E_A$ получаем отсюда

$$v + B^*Iv = 0. \quad (7.8)$$

Таким образом, каждое решение v задачи A_0^* , рассматриваемое как элемент пространства E_A , является решением уравнения (7.8), и обратно, каждое решение уравнения (7.8), рассматриваемое как элемент пространства E , является решением задачи A_0^* .

Но уравнение (7.8) является сопряженным к (7.6). Поэтому, пользуясь второй теоремой Фредгольма для уравнений с вполне непрерывными операторами, мы можем утверждать, что пространство решений задачи A_0^* конечномерно и его размерность совпадает с размерностью пространства решений задачи A_0 . Теорема 2 доказана.

Перейдем к доказательству третьей теоремы. Пусть задача A разрешима и $u(x)$ — ее решение. Рассмотрим функцию

$$z(x) = u(x) - g(x). \quad (7.9)$$

Эта функция принадлежит пространству E . Далее, для любой функции v , принадлежащей E , на основании (2.5) получаем

$$F(z, v) = F(u, v) - F(g, v) = \varphi(v) - F(g, v). \quad (7.10)$$

Если v есть решение задачи A_0^* , то по определению решения $F(z, v) = 0$. Отсюда и из (7.10) получаем (7.3). Необходимость условия (7.3) для разрешимости задачи A доказана.

Перейдем к доказательству достаточности этого условия. Ясно, что $F(g, v)$ есть линейный ограниченный функционал в пространстве E (по элементу v). Поэтому

$$\psi(v) = \varphi(v) - F(g, v) \quad (7.11)$$

есть также линейный ограниченный функционал в пространстве E . Но так как нормы в пространствах E и E_A эквивалентны (см. п. 4), то ψ есть также линейный ограниченный функционал в пространстве E_A . По теореме об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве (см. п. III.2.4) существует такой элемент $w \in E_A$, что

$$[w, v] = \psi(v) \quad (7.12)$$

при всех $v \in E_A$.

Пусть для любого решения v задачи A_0^* имеет место равенство (7.3). Тогда из (7.11) и (7.12), рассматривая v как элемент пространства E_A , получим

$$[w, v] = 0. \quad (7.13)$$

Учитывая связь между решениями задачи A_0^* и уравнения (7.8), указанную при доказательстве теоремы 2, мы можем заключить, что равенство (7.13) выполняется для всех решений v уравнения (7.8). На основании третьей теоремы Фредгольма для уравнений с вполне непрерывными операторами (см. п. 8.2), примененной к уравнению

$$z + I^*Bz = w, \quad (7.14)$$

мы заключаем, что это уравнение имеет решение z . Умножим (7.14) скалярно на произвольный элемент v пространства E_A . Тогда с учетом (7.12) и (7.11) будем иметь

$$[z, v] + (Bz, Iv) = \varphi(v) - F(g, v). \quad (7.15)$$

Применяя теорему п. 5, получим

$$F(z, v) = \varphi(v) - F(g, v). \quad (7.16)$$

Это равенство остается справедливым, если z и v считать функциями из E . Положим $u = z + g$. Получим

$$F(u, v) = \varphi(v). \quad (7.17)$$

Так как $z \in E$, то $z^+(x) = 0$ ($x \in S_1$) и поэтому

$$u^+(x) = g^+(x) \quad (x \in S_1). \quad (7.18)$$

Равенства (7.17) и (7.18) означают, что u есть решение задачи A . Таким образом, мы доказали разрешимость задачи A . Теорема 3 доказана.

Докажем первую теорему. Она фактически является следствием второй и третьей. Действительно, пусть задача A_0 имеет только нулевое решение. Тогда по второй теореме мы можем сделать тот же вывод и для задачи A_0^* . Поэтому на основании третьей теоремы имеет место разрешимость задачи A при всех $g \in BV^2(G)$ и всех $\varphi \in E^*$.

Обратно, пусть имеет место разрешимость задачи A при всех $g \in BV^2(G)$ и $\varphi \in E^*$, а v есть решение задачи A_0^* . Положим $g = 0$. Тогда по третьей теореме

$$\varphi(v) = 0$$

для любого $\varphi \in E^*$. Но это значит, что $v = 0$. Таким образом, задача A_0^* имеет только нулевое решение. В силу второй теоремы задача A_0 имеет также только нулевое решение.

Итак, все три теоремы Фредгольма доказаны.

В качестве примера применения этих теорем вернемся к задаче, рассмотренной в п. 6. Мы видим, что при выполнении условия (6.8) всюду на S и (6.14) на множестве положительной меры однородная задача имеет только нулевое решение. Теперь мы можем утверждать на основании первой теоремы Фредгольма, что решение задачи (6.5) существует при всех $\varphi \in E^*$. В частности, ясно, что это имеет место, когда φ имеет вид (6.4), а функция $g_2(x)$ суммируема в квадрате на S . Таким образом, задача (6.1), (6.2) разрешима (в обобщенном смысле) для любой функции $g_2 \in L^2(S)$.

В случае (6.15), как было показано, однородная задача имеет одно линейно-независимое решение (произвольную константу). В рассматриваемом случае однородная задача совпадает с сопряженной однородной задачей. По третьей теореме Фредгольма легко понять, что необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (6.1), (6.2) при $g_2 \in L^2(S)$ является обращение в нуль интеграла (6.16).

8. Положительно-определенные функционалы. Мы укажем здесь одно условие однозначной разрешимости задачи A . С этой целью введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е. Функционал $F(u, v)$ называется *положительно-определенным* в пространстве E , если для любой функции $u \in E$, $u \neq 0$, имеет место неравенство

$$F(u, u) > 0.$$

Для функционала $F(u, v)$, заданного равенством (1.3), мы укажем явное условие положительной определенности. При этом будем предполагать, что функции $b_i(x)$ имеют ограниченные производные и множество G связное.

Т е о р е м а 1. Пусть выполняется условие эллиптичности

$$\sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k > 0 \quad (8.1)$$

при почти всех $x \in G$ и всех векторах $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \neq 0$. Пусть, далее, имеют место неравенства

$$c(x) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i} \quad (8.2)$$

почти всюду в G и

$$h(x) \geq -\frac{1}{2} \sum b_i^+(x) \nu_i(x) \quad (8.3)$$

почти всюду по мере H_{n-1} на S_2 .

Пусть, наконец, либо $H_{n-1}(S_1) > 0$, либо одно из неравенств (8.2) или (8.3) превращается в строгое неравенство на множестве положительной меры (n -мерной для (8.2) и $(n-1)$ -мерной для (8.3)).

Тогда функционал $F(u, v)$, задаваемый равенством (1.3), является положительно-определенным.

Доказательство. Интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_G \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u dx &= \frac{1}{2} \int_G \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u^2}{\partial x_i} dx = -\frac{1}{2} \int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} u^2 dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{S_2} \sum_{i=1}^n b_i^+ \nu_i u^2 dH_{n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} F(u, u) &= \int_G \left\{ \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \left[c(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right] u^2 \right\} dx + \\ &+ \int_{S_2} \left[h(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i^+(x) \nu_i(x) \right] u^2 dH_{n-1}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Ясно, что при выполнении условий (8.1)–(8.3) мы имеем

$$F(u, u) \geq 0.$$

Остается доказать, что из условия

$$F(u, u) = 0 \quad (8.5)$$

следует, что $u = 0$. Из (8.5) с учетом (8.1) и (8.3) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

почти всюду в G . Поэтому $u(x)$ есть константа. Из условия теоремы и (8.5) видно, что эта константа равна нулю. Теорема доказана.

Теорема 2. Если функционал $F(u, v)$ положительно-определенный, то задача A однозначно разрешима при любой правой части $g \in BV^2(G)$ и $\varphi \in E^*$.

Доказательство. Если u есть решение задачи A_0 , то, полагая в (7.1) $v = u$, получим $F(u, u) = 0$, откуда $u = 0$. Следовательно, задача A_0 имеет только нулевое решение, и остается воспользоваться первой теоремой Фредгольма.

§ 3. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Многие вопросы математической физики связаны с собственными функциями граничных задач. Мы встретимся, например, с использованием собственных функций при решении параболических уравнений методом Фурье. Кроме того, многие ортогональные системы функций, используемые в анализе, получаются как собственные функции гранич-

ных задач. Их свойства (например, полноту) удобно изучать с этой точки зрения.

1. **Собственные значения и собственные функции.** Будем рассматривать граничную задачу, состоящую в нахождении решения $u(x)$ в области G эллиптического уравнения

$$-\sum_{i, k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + c(x)u = \lambda p(x)u, \quad (1.1)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\begin{aligned} u(x) &= 0 \quad (x \in S_1), \\ D, u(x) + h(x)u(x) &= 0 \quad (x \in S_2). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Точная формулировка всех ограничений будет дана ниже, а пока будем рассматривать граничную задачу в той же постановке, как и в п. 1.2.

Задача (1.1), (1.2) есть частный случай задачи A , рассмотренной в п. 1.2. Отличие состоит в том, что в уравнение (1.1) введен параметр λ . Рассматриваемая граничная задача является однородной. Мы видели уже в предыдущем параграфе (см. п. 2.6), что бывают случаи, причем вполне обоснованные с точки зрения физической постановки задачи, когда однородная задача имеет отличные от нуля решения. Те значения λ , для которых задача (1.1), (1.2) имеет ненулевое решение, называются *собственными значениями* этой задачи, а ненулевые решения u — *собственными функциями*, соответствующими этим собственным значениям.

Например, для граничной задачи, рассмотренной в п. 2.6:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad (\text{в } G), \quad \frac{du}{d\nu} = 0 \quad (\text{на } S), \quad (1.3)$$

число $\lambda = 0$ является собственным значением, а функция $u(x) \equiv 1$ — соответствующей собственной функцией.

Мы будем рассматривать граничную задачу (1.1), (1.2) в обобщенной постановке так, как это было сделано в п. 2.2. Повторим эту постановку специально для того случая, который нас сейчас интересует.

Будем предполагать, что G есть ограниченное открытое связное множество с конечным периметром, принадлежащее пространству R^n . Через S будем обозначать существенную границу этого множества, S_1 и S_2 — ее подмножества, измеримые по $(n-1)$ -мерной мере Хаусдорфа, причем

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset. \quad (1.4)$$

Далее, мы положим

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_G \left[\sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} + c(x)uv \right] dx + \\ &+ \int_{S_2} h(x)u^+(x)v^+(x)dH_{n-1}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Будем предполагать, что $a_{ik}(x)$, $c(x)$ и $p(x)$ являются ограниченными и измеримыми функциями в G по мере Лебега, а $h(x)$ ограничена и измерима на S_2 по мере H_{n-1} . Далее, предполагается выполненным условие сильной эллиптичности, сформулированное в п. 2.3:

$$F_0(u, u) > \alpha \|u\|^2 - \beta \|u\|^2, \quad (1.6)$$

где α и β — некоторые положительные константы, $F_0(u, v)$ — функционал (2.3.1).

Как было показано в п. 2.3, это условие, в частности, выполняется, если уравнение (1.1) равномерно эллиптическое, а множество S_2 регулярное.

Наконец, мы будем предполагать выполненным условие

$$p(x) \geq \delta > 0, \quad (1.7)$$

почти всюду в G , где δ — некоторая константа.

Мы дадим определение собственной функции и собственного значения для граничной задачи в той обобщенной постановке, которая была принята в предыдущем параграфе (п. 2.2).

Определение. *Собственной функцией* задачи A , соответствующей *собственному значению* λ , называется функция $u(x)$, принадлежащая пространству E , не равная нулю и удовлетворяющая равенству

$$F(u, v) = \lambda \int_G p(x) u v dx \quad (1.8)$$

при всех $v \in E$.

Заметим, что требование $u(x)$ не равно нулю нужно понимать так: функция u не должна быть нулевым элементом пространства E . Этими последними являются функции $u(x)$, равные нулю почти всюду в G .

2. Связь с собственными функциями вполне непрерывного симметричного оператора. Мы покажем, что собственные функции задачи A являются собственными функциями некоторого вполне непрерывного симметричного оператора и, следовательно, обладают всеми теми свойствами, что и они (см. п. III.5.3).

Прежде, чем строить указанный оператор, мы должны построить пространство, в котором он действует. Это будет пространство, порожденное рассматриваемой задачей о собственных значениях, которое мы будем обозначать через E_A и которое аналогично пространству, построенному в п. 2.4. Однако для наших целей удобно несколько иначе определить его. Именно, мы введем скалярное произведение по формуле

$$[u, v] = F(u, v) + \gamma \int_G p(x) u(x) v(x) dx. \quad (2.1)$$

Покажем прежде всего, что можно так выбрать константу γ , чтобы выполнялось неравенство

$$[u, u] \geq \alpha \|u\|^2, \quad (2.2)$$

где α и $\|\cdot\|$ имеют тот же смысл, что и в (1.6). Действительно, на основании (2.1) и (1.6) имеем

$$[u, u] \geq \alpha \|u\|^2 + \int_G [c(x) + \gamma p(x) - \beta] u^2 dx.$$

Ясно, что параметр γ можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$c(x) + \gamma p(x) - \beta \geq 0 \quad (x \in G), \quad (2.3)$$

так как функция $c(x)$ ограничена, и имеет место неравенство (1.7).

При таком выборе параметра γ очевидно, что для (2.1) выполняются все аксиомы скалярного произведения. Это скалярное произведение будет рассматриваться на функциях $u, v \in E$. Мы можем теперь определить то пространство E_A , которое нам понадобится. Именно, E_A есть пространство функций, принадлежащих пространству E , со скалярным произведением (2.1).

С учетом ограниченности функций $c(x)$ и $p(x)$ точно так же, как и в п. 2.4, доказывается эквивалентность норм в пространствах E_A и E . Верны также и следствия из теоремы об эквивалентности норм, приведенные в п. 2.4.

Если мы воспользуемся обозначением (2.1), то равенство (1.8) можно записать в виде

$$[u, v] = v \int_G p(x) u(x) v(x) dx, \quad (2.4)$$

где

$$v = \lambda + \gamma. \quad (2.5)$$

Нам удобно правую часть равенства (2.4) трактовать как скалярное произведение в пространстве $L^2(G)$, а умножение на $p(x)$ — как некий оператор в этом пространстве.

Остановимся на этом подробнее. Мы введем оператор p , определенный в пространстве $L^2(G)$, действие которого сводится к умножению на функцию $p(x)$:

$$pu = p(x)u(x) \quad (2.6)$$

для любой функции $u \in L^2(G)$. Так как функция $p(x)$ ограничена, то произведение, стоящее в правой части равенства (2.6), принадлежит пространству $L^2(G)$. Таким образом, оператор p действует в пространстве $L^2(G)$. Легко видеть, что это *ограниченный* оператор. Действительно,

$$\|pu\|^2 = \int_G p^2(x)u^2(x) dx \leq K^2\|u\|^2, \quad (2.7)$$

где K — константа, ограничивающая функцию $p(x)$:

$$p(x) \leq K. \quad (2.8)$$

Легко видеть также, что оператор p является *симметричным*. Действительно,

$$(pu, v) = \int_G p(x)u(x)v(x) dx = (u, pv)$$

для любых $u, v \in L^2(G)$.

Вернемся к равенству (2.4). После введения оператора p ясно, что правую часть можно трактовать как скалярное произведение в $L^2(G)$. Левую часть этого равенства мы будем трактовать как скалярное произведение в E_A . В соответствии с этим мы будем рассматривать функции u и v , принадлежащие пространству E_A . Поэтому, чтобы записать правую часть (2.4) в виде скалярного произведения в $L^2(G)$, мы должны ввести оператор вложения I пространства E_A в пространство $L^2(G)$. При этом если $u \in E_A$, то Iu есть та же функция, но рассматриваемая как элемент пространства $L^2(G)$. Итак, мы можем записать (2.4) в виде

$$[u, v] = v(pIu, Iv) \quad (2.9)$$

для любых двух функций $u, v \in E_A$.

Рассмотрим теперь собственные функции задачи A . Как мы уже отмечали, равенство (1.8), с помощью которого определены собственные функции, можно записать в виде (2.4).

Если u и v трактовать как элементы пространства E_A , то последние можно записать в виде (2.9).

Следовательно, мы получаем следующее: если u — собственная функция задачи A , то, трактуя ее как элемент пространства E_A , мы будем иметь (2.9) при всех $v \in E_A$. При этом v определяется равенством (2.5).

Мы можем (2.9) записать в виде

$$[u, v] = v[I^*pIu, v]. \quad (2.10)$$

Но так как v — произвольный элемент пространства E_A , то из (2.10)

$$u = vTu, \quad (2.11)$$

где обозначено

$$T = I^*pI. \quad (2.12)$$

Ясно, что если λ — собственное значение задачи A , то

$$v > 0. \quad (2.13)$$

Мы в этом легко убедимся, подставив в (2.4) $v = u$, где u — собственная функция задачи A .

Положим

$$\mu = \frac{1}{v}. \quad (2.14)$$

Тогда (2.11) запишется в виде

$$Tu = \mu u. \quad (2.15)$$

Но это значит, что u есть собственная функция оператора T , соответствующая собственному значению μ .

Итак, мы показали, что каждая собственная функция u задачи A , рассматриваемая как элемент пространства E_A , является собственным вектором оператора T .

Если бы мы провели выкладки в обратном порядке, то получили бы, что никаких других собственных векторов оператор T не имеет.

Нам остается только заметить, что оператор T , задаваемый равенством (2.12), есть вполне непрерывный симметричный оператор в пространстве E_A . Действительно, I и I^* — вполне непрерывные операторы, p — ограниченный оператор. Поэтому T есть вполне непрерывный оператор. Далее, так как p — симметричный оператор, то, очевидно, T есть также симметричный оператор.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. Функция $u(x)$ является собственной функцией задачи A , соответствующей собственному значению λ , тогда и только тогда, когда эта функция, рассматриваемая как элемент пространства E_A , является собственным вектором вполне непрерывного симметричного оператора T , задаваемого равенством (2.12), соответствующим собственному значению

$$\mu = \frac{1}{\lambda + \gamma}. \quad (2.16)$$

3. Экстремальные свойства собственных значений. Мы показали в предыдущем пункте, что число γ может быть выбрано так, что имеет место неравенство (2.2). Из этого неравенства с учетом (2.1) получаем

$$F(u, u) + \gamma \int_G \rho u^2 dx \geq 0 \quad (3.1)$$

при всех $u \in E$. Рассмотрим функционал

$$\frac{F(u, u)}{\int_G \rho u^2 dx} \quad (3.2)$$

на функциях $u \in E$, $u \neq 0$. Из (3.1) следует, что этот функционал ограничен снизу (числом $-\gamma$). Поэтому существует точная нижняя грань, которую мы обозначим через λ , так что

$$\lambda \geq -\gamma. \quad (3.3)$$

Следующая теорема устанавливает связь между задачей на минимум функционала (3.2) и собственными значениями и функциями задачи A .

Теорема 1. Обозначим

$$\lambda = \inf \frac{F(u, u)}{\int_G \rho u^2 dx}, \quad (3.4)$$

где точная нижняя грань берется по всем отличным от нуля функциям u , принадлежащим пространству E . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) λ есть наименьшее собственное значение задачи A ;
- 2) существует отличная от нуля функция $u_0 \in E$, на которой точная нижняя грань (3.4) достигается:

$$\lambda = \frac{F(u_0, u_0)}{\int_G \rho u_0^2 dx}; \quad (3.5)$$

3) для того чтобы отличная от нуля функция $u_0(x) \in E$ была собственной функцией задачи A , соответствующей собственному значению λ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (3.5).

Доказательство. Рассмотрим оператор T , построенный в предыдущем пункте и задаваемый равенством (2.12). Имеем

$$[Tu, u] = (\rho Tu, u) = \int \rho u^2 dx \geq 0 \quad (3.6)$$

при всех $u \in E_A$. Воспользуемся теоремой 1 п. III.5.3. Согласно этой теореме наибольшее собственное значение μ оператора T определяется равенством

$$\mu = \sup [Tu, u], \quad (3.7)$$

где точная верхняя грань берется по всем векторам $u \in E_A$, $\|u\|_A = 1$.

Мы покажем, что имеет место также равенство

$$\mu = \sup \frac{[Tu, u]}{[u, u]}, \quad (3.8)$$

где точная верхняя грань берется по всем ненулевым векторам $u \in E_A$. Чтобы это показать, обозначим временно точную верхнюю грань, стоящую в правой части (3.8), через μ_1 , а для точной верхней грани в (3.7) сохраним обозначение μ .

Тогда если $\|u\|_A = 1$, то

$$[Tu, u] = \frac{[Tu, u]}{[u, u]} \leq \mu_1.$$

Поэтому $\mu \leq \mu_1$. Обратно, пусть $u \in E_A$. Положим $v = \|u\|_A^{-1} u$. Получим

$$\frac{[u, Tu]}{[u, u]} = [v, Tv] \leq \mu.$$

откуда $\mu_1 \leq \mu$. Таким образом, $\mu_1 = \mu$ и равенство (3.8) доказано.

Ясно, что

$$\frac{1}{\mu} = \inf \frac{[u, u]}{[Tu, u]} \quad (u \in E_A, u \neq 0). \quad (3.9)$$

Заметим, что так как μ есть наибольшее собственное значение оператора T , то число λ , связанное с μ равенством (2.16), есть наименьшее собственное значение задачи A . Это следует из теоремы п. 2.

Подставим в (3.9) значение μ из равенства (2.16), $[Tu, u]$ из (3.6) и $[u, u]$ из (2.1), получим равенство (3.4), где точная нижняя грань берется по всем ненулевым функциям, принадлежащим пространству E_A . Остается только заметить, что множества функций, принадлежащих пространствам E_A и E , совпадают. Первое утверждение доказано.

Пусть u_0 — собственная функция задачи A , соответствующая собственному значению λ . Подставим в (1.8) $u = v = u_0$. Получим (3.5). Тем самым доказаны утверждения 2) и часть утверждения 3): необходимость условия (3.5) для того, чтобы u_0 была собственной функцией задачи A .

Нам остается доказать достаточность условия (3.5). Другими словами, требуется доказать, что если u_0 есть ненулевая функция, принад-

лежащая пространству E и удовлетворяющая равенству (3.5), то u_0 есть собственная функция задачи A , соответствующая собственному значению λ . С этой целью заметим, что на основании (3.4) имеет место неравенство

$$F(u, u) \geq \lambda \int_G \rho u^2 dx \quad (3.10)$$

для всех функций $u \in E$. Пусть v — произвольная функция, принадлежащая пространству E . Подставим в (3.10) функцию $u = u_0 + tv$, где u_0 — функция, удовлетворяющая равенству (3.5), а t — произвольное число. Получим

$$At^2 + 2Bt + C \geq 0, \quad (3.11)$$

где A , B и C легко вычисляются из условия, что $F(u, u)$ и $\lambda \int_G \rho u^2 dx$ являются квадратичными функционалами. Например,

$$B = F(u_0, v) - \lambda \int_G \rho u_0 v dx. \quad (3.12)$$

Учитывая, что в (3.10) и, следовательно, в (3.11) достигается знак равенства или $t = 0$, мы получаем, что квадратичная функция, стоящая в левой части равенства (3.11), достигает минимума при $t = 0$. Следовательно, ее производная при $t = 0$ равна нулю, т. е. $B = 0$.

Итак, доказано, что

$$F(u_0, v) = \lambda \int_G \rho u_0 v dx$$

при всех $v \in E$. В силу определения собственной функции это и значит, что u_0 есть собственная функция задачи A . Теорема доказана.

Связь между собственными значениями и собственными функциями задачи A и оператора T , установленная в предыдущем пункте, дает возможность проследить и за другими собственными значениями задачи A , а не только минимальным, как это сделано выше. Применяя результаты п. III.5.3 и те же рассуждения, что и выше, получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Существует бесконечная последовательность $\{\lambda$ собственных значений задачи A такая, что*

$$\lambda_n \leq \lambda_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \lambda_n \rightarrow \infty, \quad (3.13)$$

и соответствующая ей последовательность собственных функций

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, \quad (3.14)$$

удовлетворяющих условию

$$\int_G \rho u_k u_l dx = 0 \quad (k \neq l). \quad (3.15)$$

Каждое из собственных значений λ_n есть решение задачи на минимум:

$$\lambda_n = \inf \frac{F(u, u)}{\int_G \rho u^2 dx}, \quad (3.16)$$

где точная нижняя грань берется по всем ненулевым функциям u , принадлежащим пространству E и удовлетворяющим условию

$$\int_G \rho u_i u_j dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (3.17)$$

Эта точная нижняя грань достигается на собственной функции u задачи A , соответствующей собственному значению λ_n .

4. Разложение по собственным функциям. В п. III.5.3 была доказана теорема о разложении любого элемента гильбертова пространства в ряд Фурье по собственным векторам вполне непрерывного симметричного оператора. Применим ее к оператору T .

Заметим, что уравнение

$$Tu = \Theta \quad (u \in E_A), \quad (4.1)$$

где Θ — нулевой элемент пространства E_A , имеет только нулевое решение. Действительно, умножая (4.1) скалярно на u и пользуясь равенством (2.12), получим

$$0 = [Tu, u] = (pIu, Iu) = \int_G p(x)u^2(x) dx. \quad (4.2)$$

Отсюда следует, что $u(x) = 0$ почти всюду в G .

Пользуясь теоремой 2 п. III.5.3 и теоремой п. 2, заключаем, что последовательность (3.14) является полной в пространстве E_A . Это значит, что каждый элемент пространства E_A разлагается в ряд Фурье по этой последовательности.

Заметим, что последовательность (3.14) является ортогональной в пространстве E :

$$[u_k, u_l] = 0 \quad (k \neq l) \quad (4.3)$$

Уместно также заметить, что множества функций, принадлежащих пространствам E_A и E , совпадают. Вспоминая определение пространства E (см. п. 2.2), мы получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Существует ортогональная в смысле (3.15) и (4.3) последовательность (3.14) собственных функций задачи A такая, что каждая функция $u(x)$, принадлежащая пространству $BV^2(G)$ и удовлетворяющая условию*

$$u^+(x) = 0 \quad (x \in S_1), \quad (4.4)$$

разлагается в ряд

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \quad (4.5)$$

сходящийся по норме $BV^2(G)$.

Возникает вопрос, нельзя ли воспользоваться собственными функциями задачи A для разложения в ряд Фурье любой функции, суммируемой в квадрате по множеству G . Этот вопрос вполне естествен, так как последовательность (3.14) ортогональна в смысле (3.15). Если бы $p(x)$ равнялась единице, то это была бы просто ортогональность в норме $L^2(G)$. Однако множитель $p(x)$ не вносит существенных изменений. Мы можем ввести евклидово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_p = \int_G p(x)u(x)v(x) dx. \quad (4.6)$$

Так как функция $p(x)$ ограничена и для нее имеет место оценка (1.7), то скалярное произведение (4.6) имеет смысл на всех функциях, принадлежащих $L^2(G)$, и все аксиомы скалярного произведения выполняются.

Пространство функций, суммируемых в квадрате на множестве G , со скалярным произведением (4.6) будем обозначать $L_p^2(G)$. Легко видеть, что нормы в пространствах $L^2(G)$ и $L_p^2(G)$ эквивалентны, так что пространство $L_p^2(G)$ является полным и, следовательно, гильбертовым пространством.

Итак, мы можем теперь сказать, что последовательность (3.14) является ортогональной в пространстве $L_p^2(G)$. Мы покажем, что она является полной. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Последовательность (3.14) собственных функций задачи A образует полную ортогональную последовательность в пространстве $L_p^2(G)$. Следовательно, каждая функция $u(x)$, суммируемая в квадрате по множеству G , может быть разложена в ряд Фурье в $L_p^2(G)$ по функциям (3.14), сходящийся по норме $L_p^2(G)$.*

Доказательство. Мы должны доказать, что линейная оболочка векторов (3.14) плотна в пространстве $L_p^2(G)$. Для этого достаточно доказать, что она плотна в пространстве $L^2(G)$, так как нормы в этих пространствах эквивалентны.

Заметим, что пространство E плотно в $L^2(G)$. Действительно, пространство E содержит все непрерывно дифференцируемые финитные в G функции, а множество таких функций плотно в $L^2(G)$.

Так как пространство E плотно в $L^2(G)$, то нам достаточно доказать, что любая функция u , принадлежащая пространству E , может быть приближена с любой точностью по норме $L^2(G)$ линейными комбинациями векторов (3.14). Но это сразу следует из теоремы 1. Действительно, ряд (4.5) сходится по норме $BV^2(G)$, а поэтому он сходится и по норме $L^2(G)$ (см. п. V.3.5).

Доказанная теорема имеет много различных приложений, так как она устанавливает возможность строить полные ортогональные системы функций путем выбора соответствующей граничной задачи. В качестве примера мы докажем в следующем пункте полноту системы тригонометрических функций. С другими важными примерами можно ознакомиться в книге [29].

5 Тригонометрические ряды Фурье. Мы используем здесь полученные в п. 4 результаты для изучения тригонометрических рядов Фурье, к которым мы естественно придем, рассматривая собственные функции граничных задач для простейшего оператора

$$Lu = -\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Начнем со следующей задачи:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad (5.1)$$

$$u^+(0) = u^+(\pi) = 0. \quad (5.2)$$

Находя общее решение уравнения (5.1) и подставляя его в граничные условия (5.2), получим все собственные значения

$$\lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.3)$$

и соответствующие им собственные функции

$$u_n = \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.4)$$

Из теоремы 2 п. 4 сразу следует теорема 1.

Теорема 1. *Последовательность (5.4) есть полная ортогональная последовательность в пространстве L^2 функций, суммируемых в квадрате на интервале $(0, \pi)$.*

Изменив граничные условия, мы получим другую последовательность. Именно, рассмотрим граничную задачу для уравнения (5.1) с граничным условием

$$\frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{du}{dx} \Big|_{x=\pi} = 0. \quad (5.5)$$

Явное решение приводит к собственным значениям

$$\lambda_n = n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.6)$$

и соответствующим им собственным функциям

$$u_n = \cos nx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.7)$$

Таким образом, имеет место теорема 2.

Теорема 2. *Последовательность (5.7) есть полная ортогональная последовательность в пространстве L^2 функций, суммируемых в квадрате на интервале $(0, \pi)$.*

Из этих двух теорем мы получаем также следующую теорему.

Теорема 3. *Последовательность*

$$1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots \quad (5.8)$$

есть полная ортогональная последовательность в пространстве L^2 функций, суммируемых в квадрате на интервале $(-\pi, \pi)$.

Доказательство. Ортогональность последовательности (5.8) была доказана в п. 1.5.7. Докажем полноту. Пусть $u(x)$ суммируема в квадрате на интервале $(-\pi, \pi)$. Обозначим:

$$v(x) = \frac{u(x) + u(-x)}{2}, \quad \omega(x) = \frac{u(x) - u(-x)}{2}, \quad (5.9)$$

так что $u(x) = v(x) + \omega(x)$. На основании теорем 1 и 2 имеют место разложения на интервале $(0, \pi)$:

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx; \quad (5.10)$$

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (5.11)$$

Ввиду четности $v(x)$ (т. е. $v(-x) = v(x)$) и нечетности $\omega(x)$ (т. е. $\omega(-x) = -\omega(x)$) эти равенства сохраняются на интервале $(-\pi, 0)$. При этом используются четность функции $\cos nx$ и нечетность $\sin nx$. Следовательно, равенства (5.10) и (5.11) имеют место на интервале $(-\pi, \pi)$. Складывая, получим

$$u(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (5.12)$$

Теорема доказана.

Заметим, что ряды (5.10)–(5.12) сходятся по норме L^2 , и указанные равенства имеют место почти всюду на интервале $(-\pi, \pi)$. Это вполне естественно, если ничего большего, кроме принадлежности к L^2 , от функции u не требовать. Однако если функция u обладает некоторыми дополнительными свойствами гладкости, то можно ожидать улучшения характера сходимости рядов. Мы укажем одно условие, при котором имеет место равномерная сходимость рассматриваемых рядов. Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ одной независимой переменной x , принадлежащих пространству W^1_2 на отрезке $[a, b]$, сходится по норме этого пространства, то эта последовательность сходится равномерно.*

Доказательство. Для любой функции $f(x)$, принадлежащей пространству W^1_2 на отрезке $[a, b]$, можно записать

$$f(x) = f(\xi) + \int_{\xi}^x f'(t) dt \quad (x, \xi \in [a, b]).$$

Отсюда

$$|f(x)| \leq |f(\xi)| + \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Проинтегрируем по ξ :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(\xi)| d\xi + \int_a^b |f'(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{b-a}} \int_a^b f^2(x) dx + (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx. \end{aligned}$$

Мы применили неравенство Коши — Буняковского к интегралам. Таким образом,

$$\sup_x |f(x)| \leq K \|f\|_{W_2^1}, \quad (5.13)$$

где K — некоторая константа.

Пусть $f_n \rightarrow f$ по норме пространства W_2^1 . Тогда из (5.13) получаем

$$\sup_x |f(x) - f_n(x)| \leq K \|f - f_n\|_{W_2^1} \rightarrow 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть функция $u(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, имеет суммируемую в квадрате обобщенную первую производную на интервале $(-\pi, \pi)$ и удовлетворяет условию периодичности

$$u(\pi) = u(-\pi). \quad (5.14)$$

Тогда ряд (5.12) равномерно сходится к функции $u(x)$.

Доказательство. Рассмотрим функции $v(x)$ и $w(x)$, задаваемые равенствами (5.9). В силу условия теоремы эти функции имеют первые обобщенные производные на интервале $(0, \pi)$, суммируемые в квадрате. Кроме того, очевидно, $w(0) = 0$. В силу условия (5.14) $w(\pi) = 0$. Следовательно, функция w удовлетворяет условию теоремы 1 п. 4, примененной к граничной задаче (5.1), (5.2). На основании этой теоремы ряд (5.11) сходится по норме пространства W_2^1 .

Точно так же, применяя теорему 1 п. 4 к задаче (5.1), (5.5) и функции $v(x)$, получим, что ряд (5.10) сходится по норме W_2^1 . Из леммы следует равномерная сходимость этих рядов, а поэтому и ряда (5.12). Теорема доказана.

6. Критерий положительной определенности функционалов. В п. 2.8 было дано определение положительно-определенных функционалов в пространстве E . Там же было указано одно явное условие положительной определенности для функционалов $F(u, v)$, заданных равенством (2.1.3). Мы укажем здесь другой критерий, основанный на экстремальном свойстве первого собственного значения задачи A .

Назовем *симметричной частью* функционала $F(u, v)$ функционал

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2} [F(u, v) + F(v, u)]. \quad (6.1)$$

Рассмотрим функционал (2.1.3)

$$\begin{aligned} F(u, v) = \int_G \left\{ \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv \right\} dx + \\ + \int_{S_2} h(x) u^+(x) v^+(x) dH_{n-1}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Мы сохраним те же предположения относительно множества G и коэффициентов a_{ik} , c , h , которые были сделаны в п. 2.2. Дополнительно потребуем, чтобы функции b_i имели ограниченные первые производные. Тогда интегрированием по частям легко получить явный вид функционала (6.1) на функциях $u, v \in E$. Именно,

$$\Phi(u, v) = \int_G \left\{ \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} + c_0 uv \right\} dx + \int_{S_2} h_0 u^+ v^+ dH_{n-1}, \quad (6.3)$$

где обозначено

$$c_0(x) = c(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i}, \quad (6.4)$$

$$h_0(x) = h(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i^+(x) \nu_i(x). \quad (6.5)$$

Рассмотрим задачу о собственных значениях, связанную с функционалом (6.3):

$$-\sum_{i, k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + c_0 u = \lambda u \quad (\text{в } G), \quad (6.6)$$

$$u(x) = 0 \quad (x \in S_1), \quad D_x u + h_0 u = 0 \quad (x \in S_2). \quad (6.7)$$

Мы будем предполагать, что эта задача является сильноэллиптической (п. 2.3).

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы функционал (6.2) был положительно-определенным в пространстве E , необходимо и достаточно, чтобы первое собственное значение задачи (6.6), (6.7) было положительным.

Доказательство. Так как $\Phi(u, u) = F(u, u)$, то по теореме 1 п. 3 для первого собственного значения λ задачи (6.6), (6.7) имеет место равенство

$$\lambda = \inf_{(u, u)} \frac{F(u, u)}{(u, u)} \quad (u \in E). \quad (6.8)$$

Если $\lambda > 0$, то положительная определенность функционала (6.2), очевидно, следует из (6.8). Обратно, если функционал (6.2) положительно-определенный, то из (6.8) получаем $\lambda \geq 0$. Но λ не может быть равным нулю, так как тогда для первой собственной функции u_0 будет иметь место равенство $F(u_0, u_0) = 0$, которое противоречит положительной определенности функционала (6.2). Теорема доказана.

§ 4. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Среди всех решений эллиптического уравнения

$$Lu = 0, \quad (1)$$

где Lu задается равенством (1.1.6), может быть особо выделено решение, которое называется фундаментальным и с помощью которого могут быть выражены все другие решения. Наиболее просто строятся фундаментальные решения уравнения Лапласа. В настоящее время они построены для очень общих систем уравнений, в частности и для уравнения (1) в предположении некоторой гладкости коэффициентов. Проведение таких построений выходит за рамки этой книги. Мы ограничимся построением фундаментального решения для уравнения Лапласа. Все общие свойства фундаментальных решений для эллиптических уравнений достаточно хорошо видны уже в этом случае.

1. Оператор Лапласа на сферически-симметричных функциях. Пусть x_0 — некоторая фиксированная точка пространства R^n . Обозначим $r = |x - x_0|$ и будем рассматривать функции точки x , зависящие только от r , т. е. принимающие постоянные значения на сфере

$|x - x_0| = a$ для любого положительного числа a . Такие функции будем называть *сферически-симметричными*.

Будем рассматривать оператор Лапласа

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (1.1)$$

и поставим вопрос, какой вид имеет этот оператор на сферически-симметричных функциях. Пусть $v(r)$ — такая функция. По формуле дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{dv}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{dv}{dr} \frac{x_i - x_{0i}}{r}, \quad (1.2)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$.

Далее,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right) \frac{(x_i - x_{0i})^2}{r} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr}. \quad (1.3)$$

Складывая по i , будем иметь

$$\Delta v = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right) r + \frac{n}{r} \frac{dv}{dr},$$

или

$$\Delta v = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{dv}{dr}. \quad (1.4)$$

Это можно записать также в виде

$$\Delta v = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{dv}{dr} \right). \quad (1.5)$$

2. Фундаментальное решение. Мы дадим определение и построим фундаментальное решение уравнения Лапласа. Условимся для краткости называть *гладкой* функцию, имеющую вторые непрерывные производные. Дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е. Функция $\Phi(x, x_0)$ пары точек x и x_0 называется *фундаментальным решением* уравнения Лапласа, если она является гладкой функцией x при $x \neq x_0$ и для любой точки x_0 и любой финитной гладкой функции $u(x)$ имеет место равенство

$$u(x_0) = - \int \Phi(x, x_0) \Delta u(x) dx. \quad (2.1)$$

Покажем, прежде всего, что так определенная функция $\Phi(x, x_0)$ действительно является решением уравнения Лапласа

$$\Delta \Phi = 0 \quad (2.2)$$

по x в каждой точке $x \neq x_0$. С этой целью рассмотрим произвольную финитную гладкую функцию $u(x)$, равную нулю в некоторой окрестности точки x_0 . Так как $u(x_0) = 0$, то, проведя дважды интегрирование по частям в интеграле (2.1), получим

$$\int \Delta \Phi(x, x_0) u(x) dx = 0. \quad (2.3)$$

Ввиду произвольности функции u отсюда получаем (2.2).

Чтобы найти фундаментальное решение, мы в качестве навещающего соображения будем считать, что $\Phi(x, x_0)$ есть сферически-симметричная функция с полюсом в точке x_0 , т. е.

$$\Phi(x, x_0) = v(r), \text{ где } r = |x - x_0|.$$

На основании (1.5) функции v есть решение уравнения

$$\frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{dv}{dr} \right) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dv}{dr} = \frac{c}{r^{n-1}}, \quad (2.4)$$

где c — некоторая константа. Интегрируя и полагая постоянную интегрирования равной нулю, получим

$$v(r) = \begin{cases} \frac{c}{(2-n)r^{n-2}} & (n > 2), \\ c \ln r & (n = 2). \end{cases} \quad (2.5)$$

Мы покажем, что если в качестве постоянной c выбрать $c = -\frac{1}{\omega_n}$, где ω_n — площадь поверхности сферы радиуса единица в n -мерном пространстве, то функция $v(r)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа.

Итак, рассмотрим функцию

$$\Phi(x, x_0) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n |x-x_0|^{n-2}} & (n > 2), \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-x_0|} & (n = 2). \end{cases} \quad (2.6)$$

Нам надлежит доказать, что имеет место равенство (2.1). Однако, учитывая дальнейшие приложения фундаментального решения, мы докажем более общее равенство, из которого, в частности, будет следовать (2.1).

3. Интегральные формулы. Используя функцию (2.6), получим общую формулу, дающую выражение произвольной функции из пространства BV через ее производные. Эта формула будет применена в дальнейшем для изучения уравнения Пуассона. Однако нужно заметить, что в действительности область ее применений значительно шире.

Предварительно докажем лемму.

Л е м м а. Пусть существует сферическое среднее функции $u(x) \in B$ в точке x_0 , т. е. существует предел

$$u_c(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon} u^-(x) dH_{n-1}, \quad (3.1)$$

где S_ε — сфера $|x-x_0| = \varepsilon$; $u^-(x)$ — внешний след функции $u(x)$ на S_ε . Тогда в точке x_0 существует шаровое среднее

$$\bar{u}(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|K_\varepsilon|} \int_{K_\varepsilon} u(x) dx, \quad (3.2)$$

где K_ε есть шар $|x-x_0| \leq \varepsilon$; $|K_\varepsilon|$ — его объем, и оба эти средние значения совпадают:

$$u_c(x_0) = \bar{u}(x_0). \quad (3.3)$$

Доказательство. Из того, что $u^-(x)$ отличается от $\bar{u}(x)$ только в точках скачка функции $u(x)$ (см. п. V.1.2), следует, что $[u^-(x) - u(x)]$ почти всюду. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{|K_\varepsilon|} \int_{K_\varepsilon} u(x) dx - u_c(x_0) &= \frac{1}{|K_\varepsilon|} \int_{K_\varepsilon} [u^-(x) - u_c(x_0)] dx = \\ &= \frac{1}{|K_\varepsilon|} \int_0^\varepsilon dr \int_{S_r} [u^-(x) - u_c(x_0)] dH_{n-1} = \frac{\omega_n}{|K_\varepsilon|} \int_0^\varepsilon U(r) r^{n-1} dr, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где обозначено

$$U(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S_r} [u^-(x) - u_c(x_0)] dH_{n-1}.$$

По условию леммы $U(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Поэтому для любого числа $\delta > 0$ можно выбрать такое число $\varrho > 0$, что $|U(r)| < \delta$ при $r < \varrho$. Следовательно, для любого числа $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \varrho$, из (3.4) получаем

$$\left| \frac{1}{|K_\varepsilon|} \int_{K_\varepsilon} u(x) dx - u_c(x_0) \right| \leq \frac{\omega_n}{|K_\varepsilon|} \delta \frac{\varepsilon^n}{n} = \delta,$$

так как $|K_\varepsilon| = \frac{\omega_n \varepsilon^n}{n}$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $u(x)$ — функция, заданная в R^n , финитная и принадлежащая пространству BV . Тогда почти при всех x_0 (по n -мерной мере) существует интеграл (3.5) и имеет место равенство

$$u(x_0) = \int \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \quad (3.5)$$

где $\Phi(x, x_0)$ — функция (2.6).

Доказательство. Покажем сначала, что интеграл (3.5) существует почти при всех x_0 .

Так как $u(x)$ — финитная функция, то интегрирование в (3.5) производится по шару $C_R: |x| < R$, где в качестве R можно взять любое число, большее некоторого числа R_0 . Рассмотрим меру μ_i :

$$\mu_i(E) = \int_E \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx$$

(см п. IV.3.1).

Обозначим через λ n -мерную меру Лебега. Пусть $M_i = \lambda \times \mu_i$ — произведение мер, рассматриваемое на произведении $C_R \times C_R$.

Функция $\frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial x}$ измерима по мере M_i . Действительно, она может быть представлена как предел последовательности непрерывных функций, сходящейся всюду, кроме множества $S = \{(x, x_0): x = x_0\}$.

Учитывая, что

$$\frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial x_i} = \frac{x_{i0} - x_i}{\omega_n r^n}, \quad r = |x - x_0|, \quad (3.6)$$

мы можем такую последовательность задать, например, в виде

$$f_m(x, x_0) = \frac{x_{i0} - x_i}{\omega_n r_m^n}, \quad \text{где } r_m = \begin{cases} r & \text{при } r > \frac{1}{m}, \\ \frac{1}{m} & \text{при } r \leq \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Но множество S имеет M_i -меру нуль, так как

$$\int \chi_S(x, x_0) dx = 0,$$

где χ_S — характеристическая функция множества S . Таким образом, доказано, что

функция $\frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial x_i}$ измерима по мере M_i .

Покажем, что эта функция суммируема по мере M_i . Действительно, при $x_0 \in C_R$

$$\int_{C_R} \left| \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial x_i} \right| dx < N, \quad (3.7)$$

где N — некоторая константа. Отсюда

$$\int_{C_R} d\mu_i \int_{C_R} \left| \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial x_i} \right| dx < \infty.$$

Следовательно, функция $\frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial x_i}$ суммируема по мере M_i .

Из теоремы Фубини (см. п II 3.7) следует, что интеграл (3.5) существует при почти всех $x_0 \in C_R$, а так как R — произвольное число, $R > R_0$, то интеграл (3.5) существует почти при всех x_0 в R^n .

Пусть x_0 — произвольная точка, в которой существует интеграл (3.5). Обозначим этот интеграл через $I(x_0)$. Пусть, далее,

$$I_\varepsilon(x_0) = \int_{|x-x_0|>\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx.$$

Очевидно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(x_0) = I(x_0). \quad (3.8)$$

Интегрирование по частям дает следующее равенство:

$$I_\varepsilon(x_0) = - \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial \nu} u^-(x) dH_{n-1}, \quad (3.9)$$

где S_ε — сфера $|x - x_0| = \varepsilon$; $u^-(x)$ — внешний след функции $u(x)$ на ней; ν — внешняя нормаль S_ε . При выводе равенства (3.9) мы учли, что $\Delta \Phi(x, x_0) = 0$.

Обозначая $r = |x - x_0|$, будем иметь

$$\frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial r} = - \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} = - \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}}. \quad (3.10)$$

Последнее записано с учетом того, что $x \in S_\varepsilon$.

Подставим (3.10) в (3.9). Получим

$$I_\varepsilon(x_0) = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon} u^-(x) dH_{n-1}.$$

Так как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует и имеет место равенство (3.8), то на основании леммы

$$\bar{u}(x_0) = I(x_0). \quad (3.11)$$

Но $\bar{u}(x) = u(x)$ почти всюду. Отсюда и из (3.11) получаем, что равенство (3.5) имеет место почти всюду в R^n . Теорема доказана.

Заметим, что доказано даже несколько больше, чем сформулировано в теореме. Именно, если проследить за тем, как получено равенство (3.11), то станет ясным, что доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда в каждой точке x_0 , в которой существует интеграл (3.5), существует также шаровое среднее значение $\bar{u}(x_0)$ функции $u(x)$, и имеет место равенство

$$\bar{u}(x_0) = \int \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (3.12)$$

Равенство (3.12) можно записать в другом, более явном виде следующим образом. Введем обобщенный градиент функции $u(x)$, т. е. вектор

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right),$$

где $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ — обобщенные производные. Тогда, пользуясь равенством (3.6), мы можем записать (3.12) в виде

$$\bar{u}(x_0) = \frac{1}{\omega_n} \int \frac{(x_0 - x, \nabla u)}{|x_0 - x|^n} dx. \quad (3.13)$$

Мы обратим внимание на то, что класс функций u , для которых выведена формула (3.13), содержит и разрывные функции. Пусть S — борелевское множество, принадлежащее множеству точек скачка функции $u(x)$. Рассмотрим, какой вид принимает интеграл (3.13), взятый по множеству S . Пользуясь результатами, приведенными в п. V.1.6, мы можем записать

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{(x_0 - x, \nabla u)}{|x_0 - x|^n} dx = \frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{(x_0 - x, \nu)}{|x_0 - x|^n} v(x) dH_{n-1}. \quad (3.14)$$

Здесь $v = u^+ - u^-$ — скачок функции $u(x)$. Направление нормали ν к S согласовано с $u^+ - u^-$ так, как это указано в п. V.1.6.

Интеграл, стоящий в правой части равенства (3.14), называется *потенциалом двойного слоя*. Таким образом, мы видим, что интеграл (3.13) (или (3.5)) на множествах, принадлежащих множеству скачков функции $u(x)$, превращается в потенциал двойного слоя. Если на множестве S записать интеграл в виде (3.5), то потенциал двойного слоя примет вид

$$\int_S \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial \nu} v(x) dH_{n-1}. \quad (3.15)$$

Пример. Пусть E — ограниченное множество с конечным периметром, S — его существенная граница. Рассмотрим интеграл

$$I(x_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{(x_0 - x, \nu)}{|x_0 - x|^n} dH_{n-1}, \quad (3.16)$$

где ν — внутренняя нормаль к S . Пусть в точке x_0 этот интеграл существует. Тогда оказывается, что

$$I(x_0) = 1, \quad (3.17)$$

если x_0 есть точка плотности множества E , и

$$I(x_0) = 0, \quad (3.18)$$

если x_0 есть точка разрежения этого множества. Чтобы в этом убедиться, достаточно применить формулу (3.13) к функции $u(x)$, являющейся характеристической функцией множества E .

В частности, если E — открытое множество, а его граница S является существенной, то равенство (3.17) имеет место в каждой точке множества E , а (3.18) — в каждой точке дополнения к множеству $E \cup S$.

Простым следствием формулы (3.12) является утверждение, что функция $\Phi(x, x_0)$, задаваемая равенством (2.6), является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Действительно, для гладкой финитной функции $u(x)$ равенство (2.1) сразу следует из (3.12), если перебросить дифференцирование с Φ на u .

В теоремах 1 и 2 мы предполагаем функцию $u(x)$ финитной. Это не является существенным ограничением, во всяком случае, если мы изучаем функции на ограниченных множествах $G \subset \mathbb{R}^n$ и если, продолжив функцию нулем вне G , мы получим функцию из пространства BV . В частности, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть G — ограниченное открытое множество с конечным периметром, S — его существенная граница. Пусть, далее, $u(x)$ — функция, заданная на множестве G и обладающая тем свойством, что, будучи продолжена нулем вне G , она принадлежит пространству BV . Тогда для почти всех $x_0 \in G$ имеет место равенство

$$u(x_0) = \int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_S \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial \nu} u^+(x) dH_{n-1}, \quad (3.19)$$

где ν — внешняя нормаль к S ; $u^+(x)$ — внутренний след функции $u(x)$ на S , причем интегралы, входящие в (3.19), существуют при почти всех $x_0 \in G$.

В каждой точке x_0 , в которой существуют эти интегралы, существует шаровое среднее $\bar{u}(x_0)$ функции $u(x)$, и имеет место равенство

$$\bar{u}(x_0) = \int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_S \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial \nu} u^+(x) dH_{n-1}. \quad (3.20)$$

Доказательство. Все эти утверждения следуют из теорем 1 и 2, примененных к функции $u(x)\chi(x)$, где $\chi(x)$ — характеристическая функция множества G .

4. Решение уравнения Пуассона. Будем рассматривать уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f \quad (4.1)$$

на некотором открытом множестве G пространства R^n . Мы будем предполагать, что функция $f(x)$ суммируема в квадрате по множеству G . В частности, при $f = 0$ (4.1) превращается в уравнение Лапласа. Гладкую функцию $u(x)$, являющуюся решением последнего на открытом множестве G , называют *гармонической* на этом множестве.

Мы будем выражать обобщенное решение уравнения (4.1) с помощью интеграла

$$\int_D \Phi(x, x_0) f(x) dx, \quad (4.2)$$

где D — некоторое открытое ограниченное множество $D \subset G$. Этот интеграл существует почти при всех $x_0 \in D$.

Теорема. Пусть u — обобщенное решение уравнения (4.1) на множестве G . Пусть, далее, D — произвольное ограниченное открытое множество, принадлежащее вместе с границей множеству G . Тогда в каждой точке $x_0 \in D$, в которой существует интеграл (4.2), существует также шаровое среднее $\bar{u}(x_0)$ функции $u(x)$, и имеет место равенство

$$\bar{u}(x_0) = \int_D \Phi(x, x_0) f(x) dx + v(x_0), \quad (4.3)$$

где $v(x_0)$ — функция гармоническая и неограниченно дифференцируемая в D .

Доказательство. Построим функцию $\omega(x)$, гладкую, финитную на множестве G и равную единице в некоторой ε -окрестности D множества D . Такая функция может быть построена, например, следующим образом. Пусть число $\delta > 0$ таково, что D_δ вместе с границей принадлежит множеству G ; χ — характеристическая функция множества D_δ ; $\chi_\rho(x)$ — усреднение функции χ с радиусом усреднения ρ . Тогда при достаточно малых ε и ρ в качестве ω может быть взята функция (х).

Рассмотрим интеграл

$$I(x_0) = \int_G \Phi(x, x_0) \omega(x) f(x) dx. \quad (4.4)$$

Пусть он существует в некоторой точке $x_0 \in D$. Мы хотели бы принять функцию $\Phi(x, x_0)\omega(x)$ в качестве функции $v(x)$, входящей в определение обобщенного решения уравнения (4.1) (см. (2.2.9)). Однако так непосредственно этого сделать нельзя, потому что эта функция не имеет суммируемых в квадрате производных. Но мы можем ее «подправить».

С этой целью рассмотрим функцию

$$\Phi_m(x, x_0) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n |x-x_0|^{n-2}} & \text{при } |x-x_0| > \frac{1}{m}, \\ \frac{m^{n-2}}{(n-2)\omega_n} & \text{при } |x-x_0| \leq \frac{1}{m} \end{cases} \quad (4.5)$$

при $n > 2$. В случае $n = 2$ аналогично.

Обозначим

$$I_m(x_0) = \int_G \Phi_m(x, x_0) \omega(x) f(x) dx. \quad (4.6)$$

Так как $\Phi_m(x, x_0) \leq \Phi(x, x_0)$, то по теореме о предельном переходе под знаком интеграла (см. п. II.3.4) имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_m(x_0) = I(x_0). \quad (4.7)$$

Воспользуемся определением обобщенного решения уравнения (4.1), данным в п. 2.2 (см. равенство (2.2.9)). Получим

$$I_m(x_0) = \int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_m(x, x_0) \omega(x)}{\partial x_i} dx. \quad (4.8)$$

Мы считаем, что число m настолько большое, что $\frac{1}{m}$ -окрестность точки x_0 принадлежит множеству D , так что $\omega(x) = 1$ в указанной окрестности. Поэтому равенство (4.8) можно записать также в виде

$$I_m(x_0) = \int_{G_m} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi(x, x_0) \omega(x)}{\partial x_i} dx, \quad (4.9)$$

где G_m — часть множества G , которая получится, если отбросить $\frac{1}{m}$ -окрестность точки x_0 . Интегрирование по частям в интеграле (4.9) дает следующее равенство:

$$I_m(x_0) = - \int_{S_m} \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial \nu} u(x) dH_{n-1} - K(x_0), \quad (4.10)$$

$$K(x_0) = \int_{G-D} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \Phi(x, x_0) \omega(x)}{\partial x_i^2} u(x) dx, \quad (4.11)$$

причем интегрирование в последнем интеграле производится по множеству $G-D$, так как $\omega(x) = 1$ в D и $\Delta \Phi(x, x_0) = 0$.

Повторяя те же рассуждения, что и в конце доказательства теоремы 1 п. 3, на основании (4.7) заключаем, что существует шаровое среднее $\bar{u}(x_0)$ и имеет место равенство

$$\bar{u}(x_0) = I(x_0) + K(x_0). \quad (4.12)$$

Обозначим

$$v(x_0) = \int_{G-D} \Phi(x, x_0) \omega(x) f(x) dx + K(x_0). \quad (4.13)$$

Тогда из (4.12) и (4.4) получим (4.3).

Для полного доказательства теоремы остается только показать, что $v(x_0)$ — гармоническая и неограниченно дифференцируемая функция. Но это ясно из (4.13) и (4.11). Действительно, $\Phi(x, x_0)$ как функция точки x_0 при каждом $x \neq x_0$ этим свойством обладает. Кроме того, при $x_0 \in D$ можно брать производные любого порядка по x_0 под знаком интегра-

лов, так как x_0 находится на положительном расстоянии от множества $G - D$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть f — функция, заданная на открытом ограниченном множестве G и суммируемая в квадрате. Тогда функция

$$u(x_0) = \int_G \Phi(x, x_0) f(x) dx \quad (4.14)$$

является обобщенным решением уравнения Пуассона (4.1) на множестве G .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через K шар достаточно большого радиуса такой, чтобы множество G вместе с границей содержалось в нем. Продолжим функцию f вне G , считая ее там равной нулю. Пусть $\omega(x)$ есть обобщенное решение уравнения Пуассона

$$-\Delta\omega = f \quad (4.15)$$

в шаре K . Такое решение существует, так как мы можем, например, в качестве ω взять обобщенное решение задачи Дирихле в шаре K для уравнения (4.15). Существование решения задачи Дирихле следует из теоремы 2 п. 2.8. Равенство (4.3) в рассматриваемом случае примет вид

$$\bar{\omega}(x_0) = u(x_0) + v(x_0), \quad (4.16)$$

где $v(x_0)$ — гармоническая и гладкая в G функция. Это равенство имеет место почти всюду в G . Из (4.16) и (4.15) следует, что u есть обобщенное решение уравнения (4.1).

5. Объемные потенциалы. Интеграл (4.14), который дает решение уравнения Пуассона, называют объемным потенциалом, так как при $n = 3$ он является потенциалом сил притяжения массы, сосредоточенной в объеме G с плотностью f . Нас будут интересовать свойства гладкости таких интегралов.

Рассмотрим интеграл несколько более общего вида

$$I(x_0) = \int_G K(x, x_0) f(x) dx, \quad (5.1)$$

где $K(x, x_0)$ — непрерывная по x и x_0 функция при $x \neq x_0$, заданная при всех $x, x_0 \in G$ ($x \neq x_0$) и удовлетворяющая условию

$$|K(x, x_0)| < \frac{C}{|x - x_0|^s}, \quad (5.2)$$

где C — некоторая положительная константа;

$$0 \leq s < n. \quad (5.3)$$

Ясно, что такой вид имеет не только интеграл (4.14), но и его первые производные по координатам точки x_0 .

Т е о р е м а. Пусть G — ограниченное открытое множество, $f(x)$ — ограниченная измеримая функция, заданная в G . Тогда интеграл (5.1) является ограниченной и непрерывной функцией точки x_0 на множестве G .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доопределим функцию $f(x)$, считая ее равной нулю вне множества G . Так как по условию функция $f(x)$ ограничена, то существует такая константа M , что

$$|f(x)| \leq M \quad (5.4)$$

при всех $x \in G$. Пусть d — диаметр множества G , т. е. точная верхняя грань расстояний между любыми двумя точками этого множества. Тогда для любой точки $x_0 \in G$ в силу (5.2) и (5.4) имеем

$$|I(x_0)| \leq CM \int_G \frac{dx}{|x - x_0|^s} \leq CM \int_{|x - x_0| \leq d} \frac{dx}{|x - x_0|^s}.$$

Переходя к сферическим координатам с центром в точке x_0 , получим

$$|I(x_0)| \leq CM\omega_n \int_0^d \frac{r^{n-1} dr}{r^s} = \frac{CM\omega_n d^{n-s}}{n-s}. \quad (5.5)$$

Ограниченность интеграла $I(x_0)$ доказана.

Для доказательства его непрерывности рассмотрим сначала интеграл

$$I_m(x_0) = \int_G K(x, x_0) \omega_m(|x - x_0|) f(x) dx, \quad (5.6)$$

где m — натуральное число, $\omega_m(\rho)$ — непрерывная функция ρ , удовлетворяющая условиям:

$$\omega_m(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho > \frac{1}{m}, \\ 0 & \text{при } \rho < \frac{1}{2m} \end{cases} \quad (5.7)$$

$$0 \leq \omega_m(\rho) \leq 1 \quad (5.8)$$

при всех ρ .

Покажем, что $I_m(x_0)$ равномерно по x_0 сходится к $I(x_0)$. Действительно, на основании (5.2) и (5.4)

$$|I(x_0) - I_m(x_0)| \leq CM \int_G \frac{1 - \omega_m(|x - x_0|)}{|x - x_0|^s} dx.$$

Но при $|x - x_0| > \frac{1}{m}$ в силу (5.7) $1 - \omega_m(|x - x_0|) = 0$. Поэтому

$$|I(x_0) - I_m(x_0)| \leq CM \int_{|x - x_0| < \frac{1}{m}} \frac{dx}{|x - x_0|^s}.$$

Как и выше, переходя к сферическим координатам, получим

$$|I(x_0) - I_m(x_0)| \leq CM \frac{\omega_n}{(n-s)m^{n-s}}. \quad (5.9)$$

Так как эта оценка не зависит от точки x_0 , то из нее следует равномерная сходимость $I_m(x_0)$ к $I(x_0)$ при $m \rightarrow \infty$.

При каждом m $I_m(x_0)$ есть непрерывная функция точки x_0 на множестве G . Действительно, функция $K(x, x_0) \omega_m(|x - x_0|)$ непрерывна по x_0 при каждом x и ограничена по x и x_0 . Поэтому непрерывность интеграла $I_m(x_0)$ непосредственно следует из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.

Для полного доказательства теоремы остается только заметить, что $I(x_0)$ есть непрерывная функция как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций (см. п. 1.4.11). Теорема доказана.

6. О гладкости обобщенных решений. Результаты, изложенные в предыдущих двух пунктах, дают возможность сделать ряд выводов о гладкости обобщенных решений уравнений Лапласа и Пуассона. Мы ограничимся следующими двумя теоремами.

Теорема 1. Если $u(x)$ есть обобщенное решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ на открытом множестве G , то $u(x)$ является непрерывной и неограниченно дифференцируемой функцией на этом множестве.

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы п. 4.

Заметим, что говорить о непрерывности функции $u(x)$ мы, конечно, не можем, так как, будучи обобщенным решением, она определена с точностью до значений на множестве меры нуль. Так как $\bar{u}(x)$ совпадает с $u(x)$ на множестве полной меры, то из теоремы I следует, что функция $u(x)$ может быть изменена на множестве меры нуль, что она становится непрерывной и неограниченно дифференцируемой. Именно в этом смысле иногда говорят кратко, что обобщенное решение уравнения Лапласа является непрерывной и неограниченно дифференцируемой функцией. Это же замечание относится и к следующей теореме.

Теорема 2. Если $u(x)$ есть обобщенное решение уравнения Пуассона (4.1) на открытом множестве G и $f(x)$ есть ограниченная измеримая функция, заданная на этом множестве, то $\bar{u}(x)$ является непрерывной и непрерывно дифференцируемой функцией на множестве G .

Это утверждение является непосредственным следствием теорем пп. 4 и 5.

7. Теорема о среднем значении. Пусть $u(x)$ — функция, гармоническая на некотором открытом множестве G , C — сфера $|x - x_0| = r$, причём шар $|x - x_0| \leq r$ принадлежит множеству G . Тогда

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_C u(x) dH_{n-1}. \quad (7.1)$$

Короче: значение гармонической функции в центре сферы равно ее среднему значению по этой сфере.

Доказательство. Применим формулу (3.20) к функции $u(x)$ и шару $K: |x - x_0| < r$. Так как $u(x)$ — гладкая функция, то интегралы, входящие в эту формулу, существуют и $\bar{u}(x_0) = u(x_0)$. Следовательно, имеет место равенство

$$u(x_0) = \int_K \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_C \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial \nu} u(x) dH_{n-1}.$$

В первом интеграле можно перебросить дифференцирование с Φ на u . Тогда, учитывая, что u есть гармоническая функция, получим

$$u(x_0) = \int_C \Phi(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu} dH_{n-1} - \int_C \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial \nu} u(x) dH_{n-1}. \quad (7.2)$$

Но очевидно,

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial \nu} dH_{n-1} = \int_K \Delta u dx = 0.$$

Поэтому, так как $\Phi(x, x_0)$ есть константа при $x \in C$, получаем, что первый интеграл в (7.2) равен нулю. Из (7.2) и (3.10) следует (7.1). Теорема доказана.

§ 5. ФУНКЦИЯ ГРИНА

В предыдущем параграфе мы дали определение фундаментального решения уравнения Лапласа. Легко видеть, что фундаментальное решение определяется неоднозначно. Действительно, наряду с построенным выше фундаментальным решением (4.2.6) рассмотрим функцию

$$\Gamma(x, x_0) = \Phi(x, x_0) - \gamma(x, x_0), \quad (1)$$

где $\gamma(x, x_0)$ — произвольная функция пары точек x и x_0 , гладкая и гармоническая по x при каждом x_0 . Если $u(x)$ — гладкая финитная функция, то имеет место равенство

$$\int \gamma(x, x_0) \Delta u(x) dx = 0, \quad (2)$$

в чем легко убедиться, перебросив дифференцирование с u на γ . Отсюда и из равенства (4.2.1) получаем

$$u(x_0) = - \int \Gamma(x, x_0) \Delta u(x) dx. \quad (3)$$

Таким образом, $\Gamma(x, x_0)$ есть также фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Наличие произвольной гармонической функции $\gamma(x, x_0)$ в качестве слагаемого в $\Gamma(x, x_0)$ дает возможность строить такое фундаментальное решение, которое удовлетворяет однородным граничным условиям рассматривавшихся выше граничных задач. Такое фундаментальное решение называется функцией Грина граничной задачи. Ниже мы дадим точное определение функции Грина, изучим ее свойства и покажем, как каждое решение граничной задачи может быть представлено с помощью функции Грина.

1. Функция Грина. Прежде чем дать точное определение, мы приведем некоторые наводящие соображения. Рассмотрим задачу A в той классической ее постановке, которая была приведена в п. 1.2. Предположим, что мы хотим построить фундаментальное решение, которое удовлетворяло бы однородным граничным условиям этой задачи:

$$\begin{aligned} \Gamma(x, x_0)|_{x \in S_1} &= 0, \\ \frac{d\Gamma(x, x_0)}{d\nu} + h(x)\Gamma(x, x_0)|_{x \in S_2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем в этом пункте мы будем считать x_0 заданной и фиксированной точкой множества G .

Ясно, как нужно подбирать функцию $\gamma(x, x_0)$, входящую в равенство (1), чтобы выполнялись граничные условия (1.1). Для этого нужно решить следующую граничную задачу: найти функцию $\gamma(x, x_0)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta \gamma(x, x_0) = 0 \quad (1.2)$$

в области G и граничному условию

$$\gamma(x, x_0) = \Phi(x, x_0) \quad (x \in S_1), \quad (1.3)$$

$$\frac{d\gamma(x, x_0)}{d\nu} + h(x)\gamma(x, x_0) = \frac{d\Phi(x, x_0)}{d\nu} + h\Phi(x, x_0) \quad (x \in S_2). \quad (1.4)$$

Мы определим γ как обобщенное решение задачи (1.2)—(1.4). В дальнейшем будет показано, что решение является гладкой (и даже неограниченно дифференцируемой) функцией по обеим точкам x и x_0 в области G . Нарушение гладкости может происходить на границе, что вполне естественно, так как никакие условия гладкости на границу налагаться не будут.

Перейдем к точным определениям. Как и в п. 2.2, мы будем предполагать, что G есть ограниченное открытое связное множество с конечным периметром; S — его существенная граница; S_1 и S_2 — ее подмножества, измеримые по $(n-1)$ -мерной мере Хаусдорфа, причем $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Мы будем рассматривать задачу A в той постановке, в какой она сформулирована в п. 2.2, но только применительно к уравнению Лапласа. Поэтому функционал $F(u, v)$ (см. (2.1.3)) имеет вид

$$F(u, v) = \int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{S_2} h(x)u^+(x)v^+(x)dH_{n-1}. \quad (1.5)$$

Мы сохраним предположение, что задача A является сильноэллиптической (см. п. 2.3).

Мы будем, далее, предполагать, что *соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение*. Это условие необходимо для су-

существования функции Грина, в чем можно будет убедиться, выражая решения через функцию Грина, как это делается ниже.

Для определения функции $\gamma(x, x_0)$ как решения задачи A в той постановке, в какой она приведена в п. 2.2, требуется указать функционал φ , соответствующий граничному условию (1.4). Этот функционал имеет вид

$$\varphi(v) = \int_{S_2} v^+(x) \left[\frac{d\Phi(x, x_0)}{dv} + h(x)\Phi(x, x_0) \right] dH_{n-1}. \quad (1.6)$$

Теперь мы можем дать определение функции Грина.

О п р е д е л е н и е. *Функцией Грина* задачи A называется функция

$$\Gamma(x, x_0) = \Phi(x, x_0) - \gamma(x, x_0), \quad (1.7)$$

где $\Phi(x, x_0)$ — фундаментальное решение (4.2.6) уравнения Лапласа, а $\gamma(x, x_0)$ есть функция, принадлежащая пространству $BV^2(G)$, удовлетворяющая граничному условию

$$\gamma^+(x, x_0) = \Phi^+(x, x_0) \quad (x \in S_1) \quad (1.8)$$

и уравнению

$$F(\gamma, v) = \varphi(v) \quad (1.9)$$

при всех $v \in E$, где F и φ задаются равенствами (1.5) и (1.6).

Естественно возникает вопрос, существует ли такая функция $\gamma(x, x_0)$, т. е. существует ли решение граничной задачи (1.8), (1.9). Заметим, что формально здесь не выполняются условия, которые требовались при постановке задачи A в п. 2.2. Именно там требовалось, чтобы функция $g(x)$, входящая в равенство (2.2.4), принадлежала пространству $BV^2(G)$. Соответствующая функция $\Phi(x, x_0)$, входящая в условие (1.8), не удовлетворяет этому требованию. Однако в действительности это не существенно, так как в постановке граничной задачи участвует только след функции $\Phi(x, x_0)$ на S_1 по точке x , а точка x_0 является внутренней точкой множества G . Поэтому ясно, что функцию $\Phi(x, x_0)$ можно так изменить в окрестности точки x_0 , что она станет гладкой, а ее след не изменится.

Существование решения задачи (1.8), (1.9) следует из первой теоремы Фредгольма, так как мы предположили, что соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение. Последнее, в частности, имеет место, если функционал $F(u, v)$ положительно-определенный. Для этого, как показано в п. 2.8, достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: $h(x) \geq 0$ и либо $H_{n-1}(S_1) > 0$, либо $h(x) > 0$ на множестве положительной $(n-1)$ -мерной меры.

Для любой финитной в G функции v равенство (1.9) принимает вид

$$F(\gamma, v) = 0. \quad (1.10)$$

Следовательно, по определению обобщенного решения эллиптического уравнения (см. п. 2.2) функция $\gamma(x, x_0)$ является обобщенным решением уравнения Лапласа на множестве G . Поэтому по теореме 1 п. 4.6 функция $\gamma(x, x_0)$ непрерывна и неограниченно дифференцируема по координатам точки x .

2. Симметричность. Теорема. *Функция $\Gamma(x, x_0)$ является симметричной, т. е. имеет место равенство*

$$\Gamma(x, x_0) = \Gamma(x_0, x) \quad (2.1)$$

для всех точек $x \in G, x_0 \in G, x \neq x_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$\Gamma_m(x, x_0) = \Phi_m(x, x_0) - \gamma(x, x_0), \quad (2.2)$$

где Φ_m — функция, определенная равенством (4.4.5), — «срезка» функции $\Phi(x, x_0)$. $\Phi_m(x, x_0)$ непрерывна и имеет ограниченные производные.

Пусть x — некоторая точка множества G , отличная от x_0 . Тогда при достаточно большом m имеет место равенство

$$\Gamma_m^+(x, \bar{x}) = \Gamma(x, \bar{x}) = 0 \quad (x \in S_1). \quad (2.3)$$

Поэтому $\Gamma_m(x, \bar{x})$ может быть взята в качестве функции $v(x)$, входящей в равенство (1.9). Это равенство примет вид

$$F(\gamma(\cdot, x_0), \Gamma_m(\cdot, \bar{x})) = \varphi(\Gamma(\cdot, \bar{x})). \quad (2.4)$$

Далее, интеграл

$$I = \int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Gamma_m(x, \bar{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_m(x, x_0)}{\partial x_i} dx \quad (2.5)$$

существует, так как стоящие под знаком этого интеграла производные суммируемы в квадрате. Интегрирование по частям дает следующее равенство:

$$\begin{aligned} I = & - \int_{|x-x_0|=\frac{1}{m}} \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial v} \Gamma(x, \bar{x}) dH_{n-1} + \\ & + \int_{S_2} \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial v} \Gamma^+(x, \bar{x}) dH_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При этом мы считаем m столь большим, что $\Gamma_m(x, \bar{x}) = \Gamma(x, \bar{x})$ при $|x-x_0| = \frac{1}{m}$. Первый из интегралов есть среднее значение функции

$\Gamma(x, \bar{x})$ по сфере $|x-x_0| = \frac{1}{m}$ (см. равенство (4.3.10)). Так как функция $\Gamma(x, \bar{x})$ является гармонической в окрестности точки x_0 , то по теореме о среднем значении (см. п. 4.7) мы получаем из (2.6)

$$I = \Gamma(x_0, \bar{x}) + \int_{S_2} \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial v} \Gamma^+(x, \bar{x}) dH_{n-1}.$$

Вычтем отсюда равенство (2.4). Получим

$$F(\Gamma_m(\cdot, \bar{x}), \Gamma_m(\cdot, x_0)) = \Gamma(x_0, \bar{x}). \quad (2.7)$$

Левая часть этого равенства не изменится, если поменять местами точки x_0 и \bar{x} . Поэтому $\Gamma(x_0, \bar{x}) = \Gamma(\bar{x}, x_0)$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Функция $\gamma(x, x_0)$ симметрична, непрерывна и неограниченно дифференцируема по каждой из точек x и x_0 в G .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Симметричность функции $\gamma(x, x_0)$ следует из теоремы и симметричности функции $\Phi(x, x_0)$. Неограниченная дифференцируемость по точке x доказана в п. 1, по точке x_0 — следует отсюда и из симметричности.

3. Решение задачи А. Мы покажем, что если известна функция Грина, то решение задачи А для уравнения Пуассона может быть записано явно в виде интеграла. В некоторых случаях (например, в случае первой краевой задачи для шара) известны аналитические выражения функции Грина (см., например, [29]). В этих случаях решение граничной задачи сводится просто к вычислению интеграла. Однако выражение решения через функцию Грина важно не только в вычислительном аспекте. Его можно существенно использовать для изучения свойств и поведения решений.

Мы ограничимся для простоты случаем, когда рассматривается уравнение Пуассона с однородными граничными условиями. Заметим,

что для неоднородных граничных условий выражение решения с помощью функции Грина в виде интеграла также возможно.

Итак, рассмотрим граничную задачу, которая в классической постановке выглядит следующим образом:

$$-\Delta u = f, \quad u|_{S_1} = 0, \quad \frac{du}{dn} + hu|_{S_2} = 0. \quad (3.1)$$

В обобщенной постановке она состоит в нахождении решения $u \in E$ уравнения

$$F(u, v) = \int_G f v dx \quad (3.2)$$

для всех $v \in E$. Здесь $F(u, v)$ — функционал (1.5). В дальнейшем, говоря о решении задачи (3.1), мы будем иметь в виду решение именно в этом смысле. Мы предполагаем выполненными условия, сформулированные в п. 1.

Теорема. Пусть $f \in L^2(G)$ и $u(x)$ — решение задачи (3.1). Тогда в каждой точке $x_0 \in G$, в которой выполняется условие

$$\int_G \frac{|f(x)| dx}{|x - x_0|^{n-2}} < \infty, \quad (3.3)$$

для функции $u(x)$ существует шаровое среднее $\bar{u}(x_0)$ и имеет место равенство

$$\bar{u}(x_0) = \int_G \Gamma(x, x_0) f(x) dx. \quad (3.4)$$

Таким образом, почти всюду в G

$$u(x_0) = \int_G \Gamma(x, x_0) f(x) dx. \quad (3.5)$$

Для любой функции $f \in L^2(G)$ интеграл (3.5) является решением задачи (3.1).

Доказательство. Для любой точки $x_0 \in G$ мы можем в качестве функции v , входящей в (3.2), взять функцию $\Gamma_m(x, x_0)$, определенную равенством (2.2), при достаточно большом m . Получим

$$F(u, \Gamma_m(\cdot, x_0)) = \int_G f(x) \Gamma_m(x, x_0) dx. \quad (3.6)$$

Так как $u \in E$, то эта функция может быть взята в качестве функции v , входящей в уравнение (1.9). Тогда будем иметь

$$F(u, \gamma(\cdot, x_0)) = \varphi(u), \quad (3.7)$$

где φ задается равенством (1.6).

Подставляя в функционал $F(u, v)$ функцию $\Phi_m(x, x_0)$ вместо v и интегрируя по частям, получим

$$F(u, \Phi_m(\cdot, x_0)) = - \int_{|x - x_0| = \frac{1}{m}} \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial \nu} u^-(x) dH_{n-1} + \varphi(u), \quad (3.8)$$

где $u^-(x)$ — внешний след функции $u(x)$ на сфере $|x - x_0| = \frac{1}{m}$.

Вычтем (3.7) из (3.8). Тогда из (3.6), учитывая, что $\Gamma_m = \Phi_m - \gamma$, получим

$$- \int_{|x - x_0| = \frac{1}{m}} \frac{\partial \Phi(x, x_0)}{\partial \nu} u^-(x) dH_{n-1} = \int_G f(x) \Gamma_m(x, x_0) dx. \quad (3.9)$$

Заметим, что при выполнении условия (3.3) имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_G \Gamma_m(x, x_0) f(x) dx = \int_G \Gamma(x, x_0) f(x) dx, \quad (3.10)$$

причем интеграл, стоящий справа, существует. Действительно, так как функция $\gamma(x, x_0)$ принадлежит пространству $L^2(G)$, то существование интеграла зависит только от функции $\Phi(x, x_0)$. Учитывая вид $\Phi(x, x_0)$ (см. 4.2.6), мы заключаем, что условие (3.3) гарантирует существование интеграла (3.10). При этом нужно заметить, что при $n = 2$ никаких условий не нужно, так как в этом случае $\Phi(x, x_0) \in L^2(G)$. Ввиду неравенства $\Phi_m(x, x_0) \leq \Phi(x, x_0)$ предельный переход в (3.10) возможен.

В левой части равенства (3.9) стоит среднее значение функции $u(x)$ по сфере $|x - x_0| = \frac{1}{m}$ (см. (4.3.10)). Воспользуемся леммой п. 4.3. Согласно этой лемме из равенства (3.10) следуют существование шарового среднего $\bar{u}(x_0)$ и равенство (3.4).

Для полного доказательства теоремы остается только показать, что для любой функции $f \in L^2(G)$ интеграл (3.5) дает решение граничной задачи (3.1). Но на основании условий, сформулированных в п. 1, задача (3.1) имеет решение u , а по доказанному выше это решение имеет вид (3.5). Теорема доказана.

Заметим, что в важных для приложений случаях дву- и трехмерного пространств ($n = 2, 3$) условие (3.3) выполняется в каждой точке $x_0 \in G$, так как в этих случаях функция $|x - x_0|^{2-n}$ суммируема в квадрате.

§ 6. ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ

Эллиптические граничные задачи обладают свойством монотонности, которое, грубо говоря, состоит в том, что чем больше правые части уравнений и граничных условий, тем больше решение. Это свойство играет важную роль при исследовании свойств решений и для получения их оценок. Ввиду линейности граничных задач указанное свойство монотонности эквивалентно положительности решений при положительности правых частей.

1. **Об одном свойстве билинейных функционалов в пространстве BV^2 .** Рассмотрим билинейный функционал $F(u, v)$, задаваемый равенством (2.1.3). При этом мы не будем в этом пункте предполагать, что выполняется условие эллиптичности. Таким образом, $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ — произвольные ограниченные измеримые функции в области G , а $h(x)$ — произвольная ограниченная измеримая по мере H_{n-1} функция на S_2 . Введем обозначения:

$$u_+(x) = \frac{1}{2} (|u(x)| + u(x)), \quad u_-(x) = \frac{1}{2} (|u(x)| - u(x)), \quad (1.1)$$

так что $u_+(x) \geq 0$, $u_-(x) \geq 0$, $u(x) = u_+(x) - u_-(x)$.

Теорема. Если функция $u(x)$ принадлежит пространству $BV^2(G)$, то $u_+(x)$ и $u_-(x)$ принадлежат этому пространству, и имеет место равенство

$$F(u_+, u_-) = F(u_-, u_+) = 0. \quad (1.2)$$

Доказательству теоремы предположим лемму.

Лемма. Пусть $u \in BV^2(G)$. Тогда $u_+, u_- \in BV^2(G)$ и для любой функции $\varphi \in L^2(G)$ имеет место равенство

$$\int_G \varphi \frac{\partial u_+}{\partial x_i} dx = \int_{G_+} \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \quad (1.3)$$

где $G_+ = \{x \in G: u(x) > 0\}$.

Доказательство Пусть сначала φ — финитная в G гладкая функция, а G_+ имеет конечный периметр. Тогда по формуле интегрирования по частям (п. V.1.7)

$$-\int_{G_+} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx = \int_{G_+} \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma_+} \varphi u^+ \nu_i dH_{n-1}, \quad (1.4)$$

где Γ_+ — существенная граница множества G_+ , u^+ — след функции u на Γ_+ . Но ясно, что $\varphi u^+ = 0$ на Γ_+ . Действительно, в некоторой граничной полоске области G функция $\varphi = 0$. Во внутренних точках области G имеем H_{n-1} почти всюду на Γ_+ : $u^+(x) = u^-(x)$, где $u^-(x)$ — внешний след функции $u(x)$ на Γ_+ . Совпадение внутреннего и внешнего следа имеет место, так как $u \in W_2^1$ в G и поэтому не имеет точек скачка. Но ясно, что $u^+(x) \geq 0$, а $u^-(x) \leq 0$. Следовательно, $u^+(x) = 0$. Итак, доказано, что $\varphi u^+ = 0$ на Γ_+ . Поэтому из равенства (1.4) получаем

$$-\int_{G_+} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u dx = \int_{G_+} \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (1.5)$$

Теперь мы избавимся от предположения, что G_+ имеет конечный периметр. Обозначим $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$,

$$G_\varepsilon = \{x \in G : u(x) - \varepsilon > 0\} = \{x \in G : u(x) > \varepsilon\}.$$

Предположим сначала, что ε выбрано так, что G_ε имеет конечный периметр. Тогда из (1.5) имеем

$$-\int_{G_\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (u - \varepsilon) dx = \int_{G_\varepsilon} \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (1.6)$$

Зададим последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такую, что ε_n , монотонно убывая, стремится к нулю, а множества G_{ε_n} имеют конечные периметры. Обозначим через $\chi_n(x)$ характеристическую функцию множества G_{ε_n} , а через $\chi(x)$ — характеристическую функцию множества G_+ . Ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(x) = \chi(x) \quad (1.7)$$

в каждой точке $x \in G$. Мы можем записать (1.6) в виде

$$-\int_G \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \chi_n(x) (u - \varepsilon_n) dx = \int_G \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} \chi_n(x) dx.$$

На основании (1.7) мы можем перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ и получим (1.5) уже без предположения о конечности периметра множества G_+ .

Равенство (1.5) можно записать также в виде

$$-\int_G \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_+ dx = \int_{G_+} \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (1.8)$$

Так как функция $\partial u / \partial x_i$ суммируема в квадрате в G , то правая часть (1.8) представляет собой линейный ограниченный функционал в $L^2(G)$, определенный на функциях φ . По теореме об общем виде линейных ограниченных функционалов мы получаем, что существует такая функция $v \in L^2(G)$, что

$$-\int_G \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_+ dx = \int_G \varphi v dx.$$

По определению обобщенной производной

$$v = \frac{\partial u_+}{\partial x_i}.$$

Итак, мы установили, что $\partial u_+ / \partial x_i$ суммируема в квадрате в области G . Равенство (1.8) можно записать в виде

$$\int_G \varphi \frac{\partial u_+}{\partial x_i} dx = \int_{G_+} \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad (1.9)$$

Учитывая, что любая функция $\varphi \in L^2(G)$ есть предел сходящейся по норме последовательности финитных гладких функций, предельным переходом получаем (1.3) для любой функции $\varphi \in L^2(G)$.

Для полного доказательства леммы остается только показать, что $u_+, u_- \in BV^2(G)$.

Так как $|u(x)| = 2u_+(x) - u_-(x)$, то по доказанному $\frac{\partial |u|}{\partial x_i} \in L^2(G)$, причем в качестве i можно взять любое из чисел $1, 2, \dots, n$. Следовательно, $|u| \in W^1_2(G)$. То, что $|u|^+ \in L^2(S)$, очевидно, следует из того, что $u^+ \in L^2(S)$. Принадлежность $|u|$ к BV следует из того, что $u \in BV$. Итак, доказано, что $|u| \in BV^2(G)$. На основании (1.1) получаем, что u_+ и u_- принадлежат к $BV^2(G)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Применим полученный в лемме результат к функции $u_+(x)$. Так как $(u_+)_+ = u_+$, что непосредственно видно из (1.1), то из (1.3) имеем

$$\int_G \varphi \frac{\partial u_+}{\partial x_i} dx = \int_{G_+} \varphi \frac{\partial u_+}{\partial x_i} dx. \quad (1.10)$$

Рассмотрим функционал

$$F_0(u, v) = \int_G \sum_{i, k} a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Пользуясь равенством (1.10), мы можем записать

$$F_0(u, u_+) = \int_G \sum_{i, k} a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u_+}{\partial x_i} dx.$$

Это можно записать также в виде

$$F_0(u, u_+) = \int_{G_+} \sum_k \left(\sum_i a_{ik}(x) \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

Воспользуемся равенством (1.3)

$$F_0(u, u_+) = \int_G \sum_k \left(\sum_i a_{ik}(x) \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_+}{\partial x_k} dx = F_0(u_+, u_+). \quad (1.11)$$

Так как $u = u_+ - u_-$, то мы имеем

$$F_0(u, u_+) = F_0(u_+ - u_-, u_+) = F_0(u_+, u_+) - F_0(u_-, u_+).$$

Отсюда и из (1.11) следует

$$F_0(u_-, u_+) = 0. \quad (1.12)$$

Ввиду симметричности функционала $F_0(u, v)$ ($F_0(u, v) = F_0(v, u)$) из (1.12) получаем также

$$F_0(u_+, u_-) = 0.$$

Для остальных слагаемых, входящих в функционал $F(u, v)$, доказательство аналогично или даже еще проще, если в слагаемых отсутствуют производные. При этом нужно иметь в виду при рассмотрении интеграла по S_2 , что можно переходить к аппроксимативному пределу под знаком абсолютной величины, и, следовательно, $\lim u_+ = (\lim u)_+$. Теорема доказана.

2. Дифференциальные неравенства. Начиная с этого пункта, мы будем вести все изложение для самосопряженных дифференциальных операторов, т. е. операторов

$$Lu = - \sum_{i, k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + c(x)u. \quad (2.1)$$

Многие результаты, которые здесь будут получены, верны и для операторов общего вида, определенных равенством (1.1.6).

Мы будем здесь рассматривать дифференциальные неравенства вида:

$$Lu \geq 0 \quad (\text{в } G), \quad (2.2)$$

$$u|_{S_1} \geq 0, \quad D, u + hu|_{S_2} \geq 0, \quad (2.3)$$

где D , — граничный оператор (1.2.3):

$$D, u = \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x)v_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad (2.4)$$

G, S_1, S_2 обозначает то же, что и выше (см. п. 2.2).

Классическая постановка задачи о решении дифференциальных неравенств состоит в нахождении гладкой функции $u(x)$, удовлетворяющей неравенству (2.2) в каждой точке множества G и неравенствам (2.3) в каждой точке границы S . При этом, чтобы неравенство (2.2) имело смысл, нужно предполагать, что коэффициенты $a_{ik}(x)$ дифференцируемы.

Ясно, что решение дифференциальных неравенств (2.2), (2.3) не единственно. Действительно, мы можем рассмотреть граничную задачу, сформулированную в п. 1.2, в предположении, что правые части f, g_1 и g_2 — неотрицательные функции. Задавая различные функции такого рода, мы будем получать различные решения неравенств (2.2), (2.3).

Будем ставить перед собой задачу исследования общих свойств решений неравенств (2.2), (2.3), а не нахождения какого-нибудь конкретного решения. Основной вопрос, который будет стоять перед нами, — вопрос неотрицательности или даже строгой положительности всех решений рассматриваемых неравенств.

Однако прежде чем приступить к исследованию этого вопроса, мы обобщим само понятие решения неравенств (2.2), (2.3) на функции u , принадлежащие пространству $BV^2(G)$, так же как в § 2 обобщалось понятие решения граничных задач. При этом мы сохраним те требования, которые налагались на множество G и коэффициенты a_{ik}, c, h . Эти требования указаны в п. 2.2.

О п р е д е л е н и е. Функция $u \in BV^2(G)$ называется *обобщенным решением* неравенств (2.2), (2.3), если

$$u^+(x) \geq 0 \quad (2.5)$$

почти всюду на S_1 (по $(n-1)$ -мерной мере), и для любой неотрицательной функции $v \in E$ имеет место неравенство

$$F(u, v) \geq 0, \quad (2.6)$$

где $F(u, v)$ — функционал, определенный равенством (2.1.3).

В рассматриваемом случае этот функционал имеет вид

$$F(u, v) = \int_G \left\{ \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} + c(x)uv \right\} dx + \int_{S_2} h(x)u^+ v^+ dH_{n-1}. \quad (2.7)$$

Легко видеть, что каждая гладкая функция $u(x)$, удовлетворяющая неравенствам (2.2), (2.3), удовлетворяет также неравенствам (2.5), (2.6) (в предположении дифференцируемости коэффициентов a_{ik}). Это следует из формулы Грина (1.3.1).

Т е о р е м а 1. Пусть $F(u, v)$ — положительно-определенный в пространстве E функционал (см. п. 2.8). Тогда каждое обобщенное решение $u(x)$ неравенств (2.2), (2.3) неотрицательно:

$$u(x) \geq 0 \quad (2.8)$$

почти всюду в G .

Доказательство. Пусть $u(x)$ — обобщенное решение неравенств (2.2), (2.3), $u_-(x)$ — функция, определенная равенством (1.1). Из неравенства (2.5) получаем, что след функции $u_-(x)$ на S_1 равен нулю (почти всюду по $(n-1)$ -мерной мере). Кроме того, $u_-(x)$ принадлежит пространству $BV^2(G)$ (см. теорему предыдущего пункта). Следовательно, функция $u_-(x) \in E$ и может быть подставлена в (2.6) в качестве функции v . Получим

$$F(u, u_-) \geq 0. \quad (2.9)$$

С другой стороны, из равенства (1.2) и положительной определенности функционала $F(u, v)$ получаем

$$F(u, u_-) = F(u_+, u_-) - F(u_-, u_-) = F(u_-, u_-) \leq 0. \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10) следует

$$F(u_-, u_-) = 0. \quad (2.11)$$

Ввиду положительной определенности функционала F получаем отсюда, что $u_-(x) = 0$ почти всюду в G . Поэтому из (1.1) $u(x) = |u(x)|$ почти всюду в G . Теорема доказана.

Пользуясь критерием положительной определенности функционала $F(u, v)$ в пространстве E , установленным в п. 3.6, мы можем сформулировать условие положительности решения неравенств (2.2), (2.3) также в терминах собственных значений соответствующей граничной задачи

$$Lu = \lambda u, \quad u|_{S_1} = 0, \quad D, u + hu|_{S_2} = 0 \quad (2.12)$$

(точнее о постановке задачи (2.12) и понятии ее обобщенного решения см. п. 3.1).

Теорема 2. Все обобщенные решения неравенства (2.2), (2.3) неотрицательны тогда и только тогда, когда первое собственное значение задачи (2.12) положительно.

Доказательство. Пусть первое собственное значение положительно. Тогда, как показано в п. 3.6, функционал (2.7) положительно определен и на основании теоремы 1 все решения неравенств (2.2), (2.3) неотрицательны.

Пусть первое собственное значение задачи (2.12) неположительно. Ниже (п. 5) будет показано, что существует отрицательная первая собственная функция $u(x)$ задачи (2.12). Так как для этой функции $\lambda u \geq 0$, то она является отрицательным решением неравенств (2.2), (2.3). Теорема доказана.

Пример Рассмотрим граничную задачу

$$\Delta u = au + b \quad (\text{в } G), \quad u|_S = 0. \quad (2.13)$$

Физическим примером ее является задача о стационарном распределении температуры в теле, на границе которого поддерживается нулевая температура, а внутри задан источник тепла, линейно зависящий от температуры.

Предположим, что a и b — положительные константы. Рассмотрим вопрос о положительности решения задачи (2.13). Пусть λ — первое собственное значение задачи:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad (\text{в } G), \quad u|_S = 0. \quad (2.14)$$

Рассмотрим два случая.

1. $a < \lambda$. В этом случае решение задачи (2.13) неотрицательно.

Действительно, первое собственное значение задачи (2.12), если ее записать в соответствии с рассматриваемым примером, равно $\lambda - a$. Оно положительно, и мы можем применить теорему 2.

2. $a > \lambda$. В этом случае задача (2.13) не может иметь неотрицательного решения.

Действительно, предположим противное: решение $u(x)$ задачи (2.13) неотрицательно. Мы имеем, очевидно, следующее равенство:

$$-\Delta u - \lambda u = (a - \lambda)u + b.$$

Поэтому по третьей теореме Фредгольма

$$\int_G [(a - \lambda)u + b] u_0 dx = 0, \quad (2.15)$$

где $u_0(x)$ — первая собственная функция задачи (2.14). Так как $u_0(x)$ можно взять неотрицательным (см. п. 6.5), то равенство (2.15) невозможно. Это противоречие доказывает утверждение.

З а м е ч а н и е. В случае, когда оператор L не является самосопряженным, основные результаты этого пункта остаются справедливыми. Теорема 1 переносится без изменения. В теореме 2 на несамосопряженный случай переносится только достаточное условие, причем должны рассматриваться собственные значения симметризованной задачи. Теорема следующего пункта вместе с ее доказательством полностью переносится на несамосопряженный случай.

3. Строгая положительность решений. Мы показали в предыдущем пункте, что обобщенные решения неравенств (2.2), (2.3) неотрицательны. Оказывается, что для непрерывных обобщенных решений имеет место более сильный результат — строгая положительность.

Мы будем дополнительно к тем предположениям, которые были оговорены в предыдущем пункте, требовать, чтобы коэффициенты $a_{ik}(x)$ имели ограниченные первые производные при $x \in G$.

Т е о р е м а. Пусть $F(u, v)$ — положительно-определенный в пространстве E функционал. Тогда каждое непрерывное обобщенное решение неравенств (2.2), (2.3), не равное тождественно нулю, положительно во всех точках множеств G : $u(x) > 0$ ($x \in G$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(x)$ — непрерывное и не равное тождественно нулю обобщенное решение неравенств (2.2), (2.3). Мы покажем, что функция $u(x)$ ни в одной точке множества G не обращается в нуль.

Предположим противное. Пусть Ω есть множество точек, в которых $u(x) = 0$. По предположению существуют точки $x \in G$, в которых функция $u(x)$ отлична от нуля. Согласно теореме 1 и 2 функция $u(x)$ положительна в этих точках. Пусть y — одна из этих точек.

Так как функция $u(x)$ непрерывна, то множество Ω замкнуто. Обозначим через y_0 ближайшую к y точку множества Ω (вернее, одну из таких точек, если она не одна). Существование такой точки следует из замкнутости множества Ω . На отрезке, соединяющем y и y_0 , возьмем внутреннюю точку x_0 и положим

$$\rho = |x_0 - y_0|. \quad (3.1)$$

При этом мы можем взять ρ столь малым, чтобы шар

$$Q = \{x : |x - x_0| \leq \rho\} \quad (3.2)$$

целиком принадлежал множеству G . Выберем, далее, число $\delta < \rho$ и построим шар

$$K = \{x : |x - y_0| \leq \delta\}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим функцию

$$\omega(x) = \exp(-\mu \rho^2) - \exp(-\mu |x - x_0|^2). \quad (3.4)$$

Явное вычисление выражения $L\omega$, где L задается равенством (2.1), показывает, что μ можно выбрать настолько большим, что будет выполняться неравенство во всех точках шара K :

$$L\omega > \beta, \quad (3.5)$$

где β — некоторая положительная константа.

Возможность выбора такого числа μ следует из того, что выражение $\exp(-\mu |x - x_0|^2)$ $L(\omega)$ содержит μ^2 с положительным коэффициентом в силу условия эллиптичности, а остальные слагаемые растут не быстрее μ .

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = u(x) + t\omega(x) \quad (t > 0). \quad (3.6)$$

Пусть Γ — граница шара K :

$$\Gamma = \{x : |x - y_0| = \delta\}. \quad (3.7)$$

Легко видеть, что t в (3.6) можно выбрать столь малым, что будет иметь место неравенство

$$\varphi(x) > 0 \quad (x \in \Gamma). \quad (3.8)$$

Действительно, по построению на пересечении $\Gamma \cap Q$ функция $u(x)$ положительна и поэтому ограничена снизу положительной константой (в силу непрерывности $u(x)$ и замкнутости $\Gamma \cap Q$). Поэтому t можно выбрать так, что на множестве $\Gamma \cap Q$ будет иметь место неравенство $\varphi(x) > 0$. Далее, из (3.4) видно, что $\omega(x) > 0$ вне шара Q . Следовательно, $\varphi(x) > 0$ вне шара Q . Итак, (3.8) доказано.

Ввиду непрерывности функции $\varphi(x)$ из (3.8) следует существование такой положительной константы α , что

$$\varphi(x) \geq \alpha \quad (x \in \Gamma). \quad (3.9)$$

Рассмотрим функционал $F(u, v)$ на функциях, определенных на K . Точнее, пусть

$$F_K(u, v) = \int_K \left\{ \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv \right\} dx. \quad (3.10)$$

Через E_K будем обозначать пространство функций из $BV^2(K)$, равных нулю на Γ . Ясно, что при $v \in E_K$ имеет место равенство

$$F_K(u, v) = \int_K Luv dx. \quad (3.11)$$

Кроме того, при $v \in E_K$, $v \geq 0$ имеет место неравенство

$$F_K(u, v) \geq 0, \quad (3.12)$$

так как мы приходим к (2.6), если будем считать v равной нулю вне K . Из (3.6), (3.5) и (3.12) получаем

$$F_K(\varphi - \varepsilon, v) \geq \int_K (t\beta - \varepsilon c(x))v(x) dx, \quad (3.13)$$

где ε — некоторая константа, $v \in E_K$, $v \geq 0$.

Выберем ε столь малым, чтобы было

$$\varphi(x) - \varepsilon \geq 0 \quad (x \in \Gamma), \quad (3.14)$$

$$F_K(\varphi - \varepsilon, v) \geq 0 \quad (v \in E_K, v \geq 0). \quad (3.15)$$

Это можно сделать на основании (3.9) и (3.13). Применяя теорему 1 п 2 к неравенствам (3.15), (3.14), получим

$$\varphi(x) \geq \varepsilon \quad (x \in K). \quad (3.16)$$

При этом мы, конечно, должны проверить, что функционал (3.10) положительно определенный. Но это действительно так: для любых $u \in E_K$, $u \neq 0$ мы получим, продолжая их нулем вне K , что $F(u, u) > 0$.

По построению $u(y_0) = 0$, $\omega(y_0) = 0$. Поэтому

$$\varphi(y_0) = 0$$

Но это противоречит (3.16). Это противоречие и доказывает теорему.

Эта теорема может быть использована для доказательства строгой положительности решения граничных задач при неотрицательных правых частях. Точнее, имеет место следующее утверждение (в предположении гладкости коэффициентов оператора L и положительной определенности функционала $F(u, v)$).

С л е д с т в и е. Пусть $u(x)$ — обобщенное решение граничной задачи:

$$Lu = f, \quad u|_{S_1} = g_1^+, \quad \frac{du}{dn} + hu|_{S_2} = g_2, \quad (3.17)$$

где $f \in L^2(G)$, $g_1 \in BV^2(G)$, $g_2 \in L^2(S_2)$.

Пусть, далее, правые части $f(x)$, $g_1^+(x)$, $g_2(x)$ являются неотрицательными функциями.

Тогда $u(x)$ либо равна нулю почти всюду в G , либо строго положительна, точнее, существует непрерывная функция $\omega(x)$, заданная в G и такая, что

$$\omega(x) > 0 \quad (3.18)$$

при всех $x \in G$ и

$$u(x) \geq \omega(x) \quad (3.19)$$

почти всюду в G .

Доказательство. Пусть $u(x)$ отлична от нуля на множестве положительной меры. Если функция f ограничена, то, пользуясь фундаментальным решением, нетрудно доказать, что решение задачи (3.17) непрерывно в G (ср. с п. 4.6). Строгая положительность решения $u(x)$ является следствием теоремы.

Если функция f не ограничена, то мы возьмем ее срезку, например числом 1, и обозначим через w решение граничной задачи (3.17) с такой срезанной правой частью. Мы придем к предыдущему случаю, так что будет иметь место неравенство (3.18). Далее, очевидно, $u - w$ является обобщенным решением граничной задачи с неотрицательными правыми частями. Поэтому на основании теоремы 1 п. 2 имеет место неравенство (3.19).

4. **Принцип максимума.** Вместо неравенств, о которых шла речь в предыдущих пунктах, можно рассматривать неравенство

$$Lu \leq 0 \quad (4.1)$$

в множестве G , не включая никаких условий на границе. Как и выше, мы будем рассматривать обобщенные решения этого неравенства. Именно, *обобщенным решением* неравенства (4.1) называется функция $u(x) \in BV^2(G)$, удовлетворяющая неравенству

$$\int_G \left\{ \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} + c(x)uv \right\} dx \leq 0 \quad (4.2)$$

для любой неотрицательной функции $v: v \in BV^2(G)$, $v^+|_S = 0$.

Мы по-прежнему предполагаем, что оператор L является эллиптическим в G , что G — ограниченное открытое связное множество с конечным периметром и S — его существенная граница.

Теорема 1 (принцип максимума). Пусть выполняется условие

$$c(x) \geq 0 \quad (4.3)$$

при почти всех $x \in G$. Пусть, далее, $u(x)$ — обобщенное решение неравенства (4.1), и существует неотрицательная константа M такая, что

$$u^+(x) \leq M \quad (4.4)$$

почти всюду на S по $(n-1)$ -мерной мере.

Тогда при почти всех $x \in G$ имеет место неравенство

$$u(x) \leq M. \quad (4.5)$$

Доказательство. Обозначим $z(x) = M - u(x)$. Тогда z является обобщенным решением неравенства

$$Lz \geq 0 \quad (в G), \quad z^+ \geq 0 \quad (на S). \quad (4.6)$$

Поэтому мы можем воспользоваться теоремой 1 п. 2. Условия этой теоремы выполняются, так как функционал $F(u, v)$ является положительно-определенным в силу эллиптичности оператора L и неравенства (4.3). На основании этой теоремы $z(x) \geq 0$ почти всюду в G . Следовательно, имеет место неравенство (4.5). Теорема доказана.

Чтобы объяснить название «принцип максимума», мы рассмотрим следующий частный случай. Пусть Γ — граница множества G (так что $S \subset \Gamma$) и пусть $u(x)$ есть непрерывная функция на замкнутом множестве $\bar{G} = G \cup \Gamma$. Предположим, что $u(x)$ есть обобщенное решение неравенства (4.1) в G . Тогда *если максимум функции $u(x)$ на множестве G положителен, то он достигается на границе Γ этого множества.* Действительно, если бы это было не так, то существовала бы положительная константа M такая, что

$$\max_{x \in \Gamma} u(x) < M < \max_{x \in \bar{G}} u(x), \quad (4.7)$$

но это противоречит теореме.

При некоторых дополнительных предположениях о гладкости коэффициентов теорема 1 может быть усилена. Именно, мы будем по-прежнему считать, что функция $u(x)$ ограничена, и дополнительно предположим, что коэффициенты $a_{ik}(x)$ имеют ограниченные производные.

Теорема 2 (строгий принцип максимума). Пусть выполняется условие (4.3). Пусть, далее, непрерывная на множестве G функция $u(x)$ является обобщенным решением неравенства (4.1), и существует неотрицательная константа M такая, что

$$u^+(x) \leq M \quad (4.8)$$

почти всюду на S по $(n-1)$ -мерной мере.

Тогда либо $u(x)$ тождественно равна M всюду в G , либо во всех точках x множества G выполняется неравенство

$$u(x) < M. \quad (4.9)$$

Доказательство точно такое же, как и в предыдущей теореме, с использованием теоремы п. 3.

Следствие. Пусть выполняется условие (4.3). Пусть, далее, непрерывная на множестве G функция $u(x)$ является обобщенным решением неравенства (4.1) и в точке $x_0 \in G$ достигает положительного локального максимума. Тогда эта функция является константой в некоторой окрестности точки x_0 .

Вместо неравенства (4.1) можно рассматривать неравенство противоположного смысла. Получаются аналогичные результаты с очевидными изменениями. Их можно получить, заменив $u(x)$ на $-u(x)$.

5. Свойства первой собственной функции. Рассмотрим задачу о собственных значениях:

$$Lu = \lambda pu \quad (x \in G), \quad u|_{S_1} = 0, \quad (D, u + hu)|_{S_2} = 0. \quad (5.1)$$

Точная постановка ее и все ограничения сформулированы в п. 3.1. В п. 3.3 показано, что существует наименьшее (первое) собственное значение этой задачи. Соответствующую ему собственную функцию будем называть первой собственной функцией.

Лемма. Если $u(x)$ есть первая собственная функция задачи (5.1), то ее абсолютная величина $|u(x)|$ также является первой собственной функцией этой задачи.

Доказательство. На основании теоремы п. 1 для функционала F (см. (2.7)) имеет место $F(u, u) = F(|u|, |u|)$. Следовательно (п. 3.3), для первого собственного значения λ имеем

$$\lambda = \frac{F(u, u)}{\int_G pu^2 dx} = \frac{F(|u|, |u|)}{\int_G p|u|^2 dx}.$$

Как показано в п. 3.3, отсюда следует, что $|u(x)|$ есть первая собственная функция. Лемма доказана.

Будем предполагать, что коэффициенты $a_{ik}(x)$ оператора L (см. (2.1)) имеют ограниченные вторые производные.

Теорема. Собственные функции задачи (5.1) непрерывны на множестве G . При этом первая (и только первая) собственная функция не обращается в нуль ни в одной точке множества G (следовательно, она либо положительна, либо отрицательна при всех $x \in G$).

Доказательство. Пусть $u(x)$ — любая собственная функция задачи (5.1). Докажем ее непрерывность. Если $\Phi(x, y)$ — фундаментальное решение уравнения $L_0 v = 0$ (L_0 — оператор (2.1) при $c(x) = 0$), то, как и в п. 4.4, получаем

$$u(x) = \int_D \Phi(x, y) f(y) dy + w(x) \quad (5.2)$$

при почти всех $x \in D$. Здесь D — произвольное открытое множество, принадлежащее вместе с границей множеству G ;

$$f(x) = [\lambda p(x) - c(x)]u(x); \quad (5.3)$$

$w(x)$ — непрерывная в D функция. Так как $u \in L^2(G)$, то в силу (5.3) $f \in L^2(G)$ (p и c — ограничены). Согласно теореме Соболева [48] об ин-

тегралах типа потенциала из (5.2) в силу произвольности множества D имеем $u \in L_{loc}^r(G)$, где $r > 2$. При этом $u \in L_{loc}^r(G)$ означает, что u суммируема в степени r на любом замкнутом подмножестве множества G . Из (5.3) следует теперь $f \in L_{loc}^r(G)$, и, повторив рассуждения, заключаем, что $u \in L_{loc}^{r_1}(G)$, где $r_1 > r$. Продолжая так далее, через k шагов получим, что $f \in L_{loc}^{r_k}(G)$, причем явные вычисления r_k показывают, что с ростом k r_k становится достаточно большим, чтобы из (5.2) сделать вывод о непрерывности $u(x)$ на основании теоремы Соболева [48] о непрерывности интегралов типа потенциала.

Покажем, что первая собственная функция не обращается в нуль на множестве G . Предположим сначала, что первое собственное значение λ положительно. Тогда $\lambda p(x) |u(x)| \geq 0$ в G . Так как по лемме $|u(x)|$ есть собственная функция, то она удовлетворяет неравенствам (2.2), (2.3), причем функционал $F(u, v)$ положительно-определенный ввиду положительности λ (см. п. 3.6). По теореме п. 3 $|u(x)| > 0$ при $x \in G$.

При $\lambda \leq 0$ функция $u(x)$ оказывается первой собственной функцией задачи (5.1) с собственным значением единица для нового оператора $L_1 u = Lu - (\lambda - 1)pu$. Следовательно, по доказанному $|u(x)| > 0$ при $x \in G$.

Другие собственные функции ввиду ортогональности к первой, очевидно, не сохраняют своего знака в области G . Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Существует единственная с точностью до постоянного множителя первая собственная функция задачи (5.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вместе с произвольными первыми собственными функциями u и v задачи (5.1) рассмотрим функцию

$$\omega(x) = u(x_0)v(x) - u(x)v(x_0), \quad (5.4)$$

где x_0 — произвольная точка области G . Если $\omega(x)$ не обращается в нуль тождественно, то вместе с u и v первой собственной функцией задачи (5.1) является и функция $\omega(x)$, и согласно теореме $\omega(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке $x \in G$. Но $\omega(x_0) = 0$. Поэтому $\omega(x) \equiv 0$ при $x \in G$, и из (5.4) имеем

$$v(x) = \frac{v(x_0)}{u(x_0)} u(x),$$

что и требовалось доказать.

Свойство единственности первой собственной функции означает по определению, что первое собственное значение является простым (некратным).

6. Ограниченность решений. Отметим еще одно важное свойство обобщенных решений — свойство ограниченности, которое понадобится в дальнейшем. Будем рассматривать граничную задачу:

$$Lu = f(x) \quad (x \in G), \quad u|_{S_1} = 0, \quad (D, u + hu)|_{S_2} = 0, \quad (6.1)$$

где L — оператор (2.1) с ограниченными коэффициентами $a_{ik}(x)$ и $c(x)$. Будем предполагать, что коэффициенты $a_{ik}(x)$ заданы на некотором открытом множестве Ω , содержащем множество G вместе с границей, и имеют там ограниченные вторые производные. Кроме того, будем предполагать, что:

$$\begin{aligned} \text{либо } S_2 = \emptyset \text{ (первая краевая задача),} \\ \text{либо } S_2 \neq \emptyset \text{ и } h(x) \geq \rho > 0 \quad (x \in S_2), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где ρ — некоторая константа. При выполнении (6.2) и (2.3.3) задача (6.1) сильно эллиптическая (п. 2.3) без предположения о регулярности границы $S = S_1 \cup S_2$.

Т е о р е м а. *Пусть $f \in L^p(G)$ при $p > n$, и задача (6.1) разрешима. Тогда любое обобщенное решение $u(x)$ ограничено.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $c \equiv 0$, когда $L = L_0$. Положим $f(x) = 0$ вне области G и рассмотрим функцию

$$u_0(x) = \int \Phi(x, y) f(y) dy, \quad (6.3)$$

где $\Phi(x, y)$ — фундаментальное решение уравнения $L_0(u) = 0$ (в области $\Omega \supset \bar{G}$). В силу $f \in L^p(\Omega)$, $p > n$ $u_0(x)$ непрерывна при $x \in \Omega$ и ограничена вместе с первыми производными при $x \in G$:

$$|u_0(x)| < M \|f\|_p, \quad \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \right| < M \|f\|_p \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6.4)$$

Здесь $\| \cdot \|_p$ — норма в $L^p(G)$; M — некоторая константа

Функция $z = u - u_0$ есть обобщенное решение задачи вида:

$$L_0 z = 0, \quad z|_{S_1} = g_1, \quad D_\nu z + kz|_{S_2} = g_2,$$

причем согласно (6.4) имеет место оценка

$$|g_i(x)| \leq M_1 \|f\|_p \quad (x \in S_i, \quad i = 1, 2),$$

где M_1 — некоторая константа. Согласно (6.2) можно указать константу M_2 такую, чтобы функция $M_2 \|f\|_p \pm z(x)$ удовлетворяла неравенствам (2.2) и (2.3) (для оператора L_0). Из теоремы п. 2 следует тогда оценка $|z(x)| \leq M_2 \|f\|_p$, а значит (см. (6.4)), оценка

$$|u(x)| \leq N \|f\|_p \quad (x \in G) \quad (6.5)$$

с некоторой константой N

Для случая $c = 0$ теорема доказана.

Отметим, что в случае $c = 0$ при условии (6.2) задача (6.1) однозначно разрешима при любом $f \in L^2(G)$ (первая теорема Фредгольма). Поэтому существует линейный оператор R , определенный в $L^2(G)$, который каждой функции $f \in L^2(G)$ ставит в соответствие решение задачи (6.1) ($c = 0$):

$$u = Rf. \quad (6.6)$$

При этом $u \in BV^2(G)$ и из условия сильной эллиптичности (см. п. 2.3) и определения обобщенного решения имеем

$$\int_G \{ u dx = F_0(u, u) > \alpha \|u\|^2 - \beta \|u\|^2,$$

где α и β — положительные константы, $\| \cdot \|$ — норма в $BV^2(G)$; $\| \cdot \|$ — норма в $L^2(G)$. Отсюда следует, что (6.6) есть ограниченный оператор из $L^2(G)$ в $BV^2(G)$ и, следовательно (в силу теоремы вложения $BV^2(G)$ в $L^q(G)$ ($q > 2$)), ограниченный оператор из $L^2(G)$ в $L^q(G)$, $q > 2$.

С другой стороны, из (6.5) следует, что (6.6) есть ограниченный оператор из $L^p(G)$, $p > n$ в $L^\infty(G)$. По интерполяционной теореме Рисса (см. например, [27]) (6.6) есть ограниченный оператор, действующий из $L^r(G)$ в $L^s(G)$, где r и s связаны соотношениями:

$$\frac{1}{r} = \frac{\tau}{2} + \frac{1-\tau}{p}, \quad \frac{1}{s} = \frac{\tau}{q} \quad (0 < \tau < 1). \quad (6.7)$$

Для доказательства теоремы в общем случае ($c \neq 0$) запишем решение $u(x)$ с помощью оператора (6.6) в виде

$$u = Rf_*, \quad f_* = f - cu \quad (6.8)$$

и заметим, что из $u \in L^2(G)$ следует $f_* \in L^2(G)$. (Мы считаем $p > n \geq 2$, так как при $n = 1$ утверждение теоремы следует из вложения $W_2^1(G)$ в пространство непрерывных функций). Поэтому из (6.8), (6.7) $\tau = 1$, $r = 2$ $u, f_* \in L^{s_0}$, $s_0 = q > 2$. Следовательно (при $r = s_0$), $u, f_* \in L^{s_1}$, $s_1 > s_0$; и вообще $u, f_* \in L^{s_k}$, $s_k > s_{k-1}$ при $r = s_{k-1}$. При достаточно большом k будем иметь $s_k < p \leq s_{k+1}$, так что $u \in L^{s_{k+1}}$, $f_* \in L^p$. Ограниченность $u(x)$ следует теперь из представления (6.8) и оценки (6.5) при $f = f_*$. Теорема доказана

С л е д с т в и е. Все собственные функции задачи (5.1) ограничены.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 7. ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА

1. **Уравнения в евклидовых пространствах.** Пусть E — евклидово пространство, A — ограниченный линейный оператор, действующий в E и определенный на всем пространстве E .

Рассмотрим уравнение

$$Ax = f \quad (1.1)$$

где $f \in E$ считается заданным, а $x \in E$ — искомым вектором.

Уравнение

$$Ax = \theta \quad (1.2)$$

зывают *однородным уравнением*, соответствующим уравнению (1.1).

Ввиду линейности оператора A имеем $A\theta = \theta$. Действительно, $A\theta = A(0 \cdot x) = 0 \cdot Ax = \theta$. Таким образом, уравнение (1.2) разрешимо. Однако θ может быть не единственным решением уравнения (1.2). Множество всех решений $x \in E$ уравнения (1.2) будем обозначать Z_A .

Теорема 1. *Множество Z_A всех решений $x \in E$ уравнения (1.2) образует линейное пространство.*

Доказательство. Пусть $x_1 \in Z_A$, $x_2 \in Z_A$. Тогда $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \theta$, так что $x_1 + x_2 \in Z_A$. Аналогично доказывается, что и $\alpha x \in Z_A$ и α — число, то $\alpha x \in Z_A$. Все аксиомы линейного пространства теперь следуют из того, что E есть линейное пространство.

Теорема 2. *Пусть x_0 — решение уравнения (1.1). Тогда общее решение уравнения (1.1) имеет вид*

$$x = x_0 + z, \quad (1.3)$$

где z — произвольный элемент из Z_A .

Доказательство. То, что любой элемент вида (1.3) есть решение уравнения (1.1), очевидно: $Ax = Ax_0 + Az = f$. Обратно, пусть x — произвольное решение уравнения (1.1): $Ax = f$. Тогда $A(x - x_0) = \theta$ и, следовательно, обозначая $z = x - x_0$, получим $z \in Z_A$, откуда следует (1.3).

Рассмотрим оператор A^* , сопряженный к оператору A . Уравнение

$$A^*x = \theta \quad (1.4)$$

зывается *однородным сопряженным* к (1.1) уравнением.

Обозначим через R_A область значений оператора A , т. е. множество всех элементов вида Ax , когда x пробегает все E . Ясно, что R_A — линейное пространство.

Теорема 3. *Z_{A^*} есть ортогональное дополнение R_A до E .*

Доказательство. Пусть $x \in Z_{A^*}$, т. е. $A^*x = \theta$, и пусть $y \in R_A$. Тогда существует такой элемент $x_0 \in E$, что $y = Ax_0$. Следовательно, $(y, x) = (x, Ax_0) = (A^*x, x_0) = 0$.

Обратно, пусть x ортогонален R_A . Это значит, что $(Ax_0, x) = 0$ для $x_0 \in E$. Но тогда, положив $x_0 = A^*x$, получим $0 = (AA^*x, x) = \|A^*x\|^2$, так что $A^*x = \theta$, т. е. $x \in Z_{A^*}$. Теорема доказана.

Из теоремы 3, в частности, следует, что для разрешимости уравнения (1.1) необходимо, чтобы выполнялось условие

$$(f, z) = 0 \quad (1.5)$$

для всех $z \in Z_{A^*}$. Действительно, если уравнение (1.1) разрешимо для данного f , то $f \in R_A$.

Кроме того, мы получаем также, что если уравнение (1.1) разрешимо при любой правой части, то уравнение (1.4) имеет только нулевое решение.

2. Линейные алгебраические системы. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{l=1}^n a_{kl} x_l = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.1)$$

где a_{kl}, b_k — данные, x_l — искомые вещественные числа.

Введем матрицу $a = (a_{kl})_{k,l=1}^n$ и столбцы x и b , транспонированные к строкам

$$x' = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad b' = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Тогда систему (2.1) можно записать в виде

$$ax = b. \quad (2.2)$$

Рассмотрим n -мерное координатное пространство R^n , элементами которого являются столбцы. Матрице a соответствует оператор A :

$$Ax = ax.$$

Мы покажем, что для уравнения (2.2) имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Для разрешимости уравнения (2.2) при любой правой части b необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение

$$ax = \Theta \quad (2.3)$$

имело только нулевое решение.

Теорема 2. Пространства решений уравнения (2.2) и сопряженного уравнения

$$a^*x = \Theta \quad (2.4)$$

имеют одинаковые размерности. (Здесь a^* — матрица, сопряженная к a .)

Теорема 3. Для разрешимости уравнения (2.2) при заданном векторе b необходимо и достаточно, чтобы вектор b был ортогонален по всем решениям уравнения (2.4).

Для доказательства этих теорем рассмотрим область R_A значений оператора A , т. е. множество всех векторов вида ax , когда x пробегает все пространство R^n . Обозначим через

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (2.5)$$

столбцы матрицы a . Тогда ясно, что

$$ax = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Когда x пробегает все R^n , то ax пробегает всевозможные линейные комбинации столбцов (2.5). Таким образом, R_A есть пространство, натянутое на столбцы (2.5). Отсюда следует, что размерность пространства R_A равна рангу матрицы a .

Обозначим ранг матрицы a через r . Тогда ранг матрицы a^* также равен r . В силу теоремы 3 п. 1 пространство Z_{a^*} решений уравнения (2.4) ортогонально к R_A . Следовательно (см. п. I.5.8), размерность пространства Z_{a^*} равна $n - r$.

Если бы мы за исходное уравнение взяли $a^*x = b$ и учли, что $(a^*)^* = a$, то получили бы, что Z_a имеет размерность $n - r$. Таким образом, теорема 2 доказана.

На основании теоремы 3 п. 1

$$R^n = R_A \oplus Z_{a^*}$$

(см. п. I. 5.8). Это значит, что вектор b принадлежит R_A тогда и только тогда, когда он ортогонален к Z_{a^*} . Но именно в этом и состоит содержание теоремы 3. Теорема 1 есть частный случай полученных результатов при $r = n$.

3. Конечномерные операторы. Пусть по-прежнему E — евклидово пространство и P — конечномерный оператор, т. е. такой оператор, область R_P значений которого есть конечномерное пространство.

Мы покажем сейчас, что решение уравнения

$$x = Px + f \quad (3.1)$$

сводится к решению линейной алгебраической системы.

Действительно, как показано в п. III.4.1,

$$Px = \sum_{i=1}^n (x, x_i) y_i, \quad (3.2)$$

$$P^*x = \sum_{i=1}^n (x, y_i) x_i, \quad (3.3)$$

где x_i и y_i — элементы пространства E , которые можно считать линейно-независимыми.

Пусть x — решение уравнения (3.1). Положим

$$c_i = (x, x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.4)$$

Тогда из (3.1) и (3.2) следует

$$x = \sum_{i=1}^n c_i y_i + f. \quad (3.5)$$

Подставляя в (3.4), получим

$$c_i = \sum_{k=1}^n (y_k, x_i) c_k + (f, x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.6)$$

Мы получили линейную алгебраическую систему относительно c_i .

Легко непосредственно проверить, что каждое решение (c_1, c_2, \dots, c_n) системы (3.6) при подстановке в (3.5) дает решение x уравнения (3.1). Действительно, умножая (3.5) на x_i скалярно, получим

$$(x, x_i) = \sum_{k=1}^n c_k (y_k, x_i) + (f, x_i).$$

На основании (3.6) отсюда следует, что

$$(x, x_i) = c_i.$$

Подстановка этого в (3.5) дает

$$x = Px + f,$$

и мы доказали, что x , задаваемое равенством (3.5), есть решение уравнения (3.1).

4. Теоремы Фредгольма. Определение. Оператор A называется *фредгольмовским*, если он может быть представлен в виде суммы двух операторов

$$A = B + P, \quad (4.1)$$

где B имеет обратный, а P — конечномерный оператор.

Для уравнений с фредгольмовским оператором A имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Для разрешимости уравнения

$$Ax = f \quad (4.2)$$

при любой правой части $f \in E$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение

$$Ax = \theta \quad (4.3)$$

имело только нулевое решение.

Теорема 2. Пространства Z_A и Z_{A^*} решений однородного уравнения (4.3) и однородного сопряженного уравнения

$$A^*x = \theta \quad (4.4)$$

конечномерны и имеют одинаковые размерности.

Теорема 3. Для разрешимости уравнения (4.2) при заданном векторе f необходимо и достаточно, чтобы вектор f был ортогонален ко всем решениям однородного сопряженного уравнения (4.4):

$$(f, x) = 0$$

при всех $x \in Z_{A^*}$.

Эти три теоремы называются теоремами Фредгольма. Как показано в п. 2, для алгебраических систем уравнений эти теоремы справедливы. Заметим, что первая теорема является следствием второй и третьей при Z_A , состоящем только из нулевого элемента (таким пространствам мы будем приписывать размерность нуль). Поэтому доказывать мы будем теоремы 2 и 3.

Начнем доказательство теорем со случая, когда

$$A = I - P, \quad (4.5)$$

где I — единичный оператор. Тогда уравнение (4.2) имеет вид

$$x = Px + f. \quad (4.6)$$

Это есть уравнение (3.1), которое мы рассмотрели в п. 3. Будем предполагать, что оператор P имеет вид (3.2), где x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n образуют линейно-независимые системы векторов.

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (4.6), имеет вид

$$x = Px. \quad (4.7)$$

Сведем это уравнение к алгебраической системе уравнений, как это сделано в п. 3. Получим систему

$$c_i = \sum_{k=1}^n (y_k, x_i) c_k \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.8)$$

причем, как было показано в п. 3, решение уравнения (4.7) получается по формуле

$$x = \sum_{i=1}^n c_i y_i. \quad (4.9)$$

Легко проверить (предоставим это читателю), что равенства (4.9) и (3.4) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между решениями уравнений (4.7) и (4.8) такое, что размерности пространств решений этих уравнений совпадают.

Рассмотрим сопряженное однородное уравнение

$$y = P^*y. \quad (4.10)$$

Учитывая (3.3), мы можем записать это уравнение в виде

$$y = \sum_{i=1}^n (y, y_i) x_i. \quad (4.11)$$

Сведем это уравнение к алгебраической системе так же, как это сделано для уравнения (4.7). Именно, пусть y — решение уравнения (4.11). Обозначим

$$b_i = (y, y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.12)$$

Тогда

$$y = \sum_{i=1}^n b_i x_i, \quad (4.13)$$

и, подставляя это в (4.12), получим уравнения для b_i :

$$b_i = \sum_{k=1}^n (x_k, y_i) b_k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.14)$$

Равенства (4.12) и (4.13) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между решениями уравнений (4.10) и (4.14), из которого следует, что размерности пространств решений этих уравнений совпадают. Но матрица линейной системы (4.14) является транспонированной к матрице системы (4.8), так что эта система является сопряженной к системе (4.8).

На основании теоремы 2 п. 2 размерности пространств решений этих систем совпадают. Следовательно, совпадают размерности пространств решений уравнений (4.7) и (4.10). Теорема 2 для оператора (4.5) доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3 для оператора (4.5). Для этого заметим, что в силу аналогичной теоремы для линейных алгебраических уравнений (п. 2) для разрешимости системы (3.6) необходимо и достаточно, чтобы правая часть (f, x_i) была ортогональна к решениям системы (4.14):

$$\sum_{i=1}^n b_i (f, x_i) = 0 \quad (4.15)$$

для всех решений (b_1, b_2, \dots, b_n) системы (4.14). Но в силу (4.13) это можно записать

$$(f, y) = 0. \quad (4.16)$$

Таким образом, условие (4.16) необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (4.6). Для полного доказательства теоремы остается только воспользоваться указанным выше соответствием между решениями уравнений (4.14) и (4.10).

Итак, мы доказали теорему Фредгольма для оператора (4.5).

Перейдем теперь к общему случаю произвольного фредгольмовского оператора (4.1).

Запишем оператор A в виде

$$A = (I - Q)B, \quad (4.17)$$

где $Q = -PB^{-1}$. Ясно, что область значений оператора Q содержится в области значений оператора P и поэтому является конечномерным пространством. Таким образом, Q есть конечномерный оператор. Уравнение

$$Ax = f \quad (4.18)$$

на основании (4.17) можно записать в виде

$$(I - Q)Bx = f. \quad (4.19)$$

Обозначим

$$Bx = u. \quad (4.20)$$

Тогда уравнение (4.19) сведется к уравнению

$$u = Qu + f, \quad (4.21)$$

т. е. к уравнению вида (4.6), для которого теорема Фредгольма уже доказана.

Далее, на основании (4.17)

$$A^* = B^*(I - Q^*).$$

Однородное уравнение

$$A^*y = \theta \quad (4.22)$$

имеет вид

$$B^*(I - Q^*)y = \theta. \quad (4.23)$$

Так как оператор B имеет обратный, то и оператор B^* имеет обратный (см. п. III.3.3). Следовательно, из (4.23) получаем, умножая это равенство слева на $(B^*)^{-1}$:

$$y = Q^*y. \quad (4.24)$$

Это уравнение является однородным сопряженным к (4.21). Пространство решений уравнения (4.22), очевидно, совпадает с пространством решений уравнения (4.24).

Далее, в силу обратимости оператора B уравнение (4.19) разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение (4.21). Для разрешимости же уравнения (4.21) необходима и достаточна ортогональность правой части f к пространству решений уравнения (4.24) и, следовательно, (4.22). Таким образом, мы доказали третью теорему Фредгольма для оператора A .

Чтобы доказать вторую теорему, заметим, что однородное уравнение

$$Ax = \Theta \quad (4.25)$$

при замене (4.20) переходит в уравнение

$$u = Qu \quad (4.26)$$

и ввиду обратимости оператора B уравнения (4.25) и (4.26) имеют пространства решений одинаковой размерности. Чтобы это доказать, достаточно заметить, что если x_1, x_2, \dots, x_n есть базис пространства решений уравнения (4.25), то векторы $u_i = Bx_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) образуют базис пространства решений уравнения (4.26). Таким образом, размерности пространств решений уравнений (4.25) и (4.22) совпадают, так как они совпадают с размерностями пространств решений уравнений (4.26) и (4.24). Тем самым вторая теорема Фредгольма доказана.

Итак, мы доказали справедливость теорем Фредгольма для произвольных фредгольмовских операторов.

§ 8. УРАВНЕНИЯ С ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Мы докажем, что если T — вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, то $I - T$ является фредгольмовским оператором, и, следовательно, для уравнения

$$x = Tx + f$$

справедливы теоремы Фредгольма.

Сначала мы покажем, что это имеет место для операторов, близких к конечномерным.

1. Операторы, близкие к конечномерным. Теорема. Пусть K — линейный ограниченный оператор, действующий в евклидовом пространстве E . Если существует конечномерный оператор P , действующий в E , такой, что

$$\|K - P\| < 1, \quad (1.1)$$

то оператор $I - K$ является фредгольмовским.

Доказательство. Обозначим $K - P = R$, $I - R = B$, так что

$$\|R\| < 1 \quad (1.2)$$

и

$$I - K = B - P.$$

Для доказательства теоремы достаточно доказать, что оператор B имеет обратный. Но уравнение $Bx = f$ можно записать в виде

$$x = Rx + f.$$

В силу (1.1) это уравнение однозначно разрешимо при любой правой части f на основании принципа сжатых отображений (см. п. III.6.4). Теорема доказана.

2. Вполне непрерывные операторы. Мы покажем сейчас, что вполне непрерывные операторы являются операторами, близкими к конечномерным. Точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть T — вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве E . Тогда существует последовательность конечномерных операторов P_n ($n = 1, 2, \dots$), действующих в E , такая, что

$$\|P_n - T\| \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

Доказательство. Оператор T^*T есть самосопряженный вполне непрерывный оператор, действующий в E . Согласно теореме 2 п. III.5.3 существует ортонормированная последовательность $\{e_i\}$ элементов пространства E такая, что каждый элемент $x \in E$ может быть представлен в виде

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i + z, \quad (2.2)$$

причем

$$T^*T e_i = \lambda_i e_i \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (2.3)$$

где λ_i — вещественные числа, $\lambda_i \neq 0$ и

$$T^*T z = \Theta. \quad (2.4)$$

Из равенства (2.3) получаем

$$\lambda_i = (e_i, T^*T e_i) = \|T e_i\|^2 > 0. \quad (2.5)$$

Из (2.4) следует, что

$$T z = \Theta. \quad (2.6)$$

Действительно, $\|T z\|^2 = (z, T^*T z) = 0$.

Равенство (2.2) с учетом (2.6) дает

$$T x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i T e_i. \quad (2.7)$$

Обозначим $f_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} T e_i$. Последовательность $\{f_i\}$ ортонормирована. Действительно, при $i \neq k$ имеем в силу (2.3)

$$(f_i, f_k) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_k}} (T e_i, T e_k) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_k}} (e_i, T^*T e_k) = \frac{\lambda_k}{\sqrt{\lambda_i \lambda_k}} (e_i, e_k) = 0.$$

Далее, из (2.5) получаем

$$\|f_i\|^2 = \frac{1}{\lambda_i} \|T e_i\|^2 = 1.$$

Рассмотрим конечномерные операторы:

$$K_n y = \sum_{i=1}^n (y, f_i) f_i \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$P_n x = K_n T x \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Покажем, что имеет место равенство (2.1). Предположим, что это не так. Тогда существует такое число ε , что

$$\|P_n - T\| > \varepsilon \quad (2.8)$$

при бесконечном множестве значений n .

Так как

$$\|P_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|(P_n - T)x\|,$$

то для каждого из этих n существует такой вектор $x : \|x\| = 1$, что

$$\|(P_n - T)x_n\| > \varepsilon. \quad (2.9)$$

Воспользуемся полной непрерывностью оператора T . Существует такая последовательность x_{n_i} , что

$$Tx_{n_i} \rightarrow y. \quad (2.10)$$

Имеем

$$\|(P_n - T)x_n\| = \|(K_n - E)Tx_n\| \leq \| (K_n - E)(Tx_n - y) \| + \| K_n y - y \|. \quad (2.11)$$

Заметим, что $K_n y$ есть первые n членов разложения в ряд Фурье по ортонормированной последовательности $\{f_i\}$. Обозначим через Y подпространство в X , которое является замыканием линейной оболочки векторов $\{f_i\}$. В силу равенства (2.7) вектор Tx принадлежит Y . А так как Y замкнуто, то этому подпространству принадлежит также элемент y , входящий в (2.10). В силу сходимости рядов Фурье имеем

$$\|K_n y - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.12)$$

Кроме того, на основании равенства Парсеваля можно записать

$$\|(K_n - E)(Tx_n - y)\| \leq \|Tx_n - y\|.$$

Подставив это в (2.11) и воспользовавшись (2.10) и (2.12), получим

$$\|(P_{n_i} - T)x_{n_i}\| \rightarrow 0,$$

но это противоречит неравенству (2.9). Итак, предположение, что (2.1) не имеет места, привело к противоречию.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть T — вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве E . Тогда для уравнения

$$x = Tx + f \quad (x \in E, f \in E)$$

имеют место теоремы Фредгольма.

Доказательство. На основании теоремы 1 существует такое число n , что

$$\|P_n - T\| < 1.$$

Следовательно, T удовлетворяет условию теоремы п. 1 и $I - T$ является фредгольмовским оператором. Теорема доказана.

Глава VIII. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Постановка граничных (краевых) задач. Наряду с эллиптическими уравнениями важный класс уравнений математической физики составляют уравнения параболического типа, к которым относится, в частности, уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad (1.1)$$

где Δ — оператор Лапласа в евклидовом пространстве R^n переменных x_1, \dots, x_n . Такие уравнения появляются при описании многих нестационарных процессов (теплопередачи, диффузии и т. д.). При этом переменная t означает время, x_1, \dots, x_n — пространственные координаты. Уравнение (1.1) можно трактовать как вырождающееся эллиптическое уравнение в пространстве R^{n+1} переменных t, x_1, \dots, x_n (коэффициенты при производных $\partial^2 u / \partial t^2$, $\partial^2 u / \partial x_i \partial t$ равны нулю). Однако без развитой теории вырождающихся эллиптических уравнений такая трактовка мало содержательна, и параболические уравнения требуют специального изучения. Общее линейное уравнение параболического типа, разрешенное относительно производной $\partial u / \partial t$, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f, \quad (1.2)$$

где L есть эллиптический оператор при каждом фиксированном t (см. п. VII.1.1). Мы ограничимся рассмотрением случая

$$Lu \equiv - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + cu, \quad (1.3)$$

где в общем случае $a_{ij} = a_{ij}(t, x)$ ($a_{ij} = a_{ji}$), $c = c(t, x)$.

Пусть $G \in R^n$ — ограниченное открытое множество с конечным периметром, S — его существенная граница. В пространстве переменных $x \in R^n$, $t \in R'$ будем рассматривать цилиндрические области

$$Q_\tau^T = \{(t, x), \tau < t < T, x \in G\}. \quad (1.4)$$

Будем предполагать $T < \infty$ и для случая $\tau = 0$ писать Q^T вместо Q_0^T . Пусть пока коэффициенты $c(t, x)$, $a_{ij}(t, x)$ ($i, j = 1, \dots, n$) — достаточно гладкие функции, заданные в области Q^T . Точные условия будут сформулированы ниже.

Известно, что без дополнительных ограничений искомая функция $u(t, x)$ из уравнения (1.2) определяется неоднозначно. Например, при $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $c = c(x)$, $f = f(x)$ любое решение эллиптического уравнения $Lu = f$ оказывается решением уравнения (1.2). Это подсказывает, что в полном соответствии с эллиптическими уравнениями можно задавать дополнительные *граничные условия*.

Будем считать, что граница S области G разбита на непересекающиеся измеримые по мере H_{n-1} множества S_1 и S_2 :

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

и что граничные условия имеют следующий вид:

$$u = g_1 \quad (x \in S_1, 0 < t < T), \quad (1.5)$$

$$D_\nu u + hu = g_2 \quad (x \in S_2, 0 < t < T). \quad (1.6)$$

Здесь g_1 , g_2 и h — заданные функции t и x ,

$$D_\nu u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad (x \in S_2, 0 < t < T),$$

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к S .

В частности, одно из множеств S_1 или S_2 может быть пустым. Тогда другое совпадает с S . При $S_1 = S$ говорят о граничном условии *первого рода* или о первой краевой задаче. При $S_2 = S$ говорят о краевом условии *третьего рода* или о третьей краевой задаче. В частном случае ($S_2 = S$, $h \equiv 0$) говорят об условии *второго рода* или о второй краевой задаче. Смешанные условия (1.5), (1.6) имеют, таким образом, наиболее общий характер. Их мы и будем рассматривать.

Оказывается, граничных условий (1.5), (1.6) еще недостаточно для однозначного определения $u(t, x)$. Так, например, в случае $c = c(t)$, $f = f(t)$ и граничном условии второго рода ($D_\nu u = 0$, $x \in S$) любое решение обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{u} + cu = f$ удовлетворяет уравнению (1.2) и заданному граничному условию. Это подсказывает, что как и для обыкновенных уравнений можно задавать дополнительное *начальное условие*, в общем случае зависящее от x :

$$u = u_0(x) \quad (x \in G, t = 0). \quad (1.7)$$

Не следует, однако, думать, что, как и обыкновенные уравнения, параболическое уравнение при любом начальном условии вида (1.7) можно решать в области $t < 0$. Если обыкновенное уравнение в окрестности

$t = 0$ не меняет свойств при замене t на $-t$, то такая замена, скажем, в уравнении (1.1), приводит к уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0$, не являющемуся параболическим. Таким образом, нарушается основное свойство уравнения и это приводит к некорректности задачи. Глубокий физический смысл сказанного состоит в том, что параболические уравнения описывают *необратимые процессы*: по состоянию в данный момент времени можно предсказать будущее, но, вообще говоря, нельзя узнать предысторию процесса.

Сказанное означает, что если мы хотим найти решение уравнения (1.2) в области $Q^T = (T > 0)$, то начальное условие следует задавать при $t = 0$ и, вообще говоря, нельзя задавать при $t = T$ или каком-нибудь промежуточном значении t .

Главная задача излагаемой ниже теории параболических уравнений — показать корректность задания условий (1.5)—(1.7), т. е. показать, что при некоторых ограничениях на заданные функции уравнение (1.2) при условиях (1.5)—(1.7) имеет единственное решение. При этом, как и в случае эллиптических уравнений, мы развиваем концепцию *обобщенного решения*, что не только позволяет ставить граничные задачи при весьма слабых ограничениях на область G и заданные функции, но и существенно упрощает их исследование и построение решения, избавляя от необходимости доказывать излишнюю гладкость решений.

Трудный вопрос о гладкости решений на этом пути отделяется от вопросов о разрешимости и единственности и, когда это необходимо, может быть исследован самостоятельно. Разумеется, когда задача имеет гладкое решение, оно же и будет обобщенным решением.

2. Основные пространства функций. Обобщенное решение. Для произвольных достаточно гладких функций u и φ в области Q^T почленное интегрирование по области G (при фиксированном t) выражения $\varphi \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right)$ с применением формулы Грина (п. V.1.4) приводит к равенству

$$\int_G \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) dx = \int_G \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c u \varphi \right) dx - \int_S \varphi^+ (D_\nu u)^+ dH_{n-1}. \quad (2.1)$$

Если u удовлетворяет уравнению (1.2) и условию (1.6), а φ обращается в нуль на S_1 : $\varphi^+|_{S_1} = 0$, $0 < t < T$, то, интегрируя (2.1) по t , имеем

$$\{u, \varphi\}_\tau^T = \int_\tau^T \int_G f \varphi dx dt + \int_\tau^T \int_{S_2} g_2 \varphi^+ dH_{n-1} dt \quad (0 < \tau < T). \quad (2.2)$$

Здесь и ниже $\{u, \varphi\}_{t_1}^{t_2}$ обозначает билинейный функционал (ср. с функционалом F гл. VII):

$$\begin{aligned} \{u, \varphi\}_{t_1}^{t_2} = & \iint_{t_1}^{t_2} \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c u \varphi \right) dx + \\ & + \iint_{t_1}^{t_2} h u^+ \varphi^+ dH_{n-1} dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Как и в случае эллиптических уравнений, можно показать обратное: достаточно гладкая функция $u(t, x)$, удовлетворяющая соотноше-

нию (2.2) при любой функции $\varphi(t, x)$ ($\varphi^+|_{S_1} = 0$) и любом $\tau > 0$, удовлетворяет уравнению (1.2) и граничному условию (1.6). При этом, естественно, приходится использовать непрерывность функций Lu, f в области Q^T и функций h, g_2, u^+ и $(D, u)^+$ при $x \in S_2, 0 < t < T$, что совершенно не обязательно для соотношения (2.2). Соотношение (2.2), таким образом, можно рассматривать как уравнение (при произвольных $\tau > 0$ и $\varphi, \varphi^+|_{S_1} = 0$) для определения функции $u(t, x)$, обобщающее уравнение (1.2) и граничное условие (1.6). Удобство этого уравнения состоит в том, что оно не предполагает гладкости коэффициентов a_{ij}, c и других известных функций, может выполняться для менее гладких функций $u(t, x)$, чем того требует уравнение (1.2), и не требует поточечного выполнения условия (1.6). Тем самым соотношение (2.2) можно рассматривать для областей G весьма сложной геометрической формы (с одним лишь условием, что это открытое ограниченное множество с конечным периметром), когда трудно придать какой-либо смысл выражению D, u . Нужно отметить, что на практике нередко встречаются как негладкая граница, так и разрывные функции f, h, u_0, g_1, g_2 и даже разрывные коэффициенты a_{ij} и c . Так что обобщение (2.2) уравнения (1.2) и граничного условия (1.6) имеет не только теоретическое значение, но и отвечает потребностям практики.

Функцию $u(t, x)$, обращающую соотношение (2.2) в тождество по $\varphi(\varphi^+|_{S_1} = 0)$, мы будем называть обобщенным решением уравнения (1.2), удовлетворяющим условию (1.6). Точные определения дадим ниже, после того как будут введены необходимые для этого функциональные пространства.

Напомним (п. V.3.2), что $BV^2(G)$ обозначает пространство функций $u(x)$, суммируемых в квадрате вместе с первыми производными в области G и имеющих суммируемый в квадрате след на границе S . Пространство E есть подпространство пространства $BV^2(G)$, состоящее из функций с нулевым следом на множестве $S_1 \supset S$. Нам понадобятся аналогичные пространства функций, определенных в области Q_τ^T (см. (1.4)).

$BV^2(Q_\tau^T)$ есть пространство функций $u(t, x)$, суммируемых в квадрате в области Q_τ^T вместе с первыми производными по t и x и имеющих суммируемый в квадрате след на всей существенной границе области Q_τ^T .

E_τ^T есть подпространство пространства $BV^2(Q_\tau^T)$, состоящее из функций с нулевым следом на той части границы Q_τ^T , где $x \in S_1, \tau \leq t \leq T$.

Через B^T обозначим пространство функций, заданных в области Q^T и принадлежащих $BV^2(Q_\tau^T)$ при любом $\tau > 0$ ($\tau < T$).

Через E^T обозначим пространство функций, заданных в области Q^T и принадлежащих E_τ^T при каждом $\tau > 0$ ($\tau < T$).

Очевидно, E^T есть подпространство пространства B^T .

Пространства B^T и E^T — основные функциональные пространства, которые нам понадобятся. Эти пространства не являются нормированными. Сходимость в них означает по определению сходимость в каждом $BV^2(Q_\tau^T)$ (E_τ^T). Заметим, что с уменьшением T эти пространства расширяются в том смысле, что $u(t, x) \in B^s$ (E^s) при любом $s < T$, если $u(t, x) \in B^T$ (E^T). Элементы $BV^2(Q^T)$ содержатся в B^T , но B^T существенно шире. Например, $u(t, x) \equiv t^{-\alpha}, \alpha > 0$, не принадлежит $BV^2(Q^T)$ ($u_\tau^2 = \alpha^2 t^{-2(1+\alpha)}$ не суммируема в Q^T), но принадлежит, очевидно, B^T .

Функция $u(t, x) \in B^T$ (E^T) не имеет скачков в области Q^T (множество точек скачка имеет нулевую n -мерную меру в Q^T), поэтому ее предельные значения сверху и снизу на любой плоскости $t = t_0 > 0$

совпадают при почти всех $x \in G$. Это позволяет считать, что $u(t, x)$ определена при каждом t , $0 < t < T$, и как функция x принадлежит пространству $L^2(G)$. Этим обстоятельством мы в дальнейшем будем пользоваться.

О п р е д е л е н и е 1. Мы будем говорить, что функция $u_0(x) \in L^2(G)$ является следом функции $u(t, x) \in B^T(E^T)$ при $t = 0$, и писать

$$u^+|_{t=0} = u_0,$$

если

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_G (u(t, x) - u_0(x))^2 dx = 0. \quad (2.4)$$

Мы видели, что не каждая функция $u \in B^T$ имеет след при $t = 0$. Однако класс функций, имеющих такой след, вообще говоря, шире, чем $BV^2(Q^T)$.

Обратимся теперь к нашей задаче и сформулируем основные ограничения.

Как уже говорилось, область $G \in R^n$ есть ограниченное открытое множество с конечным периметром. Таковым, очевидно, будут и области $Q^T \subset R^{n+1}$. Удобно ввести обозначения.

$$\Sigma_1 = \{(t, x), x \in S_1, 0 < t < T\}, \quad \Sigma_2 = \{(t, x), x \in S_2, 0 < t < T\}, \quad (2.5)$$

так что $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ есть боковая поверхность цилиндра Q^T .

Коэффициенты a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) и c суть ограниченные измеримые функции в области $Q^T = (a_{ij} = a_{ij}(x))$; h — ограниченная измеримая (по мере H_n) функция на Σ_2 . В настоящем параграфе мы используем условие параболичности уравнения (1.2) в следующей форме:

$$\iint_{t_1}^{t_2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{S_2} h(u^+)^2 dH_{n-1} dt \geq -\beta \int_{t_1}^{t_2} \int_G u^2 dx dt \quad (2.6)$$

для некоторой постоянной $\beta \geq 0$ при любых $t_2 > t_1 > 0$ ($t_2 < T$) и любой $u \in E^T$.

Условие (2.6), очевидно, выполняется при $\beta = 0$, если

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq 0$$

при любых $(t, x) \in Q^T$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, и, кроме того, либо $S_2 = \emptyset$, либо $h(t, x) \geq 0$ при $(t, x) \in \Sigma_2$ (см (2.5)).

Относительно функций f , u_0 , g_1 , g_2 (см. (1.2), (1.5)–(1.7)) мы предполагаем следующее:

$$f \in L^2(Q^T), \quad u_0 \in L^2(G), \quad g_1 \in L^2(\Sigma_1), \quad g_2 \in L^2(\Sigma_2). \quad (2.7)$$

При ограниченных a_{ij} , c , h и выполнении (2.7) каждый из интегралов в (2.2), (2.3) имеет смысл для любых $u \in B^T$, $\varphi \in E^T$.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $u(t, x) \in B^T$ называется обобщенным решением уравнения (1.2) в области Q^T , удовлетворяющим условию (1.6), если для любой функции $\varphi \in E^T$ выполняется (2.2).

Иногда такую функцию $u(t, x)$ мы будем называть решением уравнения (2.2).

О п р е д е л е н и е 3. Решение уравнения (2.2), удовлетворяющее условиям

$$u^+|_{\Sigma_1} = g_1, \quad u^+|_{t=0} = u_0, \quad (2.8)$$

называется обобщенным решением граничной задачи (1.2), (1.5)–(1.7).

Это определение предполагает наличие следа функции $u(t, x)$ при $t = 0$ в смысле определения 1 и выполнение начального условия (1.7) в смысле равенства (2.4).

При $g_1 = 0$ условия $u \in B^T$, $u^+|_{S_1} = 0$ можно заменить одним требованием $u \in E^T$.

Если заданные функции a_{ij} , c , h , f , g_1 , g_2 не зависят от t , то не зависящее от t решение $u(x)$ уравнения (2.2), удовлетворяющее условию $u^+|_{S_1} = g_1$, оказывается обобщенным решением в смысле п. VII.2.1 граничной задачи

$$u|_{S_1} = g_1, (D_v u + hu)|_{S_2} = g_2$$

для эллиптического уравнения

$$Lu + cu = f.$$

Таким образом, понятие обобщенного решения граничной задачи для параболического уравнения является обобщением соответствующего понятия для эллиптического уравнения.

Задачей Б (или $B(u_0, f, g_1, g_2)$) будем для краткости называть граничную задачу (1.5)–(1.7) для уравнения (1.2) при выполнении условий (2.6), (2.7). Обобщенное решение последней будем называть решением задачи B .

В частном случае однородных граничных условий ($g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$) будем говорить о задаче B_0 (или $B_0(u_0, f)$).

3. Интегральная оценка. Единственность. Теорема. *Решение $u(t, x)$ задачи B_0 удовлетворяет неравенству*

$$\int_G u^2(t, x) dx \leq \left[\int_G u_0^2(x) dx + \int_0^t e^{-k\tau} \int_G f^2(\tau, x) dx d\tau \right] e^{kt}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

$$k = 1 + 2\beta - 2 \inf_{Q^T} c(t, x). \quad (3.2)$$

Доказательство. Поскольку $g_1 = 0$, то $u \in E^T$ и в (2.2) можно подставить $\varphi = u$. Учитывая (2.6), обозначение (3.2) и соотношения

$$\int_G f u dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_G f^2 dx + \int_G u^2 dx \right),$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_G u \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \int_G u^2 dx dt = \frac{1}{2} \left[\int_G u^2(t_2, x) dx - \int_G u^2(t_1, x) dx \right],$$

из выражения (см. (2.2) при $g_2 = 0$)

$$\{u, u\}_{t_1}^{t_2} = \{u, u\}_{t_1}^T - \{u, u\}_{t_2}^T = \int_{t_1}^{t_2} \int_G u f dx dt$$

получим неравенство

$$z(t_2) - z(t_1) \leq k \int_{t_1}^{t_2} z(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_G f^2(t, x) dx dt, \quad z(t) = \int_G u^2(t, x) dx.$$

Ввиду произвольности $t_1 < t_2$ с учетом начального условия для $u(t, x)$ для $z(t)$ имеем

$$\dot{z} \leq kz + \int_G f^2(t, x) dx, \quad z(0) = \int_G u_0^2(x) dx.$$

В силу оценки (VI.1.3.4) имеем (3.1).

Следствие. *Решение задачи Б единственно.* Действительно, из (2.2), (2.8) следует, что разность двух решений задачи $B = B(u_0, f, g_1, g_2)$ есть решение однородной задачи B (т. е. при $u_0 = 0$, $f = 0$, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$) и, значит, задачи B_0 при $u_0 = 0$, $f = 0$, которое

согласно (3.1) равно нулю почти всюду в Q^T . Это и означает, что не может быть двух различных решений задачи B .

Из неравенства (3.1) вытекает также *непрерывная зависимость* решения задачи B от начальной функции u_0 и правой части f в метрике пространства L^2 .

4. Положительность решений. Аналогично эллиптическим уравнениям граничная задача для параболических уравнений обладает свойством положительности, особенно важным при изучении нелинейных уравнений.

Теорема. Пусть выполнено условие (2.6) и функция $u(t, x) \in B^T$ такова, что при любой неотрицательной функции $\varphi(t, x) \in E^T$

$$\{u, \varphi\}_\tau^T \geq 0, \quad 0 < \tau < T \quad (\text{см. (2.3)}). \quad (4.1)$$

Пусть, кроме того,

$$u^+|_{\Sigma_1} \geq 0, \quad (4.2)$$

и по некоторой последовательности $t_m \rightarrow 0$

$$\lim_{t_m \rightarrow 0} \int_G (u(t_m, x) - |u(t_m, x)|)^2 dx = 0. \quad (4.3)$$

Тогда $u(t, x) \geq 0$ почти всюду в области Q^T .

Доказательство. Рассмотрим сначала тот случай, когда

$$\inf_{Q^T} c(t, x) > \beta, \quad (4.4)$$

и, вопреки утверждению теоремы, предположим, что $u(t, x) < 0$ на множестве Q положительной меры в области Q^T . Положим

$$u_+ = \frac{1}{2}(u + |u|), \quad u_- = \frac{1}{2}(|u| - u).$$

Очевидно, $u_+ \cdot u_- \equiv 0$, $u_- \geq 0$ и $u_- > 0$ на множестве Q . При этом u_+ , $u_- \in B^T$ вместе с $u = u_+ - u_-$ и в силу условия (4.2) $u_- \in E^T$. Поэтому (4.1) имеет место при $\varphi = u_-$. С учетом равенства

$$\{u_+, u_-\}_\tau^T = \{u_-, u_+\}_\tau^T = 0$$

(см. п. VII.6.1) и условия (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \{u, u_-\}_\tau^T &= -\{u_-, u_-\}_\tau^T \leq -\int_\tau^T \int_G u_- \frac{\partial u_-}{\partial t} dx dt - \int_\tau^T \int_G (c - \beta) u_-^2 dx dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_G u_-^2(\tau, x) dx - \frac{1}{2} \int_G u_-^2(T, x) dx - \int_\tau^T \int_G (c - \beta) u_-^2 dx dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_G u_-^2(\tau, x) dx - \int_\tau^T \int_G (c - \beta) u_-^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Согласно (4.3) первый интеграл стремится к нулю при $\tau = t_m \rightarrow 0$, поэтому согласно (4.4) и предположению относительно u правая часть (4.5) отрицательна при достаточно малых $\tau = t_m$, что противоречит условию (4.1). Таким образом, в предположении (4.4) теорема доказана.

Общий случай сводится к уже доказанному. В самом деле, в силу ограниченности $c(t, x)$ всегда можно указать постоянную $\alpha > 0$ такую, что (4.4) выполняется для функции $c'(t, x) = \alpha + c(t, x)$. Для функции

$$v(t, x) = u(t, x) \exp(-\alpha t), \quad (4.6)$$

очевидно, выполнены условия (4.2), (4.3). Кроме того, для $\varphi \in E^T$, $\varphi \geq 0$

$$\iint_{\tau \bar{G}}^T \left(\varphi \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{ij=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c' v \varphi \right) dx dt + \iint_{\tau \bar{S}_2}^T h v^+ \varphi^+ dH_{n-1} dt = \\ = \{u, \varphi \exp(-\alpha t)\}_{\tau}^T \geq 0$$

в силу условия (4.1) для $u(t, x)$. Таким образом, для функции $v(t, x)$ выполнены все условия теоремы плюс условие (4.4) для нового коэффициента $c'(t, x)$. По доказанному $v(t, x) \geq 0$ почти всюду в области Q_T . Согласно (4.6) это же имеет место и для $u(t, x)$. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекают важные следствия, касающиеся решения задачи Б.

С л е д с т в и е 1. (теорема о положительности). При $u_0 \geq 0, f \geq 0, g_1 \geq 0, g_2 \geq 0$ решение задачи Б (u_0, f, g_1, g_2) неотрицательно почти всюду в области Q^T .

В самом деле, решение $u(t, x)$ удовлетворяет условию (4.1) в силу равенства (2.2). Условие (4.1) вытекает из первого условия (2.8). Кроме того, в силу $u_0(x) \geq 0$ и для $u(t, x)$, и для $|u(t, x)|$ имеет место (2.4). Отсюда, очевидно, следует условие (4.3), так что по теореме $u(t, x) \geq 0$ почти всюду в области Q^T .

В силу линейности уравнения и граничных условий это же свойство решения можно сформулировать, очевидно, в виде следующего принципа монотонности.

Увеличение (уменьшение) хотя бы одной из функций u_0, f, g_1, g_2 приводит к увеличению (уменьшению) решения задачи Б.

С л е д с т в и е 2 (теорема единственности). Решение задачи Б единственно.

Если допустить, что существует более одного решения задачи Б, то разности $u_1 - u_2$ и $u_2 - u_1$ любых двух решений u_1, u_2 являются, очевидно, решениями задачи Б при $u_0 = 0, f = 0, g_1 = 0, g_2 = 0$. Согласно следствию 1 почти всюду должны выполняться оба неравенства

$$u_1 - u_2 \geq 0, u_2 - u_1 \geq 0,$$

откуда следует $u_1 = u_2$ почти всюду. Мы имеем, таким образом, другое доказательство теоремы единственности (ср. п. 3). Важнее, однако, то, что можно получить другую оценку решения.

С л е д с т в и е 3 (теорема об ограниченности). Пусть $c(t, x) \geq 0$ и существуют константы $a > 0, b > 0$ такие, что

$$|f(t, x)| \leq b, |u_0(x)| \leq a, |g_1(t, x)| \leq a$$

и либо $h(t, x) \leq 0, g_2(t, x) \equiv 0$, либо $h(t, x) > 0$ и $|g_2/h| \leq a$.

Тогда решение $u(t, x)$ задачи Б (u_0, f, g_1, g_2) ограничено и почти всюду в области Q^T имеет место оценка

$$|u(t, x)| \leq a + bt. \quad (4.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим для краткости $\bar{u}(t) = a + bt$ и рассмотрим функцию $v(t, x) = \bar{u}(t) \pm u(t, x)$. Очевидно, $v(t, x)$ удовлетворяет условиям (4.2), (4.3). Далее

$$\{\bar{u}, \varphi\}_{\tau}^T = \iint_{\tau \bar{G}}^T \left(\frac{d\bar{u}}{dt} + c\bar{u} \right) \varphi dx dt + \iint_{\tau \bar{S}_2}^T h\bar{u} \cdot \varphi^+ dH_{n-1} dt.$$

Так как по предположению

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + c\bar{u} \geq b \geq \pm f(t, x), \quad h\bar{u} \geq ha \geq \pm g_2(t, x),$$

го с учетом равенства (2.2) для $u(t, x)$ при $\varphi \geq 0$ имеем

$$\{\bar{u}, \varphi\}_\tau^T \geq \pm \left(\iint_{\tau}^T f \varphi dx dt + \iint_{\tau}^T g_2 \varphi^+ dH_{n-1} dt \right) = \pm \{u, \varphi\}_\tau^T.$$

Отсюда для функции $v(t, x)$ следует условие (4.1). Согласно теореме $v(t, x) = \bar{u}(t) \pm u(t, x) \geq 0$ почти всюду в Q^T . Следовательно, почти всюду в Q^T : $-\bar{u}(t) < u(t, x) \leq \bar{u}(t)$, что равносильно (4.7).

Предположение $c \geq 0$ несущественно. Ограниченность и оценку решения можно получить и без этого предположения, но в дальнейшем нам это не понадобится.

§ 2. РАЗРЕШИМОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

1. **Метод Фурье.** Для простоты ограничимся построением решения задачи B_0 , т. е. граничные условия (1.1.5), (1.1.6) считаем однородными ($g_1 \equiv 0, g_2 \equiv 0$). По этому поводу заметим, что если имеется решение какой-либо задачи $B(u_0^*, f^*, g_1, g_2)$, то решение произвольной задачи $B(u_0, f, g_1, g_2)$ сводится к решению задачи $B_0(u_0 - u_0^*, f - f^*)$.

Далее, коэффициенты a_{ij}, c, h считаем *не зависящими от t* , а граничная задача в области G (задача A п. VII.2.2) вида

$$Lu = \psi(x), \quad u|_{S_1} = 0, \quad (D_\nu u + hu)|_{S_2} = 0 \quad (1.1)$$

предполагается *сильноэллиптической*. По определению (п. VII.2.3) это означает, что при некоторых $\alpha > 0, \beta > 0$ и произвольной $u \in E$ $u \in BV^2(G), u^+|_{S_1} = 0$ имеет место неравенство

$$F_0(u, u) = \int_G \sum_{ij=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_{S_2} h(u^+)^2 dH_{n-1} \geq \alpha \| \| u \| \|^2 - \beta \| u \|^2. \quad (1.2)$$

Здесь $\| \| u \| \|$ — норма в $BV^2(G)$; $\| u \|$ — норма в $L^2(G)$. Отметим (п. VII.2.3), что без предположения о регулярности границы задача (1.1) *сильноэллиптическая*, если

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (\mu > 0), \quad (1.3)$$

при любых $x \in G$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, и, кроме того, либо $S_2 = \emptyset$ (первая краевая задача), либо $h(x) \geq \varrho > 0$ при $x \in S_2$.

Очевидно, из (1.2) следует условие (1.2.6), так как функция $u(t, x) \in E^T$ при почти всех t принадлежит пространству E . Поэтому единственность решения задачи B_0 (см. п. 1.3) сохраняется при замене (1.2.6) на (1.2).

Построим прежде всего решение задачи $B_0(u_0, 0)$ ($f^- = 0$). Итак, при выполнении (1.2) требуется найти функцию $u(t, x) \in E^T$ такую, чтобы при любом $\tau > 0$ ($\tau < T$) и любой функции $\varphi(t, x) \in E^T$

$$\begin{aligned} \{u, \varphi\}_\tau^T \equiv & \iint_{\tau}^T \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + cu\varphi \right) dx dt + \\ & + \iint_{\tau}^T hu^+ \varphi^+ dH_{n-1} dt = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

и чтобы в смысле (1.2.4)

$$u^+|_{t=0} = u_0 \in L^2(G). \quad (1.5)$$

Такая функция $u(t, x)$ может быть построена *методом разделения переменных* (метод Фурье).

Пусть $v_k(x)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ_k , следующей граничной задачи в области G :

$$Lv = \lambda v, \quad v|_{S_1} = 0, \quad (D, v + hv)|_{S_2} = 0. \quad (1.6)$$

В п. VII.3.4 в предположении сильной эллиптичности задачи (1.1) показано наличие полной ортогональной (как в E_A , так и в $L^2(G)$) системы собственных функций v_0, v_1, \dots задачи (1.6), отвечающих собственным значениям $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ($\lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$), так что лишь конечное число собственных значений может быть отрицательным. Ввиду соотношений (п. VII.3.1)

$$\begin{aligned} F(v_k, \varphi) \equiv & \int_G \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c v_k \varphi \right) dx + \\ & + \int_{S_2} h v_k^+ \varphi^+ dH_{n-1} = \lambda_k \int_G v_k \varphi dx \end{aligned} \quad (1.7)$$

при любом $k \geq 1$ и любой функции $\varphi \in E$ (напомним, что пространства E и E_A состоят из одного и того же запаса функций из $BV^2(G)$, имеющих нулевой след на S_1 , и нормы в этих пространствах эквивалентны (п. VII.2.4)). Читатель легко убедится, что любая функция вида $v_k(x) \exp(-\lambda_k t)$ принадлежит E^T и удовлетворяет уравнению (1.4). Этим же свойством обладает любая линейная комбинация

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^m c_k v_k(x) \exp(-\lambda_k t).$$

При этом $u^+|_{t=0} = \sum_{k=0}^m c_k v_k(x)$. Для произвольной начальной функции $u_0 \in L^2(G)$ следует воспользоваться ее разложением в ряд Фурье

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_k(x). \quad (1.8)$$

Тогда ввиду (1.7), (1.8) соотношениям (1.4), (1.5) формально удовлетворяет ряд

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_k(x) \exp(-\lambda_k t). \quad (1.9)$$

Чтобы завершить построение решения задачи (1.4), (1.5), остается показать, что ряд (1.9) сходится в пространстве E^T и что $u(t, x) \rightarrow u_0(x)$ в $L^2(G)$ при $t \rightarrow 0$.

Пусть функции $v_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) нормированы в $L^2(G)$, т. е.

$$\int_G v_k^2(x) dx = 1 \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (1.10)$$

Тогда для коэффициентов c_k в (1.8), (1.9) имеют место (п. VII.3.4)

$$c_k = \int_G u_0(x) v_k(x) dx \quad (k = 0, 1, \dots), \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \int_G u_0^2(x) dx. \quad (1.11)$$

Прежде всего заметим, что ввиду оценки $\exp(-\lambda_k t) \leq 1$ при $t \geq 0$ и всех достаточно больших k ($\lambda_k > 0$) и сходимости ряда (1.11) ряд (1.9) сходится в $L^2(G)$. Далее, в силу равенства Парсеваля (п. VII.3.4)

$$\int_G (u(t, x) - u_0(x))^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 [1 - \exp(-\lambda_k t)]^2. \quad (1.12)$$

Для произвольно малого $\varepsilon > 0$ можно указать k_ε такое, что

$$\sum_{k=k_\varepsilon}^{\infty} c_k^2 [1 - \exp(-\lambda_k t)]^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad (0 \leq t \leq T).$$

После этого выберем $t_\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось

$$\sum_{k=1}^{k_\varepsilon-1} c_k^2 [1 - \exp(-\lambda_k t)]^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad (0 \leq t \leq t_\varepsilon).$$

Ввиду произвольности ε из этих неравенств следует, что левая часть (1.12) стремится к нулю при $t \rightarrow 0$, т. е.

$$u^+|_{t=0} = u_0.$$

Далее, для $\lambda_k > 0$ при любых $m > 0$, $t \geq \tau > 0$ имеет место

$$\lambda_k^m \exp(-\lambda_k t) \leq \frac{1}{t^m} \max_{s>0} (s^m e^{-s}) \leq \frac{1}{\tau^m} \cdot m^m \cdot e^{-m}, \quad (1.13)$$

а для функций v_k ($k = 0, 1, \dots$) из (1.2), (1.7), (1.10) имеем

$$\alpha \|v_k\|^2 \leq F_0(v_k, v_k) + \beta = F(v_k, v_k) + \beta - \int_G c v_k^2 dx \leq \lambda_k + C \quad (1.14)$$

($C = \beta + \sup |c(x)|$), так что сходящимся (равномерно по $t \in [\tau, T]$, $\tau > 0$) оказывается ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \exp(-2\lambda_k t) \|v_k\|^2.$$

Отсюда следует, что ряд (1.9) равномерно по $t \in [\tau, T]$ сходится в пространстве E . Кроме того, из (1.13) следует, что ряд (1.9), продифференцированный по t любое число раз, сходится в $L^2(G)$ и в E равномерно по $t \in [\tau, T]$, так что $\frac{\partial^m u}{\partial t^m} \in E$ при $m \geq 1$, $\tau \leq t \leq T$. Из $u(t, x) \in E$,

$\frac{\partial u}{\partial t} \in E$ при $t \in [\tau, T]$ и равномерной по t ограниченности норм следует,

что $u(t, x) \in E^T$ ввиду произвольности $\tau > 0$. На самом деле доказано больше: функция $u(t, x)$ (см. (1.9)) принадлежит пространству E^T вместе со всеми производными по t . Этим доказана следующая теорема.

Теорема. Единственное обобщенное решение $u(t, x)$ граничной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x)u = 0, \quad u|_{\Sigma_1} = 0, \quad (1.15)$$

$$(D_\nu u + h(x)u)|_{\Sigma_2} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) \in L^2(G)$$

в цилиндрической области Q^T при выполнении условия сильной эллиптичности (1.2) и ограниченности коэффициентов $a_{ij}(x)$, $c(x)$, $h(x)$ определяется формулой

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_k(x) \exp(-\lambda_k t), \quad c_k = \int_G v_k(x) u_0(x) dx \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (1.16)$$

где $\{v_k\}$ — ортонормированная в $L^2(G)$ система собственных функций, а $\{\lambda_k\}$ ($\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$, $\lambda_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$) — соответствующая система собственных значений задачи (1.6).

При этом $u(t, x)$ и все ее производные $\frac{\partial^m u}{\partial t^m}$ ($m = 1, 2, \dots$) принадлежат пространству E^T и удовлетворяют уравнению (1.4).

Следствие. Ввиду того что $T > 0$ совершенно произвольно, формула (1.16) определяет решение задачи (1.15) во всей области $t > 0$. При этом если $c_0 \neq 0$, то имеет место полезное асимптотическое равенство

$$u(t, x) \simeq c_0 v_0(x) \exp(-\lambda_0 t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.17)$$

В самом деле,

$$u(t, x) = \exp(-\lambda_0 t) (c_0 v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(x) \exp[-(\lambda_k - \lambda_0)t]),$$

а так как $\lambda_k > \lambda_0$ при $k \geq 1$, то ряд внутри скобки стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ в любом из пространств E или $L^2(G)$.

2. Неоднородное уравнение. Если вычесть из решения задачи $B_0(u_0, f)$ только что построенное решение $B_0(u_0, 0)$, то получится, очевидно, решение задачи $B_0(0, f)$, т. е. функция $u(t, x) \in E^T$, удовлетворяющая при любом $\tau > 0$ ($\tau < T$) и любой функции $\varphi \in E^T$ равенству (ср. (1.4))

$$\{u, \varphi\}_{\tau}^T = \int_{\tau}^T \int_G \varphi \cdot f dx dt, \quad f \in L^2(Q^T) \quad (2.1)$$

и начальному условию

$$u^+|_{t=0} = 0. \quad (2.2)$$

Таким образом, решение задачи $B_0(u_0, f)$ сводится к нахождению функции $u \in E^T$, удовлетворяющей условиям (2.1), (2.2).

Функция $f(t, x) \in L^2(Q^T)$ при почти всех t принадлежит $L^2(G)$ и может быть разложена в ряд Фурье по системе собственных функций задачи (1.6) с нормировкой (1.10):

$$f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) v_k(x), \quad f_k(t) = \int_G f(t, x) v_k(x) dx, \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2(t) = \int_G f^2(t, x) dx.$$

Будем искать решение $u(t, x)$ задачи $B_0(0, f)$, т. е. задачи (2.1), (2.2) в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) v_k(x), \quad (2.4)$$

где коэффициенты $c_k(t)$ подлежат определению из условий (2.1), (2.2) и принадлежности $u(t, x)$, как и каждого слагаемого (2.4), пространству E^T .

Из равенства Парсеваля и условия (2.2) имеем

$$\int_G u^2(t, x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow 0} c_k(t) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.4) в (2.1) при $\varphi = v_k(x)$, учитывая (1.7) и ортогональность системы $\{v_k\}$, будем иметь

$$\int_{\tau}^T \left(\frac{dc_k}{dt} + F(u, v_k) \right) dt = \int_{\tau}^T f_k(t) dt \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (2.7)$$

Согласно (1.7), (2.4)

$$F(u, v_k) = F(v_k, u) = \lambda_k \int_G u(t, x) v_k(x) dx = \lambda_k c_k(t),$$

где λ_k — собственное значение задачи (1.6), отвечающее v_k .

В силу произвольности $\tau < T$ из (2.7) следует

$$\frac{dc_k}{dt} + \lambda_k c_k = f_k(t) \quad (0 < t < T; \quad k = 0, 1, \dots), \quad (2.8)$$

откуда с учетом (2.6) имеем

$$c_k(t) = \int_0^t \exp[-\lambda_k(t-\tau)] f_k(\tau) d\tau \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (2.9)$$

Легко видеть, что ряд (2.4) с коэффициентами (2.9) формально удовлетворяет соотношениям (2.1), (2.2) при произвольном $\varphi \in E^T$. Чтобы завершить построение решения задачи $B_0(0, f)$, остается показать, что этот ряд сходится в пространстве E^T и имеет место (2.6).

При любом $k \geq 0$ согласно неравенству Коши — Бунаковского

$$c_k^2(t) \leq \int_0^t \exp[-\lambda_k(t-\tau)] f_k^2(\tau) d\tau \int_0^t \exp[-\lambda_k(t-\tau)] d\tau. \quad (2.10)$$

С учетом $\lambda_k \geq \lambda_0$ и последнего соотношения (2.3), полагая $\mu = \max(-\lambda_0, 0)$, из (2.10) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(t) \leq t \exp(2\mu t) \int_0^t \int_G f^2(\tau, x) dx d\tau \leq t \exp(2\mu T) \|f\|_{L^2(Q^T)}^2.$$

Отсюда следует, что ряд (2.4) равномерно по $t \in [0, T]$ сходится в $L^2(G)$ и имеет место (2.5), т. е. $u(t, x)$ удовлетворяет условию (2.2) и имеет ограниченную по $t \in [0, T]$ норму в $L^2(G)$.

Для $\lambda_k > 0$ из (2.10) имеем

$$\begin{aligned} \lambda_k^2 \int_0^T c_k^2(t) dt &< \lambda_k \int_0^T \int_0^t \exp[-\lambda_k(t-\tau)] f_k^2(\tau) d\tau dt = \\ &= \lambda_k \int_0^T (\exp(+\lambda_k \tau) f_k^2(\tau) \int_{\tau}^T \exp(-\lambda_k t) dt) d\tau < \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ввиду $\lambda_k \rightarrow \infty$ лишь конечное число λ_k может иметь неположительное значение, поэтому сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^T c_k^2(t) dt. \quad (2.11)$$

Ввиду оценок $\alpha \|v_k\|^2 \leq \lambda_k + C$ (см. (1.14)),

$$\left(\frac{dc_k}{dt}\right)^2 = \lambda_k^2 c_k^2 + 2\lambda_k c_k f_k + f_k^2 \leq 2(\lambda_k^2 c_k^2 + f_k^2) \quad (\text{см. (2.8)})$$

и сходимости ряда (2.11) ряд (2.4) сходится в $BV^2(Q^T)$ и имеет нулевой след на множестве Σ_1 (см. (1.2.5)), т. е. сходится в пространстве E_0^T и, значит, в E^T .

Ряд (2.4) с коэффициентами (2.8) оказывается искомым решением задачи $B_0(0, f)$. Как уже отмечалось, решение задачи $B_0(u_0, f)$ есть сумма решений $B_0(0, f)$ и $B_0(u_0, 0)$. Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а. Единственное обобщенное решение $u(t, x)$ граничной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x)u = f(t, x) \quad (f \in L^2(Q^T)), \quad (2.12)$$

$$u|_{\Sigma_1} = 0, \quad (D, u + h(x)u)|_{\Sigma_2} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) \quad (u_0 \in L^2(G))$$

в цилиндрической области Q^T при выполнении условия сильной эллиптичности (1.2) и ограниченности коэффициентов $a_{ij}(x)$, $c(x)$, $h(x)$ определяется формулой

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_k(x) \exp(-\lambda_k t) + \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) \int_0^t \exp[-\lambda_k(t-\tau)] f_k(\tau) d\tau, \quad (2.13)$$

$$c_k = \int_G u_0(x) v_k(x) dx, \quad f_k(t) = \int_G f(t, x) v_k(x) dx \quad (k=0, 1, \dots).$$

Здесь $\{v_k\}$ — ортонормированная в $L^2(G)$ система собственных функций, а $\{\lambda_k\}$ ($\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$, $\lambda_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$) — соответствующая система собственных значений задачи (1.6).

С л е д с т в и е. Если вместе с $f(t, x)$ пространству $L^2(Q^T)$ принадлежат ее обобщенные частные производные по t до порядка m , то формула (2.13) допускает дифференцирование по t до порядка m включительно. При этом производная $\partial^j u / \partial t^j$ ($j=1, \dots, m$) принадлежит пространству E^T и удовлетворяет соотношению (ср. (2.1))

$$\left\{ \frac{\partial^j u}{\partial t^j}, \varphi \right\}_{\tau}^T = \int_{\tau}^T \int_G \varphi \frac{\partial^j f}{\partial t^j} dx dt \quad (\tau > 0; \varphi \in E^T; j=1, \dots, m).$$

Конечно, эти производные могут не иметь следа при $t=0$.

Основываясь на свойствах коэффициентов (2.9), читатель легко проверит это утверждение самостоятельно.

Мы предполагали коэффициенты a_{ij} , c , h не зависящими от t . Что касается a_{ij} и h , то мы и впредь считаем их такими. Случай же $c = c(t, x)$ не требует особого рассмотрения, поскольку является частным случаем рассматриваемого ниже квазилинейного уравнения.

§ 3. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

1. **Обобщенное решение. Принцип монотонности.** Здесь мы будем рассматривать квазилинейное параболическое уравнение вида

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - F(t, x, u) = 0. \quad (1.1)$$

Рассматривавшееся выше линейное уравнение является частным случаем (1.1) при $F = -c(t, x)u + f(t, x)$. Уравнение (1.1) по-прежнему будем изучать в цилиндрической области Q^T с ограниченным основанием G ($G \subset R^n$ — ограниченное открытое множество с конечным периметром). На боковой поверхности Σ области Q^T будем рассматривать граничные условия:

$$u|_{\Sigma_1} = g_1, \quad (D, u + hu)|_{\Sigma_2} = g_2 \quad (\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma, \quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset). \quad (1.2)$$

Множества Σ_1 и Σ_2 , как и выше, предполагаются цилиндрическими

$$\Sigma_i = \{(t, x), \quad x \in S_i, \quad 0 < t < T\} \quad (i=1, 2),$$

где $S_1 \cup S_2 = S$ ($S_1 \cap S_2 = \emptyset$) образует существенную границу области G .

Кроме условий (1.2) предполагается задание начального условия

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (1.3)$$

Коэффициенты $a_{ij}(i, j=1, \dots, n)$ и h — ограниченные измеримые функции (каждая в своей области), не зависящие от t . Предполагается выполнение условия сильной эллиптичности (2.1.2).

Относительно функции $F(t, x, u)$ мы предполагаем, что она задана при $(t, x) \in \bar{Q}^T$ и при любых значениях u (для простоты). Кроме того, мы предполагаем, что существует производная $\partial F/\partial u$ и для любой константы $A > 0$ существует константа $B = B(A) > 0$ такая, что

$$|F(t, x, u)| \leq B, \quad \left| \frac{\partial}{\partial u} F(t, x, u) \right| \leq B \quad \text{при } |u| \leq A \quad (t, x) \in \bar{Q}^T. \quad (1.4)$$

Понятие обобщенного решения граничной задачи для линейного уравнения переносится на задачу (1.1) — (1.3).

Определение 1. Функция $u(t, x) \in B^T$, удовлетворяющая условиям

$$u^+|_{\Sigma_1} = g_1, \quad u^+|_{t=0} = u_0, \quad (1.5)$$

называется обобщенным решением граничной задачи (1.1) — (1.3) в области Q^T , если для любого $\tau \in (0, T)$ и любой функции $\varphi(t, x) \in E^T$ выполняется равенство

$$F\{u, \varphi\}_{\tau}^T = \iint_{\tau}^T \int_{S_2} g_2(t, x) \varphi^+(t, x) dH_{n-1} dt. \quad (1.6)$$

В отличие от билинейного функционала $\{u, \varphi\}_{t_1}^{t_2}$ предыдущих параграфов функционал

$$F\{u, \varphi\}_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \int_G \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \varphi F(t, x, u) \right) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{S_2} h u^+ \varphi^+ dH_{n-1} dt \quad (1.7)$$

является нелинейным по первому аргументу u .

Определение предполагает, что функция $u(t, x)$ имеет след при $t = 0$, равный $u_0(x)$. При $g_1 \equiv 0$ требования $u \in B^T$, $u^+|_{\Sigma_1} = 0$ равносильны одному условию $u \in E^T$. Как и выше, считаем

$$u_0(x) \in L^2(G), \quad g_1 \in L^2(\Sigma_1), \quad g_2 \in L^2(\Sigma_2). \quad (1.8)$$

В определении, естественно, предполагается существование всех интегралов в (1.6), (1.7). При условии (1.8) и ограниченных a_{ij} и h для этого достаточно существование интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_G \varphi F(t, x, u) dx dt \quad (0 < t_1 < t_2 \leq T).$$

В дальнейшем мы в основном изучаем ограниченные решения при ограниченных u_0, g_1, g_2 (и даже при $g_1 \equiv 0, g_2 \equiv 0$), так что в силу (1.4) не возникает вопроса о существовании интегралов.

Задачу (1.1) — (1.3) будем коротко называть задачей B^F (или $B^F(u_0, g_1, g_2)$), а ее обобщенное решение — решением задачи B^F . При $g_1 \equiv 0, g_2 \equiv 0$ будем говорить о задаче B_0^F (или $B_0^F(u_0)$).

Важные свойства решения задачи B^F вытекают из следующей теоремы сравнения (ср. п. 1.4).

Теорема. Пусть ограниченные функции $u_1, u_2 \in B^T$ при любой неотрицательной функции $\varphi \in E^T$ удовлетворяют неравенству

$${}^F \{u_1, \varphi\}_\tau^T \geq {}^F \{u_2, \varphi\}_\tau^T \quad (0 < \tau < T). \quad (1.9)$$

Пусть, кроме того,

$$u_1^+|_{\Sigma_1} \geq u_2^+|_{\Sigma_1}, \quad (1.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_G (|u_1 - u_2| - (u_1 - u_2))^2 dx = 0. \quad (1.11)$$

Тогда $u_1(t, x) \geq u_2(t, x)$ почти всюду в области Q^T .

Доказательство. Положим

$$z = u_1 - u_2, \quad c = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} F(t, x, \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) d\alpha,$$

так что $c = c(t, x)$ — ограниченная функция в Q^T и $F(t, x, u_1) - F(t, x, u_2) = c \cdot z$. Покажем, что $z = z(t, x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы п. 1.4. Из (1.10), (1.11) вытекают условия (1.4.2), (1.4.3) для $z(t, x)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \{z, \varphi\}_\tau^T &= \int_\tau^T \int_G \left(\varphi \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + cz\varphi \right) dx dt + \\ &+ \int_\tau^T \int_{S_2} hz + \varphi + dH_{n-1} dt = F\{u_1, \varphi\}_\tau^T - F\{u_2, \varphi\}_\tau^T \geq 0 \end{aligned}$$

при $\varphi \geq 0$, $\varphi \in E^T$ согласно (1.9). Так что для $z(t, x)$ имеет место и условие (1.4.1). По теореме п. 1.4 $z(t, x) \geq 0$ почти всюду.

Для этой теоремы и приводимых ниже следствий из нее, как и для теоремы п. 1.4, не нужно условия сильной эллиптичности — условия (2.1.2). Достаточно, чтобы выполнялось условие (1.2.6).

Следствие 1 (принцип монотонности). Если $u_0 \geq \tilde{u}_0$, $g_1 \geq \tilde{g}_1$, $g_2 \geq \tilde{g}_2$, то любые два ограниченные решения $u(t, x)$ и $\tilde{u}(t, x)$ задач $B^F(u_0, g_1, g_2)$ и $B^F(\tilde{u}_0, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2)$ соответственно связаны неравенством $u(t, x) \geq \tilde{u}(t, x)$ почти всюду в Q^T .

Очевидно, функции $u_1 = u(t, x)$, $u_2 = \tilde{u}(t, x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы в силу соотношений (1.5), (1.6).

Следствие 2 (теорема единственности). Ограниченное решение задачи B^F единственно.

Согласно следствию 1 для любых двух ограниченных решений u_1 и u_2 задачи B^F должны выполняться неравенства $u_1 \leq u_2$ и $u_2 \leq u_1$ почти всюду, так что $u_1 = u_2$ почти всюду.

Следствие 3 (теорема об ограниченности). Если ограниченные функции $\bar{u}, \underline{u} \in B^T$, имеющие след при $t = 0$ (см. (1.2.4)), удовлетворяют неравенствам:

$$\bar{u}^+|_{t=0} \geq u_0 \geq \underline{u}^+|_{t=0} \quad (x \in G), \quad (1.12)$$

$$\bar{u}^+|_{\Sigma_1} \geq g_1 \geq \underline{u}^+|_{\Sigma_1}, \quad (1.13)$$

$${}^F \{\bar{u}, \varphi\}_\tau^T > \int_\tau^T \int_{S_2} g_2 \varphi + dH_{n-1} dt \geq {}^F \{\underline{u}, \varphi\}_\tau^T \quad (1.14)$$

для любой функции $\varphi \geq 0$ ($\varphi \in E^T$) и любого $\tau > 0$ ($\tau \in (0, T)$), то решение $u(t, x)$ задачи $B^F(u_0, g_1, g_2)$ почти всюду в области Q^T удовлетворяет неравенствам

$$\bar{u}(t, x) \geq u(t, x) \geq \underline{u}(t, x). \quad (1.15)$$

Действительно, пары функций $(u_1 = \bar{u}, u_2 = u)$ и $(u_1 = u, u_2 = \underline{u})$ в силу (1.5), (1.6) и (1.12)—(1.14) удовлетворяют условиям теоремы. Поэтому имеет место (1.15).

Определение 2. *Ограниченные функции $\bar{u}, \underline{u} \in B^T$, удовлетворяющие условиям (1.12)—(1.14), будем называть соответственно верхней и нижней функциями задачи $B^F(u_0, g_1, g_2)$.*

Замечание. Если коэффициенты $a_{ij}(x)$ дифференцируемы, функции $\bar{u}(t, x)$ и $\underline{u}(t, x)$ достаточно гладкие в области Q^T и имеет смысл выражение $(D_\nu u + hu)^+|_{\Sigma_2}$ для $u = \bar{u}, \underline{u}$, то (1.14) вытекает из следующих неравенств (см. (1.1)):

$$L(\bar{u}) \geq 0 \geq L(\underline{u}) \quad ((t, x) \in Q^T),$$

$$(D_\nu \bar{u} + h\bar{u})^+|_{\Sigma_2} \geq g_2 \geq (D_\nu \underline{u} + h\underline{u})^+|_{\Sigma_2}.$$

Предоставляем это проверить читателю.

При построении решения задачи B^F используются следующие простые свойства решения, а также верхней и нижней функций.

Лемма 1 (о продолжении). Пусть $0 < T_1 < T_2 < T$ и пусть $u_1(t, x)$ — решение задачи $B^F(u_0, g_1, g_2)$ в области Q^{T_2} , а $u_2(t, x)$ — решение задачи $B^F(u_{01}, g_1, g_2)$ в области $Q_{T_1}^T$ с начальным условием

$$u_2|_{t=T_1} = u_{01}(x) = u_1(T_1, x).$$

Тогда $u_1(t, x) = u_2(t, x)$ почти всюду в области $Q_{T_1}^{T_2}$, функция

$$u(t, x) = \begin{cases} u_1(t, x) & (0 < t < T_2), \\ u_2(t, x) & (T_2 < t < T) \end{cases}$$

принадлежит пространству B^T и является решением задачи $B^F(u_0, g_1, g_2)$ в области Q^T .

Функции $u_1(t, x), u_2(t, x)$ предполагаются ограниченными.

Доказательство этого простого утверждения предоставляем читателю.

Лемма 2 (о сужении). Пусть $0 < T_1 < T_2 \leq T$. Верхняя и нижняя функции $\bar{u}(t, x)$ и $\underline{u}(t, x)$ задачи $B^F(u_0, g_1, g_2)$ в области Q^T остаются таковыми для задачи $B^F(\tilde{u}_0, g_1, g_2)$ в области $Q_{T_1}^{T_2}$, если только

$$\underline{u}(T_1, x) \leq \tilde{u}_0(x) \leq \bar{u}(T_1, x). \quad (1.16)$$

Доказательство. Условия (1.16), (1.13) и (1.14) при $\tau > T_1$ означают, что \bar{u} и \underline{u} являются верхней и нижней функциями задачи $B^F(\tilde{u}_0, g_1, g_2)$ в области $Q_{T_1}^T$. Поэтому достаточно показать, что неравенства (1.14) сохраняются при замене T на T_2 для $\varphi \in E^{T_2}$ ($\varphi \geq 0$).

Пусть $T_2 < T$ и φ — произвольная функция из E^{T_2} . Положив при $t > T_2$

$$\varphi(t, x) = \varphi(T_2, x) \left(\frac{T-t}{T-T_2} \right)^k,$$

при любом $k \geq 1$ мы имеем функцию из E^r , для которой (1.14) имеет место. Разбивая каждый из интегралов по t в (1.14) на сумму ($\tau < T_2$)

$$\int_{\tau}^T = \int_{\tau}^{T_2} + \int_{T_2}^T,$$

при $k \rightarrow \infty$ легко убедиться, что интеграл по области (T_2, T) стремится к нулю. В пределе получаем

$$F\{\bar{u}, \varphi\}_{\tau}^{T_2} \geq \int_{\tau}^{T_2} \int_{S_2} g_2 \varphi^+ dH_{n-1} dt \geq F\{\underline{u}, \varphi\}_{\tau}^{T_2}$$

при любом $\tau < T_2$ и любой функции $\varphi \geq 0$, $\varphi \in E^{T_2}$. Отсюда следует утверждение леммы.

2. Теорема о разрешимости. В отличие от линейных уравнений, для которых краевая задача разрешима в области Q^T при любом $T > 0$, для нелинейного уравнения (1.1) это, вообще говоря, неверно. Например, вторая краевая задача ($D_\nu u|_{\Sigma} = 0$) при $F = u^2$, $u_0 = \text{const} > 0$ имеет решение

$$u = \frac{u_0}{1 - u_0 t},$$

определенное лишь в областях Q^T при $T < \frac{1}{u_0}$.

Теоремы существования формулируют обычно при тех или иных ограничениях на поведение функции $F(t, x, u)$ при возрастании $|u|$, исключающих, как правило, быстрый рост функции $F(t, x, u)$. Неудобство такого подхода состоит в том, что исключается из рассмотрения ряд важных задач (например, задачи о воспламенении, в которых $F(t, x, u) = \exp u$). Однако эти ограничения служат обычно одной цели — получению *априорной оценки* решения в заданной области Q^T . Удобнее поэтому вместо ограничений на F требовать наличия априорной оценки решения в области Q^T . Такая оценка (см. (1.15)) имеет место при наличии верхней и нижней функций. Построение верхней и нижней функций представляется наиболее общим способом получения априорной оценки (обычно накладываемые ограничения на F позволяют легко строить такие функции). Поэтому в формулировке теоремы существования мы будем требовать наличие верхней и нижней функций.

Как и для линейных уравнений, мы предполагаем граничные условия (1.2) однородными ($g_2 \equiv 0$, $g_1 \equiv 0$), т. е. рассматриваем задачу B^F . Помимо условия сильной эллиптичности (см. 2.1.2), для простоты потребуем, чтобы при $S_2 \neq \emptyset$ выполнялось условие

$$h(x) \geq 0 \quad (x \in S_2). \quad (2.1)$$

Это условие позволяет воспользоваться оценкой (1.4.7) для решения линейной краевой задачи.

Теорема. Пусть $a_{ij}(x)$ ($i, j = 1, \dots, n$), $h(x)$ ограничены и выполнены условия (2.1.2), (2.1) и (1.4). Пусть далее $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$, $u_0(x)$ ограничена (см. (1.2), (1.3)) и в области Q^T существуют верхняя и нижняя функции $\bar{u}(t, x)$ и $\underline{u}(t, x)$ (см. определение 2. п. 1) задачи $B_0^F(u_0)$. Тогда задача $B_0^F(u_0)$ имеет ограниченное решение $u(t, x)$ в области Q^T , почти всюду удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{u}(t, x) \leq u(t, x) \leq \bar{u}(t, x). \quad (2.2)$$

Доказательство. Выберем число $A > 0$ таким, чтобы выполнялось

$$A > a = \max \left\{ \sup_{Q^T} |\bar{u}(t, x)|, \sup_{Q^T} |\underline{u}(t, x)| \right\}, \quad (2.3)$$

и пусть $B = B(A)$ — константа из неравенства (1.4). Положим

$$T_1 = \min \left\{ \frac{A-a}{B}, \frac{1}{2B}, T \right\}, \quad (2.4)$$

и в цилиндре Q^{T_1} будем рассматривать ограниченные функции $v(t, x)$, удовлетворяющие почти всюду в Q^{T_1} неравенству $|v| \leq A$. Множество таких функций обозначим через K_A . Это шар радиуса A в линейном пространстве ограниченных функций, в котором норма определяется как существенная верхняя грань $|v(t, x)|_1$:

$$\|v\| = \inf_N \sup_{Q^{T_1} \setminus N} |v(t, x)|. \quad (2.5)$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным множествам $N \subset Q^{T_1}$, имеющим меру нуль. Расстояние между элементами v_1 и v_2 есть, следовательно, $\|v_1 - v_2\|$. Всюду в этом пункте $\|\cdot\|$ обозначает норму (2.5). Для $v \in K_A$ согласно (1.4):

$$\|F(t, x, v(t, x))\| \leq B, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial v} F(t, x, v(t, x)) \right\| \leq B. \quad (2.6)$$

Положим $f_v(t, x) = F(t, x, v(t, x))$ и каждой функции $v \in K_A$ поставим в соответствие решение $u(t, x)$ задачи $B_0(u_0, f_v)$, т. е. обобщенное решение следующей линейной задачи в области Q^{T_1} :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f_v(t, x), \quad u|_{t=0} = u_0, \\ u|_{\Sigma_1} = 0, \quad (D, u + hu)|_{\Sigma_2} = 0. \quad (2.7)$$

Согласно п. 2.2 эта задача имеет единственное решение $u(t, x) \in E^{T_1}$ при каждом $v \in K_A$. Тем самым определен оператор:

$$u(t, x) = R(f_v) = R_1(v). \quad (2.8)$$

Так как $\|u_0\| \leq a$ согласно (1.12) и (2.3), а $\|f_v\| \leq B$ при $v \in K_A$ согласно (2.6), то по теореме об ограниченности (следствие 3, п. 1.4) для решения (2.8) задачи (2.7) справедлива оценка

$$\|u\| = \|R(f_v)\| \leq a + BT_1 \leq A.$$

Таким образом, оператор $R_1(v) = R(f_v)$ отображает шар K_A в себя. Так как, далее, для любых двух функций $v_1, v_2 \in K_A$

$$f_{v_1} - f_{v_2} = \int_{v_2}^{v_1} \frac{\partial}{\partial v} F(t, x, v) dv = (v_1 - v_2) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} F(t, x, \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2) d\alpha,$$

и $\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2 \in K_A$ при $\alpha \in [0, 1]$, то согласно (2.6)

$$\|f_{v_1} - f_{v_2}\| \leq B\|v_1 - v_2\|.$$

Для разности $u_1 - u_2$ соответствующих решений задачи (2.7) в силу $(u_1 - u_2)|_{t=0} = 0$ по той же теореме об ограниченности п. 1.4 с учетом (2.4) имеем оценку

$$\|u_1 - u_2\| \leq T_1 \|f_{v_1} - f_{v_2}\| \leq BT_1 \|v_1 - v_2\| \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|.$$

Таким образом, оператор (2.8) осуществляет сжатое отображение K_A в себя и имеет, следовательно, (п. III.6.3) неподвижную точку $u \in K_A$: $u = R_1(u) = R(f_u) = R(F(t, x, u(t, x)))$, являющуюся по определению R ограниченным обобщенным решением задачи (2.7) при $v = u$, или, что то же, задачи $B_0^F(u_0)$. Согласно лемме 2 п. 1 \bar{u} и \underline{u} являются верхней и нижней функциями этой задачи в области Q^{T_1} и, следовательно, $u = u(t, x)$ удовлетворяет неравенствам (2.2) почти всюду в Q^{T_1} . Если

$T_1 = T$, то теорема доказана. При $T_1 < T$ доказана разрешимость задачи $B_0^F(\tilde{u})$ в любом цилиндре $Q_{t_1}^{t_2}$ при $t_2 - t_1 \leq T_1$, ($t_2 \leq T$), $\underline{u}(t_1, x) \leq \tilde{u}(x) \leq \bar{u}(t_1, x)$, поскольку величина T_1 (см. (2.4)) зависит только от характеристики a функций \bar{u} , \underline{u} , и произвольно выбранного числа $A > a$ и не зависит от начального момента $t = 0$. Учитывая это замечание и покрывая цилиндр Q^T конечным числом цилиндров

$$Q^{T_1}, Q_{T_1/2}^{3T_1/2}, Q_{T_1}^{2T_1}, \dots, Q_{mT_1/2}^T, \quad \frac{m+2}{2} T_1 \geq T > \frac{mT_1}{2},$$

с помощью лемм 1 и 2 п. 1 решение $u(t, x)$ задачи $B_0^F(u_0)$ можно последовательно продолжить на всю область Q^T , сохраняя оценку (2.2). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $u_0(x)$ ограничена. Тогда задача $B_0^F(u_0)$ всегда разрешима в некотором цилиндре Q^{T_1} , $T_1 \leq T$.

Доказательство. Согласно (1.4) $|F(t, x, u)| \leq B(|u|)$ при $(t, x) \in Q^T$.

Можно, очевидно, считать, что $B(|u|)$ — непрерывная функция u , удовлетворяющая условию Липшица в каждом интервале $|u| \in R$. Тогда в некотором интервале $[0, T_1]$ существует и ограничено решение $\bar{u}(t)$ обыкновенного уравнения

$$\frac{du}{dt} = B(|u|), \quad u(0) = a \quad (|u_0(x)| \leq a). \quad (2.9)$$

Покажем, что $\bar{u}(t)$ и $\underline{u}(t) = -\bar{u}(t)$ являются верхней и нижней функциями задачи $B_0^F(u_0)$ в области Q^{T_1} . Условия (1.12), (1.13) ($g_1 = 0$), очевидно, выполняются. При $\varphi \geq 0$ ($\varphi \in E^{T_1}$) с учетом условия (2.1)

$$\begin{aligned} F\{\bar{u}, \varphi\}_{\tau}^{T_1} &\geq \int_{\tau}^{T_1} \int_G \left(\frac{d\bar{u}}{dt} - F(t, x, \bar{u}) \right) \varphi \, dx dt = \\ &= \int_{\tau}^{T_1} \int_G (B(|\bar{u}|) - F(t, x, \bar{u})) \varphi \, dx dt \geq 0. \end{aligned}$$

Поэтому $F\{\underline{u}, \varphi\}_{\tau}^{T_1} = -F\{\bar{u}, \varphi\}_{\tau}^{T_1} \leq 0$ и выполняется условие (1.14).

По теореме в области Q^{T_1} существует решение $u(t, x)$ задачи $B_0^F(u_0)$ и $-\bar{u}(t) \leq u(t, x) \leq \bar{u}(t)$.

Следствие 2. Пусть $u_0(x)$ ограничена ($|u_0(x)| \leq a$) и при всех $t \geq 0$, $x \in G$ выполняется оценка

$$|F(t, x, u)| \leq A + B|u|, \quad (2.10)$$

где $A \geq 0$, $B > 0$ — некоторые постоянные. Тогда решение $u(t, x)$ задачи $B_0^F(u_0)$ определено в любой области Q^T и

$$|u(t, x)| \leq \left(\frac{A}{B} + a \right) e^{Bt} - \frac{A}{B}. \quad (2.11)$$

Доказательство. Решение уравнения (2.9) при $B(|u|) = A + B|u|$ (см. (2.10)) определено при $t \geq 0$ и имеет вид

$$u(t) = \left(\frac{A}{B} + a \right) e^{Bt} - \frac{A}{B}.$$

Согласно предыдущему, $\bar{u}(t)$ и $\underline{u}(t) = -\bar{u}(t)$ образуют верхнюю и нижнюю функции задачи $B_0^F(u_0)$, которая, следовательно, разрешима в любой области Q^T , и решение удовлетворяет неравенству (2.11).

К граничным задачам для квазилинейных параболических уравнений мы вернемся еще в гл. IX, где будут приведены некоторые данные об области разрешимости, поведении при возрастании t и др.

§ 4. ЗАДАЧА КОШИ

1. **Обобщенное решение. Единственность.** Кроме рассмотренной выше граничной задачи, для параболических уравнений характерно и другое задание дополнительных условий, так называемая задача Коши, когда уравнение рассматривается во всем пространстве $x \in R^n$ при одном лишь начальном условии. Для простоты мы будем рассматривать линейное уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + c(t, x)u = f(t, x) \quad (1.1)$$

в полосе $\Pi^T = \{(t, x); x \in R^n, 0 < t < T\}$. Здесь Δ — оператор Лапласа в R^n . Будем считать, что $T < \infty$. Задача Коши состоит в отыскании решения $u(t, x)$ уравнения (1.1), удовлетворяющего начальному условию

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (1.2)$$

$f(t, x)$, $c(t, x)$, $u_0(x)$ — некоторые заданные функции. Не желая ограничиваться лишь гладкими функциями f , c , u_0 (на практике они нередко бывают разрывными), мы снова будем трактовать решение задачи (1.1), (1.2) в некотором обобщенном смысле. Нужно отметить, что для задачи Коши существенным оказывается поведение функций при $|x| \rightarrow \infty$. Для уравнения теплопроводности известно, например, что в классе функций $u(t, x)$, растущих при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее, чем $\exp(|x|^{2+\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$), решение задачи Коши неединственно. Поэтому обычно заранее делают оговорку о классах функций (ограниченные, суммируемые и т. д.), в которых ищется решение.

Рассмотрим следующую гладкую весовую функцию:

$$\omega_\lambda(x) = \exp(\lambda \sqrt{1 + |x|^2}), \quad -\infty < \lambda < \infty, \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (1.3)$$

и через $L_\lambda^2(L_\lambda^2(R^n), L_\lambda^2(\Pi^T))$ обозначим пространство функций, квадраты которых суммируемы с этим весом (по R^n или Π^T). При $\lambda < 0$ пространство L_λ^2 содержит функции, экспоненциально растущие при $|x| \rightarrow \infty$, при $\lambda = 0$ $L_\lambda^2 = L^2$. Очевидно, при возрастании λ L_λ^2 сужается: $L_{\lambda_1}^2 \subset L_{\lambda_2}^2$ при $\lambda_1 > \lambda_2$.

Ниже мы предполагаем, что $c(t, x)$ ограничена и измерима в полосе Π^T , $u_0(x) \in L_\lambda^2(R^n)$, $f(t, x) \in L_\lambda^2(\Pi^T)$, т. е.

$$\int \omega_\lambda(x) u_0^2(x) dx < \infty, \quad \int_0^T \int \omega_\lambda(x) f^2(t, x) dx dt < \infty \quad (1.4)$$

при некотором $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Аналогично определяются пространства $W_{1,\lambda}^2$ как пространства функций, принадлежащих соответствующим L_λ^2 вместе со своими производными первого порядка.

Положим $\Pi_\tau^T = \{(t, x), x \in R^n, \tau < t < T\}$, так что $\Pi^T = \Pi_0^T$.

Пространство H_λ^1 есть пространство функций $u(t, x)$, заданных в полосе Π^T и принадлежащих пространству $W_{1,\lambda}^2(\Pi_\tau^T)$ при любом τ , $0 < \tau < T$.

Аналогично пространству B^T (п. 1.2) пространство H_λ не является нормированным. Сходимость в нем определяется как сходимость в каж-

в пространстве $W_{1,\lambda}^2(\Pi_\tau^T)$, $0 < \tau < T$. Оно существенно шире, чем пространство $W_{1,\lambda}^2(\Pi^T)$, и содержит функции, не суммируемые по полю Π^T .

Определение 1. Мы будем говорить, что функция $u(t, x) \in H_\lambda^T$ имеет след при $t=0$, равный $u_0(x) \in L_\lambda^2$, и писать $u^+|_{t=0} = u_0$, если

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, x) - u_0(x)\|_\lambda^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \int |u(t, x) - u_0(x)|^2 \omega_\lambda(x) dx = 0. \quad (1.5)$$

Если, как и в случае пространств B^T , нужно отметить следующее. Функция $u(t, x) \in H_\lambda^T$ не имеет скачков в области Π^T (множество точек скачка имеет n -мерную меру нуль), поэтому на каждой плоскости $t = t_0$ предельные значения снизу и сверху (при $t \rightarrow t_0 - 0$ и $t \rightarrow t_0 + 0$) почти всюду в R^n совпадают (и принадлежат $L_\lambda^2(R^n)$). Это позволяет считать, что $u(t, x) \in H_\lambda^T$ определена при всех $t \in (0, T)$ и при каждом x принадлежит L_λ^2 . В этом смысле запись (1.5) корректна.

Из вложения $L_{\lambda_1}^2 \subset L_{\lambda_2}^2$ вытекает вложение $H_{\lambda_1}^T \subset H_{\lambda_2}^T$ при $\lambda_1 \gg \lambda_2$. Это позволяет различные функции $u_0 \in L_{\lambda_1}^2(G)$, $f \in L_{\lambda_2}^2(\Pi^T)$, $u(t, x) \in H_{\lambda_3}^T$ рассматривать в соответствующих пространствах при одном и том же (минимальном из $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$). Как и выше, с уравнением (1.1) мы будем называть билинейный функционал

$$\{u, \varphi\}_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \int \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + cu\varphi \right) dx dt \quad (0 < t_1 < t_2 \leq T), \quad (1.6)$$

который при $u \in H_\lambda^T$ имеет смысл для любой функции $\varphi \in H_{-\lambda}^T$.

Определение 2. Функция $u(t, x) \in H_\lambda^T$ (при некотором λ) называется обобщенным решением уравнения (1.1) в области Π^T , если для любой функции $\varphi(t, x) \in H_{-\lambda}^T$ выполняется равенство

$$\{u, \varphi\}_\tau^T = \int \int \varphi(t, x) f(t, x) dx dt \quad (0 < \tau < T). \quad (1.7)$$

Очевидно, достаточно гладкое обобщенное решение $u(t, x)$ при непрерывных функциях $f(t, x)$, $c(t, x)$ является решением уравнения (1.1) в обычном смысле.

Определение 3. Обобщенное решение в области Π^T называется решением задачи Коши (1.1), (1.2), если в смысле определения 1

$$u^+|_{t=0} = u_0(x). \quad (1.8)$$

Теорема. При выполнении (1.4) решение $u(t, x)$ ($u \in H_\lambda^T$) задачи Коши удовлетворяет неравенству

$$\int u^2(t, x) \omega_\lambda(x) dx \leq \left[\int u_0^2(x) \omega_\lambda(x) dx + \int_0^t e^{-k_\lambda \tau} \int f^2(\tau, x) \omega_\lambda(x) dx d\tau \right] e^{k_\lambda t}, \quad (1.9)$$

$$k_\lambda = 1 + |\lambda| + \lambda^2 - 2 \inf_{\Pi^T} c(t, x). \quad (1.10)$$

Доказательство. Читатель легко убедится, что

$$\left| \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_i} \right| < |\lambda| \omega_\lambda, \quad \Delta \omega_\lambda < (\lambda^2 + |\lambda|) \omega_\lambda \quad (1.11)$$

и что $\varphi = u \cdot \omega_\lambda \in H_{-\lambda}^T$ при $u \in H_\lambda^T$. Используя в (1.7) $\varphi = u \cdot \omega_\lambda$, учитывая обозначение (1.10) и соотношения:

$$\begin{aligned} \int f \cdot \varphi dx &= \int (f | \overline{\omega_\lambda}) (\varphi | \overline{\omega_{-\lambda}}) dx \leq \frac{1}{2} \left(\int f^2 \omega_\lambda dx + \int u^2 \omega_\lambda dx \right), \\ \int_{t_1}^{t_2} \int \varphi \frac{\partial u}{\partial t} dx dt &= \frac{1}{2} \int \omega_\lambda \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u^2}{\partial t} dt dx = \frac{1}{2} \left[\int u^2(t_2, x) \omega_\lambda(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int u^2(t_1, x) \omega_\lambda(x) dx \right], \\ - \int \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= - \int \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \omega_\lambda dx - \frac{1}{2} \int \sum_i \frac{\partial u^2}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_i} dx \leq \\ &\leq -\frac{1}{2} \int u^2 \Delta \omega_\lambda dx < \frac{1}{2} (\lambda^2 + |\lambda|) \int u^2 \omega_\lambda dx, \end{aligned}$$

из равенства (см. (1.7))

$$\{u, u \omega_\lambda\}_{t_1}^{t_2} = \{u, u \omega_\lambda\}_{t_1}^T - \{u, u \omega_\lambda\}_{t_2}^T = \int_{t_1}^{t_2} \int f u \omega_\lambda dx dt \quad (0 < t_1 < t_2 \leq T)$$

имеем оценку

$$z(t_2) - z(t_1) \leq k_\lambda \int_{t_1}^{t_2} z(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int f^2 \omega_\lambda dx dt, \quad z(t) = \int \omega_\lambda u^2 dx.$$

Ввиду произвольности $t_1 < t_2$ с учетом (1.8) имеем

$$\frac{dz}{dt} \leq k_\lambda z + \int f^2 \omega_\lambda dx, \quad z(0) = \int u_0^2 \omega_\lambda dx.$$

Отсюда в силу оценки (VI.1.3.4) имеем (1.9).

С л е д с т в и е. Решение задачи Коши единственно.

Разность любых двух решений является решением однородной задачи Коши ($u_0 = 0, f = 0$), которая согласно (1.9) равна нулю почти всюду в области Π^T .

Из оценки (1.9) вытекает также непрерывная зависимость решения от начальной функции u_0 и правой части f в метрике пространств L_λ^2 .

2 Уравнение теплопроводности. Будем искать решение уравнения (1.1) при $c(t, x) = 0, f(t, x) = 0$, т. е. уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad (2.1)$$

следующего вида:

$$u(t, x) = t^{-n/2} \varphi \left(\frac{|x|^2}{t} \right), \quad t > 0. \quad (2.2)$$

Сделав замену переменной $\xi = \frac{|x|^2}{t}$, читатель легко убедится, что подстановка функции (2.2) в уравнение (2.1) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для нахождения $\varphi(\xi)$:

$$\xi(4\varphi' + \varphi)' + \frac{n}{2}(4\varphi' + \varphi) = 0.$$

Мы возьмем только одно решение этого уравнения

$$\varphi(\xi) = c \cdot e^{-\xi/4} \quad (c = \text{const}),$$

которое удовлетворяет соотношению $4\varphi' + \varphi = 0$.

При любом $c \neq 0$ ненулевым решением уравнения (1.1) при $t > 0$ согласно построению оказывается функция

$$u(t, x) = c \cdot t^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right). \quad (2.3)$$

При этом, очевидно,

$$\int u(t, x) dx \equiv c \cdot 2^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right)^n = c (2\sqrt{\pi})^n.$$

Для функции (2.3) с константой $c = (2\sqrt{\pi})^{-n}$ введем специальное обозначение

$$\Phi(t, x) = (2\sqrt{\pi t})^{-n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right). \quad (2.4)$$

При $t > 0$ эта функция положительна, бесконечно дифференцируема по t и x , удовлетворяет уравнению (2.1) и условию

$$\int \Phi(t, x) dx \equiv 1. \quad (2.5)$$

Предоставляем проверить читателю, что при любых T и λ ($T > 0$, $-\infty < \lambda < \infty$) функция $\Phi(t, x)$ и все ее производные принадлежат пространству H_λ^T и являются гладкими (а следовательно, и обобщенными) решениями уравнения (2.1) в области PT .

Следующие свойства:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t, x) = 0 \quad (|x| \neq 0) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t, 0) = +\infty$$

вместе с (2.5) означают, что в точке $t = 0$, $x = 0$, $\Phi(t, x)$ имеет особенность типа δ -функции.

Лемма 1. Пусть $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ и

$$\int |\varphi(x)| \Phi(t, x) dx < \infty \quad (0 < t < t_0).$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int \varphi(x) \Phi(t, x) dx = \varphi(0). \quad (2.6)$$

Доказательство. Полагая $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$ и используя (2.5), имеем

$$\begin{aligned} \int \varphi(x) \Phi(t, x) dx &= \varphi(0) + \int_{|x| < t^{1/4}} \psi(x) \Phi(t, x) dx + \\ &+ \int_{|x| > t^{1/4}} \psi(x) \Phi(t, x) dx \equiv \varphi(0) + I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Предоставим читателю убедиться, что каждый из интегралов I_1 и I_2 стремится к нулю при $t \rightarrow 0$.

Учитывая инвариантность уравнения (2.1) относительно сдвигов по x , можно резко увеличить запас решений. При любом фиксированном $u \in R^n$ решением уравнения (2.1) при $t > 0$ оказывается

$$\Phi(t, x - y) = (2\sqrt{\pi t})^{-n} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t}\right),$$

а также любая линейная комбинация $\sum_k c_k \Phi(t, x - y_k)$ и интеграл

$$u(t, x) = \int u_0(y) \Phi(t, x - y) dy = \int u_0(x + \xi) \Phi(t, \xi) d\xi, \quad (2.7)$$

если, конечно, он существует.

Теорема. Формула (2.7) определяет единственное решение задачи Коши для уравнения (2.1) в области $t > 0$ при любой начальной функции $u_0 \in L_\lambda^2$ (при некотором λ).

При этом решение $u(t, x)$ бесконечно дифференцируемо (по x и t) в области $t > 0$. Для непрерывной начальной функции $u_0(x)$ решение

$u(t, x)$ непрерывно в замкнутой области $t \geq 0$, т. е. начальному условию удовлетворяет в каждой точке x . $u(0, x) = u_0(x)$.

Доказательство. Какова бы ни была функция $v \in L_{-\lambda}^2$,

$$\left(\int u_0(y) v(y) dy \right)^2 = \left(\int u_0 \sqrt{\omega_\lambda} v \sqrt{\omega_{-\lambda}} dy \right)^2 \leq \int u_0^2 \omega_\lambda dy \int v^2 \omega_{-\lambda} dy. \quad (2.8)$$

При любых $t > 0$, $x \in R^n$ как функции y , $\Phi(t, x - y)$ и все ее производные (по t и x) принадлежат $L_{-\lambda}^2$. Поэтому согласно (2.8) формула (2.7) при $u_0 \in L_\lambda^2$ определяет бесконечно дифференцируемую функцию в области $t > 0$, очевидно, удовлетворяющую уравнению (2.1). Из легко проверяемого неравенства

$$\left| \frac{1}{1 + |x|^2} - \frac{1}{1 + |y|^2} \right| < |x - y| < \frac{1}{1 + |x - y|^2}$$

для весовой функции ω_λ (см. (1.3)) следует оценка

$$\omega_\lambda(x) \cdot \omega_{-\lambda}(y) \leq \omega_{|\lambda|}(x - y).$$

С учетом этого из (2.7), (2.8) ($v = \Phi(t, x - y)$) имеем при $t > 0$

$$\int u^2(t, x) \omega_\lambda(x) dx \leq \int u_0^2(x) \omega_\lambda(x) dx \cdot \int \Phi^2(t, \xi) \cdot \omega_{|\lambda|}(\xi) d\xi,$$

т. е. $u(t, x) \in L_\lambda^2(R^n)$ при каждом $t > 0$. Аналогичные оценки имеют место для всех производных $u(t, x)$. Отсюда следует, что вместе со всеми производными $u(t, x) \in H_\lambda^T$ при любом $T > 0$. Если $u_0(x)$ непрерывна, то по лемме 1 из (2.7) следует

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = u_0(x), \quad (2.9)$$

так что $u(t, x)$ оказывается непрерывной в замкнутой области $t \geq 0$. Дальше доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 2. Для непрерывной функции $u_0 \in L_\lambda^2$ имеет место

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int (u(t, x) - u_0(x))^2 \omega_\lambda(x) dx = 0. \quad (2.10)$$

Доказательство. Из представления (см. (2.7), (2.5))

$$u(t, x) - u_0(x) = \int (u_0(x + \xi) - u_0(x)) \Phi(t, \xi) d\xi$$

для нормы в L_λ^2 имеем оценку

$$\|u(t, x) - u_0(x)\|_\lambda \leq \int \|u_0(x + \xi) - u_0(x)\|_\lambda \Phi(t, \xi) d\xi.$$

Ввиду того что $\varphi(\xi) = \|u_0(x + \xi) - u_0(x)\|_\lambda$ непрерывна (проверить это!) и $\varphi(0) = 0$, соотношение (2.10) вытекает из леммы 1.

Таким образом, для непрерывной функции $u_0(x)$ формула (2.7) определяет решение задачи Коши, удовлетворяющее начальному условию как поточечно (см. (2.9)), так и в смысле определения 3 п. 1 (см. (1.8)).

Для доказательства теоремы остается показать (2.10) для произвольной функции $u_0 \in L_\lambda^2$.

Выберем последовательность непрерывных функций $u_{0_k} \in L_\lambda^2$ ($k = 1, 2, \dots$) такую, чтобы $\|u_0 - u_{0_k}\|_\lambda \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Каждой функции u_{0_k} отвечает по формуле (2.7) решение $u_k(t, x)$. Из тождества

$$u(t, x) - u_0(x) = (u(t, x) - u_k(t, x)) + \\ + (u_k(t, x) - u_{0_k}(x)) + (u_{0_k}(x) - u_0(x))$$

при любом k имеем неравенство (для норм $L_\lambda^2(R^n)$)

$$\|u(t, x) - u_0(x)\|_\lambda \leq \|u(t, x) - u_k(t, x)\|_\lambda + \|u_k(t, x) - u_{0_k}(x)\|_\lambda + \\ + \|u_{0_k}(x) - u_0(x)\|_\lambda. \quad (2.11)$$

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем k настолько большим, чтобы $\|u_{0_k} - u_0\|_\lambda < \frac{\varepsilon}{4}$, и зафиксируем его. По лемме 2 существует $t_0 > 0$

такое, что $\|u_k(t, x) - u_{0k}(x)\|_\lambda < \frac{\varepsilon}{4}$ при $t < t_0$. Далее, из представления

$$u(t, x) - u_k(t, x) = \int (u_0(x + \xi) - u_{0k}(x + \xi)) \Phi(t, \xi) d\xi$$

имеем оценку

$$\begin{aligned} \|u(t, x) - u_k(t, x)\|_\lambda &\leq \int \psi(\xi) \Phi(t, \xi) d\xi, \\ \psi(\xi) &= \|u_0(x + \xi) - u_{0k}(x + \xi)\|_\lambda = \\ &= \left(\int (u_0(y) - u_{0k}(y))^2 \omega_\lambda(y - \xi) dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Очевидно, $\psi(\xi)$ — непрерывная функция и $\psi(0) = \|u_0 - u_{0k}\|_\lambda < \frac{\varepsilon}{4}$.

По лемме 1 существует $t_1 > 0$ такое, что при $t < t_1$

$$\|u(t, x) - u_k(t, x)\|_\lambda \leq \psi(0) + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из (2.11) следует теперь, что $\|u(t, x) - u_0(x)\|_\lambda < \varepsilon$ при $t < \min(t_0, t_1)$. Ввиду произвольности ε отсюда следует (2.10). Теорема доказана.

3. Неоднородное уравнение теплопроводности. Построим теперь решение следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t, x), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad f \in L_\lambda^2(\Pi^T), \quad u_0 \in L_\lambda^2(R^n). \quad (3.1)$$

Теорема. Единственное решение задачи (3.1) в области Π^T определяется формулой

$$u(t, x) = \int u_0(y) \Phi(t, x - y) dy + \int_0^t \int f(\tau, y) \Phi(t - \tau, x - y) dy d\tau, \quad (3.2)$$

где Φ — функция (2.4).

Доказательство. Зная, что первое слагаемое в формуле (3.2) представляет собой решение однородного уравнения (2.1) с условием $u|_{t=0} = u_0$ и обладает всеми нужными свойствами решения, нам достаточно показать, что второе слагаемое

$$v(t, x) = \int_0^t \int f(\tau, y) \Phi(t - \tau, x - y) dy d\tau \quad (3.3)$$

является решением задачи (3.1) с нулевым начальным условием: $v|_{t=0} = 0$. В силу инвариантности относительно сдвигов (по t и x) уравнения (2.1) решением этого уравнения в области $t > \tau$ является функция $\Phi(t - \tau, x - y)$ и, следовательно, (см. п. 2) функция

$$w_\tau(t, x) = \int f(\tau, y) \Phi(t - \tau, x - y) dy \quad (3.4)$$

для почти всех $\tau \geq 0$. При этом $w_\tau^+|_{t=\tau} = f(\tau, x)$.

В силу неравенства Коши — Буняковского из (3.4) следует

$$w_\tau^2(t, x) \leq \int f^2(\tau, y) \Phi(t - \tau, x - y) dy.$$

Умножая это неравенство на $\omega_\lambda(x)$ ($f \in L_\lambda^2(\Pi^T)$) и интегрируя по x с учетом неравенства $\omega_\lambda(x) \cdot \omega_\lambda(y) \leq \omega_{|\lambda|}(x - y)$, получим

$$\int w_\tau^2 \cdot \omega_\lambda dx \leq \varphi(t - \tau) \int f^2 \omega_\lambda dx,$$

$$\varphi(s) = \int \omega_{|\lambda|}(\xi) \Phi(s, \xi) d\xi < K, \quad (s \geq 0).$$

Отсюда для $v(t, x)$ имеем

$$\int v^2(t, x) \omega_\lambda(x) dx = \int \left(\int_0^t \omega_\tau d\tau \right)^2 \omega_\lambda dx \leq Kt^2 \int_0^t \int f^2(\tau, y) \omega_\lambda(y) dy d\tau. \quad (3.5)$$

Таким образом, $v(t, x) \in L_\lambda^2(R^n)$ при каждом $t \in (0, T)$ и существует след при $t = 0$, равный нулю: $v^+|_{t=0} = 0$.

При некоторой гладкости $f(t, x)$ функция $v(t, x)$ оказывается гладкой и

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(t, x) + \int_0^t \frac{\partial \omega_\tau}{\partial t} d\tau = f(t, x) + \int_0^t \Delta \omega_\tau d\tau = f(t, x) + \Delta v,$$

т. е. $v(t, x)$ удовлетворяет уравнению (3.1), а значит, равенству

$$\{v, \varphi\}_\tau^T \equiv \iint_\tau^T \left(\varphi \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx dt = \iint_\tau^T \varphi f dx dt, \quad \varphi \in H_{-\lambda}^T. \quad (3.6)$$

При этом, полагая в (3.6) $\varphi = v \cdot \omega_\lambda \in H_{-\lambda}^T$, имеем при $\tau \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \iint_0^T \omega_\lambda \sum_i \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx dt &= \frac{1}{2} \iint_0^T \Delta \omega_\lambda v^2 dx dt + \\ &+ \iint_0^T \omega_\lambda f \cdot v dx dt - \frac{1}{2} \int \omega_\lambda v^2(T, x) dx, \end{aligned}$$

откуда с учетом (3.5) и оценки (1.11) следует оценка

$$\iint_0^T \omega_\lambda(x) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} \right)^2 dx dt \leq C \iint_0^T \omega_\lambda(x) f^2(t, x) dx dt, \quad (3.7)$$

где C не зависит от v и f . Полагая в (3.6) $\varphi = \omega_\lambda \frac{\partial v}{\partial t}$, при $\tau \rightarrow 0$ имеем

$$\iint_0^T \omega_\lambda \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq \iint_0^T \omega_\lambda f \frac{\partial v}{\partial t} dx dt - \iint_0^T \frac{\partial v}{\partial t} \sum_i \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx dt.$$

Пользуясь оценкой (1.11) и неравенством

$$f \frac{\partial v}{\partial t} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2\varepsilon} f^2, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2$$

при достаточно малом ε ($\varepsilon > 0$), с помощью (3.7) получаем

$$\iint_0^T \omega_\lambda(x) \left(\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq C_1 \iint_0^T \omega_\lambda(x) f^2(t, x) dx dt \quad (3.8)$$

с некоторой, не зависящей от v и f , константой C_1 .

Таким образом, производные $\partial v / \partial t$ и $\partial v / \partial x_i$ оцениваются только через норму f в пространстве $L_\lambda^2(\Pi^T)$. Это говорит о том, что формула (3.3) определяет ограниченный оператор, действующий из $L_\lambda^2(\Pi^T)$ в $W_{1,\lambda}^2(\Pi^T)$, определенный на всех $f \in L_\lambda^2(\Pi^T)$. Очевидно, и при произвольном $f \in L_\lambda^2(\Pi^T)$ соответствующая функция $v(t, x)$ удовлетворяет равенству (3.6). Теорема доказана.

Функция $\Phi(t, x)$ (см. (2.4)) называется *фундаментальным решением* уравнения теплопроводности. Мы видим, что с ее помощью решение задачи Коши (3.1) представляется через квадратуры (3.2). Читатель легко заметит сходство формул (2.7), (3.2) с соответствующими фор-

мулами (п. VI.2.1) для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Есть, однако, существенное отличие, состоящее в том, что формулы для обыкновенных уравнений имеют смысл и для $t < 0$, тогда как функция $\Phi(t, x)$ и формулы (2.7), (3.2) теряют смысл при $t < 0$. Это является выражением уже отмечавшегося свойства параболических уравнений, описывающих необратимые процессы.

В пп. 2 и 3 мы полагали $c(t, x) \equiv 0$ (см. (1.1)). Особого рассмотрения случай $c \neq 0$ не требует, поскольку является частным случаем рассматриваемого ниже квазилинейного уравнения.

4. Квазилинейное уравнение. Рассмотрим теперь квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - F(t, x, u) = 0 \quad (4.1)$$

и поставим задачу Коши: найти решение $u(t, x)$, удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (4.2)$$

Предполагается, что $F(t, x, u)$ определена при $t \geq 0$, $x \in R^n$ и любых значениях u , имеет производную $\partial F / \partial u$ и для любой константы $A > 0$ существует константа $B = B(A) > 0$ такая, что

$$|F(t, x, u)| \leq B, \quad \left| \frac{\partial}{\partial u} F(t, x, u) \right| \leq B \quad ((t, x) \in \Pi^T, \quad |u| \leq A). \quad (4.3)$$

О п р е д е л е н и е. Функция $u(t, x) \in H_\lambda^T$, удовлетворяющая условию

$$u^+|_{t=0} = u_0(x) \in L_\lambda^2(R^n),$$

называется обобщенным решением задачи (4.1), (4.2) в области Π^T , если при любой функции $\varphi(t, x) \in H_{-\lambda}$ выполняется равенство

$$F\{u, \varphi\}_\tau^T = 0, \quad 0 < \tau < T, \quad (4.4)$$

$$F\{u, \varphi\}_{t_1}^{t_2} = \iint_{t_1}^{t_2} \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \varphi F(t, x, u) \right) dx dt. \quad (4.5)$$

Предполагается существование следа $u^+|_{t=0}$ в смысле определения 1 п. 1 и интеграла от $\varphi F(t, x, u)$ при $\varphi \in H_{-\lambda}^T$.

Как и в случае граничной задачи, квазилинейное уравнение удобно исследовать в классе ограниченных функций $u(t, x) \in H_\lambda^T$. Результаты § 3 почти дословно переносятся на случай задачи Коши.

Л е м м а. Пусть функция $u(t, x) \in H_\lambda^T$ удовлетворяет условиям:

$$u(t, x) \geq -m \quad (m > 0, (t, x) \in \Pi^T), \quad (4.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int (|u| - u)^2 \omega_\lambda dx = 0, \quad (4.7)$$

$$\{u, \varphi\}_\tau^T \geq 0 \quad (0 < \tau < T, \varphi \in H_{-\lambda}^T, \varphi \geq 0 \text{ (см. (1.6))}). \quad (4.8)$$

Тогда $u(t, x) \geq 0$ почти всюду в области Π^T .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эта лемма нас интересует лишь в случае ограниченной функции $c = c(t, x)$ в выражении (1.6). Как и в теореме п. 1.4, рассматривая функцию $v = u \exp(-at)$ при подходящем a , общий случай леммы можно свести к тому случаю, когда

$$c(t, x) \geq 0 \quad ((t, x) \in \Pi^T). \quad (4.9)$$

Поэтому (4.9) будем считать выполненным. Функция $|x|^2 + 2nt$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности. Поэтому функция

$$v(t, x) = u(t, x) + \frac{m}{R^2} (|x|^2 + 2nt) \quad (4.10)$$

в цилиндрической области $Q^T = \{(t, x), |x| < R, 0 < t < T\}$ принадлежит, очевидно, пространству B^T , $v|_{|x|=R} \geq 0$ (см. (4.6)) и для любой $\varphi \geq 0$, $\varphi \equiv 0$ при $|x| \geq R$ согласно (4.8)

$$\{v, \varphi\}_{\tau}^T = \{u, \varphi\}_{\tau}^T + \frac{m}{R^2} \int_{\tau}^T \int_{|x| < R} c \cdot \varphi (|x|^2 + 2nt) dx dt \geq 0.$$

Так как, очевидно, $|v| - v \leq |u| - u$ при $t > 0$, то для $\bar{v}(t, x)$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|x| < R} (|v(t, x)| - v(t, x))^2 dx = 0.$$

По теореме п. 1.4 $v(t, x) \geq 0$ почти всюду в области Q^T . Ввиду произвольности R при $R \rightarrow \infty$ отсюда и из (4.10) получаем утверждение леммы.

Как и в § 3, из этой леммы немедленно вытекает следующая теорема сравнения (ср. п. 3.1).

Теорема 1. Пусть ограниченные функции $u_1(t, x)$, $u_2(t, x) \in H_{\lambda}^T$ при любой неотрицательной функции $\varphi \in H_{-\lambda}^T$ удовлетворяют неравенству (см. (4.5))

$$F\{u_1, \varphi\}_{\tau}^T \geq F\{u_2, \varphi\}_{\tau}^T, \quad 0 < \tau < T. \quad (4.11)$$

Пусть, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int (|u_1 - u_2| - (u_1 - u_2))^2 \omega_{\lambda} dx = 0. \quad (4.12)$$

Тогда $u_1(t, x) \geq u_2(t, x)$ почти всюду в области Π^T .

Аналогично п. 3.1 из этой теоремы выводим следствия.

Следствие 1 (теорема единственности). Ограниченное обобщенное решение задачи Коши (4.1), (4.2) единственно.

Следствие 2 (теорема об ограниченности). Если ограниченные функции \bar{u} , $\underline{u} \in H_{\lambda}^T$, имеющие след при $t = 0$, удовлетворяют неравенствам

$$\bar{u}^+|_{t=0} \geq u_0 \geq \underline{u}^+|_{t=0}, \quad (4.13)$$

$$F\{\bar{u}, \varphi\}_{\tau}^T \geq 0 \geq F\{\underline{u}, \varphi\}_{\tau}^T \quad (0 < \tau < T) \quad (4.14)$$

для любой функции $\varphi \geq 0$ ($\varphi \in H_{-\lambda}^T$), то решение $u(t, x)$ задачи (4.1), (4.2) почти всюду в области Π^T удовлетворяет неравенствам

$$\bar{u}(t, x) \geq u(t, x) \geq \underline{u}(t, x). \quad (4.15)$$

Определение 2. Ограниченные функции \bar{u} , $\underline{u} \in H_{\lambda}^T$, имеющие след при $t = 0$ и удовлетворяющие условиям (4.13), (4.14), называются верхней и нижней функциями задачи (4.1), (4.2).

Следствие 3. Если $F(t, x, u) \equiv F(t, x)$, $|F(t, x)| \leq B$, $|u_0(x)| \leq A$ ($x \in R^n$, $0 < t < T$), то для решения задачи (4.1), (4.2) имеет место оценка

$$|u(t, x)| \leq A + Bt. \quad (4.16)$$

Непосредственно проверяется, что $\bar{u} = A + Bt$, $\underline{u} = -\bar{u}$ образуют верхнюю и нижнюю функции.

Теорема 2. Пусть $u_0(x)$ — ограничена, выполнено условие (4.3) и в области Π_T существуют верхняя и нижняя функции \bar{u} , \underline{u} задачи (4.1), (4.2).

Тогда в области Π^T существует обобщенное решение задачи (4.1), (4.2), удовлетворяющее неравенствам (4.15).

Доказательство этой теоремы получается дословным повторением доказательства теоремы п. 3.2, только вместо цилиндрических

областей $Q^r(Q^{r'})$ следует рассматривать полосы $P^r(P^{r'})$ и вместо следствия 3 п. 1.4 используется оценка (4.16).

Очевидным образом переносятся на случай задачи Коши и следствия 1, 2 п. 3.2.

Глава IX. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. РАЗРЕШИМОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

1. **Обобщенное решение.** В ограниченной открытой области G пространства R^n будем рассматривать квазилинейное уравнение вида

$$L(u) \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + F(x, u) = 0. \quad (1.1)$$

По-прежнему предполагается, что область G есть множество с конечным периметром. Через S обозначается ее существенная граница. Предполагается, что множество S каким-то образом разбито на непересекающиеся измеримые части S_1 и S_2 ($S_1 \cup S_2 = S$), на которых заданы граничные условия вида

$$u|_{S_1} = 0, \quad (D_\nu u + hu)|_{S_2} = 0. \quad (1.2)$$

Как обычно, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ обозначает единичную внешнюю нормаль к S ,

$$D_\nu u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad (x \in S_2).$$

Предполагается, что коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(x)$ ограничены и измеримы в области G , $a_{ij} = a_{ji}$, и удовлетворяют условию равномерной эллиптичности

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (x \in G), \quad (1.3)$$

где $\mu > 0$ — некоторая константа, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — произвольный вектор.

Функция $h = h(x)$ предполагается ограниченной и измеримой на множестве S_2 . При этом

либо $S_2 = \emptyset$ (первая краевая задача), (1.4)

либо $S_2 \neq \emptyset$ и $h(x) \geq \varrho > 0$ при $x \in S_2$, где ϱ — некоторая константа.

Условия (1.3), (1.4) обеспечивают сильную эллиптичность (п. VII.2.3) оператора

$$L_0 u \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \quad (1.5)$$

при граничных условиях (1.2).

Функция $F(x, u)$ предполагается заданной при $x \in G$ и всех значениях u (для простоты), причем для каждого $A > 0$ существует такое $B = B(A) > 0$, что

$$|F(x, u)| \leq B, \quad \left| \frac{\partial}{\partial u} F(x, u) \right| \leq B \quad \text{при } x \in G, \quad |u| \leq A. \quad (1.6)$$

Как и в случае линейных уравнений, удобно трактовать решение задачи (1.1), (1.2) как обобщенное. По-прежнему мы будем рассматривать

пространство функций $BV^2(G)$ и его подпространство E , состоящее из функций $u(x) \in BV^2$ с нулевым следом на S_1 : $u^+|_{S_1} = 0$ (в случае $S_1 = \emptyset$ E совпадает с BV^2).

О п р е д е л е н и е. Функция $u(x) \in E$ называется обобщенным решением граничной задачи (1.1), (1.2), если для любой функции $\varphi(x) \in E$ имеет место

$$\{u, \varphi\} \equiv \int_G \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \varphi F(u, x) \right) dx + \int_{S_2} hu^+ \varphi^+ dH_{n-1} = 0. \quad (1.7)$$

В случае линейной функции $F(x, u) = a(x)u + b(x)$ это определение совпадает с определением обобщенного решения линейного уравнения (п. VII.2.1). Для нас важно то, что число $\lambda = 0$ в силу условия (1.4) не является собственным значением граничной задачи (1.2) для уравнения $-L_0u = \lambda u$ (все собственные значения положительны). Это означает, что граничная задача (1.2) для уравнения

$$-L_0u = f(x) \quad (1.8)$$

однозначно разрешима при любой правой части $f(x) \in L^2(G)$. Решение $u(x)$ определяет, таким образом, ограниченный оператор

$$u = Rf, \quad (1.9)$$

действующий из $L^2(G)$ в пространство E . Если будет найдена функция $u(x)$ такая, что

$$f(x) = F(x, u(x)) \in L^2(G), \quad u = Rf, \quad (1.10)$$

то непременно $u(x) \in E$ и $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), т. е. удовлетворяет равенству (1.7).

2. Установление решения параболического уравнения. Наш подход к исследованию разрешимости задачи (1.1), (1.2) состоит в том, что мы будем стараться получить искомое решение как предел при $t \rightarrow \infty$ решения $u(t, x)$ параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L_0u - F(x, u) = 0, \quad u^+|_{t=0} = u_0 \quad (2.1)$$

при граничных условиях (1.2) и подходящей начальной функции $u_0(x)$. Поэтому предварительно мы исследуем условия установления при $t \rightarrow \infty$ решения задачи (2.1), (1.2). Основной результат заключается в следующей лемме.

Л е м м а. Пусть решение $u(t, x)$ задачи (2.1), (1.2) определено при всех $t > 0$, ограничено ($|u| < M$) и монотонно по t при почти всех $x \in G$. Тогда функция

$$u(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) \quad (2.2)$$

является ограниченным обобщенным решением задачи (1.1), (1.2).

Доказательство. В силу ограниченности и монотонности $u(t, x)$ предел (2.2) существует почти всюду в области G и является ограниченной функцией ($|u(x)| \leq M$), так что ограничена и, следовательно, принадлежит $L^2(G)$ функция $f(x) = F(x, u(x))$. Остается показать (см. (1.10)), что $u = Rf$.

Функция $u(t, x)$ как обобщенное решение задачи (2.1), (1.2) удовлетворяет интегральному тождеству ($\tau = k, T = k + 1, \varphi \equiv \varphi(x) \in E$)

$$\int_k^{k+1} \int \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \varphi F(x, u) \right) dx dt + \int_k^{k+1} \int_{S_2} hu^+ \varphi^+ dH_{n-1} dt = 0. \quad (2.3)$$

Положим:

$$u_k(x) = \int_k^{k+1} u(t, x) dt = \int_0^1 u(t+k, x) dt,$$

$$f_k(x) = \int_k^{k+1} F(x, u(t, x)) dt = \int_0^1 F(x, u(t+k, x)) dt,$$

$$\delta_k(x) = \int_k^{k+1} \frac{\partial u}{\partial t} dt = u(k+1, x) - u(k, x).$$

Соотношение (2.3) переписывается в виде

$$\int_G \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{S_2} hu_k^+ \varphi^+ dH_{n-1} = \int_G \varphi(f_k - \delta_k) dx. \quad (2.4)$$

Очевидно, $u_k(x) \in E$, так что $u_k(x)$ оказывается обобщенным решением задачи (1.8), (1.2) при $f = f_k - \delta_k$ и согласно (1.9)

$$u_k = R(f_k - \delta_k). \quad (2.5)$$

Так как ограничено почти всюду в области G

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = u(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k(x) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = F(x, u(x)),$$

то эти равенства имеют место и в смысле сходимости в $L^2(G)$. В силу непрерывности оператора R в $L^2(G)$ из (2.5) следует (1.10) при $k \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Таким образом, эта лемма позволяет иногда судить о разрешимости задачи (2.1), (1.2). Неудобство ее состоит в том, что она формулируется в терминах параболических уравнений. От этого, как увидим ниже, можно избавиться.

3. Верхняя и нижняя функции. Определение. Ограниченную функцию $\underline{u}(x) \in BV^2(G)$ будем называть нижней функцией задачи (1.1), (1.2), если

$$\underline{u}^+(x) \leq 0 \quad (x \in S_1), \quad \{\underline{u}, \varphi\} \leq 0 \quad (\varphi \geq 0, \varphi \in E). \quad (3.1)$$

Ограниченную функцию $\bar{u}(x) \in BV^2(G)$ будем называть верхней функцией задачи (1.1), (1.2), если

$$\bar{u}^+(x) \geq 0 \quad (x \in S_1), \quad \{\bar{u}, \varphi\} \geq 0 \quad (\varphi \geq 0, \varphi \in E). \quad (3.2)$$

В частности, ограниченное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) является одновременно и нижней и верхней функцией.

Если \underline{u} , \bar{u} и коэффициенты a_{ij} — достаточно гладкие функции, то (3.2), (3.1) вытекают из неравенств:

$$\bar{u}^+(x) \geq 0 \quad (x \in S_1), \quad (D, \bar{u} + h\bar{u})^+ \geq 0 \quad (x \in S_2),$$

$$-L(\bar{u}) \geq 0 \quad (x \in G, \text{ см. (1.1)}), \quad (3.3)$$

$$\underline{u}^+(x) \leq 0 \quad (x \in S_1), \quad (D, \underline{u} + h\underline{u})^+ \leq 0 \quad (x \in S_2),$$

$$-L(\underline{u}) \leq 0 \quad (x \in G). \quad (3.4)$$

Л е м м а. Если $\underline{u}(x)$ — нижняя функция задачи (1.1), (1.2), то решение $u_1(t, x)$ задачи (2.1), (1.2) при $u_0(x) = \underline{u}(x)$ является неубывающей функцией t .

Аналогично, если $\bar{u}(x)$ — верхняя функция задачи (1.1), (1.2), то решение $u_2(t, x)$ задачи (2.1), (1.2) при $u_0(x) = \bar{u}(x)$ является невозрастающей функцией t .

Доказательство. Ввиду инвариантности уравнения (2.1) и граничных условий (1.2) относительно сдвигов по t функция $v_-(t, x) = u_1(t + \tau, x)$ является обобщенным решением задачи (2.1), (1.2) при $u_0(x) = u_1(\tau, x)$ и произвольном $\tau > 0$.

Функция $\underline{u}(x)$ является нижней функцией задачи (2.1), (1.2) при $u_0 = \underline{u}$ (см. п. VIII.3.1), поэтому $u_1(\tau, x) \geq \underline{u}(x)$ при всех $\tau > 0$. Но тогда по принципу монотонности (п. VIII.3.1)

$$v_-(t, x) = u_1(t + \tau, x) \geq u_1(t, x)$$

почти всюду в области определения решений v_- и u_1 . Отсюда, очевидно, следует первое утверждение.

Аналогично доказывается второе утверждение. Лемма доказана.

Следствие. Пусть существуют верхняя и нижняя функции $\bar{u}(x)$ и $\underline{u}(x)$ задачи (1.1), (1.2), причём $\bar{u}(x) \geq \underline{u}(x)$ почти при всех $x \in G$. Тогда решения $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ задачи (2.1), (1.2) при $u_0 = \underline{u}$ и $u_0 = \bar{u}$ соответственно монотонны по t , определены при всех $t > 0$ и ограничены. Причём при почти всех x и $t > 0$ имеет место

$$\underline{u}(x) \leq u_1(t, x) \leq u_2(t, x) \leq \bar{u}(x). \quad (3.5)$$

Пределы $u_1(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t, x)$ и $u_2(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t, x)$ являются обобщенными решениями задачи (1.1), (1.2), быть может, совпадающими.

Это утверждение непосредственно вытекает из лемм пп. 2 и 3 и принципа монотонности (п. VIII.3.1).

4. Теорема о разрешимости. В терминах верхних и нижних функций можно сформулировать следующий критерий разрешимости задачи (1.1), (1.2) (ср. [55, 56]).

Теорема. Задача (1.1), (1.2) тогда и только тогда имеет ограниченное обобщенное решение, когда существуют верхняя и нижняя функции $\bar{u}(x)$ и $\underline{u}(x)$ этой задачи, удовлетворяющие почти всюду в области G неравенству $\underline{u}(x) \leq \bar{u}(x)$. При этом всегда есть решение $u(x)$ такое, что почти всюду

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x). \quad (4.1)$$

Среди всех ограниченных решений, удовлетворяющих неравенству $u(x) \geq \underline{u}(x)$, существует минимальное решение $u_1(x)$, а среди всех ограниченных решений, удовлетворяющих неравенству $u(x) \leq \bar{u}(x)$, существует максимальное решение $u_2(x)$. Функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют неравенствам (4.1) и являются пределами при $t \rightarrow \infty$ решений $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ задачи (2.1), (1.2) при $u_0 = \underline{u}$ и $u_0 = \bar{u}$ соответственно.

Доказательство. Если задача (1.1), (1.2) имеет ограниченное обобщенное решение $u(x)$, то достаточно взять в качестве верхней и нижней функций $\underline{u} = \bar{u} = u(x)$. Все утверждения теоремы при этом очевидны.

Пусть $\underline{u}(x) \leq \bar{u}(x)$ — нижняя и верхняя функции задачи (1.1), (1.2). Существование хотя бы одного решения, удовлетворяющего неравенствам (4.1), вытекает из следствия предыдущего пункта. В силу (3.5) для $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ имеем почти всюду

$$\underline{u}(x) \leq u_1(x) \leq u_2(x) \leq \bar{u}(x).$$

Если $\tilde{u}(x) \geq \underline{u}(x)$ — произвольное ограниченное решение задачи (1.1), (1.2), то функции $\underline{u}(x)$ и $\tilde{u}(x)$ являются нижней и верхней функциями задачи (2.1), (1.2) при $u_0 = \underline{u}$. Поэтому $u_1(t, x) \leq \tilde{u}(x)$, а значит, $u_1(x) \leq \tilde{u}(x)$ почти всюду. Этим доказана минимальность решения

$u_1(x)$. Аналогично доказываем, что $u_2(x)$ — максимальное решение в классе ограниченных функций $u(x) \leq \bar{u}(x)$. Теорема доказана.

Заметим, что требование $u(x) \leq \bar{u}(x)$ не является лишним. Если для параболических уравнений (п. VIII.3.1) выполнение интегральных неравенств и соответствующих начальных и граничных условий автоматически приводит к неравенству $u \leq \bar{u}$ во всей области, то для эллиптических уравнений это, вообще говоря, не так: из (3.1), (3.2) еще не следует $\underline{u} \leq \bar{u}$. В противном случае мы немедленно получили бы теорему единственности решения задачи (1.1), (1.2). В самом деле, для любых двух решений $u_1(x)$, $u_2(x)$ выполнялись бы одновременно оба неравенства: $u_1 \leq u_2$ и $u_2 \leq u_1$, т. е. $u_1 = u_2$. В общем случае, однако, решение задачи (1.1), (1.2) не единственно, что видно уже на простых примерах.

Пример. Рассмотрим одномерную задачу на отрезке $-1 < x < 1$

$$u'' + \lambda u e^{-u} = 0 \quad u(-1) = u(1) = 0. \quad (4.2)$$

При любом λ она имеет решение $u(x) \equiv 0$. Покажем, что при $\lambda > \frac{\pi^2}{4}$ существует другое, положительное решение. Функция $\underline{u}(x) = c_1 \cos \frac{\pi}{2} x$ удовлетворяет граничным условиям и неравенству

$$\underline{u}'' + \lambda \underline{u} e^{-\underline{u}} = \underline{u} \left(-\frac{\pi^2}{4} + \lambda \exp \left(-c_1 \cos \frac{\pi}{2} x \right) \right) \geq 0$$

при достаточно малом положительном c_1 : $e^{-c_1} = \frac{\pi^2}{4\lambda}$.

При достаточно большом $c_2 > 0$ функция $\bar{u}(x) = c_2 - x^2$ ($\bar{u}(\pm 1) > 0$) удовлетворяет неравенству

$$\bar{u}'' + \lambda \bar{u} e^{-\bar{u}} \leq 0.$$

Нетрудно видеть, что для этого достаточно взять $c_2 > u_2 + 1$, где u_2 — наибольший корень уравнения $u e^{-u} = \frac{2}{\lambda} \left(\lambda > \frac{\pi^2}{4} \right)$. Очевидно, всегда можно считать, что $0 < c_1 < c_2$ и $0 < \underline{u} < \bar{u}$ при $|x| \geq 1$. Так как \underline{u} и \bar{u} являются, очевидно, нижней и верхней функциями задачи (4.2) (см. (3.3), (3.4)), то при $\lambda > \frac{\pi^2}{4}$ существует положительное решение этой задачи

В том случае, когда оператор $L(u)$ (см. (1.1)) линейный ($F(x, u) = a(x)u + b(x)$) и положительно-определенный (п. VII 28), из условий (3.1), (3.2) и теоремы п VII 63 вытекает неравенство $\underline{u}(x) \leq \bar{u}(x)$, и это требование в теореме о разрешимости является лишним. В этом случае решение единственно.

§ 2. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

1. Понятие критического значения. Некоторые свойства. Ради простоты формулировок предположим, что $F(x, u) = a(x)F(u)$, и будем рассматривать задачу

$$L_0(u) + \lambda a(x)F(u) = 0, \quad u|_{S_1} = 0; \quad (D_x u + hu)|_{S_2} = 0 \quad (1.1)$$

при выполнении следующих условий:

$$\lambda \geq 0, \quad a(x) \geq 0, \quad F(u) > 0 \quad \text{при } u \geq 0. \quad (1.2)$$

Здесь L_0 — оператор (1.1.5). Функции $a(x)$ и $h(x)$ предполагаются ограниченными. По-прежнему предполагаются условия (1.1.3), (1.1.4). Мы прямо нигде не используем гладкости коэффициентов a_{ij} оператора L_0 , однако всюду, где понадобится, считаем ограниченным решение $u(x)$ краевой задачи для линейного уравнения вида $L_0 u + cu = f$ с ограниченными c и f (см. п. VII.6.6), если, конечно, такое решение существует. Область G предполагается связным открытым ограниченным множе-

ством с конечным периметром. Мы будем интересоваться неотрицательными решениями задачи (1.1). Поскольку $u(x) \equiv 0$ при выполнении (1.2) является нижней функцией задачи (1.1), то такое решение будет существовать при наличии неотрицательной верхней функции. Ниже, говоря о разрешимости или неразрешимости задачи (1.1), мы имеем в виду наличие или отсутствие ограниченного неотрицательного решения.

Докажем несколько простых утверждений.

1. *Задача (1.1) всегда разрешима при достаточно малых λ .*

Пусть $u_0(x) \geq 0$ — решение задачи (ср. (1.1.8), (1.1.9))

$$L_0 u + 1 = 0, \quad u|_{S_1} = 0, \quad (D_\nu u + hu)|_{S_2} = 0. \quad (1.3)$$

При достаточно малых λ имеем $\lambda a(x) F(u_0(x)) \leq 1$, поэтому, очевидно, $u_0(x)$ является верхней функцией задачи (1.1) при таких λ .

2. *Если задача (1.1) разрешима при $\lambda = \lambda_1 > 0$, то она разрешима при всех λ , $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$. Если задача (1.1) не разрешима при $\lambda = \lambda_1$, то она не разрешима при всех $\lambda \geq \lambda_1$.*

Пусть $u_1(x)$ — решение задачи (1.1) при $\lambda = \lambda_1$. Так как при $\lambda \leq \lambda_1$ имеем

$$\lambda a(x) F(u_1(x)) \leq \lambda_1 a(x) F(u_1(x)),$$

то $u_1(x)$ оказывается верхней функцией задачи (1.1) при $\lambda \leq \lambda_1$. Второе утверждение является, очевидно, следствием первого.

3. *Минимальное неотрицательное решение $u_\lambda(x)$ задачи (1.1) является неубывающей функцией λ .*

Существование минимального неотрицательного решения при достаточно малых λ следует из теоремы о разрешимости и утверждения 1. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2$. Как уже было сказано выше, $u_{\lambda_2}(x)$ является верхней функцией задачи (1.1) при $\lambda < \lambda_2$. Поэтому $u_{\lambda_1}(x) \leq u_{\lambda_2}(x)$.

4. *Либо задача (1.1) разрешима при всех $\lambda \geq 0$, либо существует $\lambda = \lambda_{кр} > 0$ такое, что при $\lambda < \lambda_{кр}$ задача разрешима, а при $\lambda > \lambda_{кр}$ — нет.*

Множество Λ_1 всех $\lambda > 0$, для которых задача (1.1) разрешима, не пусто в силу утверждения 1. Пусть Λ_2 — множество всех $\lambda \geq 0$, для которых задача (1.1) не разрешима. Если Λ_2 не пусто, то в силу утверждения 2 для любых $\lambda_1 \in \Lambda_1$ и $\lambda_2 \in \Lambda_2$ имеет место неравенство $\lambda_1 < \lambda_2$, т. е. на числовой оси λ все множество Λ_1 располагается левее, чем множество Λ_2 . Но так как любое значение $\lambda \geq 0$ принадлежит либо Λ_1 , либо Λ_2 , то имеет место

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_1} \lambda = \inf_{\lambda \in \Lambda_2} \lambda = \lambda_{кр}, \quad (1.4)$$

и для этого значения $\lambda_{кр}$ утверждение 4, очевидно, верно.

О п р е д е л е н и е. Величина (1.4) называется критическим значением задачи (1.1).

Таким образом, если $\lambda_{кр}$ — критическое значение, то при $\lambda < \lambda_{кр}$ задача (1.1) разрешима, а при $\lambda > \lambda_{кр}$ — нет.

5. *Для линейной функции $F(u) = u + c$ ($c \geq 0$) критическое значение задачи (1.1) совпадает с наименьшим (первым) собственным значением λ_0 задачи*

$$L_0 u + \lambda a(x) u = 0, \quad u|_{S_1} = 0; \quad (D_\nu u + hu)|_{S_2} = 0. \quad (1.5)$$

Действительно, при $\lambda < \lambda_0$ задача (1.1) имеет положительное ограниченное (п. VII.6.6) решение, а при $\lambda > \lambda_0$ положительное решение невозможно, так как функция $(\lambda - \lambda_0)u(x) + \lambda c$ ($u(x)$ — решение) не может быть ортогональна (с весом $a(x)$) к первой собственной функции задачи (1.5).

В общем случае величина $\lambda_{кр}$ зависит от функций $a(x)$, $F(u)$, области G и граничных условий. При этом качественное поведение $\lambda_{кр}$

оказывается очень похожим на поведение первого собственного значения λ_0 задачи (1.5). Ниже мы проводим сравнение различных задач. Поэтому для удобства обозначим через A задачу (1.1) при условии (1.2). Соответственно этому будем обозначать множества Λ_1 и Λ_2 через $\Lambda_1(A)$, $\Lambda_2(A)$, критическое значение — через $\lambda_{кр}(A)$.

6. Пусть наряду с задачей A имеем задачу A_1 в той же области, с теми же граничными условиями, но с функциями $a_1(x) \geq a(x)$, $F_1(u) \geq F(u)$. Тогда $\lambda_{кр}(A_1) \leq \lambda_{кр}(A)$.

Достаточно показать, что для соответствующих множеств $\Lambda_1(A)$ и $\Lambda_1(A_1)$ имеет место включение

$$\Lambda_1(A_1) \subset \Lambda_1(A). \quad (1.6)$$

Пусть $\lambda \in \Lambda_1(A_1)$. Тогда решение $u(x)$ задачи A_1 в силу неравенства $\lambda a_1 F_1(u) \geq \lambda a F(u)$ является верхней функцией задачи A , так что $\lambda \in \Lambda_1(A)$ и (1.6) доказано.

7. Пусть $G' \subset G$ — открытая подобласть с конечным периметром, S' — ее существенная граница. Положим $S_2' \subset S' \cap S_2$, $S_1' = S' \setminus S_2'$ и наряду с задачей A рассмотрим задачу A_1 в области G' с теми же функциями $a(x)$, $F(u)$, но с другими граничными условиями

$$u|_{S_1'} = 0, \quad (D_n u + h'u)|_{S_2'} = 0 \quad (h' \geq h, \quad x \in S_2').$$

Тогда $\lambda_{кр}(A_1) \geq \lambda_{кр}(A)$.

Пусть $\lambda \in \Lambda_1(A)$ и $u(x) \geq 0$ — решение задачи A при этом λ . Очевидно, $u^+|_{S_1'} \geq 0$. Кроме того, для $\varphi \in E(G')$ ($\varphi^+|_{S_1'} = 0$), $\varphi \geq 0$, продолжив ее нулем на множество $G \setminus G'$, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \left(\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \lambda \varphi a F(u) \right) dx + \int_{S_2} h u^+ \varphi^+ dH_{n-1} \leq \\ &\leq \int_{G'} \left(\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \lambda \varphi a F(u) \right) dx + \int_{S_2'} h' u^+ \varphi^+ dH_{n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $u(x)$ оказывается верхней функцией задачи A_1 . Это означает, что $\lambda \in \Lambda_1(A_1)$ и, значит, имеет место включение $\Lambda_1(A) \subset \Lambda_1(A_1)$. Отсюда и следует утверждение.

В частности, при $G' = G$ утверждение 7 означает, что $\lambda_{кр}$ может только увеличиться как при увеличении функции h , так и при сужении множества S_2 . При сохранении S_2 и h и сужении области G $\lambda_{кр}$ также может только увеличиться.

2. Существование критического значения. Оценка сверху. Теорема 1. Пусть $F(u) > 0$ при $u \geq 0$ и существует $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{F(u)}{u}$, конечный или бесконечный. При этих условиях задача (1.1) разрешима при любом $\lambda \geq 0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{F(u)}{u} = 0; \quad (2.1)$$

имеет конечное критическое значение тогда и только тогда, когда

$$m = \inf_{u > 0} \frac{F(u)}{u} > 0. \quad (2.2)$$

Доказательство. Пусть имеет место (2.1). Рассмотрим решение $u_0(x) \geq 0$ задачи (1.3) и положим $v(x) = u_0(x) + 1$. Очевидно, $\alpha v^+(x)|_{S_1} \geq \alpha$ при $\alpha > 0$ и, кроме того, для $\varphi \geq 0$, $\varphi \in E$ (см. (1.1.7))

$$\langle \alpha v, \varphi \rangle \geq \alpha \int_G \varphi(x) \left(1 - \lambda a(x) v(x) \frac{F(\alpha v(x))}{\alpha v(x)} \right) dx.$$

В силу условия (2.1), каково бы ни было $\lambda \geq 0$, можно указать α настолько большое, что подинтегральная скобка становится положительной. А это значит, что при каждом $\lambda \geq 0$ задача (1.1) имеет положительную верхнюю функцию вида $\alpha v(x)$. Таким образом, из условия (2.1) вытекает разрешимость при любом $\lambda \geq 0$. Покажем обратное.

Пусть задача (1.1) разрешима при любом $\lambda \geq 0$ и пусть $v_0(x)$ — первая собственная функция, а λ_0 — первое собственное значение задачи (1.5). По определению собственной функции имеем

$$\int_G \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial v_0}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{S_2} h v_0^\tau \varphi^1 dH_{n-1} = \lambda_0 \int v_0 \varphi \cdot \text{ad}x \quad (\varphi \in E).$$

Если $u = u(x, \lambda)$ — решение задачи (1.1), то при $\varphi = u$ (см. (1.1.7)) имеем

$$\lambda \int_G aF(u) \cdot v_0 dx = \lambda_0 \int_G a u v_0 dx. \quad (2.3)$$

Если $u(x, \lambda) \leq M_\lambda$ ($x \in G$), то из (2.3) следует ($a \neq 0, \lambda > 0$)

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\int aF(u) v_0 dx}{\int a u v_0 dx} \geq \min_{0 < u < M_\lambda} \frac{F(u)}{u}. \quad (2.4)$$

Если минимум в (2.4) достигается в точке u_λ ($u_\lambda > 0$), то

$$\frac{F(u_\lambda)}{u_\lambda} \leq \frac{\lambda_0}{\lambda} \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Множество значений $\{u_\lambda\}$ не может быть ограниченным при $\lambda \rightarrow \infty$, так как в противном случае в некоторой конечной предельной точке $u_0 > 0$ этого множества при $\lambda \rightarrow \infty$ из (2.5), вопреки условию теоремы, получаем $F(u_0) = 0$. Таким образом, существует такая последовательность $\lambda_k \rightarrow \infty$, что $u_k = u_{\lambda_k} \rightarrow \infty$, и в силу (2.5) $\frac{F(u_k)}{u_k} \rightarrow 0$ при $\lambda_k \rightarrow \infty$.

В силу предположения о существовании предела отношения $\frac{F(u)}{u}$ отсюда следует равенство (2.1). Первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение в доказательстве не нуждается: оно является отрицанием первого утверждения. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если $F(u_0) = 0$ в некоторой точке $u_0 \geq 0$ ($F(u) \geq 0$ при $0 \leq u \leq u_0$), то независимо от поведения функции $F(u)$ при $u \rightarrow \infty$ задача (1.1) ($a(x) \geq 0$) разрешима при любом $\lambda \geq 0$ и существует решение $u_\lambda(x)$ такое, что $0 \leq u_\lambda(x) \leq u_0$.

Это очевидно, поскольку $\bar{u} \equiv u_0$ является верхней функцией задачи (1.1) при любом λ .

Т е о р е м а 2. При выполнении условия (2.2) имеет место оценка

$$\lambda_{\text{кр}} \leq \frac{\lambda_0}{m}, \quad (2.6)$$

где λ_0 — первое собственное значение задачи (1.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\lambda \in \Lambda_1$ имеем решение $u(x)$ задачи (1.1), и для него из определений решения и собственной функции $v_0(x)$ следует равенство (2.3), откуда в силу условия (2.2) ($F(u(x)) \geq m u(x)$) и неотрицательности $v_0(x)$ имеем

$$\lambda_0 \int_G a u v_0 dx \geq \lambda m \int_G a u v_0 dx.$$

Таким образом, для любого $\lambda \in \Lambda_1$ имеем оценку $\lambda \leq \frac{\lambda_0}{m}$. Отсюда и из определения $\lambda_{\text{кр}}$ (см. п. 1) следует (2.6).

Равенство в (2.6) достигается для линейной функции $F(u) = mu + C$ ($m > 0, C > 0$), так что оценка (2.6) в классе всех функций $F(u)$, удовлетворяющих условию (2.2), не улучшаема.

3. Асимптотическая формула для $\lambda_{кр}$. Рассматривая третью краевую задачу ($S_1 = \emptyset, S_2 = S$)

$$L_0 u + \lambda a(x)F(u) = 0 \quad (D_\nu u + hu)'_S = 0 \quad (3.1)$$

и соответствующую задачу (1.5)

$$L_0 v + \lambda a(x)v = 0, \quad (D_\nu v + hv)'_S = 0, \quad (3.2)$$

можно указать важное дополнение к оценке (2.6).

Теорема. Пусть выполнено условие (2.2) и функция $h = h(x)$ в (3.1), (3.2) такова, что

$$h(x) = \varepsilon h_0(x), \quad \varepsilon > 0, \quad \varrho_1 \geq h_0(x) \geq \varrho_1 > 0. \quad (3.3)$$

Если $\lambda_{кр}$ — критическое значение задачи (3.1), а λ_0 — первое собственное значение задачи (3.2), то имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_{кр}}{\lambda_0} = \frac{1}{m}. \quad (3.4)$$

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме, выражающей по существу непрерывную зависимость от ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ первой собственной функции $v_0 = v_0(x, \varepsilon)$ задачи (3.2), (3.3).

Лемма. Каковы бы ни были константы $K_2 > K_1 > 0$, можно указать $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ подходящим образом нормированная функция $v_0(x, \varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам

$$K_1 \leq v_0(x, \varepsilon) \leq K_2 \quad (x \in G). \quad (3.5)$$

лемма утверждает, таким образом, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $v_0(x, \varepsilon)$ равномерно по x стремится к некоторой константе, являющейся первой собственной функцией второй краевой задачи ($h = 0$).

С помощью этой леммы легко получить (3.4). Зафиксируем $\kappa > m$. В силу условия (2.2) m есть наибольшее из чисел γ , для которых неравенство $F(u) \geq \gamma u$ имеет место при всех $u \geq 0$. Поэтому существует интервал $[K_1, K_2]$, $0 < K_1 < K_2 \leq \infty$, такой, что

$$F(u) \leq \kappa u, \quad u \in [K_1, K_2]. \quad (3.6)$$

Для этих K_1, K_2 согласно лемме имеет место (3.5) при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Согласно (3.6)

$$\lambda a F(v_0) \leq \lambda_0 a v_0 \quad \left(x \in G, \lambda = \frac{\lambda_0}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

и $v_0(x, \varepsilon)$ оказывается верхней функцией задачи (3.1) при $\lambda = \frac{\lambda_0}{\varepsilon}$.

С учетом оценки (2.6) имеем

$$\frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{\lambda_{кр}}{\lambda_0} \leq \frac{1}{m} \quad (\varepsilon \leq \varepsilon_0).$$

Откуда в силу произвольности $\kappa > m$ следует (3.4). Теорема доказана.

Формула (3.4) показывает, что оценку (2.6) нельзя улучшить и для фиксированной функции $F(u)$ в классе всевозможных граничных условий третьего рода.

Относительно доказательства леммы мы заметим следующее. Из неравенства

$$\mu \int_G |\nabla v_0|^2 dx < \int_G \sum_{ij} \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x_j} dx + \int_S h(v_0^+)^2 dH_{n-1} = \lambda_0 \left(\int_G v_0^2 dx = 1 \right)$$

следует

$$\int_G |\nabla v_0|^2 dx \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (3.7)$$

поскольку $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon) \rightarrow 0$. Отсюда следует компактность семейства функций $v_0(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в пространстве $L^2(G)$ (в случае регулярности границы области G). Если v_0 — предел некоторой последовательности $v_{0k} = v_0(x, \varepsilon_k)$ при $\varepsilon_k \rightarrow 0$, то в силу (3.7)

$$\bar{v}_0 = \text{const} = \left(\int_G adx \right)^{-1/2}.$$

Этот предел не зависит от выбора сходящейся последовательности, и поэтому имеет место

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_0(x, \varepsilon) = \bar{v}_0 \text{ в } L^2(G).$$

В условиях п. VII.6.6, можно показать, что эта сходимости на самом деле имеет место в каждой точке x равномерно по $x \in G$, т. е. для любого $\delta > 0$ можно указать $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, что

$$\bar{v}_0 - \delta < v_0(x, \varepsilon) < \bar{v}_0 + \delta \quad (\varepsilon \leq \varepsilon(\delta)). \quad (3.8)$$

Возьмем δ настолько малым, чтобы $K_1(\bar{v}_0 + \delta) < K_2(\bar{v}_0 - \delta)$. Умножив $v_0(x, \varepsilon)$ на нормировочный множитель $\frac{K_1}{(\bar{v}_0 - \delta)}$, из (3.8) получаем (3.5) при $\varepsilon \leq \varepsilon(\delta)$.

§ 3. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

1. Постановка вопроса. Неединственность решения нелинейной краевой задачи

$$L_0 u + a(x)F(u) = 0, \quad u|_{S_1} = 0, \quad (D_x u + hu)|_{S_2} = 0, \quad h \geq \rho > 0 \quad (1.1)$$

является скорее правилом, чем исключением. При этом структура множества всех решений часто бывает весьма сложной (см. п. XI.2.3). Поэтому важное значение приобретает выработка критериев отбора физически содержательного решения. Одним из таких критериев часто единственным) является устойчивость решения.

Наш подход к исследованию устойчивости состоит в том, что мы рассматриваем решение задачи (1.1) как стационарное решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_0 u + a(x)F(u), \quad u|_{S_1} = 0, \quad (D_x u + hu)|_{S_2} = 0. \quad (1.2)$$

Понятие устойчивости, которым мы пользуемся, является естественным обобщением понятия асимптотической устойчивости по Ляпунову стационарной точки обыкновенного дифференциального уравнения.

О п р е д е л е н и е. *Ограниченное обобщенное решение $u_0(x)$ задачи (1.1) назовем устойчивым, если существуют число $\delta > 0$ и ограниченная измеримая функция $\psi(x)$, $\psi(x) > 0$ при $x \in G$ такие, что при любом ε , $\varepsilon \leq \delta$, в интервале $t \in (0, \infty)$ определено обобщенное решение $u_\varepsilon(t, x)$ задачи (1.2) при начальном условии*

$$u|_{t=0} = u_0(x) + \varepsilon \psi(x) \quad (1.3)$$

и выполняется (почти при всех x и t) неравенство

$$|u_\varepsilon(t, x) - u_0(x)| \leq |\varepsilon| \psi(x) e^{-\delta t}. \quad (1.4)$$

Из (1.4) и принципа монотонности следует, что при любом $\varphi(x)$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ решение $u(t, x)$ уравнения (1.2) с начальным условием $u|_{t=0} = u_0(x) + \varphi(x)$ экспоненциально приближается к $u_0(x)$. Мы исследуем, таким образом, вопрос об асимптотической устойчивости решений, хотя для краткости говорим просто об устойчивости.

В этом параграфе, не оговаривая каждый раз особо, мы пользуемся результатами § 6 гл. VII для линейных уравнений, для чего, во всяком случае, достаточно, чтобы коэффициенты a_{ij} оператора L_0 были определены в области Ω , содержащей область G вместе с границей, и имели там ограниченные вторые производные. Область G считается связной.

2. Критерии устойчивости. **О п р е д е л е н и е.** *Мы скажем, что ограниченное решение $u_0(x)$ задачи (1.1) отделимо, если существуют функ-*

цми $\underline{u} > 0$, $\bar{u} > 0$ ($x \in G$), \underline{u} , $\bar{u} \in BV^2$, и положительное число δ такие, что

$$[u_0 + \alpha \bar{u}, \varphi] - \int_G \varphi a F(u_0 + \alpha \bar{u}) dx \geq \alpha \delta \int_G \bar{u} \varphi dx, \quad (2.1)$$

$$[u_0 - \alpha \underline{u}, \varphi] - \int_G \varphi a F(u_0 - \alpha \underline{u}) dx \leq -\alpha \delta \int_G \underline{u} \varphi dx, \quad (2.2)$$

каковы бы ни были α , $0 \leq \alpha \leq 1$ и неотрицательная функция $\varphi \in E$.
Здесь и ниже

$$[u, \varphi] = \int_G \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx + \int_{S_2} h u^+ \varphi^+ dH_{n-1}.$$

Условия (2.1), (2.2) означают, что $u_0 + \alpha \bar{u}$, $u_0 - \alpha \underline{u}$ являются верхней и нижней функциями задачи (1.1) в строгом смысле при любом α , $0 < \alpha \leq 1$.

Функции $u_0 - \underline{u}$, $u_0 + \bar{u}$ будем называть отделяющими.

С оператором $\bar{L}_0(u) + a(x)F(u)$ и некоторым решением $u_0(x)$ задачи (1.1) обычно связывают линейный дифференциальный оператор $L_0(u) + a(x)F'(u_0)v$, называемый оператором в вариациях. При исследовании устойчивости часто пользуются следующим определением.

Решение $u_0(x)$ задачи (1.1) называют устойчивым, если наименьшее собственное значение μ_0 задачи

$$L_0 v + a(x)F'(u_0)v + \mu v = 0, \quad v|_{S_1} = 0, \quad (D, v + hv)|_{S_2} = 0 \quad (2.3)$$

положительно.

Корректность такого определения следует из принятого нами более естественного понятия устойчивости. Отделимость решения также, оказывается, эквивалентна устойчивости.

Теорема. Пусть $F'(u)$ непрерывна и $u_0(x)$ — ограниченное решение задачи (1.1). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) наименьшее собственное значение μ_0 задачи (2.3) положительно;
- 2) решение $u_0(x)$ отделимо;
- 3) решение $u_0(x)$ устойчиво.

Доказательство. Пусть $\mu_0 > 0$ и $v_0(x) > 0$ — соответствующая собственная функция задачи (2.3). Пусть $0 < \delta_1 < \mu_0$, $\delta = \mu_0 - \delta_1$. Ввиду непрерывности $F'(u)$ можно так пронормировать (выбрать положительный множитель) функцию $v_0(x) > 0$, чтобы

$$a(x)(F(u_0 + \alpha v_0) - F(u_0)) \leq (\alpha F'(u_0) + \delta_1) \alpha v_0;$$

$$a(x)(F(u_0 - \alpha v_0) - F(u_0)) \geq -(\alpha F'(u_0) + \delta_1) \alpha v_0$$

равномерно по α , $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда при $\varphi \geq 0$, $\varphi \in E$ имеем

$$\begin{aligned} [u_0 + \alpha v_0, \varphi] - \int_G \varphi a F(u_0 + \alpha v_0) dx &= \alpha [v_0, \varphi] - \\ &- \int_G \varphi a (F(u_0 + \alpha v_0) - F(u_0)) dx \geq \alpha \{ [v_0, \varphi] - \\ &- \int_G \varphi a F'(u_0) v_0 dx - \delta_1 \int_G \varphi v_0 dx \} = \alpha (\mu_0 - \delta_1) \int_G \varphi v_0 dx = \alpha \delta \int_G \varphi v_0 dx \end{aligned}$$

и аналогично

$$[u_0 - \alpha v_0, \varphi] - \int_G \varphi a F(u_0 - \alpha v_0) dx \leq -\alpha \delta \int_G \varphi v_0 dx,$$

т. е. $u_0(x)$ отделимо. Таким образом, из 1) следует 2).

Пусть теперь $u_0(x)$ отделимо. Положим в неравенствах (2.1), (2.2) $\alpha = \beta \exp(-\delta t)$, $0 \leq \beta \leq 1$ и рассмотрим функции:

$$\bar{w}(t, x) = u_0(x) + \beta \bar{u}(x) \exp(-\delta t), \quad (2.4)$$

$$\underline{w}(t, x) = u_0(x) - \beta \underline{u}(x) \exp(-\delta t).$$

Неравенства (2.1), (2.2) означают, что функции (2.4) являются верхней и нижней функциями задачи (1.2) при любом начальном условии вида

$$u|_{t=0} = u_0(x) + \psi(x), \quad -\beta \underline{u}(x) \leq \psi(x) \leq \beta \bar{u}(x), \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что при $\psi(x) = \min\{\underline{u}(x), \bar{u}(x)\}$ ($|\varepsilon| = \beta$) для решения $u_\varepsilon(t, x)$ задачи (1.2), (1.3) имеет место (1.4), т. е. $u_0(x)$ устойчиво. Таким образом, из 2) следует 3).

Осталось показать, что из 3) следует 1). Пусть $u_0(x)$ устойчиво, т. е. для некоторых $\delta > 0$, $\psi(x) > 0$ решение $u_\varepsilon(t, x)$ задачи (1.2), (1.3) удовлетворяет условию (1.4). Линейная краевая задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L_0(v) + aF'(u_0)v, \quad v|_{t=0} = \psi(x), \quad v|_{S_1} = 0, \quad (D_v v + hv)|_{S_2} = 0 \quad (2.6)$$

разрешима при $t \in (0, \infty)$ (см. следствие 2 п. VIII.3.2). Покажем, что для ее решения $v(t, x)$ имеет место оценка

$$0 \leq v(t, x) \leq \psi(x) \exp(-\delta t). \quad (2.7)$$

Первое неравенство очевидно, поскольку $v \equiv 0$ — нижняя функция задачи (2.6). Функция

$$z_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon} (u_\varepsilon(t, x) - u_0(x))$$

является обобщенным решением задачи

$$\frac{\partial z}{\partial t} = L_0(z) + c_\varepsilon(t, x)z, \quad z|_{t=0} = \psi(x),$$

$$z|_{S_1} = 0, \quad (D_v z + hz)|_{S_2} = 0, \quad (2.8)$$

где коэффициент

$$c_\varepsilon(t, x) = a(x) \int_0^1 F'(\alpha u_\varepsilon + (1-\alpha)u_0) d\alpha$$

ввиду (1.4) и непрерывности $F'(u)$ равномерно по t, x удовлетворяет оценке

$$|c_\varepsilon(t, x) - a(x)F'(u_0)| \leq A(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Из (2.6) и (2.8) для $w_\varepsilon(t, x) = v(t, x) - z_\varepsilon(t, x)$ имеем

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} = L_0(w_\varepsilon) + aF'(u_0)w_\varepsilon + (aF'(u_0) - c_\varepsilon(t, x))z_\varepsilon(t, x), \quad w_\varepsilon|_{t=0} = 0$$

и те же однородные граничные условия. Поэтому если

$$B = \sup |a(x)F'(u_0)|, \quad C = \sup |\psi(x)| \quad (|z_\varepsilon(t, x)| \leq C),$$

то на основании того же следствия 2 п. VIII.3.2 имеем с учетом (2.9)

$$|w_\varepsilon(t, x)| \leq \frac{C}{B} (e^{Bt} - 1)A(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что

$$v(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z_\varepsilon(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u_\varepsilon(t, x) - u_0(x)}{\varepsilon} = \left. \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0},$$

причем одновременно доказано существование $\left. \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$. Оценка (2.7) следует теперь из оценки (1.4) для $z_\varepsilon(t, x)$.

С другой стороны, решая задачу (2.6) методом Фурье, имеем

$$v(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v_k(x) \exp(-\mu_k t), \quad (2.10)$$

где (μ_k, v_k) — полный набор собственных значений и ортогональных собственных функций задачи (2.3), подчиненный нормировке

$$\mu_0 < \mu_1 \leq \mu_2, \dots, \int_G v_k^2 dx = 1 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

При этом $v_0(x) > 0$, $c_0 = \int_G v_0 \psi dx > 0$. Из (2.10) и оценки (2.7) имеем

$$\int_G v(t, x) v_0(x) dx = c_0 e^{-\mu_0 t} \leq c_0 \exp(-\delta t).$$

Откуда и следует $\mu_0 \geq \delta > 0$. Теорема доказана полностью.

3. Некоторые следствия критериев устойчивости. Одним из тривиальных достаточных условий устойчивости решения $u_0(x)$ задачи (1.1) является условие

$$a(x)F'(u_0(x)) \leq 0,$$

так как в этом случае собственное значение μ_0 задачи (2.3) оценивается снизу положительным собственным значением $\bar{\mu}_0$ задачи

$$L_0(v) + \mu v = 0, \quad v|_{S_1} = 0 \quad (D, v + hv)|_{S_2} = 0.$$

Понятие отделимости позволяет указать другие достаточные условия устойчивости, а также доказать важное свойство изолированности устойчивого решения. Без специальных оговорок исследуемое решение $u_0(x)$ всюду предполагается ограниченным.

Теорема 1. Пусть решение $u_0(x)$ задачи (1.1) устойчиво и $u_0 + \bar{u}(x)$, $u_0 - \underline{u}(x)$ — некоторые отделяющие функции. Тогда в классе функций $u(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$u_0(x) - \underline{u}(x) \leq u(x) \leq u_0(x) + \bar{u}(x), \quad (3.1)$$

решение $u_0(x)$ единственно.

Доказательство. Неравенства (2.1), (2.2) ($\alpha = 1$) означают, в частности, что $\bar{v} = u_0 + \bar{u}$ и $\underline{v} = u_0 - \underline{u}$ являются верхней и нижней функциями задачи (1.1). Для доказательства единственности $u_0(x)$ достаточно показать, что минимальное и максимальное решения в интервале (3.1) совпадают. Как уже отмечали при доказательстве теоремы п. 2, из (2.1), (2.2) ($\alpha = \exp(-\delta t)$) вытекают неравенства

$$\bar{w}(t, x) = u_0(x) + \bar{u}(x) \exp(-\delta t) \geq u_2(t, x),$$

$$\underline{w}(t, x) = u_0(x) - \underline{u}(x) \exp(-\delta t) \leq u_1(t, x),$$

где $u_2(t, x) \geq u_1(t, x)$ — решения задачи (1.2) при начальных условиях

$$u_2(t, x)|_{t=0} = \bar{u}_0 + \bar{u}(x), \quad u_1(t, x)|_{t=0} = u_0 - \underline{u}(x).$$

Но так как \bar{w} и \underline{w} имеют один и тот же предел $u_0(x)$ при $t \rightarrow \infty$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t, x) = u_0(x)$. Согласно теореме п. 1.4 это и означает, что минимальное и максимальное решения задачи (1.1) в интервале (3.1) совпадают с $u_0(x)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $u_0(x)$ — решение задачи (1.1) и существуют функции $\bar{v}(x)$, $\underline{v}(x)$ и постоянная $\delta > 0$ такие, что

$$\underline{v}(x) \leq u_0(x) \leq \bar{v}(x), \quad x \in G \cup S_1, \quad \min \{u_0 - \underline{v}, \bar{v} - u_0\} > 0 \quad (x \in G); \quad (3.2)$$

$$[\underline{v}, \varphi] - \int_G \varphi a F(\underline{v}) dx \leq -\delta \int_G (u_0 - \underline{v}) \varphi dx; \quad (3.3)$$

$$[\bar{v}, \varphi] - \int_G \varphi a F(\bar{v}) dx \geq \delta \int_G \varphi (\bar{v} - u_0) dx \quad (3.4)$$

для любой функции $\varphi \geq 0$, $\varphi \in E$. Пусть, кроме того, $a(x) \geq 0$ и $F'(u)$ не убывает ($a(x) \leq 0$ и $F'(u)$ не возрастает) при $u \in [\inf \underline{v}, \sup \bar{v}]$.

Тогда решение $u_0(x)$ устойчиво, а \underline{v} и \bar{v} являются отделяющими функциями.

Доказательство. По предположению относительно $a(x)$ и $F'(u)$ при любом α , $0 \leq \alpha \leq 1$, имеем ($\underline{u} = \bar{v} - u_0$, $\bar{u} = u_0 - \underline{v}$)

$$\begin{aligned} \alpha(F(u_0 + \alpha \bar{u}) - F(u_0)) &= \alpha \bar{u} \int_0^1 F'(u_0 + s \alpha \bar{u}) ds \leq \\ &\leq \alpha \bar{u} \int_0^1 F'(u_0 + s \bar{u}) ds = \alpha a(F(u_0 + \bar{u}) - F(u_0)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

и аналогично

$$\alpha(F(u_0 - \alpha \underline{u}) - F(u_0)) \geq \alpha a(F(u_0 - \underline{u}) - F(u_0)). \quad (3.6)$$

Из (3.4), (3.5) при $\varphi \geq 0$, $\varphi \in E$ ввиду равенства

$$[u_0, \varphi] = \int_G \varphi a F(u_0) dx, \quad u_0 + \bar{u} = \bar{v}$$

получаем

$$\begin{aligned} [u_0 + \alpha \bar{u}, \varphi] - \int_G \varphi a F(u_0 + \alpha \bar{u}) dx &= \alpha [\bar{u}, \varphi] - \\ - \int_G \varphi a (F(u_0 + \alpha \bar{u}) - F(u_0)) dx &\geq \alpha [\bar{u}, \varphi] - \\ - \alpha \int_G \varphi a (F(u_0 + \bar{u}) - F(u_0)) dx &= \alpha ([\bar{v}, \varphi] - \int_G \varphi a F(\bar{v}) dx) \geq \alpha \delta \int_G \bar{u} \varphi dx \end{aligned}$$

и аналогично из (3.3) и (3.6)

$$[u_0 - \alpha \underline{u}, \varphi] - \int_G \varphi a F(u_0 - \alpha \underline{u}) dx \leq -\alpha \delta \int_G \underline{u} \varphi dx.$$

Таким образом, $u_0(x)$ отделимо, следовательно, устойчиво и отделяющими функциями оказываются $\underline{v} = u_0 - \underline{u}$ и $\bar{v} = u_0 + \bar{u}$. Теорема доказана.

Условия (3.3)—(3.4) теоремы 2 означают, что \bar{v} и \underline{v} являются верхней и нижней функциями задачи (1.1) в несколько более сильном смысле, чем в определении п. 1. 3. При выполнении других условий теоремы 2 из теорем 1 и 2 следует, что между такими верхней и нижней функциями существует только одно решение и оно устойчиво. Обнаруживается замечательное свойство теоремы о разрешимости в терминах верхних и нижних функций, гарантирующей по существу наличие устойчивого решения.

Из теорем 1 и 2 легко вытекает следующая теорема единственности устойчивого решения.

Теорема 3. При выполнении условий

$$\inf a(x) > 0, \quad F(u) > 0, \quad F''(u) \geq 0 \quad \text{при } u \geq 0 \quad (3.7)$$

среди всех положительных решений задачи (1.1) устойчивым может быть только одно — наименьшее положительное решение.

Доказательство. Пусть $u_0(x)$ — устойчивое положительное решение и $\underline{u}(x)$, $\bar{u}(x)$ — некоторые отделяющие функции, так что согласно (2.1), (2.2) ($\alpha = 1$) функции \underline{u} и \bar{u} удовлетворяют условиям (3.2)—(3.4) теоремы 2. Но этим условиям удовлетворяют, очевидно, и функции $\bar{u}(x)$ и $u(x) \equiv 0$, так как $a(x)F(0) > \delta u_0(x)$ при достаточно малом δ . В силу (3.7) $F'(u)$ — неубывающая функция при $u \geq 0$ и по теореме 2 $u \equiv 0$ и $u(x)$ являются отделяющими функциями. По теореме 1 не существует другого решения, кроме $u_0(x)$, удовлетворяющего неравенствам

$$0 \leq u_0(x) \leq \bar{u}(x).$$

Но так как минимальное положительное решение всегда удовлетворяет этим неравенствам, то $u_0(x)$ минимально. Теорема доказана.

Можно привести примеры, когда нарушение условия выпуклости ($F'' \geq 0$) приводит к неединственности устойчивого решения. Есть и такие примеры, когда при выполнении условий (3.7) существует только одно положительное решение и оно неустойчиво. Как увидим ниже, таковым оказывается ограниченное решение, отвечающее критическому значению задачи с параметром, когда такое решение существует.

4. Задача с параметром. Рассмотрим вопросы устойчивости в важном случае задачи с параметром

$$L_0 u + \lambda a(x)F(u) = 0, \quad u|_{S_1} = 0, \quad (D_\nu u + hu)|_{S_2} = 0, \quad h \geq \rho > 0. \quad (4.1)$$

При этом, как всегда, считаем $a(x)$ ограниченной функцией. Пусть, кроме того, (ср. (3.7))

$$a_0 = \inf a(x) > 0, \quad F(u) > 0, \quad F''(u) \geq 0 \quad \text{при } u \geq 0. \quad (4.2)$$

Параметр λ меняется в интервале $0 < \lambda < \lambda_{кр} \leq \infty$. Через $u_\lambda(x)$ обозначим наименьшее положительное решение задачи (4.1).

Теорема. При выполнении условий (4.2) среди положительных решений задачи (4.1) при $0 < \lambda < \lambda_{кр}$ минимальное решение $u_\lambda(x)$, и только оно, устойчиво.

Решение $u_\lambda(x)$ является непрерывной возрастающей функцией λ .

Доказательство. В п. 2.1 было показано, что при выполнении условия (2.1.2) решение $u_\lambda(x)$ является неубывающей функцией λ . Из условия (4.2) и п. VII.6.3 следует, что $u_\lambda(x)$ является строго возрастающей функцией λ . Покажем устойчивость $u_\lambda(x)$. Зафиксируем λ_1 , $\lambda < \lambda_1 < \lambda_{кр}$, и положим $\underline{u} \equiv 0$, $\bar{u} = u_{\lambda_1}$. Тогда при $\varphi \in E$, $\varphi \geq 0$ имеем

$$[\underline{u}, \varphi] - \lambda \int_G \varphi a F(\underline{u}) dx = -\lambda F(0) \int_G \varphi a dx < -\delta_1 \int_G \varphi u_\lambda dx, \quad (4.3)$$

так как $\delta_1 u_\lambda(x) \leq \lambda F(0) a_0$ при достаточно малом $\delta_1 > 0$;

$$[\bar{u}, \varphi] - \lambda \int_G \varphi a F(\bar{u}) dx = (\lambda_1 - \lambda) \int_G \varphi a F(u_{\lambda_1}) dx \geq \delta_2 \int_G \varphi (u_{\lambda_1} - u_\lambda) dx \quad (4.4)$$

при некотором $\delta_2 > 0$. При $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ выполнены все условия теоремы 2 п. 3. Поэтому $u_\lambda(x)$ устойчиво и отделяется функциями $\underline{u} \equiv 0$, $\bar{u} = u_{\lambda_1}$ ($\lambda_1 > \lambda$). По теореме 3 п. 3 других положительных устойчивых решений нет. Остается показать непрерывность по λ .

Согласно операторному представлению (1.1.10)

$$u_{\lambda_1}(x) = R f_\lambda, \quad f_\lambda(x) = \lambda a(x)F(u_\lambda(x)). \quad (4.5)$$

Пусть $\lambda_0 \in (0, \lambda_{кр})$. В силу монотонности по λ почти всюду существуют пределы

$$u_- = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 - 0} u_\lambda, \quad u_+ = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0} u_\lambda.$$

Такой предельный переход возможен и в равенствах (4.5) под знаком R .

Поэтому u_{λ} — решения задачи (4.1) при $\lambda = \lambda_0$. Причем, очевидно, $0 < u_- < u_{\lambda_1}$ ($x \in G, \lambda_1 > \lambda_0$). Согласно (4.3), (4.4) для $u = 0, \bar{u} = u_{\lambda_1}$, условий (4.2) и теоремы 2 п. 3 функции $\underline{u} = 0, \bar{u} = u_{\lambda_1}$ являются отделяющими функциями для u_{λ_0} . Следовательно, по теореме 1 п. 3 $u^+ = u^- = u_{\lambda_0}$. Ввиду произвольности $\lambda_0 \in (0, \lambda_{кр})$ непрерывность по λ , а тем самым и теорема доказаны.

С л е д с т в и е. При любом $\lambda \in (0, \lambda_{кр})$ первое собственное значение μ_{λ} задачи

$$L_0 v + \lambda a(x) F'(u_{\lambda}(x)) v + \mu v = 0, \quad v|_{S_1} = 0, \quad (D, v + hv)|_{S_2} = 0. \quad (4.6)$$

положительно (см. (2.3) и теорему п. 2).

5. Случай $\lambda = \lambda_{кр}$. Единственность. Специального рассмотрения требует задача (4.1) при $\lambda = \lambda_{кр}$ (когда $\lambda_{кр} < \infty$). Вместо условий (4.2) будем предполагать

$$a_0 = \inf a(x) > 0, \quad F(u) > 0, \quad F'(u) > 0, \quad F''(u) > 0 \quad \text{при } u \geq 0. \quad (5.1)$$

В этом случае заведомо существует $\lambda_{кр} < \infty$, так как $F(u) > F'(0)u + F(0)$,

$$m = \inf_{u > 0} \frac{F(u)}{u} > 0.$$

Т е о р е м а. Если выполнено (5.1) и задача (4.1) при $\lambda = \lambda_{кр}$ имеет ограниченное положительное решение $u_{кр}(x)$, то это решение единственно. При этом почти всюду в области G

$$u_{кр}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{кр}} u_{\lambda}(x) \quad (5.2)$$

и наименьшее собственное значение μ_0 задачи

$$L_0 v + \lambda_{кр} a F'(u_{кр}) v + \mu v = 0, \quad v|_{S_1} = 0, \quad (D, v + hv)|_{S_2} = 0 \quad (5.3)$$

равно нулю, или, что то же самое, $\lambda_{кр}$ совпадает с первым собственным значением μ задачи

$$L_0 v + \mu a F'(u_{кр}) v = 0, \quad v|_{S_1} = 0, \quad (D, v + hv)|_{S_2} = 0. \quad (5.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через $u_{кр}(x)$ обозначим минимальное положительное ограниченное решение задачи (4.1) при $\lambda = \lambda_{кр}$. Очевидно, $u_{кр}(x)$ является верхней функцией задачи (4.1) при $\lambda < \lambda_{кр}$. Поэтому $u_{\lambda}(x) < u_{кр}(x)$ при $\lambda < \lambda_{кр}$ почти всюду. Используя монотонность $u_{\lambda}(x)$ и операторное представление (1.1.10), легко получаем, что решением задачи (4.1) при $\lambda = \lambda_{кр}$ является $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{кр}} u_{\lambda} \leq u_{кр}$. Отсюда и из минимальности $u_{кр}$ следует (5.2).

Собственное значение $\mu_{\lambda} > 0$ задачи (4.6) является убывающей функцией λ (в силу $F'' > 0$ и возрастания u_{λ}), и для величины μ_0 в задаче (5.3) имеем

$$\mu_0 = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{кр}} \mu_{\lambda} \geq 0. \quad (5.5)$$

Покажем, что неравенство $\mu_0 > 0$ несостоятельно. Из $\mu_0 > 0$ вытекает $\bar{\mu} > \lambda_{кр}$ в задаче (5.4), и, следовательно, для некоторого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \bar{\mu} - \lambda_{кр}$) оказывается разрешимой задача

$$L_0 v + (\lambda_{кр} + \varepsilon) a F'(u_{кр}) v + a F(u_{кр}) = 0, \quad v|_{S_1} = 0, \quad (D, v + hv)|_{S_2} = 0. \quad (5.6)$$

Решение $v(x)$ этой задачи положительно и ограничено (п. VII.6.6). При $\alpha > 0$ рассмотрим функцию $u_{кр} + \alpha v$ и покажем, что при достаточно малом α эта функция окажется верхней функцией задачи (4.1) при $\lambda = \lambda_{кр} + \alpha$, что, очевидно, невозможно по определению $\lambda_{кр}$.

При $\varphi \in E$ легко убедиться, что

$$[u_{кр} + \alpha v, \varphi] - (\lambda_{кр} + \alpha) \int \varphi a F(u_{кр} + \alpha v) dx = \alpha (\lambda_{кр} + \varepsilon) \int_G \varphi a v [F'(u_{кр}) - \\ - \frac{\lambda_{кр} + \alpha}{\lambda_{кр} + \varepsilon} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F'(u_{кр} + tv) dt] dx.$$

Квадратная скобка под интегралом равномерно по x при $\alpha \rightarrow 0$ имеет предел

$$\frac{\varepsilon}{\lambda_{кр} + \varepsilon} F'(u_{кр}) > 0,$$

поэтому скобка неотрицательна при $\alpha \leq \alpha_0(\varepsilon)$ ($\alpha_0(\varepsilon) > 0$). Отсюда при $\varphi \geq 0$ и следует, что $u_{кр} + \alpha_0 v$ является верхней функцией задачи (4.1) при $\lambda = \lambda_{кр} + \alpha_0$. Невозможность этого и доказывает равенство (см. (5.5)) $\mu_0 = 0$ и, следовательно, $\bar{\mu} = \lambda_{кр}$.

Остается показать единственность решения $u_{кр}(x)$. Предположим, что есть другое решение $u(x) \geq u_{кр}(x)$, $u(x) > u_{кр}(x)$ на множестве положительной меры. Тогда $w(x) = u(x) - u_{кр}(x)$ удовлетворяет (в обобщенном смысле) уравнению

$$L_0 w + \lambda_{кр} a(F(u_{кр} + w) - F(u_{кр})) = 0, \quad w|_{S_1} = 0 \quad (D, w + hw)|_{S_2} = 0.$$

При этом в силу возрастания $F'(u)$ ($F'' > 0$) имеем

$$F(u_{кр} + w) - F(u_{кр}) = F'(u_{кр}) w + \psi(x),$$

где $\psi(x) \geq 0$, $\psi(x) > 0$ на множестве положительной меры. Из существования w должна следовать ортогональность $\lambda_{кр} a \psi$ к первой собственной функции задачи (5.4) ($\lambda_{кр} = \bar{\mu}$), что невозможно. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Равенство $\mu_0 = 0$ согласно теореме п. 2 означает, что решение $u_{кр}(x)$ неустойчиво.

Впрочем, легко понять, что $u_{кр}(x)$ полуустойчиво, т. е. устойчиво относительно односторонних возмущений, уменьшающих $u_{кр}(x)$. В общем случае даже при более слабом понятии устойчивости (не требующем асимптотической устойчивости) решение $u_{кр}(x)$ остается лишь полуустойчивым.

6 Случай $\lambda = \lambda_{кр}$. Разрешимость. В теореме п. 5 требовалось существование ограниченного решения $u_{кр}$. Естественно возникает вопрос, когда это имеет место? Этот вопрос оказывается трудным, но и весьма интересным. В случае линейной функции $F(u) = cu + b$ ($c > 0$, $b > 0$) $\lambda_{кр}$ совпадает с первым собственным значением однородной задачи и потому при $b \neq 0$ не имеет решения при $\lambda = \lambda_{кр}$. С другой стороны, первая краевая задача

$$\Delta u + \lambda e^u = 0, \quad u|_{S_1} = 0 \tag{6.1}$$

в единичном круге: $r^2 = x^2 + y^2 < 1$, как будет показано в п. XI.2.2, имеет два решения при $\lambda < 2$:

$$u_{\pm}(r) = 2 \ln \frac{2}{1 + r^2 \pm (1 - r^2) \sqrt{1 - \frac{\lambda}{2}}},$$

которые при $\lambda = \lambda_{кр} = 2$ сливаются и определяют ограниченное решение

$$u_{кр}(r) = 2 \ln \frac{2}{1 + r^2}.$$

Аналогично положение и в одномерном случае задачи (6.1). Исследование задачи (6.1) в сферических областях произвольной размерности $n + 2$, проведенное в XI.2, показывает, что ограниченное решение $u_{кр}(r)$ существует при $n < 8$. При $n \geq 8$ (размерность 10 и выше) обобщенное решение $u_{кр}(r)$ хотя и существует, но перестает быть ограниченным. Как показано в XI.2.3, при $n \geq 8$ имеет место

$$\lambda_{кр} = 2n, \quad u_{кр}(r) = 2 \ln \frac{1}{r}.$$

Этот пример показывает, что вопрос о существовании ограниченного $u_p(x)$ является весьма тонким, зависящим как от поведения функции $F(u)$, так и от размерности пространства.

Мы ограничимся тем, что при определенных ограничениях на функцию $F(u)$ в задаче (4.1) покажем существование обобщенного решения этой задачи при $\lambda = \lambda_{кр}$ в некотором более слабом смысле, чем в определении п. 1.1.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

$$\inf a(x) > 0; \quad F(u) > 0, \quad F'(u) > 0, \quad F''(u) \geq 0 \quad \text{при } u \geq 0;$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{F(u)}{u} = \infty \quad (6.2)$$

и пусть $u_\lambda(x)$ — минимальное положительное решение задачи (4.1). Тогда почти всюду в области G существует предел

$$u_{кр}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{кр}} u_\lambda(x), \quad (6.3)$$

удовлетворяющий следующему равенству:

$$\int_G (u_{кр}(x) L_0 \varphi(x) + \lambda_{кр} \varphi(x) a(x) F(u_{кр}(x))) dx = 0, \quad (6.4)$$

где $\varphi(x)$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая граничным условиям (4.1).

Доказательство. Первую собственную функцию $v_0(x)$ задачи

$$L_0 v + \lambda a(x)v = 0, \quad v|_{S_1} = 0, \quad (D_\nu v + hv)|_{S_2} = 0 \quad (6.5)$$

пронормируем так, чтобы

$$\int_G v_0(x) a(x) dx = 1.$$

Тогда формула

$$\bar{f} = \int_G f(x) v_0(x) a(x) dx \quad (6.6)$$

определяет некоторое среднее значение функции $f(x)$. Аналогично (2.2.3) для решения $u_\lambda(x)$ с учетом обозначения (6.6) имеем

$$\lambda F(\bar{u}_\lambda) - \lambda_0 \bar{u}_\lambda = 0, \quad (6.7)$$

где λ_0 — первое собственное значение задачи (6.5).

Из свойства выпуклости $F(u)$ ($F'' > 0$) следует

$$F(u_\lambda(x)) \geq F(\bar{u}_\lambda) + F'(\bar{u}_\lambda)(u_\lambda(x) - \bar{u}_\lambda).$$

Осредняя это неравенство по формуле (6.6), получаем $\bar{F}(\bar{u}_\lambda) \geq F(\bar{u}_\lambda)$ и из (6.7) имеем, следовательно,

$$F(\bar{u}_\lambda) \leq \frac{\lambda_0}{\lambda} \bar{u}_\lambda. \quad (6.8)$$

Таким образом, при $\lambda < \lambda_{кр}$ алгебраическое уравнение

$$F(s) = \frac{\lambda_0}{\lambda} s \quad (6.9)$$

имеет решение (в силу условия $\frac{F(s)}{s} \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$). Пусть s_λ — максимальный положительный корень уравнения (6.9). Тогда $F(s) > \frac{\lambda_0 s}{\lambda}$ при $s > s_\lambda$ и, таким образом,

из (6.8) вытекает неравенство $\bar{u}_\lambda \leq s_\lambda$. Так как с увеличением λ \bar{u}_λ возрастает, а s_λ убывает, то существует не зависящее от λ число $s_0 = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{кр}} s_\lambda$, ограничивающее \bar{u}_λ :

$$\bar{u}_\lambda \leq s_0, \quad \lambda < \lambda_{кр}. \quad (6.10)$$

Таким образом, интеграл (6.6) монотонно возрастающего семейства функций $u_\lambda(x)$ оказывается ограниченным. Следовательно, при почти всех $x \in G$ существует предел (6.3), суммируемый с весом $a(x)v_0(x)$. Из условия $F'(u) > 0$ (см. (6.2)) и равенства (6.7) следует, что таковым является и предел

$$F(u_{кр}(x)) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{кр}} F(u_\lambda(x)). \quad (6.11)$$

Далее, для любой гладкой функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей граничным условиям (4.1), из тождества (1.7) для $u_\lambda(x)$ и формулы Грина следует равенство (ср. (6.4))

$$\int_G (u_\lambda L_0 \varphi + \lambda a(x) F(u_\lambda) \varphi) dx = 0.$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow \lambda_{кр}$, получим (6.4) Теорема доказана.

Ясно, что если семейство функций $u_\lambda(x)$ равномерно ограничено, то функция $u_{кр}(x)$ ограничена и является обобщенным решением задачи (4.1) при $\lambda = \lambda_{кр}$ в смысле определения п. 1.1. Это следует из представления (1.1.10) для $u_\lambda(x)$, если учесть, что (6.11) в этом случае имеет место и в $L^2(G)$.

Заметим, что неограниченное решение может существовать и при $\lambda < \lambda_{кр}$. Например, задача (6.1) в шаре размерности $n+2$ ($n > 0$) всегда имеет решение

$$u(r) = 2 \ln \frac{1}{r} \in BV^2$$

при $\lambda = 2n$, причем $2n < \lambda_{кр}$ при $n < 8$ (см. п. XI 2.3). Другое дело, что при $\lambda < \lambda_{кр}$ всегда есть и ограниченное решение.

§ 4. ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1. **Метод осреднения.** На примере параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\lambda} L_0(u) = F(u), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \lambda > 0 \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$u|_{S_1} = 0, \quad (D_\nu u + hu)|_{S_2} = 0, \quad h = h(x) > 0 \quad (1.2)$$

мы изложим здесь один метод приближенного решения уравнений, состоящий в осреднении определенным способом по пространственным переменным $x \in G$ (или по части таких переменных).

По-прежнему область G ($x \in G$) считается ограниченной открытой областью с конечным периметром. Кроме того, будем считать, что область G связана, а ее граница регулярна (см. п. V.3.7). Через L_0 по-прежнему обозначается оператор (1.1.5) и предполагается условие (1.1.3).

Рассмотрим первое собственное значение $\lambda_0 > 0$ и его собственную функцию $v_0(x) \geq 0$ красной задачи (1.2) для уравнения

$$L_0(v) + \lambda v = 0 \quad (1.3)$$

и пронормируем $v_0(x)$ так, чтобы

$$\int_G v_0(x) dx = 1. \quad (1.4)$$

Тогда формула

$$\bar{f} = \int_G f(x) v_0(x) dx \quad (1.5)$$

определяет среднее значение функции $f(x)$.

В интегральном тождестве (VIII.3.1.6) для обобщенного решения $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) можно взять $\varphi(t, x) = v_0(x)$. Тогда с учетом обозначения (1.5) и по определению собственной функции

$$\int_G v_0 \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{d\bar{u}}{dt}, \quad \int_G \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x_j} dx + \int_{S_2} hu^+ v_0 dx = \lambda_0 \int_G v_0 u dx = \lambda_0 \bar{u},$$

и в силу произвольности пределов интегрирования τ и T имеем

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{\lambda_0}{\lambda} \bar{u} = \bar{F}(\bar{u}), \quad \bar{u}(0) = \bar{u}_0. \quad (1.6)$$

З а м е ч а н и е. В случае гладких функций $u(t, x)$, $v_0(x)$ равенство (1.6) получается почленным осреднением по формуле (1.5) равенства (1.1), так как по формуле Грина

$$\overline{L_0(u)} = \int_G u L_0(v_0) dx = -\lambda_0 \int_G u v_0 dx = -\lambda_0 \bar{u}$$

Разлагая $F(u)$ по формуле Тэйлора в окрестности $\bar{u} = \bar{u}(t)$:

$$F(u) = F(\bar{u}) + F'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \frac{1}{2}F''(\bar{u} + \theta(u - \bar{u}))(u - \bar{u})^2, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

полагая $u = u(t, x)$ и осредняя по формуле (1.5), получим

$$\overline{F(u)} \simeq \overline{F(\bar{u})} \quad (1.7)$$

с погрешностью порядка $(u - \bar{u})^2$. В том случае, когда этой погрешностью можно пренебречь, из (1.6) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению (знак осреднения опускаем)

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\chi} u + F(u), \quad u(0) = \bar{u}_0, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\chi}. \quad (1.8)$$

Надо отметить, что соотношение (1.7) точно выполняется лишь для линейной функции $F(u) = a + bu$ с постоянными коэффициентами. В этом случае $u(t)$ есть по существу первый коэффициент разложения $u(t, x)$ в ряд Фурье по системе собственных функций задачи (1.2), (1.3). Для нелинейной функции $F(u)$ предположение (1.7) нуждается в обосновании. Мы покажем, что в случае третьей краевой задачи, когда вместо (1.2) на всей границе S задано

$$(D_x u + hu)|_S = 0, \quad h = \varepsilon h_0(x), \quad h_0 \geq \varrho > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.9)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ и одновременном изменении λ таким образом, что $\lambda = \kappa \lambda_0(\varepsilon)$, соотношение (1.7) переходит в точное равенство. Здесь $\lambda_0(\varepsilon)$ — первое собственное значение задачи (1.3), (1.9). Через $v_{0\varepsilon}$ обозначим соответствующую собственную функцию с нормировкой (1.4), через $u_\varepsilon(t, x)$ — решение задачи (1.1), (1.9) при $\lambda = \kappa \lambda_0(\varepsilon)$ и, наконец, положим

$$\bar{u}_\varepsilon(t) = \int_G u_\varepsilon(t, x) v_{0\varepsilon}(x) dx, \quad \bar{u}_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{u}_\varepsilon(0). \quad (1.10)$$

Теорема. *Каково бы ни было $\kappa > 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\lambda = \kappa \lambda_0(\varepsilon)$, существует*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{u}_\varepsilon(t) = u(t), \quad (1.11)$$

где $u(t)$ — решение задачи (1.8). Соотношение (1.11) имеет место при $t \geq 0$ во всей области определения функции $u(t)$.

Доказательство проведем для простоты в случае постоянной начальной функции $u_0(x) \equiv \bar{u}_0$. Тогда при любом ε $\bar{u}_\varepsilon(0) = \bar{u}_0$. Согласно следствию 1 п. VIII.3.2 существует интервал $(0, T)$, в котором определено и равномерно по ε и κ ограничено обобщенное решение $u_\varepsilon(t, x)$ задачи (1.1), (1.9). Пусть $T_\kappa = T_\kappa(\varepsilon_0) \geq T$ таково ($T_\kappa < \infty$), что $u(t, x)$ ограничено равномерно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при $t \in (0, T_\kappa)$ и фиксированном $\kappa > 0$. Тогда ограничены $F(u_\varepsilon)$ и $F'(u_\varepsilon)$ и, следовательно, $\partial u_\varepsilon / \partial t$, которую можно рассматривать как обобщенное решение краевой задачи (1.9) для линейного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{\lambda} L_0(w) = F'(u_\varepsilon)w, \quad w|_{t=0} = F(\bar{u}_0)$$

(см. следствия п. VIII.2.2).

Итак, в цилиндрической области Q^{T_κ} имеем:

$$|u_\varepsilon(t, x)| < M, \quad \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right| < M \quad (\varepsilon \leq \varepsilon_0). \quad (1.12)$$

Далее, из интегрального тождества для $u_\varepsilon(t, x)$

$$\int_{\tau}^t \frac{1}{\lambda} \left(\int_G \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx + \int_S h u_\varepsilon^+ \varphi^+ dH_{n-1} \right) dt = \\ = \int_{\tau}^t \int_G \varphi \left(F(u_\varepsilon) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right) dx dt$$

(см. (1.1.3)) при $\varphi = u_\varepsilon(t, x)$ с учетом $h > 0$ и условия параболичности вытекает

$$\mu \int_{\tau}^t \int_G |\nabla u_\varepsilon|^2 dx dt \leq \int_{\tau}^t \int_G \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} dx dt \leq \\ \leq \lambda \int_{\tau}^t \int_G u_\varepsilon \left(F(u_\varepsilon) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right) dx dt.$$

Ввиду ограниченности последнего интеграла (даже при $\tau = 0, t = T_x$) и стремления к нулю величины $\lambda = \kappa \lambda_0(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ отсюда заключаем, что

$$\int_0^{T_x} \int_G |\nabla u_\varepsilon|^2 dx dt \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

Следовательно, интеграл (1.13) ограничен равномерно по ε при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Вместе с (1.12) это означает ограниченность нормы в $W_2^1(Q^{T_x})$:

$$\int_0^{T_x} \int_G \left(u_\varepsilon^2 + \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right)^2 + |\nabla u_\varepsilon|^2 \right) dx dt < M_1 \quad \text{при } \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Последнее означает, что семейство функций $u_\varepsilon(t, x)$ компактно в $L^2(Q^{T_x})$. Пусть $u(t, x)$ — предел в $L^2(Q^{T_x})$ некоторой последовательности $u_{\varepsilon_k}(t, x)$ при $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Для этой последовательности имеет место (1.13) и, следовательно, $u(t, x) \equiv u(t)$ (не зависит от x !). Кроме того, ввиду (1.12) $u(t)$ ограничена: $|u(t)| < M$, и, не ограничивая общности, можно считать, что сходимость $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u$ имеет место почти всюду в Q^{T_x} , так что почти всюду $\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} F(u_{\varepsilon_k}(t, x)) = F(u(t))$.

Далее, по неравенству Коши — Буняковского

$$|u(t) - \overline{u_{\varepsilon_k}}(t)| = \left| \int_G (u(t) - u_{\varepsilon_k}(t, x)) v_{0\varepsilon_k} dx \right| \leq \\ \leq \|v_{0\varepsilon_k}\|_{L^2(G)} \|u(t) - u_{\varepsilon_k}(t, x)\|_{L^2(G)},$$

так что при почти всех t

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \overline{u_{\varepsilon_k}}(t, x) = \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \overline{u_{\varepsilon_k}}(t) = u(t) \quad (1.14)$$

и аналогично

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} F(u_{\varepsilon_k}(t, x)) = \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \overline{F(u_{\varepsilon_k}(t, x))} = F(u(t)). \quad (1.15)$$

Для $\overline{u_{\varepsilon_k}}(t)$ выполняется (1.6), т. е.

$$\overline{u_{\varepsilon_k}}(t) = \overline{u_0} + \int_0^t \left(\overline{F(u_{\varepsilon_k})} - \frac{1}{\lambda} u_{\varepsilon_k} \right) dt. \quad (1.16)$$

Ограниченная сходимость (1.14), (1.15) позволяет в равенстве (1.16) выполнить предельный переход под знаком интеграла. Получим

$$u(t) = \bar{u}_0 + \int_0^t \left(F(u(\tau)) - \frac{1}{x} u(\tau) \right) d\tau.$$

Отсюда следует, что $u(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей условию $u(0) = \bar{u}_0$ и уравнению (1.8). Единственность решения (1.8) означает, что на самом деле все семейство функций $u_\varepsilon(t, x)$ и, значит, $\bar{u}_\varepsilon(t)$ сходится к $u(t)$ при $0 < t < T_x$, причем, очевидно, равномерно по t . По теореме о непрерывной зависимости от параметра для обыкновенных уравнений предельное соотношение (1.11) имеет место во всей области существования $u(t)$. Теорема доказана.

Смысл доказанной теоремы состоит в том, что приближенное равенство (1.7) оказывается точным асимптотическим равенством в случае трестей красвой задачи при малых h , а задача (1.8) — предельным случаем (при $h \rightarrow 0$, $\frac{\lambda}{\lambda_0} = x = \text{const}$) задачи (1.1), (1.9). Можно надеяться, однако, что уравнение (1.8) сохраняет смысл приближенного уравнения, заменяющего краевую задачу для уравнения (1.1) в широком классе граничных условий вида (1.2).

Мы будем называть уравнение (1.8) *осредненным уравнением*, соответствующим задаче (1.1), (1.2), если λ_0 — первое собственное значение задачи (1.2), (1.3).

Следующее замечание позволяет расширить круг уравнений и систем уравнений, к которым можно применить аналогичное осреднение. Пусть имеем суперпозицию $\Phi(u_1, \dots, u_m)$ функции $u_1(x), \dots, u_m(x)$ и $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ — их средние в некотором смысле. По формуле Тэйлора

$$\begin{aligned} \Phi(u_1, \dots, u_m) &= \Phi(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial u_i} \Phi(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m) (u_i - \bar{u}_i) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} (u_i - \bar{u}_i) (u_j - \bar{u}_j). \end{aligned}$$

Осредняя тем же способом, что и u_i , имеем $\overline{(u_i - \bar{u}_i)} = 0$ и с погрешностью порядка $\sum_{i=1}^m \overline{(u_i - \bar{u}_i)^2}$

$$\overline{\Phi(u_1, \dots, u_m)} = \Phi(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m). \quad (1.17)$$

2. Анализ осредненного уравнения. Предположим, что $\bar{u}_0 = 0$ и рассмотрим задачу

$$\frac{du}{dt} = F(u) - \frac{1}{x} u, \quad u(0) = 0, \quad x = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad (2.1)$$

когда

$$F(u) > 0 \text{ при } u \geq 0. \quad (2.2)$$

Так же как и для параболического уравнения, решение $u(t)$ монотонно возрастает и ограничено при $t > 0$ тогда и только тогда, когда стационарное алгебраическое уравнение

$$F(u) = \frac{1}{x} u \quad (2.3)$$

имеет неотрицательное решение. Монотонность вытекает из того, что продифференцированное по t уравнение имеет решение

$$\frac{du}{dt} = F(u) \exp \left[\int_0^t \left(F'(u) - \frac{1}{x} \right) dt \right] > 0.$$

Поэтому если решение ограничено, то $u_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} u_0(t) > 0$ является стационарной точкой уравнения (2.1), т. е. корнем уравнения (2.3). Обратно, если $u_0 > 0$ — корень уравнения (2.3), то $u \equiv u_0$ есть стационарное решение уравнения (2.1) и ввиду $u(0) < u_0$ имеем $u(t) \leq u_0, t \geq 0$.

Аналогично теореме 1 п. 2.2 уравнение (2.3) имеет неотрицательное решение при любом $x > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{F(u)}{u} = 0 \quad (2.4)$$

если предполагать существование конечного или бесконечного предела). Отсюда вытекает, что уравнение (2.3) разрешимо не при всех $x > 0$ в том и только в том случае, когда

$$\inf_{u > 0} \frac{F(u)}{u} = m > 0. \quad (2.5)$$

При этом критическим значением параметра x оказывается

$$x_{кр} = \frac{1}{m}. \quad (2.6)$$

В самом деле, при $x < \frac{1}{m}$, т. е. $\frac{1}{x} > m$, согласно (2.5) существует $u > 0$ так, что $\frac{F(u)}{u} = \frac{1}{x}$, и, значит, (2.3) разрешимо, а при $x > \frac{1}{m}$, т. е. $\frac{1}{x} < m$, согласно (2.5) $\frac{F(u)}{u} > \frac{1}{x}$ при всех $u \geq 0$, так что (2.3) не имеет решения.

Если вспомнить, что $x = \frac{\lambda}{\lambda_0}$, то осредненное уравнение (2.1) дает для параметра λ в исходной задаче (1.1), (1.2) в качестве критического значения

$$\lambda^* = \frac{\lambda_0}{m}. \quad (2.7)$$

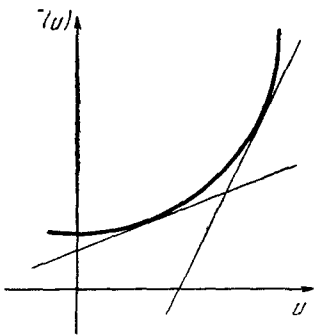


Рис. 12

Согласно теореме 2 п. 2.2 λ^* есть верхняя оценка для точного значения $\lambda_{кр}$. Таким образом, какова бы ни была функция $F(u)$, удовлетворяющая условиям (2.2), (2.5), осреднение уравнения, т. е. допущение (1.7), приводит к увеличению значения λ_p до величины (2.7). Как и следовало ожидать, (2.7) дает точное асимптотическое значение для $\lambda_{кр}$ в случае третьей краевой задачи при $h \rightarrow 0$.

Используя идею осреднения, можно оценить интервал разрешимости задачи (1.1), (1.2) при $\lambda > \lambda_{кр}$. Предположим, что

$$u_0(x) \geq 0, \quad (2.8)$$

$$F(u) > 0, F''(u) \geq 0 \text{ при } u \geq 0. \quad (2.9)$$

Последнее условие, говоря геометрическим языком, означает, что функция $F(u)$ выпукла, т. е. график функции $F(u)$ располагается выше касательной к любой точке графика (рис. 12).

Аналитическим следствием этого условия является неравенство

$$F(u) \geq F(v) + F'(v)(u - v) \quad (2.10)$$

при любых $u \geq 0$, $v \geq 0$.

Предположим еще, что

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{F(u)} = T_0 < \infty. \quad (2.11)$$

Это условие означает, что функция $F(u)$ возрастает при $u \rightarrow \infty$ быстрее линейной функции, так что $\frac{F(u)}{u}$ является неограниченной при $u \rightarrow 0$ и $u \rightarrow \infty$ и выполняется условие (2.5).

По-прежнему λ_0 будет обозначать первое собственное значение задачи (1.2), (1.3), а m — величину (2.5).

Теорема. При выполнении условий (2.8), (2.9), (2.11) обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) при $\lambda > \frac{\lambda_0}{m}$ определено лишь в конечном интервале $(0, T_\lambda)$, причем для T_λ верна оценка

$$T_\lambda < \frac{T_0}{1 - \frac{\lambda_0}{m\lambda}} \quad (2.12)$$

и

$$\int_0^1 u^2(t, x) dx \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow T_\lambda.$$

Доказательство. Среднее значение $\bar{u}(t)$ решения $u(t, x)$ ($u(t, x) \geq 0$) в смысле (1.5), (1.4) удовлетворяет равенству (1.6). Предположение о выпуклости $F(u)$ позволяет дать одностороннюю оценку $\overline{F(u)}$. Пусть в неравенстве (2.10) $v = \bar{u}(t)$, $u = u(t, x)$. Осредняя это неравенство согласно (1.5) с учетом $(u - \bar{u}) = 0$, имеем

$$\overline{F(u)} \geq F(\bar{u}). \quad (2.13)$$

Поэтому вместо приближенного осредненного уравнения мы имеем дифференциальное неравенство относительно $\bar{u}(t)$:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} \geq F(\bar{u}) - \frac{1}{\kappa} \bar{u}, \quad \bar{u}(0) = \bar{u}_0, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda_0}. \quad (2.14)$$

При $\lambda > \frac{\lambda_0}{m}$, т. е. при $\kappa > \frac{1}{m}$, в силу условия (2.5) имеем $F(\bar{u}) - \frac{\bar{u}}{\kappa} > 0$, поэтому обратная функция $t = t(\bar{u})$ ($\bar{u}(t)$ монотонно возрастает) удовлетворяет неравенству

$$t \leq \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}} \frac{du}{F(u) - \frac{u}{\kappa}} < \int_0^{\infty} \frac{du}{F(u) - \frac{u}{\kappa}} < \int_0^{\infty} \frac{du}{F(u) \left(1 - \frac{1}{\kappa m}\right)} = \frac{T_0}{1 - \frac{\lambda_0}{m\lambda}}.$$

Таким образом, $\bar{u}(t)$ определена лишь в некотором конечном интервале $(0, T_\lambda)$, причем T_λ удовлетворяет неравенству (2.12) и $\bar{u}(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_\lambda$.

В силу неравенства Коши — Буняковского для функции $\bar{u}(t)$ имеем

$$\bar{u}(t) \leq \left(\int_0^1 u^2(t, x) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 v_0^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что $\int u^2(t, x) dx \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_\lambda$. Поэтому решение не может существовать при $t \geq T_\lambda$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. При выполнении условий теоремы естественно ожидать, что решение $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) будет определено лишь в конечном интервале не только при $\lambda > \frac{\lambda_0}{m}$, но и при $\lambda > \lambda_{кр}$ ($\lambda_{кр} \leq \frac{\lambda_0}{m}$).

Примененный метод доказательства не позволяет, однако, утверждать большего.

В том случае, когда детальное поведение функции $u(t, x)$ в области G не представляет интереса, рассмотрение приближенного осредненного уравнения существенно упрощает решение задачи. Отметим, что аналогичная идея осреднения может быть применена и в ряде других случаев. Некоторые примеры применения (не только к параболическим уравнениям) такого метода осреднения читатель найдет в гл. X.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ХИМИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В этот раздел вынесен ряд применений теории и методов уравнений математической физики в задачах химической кинетики и горения. Все рассматриваемые задачи имеют самостоятельное практическое значение и могут быть интересны специалистам в этой области. С другой стороны, анализ ряда задач потребовал специальных методов исследования, не отраженных в предыдущих разделах, таких, как теория уравнений на графах (глава XII), расчет критических значений (глава X), которые будут интересны и математикам.

В главе X выводится ряд следствий из результатов главы IX применительно к задачам теплового взрыва и зажигания. Основные моменты, на которых концентрируется внимание, составляют точное математическое понятие критического значения параметра Франк-Каменецкого в случае неограниченной функции тепловыделения и некоторые количественные оценки для него [55, 56], а также метод весового осреднения уравнений и некоторые его применения в теории теплового взрыва и зажигания [4, 6].

Специальный параграф посвящается приближенным методам расчета критических значений для сложных областей [58]. Приводятся формулы, хотя и не всегда строго доказанные, но дающие с большой точностью правильный результат во всех доступных для сравнения случаях.

Дается также точное математическое определение критического значения в случае ограниченной функции тепловыделения как точки скачка минимального (устойчивого) решения.

Параграф о сферически-симметричной задаче с распределенными источниками [59] содержит некоторые специальные методы приближенного аналитического расчета критических значений. Описанное здесь сведение к задаче с нераспределенными источниками путем подходящей замены переменной оказалось полезным, например, при решении ряда задач о неизотермическом стационарном течении вязкой жидкости [7, 8].

Первый параграф этой главы, где излагается простейшая макрокинетическая модель протекания химической реакции, хорошо известен специалистам и может быть пропущен при чтении.

В главе XI собран ряд задач химической физики, которые решаются методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Математик может смотреть на эти задачи как на примеры применения указанных методов. Для специалистов в области химической физики эти задачи могут представлять самостоятельный интерес с точки зрения результатов и методов их получения.

В § 1 стационарная задача о распространении пламени рассматривается в несколько более общем виде, чем в известных работах [20, 24], и обобщаются некоторые результаты этих работ.

Результаты § 2 дополняют известные сведения о сферически-симметричной задаче теории теплового взрыва и представляют общетеоретичес-

кий интерес с точки зрения структуры множества решений, возможности неограниченных решений и т. д. Эти результаты показали, в частности, что вопрос о существовании ограниченного решения в критических условиях является весьма тонким, зависящим как от функции источников, так и от размерности пространства.

В § 3 указано дальнейшее развитие и обобщение квазистационарной теории теплового взрыва [33, 34]. Изложенный метод равномерного выгорания [57] позволяет получить, в частности, удобные для расчетов аналитические формулы для временных характеристик, которые ранее были получены в виде сложных квадратур.

В § 4 исследуются колебательные режимы течения вязкоупругих сред при однородном деформировании с учетом диссипативного разогрева и зависимости вязкости от температуры [50]. Так же, как и в § 3, основным методом исследования здесь является качественный анализ и асимптотика по малому параметру при производной в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Обнаруженные незатухающие колебательные режимы позволяют, в частности, привлекать рассматриваемый механизм для объяснения экспериментально наблюдаемого явления нерегулярного течения полимерных масс в определенном диапазоне скоростей деформирования.

Глава XII посвящена некоторым вопросам качественной теории уравнений химической кинетики. Точнее, рассматривается более общий класс уравнений (дифференциальные уравнения на графах), который охватывает как уравнения химической кинетики, так и некоторые другие уравнения математической физики (см. [13]). С точки зрения качественной теории этот класс уравнений интересен тем, что при построении теории, кроме общеизвестных подходов, могут быть использованы также и свойства графа. Оказывается, что топология графа часто бывает определяющей в тех или иных вопросах поведения решений. С помощью графа определяется также некоторое упорядочение, которое используется при построении алгоритмов (например, алгоритм вычисления показателей Ляпунова). Такое влияние графа на поведение решений не удивительно: в графе заложены некоторые физические характеристики процесса. Например, в случае химической кинетики граф отражает механизм реакций.

В § 2 рассматриваются некоторые свойства решений уравнений на графах: положительность, поведение в нуле, априорные оценки и связанная с ними теорема существования в целом.

В § 3 изучается поведение решений при $t \rightarrow \infty$. Показано на примерах, что поведение решений может быть самым различным: выход на стационарный режим, периодические режимы и т. д. Наиболее важные случаи — ациклический и двучленные циклы (обратимые реакции) — удается изучить в общем виде с достаточной полнотой. Доказано, что в случае обратимых реакций свободная энергия является функцией Ляпунова. Этот результат является основным для изучения поведения решений.

§ 4 по своему содержанию примыкает к предыдущему: построен алгоритм вычисления показателей Ляпунова, описывающий характер экспоненциального убывания решений при больших временах.

§ 5 посвящен важному методу квазистационарных концентраций, введенному Семеновым. Рассматриваются вопросы его математического обоснования.

В заключение заметим, что существует важный класс систем дифференциальных уравнений с частными производными, исследование которого требует объединения методов, изложенных в разделе III, и теории дифференциальных уравнений, которым посвящена глава XII. Эти системы описывают, в частности, процессы химической кинетики с учетом диффузии и теплопроводности.

Глава X. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МАКРОКИНЕТИКИ

§ 1. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ПРОТЕКАНИЯ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

1. **Основные уравнения.** Многие важные особенности процессов горения выявляются уже при исследовании простейшей макрокинетической модели протекания экзотермической химической реакции в неподвижной среде. Предполагается, что реакция не сопровождается фазовыми превращениями и является одностадийной и необратимой. Физические свойства среды (теплопроводность λ , теплоемкость c , плотность ρ , коэффициент диффузии D) считаются постоянными. Скорость химической реакции задается формулой

$$w = k(T)\varphi(\eta),$$

где T — температура, η — глубина превращения горючей компоненты.

Температурная зависимость $k(T)$ описывается законом Аррениуса

$$k(T) = k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right),$$

где E — энергия активации; R — универсальная постоянная.

Функция $\varphi(\eta)$ выражает закон протекания реакции в изотермических условиях. Чаще всего полагают:

$\varphi(\eta) = (1 - \eta)^m$ — реакция m -го порядка;

$\varphi(\eta) = (\eta_0 + \eta)(1 - \eta)$ — автокаталитическая реакция первого порядка, где η_0 — критерий автокаталитичности (отношение начальной скорости реакции к автокаталитической константе). Отметим, что самоускорение реакции (возрастание $\varphi(\eta)$ с ростом η) наблюдается при $\eta_0 < 1$ и происходит в интервале $0 < \eta < \frac{1}{2}(1 - \eta_0)$.

Такая модель химической реакции описывается системой уравнений: уравнением теплового баланса

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \Delta T + Qw, \quad (1.1)$$

где Q — тепловой эффект реакции (Qw — плотность химических источников тепла); τ — время; Δ — оператор Лапласа, и уравнением расхода горючего компонента

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = w. \quad (1.2)$$

Если существенна диффузия горючего компонента, то последнее уравнение следует записать в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = D\Delta\eta + w. \quad (1.3)$$

Величина $a = 1 - \eta$ есть относительная концентрация горючего компонента: $a = \frac{\rho_r}{\rho}$. Если, например, среда состоит из смеси горючего компонента с плотностью ρ_r и продукта реакции (инертного) с плотностью ρ_n , то $\rho_r + \rho_n = \rho = \text{const}$. В силу этого нет необходимости описывать изменение продукта реакции дифференциальным уравнением.

Величины η и $a = 1 - \eta$ — безразмерны. Следуя Франк-Каменецкому [53], введем безразмерные величины

$$\theta = \frac{E}{RT_*^2} (T - T_*), \quad t = \tau \frac{Q}{c\rho} \frac{E}{RT_*^2} k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right),$$

$$\beta = \frac{RT_*}{E}, \quad \gamma = \frac{c_p}{Q} \frac{RT_*^2}{E}, \quad (1.4)$$

где T_* — некоторая температура, диктуемая обычно конкретными условиями задачи. Если реакционный объем характеризуется некоторым линейным размером r , то можно ввести безразмерные координаты (x' , y' , z' — исходные координаты)

$$x = \frac{1}{r} x', \quad y = \frac{1}{r} y', \quad z = \frac{1}{r} z', \quad (1.5)$$

и задача содержит еще один безразмерный параметр

$$\delta = \frac{Q}{\lambda} \frac{E}{RT_*^2} r^2 k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right). \quad (1.6)$$

Уравнения (1.1), (1.2) в этих переменных принимают вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \Delta \theta + \varphi(\eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \gamma \varphi(\eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}, \quad (1.8)$$

а уравнение (1.3)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \mu \Delta \eta + \gamma \varphi(\eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}, \quad \mu = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{c_p D}{\lambda}. \quad (1.9)$$

Если задача не содержит параметра r размерности длины (например, когда задача рассматривается во всем пространстве), в качестве безразмерных координат можно взять

$$x = cx', \quad y = cy', \quad z = cz', \\ c = \left(\frac{Q}{\lambda} \frac{E}{RT_*^2} k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right) \right)^{1/2}. \quad (1.10)$$

Вид уравнений (1.7)—(1.9) сохраняется, только без параметра δ : всюду в (1.7)—(1.9) следует считать $\delta = 1$.

Удобство введенной параметризации состоит в том, что при естественном выборе T_* для процессов горения характерным оказывается малость параметров β и γ . Уравнения (1.7)—(1.9), описывающие процесс неизотермического протекания реакции, не представляют особого интереса при больших значениях β и γ , когда реакция быстро затухает за счет выгорания активного продукта.

При малых значениях β и γ химическая реакция, раз начавшись, способна длительное время сама себя поддерживать и ускоряться за счет повышения температуры и диффузии активного продукта. Такой процесс протекания реакции естественно называть горением. Уместно отметить возможность горения в изотермических условиях («холодные пламена»), когда химическая реакция имеет цепной разветвленный характер и поддерживается в основном за счет диффузии активных продуктов. В отличие от теплового такой механизм горения называют цепным или диффузионным. Уравнение (1.9) при $\theta = 0$ в случае автокаталитической реакции ($\varphi(\eta) = (\eta_0 + \eta)(1 - \eta)$, $\eta_0 \leq 1$) формально описывает некоторую модель изотермического горения.

Изучение таких явлений горения, как тепловой взрыв (самовоспламенение), зажигание (вынужденное воспламенение), распространение пламени, в рамках уравнений (1.7), (1.8) (или (1.7), (1.9)) математически сводится к исследованию различных постановок начальных и граничных условий.

2 Тепловое самовоспламенение. Предполагается, что химическая реакция происходит в некотором объеме G , на стенках которого поддерживается температура окружающей среды $T = T_0$ или более общий

режим теплообмена с окружающей средой (условие третьего рода). Положив $T_{\infty} = T_0$, граничные условия на стенках S в безразмерных величинах можно записать в виде

$$\theta = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \sigma \theta = 0, \quad \sigma = \frac{\alpha r}{\lambda}, \quad (2.1)$$

где $\partial/\partial \nu$ обозначает производную по направлению внешней нормали к S ; r — линейный размер объема G ; α — коэффициент теплоотдачи к стенкам. Возникает дополнительный безразмерный параметр σ . Формально условие $\theta = 0$ можно трактовать как частный случай второго из условий (2.1) при $\sigma \rightarrow \infty$. Если вместе с (1.7) рассматривается уравнение (1.9), то ставится дополнительное граничное условие непроницаемости стенок для вещества

$$\frac{\partial \eta}{\partial \nu} = 0. \quad (2.2)$$

Чаще всего считают, что в начальный момент времени температура реагирующего вещества совпадает с температурой окружающей среды T_0 , т. е. присоединяются начальные условия

$$\theta = \eta = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (2.3)$$

Ставится вопрос об условиях теплового взрыва (невозможности теплового равновесия между реакционным объемом и окружающей средой) в такой системе. Параметры β и γ , естественно, предполагаются малыми. Это позволяет ограничиться исследованием предельного случая уравнений (1.7) — (1.9) при $\beta = 0$, $\gamma = 0$. В силу заданных условий на η мы получаем $\eta = 0$ и из уравнений (1.7) — (1.9) остается лишь одно уравнение теплового баланса, которое при $\varphi(0) = 1$ имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \Delta \theta + e^{\theta}, \quad \theta|_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \sigma \theta \right) \Big|_S = 0. \quad (2.4)$$

Ввиду непрерывной зависимости от параметров решение исходной системы (1.7), (1.8) или (1.7), (1.9) ($\varphi(0) = 1$) на любом конечном интервале времени из области определения решения задачи (2.4) оказывается близким к решению уравнения (2.4) и $\eta = 0$. Это согласуется с тем наблюдаемым фактом, что во многих случаях тепловой взрыв, если он возможен, происходит уже при малых глубинах превращения. Исключение составляет автокаталитическая реакция ($\eta_0 < 1$), когда такой предельный переход дает физически неправильный результат. В самом деле, мы получаем $\eta = 0$ и автокаталитический характер реакции (возрастание $\varphi(\eta)$ в интервале $0 < \eta < (1 - \eta_0)/2$) при этом совершенно не учитывается. Это тот случай, который отмечался в п. VI.5.1 для обыкновенных уравнений, когда формальный предельный переход при $\gamma \rightarrow 0$ не дает приближенного решения. Сказанное не означает, конечно, что нельзя воспользоваться малостью γ . Просто в данном случае неудачным оказывается выбранный масштаб времени, связанный с чисто тепловым механизмом, в то время как ведущим оказывается изотермическое самоускорение реакции. В данном случае безразмерное время следует ввести по формуле

$$t' = \gamma t \quad (2.5)$$

и искать приближенное решение при $\gamma \rightarrow 0$ получающейся системы уравнений с малым параметром при производной.

Случай автокаталитической реакции анализируется в § 3 гл. XI. Ближайший параграф посвящается анализу уравнения (2.4) при более общих граничных условиях. Забегая вперед, отметим, что условие самовоспламенения в задаче (2.4) определяется из соответствующего стационарного уравнения и имеет вид $\delta = \delta_{кр}$, выше которого стационарная задача перестает быть разрешимой. Определение величины $\delta_{кр}$

в зависимости от области и граничных условий является важнейшей задачей теории.

Первые результаты по определению $\delta_{кр}$ относятся к областям простейших форм: плоскопараллельная полоса ($n = -1$), бесконечный круглый цилиндр ($n = 0$) и шар ($n = 1$), когда стационарная задача имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{n+1}{x} \cdot \frac{d\theta}{dx} + \delta e^\theta = 0, \quad \left(\frac{d\theta}{dx} + \sigma\theta \right) \Big|_{x=1} = 0, \quad (2.6)$$

и принадлежат Франк-Каменецкому [53] в случае первой краевой задачи ($\sigma = \infty$), Барзыкину и Мержанову [5, 35] в общем случае. Прекрасное изложение первой краевой задачи (2.6) содержится также в статье Гельфанда [15] (в разделе, написанном Баренблаттом). Здесь ставится ряд математических вопросов в связи с задачей (2.4), ответы на которые были получены одним из авторов [55, 56] и содержатся в предыдущей главе настоящей книги. Другие вопросы, касающиеся задачи (2.4), в частности вопросы оценок и приближенного расчета $\delta_{кр}$ для сложных областей, читатель найдет в последующих параграфах. В § 2 гл. XI мы вновь возвращаемся к сферически-симметричной задаче (2.6) и исследуем ее при произвольном значении n . Это исследование дополняет известные результаты относительно задачи (2.6) и дает интересные примеры, иллюстрирующие некоторые общие положения теории квазилинейных уравнений.

3. Зажигание. В отличие от самовоспламенения в задаче о зажигании или вынужденном воспламенении химическая реакция начинается за счет теплового воздействия (постоянного или импульсного) на реакционный объем G со стороны окружающей среды. Многообразие форм и механизмов такого воздействия и соответствующие постановки задач приведены в обзорной статье Мержанова и Аверсона [32]. Мы отметим здесь лишь один из механизмов — зажигание накаливаемой поверхностью, когда на всей границе области G или на ее части поддерживается постоянная высокая температура T_1 , а активное вещество в объеме G в начальный момент времени находится при температуре $T_0 < T_1$, при которой реакция практически не идет. Типичным примером задачи, когда температура T_1 задается лишь на части границы, является задача о торцевом зажигании полубесконечных цилиндрических образцов. В этом случае в качестве параметра r можно взять половину диаметра поперечного сечения цилиндра (сечение произвольной формы). Полагая $T_* = T_1$ и используя малость параметров β и γ , в ряде случаев (например, при $\varphi(\eta) = (1 - \eta)^m$ мы снова приходим к модели реакции нулевого порядка:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \Delta\theta + e^\theta, \quad \theta|_{t=0} = -\theta_0, \quad \theta|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial\nu} + \sigma(\theta + \theta_0) \right) \Big|_S = 0. \quad (3.1)$$

Здесь $\theta = -\theta_0$ отвечает температуре $T = T_0$; $x = 0$ — торец цилиндра; S — его боковая поверхность. По сравнению с задачей о самовоспламенении появляется лишний параметр θ_0 и граничные условия становятся неоднородными. Основной задачей теории здесь также является расчет критического значения $\delta_{кр}$ как функции θ_0 и σ (т. е. максимального значения δ , выше которого стационарная задача становится неразрешимой) и времени задержки зажигания. Это некоторая условная величина, которую при $\delta > \delta_{кр}$ находят обычно из условия прекращения притока тепла от горячей поверхности. Приближенный расчет $\delta_{кр}$ в задаче (3.1), проведенный в работе [6], читатель найдет в § 4 этой главы.

Следует отметить, что полубесконечная модель задачи широко применяется в теории зажигания. Основой для этого служит тот факт, что химическая реакция, приводящая к зажиганию, происходит в нагретом

слое вблизи поверхности, толщина которого обычно намного меньше радиуса кривизны поверхности и размеров тела.

4. Распространение пламени. Задачи воспламенения изучают только начальную стадию неизотермического протекания химической реакции, когда выгоранием вещества можно пренебречь. Задача о распространении пламени изучает последующую стадию перемещения в пространстве зоны химической реакции. Вследствие полного выгорания вещества в заданном слое пространства и передачи тепла (теплопроводностью) к соседним непрореагировавшим слоям химическая реакция охватывает соседние слои. Формируется фронт химической реакции (фронт пламени), который перемещается в пространстве.

Уравнения (1.7)–(1.9), рассматриваемые во всем пространстве (вследствие отсутствия параметра r следует считать $\delta = 1$) при подходящих начальных условиях, зависящих только от x , описывают простейшую одномерную модель распространения пламени. Решение θ , η зависит только от x и t . Здесь мы не можем полагать $\gamma = 0$, поскольку выгорание вещества является основным в механизме распространения пламени. Предельный переход при $\beta \rightarrow 0$ не дает существенных упрощений.

Весьма важной является задача о стационарном распространении пламени, которая состоит в отыскании решений типа «бегущей волны», т. е. ограниченных решений вида

$$\theta = \theta(x - wt), \quad \eta = \eta(x - wt), \quad (4.1)$$

где постоянная величина w называется скоростью распространения фронта пламени и является важнейшей характеристикой, подлежащей определению. Для нахождения функций $\theta(\xi)$, $\eta(\xi)$, $\xi = x - wt$ и скорости w получаем из (1.7), (1.9) систему обыкновенных дифференциальных уравнений в интервале $-\infty < \xi < \infty$:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + w \frac{d\theta}{d\xi} + \varphi(\eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta\theta} = 0; \quad (4.2)$$

$$\mu \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + w \frac{d\eta}{d\xi} + \gamma\varphi(\eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta\theta} = 0, \quad \mu = \frac{c\rho D}{\lambda}. \quad (4.3)$$

Сразу же отметим, что решение этой системы уравнений должно удовлетворять соотношению

$$\frac{d\theta}{d\xi} - \frac{\mu}{\gamma} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} + w \left(\theta - \frac{1}{\gamma} \eta \right) = c, \quad (4.4)$$

где c — некоторая постоянная. Для определения этой постоянной можно использовать имеющийся пока произвол в выборе величины T_* в формулах (1.4).

Пусть T_* выбрано так, что в соотношении (4.4) $c = -\frac{w}{\gamma}$. Используя концентрацию $a = 1 - \eta$, соотношение (4.4) можно переписать в виде (штрих обозначает дифференцирование по ξ)

$$\theta' + \frac{\mu}{\gamma} a' + w \left(\theta + \frac{1}{\gamma} a \right) = 0. \quad (4.5)$$

При выборе граничных условий для уравнений (4.2)–(4.3) естественно исходить из физического предположения о том, что в одном из концов $\xi = \pm \infty$ реакция прошла полностью ($a = 0$), а в другом еще не наступила ($a = 1$). Достаточно считать

$$a = 0 \text{ при } \xi = -\infty, \quad a = 1 \text{ при } \xi = +\infty. \quad (4.6)$$

Заменой ξ на $-\xi$ и изменением знака w другой возможный случай ($a(-\infty) = 1$, $a(+\infty) = 0$) сводится к этому. Оказывается, никаких граничных условий на θ задавать не нужно. При естественных предположениях $\theta'(\pm\infty) = a'(\pm\infty) = 0$, $w \neq 0$ из (4.5), (4.6) получаем

$$\theta = 0 \text{ при } \xi = -\infty, \quad \theta = -\frac{1}{\gamma} \text{ при } \xi = +\infty. \quad (4.7)$$

Выбранная нами величина T_* оказывается температурой полностью прореагировавшего вещества ($\theta = 0$). Если температура исходного непрореагировавшего вещества есть T_0 , то из условия $\theta = -\frac{1}{\gamma}$ и вида (1.4) величин θ и γ легко следует

$$T_* = T_0 + \frac{Q}{c\rho}. \quad (4.8)$$

Отметим, что $\theta = -\frac{1}{\beta}$ отвечает согласно (1.4) температуре, равной абсолютному нулю, так что решение $\theta(\xi)$ должно удовлетворять неравенству $\theta(\xi) > -\frac{1}{\beta}$. Сопоставление с (4.7) показывает, что необходимым условием существования решения вида (4.1) является неравенство $\gamma > \beta$,

которое согласно (1.4) и (4.8) всегда имеет место ($T_0 > 0$).

Отметим некоторые частные случаи, когда задача сводится к одному уравнению. Одно из уравнений (4.2)—(4.3) может быть заменено соотношением (4.5), которое при $\mu = 1$ представляет собой однородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $b(\xi) = \theta + \frac{a}{\gamma}$. Решение этого уравнения $b(\xi) = c \exp(-\omega\xi)$ может удовлетворять заданным условиям $b(-\infty) = b(+\infty) = 0$ (см. (4.6)—(4.7)) лишь при $c = 0$. Итак, в случае $\mu = 1$ имеем

$$\theta + \frac{1}{\gamma} a = 0, \quad (4.9)$$

откуда $a = -\gamma\theta$, и задача сводится к решению одного уравнения теплопроводности

$$\theta'' + \omega\theta' + \varphi(1 + \gamma\theta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta\theta} = 0, \quad \theta(-\infty) = 0, \quad \theta(+\infty) = -\frac{1}{\gamma}. \quad (4.10)$$

При выполнении (4.9) говорят о подобии полей концентраций и температур. Такой случай ($\mu = 1$) встречается при горении газов (или смеси газов близких молекулярных весов).

В случае $\mu = 0$ (отсутствие диффузии), который встречается при горении конденсированных систем с таковыми же продуктами горения (безгазовые составы), из соотношения (4.5) следует

$$a = -\gamma\theta - \frac{\gamma}{\omega} \theta',$$

и снова приходим к одному уравнению

$$\begin{aligned} \theta'' + \omega\theta' + \varphi \left(1 + \gamma\theta + \frac{\gamma}{\omega} \theta' \right) \exp \frac{\theta}{1 + \beta\theta} &= 0, \\ \theta(-\infty) = 0, \quad \theta(+\infty) &= -\frac{1}{\gamma}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Отметим еще, что в случае автокаталитической реакции ($\varphi(\eta) = (\eta_0 + \eta)(1 - \eta)$, $\eta_0 \leq 1$) уравнение (4.3) при $\theta = 0$ формально даст пример задачи об изотермическом распространении пламени

$$\mu\eta'' + \omega\eta' + \gamma\varphi(\eta) = 0, \quad \eta(-\infty) = 1, \quad \eta(+\infty) = 0. \quad (4.12)$$

Во всех случаях (4.10)—(4.12) равенства $\theta'(\pm\infty) = \theta''(\pm\infty) = 0$ или $\eta'(\pm\infty) = \eta''(\pm\infty) = 0$ показывают, что необходимым условием существования решений должны быть равенства

$$\exp \left(-\frac{1}{\gamma - \beta} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \varphi(0) = \eta_0 = 0. \quad (4.13)$$

Эти равенства, строго говоря, не имеют места, и необходимо искусственное изменение соответствующих функций, чтобы (4.13) выполнялось.

Такая необходимость говорит о том, что с помощью стационарной задачи мы имеем лишь приближенное описание процесса, справедливое при некоторых промежуточных временах, когда влияние начального условия уже исчезает, а источники порядка величин $\exp\left(-\frac{1}{\gamma-\beta}\right)$ или $\varphi(0) = \eta_0$ еще не успевают существенно сказаться.

Аналогичное положение характерно, кстати говоря, для всех стационарных задач теории горения. Например, стационарное уравнение, соответствующее задаче (2.4) о тепловом взрыве, описывает невзрывные режимы при промежуточных временах, когда влияние начальных условий уже исчезает, а выгорание вещества еще не успевает сказаться. Такой промежуточный характер асимптотики, доставляемой стационарной задачей, подчеркивался в работах [3, 15].

Начиная с основополагающих работ Колмогорова, Петровского, Пискунова [24] и Зельдовича [20], задаче о распространении пламени было посвящено большое количество исследований математического характера. Отметим, в частности, работу Канеля [22], Баренблатта и Зельдовича [3].

В § 1 гл. XI мы останавливаемся лишь на анализе стационарной задачи (4.10)—(4.12) методами качественной теории обыкновенных уравнений, восходящими по существу к работам [24, 20].

§ 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕПЛОВОГО ВЗРЫВА

1. **Анализ уравнения (1.2.4).** Как отмечалось в п. 1.2, ввиду малости параметров β и γ анализ условий самовоспламенения в рамках простейшей модели неизотермического протекания химической реакции (за исключением автокаталитической реакции) сводится к анализу однородной краевой задачи для нелинейного уравнения теплового баланса (1.2.4), которое мы рассмотрим при более общих граничных условиях:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \Delta \theta + e^{\theta}, \quad \theta|_{t=0} = 0, \quad \theta|_{S_1} = 0, \quad (D_n \theta + \sigma \theta)|_{S_2} = 0. \quad (1.1)$$

Предполагается, что на части S_1 границы S реакционного объема G поддерживается температура окружающей среды ($\theta = 0$) — условие первого рода, а на остальной части $S_2 = S \setminus S_1$ задано условие третьего рода; в частности, одно из множеств S_1 или S_2 может быть пустым. В начальный момент времени температура постоянна по всему объему G и равна температуре окружающей среды. Выражение параметров δ и σ , а также безразмерных переменных θ , t и пространственных координат дается формулами (1.1.4)—(1.1.6), (1.2.1).

Здесь мы перечислим основные следствия из результатов предыдущей главы применительно к задаче (1.1). Каждое утверждение сопровождается ссылкой на соответствующее место гл. IX, где содержится доказательство утверждения.

1. Решение задачи (1.1) является возрастающей функцией t , ограниченной при $t \in (0, \infty)$ тогда и только тогда, когда существует положительное решение стационарной задачи:

$$\Delta \theta + \delta e^{\theta} = 0, \quad \theta|_{S_1} = 0, \quad (D_n \theta + \sigma \theta)|_{S_2} = 0. \quad (1.2)$$

При этом $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t, x)$ является наименьшим положительным решением задачи (1.2) (пп IX.1.2—IX.1.3).

Отсутствие положительного решения задачи (1.2) является, таким образом, признаком неограниченного роста решения $\theta(t, x)$ задачи (1.1), что является математическим выражением воспламенения как невозможности теплового равновесия между реакционным объемом и ок-

ружающей средой. Условие воспламенения может быть найдено в рамках стационарной задачи (1.2) как условие невозможности положительного решения этой задачи.

2. Существует $\delta_{кр} > 0$ такое, что при $\delta < \delta_{кр}$ есть положительное ограниченное решение задачи (1.2), а при $\delta > \delta_{кр}$ такого решения нет (п. IX.2.2).

Условие воспламенения количественно выражается, таким образом, неравенством $\delta > \delta_{кр}$. Определение величины $\delta_{кр}$ становится важнейшей задачей теории. В общем случае эта величина зависит как от геометрии области, так и от режима теплообмена с окружающей средой, т. е. от способа разбиения границы S на части S_1 и S_2 и от величины параметра σ . По характеру этой зависимости поведение $\delta_{кр}$ оказывается очень похожим на поведение первого собственного значения λ_0 соответствующей краевой задачи для линейного уравнения

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad v|_{S_1} = 0, \quad (D_n v + \sigma v)|_{S_2} = 0. \quad (1.3)$$

3. Всегда имеет место неравенство

$$\delta_{кр} \leq \frac{\lambda_0}{e} \quad (e = 2, 718\dots). \quad (1.4)$$

Если же рассматривать третью краевую задачу ($S_1 = \emptyset$ и на всей границе S условия $(D_n \theta + \sigma \theta) = 0$, $(D_n v + \sigma v) = 0$), то при $\sigma \rightarrow 0$ имеет место асимптотическое равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\delta_{кр}(\sigma)}{\lambda_0(\sigma)} = \frac{1}{e}. \quad (1.5)$$

(пп. IX.2.2—IX.2.3).

Эти количественные соотношения для $\delta_{кр}$, относящиеся к произвольным областям при общих граничных условиях, впервые установлены в работах [55, 56, 58]. Они играют важную роль при вычислении $\delta_{кр}$ для областей сложной геометрической формы [58, 63] и дают по существу приближенный способ определения $\delta_{кр}$. Подробнее на этом мы остановимся в следующем параграфе. Здесь отметим только, что в худшем случае первой краевой задачи для областей простейших форм: плоскопараллельного слоя, бесконечного круглого цилиндра и шара, для которых, согласно расчетам Франк-Каменецкого, $\delta_{кр}$ равно соответственно

$$0,878; 2,00; 3,32, \quad (1.6)$$

верхняя оценка (2.2) дает значения λ_0/e соответственно.

$$0,908; 2,13; 3,63. \quad (1.7)$$

Анализ первой и третьей краевых задач для этих простейших областей, проведенный в § 2 гл. XI, показывает, что при $\delta < \delta_{кр}$ решение задачи (1.2), как правило, неединственно. Причем структура множества всех решений может быть весьма сложной. Критерием отбора физического содержательного решения задачи (1.2) может служить, оказывается, устойчивость решения в смысле п. IX.3.1 относительно малых возмущений.

4. Устойчивое положительное решение задачи (1.2) при $\delta < \delta_{кр}$ единственно. Таковым оказывается наименьшее положительное решение $\theta_\delta(x)$, являющееся непрерывной возрастающей функцией δ (п. IX.3.4).

Математически интересным и сложным оказывается случай $\delta = \delta_{кр}$.

5. $\theta_{кр} = \lim_{\delta \rightarrow \delta_{кр}} \theta_\delta$ является единственным положительным решением задачи (1.2) при $\delta = \delta_{кр}$. Это решение не является устойчивым, однако оно полуустойчиво, точнее, устойчиво относительно односторонних возмущений, уменьшающих $\theta_{кр}$. Характеристическим свойством решения $\theta_{кр}$ является то, что первое собственное значение μ_0 уравнения в вариациях

$$\Delta u + \mu e^{\theta_{кр}} u = 0, \quad u|_{S_1} = 0, \quad (D_\nu u + \sigma u)|_{S_2} = 0 \quad (1.8)$$

совпадает с $\lambda_{кр}$: $\mu_0 = \lambda_{кр}$ (п. IX.3.5).

Строго говоря, в п. IX.3.5 не показано, что $\theta_{кр}$ является ограниченной функцией. Более того, как отмечалось в п. IX.3.6, возможна неограниченность $\theta_{кр}$, если задача рассматривается в пространствах размерности 10 и выше. В реальном случае двумерных и трехмерных областей, по-видимому, $\theta_{кр}$ является ограниченной функцией и, следовательно, имеет смысл такое привычное понятие, как предвзрывной разогрев ($\theta_* = \max \theta_{кр}$).

6. При $\delta > \delta_{кр}$ решение $\theta(t, x)$ задачи (1.1) в некоторый конечный момент времени $t(\delta)$ обращается в бесконечность (п. IX.4.2).

Таким образом, выясняется еще одна важная особенность задачи (1.1) — это наличие конечного периода индукции взрыва при $\delta > \delta_{кр}$. Наряду с определением $\delta_{кр}$ важной задачей теории является определение зависимости $t(\delta)$ при $\delta > \delta_{кр}$. В п. IX.4.2 показано существование $t(\delta)$, строго говоря, не при $\delta > \delta_{кр}$, а при $\delta > \frac{\lambda_0}{e}$ (см. (1.4)). Ясно, однако, что это связано не с существом дела, а лишь с методом доказательства. Полученная оценка для величины $t(\delta)$

$$t(\delta) < \frac{1}{1 - \frac{\lambda_0}{e\delta}}$$

лишь при $\delta \rightarrow \infty$ дает правильное приближение к $t(\delta)$.

2. **Метод осреднения.** Пронормируем первую собственную функцию $v_0(x) > 0$ задачи (1.3) так, чтобы

$$\int_G v_0(x) dx = 1, \quad (2.1)$$

и определим среднее значение функции $f(x)$ в области G по формуле

$$\bar{f} = \int_G f(x) v_0(x) dx. \quad (2.2)$$

Осредняя таким образом равенство (1.1), с учетом $\overline{\theta \Delta} = -\bar{\lambda}_0 \bar{\theta}$ получим (ср. п. IX.4.1)

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = -\frac{\lambda_0}{\delta} \bar{\theta} + \overline{\exp \theta}, \quad \bar{\theta}(0) = 0. \quad (2.3)$$

В силу выпуклости $\exp \theta$ всегда имеем $\exp \theta \geq \exp \bar{\theta} + \exp \bar{\theta} \cdot (\theta - \bar{\theta})$ и, следовательно,

$$\overline{\exp \theta} \geq \exp \bar{\theta}. \quad (2.4)$$

В том случае, когда по сравнению с единицей мала величина $(\theta - \bar{\theta})^2$, мы имеем приближенное равенство

$$\overline{\exp \theta} \simeq \exp \bar{\theta} \quad (2.5)$$

и (2.3) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению (знак осреднения опускаем)

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = -\frac{1}{\kappa} \bar{\theta} + \exp \bar{\theta}, \quad \bar{\theta}(0) = 0, \quad \kappa = \frac{\delta}{\lambda_0}. \quad (2.6)$$

Основной результат относительно осредненного уравнения (2.6) состоит в том (п. IX.4.1.), что равенство (2.5), а следовательно, уравнение (2.6) являются точными в случае третьей краевой задачи при $\sigma \rightarrow 0$ и одновременном изменении δ таким образом, чтобы $\frac{\delta}{\lambda_0(\sigma)} = \kappa = \text{const}$.

При анализе размерных величин следует иметь в виду выражение $\lambda_0 = \lambda_0(\sigma)$ через размерные величины. Можно показать, что при $\sigma \rightarrow 0$ ($\sigma = \frac{\alpha r}{\lambda}$)

$$\lambda_0 = \sigma r \frac{S}{V} = \frac{1}{\lambda} \frac{\alpha r^2 S}{V},$$

где λ — коэффициент теплопроводности; α — коэффициент теплоотдачи к стенкам; r — характерный линейный размер реакционного объема; V — его объем; S — площадь стенок. Таким образом, λ_0 и δ одинаково зависят от параметра λ , так что $\frac{\lambda_0}{\delta} = \kappa$ не зависит от λ , а $\sigma \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, в частности, что уравнение (2.6) является предельным случаем третьей краевой задачи для уравнения (1.1) при больших значениях коэффициента теплопроводности λ .

Уравнение (2.6) сохраняет, однако, смысл приближенного уравнения, заменяющего краевую задачу (1.1) при общих граничных условиях. При этом ввиду (2.4) всегда легко проследить, в какую сторону делается ошибка. Ослабление источников тепла приводит, в частности, к увеличению критического условия и периода индукции. Как следует из п. XI.4.2, критическим значением κ в уравнении (2.6) оказывается $\kappa_{кр} = \frac{1}{e}$, что для δ дает значение

$$\delta_* = \frac{\lambda_0}{e}. \quad (2.7)$$

Сопоставление с (1.4), (1.5) показывает, что $\delta_* \geq \delta_{кр}$ и, как и следовало ожидать, $\delta_* \simeq \delta_{кр}$ при малых значениях σ в случае третьей краевой задачи. При этом можно ожидать, что отклонение δ_* от $\delta_{кр}$ будет невелико и в случае общих краевых условий.

При $\delta > \delta_*$ ($\kappa < \frac{1}{e}$) период индукции из уравнения (2.6) определяется формулой

$$t_*(\kappa) = \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{e^{\theta} - \frac{\theta}{\kappa}}, \quad (2.8)$$

дающей ввиду (2.4), (2.3) оценку сверху для величины $t_{инд} = t(\delta)$ в задаче (1.1) при $\delta = \kappa \lambda_0$ и асимптотически точное значение при $\sigma \rightarrow 0$, $\frac{\delta}{\lambda_0} = \kappa$ в случае третьей краевой задачи. Относительно параметра

$s = \kappa e = \frac{\kappa}{\kappa_{кр}}$ функция $t_*(\kappa) = t(s)$,

$$t(s) = \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{\exp \theta - \frac{e\theta}{s}}, \quad s > 1, \quad (2.9)$$

оказывается особенно удобной. При расчетах периода индукции в общем случае задачи (1.1) исходят из хорошо оправдавшего себя предположения о том, что $t_{инд} = t(s)$ при $s = \frac{\delta}{\delta_{кр}}$. Предполагается, таким образом, что основная зависимость от области и граничных условий учитывается величиной $\delta_{кр}$ и что $t_{инд}$ близка к универсальной функции (2.9) от $s = \frac{\delta}{\delta_{кр}}$. В § 3 гл. XI мы подвергнем некоторой проверке это предположение в случае автокаталитической реакции.

Замечание Функцию $t(s)$ легко представить в виде ряда по степеням $1/s$, плохо сходящегося, однако, при $s \rightarrow 1$. Несколько первых членов этого ряда дают

хорошую асимптотику при $s \rightarrow \infty$

$$t(s) = 1 + \frac{e}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{2e^2}{27} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{3e^3}{128} \cdot \frac{1}{s^3} + \dots \quad (e = 2,718\dots). \quad (2.10)$$

Можно показать, что при $s \rightarrow 1$ с точностью до членов, стремящихся к нулю, имеет место асимптотика

$$t(s) \approx \frac{\sqrt{2} \pi}{e \sqrt{s-1}} - k. \quad (2.11)$$

Приближенный расчет константы k дает величину $k \approx 1,14$. Разумная «сшивка» этих асимптотических формул дает простую расчетную формулу для $t(s)$. Если ограничиться выписанными членами и обозначить $t_1(s)$ и $t_2(s)$ формулы (2.10) и (2.11) соответственно, то естественной «сшивкой» может служить формула

$$t(s) = \max \{ t_1(s), t_2(s) \}, \quad s > 1.$$

Надо сказать, что применение описанного способа осреднения не ограничивается только задачей вида (1.1). С тем же успехом его можно применить, например, к системе уравнений в допредельной форме ($\gamma \neq 0$, $\beta \neq 0$, см. (1.17) — (1.18)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{\delta} \Delta \theta + \varphi(\eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}; \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \gamma \varphi(\eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}; \\ \theta|_{t=0} = \eta|_{t=0} &= 0, \quad \theta|_{S_1} = 0 \quad (D, \theta + \sigma \theta)|_{S_2} = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Осредняя по формуле (2.2) и учитывая правило осреднения суперпозиций (см. (IX.4.1.17))

$$\overline{\varphi(\eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}} \approx \overline{\varphi(\bar{\eta}) \exp \frac{\bar{\theta}}{1 + \beta \bar{\theta}}}, \quad (2.13)$$

с погрешностью порядка $(\bar{\eta} - \eta)^2 + (\bar{\theta} - \theta)^2$ приходим к системе обыкновенных уравнений (знак осреднения опускаем):

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{\alpha} \theta + \varphi(\eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}, \quad \theta(0) = 0, \quad \alpha = \frac{\delta}{\lambda_0}; \\ \frac{d\eta}{dt} &= \gamma \varphi(\eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}, \quad \eta(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

При этом асимптотический смысл равенства (2.13) и уравнений (2.14) сохраняется. Уравнения (2.14) описывают предельный случай третьей красной задачи для уравнений (2.12) при $\sigma \rightarrow 0$, $\frac{\lambda}{\lambda_0(\sigma)} = \alpha = \text{const}$.

3. Условие воспламенения в случае ограниченного источника. Рассмотрим задачу (2.12) при $\gamma = 0$, $\beta \neq 0$ ($\varphi(0) = 1$), т. е. задачу

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \Delta \theta + \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}, \quad \theta|_{t=0} = 0, \quad \theta|_{S_1} = 0 \quad (D, \theta + \sigma \theta)|_{S_2} = 0. \quad (3.1)$$

Соответствующая стационарная задача

$$\Delta \theta + \delta \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta} = 0, \quad \theta|_{S_1} = 0, \quad (D, \theta + \sigma \theta)|_{S_2} = 0 \quad (3.2)$$

согласно теореме п. IX.2 разрешима при любом $\delta > 0$ и, следовательно, критическое значение δ в смысле определения п. IX.2.1 здесь отсутствует. Спрашивается, как математически выразить возможность теплового взрыва в данном случае.

Оказывается, критическое значение δ здесь существует в том смысле, что при достаточно малых β минимальное решение $\theta_\delta(x)$ задачи (3.2) как функция δ терпит скачок при некотором $\delta = \delta_{\text{кр}}$.

По определению будем считать, что критическим значением $\delta_{\text{кр}}$, разделяющим взрывные и невзрывные режимы, является точка скачка минимального решения $\theta_\delta(x)$.

Можно показать в общем виде, что такое определение корректно, что при достаточно малых β $\delta_{кр}$ существует и единственно. Мы ограничимся тем, что покажем это для соответствующей (3.2) осредненной задачи, сводящейся к алгебраическому уравнению

$$\exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta} = \frac{1}{x} \theta, \quad x = \frac{\delta}{\lambda_0}. \quad (3.3)$$

При $\beta < 0,25$ прямая θ/x (рис. 13) при непрерывном изменении x от нуля до бесконечности дважды принимает положение касательной к графику $\exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}$ при значениях $x = x_1$ и $x = x_2$, $x_2 > x_1$. При этом прямая θ/x_2 , помимо точки касания θ_1 , имеет еще одну общую точку $\theta_2 > \theta_1$ с графиком $\exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}$. Утверждается, что минимальное решение θ уравнения (3.3) ни при каких x не попадает в интервал (θ_1, θ_2) . В самом деле, $\theta_x < \theta_1$ при $x < x_2$ и, непрерывно возрастая, приближается к θ_1 при $x \rightarrow x_2$; $\theta_x > \theta_2$ при $x > x_2$ и $\lim_{x \rightarrow x_2+0} \theta_x = \theta_2$. Таким образом, $x = x_2$ оказывается точкой скачка θ_x . В общем случае задачи (3.2) положение аналогично; $\delta_{кр}$ оказывается функцией β и возникает задача нахождения этой зависимости. В задаче (3.3) элементарно получается асимптотика

$$x_{кр}(\beta) \approx x_{кр}(0) (1 + \beta), \quad x_{кр}(0) = \frac{1}{e}. \quad (3.4)$$

На этом основании и в задаче (3.2) полагают обычно

$$\delta_{кр}(\beta) = \delta_{кр}(0)(1 + \beta). \quad (3.5)$$

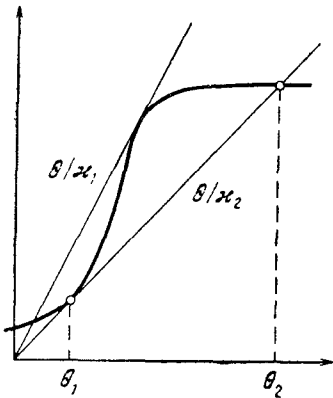


Рис. 13

Формула (3.5) не оказывается точной асимптотикой при $\beta \rightarrow 0$, однако некоторый анализ показывает правомерность такой приближенной формулы.

Будем предполагать, что $\delta_{кр}(\beta)$ и минимальное решение $\theta(x, \beta)$ задачи (3.2) при $\delta = \delta_{кр}(\beta)$ являются гладкими функциями β при $\beta \geq 0$. При этом, очевидно, $\delta_{кр}(0)$ является критическим значением $\delta(\beta=0)$ в прежнем смысле, а $\theta(x, 0) = \theta_{кр}(x)$ — единственным решением при $\beta=0$, $\delta = \delta_{кр}(0)$. Разлагая по степеням малого параметра β

$$\delta_{кр}(\beta) = \delta_{кр}(0) (1 + c\beta + \dots), \quad \theta(x, \beta) = \theta_{кр}(x) + \beta \theta_1(x) \dots, \quad (3.6)$$

из (3.2) находим уравнение для $\theta_1(x)$

$$\Delta \theta_1 + \delta_{кр}(0) e^{\theta_{кр}} \theta_1 + \delta_{кр}(0) e^{\theta_{кр}} (c - \theta_{кр}^2) = 0,$$

$$\theta_1|_{S_1} = 0, \quad (D_\nu \theta_1 + \sigma \theta_1)|_{S_2} = 0. \quad (3.7)$$

Помня о том, что $\delta_{кр}(0)$ является собственным значением задачи (1.8) и что решение θ_1 задачи (3.7) существует по предположению, сделаем вывод об ортогональности функции $(c - \theta_{кр}^2) \exp \theta_{кр}$ к первой собственной функции v_0 задачи (1.8):

$$\int_D (c - \theta_{кр}^2) (\exp \theta_{кр}) v_0 dx = 0.$$

Отсюда следует, что

$$c = \frac{\int \theta_{кр}^2 v_0 e^{\theta_{кр}} dx}{\int v_0 e^{\theta_{кр}} dx} = \bar{\theta}_{кр}^2 \quad (3.8)$$

есть среднее значение функции $\theta_{кр}^2$ с весом $v_0 e^{\theta_{кр}}$. В силу выпуклости θ^2 ($\theta^2 \geq (\bar{\theta})^2 + 2\bar{\theta}(\theta - \bar{\theta})$) имеем

$$c = \bar{\theta}_{кр}^2 > (\bar{\theta}_{кр})^2. \quad (3.9)$$

Интегрируя равенство (3.2) с весом $v_0(x)$ и применяя формулу Грина и равенство (1.8) для v_0 , находим

$$\int \theta_{кр} v_0 \exp \theta_{кр} dx = \int v_0 \exp \theta_{кр} dx.$$

Таким образом, среднее от $\theta_{кр}$ с весом $v_0 \exp \theta_{кр}$ есть единица: $\bar{\theta}_{кр} = 1$. Поэтому из (3.9) имеем, что в общем случае $c > 1$. Точно определить величину c , естественно, не удается в общем случае. Поскольку, однако, с погрешностью порядка $(\theta_{кр} - \bar{\theta}_{кр})^2$ можно принять $\bar{\theta}_{кр}^2 \simeq (\bar{\theta}_{кр})^2$, то (см. (3.9)) следует ожидать, что c мало отличается от единицы. В этом смысле приближенная формула (3.5) допустима.

В случае первой краевой задачи в цилиндрической области

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\theta}{dx} \right) + \delta \exp \left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta} \right) = 0, \quad \theta(1) = 0, \quad \theta'(0) = 0,$$

величину c в формуле (3.6) удастся вычислить точно. В этом случае, как будет показано в п. XI.2.2, $\delta_{кр}(0) = 2$, $\theta_{кр} = \ln \frac{4}{(1+x^2)^2}$. Соответствующая задача (1.8) имеет вид

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \left(x \frac{dv}{dx} \right) + \mu \frac{4v}{(1+x^2)^2} = 0, \quad v(1) = v'(0) = 0.$$

Первая собственная функция этой задачи ($\mu = 2$) легко находится

$$v_0(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Поэтому согласно (3.8)

$$c = \bar{\theta}_{кр}^2 = c_1 \int_0^1 \left[\ln \frac{4}{(1+x^2)^2} \right]^2 \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^3} x dx, \quad \frac{1}{c_1} = \int_0^1 \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^3} x dx = \frac{1}{2}.$$

Интеграл вычисляется элементарно и дает

$$c = 16 \ln 2 - 10 \simeq 1,09.$$

В заключение отметим, что обычно записывают и поправку на выгорание ($\gamma \neq 0$) для величины $\delta_{кр}$ [53], которой, однако, трудно придать строгий математический смысл, поскольку при $\gamma \neq 0$ взрывная картина «размазана» и трудно ввести однозначное понятие $\delta_{кр}$ [4].

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ

1. **Зависимость от σ .** Очевидные трудности численного расчета $\delta_{кр}$, особенно для трехмерных областей сложной геометрической формы, делают актуальной задачу отыскания приближенных аналитических методов расчета. Мы отметим некоторые из приближенных методов, но всегда строго обоснованных, но дающих хорошие результаты.

В произвольной ограниченной области G пространства R_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) рассмотрим третью краевую задачу

$$\Delta \theta + \delta \exp \theta = 0, \quad (D_\nu \theta + \sigma \theta)|_S = 0. \quad (1.1)$$

Здесь S — граница области G . При этом в терминах областей трехмерного пространства одномерную область G можно истолковать как плоскопараллельную полосу, для которой G есть отрезок ортогональной к ограничивающим плоскостям прямой линии; двумерную область можно истолковать как бесконечный цилиндр, для которой G есть ортогональное сечение.

Впервые для простейших областей задача (1.1) при $\sigma < \infty$ исследована в работе [5], в которой, в частности, получена точная аналитическая зависимость $\delta_{кр}(\sigma)$ для круглого цилиндра (см. также п. XI.2.2):

$$\delta_{кр}(\sigma) = 2\varphi(\sigma), \quad \varphi(\sigma) = \frac{\sigma}{2} (\sqrt{\sigma^2 + 4} - \sigma) \exp \left[\frac{1}{\sigma} (\sqrt{\sigma^2 + 4} - 2 - \sigma) \right]. \quad (1.2)$$

Используя эту зависимость, авторы предлагают рассчитывать $\delta_{кр}(\sigma)$ в случае произвольной области по формуле

$$\delta_{кр}(\sigma) \approx \delta_{кр}(\infty) \varphi(\sigma), \quad (1.3)$$

где $\delta_{кр}(\infty)$ относится к первой краевой задаче ($\sigma = \infty$). Отмечается, что для полосы и шара ошибка формулы (1.3) не превышает 10%.

Другой подход к расчету $\delta_{кр}(\sigma)$ вытекает из оценок (2.1.4), (2.1.5). Если $\lambda_0 = \lambda_0(\sigma)$ — первое собственное значение задачи

$$\Delta v + \lambda v = 0 \quad (D, v + \sigma v)|_S = 0, \quad (1.4)$$

то величина

$$\delta_{*}(\sigma) = \frac{\lambda_0(\sigma)}{e} \quad (1.5)$$

определяет оценку сверху для $\delta_{кр}(\sigma)$ и совпадает с $\delta_{кр}(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow 0$. В простейших областях отличие $\delta_{*}(\sigma)$ от $\delta_{кр}(\sigma)$ также не превышает 10%. Исходя из естественного предположения о том, что величина

$$\kappa(\sigma) = \frac{\delta_{кр}(\sigma)}{\lambda_0(\sigma)}, \quad \kappa(0) = \frac{1}{e} \quad (1.6)$$

заклучена в пределах

$$\kappa(\infty) \leq \kappa(\sigma) \leq \frac{1}{e}, \quad (1.7)$$

можно построить интерполяционную формулу для $\kappa(\sigma)$, дающую уточнение формулы (1.5). Обозначая

$$\alpha(\sigma) = \frac{\lambda_0(\sigma)}{\lambda_0(\infty)}, \quad 0 = \alpha(0) \leq \alpha(\sigma) \leq \alpha(\infty) = 1,$$

можно положить

$$\kappa(\sigma) \approx \alpha(\sigma)\kappa(\infty) + (1 - \alpha(\sigma))\kappa(0),$$

Таблица 1 что дает

σ	λ_0	δ_{*}	$\tilde{\delta}$	$\delta_{кр}$
0,1	0,195	0,072	0,072	0,072
0,2	0,381	0,140	0,140	0,140
0,5	0,885	0,326	0,323	0,324
1	1,58	0,581	0,572	0,576
2	2,56	0,942	0,919	0,922
5	3,96	1,46	1,40	1,39
10	4,71	1,73	1,65	1,65
25	5,34	1,96	1,85	1,85
50	5,57	2,05	1,93	1,93
100	5,66	2,08	1,96	1,96
∞	5,78	2,13	2,00	2,00

$$\tilde{\delta}(\sigma) \approx \lambda_0(\sigma) \left[\frac{1}{e} - \alpha(\sigma) \left(\frac{1}{e} - \frac{\delta_{кр}(\infty)}{\lambda_0(\infty)} \right) \right]. \quad (1.8)$$

Эта формула отличается от (1.5) поправочным членом и дает точные значения $\delta_{кр}$ как при малых, так и при больших σ . Расчеты по этой формуле предполагают знание значения $\delta_{кр}(\infty)$ и зависимости $\lambda_0(\sigma)$. В табл. 1 приводятся для сравнения результаты расчета $\delta_{кр}(\sigma)$ по точной формуле (1.2) и по приближенным формулам (1.5), (1.8) для случая круглого цилиндра.

В этом случае $\sqrt{\lambda_0(\sigma)}$ является наименьшим корнем уравнения

$$I_0(x) - \frac{x}{\sigma} I_1(x) = 0,$$

где I_0 и I_1 — бesselевы функции; $\delta_{кр}(\infty) = 2$. Из таблицы видно, что формула (1.8) правильно отражает зависимость от σ . Максимальное отклонение достигается при $\sigma = 1$ и составляет меньше 1%. Ошибка формулы (1.5) возрастает и достигает 6,5% при $\sigma = \infty$. По самому построению формула (1.3) дает точный результат в случае цилиндрической области.

2. Случай первой краевой задачи. Очень интересной, но и сложной математической задачей оказывается нахождение $\delta_{кр}$ в случае первой краевой задачи

$$\Delta\theta + \delta \exp \theta = 0, \quad \theta|_S = 0 \quad (2.1)$$

для произвольной области G . В этом случае $\delta_{кр}$ зависит только от области G , $\delta_{кр} = \delta_{кр}(G)$ и задача становится чисто геометрической. Величина $\kappa(G) = \frac{\delta_{кр}(G)}{\lambda_0(G)}$, где λ_0 — первое собственное значение задачи,

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad v|_S = 0, \quad (2.2)$$

оказывается инвариантом подобных преобразований области и зависит только от ее геометрической формы. В силу нашей верхней оценки для $\delta_{кр}$ имеем для произвольной области G

$$\kappa(G) < \frac{1}{e} = 0,368.$$

Предлагаемый способ расчета $\delta_{кр}(G)$ основан на следующей недоказанной теореме типа «изопериметрических теорем».

Среди всех областей размерности 3 (2) с заданным значением λ_0 $\delta_{кр}$ достигает минимального значения на шаре (круге) и максимального значения на полосе.

В пользу этой теоремы говорит то, что обычно в теоремах такого типа идея экстремальности круглых областей оправдывается. Самым убедительным доводом в ее пользу является, конечно, то, что во всех доступных для проверки случаях она оказывается правильной. Было бы тем не менее очень интересно строго доказать эту теорему и выяснить, для каких функций $F(\theta)$ (вместо $\exp \theta$) она остается верной.

Если через $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ обозначить величину $\kappa(G)$ для полосы, круглого цилиндра и шара соответственно:

$$\kappa_1 = \frac{0,878}{\pi^2/4} = 0,356; \quad \kappa_2 = \frac{2}{j^2} = 0,346; \quad \kappa_3 = \frac{3,32}{\pi^2} = 0,336 \quad (2.3)$$

($j^2 = 5,78$), то согласно нашей гипотезе имеем:

$$\kappa_3 \leq \kappa(G) \leq \kappa_1 \quad (2.4)$$

для произвольной трехмерной области G ;

$$\kappa_2 \leq \kappa(G) \leq \kappa_1 \quad (2.5)$$

для произвольной двумерной области G . Идя дальше по этому пути, можно предположить, что по крайней мере для выпуклых тел вращения

$$\kappa_3 \leq \kappa(G) \leq \kappa_2. \quad (2.6)$$

Эти предположения были выдвинуты одним из авторов [58]. Отметим, что близкую идею использует Франк-Каменецкий [53] при вычислении $\delta_{кр}$ для куба и цилиндра конечной высоты, не делая, правда, никаких оговорок математического характера.

Исходя из неравенств (2.4) — (2.6), можно строить различные «интерполяционные» формулы для $\kappa(G)$ и, следовательно, для $\delta_{кр}(G)$.

В работе [58] были даны два способа «интерполяции»:

$$\delta_{\text{кр}}(G) \cong \lambda_0(G) \left[\kappa_n \frac{P_0}{P} + \kappa_1 \left(1 - \frac{P_0}{P} \right) \right], \quad (2.7)$$

$$\delta_{\text{кр}}(G) \cong \lambda_0(G) \left[\kappa_n \frac{P_1}{P} + \kappa_1 \left(1 - \frac{P_1}{P} \right) \right], \quad (2.8)$$

где n — размерность исследуемой области G ; P — площадь ее поверхности (периметр); P_0 — площадь поверхности (периметр) шара (круга) того же объема (площади), что и G ; P_1 — площадь поверхности (периметр) шара (круга) с тем же собственным значением λ_0 , что и G .

Естественно (2.7) и (2.8) определяют интерполяцию только в том случае, когда

$$\frac{P_0}{P} \leq 1, \quad \frac{P_1}{P} \leq 1. \quad (2.9)$$

Первое неравенство следует из классического изопериметрического неравенства: среди всех областей данного объема (площади) шар (круг) имеет наименьший периметр. Второе из неравенств (2.9) вытекает из теоремы Фабера и Крана [40] о минимальном свойстве λ_0 : среди всех областей данного объема (площади) шар (круг) имеет наименьшее λ_0 . Согласно этой теореме объем шара с собственным значением $\lambda_0 = \lambda_0(G)$ не больше, чем объем G . Поэтому $P_1 \leq P_0$. Отсюда следует, что ввиду $\kappa_1 > \kappa_n$ формула (2.7) дает меньшие значения, чем (2.8).

Из теоремы Фабера и Крана вытекает еще один способ интерполяции. Если $\bar{\lambda}_0(G)$ — собственное значение шара (круга) того же объема (площади), что и G , то $\frac{\bar{\lambda}_0(G)}{\lambda_0} \leq 1$ и можно положить

$$\delta_{\text{кр}}(G) \cong \lambda_0(G) \left[\kappa_n \frac{\bar{\lambda}_0(G)}{\lambda_0(G)} + \kappa_1 \left(1 - \frac{\bar{\lambda}_0(G)}{\lambda_0(G)} \right) \right]. \quad (2.10)$$

Для выпуклых тел вращения ($n = 3$) согласно (2.6) можно использовать формулы (2.7), (2.8), (2.10) с заменой κ_1 на κ_2 .

В этих формулах легко выразить P_0 через объем (площадь) V , P_1 — через λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ через V :

$$n = 3, P_0 = (4\pi)^{1/3} (3V)^{2/3}, \quad P_1 = \frac{4\pi^3}{\lambda_0}, \quad \bar{\lambda}_0 = \pi^2 \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{2/3};$$

$$n = 2, P_0 = 2 \sqrt{\pi V}, \quad P_1 = 2\pi j / \lambda_0, \quad \bar{\lambda}_0 = \frac{\pi j^2}{V} \quad (j = 2,4048).$$

Формулы (2.7), (2.8), (2.10) принимают соответственно вид:

для произвольной области ($n = 3$, V — объем, P — площадь поверхности)

$$\delta_{\text{кр}}(G) \cong \begin{cases} \lambda_0 [\kappa_1 - (\kappa_1 - \kappa_3) \frac{1}{P} (4\pi)^{1/3} (3V)^{2/3}]; \\ \lambda_0 \kappa_1 - (\kappa_1 - \kappa_3) \frac{1}{P} 4\pi^3; \\ \lambda_0 \kappa_1 - (\kappa_1 - \kappa_3) \pi^2 \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{2/3}, \end{cases} \quad (I)$$

для двумерной области ($n = 2$, V — площадь, P — периметр)

$$\delta_{\text{кр}}(G) \cong \begin{cases} \lambda_0 \left[\kappa_1 - (\kappa_1 - \kappa_2) \frac{2\sqrt{\pi V}}{P} \right]; \\ \lambda_0 \kappa_1 - \frac{2\pi j}{P} (\kappa_1 - \kappa_2) \sqrt{\lambda_0}; \\ \lambda_0 \kappa_1 - (\kappa_1 - \kappa_2) \frac{\pi j^2}{V}, \end{cases} \quad (II)$$

для выпуклых тел вращения

$$\delta_{кр}(G) \simeq \begin{cases} \lambda_0 \left[\kappa_2 - (\kappa_2 - \kappa_3) \frac{1}{P} (4\pi)^{1/3} (3V)^{2/3} \right]; \\ \lambda_0 \kappa_2 - (\kappa_2 - \kappa_3) \frac{4\pi^3}{P}; \\ \lambda_0 \kappa_2 - (\kappa_2 - \kappa_3) \pi^2 \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{2/3}. \end{cases} \quad (III)$$

Априори нет никаких оснований отдавать предпочтение какой-либо из трех формул в каждой группе. Из общих соображений мы знаем только, что первые формулы дают значения меньшие, чем вторые ($P_1 \leq P_0$). В табл. 2 приведены для сравнения точные значения $\delta_{кр}$ и его приближенные значения, вычисленные по каждой из трех формул соответствующих групп I, II, III. В колонке «тип области» римская цифра указывает группу формул, по которым проводился расчет. В колонках 1, 2, 3 помещены приближенные значения, вычисленные по первой, второй и третьей формулам соответствующей группы. Для удобства приводится также верхняя оценка λ_0/e .

Таблица 2

Область и ее параметры	Тип области	1	2	3	$\delta_{кр}$	$\frac{\lambda_0}{e}$
Цилиндр, радиус, $r = 1$, высота 2	III	2,77	2,79	2,78	2,78	3,03
Куб, сторона 2	I	2,52	2,53	2,51	2,53	2,73
Кольцо, $0,5 \leq r \leq 1$	II	13,7	13,8	13,8	13,8	14,3
Сектор, $0,2 \leq r \leq 1$, угол $\pi/2$	II	9,43	9,46	9,45	—	10,0

Точные значения $\delta_{кр}$ для куба и цилиндра найдены Парксом [72], для кольца — Барзыкиным и Мержановым (см. также [16]).

Таким образом, практически безразлично, какой из трех формул каждой группы пользоваться. При выборе формулы следует руководствоваться соображениями удобства. Все формулы требуют знания собственного числа λ_0 . Кроме того, третьи формулы предполагают знание V , вторые — P , а первые и P , и V . Конечно, нахождение числа λ_0 в общем случае также является сложной задачей. Но для большого числа практически интересных областей λ_0 удастся найти путем аналитического решения задачи (2.2). Кроме того, существуют различные способы приближенного вычисления λ_0 .

3. Расчет предвзрывного разогрева. Другой интересной характеристикой стационарной задачи (1.1) или (2.1) является предвзрывной разогрев (максимум решения при $\delta = \delta_{кр}$). Лишь в немногих случаях известны точные значения этой величины. Из результатов Франк-Каменецкого [53] в случае первой краевой задачи для полосы, цилиндра и шара имеем

$$\theta_1 = 1,19; \theta_2 = 2 \ln 2 \simeq 1,39; \theta_3 = 1,62. \quad (3.1)$$

Из работы [5] (см. также п. XI.2.2) для максимума решения (1.1) при $\delta = \delta_{кр}(\sigma)$ в случае цилиндрической области имеем аналитическую формулу

$$\theta(\sigma) = \ln \frac{8(\sqrt{4 + \sigma^2} - 2)}{\sigma \delta_{кр}(\sigma)}, \quad (3.2)$$

где $\delta_{кр}(\sigma)$ задается формулой (1.2). Кроме того, для произвольной области из асимптотического смысла осредненной задачи вытекает, что $\theta(\sigma) \rightarrow 1$ при $\sigma \rightarrow 0$. Исходя из естественного предположения о том, что

для произвольной области величина $\theta(\sigma) = \max_{\theta_{кр}}(x)$ в задаче (1.1) удовлетворяет неравенствам

$$1 = \theta(0) \leq \theta(\sigma) \leq \theta(\infty), \quad (3.3)$$

аналогично формуле (1.8) можно предложить приближенную интерполяционную формулу для $\frac{1}{\theta(\sigma)}$:

$$\frac{1}{\theta(\sigma)} = 1 + \left(\frac{1}{\theta(\infty)} - 1 \right) \frac{\lambda_0(\sigma)}{\lambda_0(\infty)}, \quad (3.4)$$

требующую знания $\theta(\infty)$ и зависимости $\lambda_0(\sigma)$.

Для первой краевой задачи (2.1) ($\sigma = \infty$) величина $\theta(\infty) = \theta(G)$, так же как $\kappa(G) = \frac{\delta_{кр}(G)}{\lambda_0(G)}$, является инвариантом подобных преобразований области G и зависит только от ее геометрической формы. Естественно предположить, что поведение величины $\frac{1}{\theta(G)}$ аналогично поведению $\kappa(G)$, т. е. что среди всех областей размерности 3 (2) величина $\frac{1}{\theta(G)}$ достигает минимального значения на шаре (круге), а максимального значения на полосе. Для области G размерности n ($n = 2, 3$) это приводит к неравенствам

$$\frac{1}{\theta_n} \leq \frac{1}{\theta(G)} \leq \frac{1}{\theta_1}. \quad (3.5)$$

Для выпуклых тел вращения можно дополнительно предположить

$$\frac{1}{\theta_3} \leq \frac{1}{\theta(G)} \leq \frac{1}{\theta_2}, \quad (3.6)$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ имеют значения (3.1). Исходя из этих неравенств, можно строить «интерполяционные» формулы для $\frac{1}{\theta(G)}$, аналогичные формулам (2.7), (2.8), (2.10). Ограничимся аналогом формулы (2.10). Пусть $\lambda_0(G)$ — первое собственное значение задачи (2.2), $V = V(G)$ — объем (площадь) области G . Мы полагаем:

для произвольной области G ($n = 3$)

$$\frac{1}{\theta(G)} \simeq \frac{1}{\theta_1} - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_3} \right) \frac{\pi^2}{\lambda_0} \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{2,3};$$

для плоской области G ($n = 2$)

$$\frac{1}{\theta(G)} \simeq \frac{1}{\theta_1} - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \frac{\pi j^2}{\lambda_0 v} \quad (j^2 = 5,78);$$

для выпуклого тела вращения

$$\frac{1}{\theta(G)} \simeq \frac{1}{\theta_2} - \left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_3} \right) \frac{\pi^2}{\lambda_0} \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{2/3} \\ \left(\frac{1}{\theta_1} = 0,84; \quad \frac{1}{\theta_2} = 0,72; \quad \frac{1}{\theta_3} = 0,62 \right).$$

§ 4. СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ЗАЖИГАНИЯ

1. **Модель Зельдовича.** В задачах о зажигании (вынужденном воспламенении) предполагается тепловое воздействие на реакционный объем со стороны окружающей среды. Из многообразия механизмов воздействия [31] мы остановимся на задаче о зажигании накаливаемой поверхностью, которая при обычных допущениях описывается теми же уравнениями, что и задача о самовоспламенении, но при неоднородных граничных условиях на некоторой части границы S . При этом основной задачей стационарной теории остается расчет критических усло-

вий, т. е. величины $\delta_{кр}$, выше которого задача перестает быть разрешимой ($\beta = 0$).

Впервые такая задача была решена Зельдовичем [19], который рассматривал следующую одномерную постановку задачи:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \delta e^\theta = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta(1) = -\theta_0 \quad (\theta_0 > 0). \quad (1.1)$$

Основной вывод этой работы состоит в том, что критический режим (решение при $\delta = \delta_{кр}$) при больших значениях θ_0 характеризуется условием $\theta'(0) = 0$, т. е. прекращением теплового потока с горячей поверхности. Это позволяет легко получить аналитическое выражение для величины $\delta_{кр} = \delta_{кр}(\theta_0)$.

Умножая (1.1) на θ' и интегрируя с учетом $\theta'(0) = 0$, получим

$$(\theta'(x))^2 = 2\delta_{кр} (1 - e^{\theta(x)}),$$

откуда

$$\begin{aligned} \sqrt{2\delta_{кр}} &= \int_{-\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \exp \theta}} = 2 \int_0^{\sqrt{1 - \exp(-\theta_0)}} \frac{du}{1 - u^2} = \\ &= \theta_0 + 2 \ln(1 + \sqrt{1 - \exp(-\theta_0)}). \end{aligned}$$

Или ввиду $\exp(-\theta_0) \ll 1$, $\theta_0 \gg 1$,

$$\delta_{кр} = \frac{1}{2} (\theta_0 + 2 \ln 2)^2 \simeq \frac{1}{2} \theta_0^2. \quad (1.2)$$

2. Зажигание с торца полубесконечного цилиндра. Рассмотрим цилиндрическую область Ω , заданную условиями

$$x > 0, \quad (y, z) \in G,$$

где двумерная область G с границей S есть поперечное сечение Ω , и краевую задачу (ср. (1.3.1)):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \delta \exp \theta = 0 \quad (2.1)$$

$$(\theta|_{x=0} = 0; \quad \theta|_{x=\infty} = -\theta_0; \quad (D, \theta + \sigma(\theta + \theta_0))|_S = 0, \quad \theta_0 > 0).$$

Полагая

$$u = \theta + \theta_0, \quad u_0 = \theta_0, \quad \exp \theta = F(u), \quad (2.2)$$

приходим к задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \delta F(u) = 0, \quad (2.3)$$

$$u|_{x=0} = u_0, \quad u|_{x=\infty} = 0, \quad (D, u + \sigma u)|_S = 0,$$

в которой граничное условие вдоль боковой поверхности Ω уже однородно. Предполагается, что σ не зависит от x . Такая задача рассматривалась в работе [6].

На примере этой задачи мы продемонстрируем еще одно применение изложенного в § 2 метода осреднения.

Пусть $v_0 = v_0(y, z)$ — первая собственная функция, а λ_0 — первое собственное значение задачи

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \lambda v = 0, \quad (D, v + \sigma v)|_S = 0, \quad (2.4)$$

заданной на двумерном сечении G цилиндра Ω . Пронормируем $v_0(y, z)$ так, чтобы

$$\int_G v_0(y, z) dy dz = 1,$$

и определим среднее $\bar{f}(x)$ функции $f(x, y, z)$ по формуле

$$\bar{f}(x) = \int_G f(x, y, z) v_0(y, z) dy dz. \quad (2.5)$$

Осредняя этим способом равенство (2.3), принимая вместо неравенства $F(u) \geq F(\bar{u})$ обычное допущение $F(\bar{u}) \simeq F(\bar{u})$ и опуская знак осреднения, приходим к обыкновенному уравнению

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda_0 u + \delta F(u) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u(\infty) = 0. \quad (2.6)$$

Если δ_* есть точное критическое значение δ в этой задаче, то вследствие некоторого ослабления источника для $\delta_{кр}$ в задаче (2.1) или (2.3) имеем неравенство

$$\delta_{кр} \leq \delta_*. \quad (2.7)$$

3. Анализ осредненного уравнения. В (2.6) удобно ввести

$$\xi = \sqrt{\delta} x, \quad x = \frac{\delta}{\lambda_0}, \quad (3.1)$$

после чего получаем

$$u'' + F(u) - \frac{1}{x} u = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u(\infty) = 0. \quad (3.2)$$

Можно показать, что если решение $u(\xi)$ этой задачи существует, то $u'(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Умножая (3.2) на $u'(\xi)$ и интегрируя с учетом этого условия, получим

$$(u'(\xi))^2 = 2 \int_0^u \left(\frac{1}{x} s - F(s) \right) ds. \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что необходимым условием существования решения является неотрицательность интеграла (3.3) при всех u , $0 \leq u \leq u_0$. В частности, должно выполняться условие $F(0) = 0$. Для $F(u) = \exp(u - u_0)$ это условие не имеет места и возникает необходимость обычного в теории горения срезания функции $F(u)$ в окрестности $u = 0$ (в области низких температур). Мы будем предполагать, что

$$F(0) = F'(0) = 0, \quad F''(u) > 0 \quad \text{при } u > 0. \quad (3.4)$$

Как следует из (3.3), при $u = u_0$ для разрешимости задачи (3.1) необходимо, чтобы

$$\frac{u_0^2}{2x} \geq \int_0^{u_0} F(u) du. \quad (3.5)$$

Покажем, что при выполнении (3.4) условие (3.5) достаточно для разрешимости задачи (3.1). В самом деле, ввиду выпуклости $F(u)$ ($F'' > 0$) имеем $F(s) < \frac{sF(u)}{u}$ при $0 < s < u$ и, значит,

$$\int_0^u F(s) ds < \frac{u}{2} F(u), \quad u > 0,$$

$$\frac{d}{du} \left(\frac{1}{u^2} \int_0^u F(s) ds \right) = \frac{1}{u^3} \left(uF(u) - 2 \int_0^u F(s) ds \right) > 0, \quad u > 0.$$

Таким образом, функция $\frac{1}{u^2} \int_0^u F(s) ds$ монотонно возрастает, и при вы-

полнении (3.5) имеем

$$\int_0^u \left(\frac{s}{x} - F(s) \right) ds > 0 \quad \text{при} \quad 0 < u < u_0. \quad (3.6)$$

Поэтому из (3.3) можно определить

$$u'(\xi) = - \left[2 \int_0^u \left(\frac{s}{x} - F(s) \right) ds \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

и найти зависимость $\xi(u)$, или, что то же, $u(\xi)$ по формуле

$$\xi = \int_u^{u_0} \frac{dt}{\left[2 \int_0^t \left(\frac{s}{x} - F(s) \right) ds \right]^{1/2}}. \quad (3.8)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что эта зависимость определяет решение задачи (3.2).

Итак, условие (3.5) оказывается необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (3.2). Случай равенства в (3.5) определяет поэтому точное критическое условие в задаче (3.2):

$$\frac{u_0^2}{2 \int_0^{u_0} F(u) du} = x_{кр}. \quad (3.9)$$

Геометрически критическое условие означает равенство заштрихованных площадей (рис. 14).

Очевидно, при $x = x_{кр}$ решение (3.8) удовлетворяет условию Зельдовича: $u'(0) = 0$. Это видно из (3.7), так как $\xi = 0$ соответствует значению $u = u_0$.

Отметим, что формулой (3.8) задается минимальное решение задачи (3.2). Комбинируя знаки плюс и минус в выражении (3.7), легко построить другое решение (неустойчивое). При $x = x_{кр}$ оба решения сливаются.

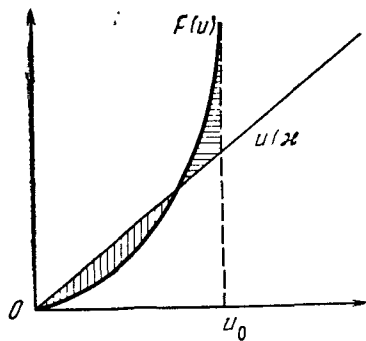


Рис. 14

4. **Приближенная формула для $\delta_{кр}$.** В случае $F(u) = \exp(u - u_0) \gg \exp(-u_0) \ll 1$, $u_0 = \theta_0$, формула (3.9) принимает вид

$$x_{кр} = \theta_0^2 / 2,$$

т. е. совпадает с величиной $\delta_{кр}$ (см. (1.2)) в задаче (1.1). Согласно (3.1) для величины δ_* в задаче (2.6) имеем

$$\delta_* = \frac{\lambda_0}{2} \theta_0^2. \quad (4.1)$$

Согласно (2.7) δ_* является верхней оценкой для величины $\delta_{кр}$ в задаче (2.1) или (2.3) при произвольном σ и по смыслу метода осреднения — точным значением $\delta_{кр}$ при $\sigma \rightarrow 0$. При этом естественно ожидать, что отклонение $\delta_{кр}$ от δ_* будет примерно таким же, как отклонение критического значения в задаче о тепловом самовоспламенении от соответствующей верхней оценки λ_0/e . Более точное приближение к $\delta_{кр}$ получим, если в выражении (4.1) уменьшим коэффициент λ_0 , заменив его величиной $\delta_0 e$, где δ_0 — критическое значение в задаче (ср. (24.)).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \delta e^u = 0, \quad (D_\nu u + \sigma u)|_S = 0, \quad (4.2)$$

заданной на сечении G области $\Omega \left(\delta_0 \leq \frac{\lambda_0}{e}, \text{ см. (2.1.4)} \right)$.

Итак, при произвольном σ ($0 \leq \sigma \leq \infty$) для величины $\delta_{кр}$ в задаче (2.1) (или (2.3)) имеем приближенно

$$\delta_{кр} = \frac{e\delta_0}{2} \theta_0^2, \quad (4.3)$$

где δ_0 — критическое значение задачи (4.2).

Эта формула незначительно отличается от формулы (4.1) (на 6—7% в худшем случае $\sigma = \infty$) и более точно отражает зависимость $\delta_{кр}$ от сечения области Ω и режима теплообмена через боковую поверхность.

Знание величины λ_0 (см. (2.4)) позволяет согласно предыдущему параграфу хорошо определить величину δ_0 . В частности, если сечение G круглое ($\sigma = \text{const}$), мы имеем точную аналитическую зависимость $\delta_0(\sigma)$ (см. (3.1.2)).

§ 5. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

1. **Оценки критического значения.** Ряд прикладных вопросов приводит к краевой задаче

$$L_\alpha u + \lambda \varrho^2(x) F(u) = 0, \quad \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_0} = u \Big|_{x=1} = 0, \quad 0 \leq x_0 < 1. \quad (1.1)$$

Здесь $L_\alpha u \equiv \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\alpha}{x} \cdot \frac{du}{dx} \equiv \frac{1}{x^\alpha} \cdot \frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{du}{dx} \right)$, $\alpha = \text{const}$ представляет собой радиальную часть оператора Лапласа в пространстве $(\alpha+1)$ измерений при неотрицательных целых α . Однако при $x_0 > 0$ задача (1.1) имеет смысл при любом вещественном α , а при $x_0 = 0$ ($\lambda > 0$, $F(u) > 0$) — по крайней мере при $\alpha > -1$ (см. § 2 гл. XI).

Функция $\varrho(x)$ непрерывно дифференцируема и положительна при $0 < x < 1$. Предполагается конечной величина

$$\xi = \int_{x_0}^1 \varrho(x) dx. \quad (1.2)$$

Функция $F(u)$ определена и положительна при $u \geq 0$. Предполагается, что

$$m = \inf_{u>0} \frac{F(u)}{u} > 0. \quad (1.3)$$

При этих условиях (см. п. IX.2.2) существует критическое значение параметра λ , $\lambda_{кр} = \lambda(\alpha, x_0)$, выше которого задача (1.1) не имеет положительного решения. $\lambda_{кр} = \lambda(\alpha, x_0)$ является непрерывной функцией параметров x_0 и α и при фиксированном одном параметре является возрастающей функцией другого. Последнее легко вытекает из того, что решение $u(x)$ при заданных λ , x_0 , α остается верхней функцией при том же λ и всех больших значениях x_0 и α .

В частном случае $\varrho(x) \equiv 1$ для функции $\lambda(\alpha, x_0)$ будем употреблять специальное обозначение $\bar{\lambda}(\alpha, x_0)$. Как увидим в § 2 гл. XI, по крайней мере для $F(u) = \exp u$, вычисление величины $\bar{\lambda}(\alpha, 0) = \bar{\lambda}(\alpha)$ является задачей достаточно простой. Поэтому полезно иметь оценки величины $\lambda(\alpha, x_0)$ в терминах $\bar{\lambda}(\alpha, x_0)$.

Положим

$$r(x) = \frac{1}{\xi} \int_{x_0}^x \rho(t) dt, \quad \Phi_\alpha(x) = \frac{rL_\alpha(r)}{(r')^2}. \quad (1.4)$$

Очевидно (см. (1.2)), $0 \leq r(x) \leq 1$ при $x_0 \leq x \leq 1$.

Теорема. Если $\Phi_\alpha(x) \leq \beta$ ($\leq \beta$) при $x_0 \leq x \leq 1$, то справедливо неравенство

$$\lambda(\alpha, x_0) \leq \frac{1}{\xi^2} \bar{\lambda}(\beta) \quad \left(\geq \frac{1}{\xi^2} \bar{\lambda}(\beta) \right), \quad \bar{\lambda}(\beta) = \bar{\lambda}(\beta, 0). \quad (1.5)$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ — положительное решение задачи (1.1). Положим $v(r) = u(x)$, где $r = r(x)$ определена формулой (1.4):

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dr} r', \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2v}{dr^2} (r')^2 + r'' \frac{dv}{dr}.$$

Так как $q^2(x) = \xi^2 (r')^2$, то из (1.1) имеем

$$0 = (r')^2 \left[\frac{d^2v}{dr^2} + \Phi_\alpha(x) \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} + \lambda \xi^2 F(v) \right]. \quad (1.6)$$

Почленным интегрированием (1.1) легко убедиться, что $\frac{du}{dx} \leq 0$, а значит, $\frac{dv}{dr} \leq 0$ при $x \geq 0$. Поэтому из (1.6) и условия $\Phi_\alpha(x) \leq \beta$ следует неравенство

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{\xi}{r} \cdot \frac{dv}{dr} + \lambda \xi^2 F(v) \leq 0. \quad (1.7)$$

Так как $v'(0) = v(1) = 0$, то $v(r)$ оказывается верхней функцией задачи

$$L_\xi v + \lambda \xi^2 F(v) = 0, \quad v(1) = v'(0) = 0, \quad (1.8)$$

которая, таким образом, имеет положительное решение ($v \equiv 0$ есть нижняя функция) при любом $\lambda < \lambda(\alpha, x_0)$. Отсюда и следует первое неравенство (1.5), поскольку в задаче (1.8) $\lambda_{кр} = \frac{\bar{\lambda}(\beta)}{\xi^2}$.

Пусть теперь выполнено неравенство $\Phi_\alpha(x) \geq \beta$ и пусть $v(r)$ — положительное решение задачи (1.8) при некотором $\lambda > \lambda_{кр}$. Положим $u(x) = v(r(x))$, где $r(x)$ определена формулой (1.4). Подставляя $u(x)$ в (1.1) и учитывая (1.8) и неравенство $\Phi_\alpha(x) \geq \beta$, легко убедиться, что $u(x)$ есть верхняя функция задачи (1.1) при том же значении λ . Ввиду произвольности $\lambda < \lambda_{кр} = \frac{\bar{\lambda}(\beta)}{\xi^2}$ отсюда следует второе неравенство (1.5).

Теорема доказана.

2. Следствия об асимптотике. В том случае, когда плотность распределения источников q зависит от малого параметра ω , $q = q(x, \omega)$, интересно установить асимптотику величины $\lambda_{кр} = \lambda(\alpha, x_0, \omega)$ при $\omega \rightarrow 0$. Если $\lim_{\omega \rightarrow 0} q(x, \omega) \equiv q_0 > 0$, то, очевидно,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \lambda(\alpha, x_0, \omega) = \frac{\bar{\lambda}(\alpha, x_0)}{\rho_0^2}. \quad (2.1)$$

Однако доказанная теорема позволяет указать асимптотику в ряде нетривиальных случаев.

Следствие 1. Пусть $q = q(x, \omega)$, а $\xi(\omega)$, $r(x, \omega)$, $\Phi_\alpha(x, \omega)$ суть величины (1.2), (1.4). Если равномерно по x , $x_0 \leq x \leq 1$,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Phi_\alpha(x, \omega) = \beta = \text{const}, \quad (2.2)$$

то

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \xi^2(\omega) \lambda(\alpha, x_0, \omega) = \bar{\lambda}(\beta). \quad (2.3)$$

Доказательство. Согласно (2.2) для любого $\varepsilon > 0$ при $\omega < \omega(\varepsilon)$ имеем

$$\beta - \varepsilon \leq \Phi_\alpha(x, \omega) \leq \beta + \varepsilon, \quad x_0 \leq x \leq 1.$$

Тогда по теореме

$$\bar{\lambda}(\beta - \varepsilon) \leq \xi^2(\omega) \cdot \lambda_\alpha(\alpha, x_0, \omega) \leq \bar{\lambda}(\beta + \varepsilon),$$

откуда и следует (2.3)

При $x_0 = 0$ функция $\Phi_\alpha(x, \omega)$ часто имеет разрыв в точке $x = 0$ при $\omega \rightarrow 0$ и условие (2.2) не может выполняться равномерно по x . Однако некоторое усиление следствия 1 позволяет судить об асимптотике при $\omega \rightarrow 0$ и в этом случае.

Следствие 2. Пусть равномерно по x в каждом интервале $x_1 \leq x \leq 1$, $x_1 > x_0$ имеет место

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Phi_\alpha(x, \omega) = \beta. \quad (2.4)$$

Пусть, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ при $\omega < \omega(\varepsilon)$ и любом x , $x_0 \leq x \leq 1$, либо $\Phi_\alpha(x, \omega) \leq \beta + \varepsilon$, либо $\Phi_\alpha(x, \omega) \leq \beta - \varepsilon$. Тогда

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \xi^2(\omega) \cdot \lambda(\alpha, x_0, \omega) = \bar{\lambda}(\beta). \quad (2.5)$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\Phi_\alpha(x, \omega) \geq \beta - \varepsilon$ при $\omega < \omega(\varepsilon)$, $x_0 \leq x \leq 1$. Другой случай рассматривается аналогично. По теореме

$$\bar{\lambda}(\beta - \varepsilon) \leq \xi^2(\omega) \lambda_\alpha(\alpha, x_0, \omega) \quad \text{при} \quad \omega < \omega(\varepsilon). \quad (2.6)$$

В силу условия (2.4) найдется $x_\varepsilon(\omega) > x_0$, что

$$\Phi_\alpha(x, \omega) \leq \beta + \varepsilon \quad \text{при} \quad x_\varepsilon(\omega) \leq x \leq 1, \quad (2.7)$$

причем $x_\varepsilon(\omega) \rightarrow x_0$ при $\omega \rightarrow 0$. В силу теоремы и монотонности по x_0 функции $\lambda(\alpha, x_0, \omega)$ имеем

$$\lambda(\alpha, x_0, \omega) \leq \lambda(\alpha, x_\varepsilon(\omega), \omega) \leq \frac{\bar{\lambda}(\beta + \varepsilon)}{\xi_\varepsilon^2(\omega)}, \quad (2.8)$$

где

$$\xi_\varepsilon(\omega) = \int_{x_\varepsilon(\omega)}^1 \rho(t) dt.$$

Очевидно, $\frac{\xi(\omega)}{\xi_\varepsilon(\omega)} \rightarrow 1$ при $\omega \rightarrow 0$. Из (2.6) и (2.8) имеем

$$\bar{\lambda}(\beta - \varepsilon) \leq \xi^2(\omega) \cdot \lambda(\alpha, x_0, \omega) \leq \bar{\lambda}(\beta + \varepsilon) \left(\frac{\xi(\omega)}{\xi_\varepsilon(\omega)} \right)^2, \quad \omega < \omega(\varepsilon).$$

Отсюда при $\omega \rightarrow 0$ в силу произвольности ε следует (2.5).

Пример 1. Пусть требуется найти $\lambda_{кр} = \lambda(\alpha, \omega)$ в задаче

$$L_\alpha u + \lambda \left(1 + \frac{x}{\omega} \right)^2 \exp u = 0, \quad u'(0) = u(1) = 0.$$

Здесь $\varrho(x, \omega) = 1 + \frac{x}{\omega}$, $\omega > 0$. Согласно (1.2), (1.4) найдем

$$\xi(\omega) = 1 + \frac{1}{2\omega}, \quad r(x, \omega) = \frac{x^2 + 2\omega x}{1 + 2\omega}, \quad \Phi_\alpha(x, \omega) = \frac{1}{2} \frac{(x + 2\omega)[\omega + (1 + \alpha)x]}{(x + \omega)^2}.$$

Очевидно, $\Phi_\alpha(0, \omega) = 1$. Однако при любом $x > 0$ $\lim_{\omega \rightarrow 0} \Phi_\alpha(x, \omega) = \frac{1 + \alpha}{2}$. Равномерная сходимость при $\omega \rightarrow 0$ имеет место только при $\alpha = 1$. Тем не менее следствие 2 можно применять, и мы имеем

$$\lambda(\alpha, \omega) \approx \frac{4\omega^2}{(1+2\omega)^2} \bar{\lambda} \left(\frac{1+\alpha}{2} \right), \quad \omega \rightarrow 0.$$

При $\omega \rightarrow \infty$ очевидна асимптотика $\lambda(\alpha, \omega) \approx \bar{\lambda}(\alpha)$ (см 2.1)).

Часто подходящая шивка асимптотических выражений при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ дает хорошее описание зависимости $\lambda(\alpha, \omega)$ при любых ω . Например, при $\alpha = 1$ ($\bar{\lambda}(1) = 2$) напрашивается формула

$$\lambda(1, \omega) \approx \frac{8\omega^2}{(1+2\omega)^2}.$$

Пример 2 В качестве другого примера рассмотрим задачу Павлова [39] о верхнем пределе самовоспламенения в цепной неразветвленной реакции. На конкретном примере такой реакции автор показывает, что нарушение условий самовоспламенения при повышении давления происходит не только в разветвленных цепных реакциях, как было принято считать, но и в неразветвленных цепных реакциях. Не вдаваясь в обсуждение постановки и заложенных в ней физических предположений, приведем более строгое решение этой задачи (см [59]).

Для определения стационарного поля температур в [39] получено уравнение и граничные условия

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + c(p) \frac{\text{sh}(\gamma r p^{3/2})}{r} k e^{-E/RT} = 0, \quad (2.9)$$

$T = T_0$ при $r = r_0$, $\frac{dT}{dr} = 0$ при $r = 0$ (последнее условие равносильно ограниченности $T(r)$ при $r \rightarrow 0$). Здесь

$$c(p) = \frac{p^3}{r_0 \gamma p^{3/2} \cdot \text{ch}(\gamma r_0 p^{3/2}) + (ap - 1) \text{sh}(\gamma r_0 p^{3/2})};$$

p — давление; a, γ, k и E/R — некоторые параметры

Удобно ввести безразмерные переменные и параметры:

$$u = \frac{E}{RT_0^2} (T - T_0); \quad x = \frac{r}{r_0}; \quad q = r_0 \gamma p^{3/2};$$

$$\lambda = \frac{1}{r_0 \gamma^2} \frac{E}{RT_0^2} e^{-E/RT_0}; \quad \beta = \frac{RT_0}{E}; \quad b = a(\gamma r_0)^{-2/3}$$

и положить

$$\varphi(q) = \frac{q}{\text{ch} q + \frac{1}{q} (bq^{2/3} - 1) \text{sh} q}. \quad (2.10)$$

Заметим, что давление p входит только в параметр q . Задача (2.9) переписывается следующим образом:

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{du}{dx} \right) + \lambda \varphi(q) \frac{\text{sh} qx}{x} \exp \left(\frac{u}{1 - \beta u} \right) = 0, \quad u(1) = u'(0) = 0. \quad (2.11)$$

Формально задача (2.11) не является задачей типа (1.1), поскольку нарушается условие (1.3), но мы уже знаем (п 2.3), что при малых β $\lambda_{кр}(\beta, q)$ существует как точка скачка минимального решения u_λ , причем приближенно

$$\lambda_{кр}(q, \beta) = \lambda_{кр}(q)(1 + \beta). \quad (2.12)$$

Здесь $\lambda_{кр}(q)$ — критическое значение λ при $\beta = 0$. Его поведение мы и будем исследовать. Кривая $\lambda_{кр}(q)$ разбивает область $q > 0, \lambda > 0$ на две области:

I — область самовоспламенения ($\lambda > \lambda_{кр}$);

II — область малых разогревов ($\lambda < \lambda_{кр}$).

О верхнем пределе самовоспламенения говорят тогда, когда при любом неизменном λ , увеличивая q , мы попадаем из области I в область II, т. е. когда $\lambda_{кр}(q)$ неограниченно возрастает при $q \rightarrow \infty$.

Для $q(x, q) = \left(\frac{1}{x} \text{sh} qx \right)^{1/2}$; $\xi(q), r(x, q)$; $\Phi_2(x, q)$, вычисленным по формулам (1.2), (1.4), предоставляем читателю убедиться в том, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q^2}{4 \text{sh} q} \xi^2(q) = 1, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \Phi_2(x, q) = \begin{cases} 2 & \text{при } x = 0; \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

и что можно применять следствие 2 при $\omega = \frac{1}{q} \rightarrow 0$, согласно которому

$$\lambda_{кр}(q) \approx \frac{\bar{\lambda}(1) \cdot q^2}{4\varphi(q) \operatorname{sh} q} \quad (q \rightarrow \infty, \quad \bar{\lambda}(1) = 2). \quad (2.13)$$

Из (2.13) следует, что $\lambda_{кр}(q) \approx \frac{\bar{\lambda}(1)}{4} q = \frac{q}{2}$ при $q \rightarrow \infty$, чем и подтверждается вывод о существовании верхнего предела самовоспламенения

При $q \rightarrow 0$ ввиду $\frac{\operatorname{sh} qx}{x} \approx q$ следует асимптотика

$$\lambda_{кр}(q) \approx \frac{\bar{\lambda}(2)}{q\varphi(q)} \approx \frac{\bar{\lambda}(2)}{\varphi(q) \operatorname{sh} q} \quad (q \rightarrow 0, \quad \bar{\lambda}(2) = 3,32). \quad (2.14)$$

Формулы (2.13) и (2.14) с учетом (2.12) подсказывают следующий вид зависимости $\lambda_{кр}(q, \beta)$:

$$\lambda_{кр}(q, \beta) = c(q) (1 + \beta) \frac{3,32 + 0,5q^2}{\varphi(q) \operatorname{sh} q}, \quad (2.15)$$

где $c(q) \rightarrow 1$ при $q \rightarrow \infty$ и $q \rightarrow 0$, по крайней мере с такой точностью, с какой позволяет приближенная формула (2.12). Численный расчет множителя $c(q)$, проведенный при $\beta = 0,04$, дал следующую зависимость.

$q \dots$	0,1	0,5	1	2	3	4	5	7	10	15	20	30
$c(q) \dots$	1,00	0,99	0,97	0,93	0,92	0,93	0,94	0,97	0,99	1,00	1,01	1,01

которая показывает правомерность использования формулы (2.15) даже без множителя $c(q)$

3. Замена переменной. Как следует из доказательства теоремы п. 1 и легко проверяется непосредственно, интегрирование уравнения

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\alpha}{x} \cdot \frac{du}{dx} + \lambda Q(x) F(u) = 0 \quad (3.1)$$

тогда и только тогда сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{\beta}{r} \cdot \frac{dv}{dr} \pm \lambda F(v) = 0, \quad (3.2)$$

когда существует подстановка $r = r(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\rho(x) = \pm \left(\frac{dr}{dx} \right)^2; \quad (3.3)$$

$$r \left(\frac{d^2r}{dx^2} + \frac{\alpha}{x} \cdot \frac{dr}{dx} \right) = \beta \left(\frac{dr}{dx} \right)^2. \quad (3.4)$$

При этом каждое решение $u(x)$ уравнения (3.1) имеет вид

$$u(x) = v(r(x)),$$

где $v(r)$ — некоторое решение уравнения (3.2).

Дифференциальное уравнение (3.4) легко интегрируется, и формула (3.3) определяет класс всех допустимых функций $\rho(x)$, для которых сведение уравнения (3.1) к уравнению (3.2) возможно. Если отбросить тривиальное решение $r(x) = \operatorname{const}$, то для $r(x)$ из (3.4) получаются следующие формулы:

$$r(x) = \begin{cases} Ax^{1-\alpha} + B)^{1/1-\beta}, & \alpha \neq 1, \\ (A \ln x + B)^{1/1-\beta}, & \alpha = 1, \end{cases} \quad \beta \neq 1; \quad (3.5)$$

$$r(x) = \begin{cases} B \exp(Ax^{1-\alpha}), & \alpha \neq 1, \\ Bx^A & \alpha = 1, \end{cases} \quad \beta = 1.$$

Здесь A и B — произвольные константы; $x > 0$.

Хотя, как видно из (3.5), класс допустимых функций $\rho(x)$ весьма ограничен, знание его все же оказывается полезным. Из последней формулы (3.5) и (3.3) следует, например, что при любой степенной функ-

ции $q(x)$, $q(x) = \pm x^k$, $k \neq -2$, уравнение (3.1) при $\alpha = 1$ сводится к уравнению (3.2) при $\beta = 1$ с помощью подстановки

$$r = \frac{2}{|k+2|} x^{(k+2)/2}. \quad (3.6)$$

При $\rho(x) = \pm x^{-2}$ согласно второй формуле (3.5) уравнение (3.1) при $\alpha = 1$ сводится к уравнению (3.2) при $\beta = 0$ подстановкой

$$r = \ln x. \quad (3.7)$$

С помощью подстановок (3.6), (3.7) были получены точные аналитические решения для целого цикла задач о стационарном неизотермическом течении вязкой жидкости в случае экспоненциальной зависимости вязкости от температуры [7, 8].

Глава XI. КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛАМЕНИ

1. **Некоторые априорные свойства.** Широкое применение качественные методы исследования уравнений находят в задачах о распространении пламени. Существует много различных постановок таких задач. Некоторые простейшие из них мы отметили в п. X.1.4. Здесь мы рассмотрим простейшую модель горения газов в условиях подобия полей концентраций и температур в предположении реакции первого порядка. Такая задача впервые рассматривалась в работе Зельдовича [20]. Она сводится, как мы видели в п. X.1.4, к задаче (X.1.4.10) при $\varphi(\eta) = 1 - \eta$ ($\eta = 1 + \gamma\theta$). Для дальнейшего удобно положить

$$-\theta = u; \quad \frac{1}{\gamma} = u_0; \quad \exp\left(\frac{\theta}{1 + \xi\theta}\right) = F(u); \quad \zeta = \sqrt{\gamma\xi}; \quad \omega = \frac{w}{\sqrt{\gamma}}. \quad (1.1)$$

В результате такого выбора новой независимой переменной ζ и новой скорости ω параметр γ (или u_0) исчезает из уравнения и остается лишь в граничном условии

$$u'' + \omega u' - uF(u) = 0, \quad u(-\infty) = 0; \quad u(+\infty) = u_0. \quad (1.2)$$

Пужно отметить, что задаче (1.2) присущи многие особенности, характерные и для других задач о распространении пламени. Приводимое ниже исследование задачи (1.2) во многом повторяет исследование задачи (X.1.4.11), проведенное в работе [9].

Общее решение уравнения (1.2) зависит от двух произвольных констант, и двух граничных условий, вообще говоря, недостаточно для однозначного определения решения $u(\zeta)$ и скорости ω . Легко видеть, однако, что вместе с решением $u(\zeta)$ решением задачи (1.2) оказывается и функция $u(\zeta + C)$, где C — произвольная константа. Так что одной из констант интегрирования оказывается константа сдвига, которая принципиально не может быть определена из граничных условий. Вопрос о единственности решения задачи (1.2) можно ставить лишь с точностью до сдвигов. Можно надеяться, что граничные условия позволяют однозначно определить другую константу интегрирования и скорость ω . Этот вопрос, однако, не вытекает из классических теорем существования и единственности решения и требует специального исследования.

Непосредственно из (1.2) вытекают следующие свойства решения $u(\zeta)$:

$$1. \quad u(\zeta) > 0.$$

Если $u(\xi)$ где-то отрицательна, то в силу неотрицательности граничных значений $u(\xi)$ достигает отрицательного минимума в некоторой точке ξ_0 , т. е.

$$u(\xi_0) < 0, u'(\xi_0) = 0, u''(\xi_0) \geq 0.$$

Но тогда ввиду $F(u) > 0$ равенство (1.2) в точке ξ_0 не выполняется. Таким образом, $u(\xi) \geq 0$.

Если в некоторой точке ξ_1 $u(\xi_1) = 0$, то ξ_1 — точка минимума и, значит, $u'(\xi_1) = 0$. Но тогда в силу единственности нулевого решения уравнения (1.2) с условиями $u(\xi_1) = u'(\xi_1) = 0$ имеем $u(\xi) \equiv 0$ при $\xi > \xi_1$, что противоречит условию $u(+\infty) = u_0 > 0$. Этим свойство 1 доказано.

2. $u'(\xi) > 0$.

Если это не так, т. е. если $u(\xi)$ не является строго возрастающей, то найдется стационарная точка ξ_0 ($u'(\xi_0) = 0$), являющаяся либо точкой перегиба, либо точкой максимума. Словом,

$$u(\xi_0) > 0, u'(\xi_0) = 0, u''(\xi_0) \leq 0.$$

Но это противоречит равенству (1.2).

3. $u'(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$.

По формуле конечных приращений для любого ξ найдется $\xi = \xi(\zeta)$, $0 \leq \zeta \leq 1$, что

$$u(\xi + 1) - u(\xi) = u'(\xi + \xi).$$

В силу свойства ограниченности и монотонности $u(\xi)$ $u(\xi + 1) - u(\xi) \rightarrow 0$ при любом способе стремления ξ к $\pm\infty$. Следовательно, $u'(\xi) \rightarrow 0$.

Используя свойство 3, совершенно аналогично получаем:

4. $u''(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$.

5. Для существования решения задачи (1.2) необходимы условия

$$\omega > 0, F(u_0) = 0.$$

Интегрируя почленно равенство (1.2) в интервале $-\infty < \zeta < \infty$, получим

$$\omega u_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u F(u) d\xi.$$

Отсюда следует, что $\omega > 0$ и что интеграл сходящийся. Последнее возможно лишь при $F(u_0) = 0$. Необходимость срезания функции $F(u)$ в окрестности $u = u_0$ и смысл этой операции мы отмечали в п. X.1.4.

2. Разрешимость и вопросы единственности. Согласно предыдущему пункту мы должны искать решение задачи (1.2) в классе положительных строго возрастающих функций $u(\xi)$ при $\omega > 0$. Обычный способ понижения порядка уравнения, не содержащего явно независимой переменной, когда в качестве новой независимой переменной принимается $u = u(\xi)$, а уравнение решается относительно

$$\frac{du}{d\xi} = p(u), \quad (2.1)$$

приводит к эквивалентной задаче

$$\frac{dp}{du} = -\omega + \frac{u}{p} F(u), \quad p(0) = p(u_0) = 0 \quad (2.2)$$

для определения однозначной положительной функции $p(u)$ и скорости ω . Ясно, что если $u(\xi)$ — решение задачи (1.2), то функция (2.1) удовлетворяет всем условиям (2.2) и наоборот: если $p(u)$ — положительное решение задачи (2.2), то квадратура

$$\xi = \int_c^u \frac{ds}{p(s)}, \quad (2.3)$$

где c — произвольное число из интервала $0 < c < u_0$, однозначно с точностью до сдвига, т. е. выбора c , восстанавливает решение задачи (1.2). Необходимое для этого условие расходимости интеграла (2.3) при $u = 0$ и $u = u_0$ (т. е. условие существования функции $u(\xi)$ согласно (2.3) в интервале $-\infty < \xi < \infty$) вытекает из дальнейшего анализа задачи (2.2).

Мы не будем пользоваться конкретным видом функции $F(u)$. Будем предполагать только, что

$$F(0) = 1, \quad F(u) > 0 \quad \text{при } 0 \leq u < u_1, \quad F(u) \equiv 0 \quad \text{при } u \geq u_1 \quad (2.4)$$

и что $F(u)$ непрерывна и обладает ограниченной при $u \geq 0$ кусочно-непрерывной производной. Так что наш анализ охватывает и модель (X.1.4.12) задачи об изотермическом распространении пламени.

Начальная точка $u = p = 0$ является особой точкой уравнения (2.2). Для выяснения ее типа следует рассмотреть уравнение

$$\frac{dp}{du} = \frac{-\omega p + u}{p}, \quad (2.5)$$

получающееся линеаризацией числителя и знаменателя правой части (2.2) (в данном случае достаточно положить $F(u) = F(0) = 1$). Матрица коэффициентов

$$\begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет определитель $\Delta = -1$. Поэтому особая точка $u = p = 0$ имеет тип «седла». Наклоны сепаратрис

$$\lambda = \left. \frac{dp}{du} \right|_{u=0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{p(u)}{u} = \frac{1}{2} (-\omega \pm \sqrt{\omega^2 + 4})$$

находятся согласно (2.5) как корни квадратного уравнения

$$\lambda = -\omega + \frac{1}{\lambda}.$$

Нас интересует только положительная при $u > 0$ сепаратриса $p(u, \omega)$ с наклоном

$$\lambda = \lambda(\omega) = \frac{1}{2} (\sqrt{\omega^2 + 4} - \omega), \quad (2.6)$$

никаких других положительных решений с условием $p(0) = 0$ уравнение (2.2) не имеет. Так что для доказательства разрешимости задачи (2.2) мы должны показать существование такого $\omega = \omega(u_0)$, что $p(u_0, \omega(u_0)) = 0$. Из формулы (2.6) следует, что при возрастании ω от нуля до бесконечности $\lambda(\omega)$ монотонно убывает от значения $\lambda(0) = 1$ до значения $\lambda(\infty) = 0$. Легко видеть, кроме того, что

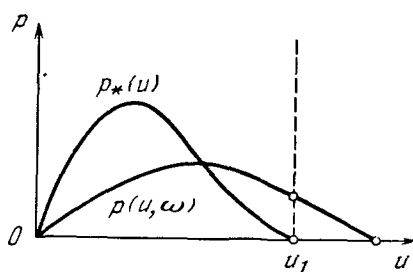


Рис. 15

$$\lambda(\omega) < \min \left\{ 1, \frac{1}{\omega} \right\}. \quad (2.7)$$

Линия нулевых наклонов уравнения (2.2) имеет вид:

$$p_* = \frac{1}{\omega} u F(u), \quad p'_*(0) = \frac{1}{\omega}. \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) заключаем, что при малых u сепаратриса $p(u, \omega)$ проходит ниже кривой $p_*(u)$ (рис. 15), возрастает в области $0 < p < p_*(u)$

и обязательно пересекается с $p_*(u)$ в точке своего максимума, после чего в области $p > p_*(u)$ функция $p(u, \omega)$ убывает. Очевидно, $p(u, \omega) > 0$, в интервале $0 < u < u_1$ при любом $\omega \geq 0$. Поэтому задача (2.2) не может иметь решения при $u_0 < u_1$ (еще одно доказательство необходимости срезания функции $F(u)$). При $u = u_1, \omega \geq 0$

$$p_1(\omega) = p(u_1, \omega) \geq 0. \quad (2.9)$$

Поскольку $F(u) \equiv 0$ при $u \geq u_1$, то в этой области $p(u, \omega)$ линейно зависит от u :

$$p(u, \omega) = p_1(\omega) - \omega(u - u_1). \quad (2.10)$$

Так что при $\omega > 0$ имеем $p(u_0(\omega), \omega) = 0$ в точке

$$u_0(\omega) = u_1 + \frac{p_1(\omega)}{\omega}. \quad (2.11)$$

Таким образом, мы решили обратную задачу: по заданному $\omega > 0$ мы указали точку $u_0 = u_0(\omega) \geq u_1$, в которой $p(u_0, \omega) = 0$. Покажем, что функция (2.11) при изменении ω в интервале $0 < \omega < \infty$ принимает все значения из интервала $u_1 < u_0 < \infty$. В самом деле $p_1(\omega)$ и $u_0(\omega)$ (см. (2.9), (2.11)) суть непрерывные функции ω при $\omega > 0$, причем

$$p_1(\omega) < p_1(0) = \left(2 \int_0^{u_1} uF(u) du \right)^{1/2}, \quad p_1(\omega) \rightarrow p_1(0) \text{ при } \omega \rightarrow 0.$$

Поэтому из (2.11) следует, что $u_0(\omega) \rightarrow u_1$ при $\omega \rightarrow \infty$, $u_0(\omega) \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow 0$ и, значит, любое значение $u_0, u_1 < u_0 < \infty$ является значением функции $u_0(\omega)$ при некотором ω . Ввиду независимости уравнения (2.2), следовательно и сепаратрисы $p(u, \omega)$, от граничной точки u_0 отсюда следует разрешимость задачи (2.2) при любом $u_0 > u_1$.

Задача (2.2) разрешима и при $u_0 = u_1$. Пусть $\Phi(u) = uF(u)$, $m = \max_{u \geq 0} |\Phi'(u)|$ (по предположению $m < \infty$). В интервале $0 < u < u_1$

оценим поле наклонов уравнения (2.2) вдоль прямой $\bar{p} = \sqrt{m}(u_1 - u)$ при $\omega = 2\sqrt{m}$. Так как по формуле конечных приращений $\Phi(u) = -\Phi'(\xi)(u_1 - u)$, $u \leq \xi \leq u_1$ и, следовательно, $\Phi(u) < m(u_1 - u)$ при $0 < u < u_1$, то из (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dp}{du} \Big|_{p=\bar{p}, \omega=2\sqrt{m}} &= -\omega + \frac{uF(u)}{p} = -2\sqrt{m} + \frac{\Phi(u)}{\sqrt{m}(u_1 - u)} \leq \\ &\leq -2\sqrt{m} + \sqrt{m} = -\sqrt{m} = \frac{d\bar{p}}{du}. \end{aligned}$$

Это неравенство показывает, что при возрастании u кривая $p(u, 2\sqrt{m})$ остается ниже $\bar{p}(u) = \sqrt{m}(u_1 - u)$ во всем интервале $0 < u < u_1$. Но так как $\bar{p}(u_1) = 0$, то $p(u, 2\sqrt{m}) = p_1(2\sqrt{m}) \leq 0$. С учетом (2.9) отсюда следует $p(u_1, 2\sqrt{m}) = 0$. Таким образом, задача (2.2) при $u_0 = u_1$ и $\omega = 2\sqrt{m}$ имеет решение.

Итак, задача (2.2) разрешима при всех $u_0 \geq u_1$. Причем функция (2.11) принимает, оказывается, все значения $u_0 \geq u_1$ при изменении ω лишь в конечном интервале $0 < \omega \leq 2\sqrt{m}$.

Л е м м а. Пусть $\omega_2 > \omega_1 \leq 0$. Тогда в интервале $0 < u < u_1$

$$p(u, \omega_2) < p(u, \omega_1).$$

Действительно, если это не так, то найдется точка \bar{u} , $0 < \bar{u} < u_1$, в которой $\bar{u}(u, \omega_2) = \bar{u}(u, \omega_1)$. Ввиду того что $\lambda(\omega_2) < \lambda(\omega_1)$ (см. (2.6)), можно предположить $p(u, \omega_2) < p(u, \omega_1)$ при $0 < u < \bar{u}$ (достаточно взять в качестве \bar{u} наименьшую положительную точку пересечения этих кривых). Но тогда

$$\Delta = \frac{dp(\bar{u}, \omega_2)}{du} - \frac{dp(\bar{u}, \omega_1)}{du} >> 0,$$

а из уравнения имеем $\Delta = -\omega_2 + \omega_1 < 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

В силу леммы $p_1(\omega)$ и, следовательно, $u_0(\omega)$ суть невозрастающие функции ω . Поэтому множество тех значений ω , где $u_0(\omega) > u_1$, является открытым интервалом вида $0 < \omega < \omega_0$ (в силу предыдущего $\omega_0 \leq 2 \gamma \bar{m} < \infty$). Согласно (2.9), (2.11) в этом интервале $p_1(\omega) > 0$ и $u_0(\omega)$ является строго убывающей функцией. Действительно, при $\omega_2 > \omega_1$ ($\omega_2 < \omega_0$) имеем $p_1(\omega_2) \leq p_1(\omega_1)$ и

$$u_0(\omega_2) = u_1 + \frac{p_1(\omega_2)}{\omega_2} < u_1 + \frac{p_1(\omega_1)}{\omega_1} = u_0(\omega_1).$$

Поэтому при $u_0 > u_1$ определена однозначная обратная функция $\omega = \omega(u_0)$, т. е. задача (2.2) имеет при $u_0 > u_1$ единственное решение. $\omega(u_0)$ является ограниченной ($0 < \omega(u_0) < \omega_0$) убывающей функцией, причем

$$\lim_{u_0 \rightarrow u_1} \omega(u_0) = \omega_0. \quad (2.12)$$

Далее, по определению ω_0 , $u_0(\omega_0) = u_1$, т. е. $p_1(\omega_0) = 0$. Так как $p_1(\omega)$ не возрастает, то $p_1(\omega) \leq 0$ при $\omega \geq \omega_0$. А так как в силу (2.9) $p_1(\omega) \geq 0$, то мы имеем

$$p_1(\omega) \equiv 0, \quad u_0(\omega) \equiv u_1 \quad \text{при } \omega \geq \omega_0.$$

Таким образом, при $u_0 = u_1$ задача (2.2) имеет бесчисленное множество решений, отвечающих $\omega \geq \omega_0$. Однако только минимальное значение $\omega = \omega_0$ согласно (2.12) оказывается устойчивым (мало меняющимся) при малых изменениях u_0 . Можно показать, что только ω_0 оказывается устойчивым и при малых изменениях функции $F(u)$.

Для задачи (1.2) мы имеем следующий результат.

Теорема. Пусть функция $F(u)$ удовлетворяет условиям (2.4). Тогда:

1. При $u_0 > u_1$ существует единственное (с точностью до сдвига) решение задачи (1.2). Значение $\omega = \omega(u_0) > 0$ является убывающей функцией u_0 , и существует предел

$$\lim_{u_0 \rightarrow u_1} \omega(u_0) = \omega_0.$$

2. При $u_0 = u_1$ задача (1.2) разрешима при каждом $\omega \geq \omega_0$. При этом только решение, отвечающее $\omega = \omega_0$, оказывается устойчивым относительно малых изменений u_0 и $F(u)$.

3. При $u_0 < u_1$ задача (1.2) не разрешима.

Следует отметить, что случай $u_0 = u_1$ не характерен для задачи о тепловом распространении пламени, так как u_1 не является параметром задачи, а лишь условной точкой срезки функции $F(u)$, от которой результаты не должны зависеть. Такой случай встречается в задачах о целом изотермическом распространении пламени (см. также [24]).

У п р а ж н е н и е. Пусть функция $\Phi(u) = uF(u)$ удовлетворяет (см. [24]) неравенству $\Phi(u) \leq \Phi'(u_1)(u - u_1)$ ($\Phi'(u_1) < 0$). Показать, что при $u_0 = u_1$ минимальное значение ω_0 задается формулой

$$\omega_0 = 2 \sqrt{-\Phi'(u_1)}.$$

У к а з а н и е. Проанализировать особую точку $u = u_1$, $p = 0$ уравнения (2.2).

3 Приближенное вычисление скорости распространения ω . Заметим сперва, что не составляет большого труда численное нахождение функции $u_0(\omega)$, а следовательно, и обратной функции $\omega(u_0)$. Для этого нужно при заданном ω в уравнении (2.2) выйти из особой точки

$u = p = 0$ вдоль интересующей нас сепаратрисы, т. е. взять начальное условие

$$p = \lambda(\omega)\varepsilon \text{ при } u = \varepsilon,$$

где ε — достаточно малое положительное число, и каким-либо методом численного интегрирования уравнений прорешать уравнение (2.2) до обращения в нуль решения $p(u, \omega)$, в некоторой точке $u_0 = u_0(\omega)$.

Можно, однако, используя специфику задачи (малость величины $\gamma = \frac{1}{u_0}$, вид функции $F(u) \simeq \text{схр}(-u)$), получить приближенное аналитическое выражение для ω . Источником разного рода оценок ω служат соотношения

$$\omega = \frac{1}{u_0} \int_0^{u_0} \frac{uF(u)}{p(u)} du = \frac{\int_0^{u_0} uF(u) du}{\int_0^{u_0} p(u) du}, \quad (3.1)$$

которые легко вытекают из (2.2). Так как вдоль прямой $\bar{p}(u) = \omega(u_0 - u)$ поле наклонов уравнения (2.2) удовлетворяет неравенству

$$\left. \frac{dp}{du} \right|_{p=\bar{p}} = -\omega + \frac{uF(u)}{p} > -\omega \text{ при } 0 < u < u_1$$

и $p(u, \omega) = \bar{p}(u)$ при $u_1 \leq u \leq u_0$, то имеет место

$$p(u, \omega) \leq \bar{p}(u) = \omega(u_0 - u), \quad 0 < u < u_0. \quad (3.2)$$

Используя оценку (3.2) и второе из соотношений (3.1), получим оценку

$$\omega^2 > \frac{2}{u_0^2} \int_0^{u_0} uF(u) du. \quad (3.3)$$

Хорошо известная формула Зельдовича

$$\omega \simeq \frac{\sqrt{2}}{u_0} \left(\int_0^{u_0} uF(u) du \right)^{1/2} \equiv \underline{\omega} \quad (3.4)$$

дает, таким образом, оценку снизу для величины ω ($\omega > \underline{\omega}$).

Можно указать оценку сверху и понять асимптотический смысл формулы Зельдовича. Возьмем решение $p_0(u)$ при $\omega = 0$

$$p_0(u) = \sqrt{2 \int_0^u sF(s) ds}.$$

Если $p(u)$ — решение задачи (2.2), то, очевидно, $p_0(u) > p(u)$. Но тогда в силу уравнения (2.2)

$$p(u) > \int_0^u \frac{sF(s)}{p_0(s)} ds - \omega u = p_0(u) - \omega u \equiv p_1(u). \quad (3.5)$$

Так как $p_1(u_0) < p(u_0) = 0$, то $\omega > \frac{p_0(u_0)}{u_0} = \underline{\omega}$. Снова пришли к неравенству (3.3). Если теперь использовать неравенство (3.5), то из (2.2) имеем (предполагается $p_1(u) > 0$ при $0 < u < u_1$)

$$p(u) < \int_0^u \frac{sF(s)}{p_1(s)} ds - \omega u = \int_0^u \frac{p_0'(s) ds}{1 - \omega \frac{s}{p_0(s)}} - \omega u \equiv p_2(u).$$

Так как $p_2(u_0) > p(u_0) = 0$, то по теореме о среднем значении

$$\omega < \frac{1}{u_0} \int_0^{u_0} \frac{p'_0(s) ds}{1 - \omega \frac{s}{p_0(s)}} = \frac{p_0(u_0)}{u_0(1 - \mu\omega)} = \frac{\omega}{1 - \mu\omega},$$

где $\mu > 1$ — некоторое значение функции $\frac{s}{p_0(s)}$ в интервале $0 < s < u_0$.

Таким образом, мы имеем неравенства

$$\underline{\omega} < \omega < \frac{\omega}{1 - \mu\omega},$$

откуда следует, что $\lim_{u_0 \rightarrow \infty} \frac{\omega}{\underline{\omega}} = 1$, т. е. формула Зельдовича (3.4) действительно является приближенной, дающей при больших u_0 главный член разложения $\omega = \omega(u_0)$ по степеням $1/u_0$. Для $F(u) \simeq \exp(-u)$ приближенная формула принимает вид

$$\omega(u_0) = \frac{\sqrt{2}}{u_0} + O\left(\frac{1}{u_0^2}\right).$$

§ 2. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О ТЕПЛОМ ВЗРЫВЕ

1. Введение параметра $s = -\theta'(1)$. Настоящий параграф посвящен качественному исследованию сферически-симметричной задачи (ср. (X.1.2.6))

$$\theta'' + \frac{n+1}{x} \theta' + \delta e^\theta = 0, \quad (\theta' + \sigma\theta)|_{x=1} = 0. \quad (1.1)$$

Выражение

$$\Delta\theta = \theta'' + \frac{n+1}{x} \theta' = \frac{1}{x^{n+1}} \cdot \frac{d}{dx} \left(x^{n+1} \frac{d\theta}{dx} \right)$$

представляет собой радиальную часть оператора Лапласа в пространстве размерности $n+2$. Случай $n = -1$, $n = 0$, $n = 1$ относятся соответственно к плоскопараллельной полосе, цилиндру и шару. Общетеоретический интерес представляет рассмотрение задачи (1.1) при произвольном (даже нецелом) n . Кроме того, в § 5 предыдущей главы мы видели, что многие задачи с распределенными источниками сводятся к задаче (1.1) с произвольным, вообще говоря, нецелым n . Удобно поэтому считать n непрерывно меняющимся параметром.

Во многих отношениях оказывается более удобным задаваться не величиной δ , а величиной $s = -\theta'(1)$ и находить δ как функцию s . Такой подход позволяет легко свести исследование третьей краевой задачи к случаю первой краевой задачи ($\sigma = \infty$), т. е. избавиться от одного параметра σ . Совершенно очевидно, что решение задачи (1.1), удовлетворяющее условию $\theta'(1) = -s$, имеет вид

$$\theta = \theta(x, s) + \frac{s}{\sigma}; \quad \delta = \delta(s) e^{-s/\sigma}, \quad (1.2)$$

где $\theta(x, s)$, $\delta(s)$ оказываются решением задачи

$$\theta'' + \frac{n+1}{x} \theta' + \delta e^\theta = 0, \quad \theta(1) = 0, \quad \theta'(1) = -s, \quad (1.3)$$

которая уже не содержит параметра σ . Конечно, по двум условиям (1.3) нельзя однозначно найти θ , и δ . Здесь имеется ввиду еще одно дополнительное условие. Обычно накладываемое условие симметрии

$$\theta' \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

в соответствии с теорией обобщенного решения естественно заменить более слабым (при $n \geq -1$) условием

$$x^{n+1} \theta' \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

При этом интересно выяснить, вытекает ли из (1.5) условие (1.4).

Перейдем в задаче (1.3) к новым переменным:

$$\xi = \ln x, \quad u = -\frac{d\theta}{d\xi}, \quad p = \frac{du}{d\xi} + nu. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.3) дает тождество

$$p = \delta \exp(\theta + 2\xi). \quad (1.7)$$

Дифференцируя это тождество по u , имеем

$$\frac{dp}{du} = p \left(\frac{d\theta}{du} + 2 \frac{d\xi}{du} \right). \quad (1.8)$$

Из (1.4), (1.6) — (1.7) следует, что при $\xi = -\infty$ ($x = 0$) имеем $u = 0$, $p = 0$. Кроме того,

$$\frac{d\xi}{du} = \frac{1}{p - nu}, \quad \frac{d\theta}{du} = \frac{d\theta}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{du} = -\frac{u}{p - nu}. \quad (1.9)$$

С учетом этого нахождение функции $p = p(u)$ сводится к решению задачи¹

$$\frac{dp}{du} = p \frac{2-u}{p-nu}, \quad p(0) = 0. \quad (1.10)$$

Граничные условия при $x = 1$ ($\xi = 0$) дают согласно (1.6), (1.7)

$$u = -\left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = -\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=1} e^{\xi} \Big|_{\xi=0} = s, \quad p = p(s) = \delta.$$

Таким образом, искомая связь между δ и s определяется формулой

$$\delta = p(s), \quad (1.11)$$

где $p(u)$ определяется из задачи (1.10). Так как задача (1.10) не содержит параметров s и δ , то $\left. \frac{dp(s)}{ds} = \frac{dp(u)}{du} \right|_{u=s}$ и связь между δ и s определяется тем же самым уравнением (1.10)

$$\frac{d\delta}{ds} = \delta \frac{2-s}{\delta - ns}, \quad \delta|_{s=0} = 0. \quad (1.12)$$

Это соотношение было получено впервые Энигом [64]. Из него следует, что $\delta = \delta(s)$ достигает своего максимального значения при $s = 2$, так что $\delta = \delta(2)$ оказывается критическим значением параметра δ , выше которого решение задачи (1.3) уже невозможно ни при каком s . Несколько иначе обстоит дело в задаче (1.1). В этом случае согласно формулам (1.2) и (1.11)

$$\delta_{\text{кр}}(\sigma) = \max_s p(s) \exp\left(-\frac{s}{\sigma}\right), \quad (1.13)$$

и этот максимум достигается, вообще говоря, при $s < 2$. Из (1.12) вытекает любопытный результат: $\theta'_{\text{кр}}(1) = -2$ независимо от n , если решение $\theta_{\text{кр}}(x)$ задачи (1.1) при $\sigma = \infty$ существует.

2 Случай $n = 0$. Все уравнения элементарно интегрируются при $n = 0$, отвечающем случаю бесконечного круглого цилиндра. Из (1.10) имеем

$$p(u) = \frac{u}{2} (4 - u).$$

Последнее соотношение (1.6) с учетом $u = s$ при $\xi = 0$ ($\xi = \ln x$) дает

$$u = \frac{4sx^2}{4 - s(1 - x^2)}.$$

¹ Условие $p(0) = 0$ можно вывести также из (1.5) — (1.7).

Непосредственно из (1.7) или интегрируя соотношение

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = -\frac{u}{x}, \quad \theta|_{x=1} = 0,$$

получаем решение $\theta(x, s)$, $\delta(s)$ задачи (1.3):

$$\theta(x, s) = 2 \ln \frac{4}{4 - s(1 - x^2)}; \quad \delta = p(s) = \frac{s}{2}(4 - s). \quad (2.1)$$

Эти формулы определяют ограниченное вещественное решение задачи (1.3) в интервале $-\infty < s < 4$. Исключая параметр s , мы получаем решение первой краевой задачи (1.1) ($\sigma = \infty$), единственное при $\delta \leq 0$, и два решения, отвечающие двум корням

$$s = 2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\delta}{2}} \right)$$

при $0 < \delta < \delta_{\text{кр}} = p(2) = 2$. Подставив в выражение $\theta(x, s)$ эти корни, получим

$$\theta_{\pm}(x, \delta) = 2 \ln \frac{2}{1 + x^2 \pm (1 - x^2) \sqrt{1 - \frac{\delta}{2}}}, \quad 0 < \delta < 2. \quad (2.2)$$

При $\delta = 2$ $\theta^+ = \theta^-$.

Из формул (1.2) и (2.1) мы получаем параметрическое представление решения задачи (1.1) при произвольном σ :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{s}{\sigma} + 2 \ln \frac{4}{4 - s(1 - x^2)}, \\ \delta &= \frac{s}{2}(4 - s) \exp\left(-\frac{s}{\sigma}\right), \quad -\infty < s < 4. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Легко вычислить $\delta_{\text{кр}}(\sigma)$ по формуле (1.13). Максимум $\delta = \delta(s, \sigma)$ достигается при $s = s_{\text{кр}}(\sigma)$:

$$s_{\text{кр}} = 2 + \sigma - \sqrt{4 + \sigma^2}.$$

Подставляя это значение в выражение для $\delta = \delta(s, \sigma)$, имеем

$$\delta_{\text{кр}}(\sigma) = \sigma \left(\sqrt{4 + \sigma^2} - \sigma \right) \exp\left[-\frac{1}{\sigma} \left(2 + \sigma - \sqrt{4 + \sigma^2} \right)\right]. \quad (2.4)$$

Эта формула впервые получена Барзыкиным и Мержановым [5]. Очевидно, $\delta_{\text{кр}}(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$, $\delta_{\text{кр}}(\sigma)$ монотонно возрастает и

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \delta_{\text{кр}}(\sigma) = 2.$$

3. Исследование особых точек. В общем случае при $n \neq 0$ уравнение (1.10) имеет две особые точки:

1) $u = p = 0$; 2) $u = 2$; $p = 2n$, причем ввиду того, что $p \equiv 0$ является решением, входящим в точку $u = p = 0$, эта точка может быть либо «седлом», либо «узлом». Из вида матрицы коэффициентов при линейных членах числителя и знаменателя

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -n \end{pmatrix}$$

легко заключить, что точка $u = p = 0$ является «седлом» при $n > 0$, «узлом» при $n < 0$. Решение $p \equiv 0$ является одной из сепаратрис этой точки. Наклон другой, ненулевой сепаратрисы $p(u)$ задается равенством

$$p'(0) = n + 2. \quad (3.1)$$

Интегральная кривая, а также особая точка уравнения (1.10) определяет, вообще говоря, решение задачи (1.3). Так, особой точке $u = p = 0$ отвечает согласно (1.6), (1.7) решение $\theta \equiv 0$ при $\delta = s = 0$. Из (1.6), (1.7) при $u \equiv 2$, $p \equiv 2n$ находим решение

$$\theta = 2 \ln \frac{1}{x}; \quad \delta = 2n; \quad s = 2, \quad (3.2)$$

отвечающее особой точке $u = 2$, $p = 2n$. Сепаратриса $p \equiv 0$ отвечает

$$\theta(x, s) = \frac{s}{n} (x^{-n} - 1); \quad \delta(s) \equiv 0. \quad (3.3)$$

Функция (3.2) является неограниченным решением (1.3) при $s = 2$, $i = 2n$ при произвольном значении n . Условие (1.4) для нее не имеет места. Однако, как легко видеть, при $n > 0$ имеет место (1.5). Так что из (1.5) не следует (1.4), и задача (1.3) может иметь неограниченное при $x \rightarrow 0$ решение.

Функция (3.3) не удовлетворяет условию (1.5) ни при каком n , если $s \neq 0$. Можно показать, что условию (1.5) не удовлетворяют и решения задачи (1.3), отвечающие интегральным кривым уравнения (1.10) при $i < 0$ («узел»), касающимся при $u = 0$ одной из сепаратрис. При $-2 \leq n < 0$ пучок решений (1.10) касается сепаратрисы $p \equiv 0$. Соответствующие решения (1.3) имеют при $x \rightarrow 0$ тот же характер, что и функция (3.3). При переходе n через значение $n = -2$ (вырожденный «узел») сепаратрисы меняются ролями: касательной к пучку решений становится сепаратриса с наклоном (3.1).

Таким образом, при $n \leq -2$ задача (1.3), (1.5) вообще не имеет решения, кроме тривиального случая $s = 0$, $\delta = 0$ ($\theta = 0$). При $n > -2$ остается исследовать только ненулевую сепаратрису $p(u)$ с наклоном (3.1).

Отметим прежде всего, что при $n > -2$ эта сепаратриса неограниченно продолжается в область $u < 0$, причем $p(u) < \min\{0, nu\}$; $p'(u) > 0$; $p(u) \rightarrow -\infty$ при $u \rightarrow -\infty$. Это легко следует из уравнения (1.10). Поведение $p(u)$ при $u > 0$ определяется характером особой точки $u = 2$, $p = 2n$. Впрочем, при $-2 < n < 0$ эта точка попадает в область $p < 0$ и не влияет на ход сепаратрисы, поскольку отделяется от нее другой сепаратрисой $p \equiv 0$. При $-2 < n < 0$, как нетрудно видеть, сепаратриса $p(u)$ также неограниченно продолжается в область $u > 0$, проходит через максимум в точке $u = 2$, затем убывает, приближаясь при $u \rightarrow \infty$ к сепаратрисе $p \equiv 0$ со стороны области $p > 0$.

При $n > 0$ точка $u = 2$, $p = 2n$ лежит в области $p > 0$ и существенно влияет на поведение сепаратрисы. Линеаризуя числитель и знаменатель правой части (1.10) в окрестности $u = 2$, $p = 2n$ ($p = 2n + z$, $u = 2 + y$), получим

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-2ny}{z - ny}. \quad (3.4)$$

Матрица коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 0 & -2n \\ 1 & -n \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2} [-n \pm \sqrt{n(n-8)}]. \quad (3.5)$$

Таким образом, при $0 < n < 8$ мы имеем «фокус», а при $n \leq 8$ — «узел» в точке $u = 2$, $p = 2n$. При $0 < n < 8$ сепаратриса $p(u)$ монотонно возрастает в интервале $0 < u < 2$, оставаясь выше прямой $p = nu$ — линии бесконечных наклонов $p'(u) = \infty$; при $u = 2$ достигает максимума и, как и все интегральные кривые, закручивается спиралью вокруг точки $u = 2$, $p = 2n$, совершая бесконечное число витков. При этом

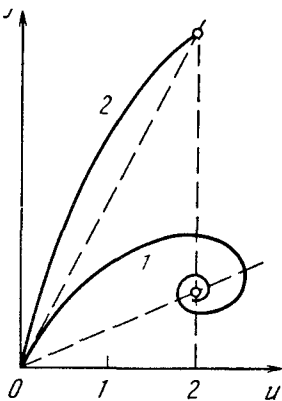


Рис. 16

вся траектория лежит выше разделяющей линии $p \equiv 0$. На рис. 16 кривая I схематически изображает ход сепаратрисы $p(u)$ при $0 < n < 8$. Пунктирные линии изображают линию нулевых наклонов ($u=2$) и линию бесконечных наклонов ($p=nu$). В этом случае кривая $p(u)$ определена лишь в ограниченной области изменения u и является многозначной функцией u в некоторой окрестности точки $u=2$.

В случае «узла» в точке $u=2$, $p=2n$ ($n \geq 8$) существуют сепаратрисы, наклоны которых

$$\lambda = \left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{z(y)}{y}$$

согласно (3.4) находятся из квадратного уравнения

$$\lambda^2 - n\lambda + 2n = 0; \quad (3.6)$$

$$\lambda^{\pm} = \frac{1}{2} (n \pm \sqrt{n(n-8)}). \quad (3.7)$$

Оба наклона, как видим, положительны, $\lambda^- \leq \lambda^+$. В плоскости (p, u) рассмотрим прямую линию

$$p^*(u) = 2n + \lambda^+(u-2), \quad (3.8)$$

проходящую через особую точку и имеющую наклон $\lambda^+ \geq \lambda^-$. Очевидно, $p^*(0) = 2n - 2\lambda^+ = 2(n - \lambda^+) = 2\lambda^- > 0$. Покажем, что для исследуемой сепаратрисы $p(u)$ в интервале $0 < u < 2$ имеют место неравенства

$$nu < p(u) < p^*(u). \quad (3.9)$$

Первое неравенство очевидно. При любом n сепаратриса $p(u)$ проходит в интервале $0 < u < 2$ выше линии бесконечных наклонов $p=nu$. Второе из неравенств (3.9) ввиду $p^*(0) > 0$ имеет место по крайней мере в некотором интервале $0 < u < u_*$. Оценим поле наклонов уравнения (1.10) вдоль прямой $p^*(u)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dp}{du} \right|_{p=p^*} &= p^* \frac{2-u}{(n-\lambda^+)(2-u)} = \frac{2n-\lambda^+(2-u)}{n-\lambda^+} = 2+u \frac{\lambda^+}{\lambda^-} < \\ &< 2 + 2 \frac{\lambda^+}{\lambda^-} = 2 \frac{\lambda^+ + \lambda^-}{\lambda^-} = 2 \frac{n\lambda^+}{2n} = \lambda^+. \end{aligned}$$

Здесь использовано условие $u < 2$ и свойства корней λ^{\pm} уравнения (3.6) $\lambda^+ + \lambda^- = n$; $\lambda^+ \cdot \lambda^- = 2n$. Таким образом, вдоль прямой (3.8)

$$\frac{dp}{du} < \frac{dp^*}{du}, \quad 0 < u < 2,$$

т. е. интегральные кривые уравнения (1.10) при возрастании u могут пересекать прямую (3.8) лишь со стороны области $p > p^*$. А так как при малых u имеем $p(u) < p^*(u)$, то это неравенство имеет место во всем интервале $0 < u < 2$. Неравенства (3.9) установлены.

Из (3.9) следует важный вывод о том, что сепаратриса $p(u)$, монотонно возрастая в интервале $0 < u < 2$, входит в особую точку $u=2$, $p=2n$ и дальше не продолжается. При этом, очевидно, как и все интегральные кривые, $p(u)$ касается при $u=2$ прямой $p^*(u)$, т. е.

$$p(2) = 2n, \quad \left. \frac{dp}{du} \right|_{u=2} = \frac{1}{2} (n + \sqrt{n(n-8)}), \quad n \geq 8. \quad (3.10)$$

а рис. 16 ход кривой $p(u)$ схематически изображен кривой 2.

4. Некоторые выводы. Можно показать, что каждой точке $u=s$, $v=\delta$, лежащей на траектории, описываемой сепаратрисой $p(u)$ в плоскости (u, p) , однозначно соответствует решение задачи (1.3), (1.5). В том случае, когда $p(u)$ является однозначной функцией u ($-2 < n < 0$, $n \geq 8$), это решение легко построить с учетом (1.7) и интегрированием соотношений (1.6). Полагая $\xi = 0$ при $u=s$, имеем

$$x = x(u, s) = \exp\left(-\int_u^s \frac{dt}{p(t) - nt}\right); \quad \delta = p(s);$$

$$\theta = \theta(u, s) = \ln\left(\frac{p(u)}{p(s)} \cdot \frac{4}{x^2}\right); \quad 0 < u < s \text{ при } s > 0;$$

$$s < u < 0 \text{ при } s < 0. \quad (4.1)$$

Эти формулы дают параметрическое представление решения задачи (1.3), (1.5). Они остаются в силе и для точек $u = s$, $p = \delta$, лежащих на однозначной ветви кривой $p(u)$ ($0 < n < 8$), проходящей через точку $u = p = 0$. В частности, критическое значение δ есть всегда $p(2)$ (при $0 < n < 8$ имеется в виду указанная однозначная ветвь), а число решений задачи (1.3), (1.5) при фиксированном $\delta < \delta_{кр}$ есть число корней s уравнения

$$p(s) = \delta. \quad (4.2)$$

Из анализа поведения $p(u)$ можно сделать следующие выводы:

1. $-2 < n \leq 0$.

При $\delta \leq 0$ существует единственный корень уравнения (4.2), а следовательно, единственное решение задачи (1.3), (1.5). При $0 < \delta < \delta_{кр} = p(2)$ существуют два решения задачи (1.3), (1.5), отвечающие двум корням уравнения (4.2). При $\delta = \delta_{кр}$ эти решения сливаются и задача (1.3), (1.5) имеет единственное решение. Любое решение может быть построено по формулам (4.1).

2. $0 < n < 8$.

Существует такое $\delta_1 > 0$, что при каждом δ ($-\infty < \delta < \delta_1$) уравнение (4.2), а значит и задача (1.3), (1.5), имеет единственное решение. Для любого натурального числа $m > 1$ можно указать такое δ из интервала $\delta_1 \leq \delta < \delta_{кр}$, что при нем уравнение (4.2) и задача (1.3), (1.5) имеют ровно m решений. При $\delta = 2n$ число решений бесконечно. При $\delta = \delta_{кр}$ существует единственное решение задачи (1.3), (1.5).

3. $n \geq 8$.

Функция $p(u)$ определена при $-\infty < u < 2$, однозначна и монотонна. Причем $\delta_{кр} = p(2) = 2n$. При любом δ из интервала $-\infty < \delta < \delta_{кр} = 2n$ задача (1.3), (1.5) имеет единственное решение, отвечающее единственному корню уравнения (4.2). Любое решение имеет вид (4.1). Решение $\theta_{кр}(x)$ при $\delta = \delta_{кр} = 2n$ задается формулой (3.2) и не ограничено.

Эти выводы переносятся и на случай задачи (1.1), (1.5) при $0 < \delta < \infty$. При определении числа решений вместо уравнения (4.2) согласно формулам (1.2) следует рассматривать уравнение

$$p(s) \exp\left(-\frac{s}{\sigma}\right) = \delta, \quad (4.3)$$

Структура множества решений при $-2 < n < 8$ остается той же, что и в случае $\sigma = \infty$. Согласно (1.13) критическое значение $\delta_{кр}$ достигается в некоторой точке $s = s(\sigma) < 2$.

Некоторые отличия возникают при $n \geq 8$. Теперь кривая $\delta(s) = p(s) \exp\left(-\frac{s}{\sigma}\right)$ может и не быть монотонной по s . Однако она имеет не более одной точки максимума при $s < 2$ и является монотонной функцией s в том и только в том случае, когда

$$\left. \frac{d\delta(s)}{ds} \right|_{s=2} = \exp\left(-\frac{2}{\sigma}\right) \left[p'(2) - \frac{p(2)}{\sigma} \right] \geq 0. \quad (4.4)$$

Согласно (3.10) условие (4.4) имеет место в области

$$n \geq 8, \quad \sigma \geq \frac{4n}{n + \sqrt{n(n-8)}}. \quad (4.5)$$

Следовательно, при выполнении (4.5)

$$\delta_{кр} = \delta_{кр}(n, \sigma) = 2n \exp\left(-\frac{2}{\sigma}\right). \quad (4.6)$$

При любом $\delta < \delta_{кр}$ задача (1.1), (1.5) имеет единственное решение. При $\delta = \delta_{кр}$ решение становится неограниченным. Согласно (1.2), (3.2)

$$\theta_{кр} = 2 \ln \frac{1}{x} + \frac{2}{\sigma}. \quad (4.7)$$

В области

$$n \geq 8, \quad \sigma < \frac{4n}{n + \sqrt{n(n-8)}}$$

кривая $\delta(s)$ достигает максимума при $s < 2$, а затем убывает до величины $2n \exp\left(-\frac{2}{\sigma}\right)$. Поэтому при

$$2n \exp\left(-\frac{2}{\sigma}\right) < \delta < \delta_{кр}$$

существует два решения задачи (1.1), (1.5), соответствующие двум корням уравнения (4.3). При $\delta = \delta_{кр}$ решение единственно и ограничено.

Особо подчеркнем следующие выводы наших исследований:

I. Задача нахождения зависимости $\delta = \delta(s)$ и величины $\delta_{кр}$ решается независимо от исходной задачи (1.1), (1.5) и сводится к решению задачи (1.12), которая легко решается численно. Следует выйти из особой точки $p = u = 0$ вдоль сепаратрисы, т. е. положить $\delta = \epsilon$, $p = (n+2)\epsilon$, где ϵ — достаточно малое положительное число, и решать уравнение (1.12) до максимума $\delta(s)$, т. е. до $s = 2$ при $\sigma = \infty$, и до максимума $\delta(s) \exp\left(-\frac{s}{\sigma}\right)$ при $\sigma < \infty$.

II. В области (4.5) изменения параметров n и σ значение $\delta_{кр}$ задается формулой (4.6), а соответствующее решение задачи (1.1), (1.5) — формулой (4.7), так что решение $\theta_{кр}$ не ограничено. Неограниченное решение задачи (1.1), (1.5) может существовать и при $\delta < \delta_{кр}$. Та же формула (4.7) определяет решение при $\delta = 2ne^{-2/\sigma}$ и в случае $0 < n < 8$, причем в этом случае $\delta_{кр} > 2ne^{-2/\sigma}$.

В области (4.5) и только в ней решение задачи (1.1), (1.5) единственно при каждом $\delta < \delta_{кр}$. Вне области (4.5) $\delta_{кр}$ является точкой ветвления решения. При $\delta = \delta_{кр}$ решение единственно и ограничено.

III. Неединственность решения задачи (1.1), (1.5) при $\delta > 0$ является скорее правилом, чем исключением. Причем структура множества всех решений при $0 < n < 8$ весьма сложна. Однако устойчивым при $0 < \delta < \delta_{кр}$ согласно п. IX.3.4, по крайней мере при целых значениях n , оказывается только одно, наименьшее решение. Оно определяется формулами (4.1), (1.2) при подходящем значении s , являющемся наименьшим корнем уравнения (4.3).

§ 3. КВАЗИСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ТЕПЛОГО ВЗРЫВА

1. **Постановка задачи.** Как пример применения асимптотики по малому параметру при производной (п. VI 5.2) рассмотрим задачу о тепловом взрыве самоускоряющихся реакций. В п. X.1.2 отмечалось, что в этом случае формальный предельный переход при $\gamma \rightarrow 0$ в уравнениях (X.1.1.7) — (X.1.1.8) не допустим, что тепловой масштаб времени не характерен для этой задачи, что правильное безразмерное время, характерное для механизма изотермического самоускорения реакции, задается формулой (X.1.2.5): $t' = \gamma t$. При $\beta = 0$ задача запишется в следующем виде (штрих при t опускаем):

$$\gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \Delta \theta + \varphi(\eta) \exp \theta; \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} + \sigma \theta \right) \Big|_S = 0; \quad \theta \Big|_{t=0} = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \varphi(\eta) \exp \theta; \quad \eta \Big|_{t=0} = 0.$$

Здесь $\varphi(\eta) = (\eta_0 + \eta)(1 - \eta)$, $\eta_0 < 1$.

Возникает задача с малым параметром при производной, однако строгой теории предельного персхода при $\gamma \rightarrow 0$ в уравнениях в частных производных мы не имеем. Рассмотрим осредненную систему (X.2.2.14), которая относительно нового времени принимает вид ($\beta = 0$):

$$\gamma \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\kappa} \theta + \varphi(\eta) \exp \theta \quad (\theta(0) = 0); \quad (1.2)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \varphi(\eta) \exp \theta \quad (\eta(0) = 0). \quad (1.3)$$

Количественная теория теплового взрыва впервые была сформулирована именно в такой форме в предположении отсутствия распределения температуры по реакционному объему. Смысл этой системы как предельного случая системы (1.1) при $\sigma \rightarrow 0$ и одновременном изменении δ таким образом, чтобы отношение

$$\frac{\delta}{\delta_{кр}} = \frac{\kappa}{\kappa_{кр}} = \nu \quad (1.4)$$

оставалось постоянным, был выяснен в п. IX.4.1. Здесь $\delta_{кр}$ и $\kappa_{кр}$ — критические значения параметров δ и κ при $\gamma \rightarrow 0$. При выполнении (1.4) уравнения (1.2), (1.3) сохраняют смысл приближенной системы уравнений относительно некоторых средних значений θ и η по объему при любых σ .

Впервые асимптотика при $\gamma \rightarrow 0$ в системе (1.2) — (1.3) была получена в работах Мержанова и Дубовицкого [33, 34]. Результаты этих работ получили широкую известность под названием квазистационарной теории теплового взрыва. Строгой математической основой этой теории является сформулированная в п. VI.5.2 теорема Тихонова.

2. Теория Мержанова—Дубовицкого. Коротко изложим результаты работ [33, 34] с точки зрения теоремы Тихонова. Следует изучить корни $\theta(\eta)$ уравнения

$$\Phi(\theta, \eta) \equiv \varphi(\eta) \exp \theta - \frac{1}{\kappa} \theta = 0, \quad (2.1)$$

определенные в некоторой области изменения η , содержащей начальную точку $\eta = 0$, и являющиеся асимптотически устойчивыми положениями равновесия уравнения (1.2) (η — параметр). Достаточным условием асимптотической устойчивости является, очевидно, отрицательность производной $\partial \Phi / \partial \theta$ вдоль решений уравнения (2.1). С учетом (2.1)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta(\eta)} = \varphi(\eta) \exp \theta - \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} (\theta(\eta) - 1) < 0 \quad \text{при } \theta(\eta) < 1. \quad (2.2)$$

Корни $\theta(\eta) > 1$ — неустойчивы. Уравнение (2.1) является квадратным уравнением относительно η и при

$$\nu = \frac{\kappa e(1 + \eta_0)^2}{4} \quad (2.3)$$

из (2.1) находим

$$\eta = \frac{1}{2} \left(1 - \eta_0 \pm (1 + \eta_0) \sqrt{2 - \frac{1}{\nu} \theta \exp(1 - \theta)} \right). \quad (2.4)$$

На рис. 17 показано расположение корней (2.4) при $\nu < 1$, $\nu = 1$ и $\nu > 1$. Через η_1 и η_2 обозначены величины

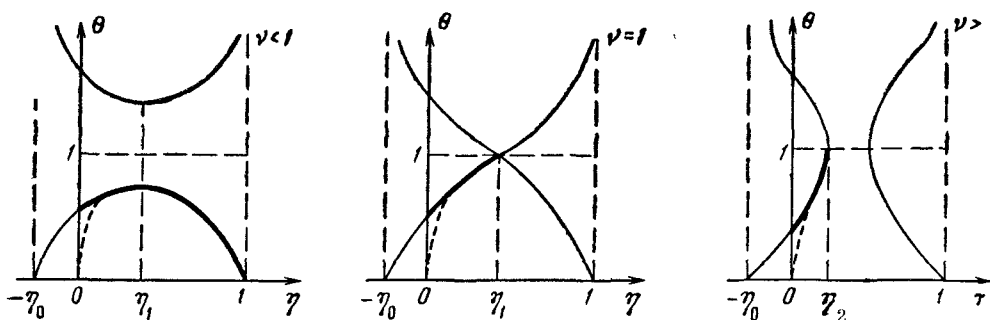


Рис. 17

$$\eta_1 = \frac{1}{2} (1 - \eta_0); \quad \eta_2 = \frac{1}{2} \left[(1 - \eta_0) - (1 + \eta_0) \sqrt{1 - \frac{1}{\nu}} \right]. \quad (2.5)$$

Жирной линией обведена ветвь $\theta_*(\eta)$ корней уравнения (2.1), удовлетворяющая согласно (2.2) условиям теоремы Тихонова. (Принадлежность точки $\theta = 0$ области влияния корня $\theta_*(\eta)$ легко проверяется). Тонкая линия показывает характер пограничного слоя у точной зависимости $\theta(\eta)$ из системы (1.2) — (1.3). По теореме Тихонова вне зоны пограничного слоя (шириной порядка $\nu \ln \frac{1}{\nu}$) решение системы (1.2) — (1.3) близко к решению вырожденной системы

$$\theta = \theta_*(\eta); \quad (2.6)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \varphi(\eta) \exp \theta \quad (\eta(0) = 0)$$

во всей области определения $\theta_*(\eta)$. При $\nu < 1$ корень $\theta_*(\eta)$ определен на всем интервале изменения η , $0 \leq \eta \leq 1$. Соответственно этому система (2.6) разрешима во всем интервале $0 < t < \infty$, и решение ограничено. При $\nu > 1$ корень $\theta_*(\eta)$ определен лишь в интервале $0 \leq \eta < \eta_2$ и решение системы (2.6) существует лишь в конечном интервале изменения t : $0 \leq t < \bar{\tau}$, где

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(\nu, \eta_0) = \int_0^{\eta_2} \frac{d\eta}{\varphi(\eta) \exp \theta_*(\eta)} \quad (\nu > 1). \quad (2.7)$$

Согласно сказанному следует считать, что при $\nu > 1$ в момент времени $t = \bar{\tau}$, называемый периодом индукции, происходит взрыв, а $\nu = 1$ определяет критическое условие (предел самовоспламенения), так что величина ν по формуле (2.3) совпадает с (1.4) и для $\kappa_{кр}$ имеем

$$\kappa_{кр} = \frac{4}{e(1 + \eta_0)^2} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{\max \varphi(\eta)}. \quad (2.8)$$

При $\eta_2 \leq 0$, т. е. (см. (2.5)) при

$$\nu \geq \frac{(1 + \eta_0)^2}{4\eta_0}, \quad (2.9)$$

решение вырожденной системы (2.6) перестает существовать вообще: начальная точка $\eta = 0$ не принадлежит области определения корня $\theta_*(\eta)$.

В этой связи наибольший интерес данное рассмотрение представляет при малых значениях η_0 , когда квазистационарное приближение

(2.6) имеет место в большом диапазоне изменения v (или κ) над пределом самовоспламенения, а в области (2.9) справедливо адиабатическое приближение ($v = \infty$).

Величину η_2 (см. (2.5)) называют глубиной предвзрывного разложения. Наряду с $\kappa_{кр}$ и τ η_2 является важной характеристикой задачи. Представляет интерес и величина

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(v, \eta_0) = \int_0^{\eta_1} \frac{d\tau}{\varphi(\tau) \exp \theta_*(\tau)} \quad (v \leq 1), \quad (2.10)$$

определяющая время достижения максимальной температуры под пределом самовоспламенения. Делая в интегралах (2.7), (2.10) замену переменной $\theta_*(\eta) = \theta$, мы имеем согласно (2.4)

$$\eta = \frac{1}{2} \left[(1 - \eta_0) - (1 + \eta_0) \sqrt{1 - \frac{1}{v} \theta \exp(1 - \theta)} \right];$$

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{\kappa} \theta \exp(-\theta)$$

и для величины $\bar{\tau}(v, \eta_0)$ при произвольных v получаем выражение

$$\bar{\tau}(v, \eta_0) = \frac{1}{1 + \eta_0} \int_{\theta_0}^{\theta_m} \frac{(1 - \theta) \exp(-\theta)}{\theta \sqrt{1 - \frac{1}{v} \theta \exp(1 - \theta)}} d\theta, \quad (2.11)$$

где $\theta_0 = \theta_*(0)$ является наименьшим корнем уравнения

$$\theta \exp(1 - \theta) = v \frac{4\eta_0}{(1 + \eta_0)^2}; \quad (2.12)$$

$\theta_m = 1$ при $v \geq 1$; $\theta_m = \max \theta_*(\eta)$ является наименьшим корнем уравнения

$$\theta \exp(1 - \theta) = v \quad (2.13)$$

при $v < 1$.

3. Метод равномерного выгорания. Изложенный выше метод расчета характеристик теплового взрыва, основанный на уравнениях (1.2)–(1.3), может быть назван *методом равномерного нагрева* (отсутствие распределения температуры). Одним из авторов [57] был предложен другой метод расчета характеристик, приводящий в отличие от предыдущего к элементарной формуле для временных характеристик. Этот метод можно назвать *методом равномерного выгорания*, так как он основан на предположении об отсутствии распределения η по объему G . Вместо системы (1.1) решается система уравнений

$$\Delta\theta + \delta\varphi(\eta) \exp \theta = 0; \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial n} + \sigma\theta \right) \Big|_S = 0; \quad (3.1)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \varphi(\eta) \exp \langle \theta \rangle; \quad \eta(0) = 0, \quad (3.2)$$

где $\langle \theta \rangle = \max_G \theta$. Очевидно, здесь η зависит только от t и в уравнении (3.1) η играет роль параметра. Такое допущение менее ограничительно, чем предположение об отсутствии распределения температуры, и позволяет получать зависимость характеристик от области G и от σ .

Мы используем здесь аналог теоремы Тихонова, не обоснованный для системы (1.1). Однако здесь речь идет о расчетном методе, правильность которого устанавливается в конечном счете проверкой результатов.

Обозначим через δ_0 критическое значение δ в задаче

$$\Delta\theta + \delta \exp \theta = 0; \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} + \sigma \theta \right) \Big|_S = 0. \quad (3.3)$$

Очевидно, при $\delta \max \varphi(\eta) < \delta_0$ задача (3.1) разрешима при всех η , $0 < \eta < 1$ и, следовательно, решение системы (3.1), (3.2) существует и ограничено при всех $t > 0$. При этом максимальная по времени (или по η) температура достигается при $\eta = \eta_1 = \frac{1}{2}(1 - \eta_0)$. При $\delta \max \varphi(\eta) > \delta_0$ задача (3.1) имеет решение лишь в некотором интервале $0 < \eta < \eta_2$, где η_2 является меньшим корнем уравнения

$$\delta \varphi(\eta) = \delta_0. \quad (3.4)$$

Соответственно этому система (3.1), (3.2) разрешима лишь в конечном интервале изменения t , $0 < t < \tau$. Согласно сказанному критическим значением δ следует считать

$$\delta_{кр} = \frac{4\delta_0}{(1 + \eta_0)^2} = \frac{\delta_0}{\max \varphi(\eta)}. \quad (3.5)$$

Вводя параметр ν по формуле (ср. (1.4))

$$\nu = \frac{\delta}{\delta_{кр}} = \frac{\delta}{\delta_0} \max \varphi(\eta) = \frac{\delta(1 + \eta_0)^2}{4\delta_0}, \quad (3.6)$$

для глубины предвзрывного разложения η_2 мы получим формулу (2.5). Как и выше, при выполнении условия (2.9) система (3.1) — (3.2) перестает быть разрешимой.

Расчет временных характеристик требует знания зависимости $\langle \theta \rangle$ от η . Мы рассмотрим случай бесконечного круглого цилиндра при $\sigma = \infty$, когда решение задачи (3.1) задается согласно (2.2.2) формулой (мы берем минимальное устойчивое решение)

$$\exp \theta = 4 \left[1 + \sqrt{1 - \frac{\delta \varphi(\eta)}{2}} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\delta \varphi(\eta)}{2}} \right) x^2 \right]^{-2},$$

так что $\langle \theta \rangle = \theta|_{x=0}$ и

$$\exp \langle \theta \rangle = 4 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\delta \varphi(\eta)}{2}} \right)^{-2}. \quad (3.7)$$

В выражениях (3.4) — (3.6) в данном случае следует положить $\delta_0 = 2$.

Если положить $\eta(\nu, \eta_0) = \eta_1$ при $\nu \leq 1$, $\eta(\nu, \eta_0) = \eta_2$ при $\nu > 1$ (см. (2.5)), то согласно (3.2), (3.7) функция

$$\tau(\nu, \eta_0) = \frac{1}{4} \int_0^{\eta(\nu, \eta_0)} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\nu\varphi(\eta)}{(1 + \eta_0)^2}} \right)^2 \frac{d\eta}{\varphi(\eta)} \quad (3.8)$$

определяет период индукции при $\nu > 1$ и время достижения максимальной температуры при $\nu \leq 1$. Интеграл (3.8) выражается через элементарные функции. Опуская вычисления, приведем результат. Пусть

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_1(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu \leq 1; \\ 2(\nu - \sqrt{\nu(\nu - 1)}) - 1, & \nu > 1; \end{cases} \\ \tau_2 &= \tau_2(\nu, \eta_0) = \sqrt{(1 + \eta_0)^2 - 4\nu\eta_0}; \\ \tau_3 &= \tau_3(\nu, \eta_0) = (1 + \eta_0)^2 - 2(\nu + 1)\eta_0; \\ \tau_4 &= \tau_4(\nu) = \frac{1}{2} |\sqrt{\nu} - 1| \ln |\nu - 1|, \quad \tau_4(1) = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tau(\nu, \eta_0) &= \frac{1}{1 + \eta_0} \left[\ln \frac{\sqrt{\tau_1}}{\eta_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{(1 - \eta_0)\tau_2 + \tau_3}{2} + \tau_4 - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\nu} \ln \frac{\sqrt{\nu}(1 - \eta_0) + \tau_2}{1 + \eta_0} - \nu \left(\frac{1}{1 + \eta_0} - \frac{1}{1 + \tau_1} \right) \right]. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Особенно простое выражение получается для критического периода индукции $\tau_0(\eta_0) = \tau(1, \eta_0)$:

$$\tau_0(\eta_0) = \frac{1}{1 + \eta_0} \left(\ln \frac{1 + \eta_0}{2\eta_0} - \frac{1 - \eta_0}{2(1 + \eta_0)} \right). \quad (3.10)$$

Как и в формуле (2.11), при $\nu \rightarrow 0$ имеем

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \tau(\nu, \eta_0) = \frac{1}{1 + \eta_0} \ln \frac{1}{\eta_0},$$

и (3.9), как и (2.11), теряет смысл в области (2.9).

Интересно сопоставить формулы (2.11) и (3.9) при одинаковых значениях ν и η_0 . Как говорилось выше, формула (2.11) является точной при $\sigma \rightarrow 0$. Формула (3.9) относится к другому крайнему случаю $\sigma \rightarrow \infty$. Для цилиндрической области, используя формулы п. 2.2, можно показать, что точная зависимость $\tau(\nu, \eta_0, \sigma)$ является невозрастающей функцией σ . Кроме того, метод равномерного выгорания приводит к увеличению η и, следовательно, уменьшению временных характеристик. Так что из общих соображений следует, что формулы (2.11) и (3.9) связаны неравенством

$$\tau(\nu, \eta_0) < \bar{\tau}(\nu, \eta_0),$$

Таблица 3

ν	τ	$\bar{\tau}$	ν	τ	$\bar{\tau}$
0,5	4,05	4,17	1,5	2,58	2,73
0,7	3,81	3,99	2	2,21	2,34
0,9	3,57	3,78	3	1,74	1,86
1	3,40	3,64	5	1,22	1,32
1,1	3,13	3,28	8	0,78	0,87
1,3	2,80	2,95			

причем отклонение складывается из ошибки метода равномерного выгорания и изменения τ при изменении σ от нуля до бесконечности.

Из табл. 3, где приведены значения $\tau(\nu, \eta_0)$ и $\bar{\tau}(\nu, \eta_0)$ при $\eta_0 = 0,01$ и различных значениях ν , видно, что отклонение небольшое, оно увеличивается с ростом ν и достигает 10% при $\nu = 8$. Это говорит как о

слабой зависимости от ν , так и о малой погрешности метода равномерного выгорания.

Табл. 4, где приведены критические значения $\tau_0(\eta_0) = \tau(1, \eta_0)$ и $\bar{\tau}_0(\eta_0) = \bar{\tau}(1, \eta_0)$ при различных значениях η_0 , показывает, что расхождение (относительное) между τ и $\bar{\tau}$ уменьшается с уменьшением η_0 .

Таблица 4

η_0	τ_0	$\bar{\tau}_0$	η_0	τ_0	$\bar{\tau}_0$
10^{-1}	1,17	1,36	10^{-4}	8,01	8,25
10^{-2}	3,40	3,64	10^{-5}	10,32	10,56
10^{-3}	5,70	5,93	10^{-6}	12,61	12,86

Успешное применение системы обыкновенных уравнений (1.2)—(1.3), не связанной с геометрией области, в задачах о тепловом взрыве говорит о том, что основная зависимость как от σ , так и от области G учитывается параметром ν , точнее, величиной $\delta_{кр}$ (см. (1.4)). Это позволяет надеяться, что формулы (3.9)—(3.10), найденные для ци-

линдрической области при $\sigma = \infty$ окажутся хорошими расчетными формулами для любой области при любом σ .

§ 4. НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ОДНОРОДНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

1. **Постановка задачи.** Рассматривается линейная модель вязкоупругой жидкости, в которой тензор скоростей деформации \bar{D} представляется в виде суммы упругой и вязкой составляющих, причем упругая

составляющая описывается законом Гука, а вязкая — законом Ньютона:

$$\bar{D} = \frac{1}{G} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt} + \frac{1}{\eta} \bar{\tau}, \quad (1.1)$$

где $\bar{\tau}$ — тензор напряжений; G — модуль упругости; η — вязкость жидкости. Соотношение (1.1) оказывается определяющим уравнением для многих полимерных систем (расплавов и растворов полимеров). Будем учитывать диссипативный разогрев и зависимость вязкости от температуры $\eta = \eta(T)$, считая для простоты $G = \text{const}$. При этом диссипативная функция $q = q(T, \tau)$ имеет вид

$$q(T, \tau) = \frac{1}{\eta(T)} (\bar{\tau}, \bar{\tau}) = \frac{1}{\eta(T)} \sum_{ij} \tau_{ij}^2. \quad (1.2)$$

Мы рассматриваем вынужденное течение жидкости, предполагая, что приводящая система (динамометрическая система) является абсолютно жесткой. В последующих рассмотренных ничего, по существу, не меняется и при учете упругих свойств привода.

Наши основные предположения о характере течения сводятся к требованиям:

1. Однородности деформации, т. е. постоянства тензора \bar{D} по объему жидкости. $\bar{D} = \bar{D}(t)$ — известная функция времени или постоянная величина.

2. Постоянства температуры T по объему жидкости, $T = T(t)$.

Уравнение теплового баланса может быть записано в виде

$$c\rho \frac{dT}{dt} = q(\tau, T) - \alpha\omega(T - T_0), \quad (1.3)$$

где α — коэффициент теплоотдачи от жидкости к стенкам; c — теплоемкость; ρ — плотность; T_0 — температура окружающей среды; ω — геометрический фактор, равный отношению площади стенок к объему жидкости.

Мы будем предполагать постоянство теплофизических параметров c и α , а также плотности ρ . Последнее означает, в частности, что жидкость несжимаема.

Система уравнений (1.1), (1.3) является замкнутой системой относительно функций T и $\bar{\tau}$. Отметим, что эта система не теряет смысла и при наличии распределения по объему величин T и \bar{D} . В этом случае систему (1.1), (1.3) следует рассматривать как приближенную систему уравнений относительно некоторых средних значений по объему функций T и $\bar{\tau}$.

Основной вопрос, который нас будет интересовать, — это вопрос о возможности колебательных режимов течения. Забегая вперед, отметим, что такие режимы, обусловленные диссипативным разогревом и зависимостью вязкости от температуры, действительно обнаруживаются. Этот механизм, таким образом, может быть привлечен для теоретического объяснения известного экспериментального факта о нерегулярности течения полимерных масс в определенном диапазоне скоростей деформирования. Такой механизм был впервые рассмотрен Столиным и одним из авторов [50]. Другие попытки объяснения нерегулярного течения, в частности периодической сменой режимов прилипания и скольжения полимера по твердой стенке, основывались на изотермических моделях течения.

Уравнение (1.1) является тензорным, и в общем виде исследование системы (1.1), (1.3) сопряжено с большими трудностями. Поэтому мы

ограничимся рассмотрением простых типов течения, когда тензоры \bar{D} и $\bar{\tau}$ удастся выразить через одну скалярную величину.

2. **Сдвиговое течение.** Примером может служить течение между двумя соосными цилиндрами, один из которых вращается вокруг оси. В этом случае тензоры \bar{D} и $\bar{\tau}$, записанные в цилиндрических координатах, содержат лишь одну ненулевую компоненту $\tau_{r_z} = \tau$ и $D_{r_z} = D$. Геометрия жидкости не меняется во времени, $\omega = \frac{2}{r_2 - r_1}$, где r_1 и r_2 — радиусы цилиндров, и в предположении $D = \text{const}$ система (1.1), (1.3) оказывается автономной системой двух уравнений. Пусть

$$\frac{1}{\tau(T)} = \frac{1}{\eta_0} \varphi(\beta(T - T_0)). \quad (2.1)$$

При $\varphi(\theta) = \exp \theta$ соотношение (2.1) называют формулой Рейнольдса. В общем случае можно считать, что $\varphi(\theta)$ — возрастающая функция, $\varphi(0) = 1$. С вводом безразмерных величин по формулам

$$\begin{aligned} \theta &= \beta(T - T_0); & \sigma &= \frac{\alpha\omega}{DGc_p} \tau; & x &= \frac{\alpha\omega}{c_p} t; \\ \delta &= \frac{c_p G}{\eta_0 \alpha \omega}; & \kappa &= \frac{(c_p D G)^2 \beta}{\eta_0 (\alpha \omega)^3} \end{aligned} \quad (2.2)$$

уравнения (1.1), (1.3) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx} &= 1 - \delta \sigma \varphi(\theta), \\ \frac{d\theta}{dx} &= \kappa \sigma^2 \varphi(\theta) - \theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эта система имеет одну точку равновесия (σ_0, θ_0) в области $\theta > 0$, $\sigma > 0$, являющуюся точкой пересечения кривых

$$\sigma_1 = \frac{1}{\delta \varphi(\theta)}, \quad \sigma_2 = \left(\frac{\theta}{\kappa \varphi(\theta)} \right)^{1/2}, \quad (2.4)$$

или решением уравнений

$$\theta_0 \varphi(\theta_0) = \frac{\kappa}{\delta^2}; \quad \sigma_0 = \frac{\delta}{\kappa} \theta_0. \quad (2.5)$$

Удобно анализировать систему (2.3), приняв в качестве параметров σ_0 и θ_0 . Выражение исходных параметров δ и κ через σ_0 и θ_0 следует из (2.5):

$$\delta = \frac{1}{\sigma_0 \varphi(\theta_0)}; \quad \kappa = \frac{\theta_0}{\sigma_0^2 \varphi(\theta_0)}. \quad (2.6)$$

Полагая $\sigma = \sigma_0 + y$, $\theta = \theta_0 + z$ и линеаризуя систему относительно y и z , получим

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sigma_0} y - \frac{\varphi'(\theta_0)}{\varphi(\theta_0)} z; \\ \frac{dz}{dx} &= 2 \frac{\theta_0}{\sigma_0} y + \left(\frac{\theta_0 \varphi'(\theta_0)}{\varphi(\theta_0)} - 1 \right) z. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Матрица коэффициентов этой системы имеет определитель

$$\Delta = \frac{1}{\sigma_0} \left(1 + \frac{\theta_0 \varphi'(\theta_0)}{\varphi(\theta_0)} \right) > 0,$$

т. е. мы имеем дело либо с «фокусом», либо с «узлом». Желая изучить возможность автоколебательных режимов, т. е. наличие периодических решений системы (2.3), мы особо будем интересоваться случаем не-

устойчивости точки (σ_0, θ_0) , когда точка (σ_0, θ_0) не может быть ω -предельной точкой ни для какого решения системы (2.3), отличного от (σ_0, θ_0) . След S матрицы системы (2.7) имеет вид

$$S = -\frac{1 + \sigma_0}{\sigma_0} + \frac{\theta_0 \varphi'(\theta_0)}{\varphi(\theta_0)}. \quad (2.8)$$

Отсюда видно, что область неустойчивости ($S > 0$) непуста в том и только в том случае, когда

$$\max_{\theta > 0} \frac{\theta \varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)} > 1. \quad (2.9)$$

Условие (2.9) накладывает некоторое ограничение на функцию $\varphi(\theta)$. Например, для линейной функции $\varphi(\theta) = 1 + \alpha\theta$, $\alpha \geq 0$

$$\frac{\theta \varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)} = \frac{\alpha\theta}{1 + \alpha\theta} \leq 1,$$

и условие (2.9) не имеет места. Для $\varphi(\theta) = \exp \theta$ условие (2.9), очевидно, имеет место, и в этом случае особенно просто выглядит область неустойчивости точки (σ_0, θ_0) , т. е. область $S > 0$:

$$\theta_0 > \frac{1 + \sigma_0}{\sigma_0}. \quad (2.10)$$

Из (2.6) следует, что параметры κ и δ остаются в некоторой ограниченной области плоскости (κ, δ) , когда θ_0 и σ_0 пробегают область (2.10).

Очевидно, условие (2.9) имеет место всегда, когда $\varphi(\theta)$ растет на бесконечности быстрее линейной функции. Однако это условие не необходимо. Например, для ограниченной функции $\varphi(\theta) = \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right)$ условие (2.9) имеет место при $\beta < 0,25$.

Покажем, что в том случае, когда точка равновесия (σ_0, θ_0) неустойчива, система (2.3) обязательно имеет периодическое решение. Условие (2.9), таким образом, оказывается условием существования периодического решения системы (2.3). Согласно теореме п. VI.4.3 для этого достаточно показать, что хотя бы одно решение системы (2.3), отличное от точки равновесия, при $x > 0$ остается в ограниченной части плоскости (σ, θ) .

Покажем, что при любых значениях σ_0 и θ_0 или κ и δ можно указать такую область фазовой плоскости (σ, θ) , что ни одно решение системы (2.3), попавшее в эту область, не покидает ее. Этого, очевидно, достаточно для существования замкнутой траектории.

Всю область изменения параметров κ и δ можно разбить на две области:

1. Для функций (2.4) имеет место неравенство (см. рис. 18)

$$\max_{\theta} \sigma_2(\theta) \geq \max_{\theta} \sigma_1(\theta) = \frac{1}{\delta}.$$

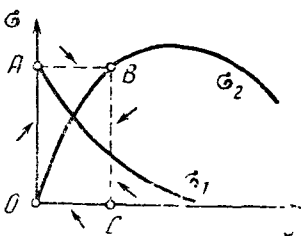


Рис. 18

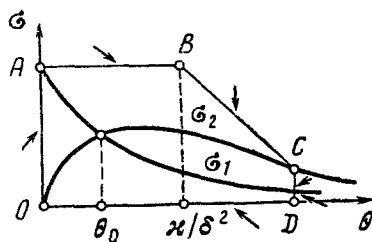


Рис. 19

Рассмотрим прямоугольник ОАВС. Исследуя направление вектора фазовой скорости $\left(\frac{d\sigma}{dx}, \frac{d\theta}{dx}\right)$ системы (2.3) вдоль границы прямоугольника, убеждаемся, что в каждой точке границы поле скоростей направлено во внутрь прямоугольника. Следовательно, ни одна траектория не может покинуть этот прямоугольник.

2. Для функций (2.4) имеет место (см. рис. 19)

$$\max_{\theta} \sigma_2 < \max_{\theta} \sigma_1 = \frac{1}{\delta}.$$

Рассмотрим фигуру ОАВСD, где ВС есть отрезок прямой

$$\sigma_* = \frac{1}{\delta} - \frac{\delta^2}{\kappa} \left(\theta - \frac{\kappa}{\delta^2} \right).$$

$\frac{\kappa}{\delta^2} > \theta_0$ согласно (2.5). Поле фазовых скоростей $\left(\frac{d\sigma}{dx}, \frac{d\theta}{dx}\right)$ по-прежнему направлено во внутрь фигуры на участках границы, совпадающих с какой-либо из координатных осей или параллельных им. Остается исследовать участок ВС. Вдоль ВС: $\frac{1}{\delta} > \sigma_* > \sigma_2 > \sigma_1$; $\theta > \frac{\kappa}{\delta^2}$, поэтому

$$\frac{d\sigma}{dx} < 0, \quad \frac{d\theta}{dx} > 0,$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \Big|_{\sigma=\sigma_*} = - \frac{\delta \sigma_* \varphi(\theta) - 1}{\kappa \delta^2 \varphi(\theta) - \theta} < - \frac{\delta^2}{\kappa} \frac{\sigma_* \varphi(\theta) - \frac{1}{\delta}}{\sigma_* \varphi(\theta) - \frac{\delta}{\kappa} \theta} < - \frac{\delta^2}{\kappa} = \frac{d\sigma_*}{d\theta}.$$

Это показывает, что и на участке ВС поле фазовых скоростей направлено во внутрь фигуры. Следовательно, траектории, попавшие в область ОАВСD, не могут ее покинуть.

Таким образом, при любых значениях параметров κ и δ или (σ_0, θ_0) существуют непостоянные траектории, остающиеся в ограниченной части плоскости. Согласно теореме п. VI.4.3 в случае неустойчивости (σ_0, θ_0) , т. е. при выполнении условий (2.9) и $S > 0$ (см. (2.8)), система (2.3) имеет периодическое (автоколебательное) решение.

Существуют и затухающие колебательные режимы, отвечающие случаю устойчивого «фокуса»: $S < 0$, $S^2 - 4\Delta < 0$. Однако они не столь интересны, и подробно описывать область затухающих колебаний мы не будем.

3. **Растяжение.** Пусть цилиндрический образец радиуса r_0 и длины l_0 , верхний конец которого $z = 0$ закреплен, а нижний, $z = l(t)$, с момента времени $t = 0$ растягивается с некоторой скоростью $V(t) = l'(t)$ в направлении оси z . Однородное деформирование означает, что в цилиндрических координатах (z, r, φ) компонента v_z скорости зависит только от z , v_r — только от r , $v_\varphi = 0$. В этом случае тензор скоростей деформирования \bar{D} , так же как и тензор напряжений τ , определяется одной скалярной величиной и соотношение (1.1) может быть сведено к скалярному. Из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости ($\text{div } v = 0$) следует, что

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = D(t) \quad (3.1)$$

есть некоторая функция t , не зависящая от r и z . С учетом граничных условий $v_z(0) = 0$, $v_z(l(t)) = V(t)$, $v_r(0) = 0$ из (3.1) находим v_z , v_r и вид функции $D(t)$:

$$v_z = D(t)z; \quad v_r = - \frac{r}{2} D(t); \quad D(t) = \frac{V(t)}{l(t)}. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что отличны от нуля только диагональные элементы тензора \bar{D} :

$$D_{zz} = 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2D(t), \quad D_{rr} = 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} = -D(t), \quad D_{\varphi\varphi} = 2 \frac{v_r}{r} = -D(t). \quad (3.3)$$

При подходящих начальных условиях (например, нулевых) из (1.1) следует теперь, что отличны от нуля только диагональные компоненты тензора $\bar{\tau}$, причем

$$\tau_{zz} = -2\tau_{rr} = -2\tau_{\varphi\varphi} = \tau. \quad (3.4)$$

Относительно скалярной величины τ соотношение (1.1) дает согласно (3.3)—(3.4)

$$\frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} = 2D(t) - \frac{1}{\eta(T)} \tau. \quad (3.5)$$

Функция диссипации (1.2) принимает вид

$$q(T, \tau) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\tau^2}{\eta(T)}.$$

В отличие от предыдущего случая здесь отсутствуют твердые стенки и геометрия образца меняется со временем. Геометрический фактор ω в уравнении (1.3) оказывается функцией времени, $\omega = \omega(t)$. Практически наибольший интерес представляют следующие случаи растяжения:

1. Растяжение с постоянной скоростью, $V = \text{const}$. При этом

$$l(t) = l_0 \left(1 + \frac{V}{l_0} t \right); \quad D(t) = \frac{V}{l_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{V}{l_0} t} \quad (\text{см. (3.2)}).$$

Ввиду постоянства плотности и сохранения массы объем образца не меняется: $r^2(t)l(t) \equiv r_0^2 l_0$. Функция $\omega(t)$ имеет вид

$$\omega(t) = \frac{2\pi r(t)(l(t) + r(t))}{\pi r_0^2 l_0} \cong \frac{2}{r(t)} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{V}{l_0} t},$$

если пренебречь величиной $r(t)$ по сравнению с $l(t)$.

2. Растяжение с постоянной скоростью деформации, $D = \text{const}$. В этом случае из (3.2) следует

$$l(t) = l_0 \exp(Dt), \quad V(t) = l_0 D \exp(Dt).$$

Аналогично для $\omega(t)$ получаем

$$\omega(t) \cong \omega_0 \exp\left(\frac{Dt}{2}\right).$$

Естественным масштабом времени в данной задаче является характерное время растяжения

$$t_0 = \frac{l_0}{V_0} = \frac{1}{D_0}; \quad D_0 = D(0); \quad V_0 = V(0).$$

С вводом безразмерных величин по формулам (с учетом (2.1))

$$\begin{aligned} \theta &= \beta(T - T_0); & \sigma &= \frac{\alpha\omega_0}{2D_0 G c_Q} \tau; & x &= \frac{t}{t_0} = D_0 t; \\ \delta &= \frac{c_Q G}{\alpha\omega_0 \eta_0}; & \kappa &= \sigma \frac{(c_Q D_0 G)^2 \beta}{\eta_0 (\alpha\omega_0)^3}; & \varepsilon &= \frac{c_Q D_0}{\alpha\omega_0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

уравнения (3.5), (1.3) принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d\sigma}{dx} &= \psi_1(x) - \delta\sigma\varphi(\theta); \\ \varepsilon \frac{d\theta}{dx} &= \kappa\sigma^2\varphi(\theta) - \psi_2(x)\theta, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\psi_1(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \psi_2(x) = \sqrt{1+x} \quad \text{в случае } V = \text{const};$$

$$\psi_1(x) \equiv 1, \quad \psi_2(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{в случае } D = \text{const}.$$

Отметим, что величины (3.6) отличаются от соответствующих величин (2.2), по существу, лишь наличием нового параметра ε и масштабом времени. Параметр ε имеет смысл отношения времени тепловой релаксации $t_1 = \frac{c\rho}{a\omega_0}$ к характерному времени растяжения t_0 , $\varepsilon = \frac{t_1}{t_0}$. Мы будем предполагать параметр ε малым и будем исследовать асимптотическое поведение системы (3.7) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Согласно § 5 гл. VI следует изучить систему быстрых движений

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = \psi_1(x) - \delta\sigma\varphi(\theta);$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \kappa\sigma^2\varphi(\theta) - \psi_2(x)\theta, \quad (3.8)$$

где x считается параметром. Заметим, что специального изучения системы (3.8) не требуется, так как с помощью новой параметризации

$$\theta' = \theta; \quad \sigma' = \frac{\psi_2}{\psi_1}\sigma; \quad \xi' = \psi_2\xi; \quad \delta' = \frac{1}{\psi_2}\delta; \quad \kappa' = \frac{\psi_1^2}{\psi_2^3}\kappa$$

система (3.8) сводится к системе (2.3). Отсюда заключаем, что единственное положение равновесия системы (3.8) $\sigma_0 = \sigma_0(x)$, $\theta_0 = \theta_0(x)$:

$$\theta_0\varphi(\theta_0) = \frac{\psi_1^2}{\psi_2} \cdot \frac{\kappa}{\delta^2}, \quad \sigma_0 = \left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right)^3 \cdot \frac{\kappa}{\delta} \theta_0 \quad (3.9)$$

является устойчивым «узлом» или «фокусом», следовательно, асимптотически устойчивым, если (ср. (2.8))

$$S = S(x) = -\frac{\psi_1 + \psi_2\sigma_0}{\psi_2\sigma_0} + \frac{\theta_0\varphi'(\theta_0)}{\varphi(\theta_0)} < 0, \quad (3.10)$$

и является неустойчивым «фокусом» или «узлом», когда

$$S(x) > 0. \quad (3.11)$$

В этом случае система (3.8) имеет периодическое решение.

При выполнении условия (3.10) в некотором интервале $0 \leq x < x_0$ асимптотика решений системы (3.7) согласно теореме Тихонова имеет вид

$$\sigma \simeq \sigma_0(x), \quad \theta \simeq \theta_0(x) \quad \text{при } 0 < x < x_0. \quad (3.12)$$

Если же в интервале $0 \leq x < x_0$ выполнено условие (3.11) и $\sigma(\xi, x)$, $\bar{\theta}(\xi, x)$ — периодическое по ξ периода $T(x)$ решение системы (3.8), то согласно теореме Понтрягина и Родыгина (п. VI.5.3) решение системы (3.7) с точностью до ε имеет вид

$$\sigma \simeq \bar{\sigma}(T(x)\omega(x, \varepsilon), x), \quad \bar{\theta} \simeq \bar{\theta}(T(x)\omega(x, \varepsilon), x), \quad 0 < x < x_0, \quad (3.13)$$

где $\omega(x, \varepsilon)$ — некоторая быстро меняющаяся фаза (п. VI.5.3). Таким образом, при выполнении условия (3.11) существует быстро колеблющееся (на фоне плавного изменения θ_0 , σ_0) решение системы (3.7) при достаточно малых ε .

Строго говоря, для применения теоремы Понтрягина—Родыгина нужно было бы показать, что периодическое решение $\bar{\sigma}$, $\bar{\theta}$ системы (3.8) является изолированным устойчивым предельным циклом. Достаточно это утверждение доказать для периодического решения системы (2.2). Это исследование мы опускаем.

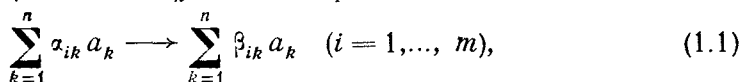
В заключение отметим, что приближенные формулы (3.12), (3.13) имеют место, вообще говоря, лишь на конечном интервале изменения x . Из вида функций ψ_1 и ψ_2 и формул (3.9), (3.10) можно проследить, что неравенство (3.11), справедливое при $x = 0$, всегда нарушается при достаточно больших x . Точно так же неравенство (3.10), справедливое при $x = 0$, может нарушаться в некотором интервале $x_1 \leq x \leq x_2$.

Условие (2.9) по-прежнему остается необходимым и достаточным условием возможности (при подходящих параметрах α и δ) неравенства (3.11), т. е. колебательных режимов.

Глава XII. УРАВНЕНИЯ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ГРАФАХ

1. Уравнения химической кинетики. Графы реакций. В химической кинетике для описания реакций пользуются схемой реакций. Если, например, происходит m отдельных актов, в которых участвует n веществ (реагентов) a_1, a_2, \dots, a_n , то схема реакций имеет вид



где α_{ik}, β_{ik} — стехиометрические коэффициенты (неотрицательные целые числа). Если u_k — концентрация вещества a_k ($k = 1, \dots, n$), то закон изменения во времени функций $u_1(t), \dots, u_n(t)$ записывают в виде дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_k = \sum_{i=1}^m \gamma_{ik} \omega_i, \quad \gamma_{ik} = \beta_{ik} - \alpha_{ik} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (1.2)$$

Здесь ω_i — скорость i -й реакции. Обычно считается

$$\omega_i = k_i \prod_{k=1}^n u_k^{\alpha_{ik}} \quad (i = 1, \dots, m), \quad (1.3)$$

где k_i — константа (константа скорости реакции). В этом произведении следует считать $u_k^{\alpha_{ik}} = 1$ при $\alpha_{ik} = 0$ даже для $u_k = 0$.

Пример Дифференциальные уравнения, описывающие схему реакций



имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\omega_1 + 2\omega_2; & \dot{u}_3 &= \omega_1 - \omega_2; \\ \dot{u}_2 &= -2\omega_1; & \dot{u}_4 &= -\omega_2. \end{aligned}$$

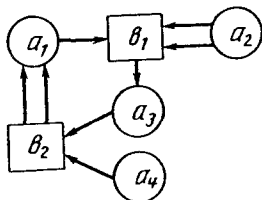
причем $\omega_1 = k_1 u_1 \cdot u_2^2$; $\omega_2 = k_2 u_3 u_4$.

Во многих отношениях оказывается удобной геометрическая трактовка схемы реакций. В схеме (1.1) участвуют два конечных множества: множество $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — веществ, участвующих в реакциях, и множество $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ — самих реакций. Условимся элементы множеств A и B изображать точками на плоскости и называть их вершинами графа (соответственно A - и B -вершинами). Кроме того, тот факт, что α_{ik} единиц (молекул, атомов и т. д.) вещества a_k вступает в реакцию b_i , условимся обозначать α_{ik} стрелками, идущими от вершины a_k к вершине b_i . Аналогично с помощью β_{ik} стрелок, идущих от вершины b_i к вершине a_k , будем обозначать ту информацию, содержащуюся в схеме (1.1), что β_{ik} единиц вещества a_k является продуктом реакции b_i . Эти стрелки будем называть ребрами графа.

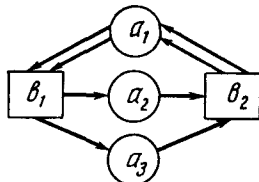
В результате мы получаем то, что называют конечным ориентированным двудольным графом, т. е. два конечных непересекающихся множества A и B (вершины графа) и некоторое множество ориентированных ребер или упорядоченных пар вершин вида (a_k, b_i) или (b_i, a_k) .

Очевидно и обратное. Каждый конечный ориентированный двудольный граф Γ можно задать в виде некоторой схемы (1.1) (схемы графа). Числа α_{ik} , β_{ik} обозначают числа ребер вида (a_k, b_i) и (b_i, a_k) соответственно.

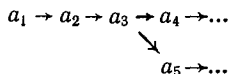
Примеры. Схеме (1.4) соответствует граф



Схеме обратимой реакции $2a_1 \rightleftharpoons a_2 + a_3$, т. е. схеме двух реакций: $2a_1 \rightarrow a_2 + a_3$, $a_2 + a_3 \rightarrow 2a_1$, отвечает граф



В случае простых мономолекулярных реакций



каждая реакция (B -вершина) может быть отождествлена со стрелкой и опущена. В этом случае схема реакций имеет вид графа.

2. Дифференциальные уравнения на графах. Основная идея описания схемы реакций с помощью двудольных ориентированных графов состоит в том, чтобы связать свойства решений системы (1.2) с геометрическими свойствами графа. Оказывается, многие важные свойства решений определяются только геометрией графа и не зависят от частного вида функций (1.3). Естественно поэтому рассматривать более общие зависимости, чем (1.3). Это позволяет охватить более широкий круг задач, чем только задачи химической кинетики. Обобщение уравнений химической кинетики приводит к следующему понятию дифференциальных уравнений на графах [13].

Пусть задан конечный ориентированный двудольный граф $\Gamma: A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ — множества его A - и B -вершин; α_{ik} и β_{ik} — числа ребер вида (a_k, b_i) и (b_i, a_k) соответственно; $\gamma_{ik} = \beta_{ik} - \alpha_{ik}$ ($i=1, \dots, m$; $k=1, \dots, n$). Каждой вершине a_k поставим в соответствие функции $u_k(t)$, $g_k(t)$, каждой вершине b_i — функцию $f_i(t, u)$ ($n+1$) — переменной t и $u = (u_1, \dots, u_n)$. При этом f_i, g_k предполагаются заданными, u_k — искомыми.

О п р е д е л е н и е. Система уравнений

$$\dot{u}_k = \sum_{i=1}^m \gamma_{ik} f_i(t, u) + g_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

называется системой дифференциальных уравнений на графе Γ . При этом всюду предполагается, что $f_i(t, u)$ непрерывны по t и u ($t \geq 0$) и непрерывно дифференцируемы по u , причем

$$f_i(t, u) \geq 0 \text{ при } t \geq 0, u_k \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (2.2)$$

Можно, очевидно, ребра вида (a_k, b_i) или (b_i, a_k) в графе Γ проводить по одному разу и трактовать числа α_{ik} или β_{ik} как кратность или вес соответствующего ребра (весовой граф). Такой подход позволяет отказаться от целочисленности α_{ik} и β_{ik} и рассматривать уравнения вида (2.1) на весовых графах, где весами α_{ik}, β_{ik} могут быть произвольные неотрицательные действительные числа.

В дальнейшем мы всюду считаем α_{ik}, β_{ik} целыми числами и часто рассматриваем функции $f_i(t, u)$ вида (1.3), однако многие результаты могут быть обобщены на случай произвольных весовых графов и общих зависимостей $f_i(t, u)$.

Многие дифференциальные уравнения, встречающиеся в самых различных приложениях (химическая кинетика, химическая технология, биология, марковские процессы и т. д.), можно трактовать как уравнения на графах. Остановимся лишь на некоторых примерах.

Пример 1. Простейшая экзотермическая реакция разложения с учетом материального баланса и зависимости константы скорости от температуры ($k=k(T)$) часто описывается системой уравнений:

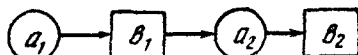
$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -k(T)u; \\ \text{ср } \frac{dT}{dt} &= Qk(T)u - \alpha(T - T_0) \end{aligned}$$

Здесь u — концентрация активного вещества; c — теплоемкость; ρ — плотность; Q — тепловой эффект реакции; α — коэффициент теплоотдачи; T_0 — температура окружающей среды

Совершенно очевидно, что относительно функций

$$u_1 = u, \quad u_2 = \frac{cp}{Q} (T - T_0)$$

эта система уравнений является системой на графе



если вершинам b_1 и b_2 поставить в соответствие функции

$$f_1 = k(T)u_1; \quad f_2 = \frac{\alpha}{cp} u_2$$

и считать $g_1 \equiv g_2 \equiv 0$.

Этот пример является весьма частным случаем уравнений неизотермической химической кинетики без учета диффузии и в отсутствие распределения температуры по реакционному объему. Такие уравнения и в общем случае можно трактовать как уравнения на графе (весовом). При этом реакциям ставится в соответствие граф так же, как это было указано в п. 1, а весами ребер, приходящих в A -вершину, отвечающую температуре, являются тепловые эффекты реакции.

Такая трактовка возможна и для уравнений, описывающих процессы в химических реакторах идеального перемешивания.

Пример 2. В определенном смысле как уравнения на графах можно трактовать уравнения, описывающие различные процессы с учетом диффузии и молекулярной теплопроводности, т. е. уравнения в частных производных. Поясним это на примере одномерного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2.3)$$

рассматриваемого на отрезке $0 \leq x \leq 1$ с начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad u|_{x=0} = \psi_0(t); \quad u|_{x=1} = \psi_1(t). \quad (2.4)$$

Предполагается, что

$$a(t, x, u) > 0 \text{ при } t \geq 0, 0 \leq x \leq 1, u > 0. \quad (2.5)$$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n равных частей точками деления $x_0=0, x_1, x_2, \dots, x_n=1$.

Пусть $h = \frac{1}{n}$. Зададим следующий граф:

$$x_k \rightarrow x_{k+1} \quad (k=0, 1, \dots, n-1); \quad (2.6)$$

$$x_{k+1} \rightarrow x_k \quad (k=0, 1, \dots, n-1). \quad (2.7)$$

B -вершинам (2.6), (2.7) отнесем соответственно функции:

$$\frac{1}{h^2} a(t, x_k, u_k) u_k; \quad \frac{1}{h^2} a(t, x_k, u_k) u_{k+1}. \quad (2.8)$$

Тогда уравнения на графе (2.6), (2.7) при $g_k \equiv 0$ имеют вид

$$\dot{u}_k = \frac{1}{h} \left[a(t, x_k, u_k) \frac{u_{k+1} - u_k}{h} - a(t, x_{k-1}, u_{k-1}) \frac{u_k - u_{k-1}}{h} \right] \quad (2.9)$$

($k=1, \dots, n-1$) и задают разностную аппроксимацию (по x) уравнения (2.3). При этом для A -вершин x_0 и x_n уравнения не пишутся. Предполагается, что согласно (2.4) $u_0(t) = \psi_0(t)$, $u_n(t) = \psi_1(t)$. В силу условия (2.5) функции (2.8) удовлетворяют условиям (2.2). Решение уравнений (2.9) с начальным условием $u_k(0) = \varphi(x_k)$ (см. (2.4)) при достаточно большом n дает хорошую аппроксимацию решения краевой задачи (2.3) — (2.4). В этом смысле уравнение (2.3) есть уравнение на графе.

Аналогично можно рассматривать уравнение с младшими членами, а также многомерные уравнения и системы параболических уравнений (см. [13]).

§ 2. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФАХ

1. Положительность. A -вершину a_k графа Γ будем называть непосредственно предшествующей B -вершине b_i , если $a_{ik} > 0$. Аналогично вершина b_i называется непосредственно предшествующей вершине a_k , если $\beta_{ik} > 0$.

В дальнейшем предполагается, что каждая B -вершина имеет хотя бы одну непосредственно предшествующую A -вершину.

Будем говорить, что функция $f_i(t, u)$ (см. (1.2.1)) подчинена вершине a_k , если $f_i(t, u) = 0$ при $u_k = 0$.

Условие 1. Функция $f_i(t, u)$ подчинена всем A -вершинам, непосредственно предшествующим вершине b_i .

В уравнениях химической кинетики это условие всегда выполняется (см. (1.1.3)) и означает, что скорость реакции равна нулю, если равна нулю концентрация какого-либо из реагирующих веществ. Условие 1 имеет место также во всех примерах п. 1.2.

Уравнения (1.2.1) будем рассматривать при неотрицательных начальных значениях искомых функций

$$u_k(0) = u_k^0 \geq 0 \quad (k=1, \dots, n). \quad (1.1)$$

Теорема. Если $u_k^0 > 0$, $g_k(t) \geq 0$ ($k=1, \dots, n$) и выполняется условие 1, то гладкое решение задачи (1.2.1), (1.1) положительно:

$$u_k(t) > 0 \quad (t \geq 0; \quad k=1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

на интервале, где это решение существует.

Доказательство. Пусть решение существует на интервале $[0, T]$ и утверждение (1.2) не имеет места. Тогда компонента $u_k(t)$ обращается в нуль при некотором k . Пусть $t_0 \in (0, T)$ — наименьшее t , при котором $u_k(t) = 0$, так что

$$u_s(t) > 0 \quad (0 \leq t < t_0; \quad s=1, \dots, n), \quad u_k(t_0) = 0.$$

Выделим в системе (1.2.1) уравнение с номером k и перепишем его в виде

$$\dot{u}_k = a_k(t) u_k + b_k(t), \quad (1.3)$$

где обозначено

$$a_k(t) = \frac{1}{u_k} \sum_i' \gamma_{ik} f_i(t, u); \quad (1.4)$$

$$b_k(t) = \sum_i'' \gamma_{ik} f_i(t, u) + g_k(t), \quad (1.5)$$

причем суммирование в (1.4) проводится по всем i , для которых $\gamma_{ik} < 0$, а в (1.5) по всем i , для которых $\gamma_{ik} \geq 0$. Нетрудно понять, что $a_k(t)$ — непрерывная ограниченная функция в интервале $[0, T]$. Действительно, из $\gamma_{ik} < 0$ вытекает $a_{ik} > 0$ и, следовательно, f_i подчинена вершине a_k , т. е.

$$f_i(t, u(t)) = \varphi_{ik}(t) u_k(t)$$

в каждом слагаемом (1.4). Далее, в интервале $[0, t_0]$, очевидно, $b_k(t) \geq 0$. Из (1.3) имеем

$$u_k(t) = u_k(0) \exp \int_0^t a_k(s) ds + \int_0^t b_k(s) \exp \int_s^t a_k(\tau) d\tau ds \quad (1.6)$$

и, следовательно, $u_k(t_0) > 0$, что противоречит допущению. Теорема доказана.

Следствие. Если $u_k^0 \geq 0$, $g_k(t) \geq 0$ ($k=1, \dots, n$) и выполнено условие 1, то гладкое решение задачи (1.2.1), (1.1) неотрицательно:

$$u_k(t) \geq 0 \quad (t \geq 0; \quad k=1, \dots, n) \quad (1.7)$$

на интервале, где это решение существует.

Доказательство. Пусть $u_\varepsilon(t)$ — решение системы (1.2.1) с начальным условием $u_k(t) = u_k^0 + \varepsilon$ ($k=1, \dots, n$; $\varepsilon > 0$). По доказанной теореме для компонент $u_\varepsilon(t)$ имеет место (1.2). По теореме о непрерывной зависимости от начального условия для решения $u(t)$ задачи (1.2.1), (1.1) имеет место

$$u(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t),$$

так что для компонент $u(t)$ имеет место (1.7).

Дальнейшее исследование свойств решения основано на математической индукции по графу, которая требует некоторой классификации вершин графа.

2. Индексация вершин графа. Пусть задано множество A_0 некоторых A -вершин графа, называемых по тем или иным причинам начальными вершинами. В ближайшем пункте это будет множество тех A -вершин, в которых заданные условия (1.1) строго положительны. Проведем следующую индексацию вершин графа.

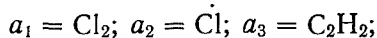
Всем вершинам множества A_0 припишем индекс 0. Индекс 0 приписываем тем B -вершинам, у которых все непосредственно предшествующие A -вершины имеют индекс 0. Далее индексация проводится по индукции. Пусть известно, какие A - и B -вершины получили индекс меньший, чем k . Тогда индекс k приписывается всем A -вершинам, не имевшим индекса, для которых существуют непосредственно предшествующие B -вершины с индексом $k-1$. Индекс k принимают также все B -вершины, не имевшие индекса, у которых все непосредственно предшествующие A -вершины имеют индекс.

Так как граф конечный, то этот процесс закончится через конечное число шагов. Однако не все вершины графа, вообще говоря, получают индекс в этом процессе. Такие вершины будем считать *недостижимыми* (из A_0). Формально удобно приписать недостижимым вершинам индекс $+\infty$.

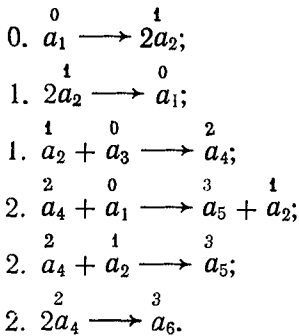
Вершины с конечным индексом будем называть *достижимыми*.

Такая индексация вершин может быть легко выполнена по схеме графа, если указано множество A_0 .

Пример. Хлорирование этилена с образованием дихлорэтана [62, стр. 147]. Если обозначить



то схема реакций имеет вид:



Начальными продуктами в этой схеме являются a_1 и a_3 : $A_0 = \{a_1, a_3\}$. Концентрацию остальных продуктов в начальный момент будем считать нулевой. Читатель легко проведет описанную индексацию самостоятельно и убедится, что индекс каждой A -вершины (продукта) совпадает с числом, указанным сверху, а индекс каждой B -вершины (реакции) совпадает с числом, стоящим рядом слева.

В данной схеме все вершины оказались достижимыми из $A_0 = \{a_1, a_3\}$. Если же, например, $A_0 = \{a_1\}$, то вершины a_3, a_4, a_5, a_6 недостижимы, так же как и реакции, в которых они участвуют.

Ниже будет показано, что те и только те компоненты $u_k(t)$ решения задачи (1.2.1), (1.1) тождественно равны нулю, которые отвечают недостижимым вершинам a_k . Для всех достижимых вершин a_k имеет место строгая положительность функций $u_k(t)$.

Отметим, что в случае мономолекулярных реакций индекс вершины a_k означает минимальное количество стрелок (ребер графа), ведущих к a_k от начальных вершин (считается, что B -вершины опущены). Индекс a_k означает, таким образом, «расстояние» от начальных вершин до a_k . Такое истолкование возможно и в общем случае.

3 Строгая положительность. Пусть A_0 обозначает множество всех A -вершин графа, в которых заданные начальные данные (1.1) строго положительны: $u_k^0 > 0$ при $a_k \in A_0$, так что во всех остальных A -вершинах $u_k^0 = 0$.

Теорема 1. Пусть в системе (1.2.1) $g_k(t) \equiv 0$ ($k = 1, \dots, n$) и выполняется условие 1. Пусть, далее, $u(t)$ — решение задачи (1.2.1), (1.1) на интервале $[0, T]$. Тогда $u_k(t) \equiv 0$ ($0 \leq t \leq T$) во всех недостижимых из A_0 вершинах a_k .

Доказательство. Обозначим через X множество всех недостижимых вершин, через N — множество номеров всех A -вершин из X .

Пусть $k \in N$. Покажем, что

$$f_i(t, u(t)) = \varphi_i(t) u_l(t) \quad (3.1)$$

для некоторого $l \in N$, если $\gamma_{ik} \neq 0$. Здесь $\varphi_i(t)$ — непрерывная функция на интервале $[0, T]$. Действительно, если $\alpha_{ik} > 0$, то f_i подчинена вершине a , т. е. $f_i = 0$ при $u_k = 0$, так что (3.1) имеет место при $l = k$. Если $\alpha = 0$, $\beta_{ik} > 0$, то среди A -вершин, непосредственно предшествующих b_i , имеется хотя бы одна недостижимая. В противном случае была бы достижима b_i и, следовательно, a_k . Но $k \in N$. Таким образом, и в этом случае f_i подчинена некоторой вершине a_l , $l \in N$, т. е. имеет место (3.1).

Рассматривая в (1.2.1) уравнения с номерами $k \in N$, в силу (3.1) имеем линейную однородную систему уравнений с нулевыми начальными данными: $u_k^0 = 0$, $k \in N$. Доказательство теоремы следует из того, что такая система имеет только нулевое решение.

Для дальнейшего необходимо еще одно условие на функции f_i .

Условие 2. $f_i(t, u) > 0$ при $t \geq 0$, $u_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, n$), если $u_k > 0$ во всех вершинах a_k непосредственно предшествующих вершин b_i .

Для уравнений химической кинетики это условие, так же как и условие 1 (см. п. 1), всегда выполнено (см. (1.1.3)). Это условие имеет место также во всех примерах п. 1.2.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1 и 2, $g_k(t) \geq 0$ ($k = 1, \dots, n$). Пусть, далее, $u(t)$ — решение задачи (1.2.1), (1.1) на интервале $[0, T]$. Тогда $u_k(t) > 0$ ($0 < t \leq T$) во всех достижимых из A_0 вершинах a_k .

Доказательство проведем по индукции. По определению A_0 для всех A -вершин с индексом 0 имеем $u_k^0 > 0$. Как и при доказательстве теоремы п. 1, для $u_k(t)$ имеет место (1.6), причем $b_k(t) \geq 0$ на основании этой теоремы (см. (1.5)). Отсюда следует, что $u_k(t) > 0$ для всех A -вершин с индексом 0.

Пусть уже доказано, что $u_k(t) > 0$ ($0 < t \leq T$) для всех A -вершин с индексом меньшим, чем κ . Рассмотрим вершину a_k с индексом κ . Для нее существует непосредственно предшествующая B -вершина с индексом $\kappa - 1$. Пусть это будет b_i . Так как все A -вершины, непосредственно предшествующие b_i , имеют индекс не больший, чем $\kappa - 1$, то по предположению индукции соответствующие компоненты u положительны и $f_i(t, u(t)) > 0$ в силу условия 2. Таким образом, в формуле (1.6) для $u_k(t)$ имеем $b(t) > 0$. Поэтому $u_k(t) > 0$ ($0 < t \leq T$). Теорема доказана.

4. Поведение в нуле. Здесь мы укажем другое применение индексации вершин графа. Будет указана связь порядка нуля решения в окрестности точки $t = 0$ с индексом вершин графа.

Будем предполагать, что $g_k(t) = 0$ ($k = 1, \dots, n$) и что $f_i(t, u)$ имеют непрерывные частные производные до порядка $m = \max\{\kappa - 1, 1\}$, где κ — наибольший конечный индекс A -вершин. По-прежнему, предполагается, что A_0 есть множество вершин, в которых начальные условия (1.1) положительны.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1, a_k — достижимая из A_0 вершина с индексом κ_k , $u(t)$ — решение задачи (1.2.1), (1.1). Тогда

$$u_k(t) = t^{\kappa_k} v_k(t), \quad (4.1)$$

где $v_k(t)$ — непрерывная функция.

Доказательство. Если $\kappa_k = 0$, то (4.1) очевидно. Пусть $\kappa_k > 0$. Требуется доказать, что все производные $u_k(t)$ до порядка $\kappa_k - 1$ обращаются в нуль при $t = 0$, т. е.

$$u_k^{(r)}(0) = 0 \quad (r = 0, 1, 2, \dots, \kappa_k - 1). \quad (4.2)$$

Отсюда, очевидно, следует (4.1).

Будем проводить индукцию по r . При $r = 0$ (4.2) очевидно, так как $u_k(0) = 0$ при $\kappa_k > 0$, $a_k \in A_0$. Пусть (4.2) имеет место при $r \leq s - 1$ для всех k таких, что $\kappa_k \geq s$. Докажем его при $r = s$. Пусть $\kappa_k > s$. Тогда все B -вершины, непосредственно предшествующие a_k , имеют индексы не меньшие, чем s . Таким образом, в равенстве

$$\dot{u}_k = \sum_i \gamma_{ik} f_i(t, u) \quad (4.3)$$

все те i , для которых $\gamma_{ik} > 0$, являются номерами B -вершин с индексом не меньшим, чем s . Любая такая B -вершина b_i имеет среди непосредственно предшествующих A -вершин хотя бы одну вершину a_{i_1} с индексом не меньшим, чем s . Так что по условию 1

$$f_i(t, u(t)) = \varphi_i(t) u_{i_1}(t) \quad (x_{i_1} \geq s).$$

Если $\gamma_{ik} < 0$, то $a_{ik} > 0$, и поэтому $f_i(t, u) = \varphi_i(t) u_k(t)$. Таким образом, (4.3) можно записать в виде

$$\dot{u}_k = \sum_i \varphi_i(t) u_{i_1} \quad (x_{i_1} \geq s). \quad (4.4)$$

По предположению индукции $u_{ii}^{(r)} = 0$ при $r < s$. Отсюда и из (4.4) следует, что $u_k^{(r)}(0) = 0$ при $r \leq s$. Теорема доказана.

Заметим, что равенство (4.1) формально имеет место при малых t и для недостижимых вершин ($\kappa_k = +\infty$, как было условлено). В равенстве (4.1) не исключается возможность $v_k(0) = 0$, так что порядок нуля $u_k(t)$, вообще говоря, может быть больше, чем κ_k . Однако для линейных по u функций $f_i(t, u)$ κ_k оказывается точным порядком нуля $u_k(t)$.

Теорема 2. Если $f_i(t, u)$ ($i=1, \dots, m$) — линейные функции и выполняются условия 1 и 2, то компонента $u_k(t)$ решения задачи (1.2.1), (1.1) для достижимой вершины a_k имеет порядок нуля, равный ее индексу κ_k .

Доказательство. Требуется доказать, что $v_k(0) \neq 0$ в (4.1). Из условия 1 и линейности f_i по u следует, что $f_i = \varphi_i u_{l_i}$. Из условия 2 вытекает $\varphi_i > 0$ при $t \geq 0$. Уравнение (4.3) принимает вид

$$\dot{u}_k = \varphi(t) u_k + \sum_i' \gamma_{ik} \varphi_i(t) u_{l_i}, \quad (4.5)$$

где штрих обозначает суммирование только по тем i , для которых $\gamma_{ik} > 0$. Неравенство $v_k(0) \neq 0$ докажем индукцией по κ_k . При $\kappa_k = 0$ оно очевидно. Пусть оно уже доказано для всех вершин a_i с индексом $\kappa_i < s$. Покажем для $\kappa_k = s$. По теореме 1 $u_k(t) = t^s v_k(t)$, $u_{l_i}(t) = t^{\kappa_{l_i}} v_{l_i}(t)$, причем $\kappa_{l_i} \geq s-1$ и хотя бы для одного i

$$\kappa_{l_i} = s - 1. \quad (4.6)$$

По предположению индукции для этого i $v_{l_i}(0) > 0$. Все слагаемые справа в (4.5), для которых имеет место (4.6), входят с одинаковым знаком. Поэтому (4.5) можно записать в виде

$$\dot{u}_k = c(t) t^{s-1},$$

причем $c(0) > 0$. Отсюда следует, что $u_k(t) = t^s v_k(t)$ и $v_k(0) > 0$. Теорема доказана.

5. Априорные оценки. Нелокальная разрешимость. Будем рассматривать линейные формы

$$L_i(\lambda) = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \lambda_k \quad (i=1, \dots, m),$$

связанные с графом Γ : $\gamma_{ik} = \beta_{ik} - \alpha_{ik}$.

Лемма. Пусть выполнено условие 1 и $u(t)$ — решение задачи (1.2.1), (1.1). Тогда если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ является решением системы неравенств

$$L_i(\lambda) \leq 0 \quad (i=1, \dots, m), \quad (5.1)$$

то функция

$$v(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k [u_k(t) - \int_0^t g_k(\tau) d\tau] \quad (5.2)$$

является невозрастающей функцией t .

Доказательство. Из (5.2), (1.2.1), (5.1) следует

$$\dot{v}(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k [\dot{u}_k(t) - g_k(t)] = \sum_{i=1}^m L_i(\lambda) f_i(t, u) \leq 0,$$

так как $f_i(t, u) \geq 0$ ввиду $u_k(t) \geq 0$ ($i=1, \dots, m$; $k=1, \dots, n$).

Очевидно, если вместо (5.1) $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ удовлетворяет неравенствам противоположного смысла ($L_i(\lambda) \geq 0$), то функция (5.2) будет

неубывающей функцией t . Если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ является решением системы уравнений

$$L_i(\lambda) = 0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad (5.3)$$

то $v(t) = \text{const}$.

Теорема 1. (Априорная оценка.) Пусть существует неотрицательное решение системы неравенств (5.1):

$$\lambda_k \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

причем $\lambda_l \geq 1$. Пусть, далее, $u(t)$ — решение системы (1.2.1), (1.1). Тогда имеет место оценка

$$0 \leq u_l(t) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(u_k^0 + \int_0^t g_k(\tau) d\tau \right). \quad (5.4)$$

Доказательство следует на основании леммы из неравенства $v(t) \leq v(0)$.

Замечание. Нахождение оптимальной априорной оценки на отрезке $[0, T]$ для $u_l(t)$ сводится к решению следующей задачи линейного программирования: найти

$$\min_{\lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k \left[u_k^0 + \int_0^T g_k(t) dt \right]$$

в области

$$L_i(\lambda) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m); \quad \lambda_k \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n; \quad k \neq l); \quad \lambda_l \geq 1.$$

Теорема 2 (теорема существования). Если существует положительное решение: $\lambda_k > 0$ ($k = 1, \dots, n$) системы неравенств (5.1) (или уравнений (5.2)), то решение задачи (1.2.1), (1.1) с произвольными неотрицательными начальными данными существует на полуоси $t > 0$.

Доказательство. Умножив положительное решение системы (5.1) на достаточно большую константу, всегда можно получить решение, удовлетворяющее условиям $\lambda_k \geq 1$, ($k = 1, \dots, n$). Тогда оценка (5.4) имеет место при каждом l ($l = 1, \dots, n$). Этого, очевидно, достаточно для существования решения во всей области $t > 0$. Теорема доказана.

Интересно отметить, что при наличии положительного решения системы (5.1) существование и оценка решения задачи (1.2.1), (1.1) получается независимо от вида функций $f_i(t, u)$, удовлетворяющих условию 1.

Существование положительного решения системы уравнений (5.3) в химической кинетике означает наличие материального баланса в соответствующей системе реакций. Это требование обычно выполняется. Вообще любое неотрицательное решение системы (5.3) порождает некоторое соотношение материального баланса вида $v(t) = \text{const}$ (см. (5.2)), и любой материальный баланс имеет такой вид. На этом основании уравнения (5.3) будем называть *балансными уравнениями*, а неравенства (5.1) — *балансными неравенствами*.

6. Балансные неравенства в случае ациклического графа. Решения балансных уравнений (5.3) или балансных неравенств (5.1) играют важную роль в исследовании дифференциальных уравнений на графах. Особый интерес при этом представляют неотрицательные решения. В общем случае, конечно, таких решений может и не быть. Однако есть важный класс графов, для которых балансные неравенства имеют полную систему неотрицательных решений.

Условимся прежде всего о терминологии. Ориентация ребер графа позволяет говорить о начальной и конечной вершинах данного ребра. В нижеследующих определениях безразлично, о каких вершинах (типа A или B) идет речь.

Определения (ср. [38]). 1. *Ориентированная последовательность ребер* h_1, h_2, \dots, h_k , в которой конечная вершина предыдущего ребра является начальной для следующего, называется *путем на графе (ориентированным путем)*.

2. Пусть задан путь. *Вершина, являющаяся начальной и конечной для двух соседних ребер, называется внутренней вершиной пути. Начальная вершина некоторого ребра, не являющаяся конечной ни для какого ребра, называется началом пути. Аналогично конечная вершина некоторого ребра, не являющаяся начальной ни для какого ребра, называется концом пути.*

Может случиться, что путь не имеет ни начала, ни конца, т. е. все вершины в нем являются внутренними.

3. *Путь называется циклом (ориентированным циклом), если в нем все вершины внутренние.*

4. *Граф называется ациклическим, если в нем нет циклов.*

Таким образом, в ациклическом графе каждый путь имеет начало и конец и не существует самопересекающихся путей, т. е. путей, проходящих некоторую вершину не менее чем два раза. Ввиду конечности графа существуют вершины, не имеющие непосредственно предшествующих (не являющихся концами ребер). Поскольку мы предполагаем, что каждая B -вершина имеет непосредственно предшествующую, то таковыми могут быть только A -вершины.

5. *Множество A_0 всех A -вершин, не имеющих предшествующих, назовем множеством начальных вершин графа.*

Пусть схема

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} a_k \longrightarrow \sum_{k=1}^n \beta_{ik} a_k \quad (i = 1, \dots, m) \quad (6.1)$$

определяет ациклический граф. Рассмотрим соответствующую систему балансных неравенств

$$L_i(\lambda) = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \lambda_k \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m; \quad \gamma_{ik} = \beta_{ik} - \alpha_{ik}). \quad (6.2)$$

Теорема. *Существует n линейно-независимых неотрицательных решений системы неравенств (6.2).*

Доказательство. Схема (6.1) предполагает некоторую нумерацию A - и B -вершин графа. Можно так перенумеровать вершины ациклического графа, что вдоль любого пути возрастают номера как A -, так и B -вершин. Действительно, пусть A_0 — множество начальных вершин графа. Это множество определяется ациклической структурой графа и не связано с заданием условий вида (1.1). На первом шаге перенумеруем вершины из A_0 . На втором шаге нумеруем те из B -вершин, у которых все непосредственно предшествующие A -вершины уже получили номера, а затем продолжим нумерацию A -вершин и перенумеруем те из A -вершин, не имеющие номера, у которых все непосредственно предшествующие B -вершины получили номера. На третьем шаге продолжается нумерация B - и A -вершин по правилам второго шага и т. д. Очевидно, через конечное число шагов этот процесс нумерации закончится. При этом занумерованными окажутся все вершины графа, так как в противном случае вместе с вершиной без номера существует предшествующая ей вершина без номера и, в силу ациклическости графа, существует начальная вершина без номера, что противоречит построению.

Пусть (6.1) и (6.2) записаны относительно такой нумерации. Совершенно очевидно, что вдоль любого пути номера как A -, так и B -вершин возрастают. В частности, если $\alpha_{ik} > 0$, $\beta_{ik} > 0$ при некотором i , то $k > s$.

Будем строить набор решений

$$\lambda^l = (\lambda_1^l, \lambda_2^l, \dots, \lambda_n^l) \quad (l = 1, \dots, n) \quad (6.3)$$

системы (6.2) следующим образом. Положим

$$\lambda_k^l = 1, \quad \lambda_k^l = 0 \quad \text{при } k > l$$

и построим λ_k^l ($k < l$) последовательно по убыванию номера k . Пусть уже построены λ_k^l для всех $k > s$. Построим λ_s^l . Перепишем (6.2) в виде

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \lambda_k \geq \sum_{k=1}^n \beta_{ik} \lambda_k \quad (i = 1, \dots, m) \quad (6.4)$$

и рассмотрим все те i , для которых $\alpha_{is} > 0$, т. е. те вершины b_i , которым непосредственно предшествует вершина a_s . Согласно нумерации для таких i $\beta_{ik} > 0$ возможно лишь при $k > s$, и соответствующие величины λ_k^l по предположению индукции уже определены, т. е. при всех i ($\alpha_{is} > 0$) правые части (6.4) известны и можно положить

$$\lambda_s^l = \max_i \sum_{k=1}^n \beta_{ik} \lambda_k^l,$$

где максимум берется по всем i таким, что $\alpha_{is} > 0$. Этим построение вектора (6.3) завершается. По построению все компоненты (6.3) неотрицательны и при каждом l ($l = 1, \dots, n$) (6.3) удовлетворяют всем неравенствам (6.4) и, следовательно, (6.2). Матрица

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

строками которой являются векторы (6.3), является нижней треугольной матрицей, причем $\lambda_i^i = 1$ ($i = 1, \dots, n$). Отсюда следует линейная независимость векторов (6.3). Теорема доказана.

Следствие. Существуют положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, такие, что

$$\mu_i = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \lambda_k < 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (6.6)$$

Доказательство. Каждое уравнение $L_i(\lambda) = 0$ может иметь не более чем $(n-1)$ линейно-независимых решений. Это значит, что при каждом i найдется хотя бы одно значение l (один из векторов (6.3)), такое, что $L_i(\lambda^l) < 0$. Полагая

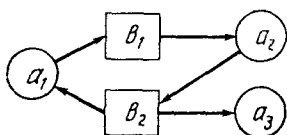
$$\lambda_k = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_k^i \quad (k = 1, \dots, n), \quad (6.7)$$

где c_1, \dots, c_n — произвольные положительные числа, легко убеждаемся, что числа (6.7) удовлетворяют строгим неравенствам (6.6).

§ 3. ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

1. Примеры. Начнем с простых примеров, показывающих самое различное поведение при $t \rightarrow \infty$ решения уравнений на графах. Во всех примерах мы считали $f_i = \omega_i$ (см. (1.1.3)), $g_k \equiv 0$.

I. Пример безбалансной системы:



$$\begin{aligned}
 a_1 &\longrightarrow a_2, \\
 a_2 &\longrightarrow a_1 + a_3.
 \end{aligned}$$

Решение соответствующей системы уравнений:

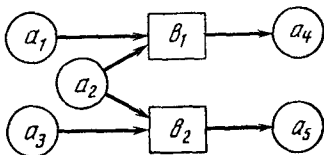
$$\begin{aligned}
 \dot{u}_1 &= -k_1 u_1 + k_2 u_2; \\
 - \dot{u}_2 &= k_1 u_1 - k_2 u_2; \\
 \dot{u}_3 &= k_2 u_2
 \end{aligned}$$

с начальным условием $u_1(0) = 1, u_2(0) = u_3(0) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= \frac{k_1}{k_1 + k_2} (1 - \exp[-(k_1 + k_2)t]); \quad u_1(t) = 1 - u_2(t); \\
 u_3(t) &= \frac{k_2}{k_2 + k_1} (k_1 t - u_2(t)).
 \end{aligned}$$

Здесь $u_3(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, в безбалансных системах возможны неограниченно растущие решения.

II. Пример неединственности стационарного решения



$$\begin{aligned}
 a_1 + a_2 &\longrightarrow a_4, \\
 a_2 + a_3 &\longrightarrow a_5.
 \end{aligned}$$

Эта система имеет материальные балансы

$$u_1 + u_4 = u_1^0; \quad u_3 + u_5 = u_3^0; \quad u_2 + u_4 + u_5 = u_2^0, \quad (1.1)$$

где u_1^0, u_2^0, u_3^0 — положительные начальные данные для u_1, u_2, u_3 . Начальные условия для u_4, u_5 считаются нулевыми.

Мы будем интересоваться стационарным решением, удовлетворяющим соотношениям (1.1), так как только такое стационарное решение может быть предельным значением решения при $t \rightarrow \infty$. К соотношениям (1.1) нужно присоединить еще уравнения $w_1 = 0, w_2 = 0$, т. е.

$$u_1 u_2 = 0, \quad u_2 u_3 = 0. \quad (1.2)$$

Если $u_2 \neq 0$, то $u_1 = u_3 = 0$, и из (1.1) однозначно находятся

$$u_4 = u_1^0; \quad u_5 = u_3^0; \quad u_2 = u_2^0 - (u_1^0 + u_3^0),$$

причем такая ситуация возможна лишь при $u_2^0 > u_1^0 + u_3^0$. Предположим, что $u_2^0 < u_1^0 + u_3^0$. Тогда при любом α из интервала

$$\max \{0, u_1^0 - u_2^0\} < \alpha < \min \{u_1^0, u_1^0 + u_3^0 - u_2^0\} \quad (1.3)$$

уравнениям (1.1), (1.2) удовлетворяют неотрицательные величины

$$u_1 = \alpha; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = u_1^0 + u_3^0 - u_2^0 - \alpha; \quad u_4 = u_1^0 - \alpha; \quad u_5 = u_2^0 - u_1^0 - \alpha. \quad (1.4)$$

Получается однопараметрическое семейство стационарных решений. Какое из решений (1.4) будет пределом решения при $t \rightarrow \infty$, оказывается, зависит от констант k_1 и k_2 скоростей w_1, w_2 , точнее, от их отношения $k = \frac{k_1}{k_2}$. В самом деле, из закона изменения u_1 и u_3 :

$$\dot{u}_1 = -\omega_1 = -k_1 u_1 u_2; \quad \dot{u}_3 = -\omega_2 = -k_2 u_2 u_3$$

легко вытекает соотношение

$$\frac{u_1}{u_1^0} = \left(\frac{u_3}{u_3^0} \right)^k; \quad k = \frac{k_1}{k_2}, \quad (1.5)$$

которое, естественно, сохраняется и на установившемся решении. Значения (1.4) для u_1 и u_3 удовлетворяют (1.5) при

$$k = \frac{\ln \frac{a}{u_1^0}}{\ln [(u_1^0 + u_3^0 - u_2^0 - a)/u_3^0]}. \quad (1.6)$$

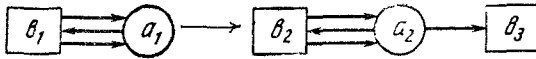
Легко показать, что при таком выборе k величины (1.4) действительно являются пределами при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, неединственность стационарного решения открывает возможность определять связи между константами скоростей. В данном примере по наблюдаемым значениям установившихся величин u_1 и u_3 при условии $u_2^0 < u_1^0 + u_3^0$ по формулам (1.4), (1.6) определяется отношение констант скоростей. В общем случае можно определить столько связей между константами, сколько параметров, от которых зависит стационарное решение.

III. Примеры периодических решений.

1. Система Вольтера — Лотка. При описании некоторых биологических процессов [23] возникает система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= k_1 u_1 - k_2 u_1 u_2; \\ \dot{u}_2 &= k_2 u_1 u_2 - k_3 u_2, \end{aligned}$$

являющаяся системой уравнений на графе



Интегрирование (1.7) показывает, что в плоскости (u_1, u_2) траектории системы описываются уравнением

$$\varphi(u_1, u_2) \equiv u_1^{k_3} u_2^{k_1} \exp[-k_2(u_1 + u_2)] = c \quad (c = \text{const}). \quad (1.9)$$

Функция $\varphi(u_1, u_2)$ положительна в квадранте $u_1 > 0, u_2 > 0$ и обращается в нуль как на его границе, так и при $u_1 + u_2 \rightarrow \infty$. В точке $u_1 = \frac{k_3}{k_2}$,

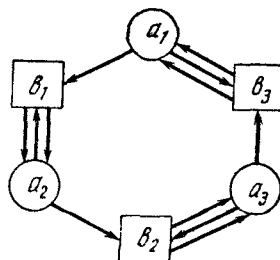
$u_2 = \frac{k_1}{k_2}$, являющейся точкой равновесия системы (1.7) типа «центр»,

функция φ достигает максимального значения φ_0 . Очевидно, при любом $c, 0 < c < \varphi_0$, кривая (1.9) является замкнутой траекторией, описываемой периодическим решением системы (1.7).

Уравнения (1.7) не подчиняются линейным балансным соотношениям. В связи с этим возникает вопрос, возможны ли периодические решения в балансной системе уравнений. Следующий пример дает утвердительный ответ на этот вопрос.

2. Пример А. Н. Ивановой.

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &\longrightarrow 2a_2, \\ a_2 + a_3 &\longrightarrow 2a_3, \\ a_1 + a_3 &\longrightarrow 2a_1. \end{aligned}$$



(1.10)

Помимо балансного соотношения

$$u_1 + u_2 + u_3 = c \quad (c > 0), \quad (1.11)$$

соответствующая (1.10) система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -k_1 u_1 u_2 + k_3 u_1 u_3; \\ \dot{u}_2 &= k_1 u_1 u_2 - k_2 u_2 u_3; \\ \dot{u}_3 &= -k_3 u_1 u_3 + k_2 u_2 u_3 \end{aligned} \quad (1.12)$$

имеет, как нетрудно видеть, первый интеграл

$$u_1^{k_2} u_2^{k_3} u_3^{k_1} = c_1 \quad (c_1 > 0). \quad (1.13)$$

Исключая u_3 из (1.11) — (1.13), приходим к соотношению

$$\varphi(u_1, u_2) = (c - u_1 - u_2)^{k_1} u_1^{k_2} u_2^{k_3} = c_1, \quad (1.14)$$

описывающему траектории в плоскости (u_1, u_2) первых двух уравнений системы (1.12). Функция φ обращается в нуль на границе области

$$u_1 > 0, u_2 > 0, u_1 + u_2 < c$$

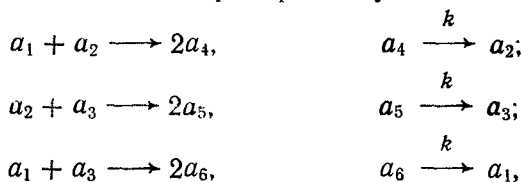
и принимает максимальное положительное значение φ_0 во внутренней точке этой области (в точке равновесия (1.12)). Поэтому все траектории вида (1.14) при $0 < c_1 < \varphi_0$ являются замкнутыми кривыми в плоскости (u_1, u_2) и им отвечают периодические решения системы (1.12).

Схемы химических реакций обычно обладают тем свойством, что вещество, вступающее в реакцию, не входит в число продуктов этой реакции, т. е. для каждой пары значений i, k

$$\text{либо } \alpha_{ik} = 0, \text{ либо } \beta_{ik} = 0. \quad (1.15)$$

Схемы (1.8) и (1.10) этим свойством не обладают. Такие схемы получаются, например, при описании автокаталитических процессов как результат асимптотики по большим константам в системах, удовлетворяющих условию (1.15).

Как показала Иванова на примере следующей системы:



приводящей при $k \rightarrow \infty$ к системе (1.10), незатухающие колебательные режимы возможны и в системах, удовлетворяющих условию (1.15).

Наличие периодических решений в системах (1.8) и (1.10) является следствием цикличности графов. Хотя наличие циклов не всегда приводит к периодическим решениям, тем не менее оно является необходимым условием существования таких решений. В следующем пункте будет показано, что на ациклических графах периодические решения не возникают.

2. Случай ациклического графа. Исследование балансных неравенств ациклического графа (п. 2.6) позволяет получить ряд важных выводов о поведении решений соответствующей системы дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_k = \sum_{i=1}^m \gamma_{ik} f_i(u); \quad u_k(0) = u_k^0 \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (2.1)$$

Мы предполагаем, что функции f_i удовлетворяют условию 1 (п. 2.1). Ради некоторого удобства формулировок мы считаем $g_k \equiv 0$, $f_i \equiv f_i(u)$ (ср. 1.2.1)).

Теорема. Пусть (2.1) есть система уравнений на ациклическом графе. Тогда:

1) решение $u(t)$ задачи (2.1) определено на полуоси $t > 0$ и ограничено независимо от функций f_i ;

2) не существует неотрицательного периодического решения системы (2.1);

3) решение $u(t)$ задачи (2.1) имеет предел при $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \bar{u}, \quad (2.2)$$

являющийся точкой равновесия системы (2.1);

4) любая неотрицательная точка равновесия системы (2.1) является решением системы уравнений

$$f_i(u) = 0 \quad (i = 1, \dots, m); \quad (2.3)$$

5) существует константа $M > 0$, не зависящая от f_i ($i = 1, \dots, m$), такая, что для решения задачи (2.1) имеет место

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{du_k}{dt} \right| dt < M \quad (k = 1, \dots, n). \quad (2.4)$$

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — положительные числа, удовлетворяющие неравенствам (2.6.6), т. е.

$$\mu_i = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \lambda_k < 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.5)$$

Рассмотрим функцию

$$F(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k. \quad (2.6)$$

Вдоль решения $u(t)$ системы (2.1) имеет место

$$\frac{dF(u(t))}{dt} = \sum_k \lambda_k \sum_i \gamma_{ik} f_i - \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(u(t)) \leq 0 \quad (2.7)$$

в силу (2.5) и неравенств $u_k(t) \geq 0$, $f_i(u(t)) \geq 0$ ($k = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, m$)

Из (2.7) вытекает априорная оценка

$$F(u(t)) \leq F(u(0)) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k^0 \quad (t \geq 0),$$

из которого следует первое утверждение теоремы.

Вдоль непостоянного решения $u(t)$ системы (2.1) неравенство (2.7) строгое ввиду того, что $f_i > 0$ хотя бы при одном i в каждой точке t (если $f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0$ в некоторой точке t_0 , то из (2.1) следует $u(t) \equiv u(t_0)$). Отсюда следует второе утверждение теоремы, так как если $u(t)$ — непостоянное периодическое решение периода $T > 0$, то $u(t+T) = u(t)$ и $F(u(t+T)) = F(u(t))$, что невозможно.

Вдоль решения $u(t)$ задачи (2.1) функция $F(u(t))$ убывает и ограничена снизу ($u_k(t) \geq 0$, $k = 1, \dots, n$). Следовательно, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(u(t)) = F_0.$$

Отсюда и из (2.7) вследствие $\mu_i < 0$ ($i = 1, \dots, m$) вытекает существование интегралов

$$\int_0^{\infty} f_i(u(t)) dt < \infty \quad (i = 1, \dots, m).$$

Но в силу (2.1)

$$u_k(t) = u_k^0 + \sum_{i=1}^m \gamma_{ik} \int_0^t f_i(u(\tau)) d\tau \quad (k = 1, \dots, n).$$

Следовательно, имеет место (2.2), причем \bar{u} является точкой равновесия системы (2.1). Этим доказано третье утверждение.

Если $u(t) \equiv \bar{u}$ — точка равновесия (неотрицательная), то из (2.7) получаем

$$\sum_{i=1}^m \nu_i f_i(\bar{u}) = 0.$$

Ввиду $\mu_i < 0$, $f_i(\bar{u}) \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), отсюда следует, что \bar{u} является решением системы (2.3), т. е. доказано четвертое утверждение.

Рассмотрим матрицу (2.6.5) неотрицательных решений балансных неравенств (2.6.2) ациклического графа и положим

$$v(t) = \Lambda u(t), \quad (2.8)$$

где $u(t)$ — столбец-решение задачи (2.1). Компоненты вектора $v(t)$ являются невозрастающими функциями t и поэтому

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{dv_j}{dt} \right| dt = \left| \int_0^{\infty} \frac{dv_j}{dt} dt \right| = v_j(0) - v_j(\infty) \leq M_1 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.9)$$

Матрица Λ обратима и из (2.8) следует

$$\frac{du}{dt} = \Lambda^{-1} \frac{dv}{dt}.$$

Отсюда и из (2.9) немедленно вытекает оценка (2.4) с некоторой константой M , не зависящей от функций f_i . Теорема доказана.

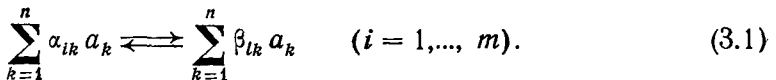
Следует отметить, что доказательство утверждений 1)–4) основано лишь на существовании положительного решения $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ системы неравенств (2.5), что справедливо не только для ациклических графов. Тем самым утверждения 1)–4) остаются справедливыми для более широкого класса систем вида (2.1), для которых система (2.5) имеет положительное решение.

Пример II п. 1, в котором граф является, очевидно, ациклическим, показывает неединственность стационарной точки системы (2.1) (решения системы (2.3)), даже если рассматривать эти решения в плоскости материальных балансов, т. е. решать систему (2.3) совместно с уравнениями материального баланса:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k^j u_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k^j u_k^0 \quad (j = 1, \dots, n-r),$$

где $\lambda^j = (\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j)$ являются линейно-независимыми решениями балансных уравнений (2.5.3); r — ранг матрицы (γ_{ik}) .

3. Обратимые реакции. Детальное равновесие. Рассмотрим теперь случай взаимно обратимых реакций:



Скорость каждой реакции будем считать заданной по формуле (1.1.3) ($f_i = \omega_i$). Тогда если положить

$$\omega_i^+ = k_i^+ \prod_{k=1}^n u_k^{\alpha_{ik}}, \quad \omega_i^- = k_i^- \prod_{k=1}^n u_k^{\beta_{ik}}, \quad \omega_i = \omega_i^+ - \omega_i^-, \quad (3.2)$$

то, очевидно, соответствующая система (1.1.2) имеет вид

$$\dot{u}_k = \sum_{i=1}^m \gamma_{ik} \omega_i, \quad \gamma_{ik} = \beta_{ik} - \alpha_{ik} \quad (k = 1, \dots, m). \quad (3.3)$$

Естественно считать, что при каждом i ($i = 1, \dots, m$) существует k такое, что $\alpha_{ik} + \beta_{ik} \neq 0$. Мы не исключаем возможности $\alpha_{ik} = \beta_{ik}$, так что некоторые из уравнений в системе (3.3) могут иметь вид $\dot{u}_k = 0$.

О п р е д е л е н и е. Говорят, что точка $u = (u_1, \dots, u_n)$, $u_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, n$), является точкой *детального равновесия (баланса)* для системы (3.3), если

$$\omega_i^+(u) = \omega_i^-(u) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.4)$$

Очевидно, точка детального равновесия является точкой равновесия (стационарным решением) системы.

Будем говорить, что выполнено *условие А*, если существует положительная точка детального равновесия.

Логарифмированием равенства (3.4) легко показать, что необходимым и достаточным условием существования положительной точки детального равновесия является разрешимость системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^n \gamma_{ik} c_k = \ln k_i, \quad k_i = \frac{k_i^+}{k_i^-} \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.5)$$

При этом точка детального равновесия u и решение c этой системы связаны соотношением $u_k = \exp c_k$ ($k = 1, \dots, m$).

Условие А, таким образом, есть некоторое ограничение на константы равновесия $k_i = \frac{k_i^+}{k_i^-}$ (ортогональность вектора $k = (k_1, \dots, k_m)$ решениям сопряженной однородной системы уравнений $\sum_{i=1}^m \gamma_{ik} \omega_i = 0$ ($k = 1, \dots, n$)). В том случае, когда эта система имеет только нулевое решение, никаких ограничений на $k = (k_1, \dots, k_m)$ не содержится.

Пусть r есть ранг матрицы (γ_{ik}) , а строки матрицы

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n-r,1} & \dots & \lambda_{n-r,n} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

образуют фундаментальную систему решений однородной системы (3.5)

$$\sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \lambda_k = 0. \quad (3.7)$$

Ясно, что строки матрицы (3.6) определяют независимые линейные первые интегралы (материальные балансы) системы (3.3), т. е. если $u(t)$ — столбец-решение системы (3.3), то

$$\Lambda u(t) \equiv \Lambda u(0).$$

Совокупность

$$\pi(u_0) = \{u; \Lambda(u - u_0) = 0\}$$

называют *инвариантной плоскостью* или *плоскостью материальных балансов* системы (3.3), так как если $u(0) \in \pi(u_0)$, то $\Lambda(u(t) - u_0) = \Lambda(u(0) - u_0) = 0$ и $u(t) \in \pi(u_0)$ при всех t из области определения решения $u(t)$.

В том случае, когда ранг r матрицы (γ_{ik}) равен n , инвариантная плоскость совпадает со всем пространством R^n .

Теорема. Если выполнено условие A , то в инвариантной плоскости, содержащей хотя бы одну положительную точку, существует и единственна положительная точка детального равновесия системы (3.3).

Доказательство. В том случае, когда инвариантная плоскость совпадает со всем пространством, утверждение теоремы следует из условия A , т. е. разрешимости системы (3.5). Рассмотрим тот случай, когда ранг r матрицы (γ_{ik}) меньше n . Не ограничивая общности, можно считать, что первые r строк матрицы (γ_{ik}) линейно независимы. Тогда нахождение положительной точки детального равновесия в плоскости $\pi(u_0)$ ($u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0n})$) сводится к совместному решению системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \gamma_{ik} c_k = \nu_i, \quad \nu_i = \ln k_i \quad (i = 1, \dots, r); \quad (3.8)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{ik} \exp c_k = \mu_i, \quad \mu_i = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} u_{0k} \quad (i = 1, \dots, n-r). \quad (3.9)$$

Условия теоремы означают, что каждая из систем (3.8), (3.9) по отдельности разрешима. Если $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ — положительная точка плоскости $\pi(u_0)$, то, очевидно, $c_k = \ln \bar{u}_k$ образуют решение системы (3.9). Система (3.8) разрешима в силу условия A .

Если $c_0 = (c_{01}, \dots, c_{0n})$ — некоторое частное решение системы (3.8), то ее общее решение имеет вид

$$c_k = c_{0k} + \sum_{i=1}^{m-r} \xi_i \lambda_{ik} \quad (k = 1, \dots, n), \quad (3.10)$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-r})$ — набор произвольных констант. (Напоминаем (см. (3.7)), что $(\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in})$ — суть решения однородной системы (3.8).)

Рассмотрим функцию

$$G(c) = \sum_{k=1}^n (\exp c_k - \bar{u}_k c_k), \quad (3.11)$$

где $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ — положительная точка плоскости $\pi(u_0)$. Нетрудно видеть, что $G(c)$ ограничена снизу и $G(c) \rightarrow +\infty$ при $|c| \rightarrow \infty$ (| | обозначает длину вектора). Из векторной записи (3.10) $c - c_0 = \xi \cdot \Lambda$ легко находим, что

$$\xi = (c - c_0) \Lambda^* (\Lambda \Lambda^*)^{-1}, \quad (3.12)$$

где Λ^* — транспонированная матрица Λ , причем $\Lambda \cdot \Lambda^*$ — обратимая квадратная матрица порядка $n - r$. Из (3.12) заключаем, что для $c = c(\xi)$ в (3.10) имеет место

$$|c(\xi)| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $G(c(\xi)) \rightarrow +\infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. Это означает, что функция (3.11), рассматриваемая как функция ξ на решениях (3.10) системы (3.8), в некоторой точке ξ_0 достигает минимума, и в этой точке

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial G}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial G}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial c_k}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^n (\exp c_k - \bar{u}_k) \lambda_{ik} = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} \exp c_k - \mu_i \quad (i = 1, \dots, n-r), \end{aligned} \quad (3.13)$$

т. е. выполняется (3.9). Таким образом, формула (3.10) при $\xi = \xi_0$ определяет решение всей системы (3.8), (3.9). Существование решения этим доказано.

Читая (3.13) в обратном порядке, убеждаемся, что любое решение системы (3.8), (3.9) определяется формулой (3.10) в некоторой стационарной точке ξ функции $G(c(\xi))$. Матрица вторых производных этой функции

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \sum_{k=1}^n e^{c_k} \lambda_{ik} \lambda_{jk} \quad (i, j = 1, \dots, n-r)$$

положительно определена. Действительно,

$$\sum_{i, j=1}^{n-r} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \eta_i \eta_j = \sum_{k=1}^n e^{c_k} \left(\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_{ik} \eta_i \right)^2 \geq 0,$$

и ввиду линейной независимости строк матрицы (3.6) равенство нулю возможно лишь при $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{n-r} = 0$. Это означает, что $G(c(\xi))$ — выпуклая функция ξ и потому не имеет других стационарных точек, кроме единственной точки минимума. Единственность решения системы (3.8), (3.9), а тем самым и теорема доказаны.

Приведенное здесь доказательство основано на идеях работы Зельдовича [18].

4. Обратимые реакции. Выход на стационарный режим. Ниже всюду предполагается, что для системы (3.3) выполнено условие А. Важную роль при качественном исследовании системы (3.3) играет функция

$$F(u) = \sum_{k=1}^n u_k [\ln u_k - (c_k + 1)], \quad (4.1)$$

определенная и непрерывно дифференцируемая в области

$$D = \{u; u_k > 0, k = 1, \dots, n\}. \quad (4.2)$$

Будем считать функцию $F(u)$ продолженной по непрерывности и на границу области D . Предполагается, что параметры (c_1, \dots, c_n) образуют некоторое решение системы (3.5).

Функция $F(u)$ ограничена снизу и достигает абсолютного минимума внутри области (4.2) в точке детального равновесия \bar{u} :

$$\bar{u}_k = \exp c_k.$$

Очевидно также, что $F(u)$ неограниченно возрастает, когда хотя бы одна из компонент u_k стремится к $+\infty$, и что множества вида

$$\{u; F(u) < c\}$$

являются ограниченными множествами в \bar{D} .

Функция $F(u)$ имеет смысл свободной энергии системы. Она была использована Зельдовичем [18] при доказательстве единственности точки детального равновесия (ср. п. 3). Как будет показано ниже, важным свойством этой функции является то, что она оказывается нелокальной функцией Ляпунова для системы (3.3).

Лемма. Вдоль положительного решения $u(t)$ системы (3.3)

$$\frac{d}{dt} F(u(t)) = - \sum_{i=1}^m (\omega_i^+ - \omega_i^-) (\ln \omega_i^+ - \ln \omega_i^-) \leq 0. \quad (4.3)$$

Вдоль неотрицательного решения $u(t)$ ($u_k(t) \geq 0, k=1, \dots, n$) для каждого i ($i=1, \dots, m$) либо $\omega_i^+ \equiv \omega_i^- \equiv 0$, либо $\omega_i^+ > 0$ при $t > 0$. При этом для любых $t_1 > t_0 \geq 0$ из области определения $u(t)$

$$F(u(t_1)) - F(u(t_0)) \leq - \sum_i \int_{t_0}^{t_1} (\omega_i^+ - \omega_i^-) (\ln \omega_i^+ - \ln \omega_i^-) dt \leq 0, \quad (4.4)$$

где Σ' обозначает суммирование лишь по тем i , для которых $\omega_i^+ > 0$.
Вдоль непостоянного решения $u(t)$ системы (3.3)

$$F(u(t_1)) < F(u(t_0)), \quad t_1 > t_0. \quad (4.5)$$

Доказательство. Пусть решение $u(t)$ положительно при $t > 0$.
С учетом (3.2), (3.5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(u(t)) &= \sum_{k=1}^n (\ln u_k - c_k) \sum_{i=1}^m \gamma_{ik} \omega_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \omega_i \left(\sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \ln u_k - \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} c_k \right) = \sum_{i=1}^m \omega_i \ln \left(\frac{k_i^-}{k_i^+} \prod_{k=1}^n u_k^{\gamma_{ik}} \right) = \\ &= - \sum_{i=1}^m (\omega_i^+ - \omega_i^-) (\ln \omega_i^+ - \ln \omega_i^-). \end{aligned}$$

Поскольку $(a-b)(\ln a - \ln b) \geq 0$ при $a > 0, b > 0$, то (4.3) доказано.
Пусть $u(t)$ — неотрицательное решение системы (3.3) в некотором интервале $(0, T)$. Тогда решение $u(t)$ с начальным условием $u_{\varepsilon k}(0) = u_k(0) + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) положительно и при каждом $t \in (0, T)$

$$u(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(t), \quad F(u(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(u_{\varepsilon}(t)),$$

причем равномерно по t в любом интервале $0 < t_0 \leq t \leq t_1 < T$. Из (4.3) для $u_{\varepsilon}(t)$ имеем

$$F(u_{\varepsilon}(t_1)) - F(u_{\varepsilon}(t_0)) = - \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^{t_1} (\omega_{i\varepsilon}^+ - \omega_{i\varepsilon}^-) (\ln \omega_{i\varepsilon}^+ - \ln \omega_{i\varepsilon}^-) dt. \quad (4.6)$$

Здесь $\omega_{i\varepsilon}^{\pm} = \omega_i^{\pm}(u_{\varepsilon}(t))$. Допустим, что второе утверждение леммы неверно, и пусть для определенности при некоторых i и $t \in (0, T)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{i\varepsilon}^+ = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{i\varepsilon}^- > 0. \quad (4.7)$$

Согласно п. 2.3 эти соотношения имеют место при всех $t \in (0, T)$, причем равномерно по $t \in [t_0, t_1]$. Но отсюда следует, что правая часть в (4.6) стремится к $-\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, в то время как левая часть ограничена. Таким образом, (4.7) невозможно. Отбрасывая в (4.6) те слагаемые, в которых $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{i\varepsilon}^+ = 0$, и переходя затем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим (4.4) для $t_0 > 0$ и по непрерывности для $t_0 \geq 0$.

Для доказательства (4.5) заметим, что из равенства $F(u(t_1)) = F(u(t_0))$ при $t_1 > t_0 \geq 0$ и (4.3) или (4.4) следует $\omega_i^+ \equiv \omega_i^-$ при всех $i, i=1, \dots, m$. Но тогда из (3.3) следует $u(t) \equiv u(0)$. Лемма доказана.

Из этой леммы вытекают важные качественные результаты для системы (3.3) при выполнении условия А.

Теорема: 1) решение $u(t)$ системы (3.3) при любом неотрицательном начальном условии

$$u_k(0) = u_k^0 \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (4.8)$$

существует и ограничено при $t \in (0, \infty)$;

2) не существует непостоянного неотрицательного периодического решения системы (3.3);

3) любая точка равновесия системы (3.3) есть точка детального равновесия;

4) ω — предельное множество Ω решения задачи (3.3), (4.8) состоит либо из неотрицательных точек детального равновесия, либо из единственной положительной точки детального равновесия;

5) положительная точка детального равновесия устойчива, а в инвариантной плоскости $\pi(\bar{u})$ асимптотически устойчива.

Доказательство. 1. В силу леммы для решения задачи (3.3), (4.8) имеем априорную оценку

$$F(u(t)) \leq c = F(u(0)), \quad t \geq 0.$$

Отсюда и из неотрицательности $u(t)$ следуют существование и ограниченность решения $u(t)$ при всех $t > 0$. Отметим, что при этом не требуется существование положительного материального баланса.

2. Пусть $u(t)$ — периодическое неотрицательное решение минимального периода $T > 0$. Тогда $u(t) = u(t+T)$ и, значит,

$$F(u(t)) = F(u(t+T)),$$

но это противоречит (4.5).

3. Для любого решения $u(t) = \text{const}$ (точка равновесия) из леммы следует $\omega_i^+ = \omega_i^-$ ($i=1, \dots, m$). Это и значит, что точка равновесия есть точка детального равновесия.

4. Так как вдоль неотрицательного решения $u(t)$ функция $F(u(t))$ не возрастает и ограничена снизу, то существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(u(t)) = F_0.$$

Отсюда для ω — предельного множества Ω (см. п. VI.3.1) — следует включение

$$\Omega \subset \{u; F(u) = F_0\}.$$

Как известно (см. п. VI.3.1), Ω состоит из целых траекторий системы (3.3), а так как вдоль непостоянного решения $F(u)$ не остается постоянной (см. (4.5)), то Ω содержит только точки равновесия и, следовательно, точки детального равновесия.

Предположим, что Ω содержит положительную точку \bar{u} . Вместе со всей траекторией $u(t)$ точка \bar{u} лежит в инвариантной плоскости $\pi(u(0))$. По теореме п. 3 \bar{u} — единственная положительная точка в Ω . В силу связности Ω не содержит в этом случае и других неотрицательных точек.

5. Пусть \bar{u} — положительная точка детального равновесия. В выражении $F(u)$ (см. (4.1)) можно положить $c_k = \ln \bar{u}_k$ ($k=1, \dots, n$), так что \bar{u} будет точкой абсолютного минимума функции $F(u)$. Пусть $F_S = \min_S F(u)$, где S — граница области D (см. (4.2)). Рассмотрим множества

$$D_c = \{u \in D; F(u) \leq c\}, \quad F(\bar{u}) < c < F_S.$$

Очевидно, $\bar{u} \in D_c$, и если $u(0) \in D_c$, то $u(t) \in D_c$ при всех $t \geq 0$. Это и означает устойчивость \bar{u} ввиду произвольной близости c к $F(\bar{u})$.

Далее, в силу уже доказанного утверждения 4) $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ существует и является положительной точкой детального равновесия из D_c при $u(0) \in D_c$. Поэтому при $u(0) \in D_c \cap \pi(\bar{u})$ в силу теоремы п. 3 имеет место

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \bar{u},$$

т. е. асимптотическая устойчивость \bar{u} в плоскости $\pi(\bar{u})$ (см. п. VI.3.1). Теорема доказана.

Заметим, что в рассматриваемом случае обратимых реакций граф содержит циклы: каждая A -вершина входит в некоторый цикл. Тем не менее периодических решений не возникает. Доказанная теорема вместе с теоремой п. 3 играет важную роль при построении в последнем параграфе асимптотики по большим константам скоростей реакций.

Надо отметить, что для полного исследования вопроса о поведении при $t \rightarrow \infty$ решения системы (3.3) достаточно ограничиться исследованием положительных решений. Если в системе (3.3) оставить лишь уравнения с номерами ненулевых компонент неотрицательного решения $u(t)$ и в этих уравнениях вычеркнуть члены, где $\omega_i^\pm \equiv 0$, то получается замкнутая система и ненулевые компоненты $u(t)$ образуют положительное решение этой системы. Нетрудно понять, что эта система уравнений также отвечает некоторой схеме вида (3.1) и для нее выполнено условие A .

§ 4. О ПОКАЗАТЕЛЯХ ЛЯПУНОВА¹

1. **Постановка вопроса.** Строгим показателем Ляпунова функции $f(t)$, определенной при $t > 0$, называется величина

$$\lambda(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|, \quad (1.1)$$

когда этот предел, конечный или бесконечный, существует.

Величина $\lambda(f)$ определяет порядок экспоненциального роста ($\lambda(f) > 0$) и убывания ($\lambda(f) < 0$) функции $|f(t)|$ при $t \rightarrow \infty$ и обладает следующими простыми свойствами:

$$\lambda(f_1 + f_2) = \max\{\lambda(f_1), \lambda(f_2)\}; \quad (1.2)$$

$$\lambda(f_1 \cdot f_2) = \lambda(f_1) + \lambda(f_2). \quad (1.3)$$

При исследовании поведения при $t \rightarrow \infty$ решения $u(t)$ системы уравнений на графе естественно возникает вопрос, как связаны показатели Ляпунова функций $u_k(t)$ ($k=1, \dots, n$) со структурой графа. В п. 2.4 мы видели, что аналогичный вопрос о поведении решения при $t \rightarrow 0$ решается в терминах индексов вершин графа.

Относительно системы уравнений на графе

$$\dot{u}_k = \sum_{i=1}^m \gamma_{ik} \omega_i, \quad u_k(0) = u_k^0 \geq 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (1.4)$$

(ср. (1.2.1)) ниже мы предполагаем следующее:

1. Функции ω_i заданы формулами (1.1.3).
2. Решение $u(t)$ задачи (1.4) строго положительно при $t > 0$.
3. Существуют и известны величины $\bar{u}_k = \lim_{t \rightarrow \infty} u_k(t)$ ($k=1, \dots, n$).
4. Существуют конечные или бесконечные пределы отношений²

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u_k(t)}{u_l(t)} = \left(\frac{\bar{u}_k}{\bar{u}_l} \right) \quad (k, l = 1, \dots, n).$$

Согласно п. 2.3 предположение 2 означает, что все A -вершины графа достижимы из начальных вершин $A_0 = \{a_k; u_k^0 > 0\}$.

Перепишем систему (1.4) в виде (ср. (2.1.3) — (2.1.5))

$$\dot{u}_k = -a_k(t) u_k + b_k(t), \quad (1.5)$$

где

$$a_k(t) = - \frac{1}{u_k(t)} \sum_{i, \gamma_{ik} < 0} \gamma_{ik} \omega_i(u(t)) \geq 0; \quad (1.6)$$

$$b_k(t) = \sum_{i, \gamma_{ik} > 0} \gamma_{ik} \omega_i(u(t)) \geq 0. \quad (1.7)$$

¹ Результаты этого параграфа получены совместно с Е. А. Гельман и публикуются здесь впервые

² Это предположение сделано для простоты изложения.

Заметим, что равенство нулю при $0 < t < \infty$ в выражении (1.6) возможно лишь в том случае, когда $\gamma_{ik} \geq 0$ при всех i , и в (1.7), когда $\gamma_{ik} \leq 0$ при всех i . Согласно формулам (1.1.3)

$$\omega_i = k_i \prod_{k=1}^n u_k^{\alpha_{ik}} \quad (i = 1, \dots, m), \quad (1.8)$$

и в силу предположений 3.4 нам известны предельные значения

$$\bar{a}_k = \lim_{t \rightarrow \infty} a_k(t), \quad \bar{b}_k = \lim_{t \rightarrow \infty} b_k(t), \quad c_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b_k(t)}{u_k(t)} \quad (k = 1, \dots, n), \quad (1.9)$$

которые позволяют найти из (1.5)

$$\lambda(u_k) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \left(a_k(\tau) - \frac{b_k(\tau)}{u_k(\tau)} \right) d\tau = -(\bar{a}_k - c_k). \quad (1.10)$$

Здесь величина $t_0 > 0$ произвольна. В дальнейшем удобно оперировать величиной

$$\kappa_k = \kappa(u_k) = -\lambda(u_k) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (1.11)$$

которую мы также будем называть показателем Ляпунова. Ввиду ограниченности и положительности u_k имеем $\lambda(u_k) \leq 0$, так что $\kappa_k \geq 0$ и в силу (1.10)

$$\kappa_k = \bar{a}_k - c_k \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (1.12)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема.

$$\kappa_k = \min(\bar{a}_k, \kappa(b_k)) \quad (k = 1, \dots, n). \quad (1.13)$$

Доказательство. В силу (1.12) $\kappa_k \leq \bar{a}_k$ и, следовательно, возможны два случая:

1. $\kappa_k < \bar{a}_k$. Тогда $c_k \neq 0$ (см. (1.12)) и из выражения (1.9) для c_k непосредственно вытекает $\kappa_k = \kappa(u_k) = \kappa(b_k)$. Так что имеет место (1.13).

2. $\kappa_k = \bar{a}_k$. В этом случае $c_k = 0$, и из (1.9) следует $\kappa(b_k) \geq \kappa(u_k) = \bar{a}_k$, так что снова имеет место (1.13). Теорема доказана.

Очевидно, $\kappa_k = 0$, если $\bar{u}_k = \lim_{t \rightarrow \infty} u_k(t) \neq 0$. Это обстоятельство облегчает нахождение величин κ_k . Можно ограничиться исследованием лишь части уравнений (1.4) или (1.5) относительно тех $u_k(t)$, для которых $\bar{u}_k = 0$. Может, конечно, случиться, что $u_k \neq 0$ при всех k , как это может иметь место в случае обратимых реакций (п. 3.4). Тогда задача тривиальна: $\kappa_k = 0$ при всех k .

Уравнения для $u_k(t)$ с $\bar{u}_k = 0$, если остальные функции считать известными, можно трактовать в смысле п. 1.2 как уравнения на некотором графе Γ_0 , который получается из исходного графа Γ в результате следующей процедуры:

- 1) отбрасываются все A -вершины, отвечающие ненулевым значениям u_k ;
- 2) отбрасываются все ребра, приходящие и отходящие от этих A -вершин;
- 3) отбрасываются все B -вершины, оставшиеся без приходящих ребер.

Метод определения показателей κ_k существенно зависит от структуры графа Γ_0 .

2. Случай ациклического графа Γ_0 . В этом случае легко указать алгоритм, позволяющий с помощью формулы (1.13) найти все показатели κ . Пусть A_0 — множество начальных вершин Γ_0 (A -вершины, не имеющие предшествующих). Индексация вершин Γ_0 в смысле п. 2.2 от-

носителем A_0 каждой вершине Γ_0 ставит в соответствие конечный индекс, равный нулю для вершин из A_0 . Для этих вершин $b_k(t) \equiv 0$ в соответствующих уравнениях (1.5), следовательно, $c_k = 0$ (см. (1.9)) и согласно (1.12) $\kappa_k = \bar{a}_k$. Далее рассуждаем по индукции. Пусть уже известны показатели κ_k для всех вершин с индексом, меньшим s . Тогда для вершины a_k с индексом s рассмотрим все непосредственно предшествующие вершины b_i . Индекс этих вершин меньше, чем s , и функция $b_k(t)$ (см. (1.7)) выражается через функции $u_l(t)$ с уже известными показателями κ_l . По формулам (1.2), (1.3) легко находится $\kappa(b_k)$ и по формуле (1.13) — κ_k .

Таким образом, имеем алгоритм вычисления показателей, использующий ациклическую структуру графа Γ_0 .

Пример. Пусть исходный граф Γ задан схемой

$$\begin{aligned} b_1: & \quad a_1 + a_2 \xrightarrow{k_1} a_3; \\ b_2: & \quad a_2 \xrightarrow{k_2} a_4; \\ b_3: & \quad a_3 \xrightarrow{k_3} a_1 + a_4. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь, очевидно, существует цикл $(a_1, b_1), (b_1, a_3), (a_3, b_3), (b_3, a_1)$. Однако соответствующий граф Γ_0 оказывается ациклическим. В самом деле, из уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -k_1 u_1 u_2 + k_3 u_3; \\ \dot{u}_2 &= -k_1 u_1 u_2 - k_2 u_2; \\ \dot{u}_3 &= k_1 u_1 u_2 - k_3 u_3; \\ \dot{u}_4 &= k_2 u_2 + k_3 u_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

следует монотонность $u_2(t), u_4(t)$. Из балансных соотношений

$$u_1 + u_3 = u_1^0, \quad u_2 + u_3 + u_4 = u_2^0$$

(предполагается $u_1^0 > 0, u_2^0 > 0, u_3^0 = u_4^0 = 0$) вытекает существование пределов \bar{u}_k при $t \rightarrow \infty$. Из непрерывности интегралов от $u_2(t)$ и $u_3(t)$ (см. последнее уравнение (2.2)) вытекает $\bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0$, так что

$$\bar{u}_1 = u_1^0, \quad \bar{u}_2 = 0, \quad \bar{u}_3 = 0, \quad \bar{u}_4 = u_2^0.$$

Таким образом, граф Γ_0 получается из (2.1) отбрасыванием вершин a_1, a_4 вместе с приходящими и уходящими ребрами:

$$\begin{aligned} b_1: & \quad a_2 \longrightarrow a_3; \\ b_2: & \quad a_2 \longrightarrow ; \\ b_3: & \quad a_3 \longrightarrow \end{aligned}$$

и является ациклическим. Для определения показателей κ_2, κ_3 можно пользоваться описанным правилом. В начальной вершине a_2 из второго уравнения (2.2) имеем $b_2(t) \equiv 0, a_2(t) = k_1 u_1(t) + k_2$, так что

$$\kappa_2 = \bar{a}_2 = k_1 \bar{u}_1 + k_2$$

а для a_3 из третьего уравнения (2.2) с учетом $b_3(t) = k_1 u_1 u_2, a_3(t) = k_3$ имеем $\kappa(b_3) = \kappa(u_2) = \kappa_2$ и согласно (1.13)

$$\kappa_3 = \min(k_3, \kappa_2).$$

Описанный алгоритм относится, конечно, и к тому случаю, когда исходный граф Γ ациклический. В этом случае нет необходимости заранее выделять вершины с ненулевыми u_k .

3. **Линейные циклы**¹. Дополнительное исследование требуется в том случае, когда граф G_0 (п. 1) содержит циклы. При этом приходится различать линейные и нелинейные циклы.

B -вершина из G_0 называется *линейной*, если к ней приходит только одно ребро, и *нелинейной*, если входящих ребер больше одного.

Цикл называется линейным, если он проходит только через линейные B -вершины, и нелинейным — в противном случае. В этом пункте рассматриваются линейные циклы.

Пример.

$$\begin{aligned} b_1: & \quad a_1 + a_2 \xrightarrow{k_1} a_3; \\ b_2: & \quad a_3 \xrightarrow{k_2} a_2 + a_5; \\ b_3: & \quad a_2 \xrightarrow{k_3} a_4. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь граф содержит, очевидно, цикл

$$(a_2 b_1), (b_1 a_3), (a_3 b_2), (b_2 a_2). \quad (3.2)$$

Из соответствующей системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -k_1 u_1 u_2; \\ \dot{u}_2 &= -(k_1 u_1 + k_2) u_2 + k_2 u_3; \\ \dot{u}_3 &= k_1 u_1 u_2 - k_2 u_3; \\ \dot{u}_4 &= k_3 u_2; \\ \dot{u}_5 &= k_2 u_3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

и соотношений материального баланса

$$u_1 + u_3 + u_5 = \text{const}, \quad u_2 + u_3 + u_4 = \text{const} \quad (3.4)$$

легко следует существование предельных значений при $t \rightarrow \infty$. В самом деле, для u_1, u_4, u_5 это вытекает из их монотонности и ограниченности, для u_2, u_3 — из соотношений баланса (3.4). Из последних двух уравнений (3.3) следует конечность интегралов от u_2 и u_3 по области $0 < t < \infty$. Следовательно, $\overline{u_2} = \overline{u_3} = 0$, и для предельных значений имеем

$$\overline{u_1} > 0, \quad \overline{u_2} = \overline{u_3} = 0, \quad \overline{u_4} > 0, \quad \overline{u_5} > 0,$$

т. е. только u_2 и u_3 подлежат определению.

Соответствующий граф G_0 получается выбрасыванием вершин a_1, a_4, a_5 и принадлежащих им ребер:

$$\begin{aligned} b_1: & \quad a_2 \longrightarrow a_3; \\ b_2: & \quad a_3 \longrightarrow a_2; \\ b_3: & \quad a_2 \longrightarrow \end{aligned}$$

и состоит из линейного цикла (3.2) и одного ребра (a_2, b_3) .

Показатели κ_2 и κ_3 ($\kappa_1 = \kappa_4 = \kappa_5 = 0$) определяются циклической структурой этого графа. Из второго и третьего уравнений (3.3) на основании формулы (1.12) имеем

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= k_1 \overline{u_1} + k_3 - k_2 \left(\frac{\overline{u_3}}{\overline{u_2}} \right); \\ \kappa_3 &= k_2 - k_1 \overline{u_1} \left(\frac{\overline{u_2}}{\overline{u_3}} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

¹ В пп. 3 и 4 мы ограничиваемся иллюстрацией общих результатов на характерных примерах.

$\kappa_2 \geq 0, \kappa_3 \geq 0$ следует, что пределы отношений конечны и в силу кдества

$$\frac{u_2}{u_3} \cdot \frac{u_3}{u_2} = 1$$

ого положительны:

$$\left(\frac{\overline{u_3}}{u_2}\right) = c, \quad \left(\frac{\overline{u_2}}{u_3}\right) = \frac{1}{c} \quad (c > 0). \quad (3.6)$$

означает, что u_2 и u_3 имеют один и тот же порядок малости при $\times \infty$, т. е.

$$\kappa_2 = \kappa_3 = \kappa. \quad (3.7)$$

омощью (3.6), (3.7) соотношения (3.5) записываются в виде

$$\begin{pmatrix} k_1 \overline{u_1} + k_3 & -k_2 \\ -k_1 \overline{u_1} & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

уда следует, что κ является собственным значением матрицы в ле- части (3.8). Тот факт, что ему отвечает положительный собствен- и вектор $(1, c)$, однозначно определяет, какое именно собствен- ение этой матрицы является искомым показателем Ляпунова. Из рии неотрицательных матриц [14] легко следует, что таковым являет- аинейшее собственное значение κ .

Эти рассуждения легко обобщаются, и соответствующий резуль- ается справедливым для любого линейного цикла в Γ_0 . Если в си- ме уравнений (1.4) оставить только уравнения, отвечающие A -вер- ам линейного цикла, и остальные функции $u_k(t)$ заменить их пре- ьными значениями \overline{u}_k , то всегда получается линейная однородная ема уравнений с постоянными коэффициентами. Всем A -вершинам ейного цикла отвечает один и тот же показатель Ляпунова $\kappa \geq 0$, яющийся наименьшим действительным собственным значением мат- ы этой системы уравнений, взятой с обратным знаком.

4. Нелинейные циклы. Пусть теперь граф Γ_0 содержит нелинейный л. Это значит, что некоторая B -вершина в цикле содержит более ого приходящего ребра.

Пр и м е р.

$$\begin{aligned} b_1: & \quad a_1 + a_3 \xrightarrow{k_1} a_2 + a_4; \\ b_2: & \quad a_2 \xrightarrow{k_2} a_1; \\ b_3: & \quad a_3 \xrightarrow{k_3} a_4; \\ b_4: & \quad a_1 \xrightarrow{k_4} a_5. \end{aligned} \quad (4.1)$$

г граф содержит цикл

$$(a_1, b_1), (b_1, a_2), (a_2, b_2), (b_2, a_1). \quad (4.2)$$

дствование предельных значений \overline{u}_k для решения системы

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -(k_1 u_3 + k_4) u_1 + k_2 u_2; \\ \dot{u}_2 &= -k_2 u_2 + k_1 u_1 u_3; \\ \dot{u}_3 &= -(k_1 u_1 + k_3) u_3; \\ \dot{u}_4 &= k_1 u_1 u_3 + k_3 u_3; \\ \dot{u}_5 &= k_4 u_1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

ует в данном случае из равенства (3.2.2), вытекающего из суще- вания положительного решения строгих балансных неравенств 5). Такое решение в нашем случае образуют числа $(2, 3, 2, 1, 1)$.

Очевидно, далее, u_3, u_4, u_5 монотонны и $\overline{u_5} > 0, \overline{u_4} > 0, \overline{u_3} = 0$. Кроме того, из ограниченности интегралов от u_1 и u_2 (см. последнее и первое уравнения (4.3)) имеем $\overline{u_1} = \overline{u_2} = 0$. Соответствующий граф Γ_0 определяется схемой

$$\begin{aligned} b_1: & \quad a_1 + a_3 \longrightarrow a_2; \\ b_2: & \quad a_2 \longrightarrow a_1; \\ b_3: & \quad a_3 \longrightarrow; \\ b_4: & \quad a_1 \longrightarrow. \end{aligned}$$

Этот граф содержит цикл (4.2) и, кроме того, вершины a_3, b_3, b_4 вместе с ребрами $(a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_1, b_4)$. Цикл (4.2) оказывается нелинейным, так как вместе с ребром $(a_1 b_1)$ в вершину b_1 приходит ребро $(a_3 b_1)$. В вершине a_3 , не входящей в цикл, из третьего уравнения (4.3) непосредственно следует $\kappa_3 = k_3$. Из первых двух уравнений согласно (1.12) имеем:

$$\kappa_1 = k_4 - k_2 \left(\frac{\overline{u_2}}{u_1} \right), \quad (4.4)$$

$$\kappa_2 = k_2 - k_1 \left(\frac{\overline{u_3 u_1}}{u_2} \right). \quad (4.5)$$

Ввиду $\kappa_1 \geq 0, \kappa_2 \geq 0$ пределы отношений конечны. При этом либо $\left(\frac{\overline{u_2}}{u_1} \right) = 0$, либо $\left(\frac{\overline{u_3 u_1}}{u_2} \right) = 0$. В самом деле, если $\left(\frac{\overline{u_2}}{u_1} \right) > 0$, то ввиду $u_3 \rightarrow 0$ $\left(\frac{\overline{u_3 u_1}}{u_2} \right) = 0$; если $\left(\frac{\overline{u_3 u_1}}{u_2} \right) > 0$, то, очевидно, $\left(\frac{\overline{u_2}}{u_1} \right) = 0$. Это соображение является основным при анализе нелинейного цикла и в общем случае.

Происходит как бы разрыв цикла. Если, скажем, $\left(\frac{\overline{u_2}}{u_1} \right) = 0$, то κ_1, κ_2 вычисляются точно так же, как если бы в цикле (4.2) было выброшено ребро (b_2, a_1) , т. е. вдоль ациклического пути. В самом деле, из (4.4) имеем $\kappa_1 = k_4$, и из второго уравнения (4.3) по формуле (1.13) с учетом $\kappa_1 = k_4, \kappa_3 = k_3$

$$\kappa_2 = \min(k_2, k_3 + k_4).$$

Равенство $\left(\frac{\overline{u_3 u_1}}{u_2} \right) = 0$ соответствует циклу (4.2) без ребра $(b_1 a_2)$.

В этом случае из (4.5) имеем $\kappa_2 = k_2$, и из первого уравнения (4.3) на основании (1.13)

$$\kappa_1 = \min(k_4, k_2).$$

Мы не можем однозначно утверждать, какое из равенств $\left(\frac{\overline{u_2}}{u_1} \right) = 0$

$\left(\frac{\overline{u_3 u_1}}{u_2} \right) = 0$ имеет место. Поэтому для показателей Ляпунова получаем два возможных набора:

$$\kappa_1 = k_4, \quad \kappa_2 = \min(k_2, k_3 + k_4), \quad \kappa_3 = k_3, \quad \kappa_4 = \kappa_5 = 0; \quad (4.6)$$

$$\kappa_1 = \min(k_4, k_2), \quad \kappa_2 = k_2, \quad \kappa_3 = k_3, \quad \kappa_4 = \kappa_5 = 0. \quad (4.7)$$

Эти наборы совпадают в случае $k_4 \leq k_2 \leq k_3 + k_4$. При $k_2 < k_4$ или $k_2 > k_3 + k_4$ они отличаются и встает задача отбора реальных показателей, которая в данном случае легко решается. В области $k_2 < k_4$ формула (4.6) дает $\kappa_1 > \kappa_2$, и нужное для (4.6) условие $\left(\frac{\overline{u_2}}{u_1} \right) = 0$ не имеет места. Так что при $k_2 < k_4$ показатели имеют вид (4.7), т. е.

$$\kappa_1 = \kappa_2 = k_2, \quad \kappa_3 = k_3, \quad \kappa_4 = \kappa_5 = 0.$$

при $k_2 > k_3 + k_4$ из (4.7) имеем $\kappa_1 + \kappa_3 < \kappa_2$, и не выполняется нужное для (4.7) условие $\left(\frac{u_3 u_1}{u_2}\right) = 0$. В этом случае показатели вычисляются из (4.6):

$$\kappa_1 = k_4, \quad \kappa_2 = k_3 + k_4, \quad \kappa_3 = k_4, \quad \kappa_4 = \kappa_5 = 0.$$

ак видно, из двух наборов (4.6), (4.7) реализуется тот, который дает наименьшие значения.

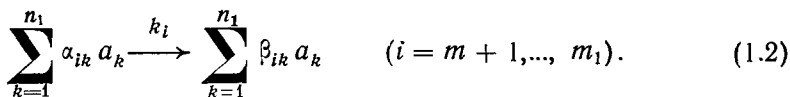
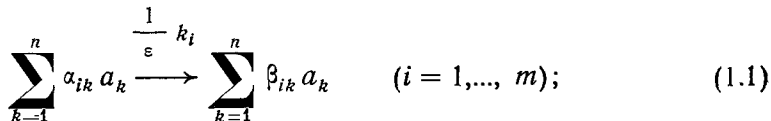
Следует сказать, что в общем случае граф Γ_0 не может содержать ничего другого, кроме ациклических путей, линейных и нелинейных циклов. Поэтому описанные здесь правила вычисления показателей япунова охватывают самый общий случай.

§ 5. О МЕТОДЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ КОНЦЕНТРАЦИЙ

1. Задача об асимптотике по большим константам. Метод квазистационарных концентраций Боденштейна—Семенова математически сводится к получению асимптотики по большим константам в уравнениях химической кинетики. Основная идея этого метода, состоящая в том, что скорость накопления активных промежуточных продуктов (атомы, радикалы и др.) мала по сравнению со скоростями их образования и гибели, нашла широкое распространение в исследованиях различных классов химических реакций в основном как способ приближенного аналитического решения системы уравнений. В последнее время появились новые аспекты приложения асимптотики по большим константам. Можно указать, например, необходимость учета такой асимптотики при построении разностных методов решения уравнений химической кинетики [44]. Далее, такая асимптотика дает обычно избыточную информацию при решении обратной задачи химической кинетики — нахождения констант скоростей по экспериментальным измерениям концентраций отдельных веществ. Можно назвать и другие изменения такой асимптотики.

В общем случае задача получения такой асимптотики является сложной. Пока она решена лишь для отдельных классов химических реакций (см. ниже). Основной вопрос при этом состоит в выделении одной медленной, ведущей стадии процесса, под которую подстраиваются все быстрые процессы. Это позволяет записать уравнения в стандартной форме уравнений с малым параметром при производных и применить ту или иную теорему об асимптотике в таких уравнениях, например теорему Тихонова (см. п. VI.5.2).

Рассмотрим один из способов сведения к уравнениям с малым параметром (см. также [46]). Мы будем в дальнейшем предполагать, что схема реакций имеет следующий вид:



Здесь ε — малое положительное число. Таким образом, предполагается, что первые m реакций имеют большие константы скорости (порядка ε^{-1}). В общем случае следует считать $n_1 \geq n$, т. е., вообще говоря, не все вещества участвуют в быстрых реакциях. Ясно, что концентрации веществ a_{n+1}, \dots, a_{n_1} должны войти в число определяющих медленную,

ведущую стадию процесса. Кроме того, ясно, что медленно меняющиеся в общей схеме реакций будут комбинации концентраций

$$v_j = \sum_{k=1}^n \lambda_{jk} u_k \quad (j = 1, \dots, n-r), \quad (1.3)$$

где наборы $(\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jn})$ определяют линейно-независимые материальные балансы системы только быстрых реакций (1.1), т. е. линейно-независимые решения системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \lambda_k = 0, \quad \gamma_{ik} = \beta_{ik} - \alpha_{ik} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (1.4)$$

(r — ранг матрицы (γ_{ik}) этой системы).

Без ограничения общности можно считать, что из системы равенств (1.3) величины u_{r+1}, \dots, u_n однозначно выражаются через $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_{n-r}$. Полагая

$$\delta_{il} = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \lambda_{jk}, \quad \sigma_{il} = \gamma_{i, n+l} \quad (i = m+1, \dots, m_1),$$

и записывая систему уравнений, отвечающих схеме (1.1), (1.2), относительно функций

$$\begin{aligned} u_k & \quad (k = 1, \dots, r); \\ v_j & = \sum_{k=1}^n \lambda_{jk} u_k \quad (j = 1, \dots, n-r); \\ z_l & = u_{n+l} \quad (l = 1, \dots, n_1-n), \end{aligned} \quad (1.5)$$

будем иметь

$$\dot{\varepsilon} u_k = \sum_{i=1}^m \gamma_{ik} \bar{w}_i + \varepsilon \sum_{i=m+1}^{m_1} \gamma_{ik} w_i \quad (k = 1, \dots, r); \quad (1.6)$$

$$\dot{v}_j = \sum_{i=m+1}^{m_1} \delta_{ij} w_i \quad (j = 1, \dots, n-r); \quad (1.7)$$

$$\dot{z}_l = \sum_{i=m+1}^{m_1} \sigma_{il} w_i \quad (l = 1, \dots, n_1-n). \quad (1.8)$$

Согласно формуле (1.1.3)

$$\bar{w}_i = k_i \prod_{k=1}^n u_k^{\alpha_{ik}} \quad (i = 1, \dots, m), \quad w_i = k_i \prod_{k=1}^{n_1} u_k^{\alpha_{ik}} \quad (i = m+1, \dots, m_1),$$

так что в переменных (1.5) функции \bar{w}_i зависят только от $u = (u_1, \dots, u_r)$ и $v = (v_1, \dots, v_{n-r})$.

Если система уравнений (1.6)–(1.8) при подходящих начальных условиях удовлетворяет условиям теоремы Тихонова (п. VI.5.2), то при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение этой системы сходится к некоторому решению вырожденной системы, состоящей из уравнений (1.7), (1.8) и алгебраического соотношения

$$\sum_{i=1}^m \gamma_{ik} \bar{w}_i = 0 \quad (k = 1, \dots, r). \quad (1.9)$$

Такое утверждение, конечно, нельзя считать удовлетворительным, так как основной вопрос, когда условия теоремы Тихонова выполнены, остается открытым. Легко понять, однако, что то или иное преобразова-

из исходной системы уравнений (относительно u_1, \dots, u_{n_1}) необходимо, чтобы можно было воспользоваться теоремой Тихонова. Если система (1.9) разрешима относительно u_1, \dots, u_r , то наличие нетривиальных комбинаций v_j вида (1.3) при $r < n$ означает, что решение системы (1.9) относительно u_1, \dots, u_n не единственно. Любое решение входит в непрерывное семейство решений и не обладает, таким образом, свойством изолированности, необходимым условием теоремы Тихонова.

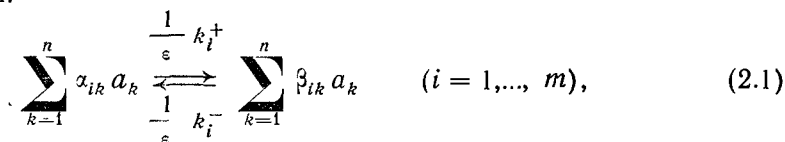
Примеры показывают, что введение переменных v_j , вообще говоря, достаточно для выполнения условий теоремы Тихонова. Если в качестве схемы (1.1) быстрых реакций взять схему примера II п. 3.1, то, как показывает разбор этого примера, введение переменных

$$v_1 = u_1 + u_4, \quad v_2 = u_2 + u_4 + u_5, \quad v_3 = u_3 + u_5$$

в общем случае не избавляет от неизолированности решения соответствующей системы (1.9) при постоянных v_1, v_2, v_3 .

Таким образом, введение медленных комбинаций v_j в общем случае не решает вопроса о медленной, ведущей стадии процесса. Тем не менее эти переменные и запись системы уравнений в форме (1.6) — (1.8) заслуживают внимания, так как в ряде важных случаев приводят цели.

2. Случай обратимых быстрых реакций. Результаты пп. 3.3–3.4 позволяют легко проверить условия теоремы Тихонова для системы (1.6) — (1.8) в том случае, когда быстрые реакции в схеме (1.1) взаимно обратимы:



для этой схемы выполнено условие А п. 3.3, т. е. разрешима система (3.5). В этом случае в уравнениях (1.6) \bar{w}_i имеют вид $\bar{w}_i = \omega_i^+ - \omega_i^-$ ($i = 1, \dots, m$), а ω_i^\pm задаются формулами (3.3.2). Схема (1.2) медленных реакций произвольна.

Рассмотрим множества

$$D_n = \{u \in R_n, u_k > 0, k = 1, \dots, n\}, \quad D_r = \{u \in R_r, u_k > 0, k = 1, \dots, r\}.$$

Обозначим через E область значений $v = (v_1, \dots, v_{n-r})$ (см. (1.3)), когда $u = (u_1, \dots, u_n)$ пробегает область D_n . Заметим, что по определению E и каждому $v \in E$ соотношения (1.3) определяют плоскость материальных балансов системы уравнений, отвечающей схеме (2.1), причем при каждом $v \in E$ эта плоскость содержит положительную точку $u \in D_n$. По теореме п. 3.3 в этой плоскости существует единственная положительная точка детального равновесия $u(v) = (u_1(v), \dots, u_n(v)) \in D_n$, удовлетворяющая системе уравнений

$$\bar{w}_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.2)$$

По теореме пункта 3.4 система (2.2) равносильна системе (1.9), и положительное решение системы (2.2), (1.3), т. е. вектор-функция

$$\bar{u}(v) = (u_1(v), \dots, u_r(v)) \in D_r$$

первых r -компонент вектора $u(v)$, является асимптотически устойчивым положением равновесия (при фиксированном $v \in E$) системы «быстрых движений»

$$\dot{u}_k = \sum_{i=1}^m \gamma_{ik} \bar{w}_i \quad (k = 1, \dots, r). \quad (2.3)$$

Уравнения (1.7), (1.8), (2.2) составляют вырожденную (укороченную) систему уравнений для системы (1.6) — (1.8), которая при начальных

условиях $v(0) = v_0 \in E$, $z_k(0) \geq 0$ ($k=1, \dots, n_1-n$) однозначно разрешима в некотором интервале $(0, T)$. При этом имеют место

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)) \in D_r, \quad v(t) \in E, \quad z_l(t) \geq 0, \\ l = 1, \dots, n_1-n \quad (t \in (0, T)).$$

Условия $u(t) \in D_r$, $v(t) \in E$ накладывают, вообще говоря, ограничение на величину $T > 0$. Что касается неравенств $z_l(t) \geq 0$, то при $u(t) \in D_r$, $v(t) \in E$ они вытекают из общей теоремы о неотрицательности решений уравнений на графах (п. 2.1). Непосредственно из теоремы Тихонова (п. VI.5.2) вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) выполнено условие А для схемы (2.1) (см. п. 3.3);
- 2) начальные данные (u_0, v_0, z_0) для системы (1.6)—(1.8), отвечающей схеме реакций (2.1), (1.2), таковы, что

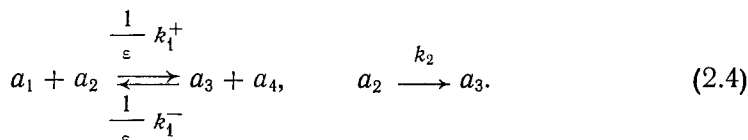
$$v_0 \in E, \quad z_{l_0} \geq 0 \quad (l = 1, \dots, n_1-n), \quad u_{k_0} \geq 0 \quad (k = 1, \dots, r),$$

причем u_0 принадлежит области влияния (притяжения) положительной точки равновесия $\bar{u}(v)$ системы (2.3) при $v = v_0$.

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ в каждой точке t из интервала разрешимости $(0, T)$ вырожденной системы (1.7), (1.8), (2.2) при $v(0) = v_0$, $z(0) = z_0$ решение $(u_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ системы (1.6)—(1.8) стремится к соответствующему решению системы (1.7), (1.8), (2.2), причем равномерно по t на любом замкнутом ограниченном множестве интервала $(0, T)$.

Теорема показывает, что в общем случае ведущая стадия процесса (уравнения (1.7), (1.8)) не определяется изменением лишь каких-то из исходных концентраций u_1, \dots, u_{n_1} без привлечения медленных комбинаций v_1, \dots, v_{n-r} .

Пример.



Скорости реакций имеют вид

$$\bar{w}_1 = k_1^+ u_1 u_2 - k_1^- u_3 u_4, \quad w_2 = k_2 u_2.$$

Относительно концентраций u_1, u_2, u_3, u_4 имеем уравнения:

$$\dot{u}_1 = -\frac{1}{\varepsilon} \bar{w}_1, \quad \dot{u}_2 = -\frac{1}{\varepsilon} \bar{w}_1 - w_2, \\ \dot{u}_3 = \frac{1}{\varepsilon} \bar{w}_1 + w_2, \quad \dot{u}_4 = \frac{1}{\varepsilon} \bar{w}_1. \quad (2.5)$$

Матрица (γ_{ik}) в схеме быстрых реакций состоит из одной строки: $(-1 \ -1 \ 1 \ 1)$, и фундаментальная система решений балансных уравнений (1.4) может быть взята следующей:

$$(1 \ 0 \ 1 \ 0), \quad (0 \ 1 \ 1 \ 0), \quad (1 \ 0 \ 0 \ 1). \quad (2.6)$$

В соответствии с этим

$$v_1 = u_1 + u_3, \quad v_2 = u_2 + u_3, \quad v_3 = u_1 + u_4,$$

а система уравнений (1.6)—(1.8) принимает вид

$$\varepsilon \dot{u}_1 = -\bar{w}_1, \quad \dot{v}_1 = +w_2, \quad \dot{v}_2 = \dot{v}_3 = 0.$$

Здесь определяющей стадией оказывается изменение комбинации $v_1 = u_1 + u_3$. Если для простоты предположить $k_1^+ = k_1^-$, то решение вырожденной системы ($\varepsilon = 0$) даст для исходных переменных:

$$u_1 = v_3 \varphi, \quad u_2 = v_2(1 - \varphi), \quad u_3 = v_3 \varphi, \quad u_4 = v_3(1 - \varphi),$$

$$v_2 = \text{const}, \quad v_3 = \text{const}, \quad \varphi = \frac{v_1}{v_2 + v_3} = 1 + (\varphi(0) - 1) \exp\left(-\frac{k_2 v_2}{v_2 + v_3} t\right).$$

Особенностью данного примера является то, что первая скобка (2.6), определяющая материальный баланс системы быстрых реакций, не определяет баланса всей системы.

В том случае, когда любой материальный баланс системы быстрых реакций, т. е. любое решение $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ системы (1.4), продолжается до баланса всей системы, т. е. до решения $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n_1})$ системы

$$\sum_{k=1}^{n_1} \gamma_{ik} \lambda_k = 0 \quad (i = 1, \dots, m_1), \quad (2.8)$$

в системах (1.6) — (1.8) и (1.7) — (1.8) существует $n-r$ независимых первых интегралов вида

$$v_k + \sum_{l=1}^{n_1-n} \lambda_{k, n+l} z_l = \text{const} \quad (k = 1, \dots, n-r),$$

которые позволяют исключить переменные v и записать вырожденную систему уравнений в исходных переменных u :

$$\bar{\omega}_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m);$$

$$\sum_{l=1}^n \lambda_{jl} u_l = \sum_{l=1}^n \lambda_{jl} u_l(0) \quad (j = 1, \dots, n-r);$$

$$\dot{u}_k = \sum_{i=m+1}^{m_1} \gamma_{ik} \omega_i \quad (k = n+1, \dots, n_1).$$

Здесь $(\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{jn})$ — независимые решения системы (2.8) ($j=1, \dots, n-r$).

В общем случае, как и в примере (2.4), предельные значения исходных концентраций u_1, \dots, u_{n_1} при $\varepsilon \rightarrow 0, t > 0$ однозначно определяются решением вырожденной системы (1.7), (1.8), (2.2) и соотношениями (1.3). При этом начальные условия для u_1, \dots, u_{n_1} должны быть такими, чтобы выполнялось условие 2) теоремы 1 (они не обязательно строго положительны). В примере (2.4) ($n=4$)

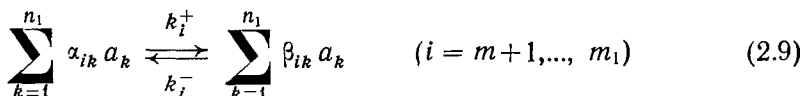
$$E = \{v; v_1 > 0, v_2 > 0, v_3 > 0, v_2 + v_3 > v_1\},$$

а начальные условия могут быть взяты из области

$$D^* = \{u; u_1 > 0, u_2 > 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0\}.$$

В связи с теоремой 1 возникает вопрос, когда исследуемая асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место на любом конечном интервале времени, т. е. когда вырожденная система (1.7), (1.8), (2.2) вместе с системой (1.6) — (1.8) разрешима на любом конечном интервале и $v(t) \in E$. Укажем одно достаточное условие, когда это имеет место.

Пусть система медленных реакций (1.2) также состоит из обратимых реакций



и вся система реакций (2.1), (2.9) удовлетворяет условию А (п. 3.3). Пусть $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n_1})$ — соответствующая положительная точка детального равновесия (\bar{u} не зависит от ε). Пусть, как и в п. 3.4,

$$F(u, \bar{u}) = \sum_{k=1}^{n_1} u_k (\ln u_k - \ln \bar{u}_k - 1),$$

а $F_0(\bar{u})$ — минимальное значение этой функции на границе ее области определения: $u_k > 0$ ($k=1, \dots, n_1$).

Теорема 2. Если начальное значение $u^0 = (u_1^0, \dots, u_{n_1}^0)$ принадлежит области

$$D_u^- = \{u; F(u, \bar{u}) < F_0(\bar{u})\}$$

при некотором \bar{u} , то при начальных условиях

$$v_k(0) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ki} u_i^0 \quad (k=1, \dots, n-r), \quad z_k(0) = u_{n+k}^0 \quad (k=1, \dots, n_1-n)$$

решение вырожденной системы (1.7), (1.8), (2.2), отвечающей схеме (2.1), (2.9), определено и ограничено при всех $t > 0$.

Доказательство. Пусть $u_\varepsilon(t)$ — решение полной системы, отвечающей схеме (2.1), (2.9), с начальным условием $u_\varepsilon(0) = u^0 \in D_u^-$.

В силу леммы п. 3.4 функция $F(u, \bar{u})$ убывает вдоль решения $u(t)$ и, следовательно, равномерно по ε и $t \geq 0$

$$u_\varepsilon(t) \in D_u^-.$$

По теореме 1 во всей области существования и положительности решения $u(t)$ системы (1.7), (1.8), (2.2), (1.3) имеет место $u(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t)$

и, следовательно,

$$F(u(t), \bar{u}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(u_\varepsilon(t), \bar{u}) \leq F(u^0, \bar{u}) < F_0(\bar{u}).$$

Таким образом, для $u(t)$ имеем априорную оценку

$$u(t) \in D_u^- \quad (t > 0),$$

откуда следует, очевидно, $v(t) \in E$, а также существование и ограниченность решения вырожденной системы во всей области $t > 0$. Теорема доказана.

На основании теоремы 1 можно утверждать, что для системы (2.1), (2.9) при выполнении условия теоремы 2 исследуемая асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место на любом конечном интервале $(0, T)$.

3. Некоторые замечания. Некоторые результаты относительно предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно получить и в том случае, когда схема (1.1) быстрых реакций задает ациклический граф. Из теоремы п. 3.2 следует, что система уравнений (1.9) и в этом случае равносильна системе уравнений

$$\dot{\bar{w}}_i = 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (3.1)$$

и что любое решение системы «быстрых движений»

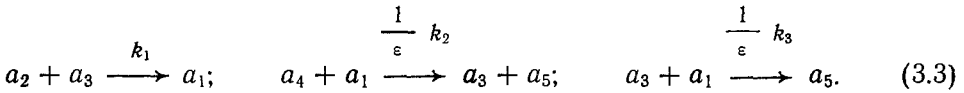
$$\dot{u}_k = \sum_{i=1}^m \gamma_{ik} \bar{w}_i \quad (k=1, \dots, r), \quad (3.2)$$

в которой комбинации v_1, \dots, v_{n-r} играют роль параметров, выходит при $t \rightarrow \infty$ на решение системы (3.1). Однако в отличие от предыдущего пункта возникают следующие особенности:

1. Система уравнений (3.1), (1.3) (при заданных v_j) имеет в общем случае неединственное решение и даже может иметь семейство решений, непрерывно зависящее от параметров. В этом случае применявшийся нами способ преобразования исходной системы уравнений с помощью введения медленных комбинаций (1.3) не позволяет утверждать существования предела при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Решение вырожденной системы (1.7), (1.8), (3.1) обязательно содержит компоненты u_p , тождественно равные нулю (см. (3.1)). Таким образом, даже в том случае, когда имеет место сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению вырожденной системы, мы не получаем еще асимптотики решения в смысле, скажем, главного ненулевого члена в разложении решения по степеням ε . Получение такой асимптотики требует дополнительных построений.

По-видимому, причиной неединственности решения системы (3.1), (1.3) является то, что вследствие малости некоторых концентраций не все реакции с большими константами являются быстрыми, и причисление их к разряду быстрых является чисто формальным. Можно, конечно, попытаться избежать такой неединственности путем введения дополнительных нелинейных медленных комбинаций (нелинейных первых интегралов системы реакций с большими константами) и строить асимптотику с помощью соответствующих разложений по малому параметру. Однако более перспективным представляется такой путь, когда непосредственно по схеме реакций, по ее графу, распознаются малые концентрации, порядок их малости относительно ε и эти концентрации подходящим образом нормируются. Проиллюстрируем это на простом примере:



Формальное введение медленных комбинаций вида (1.3) в данном случае как раз и создает трудности, связанные с неединственностью решения соответствующей системы (3.1), (1.3). Однако задача об асимптотике в этом случае просто решается без привлечения комбинаций (1.3). Здесь вещество a_1 образуется в результате медленной реакции и расходуется по двум «быстрым» реакциям. Естественно ожидать, что соответствующая концентрация u_1 мала. Легко показать, что u_1 порядка ε . Полагая $u_1 = \varepsilon v_1$ и записывая систему уравнений относительно v_1, u_2, u_3, u_4, u_5 , имеем:

$$\dot{\varepsilon} v_1 = k_1 u_2 u_3 - v_1 (k_2 u_4 + k_3 u_3); \quad (3.4)$$

$$\dot{u}_2 = -k_1 u_2 u_3;$$

$$\dot{u}_3 = -k_1 u_2 u_3 - k_3 v_1 u_3 + k_2 v_1 u_4; \quad (3.5)$$

$$\dot{u}_4 = -k_2 v_1 u_4;$$

$$\dot{u}_5 = k_2 v_1 u_4 + k_3 v_1 u_3.$$

К системе уравнений (3.4), (3.5) непосредственно применима теорема Тихонова, согласно которой решение близко к решению вырожденной системы, определяемой четырьмя уравнениями (3.5) и соотношением

$$v_1 = \frac{1}{\varepsilon} u_1 = \frac{k_1 u_2 u_3}{k_3 u_3 + k_2 u_4}. \quad (3.6)$$

Предполагается, конечно, что начальные значения u_2, u_3, u_4 положительны.

В этом примере, как и во многих других, нахождение малых концентраций, определение порядка их малости относительно ε и подходящая нормировка прямо приводят к нужной асимптотике, дающей главный ненулевой член разложения решения по степеням ε .

По-видимому, и в общем случае такая процедура является необходимым предварительным этапом построения асимптотики. Преобразование уравнений с помощью медленных линейных комбинаций также может оказаться необходимым, но уже следующим этапом.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Агранович В С, Вишик М. И Эллиптические задачи с параметрами и параболические задачи общего вида Успехи матем наук, 1964, 19, вып. 3.
- 2 Аносов Д В О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Матем. сб., 1960, 50, № 3.
- 3 Баренблатт Г. И, Зельдович Я. Б. Промежуточные асимптотики в математической физике Успехи матем наук, 1971, 26, вып. 2.
- 4 Барзыкин В. В, Гонтковская В. Т, Мержанов А. Г., Худяев С. И. К нестационарной теории теплового взрыва. Ж прикл. механ. и техн. физики, 1964, № 3.
- 5 Барзыкин В. В, Мержанов А. Г. Краевая задача в теории теплового взрыва. Докл АН СССР, 1958, 120, № 6.
- 6 Барзыкин В. В, Худяев С. И. К вопросу о критических условиях зажигания при наличии теплопотерь Докл АН СССР, 1966, 169, № 6.
- 7 Бостапджиян С. А, Мержанов А. Г., Худяев С. И. О гидродинамическом тепловом взрыве. Докл АН СССР, 1965, 163, № 1.
- 8 Бостапджиян С. А, Мержанов А. Г., Худяев С. И. Некоторые задачи о неизотермическом стационарном течении вязкой жидкости. Ж прикл. механ. и техн. физики, 1965, № 5.
- 9 Ваганов Д. А., Худяев С. И. Об одной стационарной задаче теории горения Физ. гор. и взрыва, 1969, № 2.
- 10 Васильев В. М., Вольперт А. И., Худяев С. И. О методе квазистационарных концентраций для уравнений химической кинетики. Ж. выч. матем. и матем. физики, 1973, 13, № 3.
- 11 Вишик М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. Матем. сб., 1951, 29.
- 12 Вольперт А. И. Пространства BV и квазилинейные уравнения. Матем. сб., 1967, 73, № 2.
- 13 Вольперт А. И. Дифференциальные уравнения на графах. Матем. сб., 1972, 88, № 4.
- 14 Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., Гостехиздат, 1954.
- 15 Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1959, 14, вып. 2.
- 16 Гришин А. М. Исправления к работе «Некоторые задачи теории воспламенения» Ж. прикл. механ. и техн. физ., 1963, № 2.
- 17 Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962.
- 18 Зельдович Я. Б. Доказательство единственности решения уравнений закона действующих масс. Ж. физ. химии, 1938, 11, вып. 5.
- 19 Зельдович Я. Б. Теория зажигания накаливаемой поверхностью. Ж. эксперим. и теор. физики, 1939, 9, № 12.
- 20 Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. Ж. физ. химии, 1948, 22, вып. 1.
- 21 Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа Успехи матем. наук, 1962, 17, вып. 3.
- 22 Канель Я. И. О стабилизации решений задачи Коши для уравнений, встречающихся в теории горения Матем. сб., 1962, 59 (дополн.).
- 23 Колебательные процессы в биологических и химических системах. Ред. Г. М. Франк М., «Наука», 1967.
- 24 Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме Бюл. МГУ, 1937, 1, вып. 6.
- 25 Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа М., «Наука», 1972.
- 26 Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II М., Физматгиз, 1963.
- 27 Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций М., «Наука», 1966.

28. Кронрод А. С. О функциях двух переменных. Успехи матем. наук, 1950, 5, вып. 1.
29. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1 М., Гостехиздат, 1951.
30. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.
31. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.
32. Мерджанов А. Г., Аверсон А. Э. Современное состояние тепловой теории зажигания. Comb Flame, 1971, 16, No 1.
33. Мерджанов А. Г., Дубовицкий Ф. И. Квазистационарный тепловой режим протекания взрывных реакций. Докл. АН СССР, 1958, 120, № 5.
34. Мерджанов А. Г., Дубовицкий Ф. И. Квазистационарная теория теплового взрыва самоускоряющихся реакций. Ж. физ. химии, 1960, 34, вып. 10.
35. Мерджанов А. Г., Дубовицкий Ф. И. Современное состояние теории теплового взрыва. Успехи химии, 1966, 35, вып. 4.
36. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, Наукова думка, 1971.
37. Олейник О. А., Кружков С. Н. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными. Успехи матем. наук, 1961, 6, вып. 5.
38. Оре О. Теория графов. М., «Наука», 1968.
39. Павлов Б. В. О верхнем пределе самовоспламенения в цепной неразветвленной реакции. Докл. АН СССР, 1965, 162, № 4.
40. Поляк Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М., Физматгиз, 1962.
41. Понтрягин Л. С. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при высших производных. Труды III Всесоюзн матем. съезда, 3 М., 1958, стр 570—577.
42. Понтрягин Л. С., Родыгин Л. В. Приближенное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. Докл. АН СССР, 1960, 131, № 2.
43. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1970.
44. Применение вычислительной математики в химической и физической кинетике. Под ред. Л. С. Поляка. М., «Наука», 1969.
45. Сакс С. Теория интеграла. М., ИЛ, 1949.
46. Саясов Ю. С., Васильева А. Б. Обоснование и условия применимости метода квазистационарных концентраций Семенова — Бодештейпа. Ж. физ. химии, 1955, 29, № 5.
47. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
48. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
49. Солонников В. А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1965, 83.
50. Столин А. М., Худяев С. И. Неизотермическая неустойчивость течения вязкоупругих сред. Докл. АН СССР, 1972, 207, № 1.
51. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сборник, 1952, 31, № 3.
52. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М., ИЛ, 1962.
53. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
54. Худяев С. И. Первая краевая задача для нелинейных параболических уравнений. Докл. АН СССР, 1963, 149, № 3.
55. Худяев С. И. Критерий разрешимости задачи Дирихле для эллиптических уравнений. Докл. АН СССР, 1963, 148, № 1.
56. Худяев С. И. О краевых задачах для некоторых квазилинейных эллиптических уравнений. Докл. АН СССР, 1964, 154, № 4.
57. Худяев С. И. Временные характеристики теплового взрыва самоускоряющихся реакций. Научно-техн. пробл. горения и взрыва, 1965, № 1.
58. Худяев С. И. О краевых задачах для уравнения теплопроводности с источниками, зависящими от температуры. В сб.: «Тепломассоперенос», т. VI. Минск, «Наука и техника», 1966.
59. Худяев С. И. Некоторые оценки собственных значений сферически-симметричных задач. В сб.: «Численные методы решения задач математической физики». М., Наука, 1966.
60. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная. М., «Наука», 1967.
61. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М., «Наука», 1964.

- 62 Эмануэль Н. М., Кнорре Д. Г. Курс химической кинетики М, «Высшая школа», 1969
63. Boddington T, Gray P, Harvey D I Thermal theory of spontaneous ignition. Criticality in bodies of arbitrary shape. Philos. trans Roy Soc, London, 1971, 270, No 1207.
64. Enig I. W. Critical parameters in the Poisson — Boltzmann equation of the steady — state thermal explosion theory Comb. Flame, 1966, 10, No 2
65. Federer H. The Gauss — Green theorem. Trans Amer. Soc, 1945, 58.
66. Federer H. An analytic characterization of distributions whose partial derivatives are representable by measures Bull. Amer Math Soc, 1954, 60.
67. Federer H A note on the Gauss — Green theorem. Proc. Amer. Math Soc, 1958, 9, No 1
68. Fleming W. H., Rishel R. An integral formula for total gradient variation. Arch. Math, 1960, 11, No 3.
- 69 De Giorgi. Nuovi teoremi relativi alle misure (r-1)-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni Ricerche di matem., 1955, 4
70. De Giorgi. Su una teoria generale della misure (r-1)-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. Ann. mat. pura ed appl, 1954, 36
71. Krickeberg K. Distributionen, Funktionen beschränkter Variation und Lebesguescher Inhalt nichtparametrischer Flächen Ann. mat. pura ed appl., 1957, 44.
- 72 Parks I. R Criticality criteria for various configurations of a self — heating chemical as function of activation energy and temperature of assembly. J. Chem. Phys., 1954, 22, No 1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Раздел первый.	
ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ МЕРЫ	5
глава I. Линейные пространства	5
§ 1. Множества	5
1. Основные определения	5
2. Действия над множествами	5
3. Ограниченные множества	7
4. Функции	7
§ 2. Линейные пространства	8
1. Двумерное векторное пространство как пример линейного пространства	8
2. Определение линейного пространства	8
3. Примеры линейных пространств	9
4. Действия над векторами	9
5. Линейная комбинация векторов	10
6. Линейная зависимость и независимость векторов	11
7. Размерность пространства	11
8. Подпространства	12
9. Линейная оболочка	12
10. Линейно-независимые последовательности	13
§ 3. Евклидовы пространства	13
1. Определение евклидова пространства	13
2. Свойства скалярного произведения	13
3. Норма вектора	14
4. Неравенство Коши—Буняковского	14
5. Неравенство треугольника	15
§ 4. Нормированные пространства	16
1. Определение нормированного пространства	16
2. Свойства нормы	16
3. Сходимость	17
4. Сходимость в пространстве R^n	17
5. Открытые и замкнутые множества	18
6. Подпространства нормированного пространства	19
7. Сепарабельные пространства	19
8. Полные пространства	20
9. Полнота пространства R^n	21
10. Пространство (M) ограниченных функций	22
11. Пространство (C) ограниченных непрерывных функций	24
12. Понятие о компактности	25
§ 5. Ортонормированный базис евклидова пространства	25
1. Ортонормированная система векторов	25
2. Ортогонализация последовательности векторов	26
3. Ортонормированный базис конечномерного пространства	27
4. Проекция вектора на подпространство	27
5. Ряды Фурье	29
6. Ортонормированный базис сепарабельного пространства	30
7. Разложение по ортогональным системам	30
8. Ортогональные дополнения	32
§ 6. Комплексные линейные пространства	33
1. Определение комплексного линейного пространства	33
2. Комплексные евклидовы и нормированные пространства	33

Приложение к главе I. Матрицы и определители	34
§ 7. <i>Матрицы</i>	34
1. Матрицы	34
2. Действия над матрицами	34
3. Обратимые матрицы	36
4. Транспонирование матриц	36
§ 8. <i>Определители</i>	37
1. Конструктивное определение	37
2. Аксиоматическое определение	37
3. Свойства определителя	39
4. Обратные матрицы	40
§ 9. <i>Ранг матрицы</i>	41
1. Ранг матрицы	41
2. Линейная зависимость строк и столбцов	41
3. Базис конечномерного пространства	42
Глава II. Мера и интеграл	43
§ 1. <i>Мера</i>	43
1. Аддитивные функции множеств	43
2. Мера	44
3. Полная вариация меры	46
4. Пространство мер	48
5. Абсолютная непрерывность	50
6. Регулярные меры	50
7. Мера Лебега	52
8. Мера Хаусдорфа	53
§ 2. <i>Измеримые функции</i>	54
1. Сходимость последовательностей функций	54
2. Простые измеримые функции	54
3. Измеримые функции	55
§ 3. <i>Интеграл</i>	56
1. Интегрирование простых измеримых функций	56
2. Суммируемые функции. Интеграл	60
3. Основные свойства интеграла	61
4. Предельный переход под знаком интеграла	63
5. Критерий суммируемости функций	64
6. Интеграл Лебега	64
7. Произведение мер. Теорема Фубини	65
§ 4. <i>Пространство L^p</i>	66
1. Функции, суммируемые в степени p	66
2. Пространство L^p	68
3. Критерий компактности	68
Глава III. Операторы и функционалы	69
§ 1. <i>Линейные операторы</i>	69
1. Линейные операторы	69
2. Примеры линейных операторов	69
3. Ограниченные операторы	70
4. Примеры ограниченных операторов	71
5. Пример неограниченного оператора	71
6. Непрерывность линейных операторов	71
7. Действия над операторами	72
§ 2. <i>Линейные функционалы</i>	74
1. Линейные функционалы	74
2. Примеры линейных функционалов	74
3. Сопряженное пространство	75
4. Линейные функционалы в гильбертовом пространстве	76
5. Линейные функционалы в пространстве непрерывных функций	77
§ 3. <i>Сопряженные операторы</i>	78
1. Сопряженный оператор	78
2. Примеры сопряженных операторов	79
3. Свойства сопряженных операторов	80
4. Самосопряженные операторы	81
5. Квадратичные формы	81

§ 4. Конечномерные и вполне непрерывные операторы	82
1 Конечномерные операторы	82
2 Вполне непрерывные операторы	83
§ 5. Собственные значения и собственные векторы	84
1. Операторы в конечномерных пространствах	84
2. Самосопряженные операторы	85
3. Самосопряженные вполне непрерывные операторы	85
4. Самосопряженные операторы в конечномерных пространствах, матрицы и квадратичные формы	88
§ 6. Метод последовательных приближений	89
1. Неподвижные точки	90
2. Метод последовательных приближений	90
3. Операторы сжатия	90
4. Линейные уравнения	92
Раздел второй.	
АНАЛИЗ В ПРОСТРАНСТВАХ BV	93
Глава IV. Дифференцирование	94
§ 1. Обобщенные производные	94
1. Понятие обобщенной производной	95
2. Обобщенная производная как функционал	96
§ 2. Множества с конечным периметром	97
1. Множества с конечным периметром	97
2. Множества ограниченной вариации	98
3. Алгебра множеств с конечным периметром	100
4. Периметр множества	101
§ 3. Пространство BV	102
1. Пространство BV	102
2. Функции ограниченной вариации	102
3. Интегральное условие	104
4. Полная вариация градиента	104
§ 4. Аппроксимативный предел функции	104
1. Точки плотности	104
2. Аппроксимативный предел	105
3. Основные теоремы о пределах	105
4. Регулярные точки	107
§ 5. Структура функций, принадлежащих пространству BV	109
1. Существенная граница	109
2. Нормаль	110
3. Существование нормали	111
4. Простые функции	112
5. Структура функций, принадлежащих пространству BV	114
6. Среднее значение	117
§ 6. Формулы дифференцирования	119
1. Введение	119
2. Усредненная суперпозиция	120
3. Дифференцирование суперпозиции	121
4. Дифференцирование произведения	122
Глава V. Интегральные формулы	124
§ 1. Формула Грина	124
1. Градиент характеристической функции множества	124
2. След функции на границе	125
3. Дифференцирование произведения функции на характеристическую функцию множества	126
4. Формула Грина	128
5. Множества класса G	129
6. Полный скачок	130
7. Интегрирование по частям	132
8. Формулы векторного анализа	132
§ 2. Функции комплексной переменной	133
1. Пространство BV	133
2. Формула Грина	134

3. Аналитические функции Теорема Коши	135
4. Разрывные аналитические функции	136
5. Полный скачок	137
6. Выражение аналитической функции через скачок	138
§ 3. Пространство BV^2	139
1. Пространство W^1_2	139
2. Пространство BV^2	139
3. Оценка нормы	140
4. Полнота	141
5. Вложение в пространство L^2	142
6. Полная непрерывность оператора вложения	143
7. Регулярные точки границы	145
§ 4. Законы сохранения	147
1. Дифференциальная форма законов сохранения	147
2. Условия на разрывах	150
 Раздел третий.	
УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	152
Глава VI. Обыкновенные дифференциальные уравнения	154
§ 1. Основная теорема	154
1. Задача Коши	154
2. Основная теорема	155
3. Скалярное уравнение	157
4. Априорная оценка и нелокальная разрешимость	158
§ 2. Линейные уравнения	159
1. Структура решений	159
2. Системы с постоянными коэффициентами	162
3. Скалярное уравнение высшего порядка	163
§ 3. Теория устойчивости	165
1. Основные понятия	165
2. Метод функций Ляпунова	167
3. Некоторые примеры функции Ляпунова	169
4. Метод линеаризации	170
§ 4. Положение равновесия системы двух уравнений. Понятие о предельном цикле	172
1. Классификация особых точек	172
2. Некоторые замечания	176
3. Понятие о предельном цикле	176
§ 5. Уравнения с малым параметром при производных	178
1. Общий подход	178
2. Теорема Тихонова	179
3. Теорема Поптрягина-Родыгина	181
 Глава VII. Линейные эллиптические уравнения	 183
§ 1. Эллиптические уравнения и граничные задачи	183
1. Эллиптические уравнения	183
2. Граничные задачи	186
3. Формулы Грина	187
4. Сопряженная задача	187
§ 2. Исследование граничной задачи	189
1. Понятие об обобщенной постановке граничной задачи	189
2. Задача A	190
3. Сильная эллиптичность	191
4. Пространство, порожденное задачей A	193
5. Младшие члены	194
6. О разрешимости и единственности решения граничных задач	195
7. Теоремы Фредгольма	197
8. Положительно-определенные функционалы	200
§ 3. Собственные функции	201
1. Собственные значения и собственные функции	202
2. Связь с собственными функциями вполне непрерывного симметричного оператора	203
3. Экстремальные свойства собственных значений	205

4	Разложение по собственным функциям	208
5	Тригонометрические ряды Фурье	209
6	Критерий положительной определенности функционалов	211
§ 4.	<i>Фундаментальное решение</i>	212
1.	Оператор Лапласа на сферически-симметричных функциях	212
2.	Фундаментальное решение	213
3.	Интегральные формулы	214
4.	Решение уравнения Пуассона	218
5.	Объемные потенциалы	220
6.	О гладкости обобщенных решений	221
7.	Теорема о среднем значении	222
§ 5.	<i>Функция Грина</i>	222
1.	Функция Грина	223
2.	Симметричность	224
3.	Решение задачи A	225
§ 6.	<i>Положительность решений</i>	227
1.	Об одном свойстве билинейных функционалов в пространстве BV^2	227
2.	Дифференциальные неравенства	229
3.	Строгая положительность решений	232
4.	Принцип максимума	234
5.	Свойства первой собственной функции	235
6.	Ограниченность решений	236
Приложение к главе VII Разрешимость линейных уравнений		238
§ 7.	<i>Теоремы Фредгольма</i>	238
1.	Уравнения в евклидовых пространствах	238
2.	Линейные алгебраические системы	239
3.	Конечномерные операторы	240
4.	Теоремы Фредгольма	240
§ 8.	<i>Уравнения с вполне непрерывным оператором</i>	243
1.	Операторы, близкие к конечномерным	243
2.	Вполне непрерывные операторы	244
Глава VIII. Параболические уравнения		245
§ 1.	<i>Граничные задачи для линейных уравнений</i>	245
1.	Постановка граничных (краевых) задач	245
2.	Основные пространства функций Обобщенное решение	247
3.	Интегральная оценка Единственность	250
4.	Положительность решений	251
§ 2.	<i>Разрешимость граничной задачи</i>	253
1.	Метод Фурье	253
2.	Неоднородное уравнение	256
§ 3.	<i>Граничная задача для квазилинейного уравнения</i>	258
1.	Обобщенное решение Принцип монотонности	258
2.	Теорема о разрешимости	262
§ 4.	<i>Задача Коши</i>	265
1.	Обобщенное решение Единственность	265
2.	Уравнение теплопроводности	267
3.	Неоднородное уравнение теплопроводности	270
4.	Квазилинейное уравнение	272
Глава IX. Квазилинейные эллиптические уравнения		274
§ 1.	<i>Разрешимость граничной задачи</i>	274
1.	Обобщенное решение	274
2.	Установление решения параболического уравнения	275
3.	Верхняя и нижняя функции	276
4.	Теорема о разрешимости	277
§ 2.	<i>Эллиптические уравнения с параметром</i>	278
1.	Понятие критического значения Некоторые свойства	278
2.	Существование критического значения. Оценка сверху	280
3.	Асимптотическая формула для λ_{kp}	282
§ 3.	<i>Теория устойчивости</i>	283
1.	Постановка вопроса	283
2.	Критерии устойчивости	283

3. Некоторые следствия критериев устойчивости	286
4. Задача с параметром	288
5. Случай $\lambda = \lambda_{кр}$ Единственность	289
6. Случай $\lambda = \lambda_{кр}$ Разрешимость	290
§ 4 <i>Осреднение уравнений</i>	292
1. Метод осреднения	292
2. Анализ осредненного уравнения	295

Раздел четвертый.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ХИМИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 299

Глава X. Математические задачи макрокинетики 301

§ 1. <i>Простейшая модель неизотермического протекания химической реакции</i>	301
1. Основные уравнения	301
2. Тепловое самовоспламенение	302
3. Зажигание	304
4. Распространение пламени	305
§ 2. <i>Математическая теория теплового взрыва</i>	307
1. Анализ уравнения (1 2 4)	307
2. Метод осреднения	309
3. Условие воспламенения в случае ограниченного источника	311
§ 3. <i>Вычисление критических условий</i>	313
1. Зависимость от σ	313
2. Случай первой краевой задачи	315
3. Расчет предвзрывного разогрева	317
§ 4. <i>Стационарная задача теории зажигания</i>	318
1. Модель Зельдовича	318
2. Зажигание с торца полубесконечного цилиндра	319
3. Анализ осредненного уравнения	320
4. Приближенная формула для $\delta_{кр}$	321
§ 5. <i>Сферически-симметричная стационарная задача с распределенными источниками</i>	322
1. Оценки критического значения	322
2. Следствия об асимптотике	323
3. Замена переменных	326

Глава XI Качественные методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений 327

§ 1. <i>Стационарная задача о распространении пламени</i>	327
1. Некоторые априорные свойства	327
2. Разрешимость и вопросы единственности	328
3. Приближенное вычисление скорости распространения ω	331
§ 2. <i>Сферически-симметричная задача о тепловом взрыве</i>	333
1. Введение параметра $s = -\theta'(1)$	333
2. Случай $n=0$	334
3. Исследование особых точек	335
4. Некоторые выводы	337
§ 3. <i>Квазистационарная теория теплового взрыва</i>	339
1. Постановка задачи	339
2. Теория Мержанова — Дубовицкого	340
3. Метод равномерного выгорания	342
§ 4. <i>Неизотермическое течение вязкоупругой жидкости при однородном деформировании</i>	344
1. Постановка задачи	344
2. Сдвиговое течение	346
3. Растяжение	348

Глава XII. Уравнения химической кинетики 351

§ 1. <i>Дифференциальные уравнения на графах</i>	351
1. Уравнения химической кинетики Графы реакций	351
2. Дифференциальные уравнения на графах	352

§ 2	Свойства решений уравнений на графах	354
1	Положительность	354
2	Индексация вершин графа	355
3	Строгая положительность	356
4	Поведение в пуле	357
5	Априорные оценки Нелокальная разрешимость	358
6	Балансные неравенства в случае ациклического графа	359
§ 3	Поведение решений при больших временах	361
1	Примеры	361
2	Случай ациклического графа	364
3	Обратимые реакции Детальное равновесие	366
4	Обратимые реакции Выход на стационарный режим	369
§ 4	О показателях Ляпунова	372
1	Постановка вопроса	372
2	Случай ациклического графа G_0	373
3	Линейные циклы	375
4	Нелинейные циклы	376
§ 5	О методе квазистационарных концентраций	378
1	Задача об асимптотике по большим константам	378
2	Случай обратимых быстрых реакций	380
3	Некоторые замечания	383
ИТЕРАТУРА		385