

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Е. В. ВОРОЖЦОВ

Н. Н. ЯНЕНКО

МЕТОДЫ
ЛОКАЛИЗАЦИИ
ОСОБЕННОСТЕЙ
ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ
ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМИКИ

Ответственный редактор
канд. физ.-мат. наук *B. A. Новиков*



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1985

УДК 518 : 517.944 : 533.6.01

34+2²

В

Ворожцов Е. В., Яненко Н. Н. | Методы локализации особенностей при численном решении задач газодинамики.— Новосибирск: Наука, 1985.

В монографии изложены способы локализации особенностей типа ударных волн, контактных границ и т. п. на основе сквозного счета задач динамики невязкого сжимаемого газа. Приведены результаты исследований точности известных и новых, предложенных авторами, алгоритмов локализации особенностей. Применены методы дифференциального приближения, вариационного исчисления и численной оптимизации.

Книга предназначена для специалистов по прикладной математике и механике сплошных сред.

Рецензенты Ю. А. Березин, А. Ф. Воеводин

СО АН СССР
Институт теоретической
и прикладной механики
имени С. П. КапицЫ

Евгений Васильевич Ворожцов

Николай Николаевич Яненко

32083

МЕТОДЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ОСОБЕННОСТЕЙ
ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ
ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМИКИ

Утверждено к печати Институтом теоретической
и прикладной механики СО АН СССР

Редактор издательства Л. П. Бондарева. Художественный редактор Т. Ф. Каминина.
Художник А. И. Смирнов. Технический редактор А. В. Сурганова. Корректоры
Г. И. Шведкина, К. И. Сергеева.

ИБ № 23906

Сдано в набор 14.12.84. Подписано к печати 05.10.85. МН-02630. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 14. Усл. кр.-отт. 14 Уч.-изд. л. 15,4. Тираж 1450 экз. Заказ № 513. Цена 2 р 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.

4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

В 1703040000—900 117—85—IV
042(02)—85

© Издательство «Наука», 1985 г.

Для математического моделирования течений жидкости широко используется концепция жидкости или газа как сплошной среды. Возникающие при этом уравнения обычно являются нелинейными в частных производных. Следует подчеркнуть, что нелинейность — типичное свойство данных уравнений, даже когда не учитываются такие свойства газа, как вязкость, теплопроводность, фазовые переходы. В основу одной из наиболее известных и сравнительно простых математических моделей для описания течения жидкости — системы уравнений Эйлера — положены законы сохранения массы, импульса и энергии.

Более полная математическая модель, учитываящая эффекты вязкости и теплопроводности, известна как система уравнений Навье — Стокса [76]. Сложный, нелинейный характер обеих систем существенно затрудняет их аналитическое решение в подавляющем большинстве практических приложений. Поэтому уравнения механики жидкостей решаются в основном численными методами, среди которых широко распространены конечно-разностные схемы сквозного счета, или однородные. Увеличение быстродействия и объема памяти электронно-вычислительных машин обусловило значительное снижение доли эффективно используемой информации в общем объеме числовых данных, обрабатываемых на ЭВМ в процессе решения задач механики жидкостей с помощью указанных схем. Извлечение полезной информации из всего ее объема, выдаваемого компьютером, усложняется при росте числа независимых переменных решения.

Эффективное использование числовых данных, получаемых при помощи однородных разностных схем, затрудняется также «размазыванием» имеющихся в газодинамическом течении разрывов. В результате в численном решении поверхность разрыва заменяется некоторой переходной зоной, имеющей конечные размеры. Вследствие этого получаемые численные решения имеют низкую точность в окрестности разрывов. Одна из главных целей обработки числовых данных при расчете течений газа с разрывами — определение положения (локализация) сильных разрывов (ударных волн, контактных разрывов, линий скольжения и т. п.) в расчетной области, по-

скольку именно их поведение обычно представляет наибольший интерес для исследователей. Поэтому возникает необходимость создания и обоснования специализированных алгоритмов обработки числовых результатов решения задач газовой динамики, предназначенных для локализации поверхностей разрыва в течении и их классификации по типу (ударные волны, контактные поверхности и т. п.).

Проблема разработки методов локализации особенностей на основе конечно-разностных решений тесно связана с повышением точности численных решений в окрестности разрывов. Локализация сильных разрывов существенно облегчается, если использовать в расчетах конечно-разностный метод, позволяющий свести ширину зоны «размазывания» разрыва до одного интервала сетки. В этом случае для локализации разрывов можно применять уже известные простейшие процедуры, например по наибольшему сближению изолий (допустим, изохор) или по максимальным градиентам любой из иско-мых функций, терпящих разрыв.

На структуру алгоритмов локализации разрывов будет влиять также дальнейшее повышение эффективности ЭВМ. Например, значительное увеличение объема оперативной памяти ЭВМ, использование параллельных процессоров позволяют применять значительно более мелкие сетки. Тогда точность определения местонахождения разрыва внутри зоны «размазывания» разрыва не будет столь важна, как в случае грубых сеток, и можно будет с успехом пользоваться простейшими процедурами для численной локализации разрывов. С другой стороны, с увеличением числа расчетных точек ручная обработка результатов (и даже их простой просмотр) становится затруднительной. Существенную помощь в интерпретации расчетов могут оказать исследователю машинные методы обработки. Они также значительно облегчают получение с помощью ЭВМ картины эволюции во времени различных особенностей, когда она представляет первостепенную важность. Если достигаемая при использовании разностной схемы точность решения в окрестности разрывов недостаточна, информацию о положении особенностей можно включить непосредственно в вычислительный алгоритм и добиться повышения точности расчета.

Кроме того, локализация разрывов, в частности вновь возникающих в процессе расчета, дает возможность активно управлять этим процессом включая, например, изменение некоторых граничных условий, переход к другой конструкции разностной сетки или иной разностной схеме и т. п.

В монографии анализируется широкий спектр алгоритмов локализации сильных разрывов на основе результатов «сквозного» счета, начиная с наиболее простых, определяющих положение точки максимального градиента одной из компонент решения, и кончая сравнительно сложными, в которых используется векторно-матричное представление аппроксимационной вязкости разностной схемы. Сущность изложенного в книге общего подхода к разработке и исследованию методов локализации разрывов на основе сквозного счета со-

стоит в максимальном использовании информации о структуре конечно-разностного решения в зоне «размазывания» сильного разрыва при построении алгоритмов локализации истинного разрыва в пределах зоны его численного «размазывания».

Результаты исследования точности методов локализации особенностей иллюстрируются численными расчетами модельных задач, имеющих точные решения. Кроме того, демонстрируются примеры тех сложных задач механики жидкостей, при анализе которых использованы разработанные алгоритмы локализации. Это задачи высокоскоростного взаимодействия, сверхзвуковые течения в кольцевых соплах и струях, взаимодействие струй с преградами и др.

Предлагаемая монография представляет собой первое систематическое изложение результатов анализа точности методов локализации особенностей на основе сквозного счета задач газодинамики. Ряд новых данных, полученных авторами, излагается впервые.

Глава 1

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

§ 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Дивергентная и недивергентная формы

Система дифференциальных уравнений, описывающая плоское одномерное течение невязкого сжимаемого нетеплопроводного газа, которое зависит от времени t и одной декартовой координаты x , имеет дивергентный вид [76], [118]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial(\varepsilon + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u(\varepsilon + u^2/2) + pu]}{\partial x} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь ρ — плотность, p — давление, ε — внутренняя энергия единицы массы газа, u — скорость в направлении оси x . В систему (1.1) — (1.3) входят четыре искомые функции ρ , u , p , ε , поэтому для ее замыкания необходимо еще одно уравнение. Как известно, среди термодинамических величин, описывающих состояние газа, только две независимы, остальные можно выразить через две выбранные независимые функции с помощью уравнения состояния. Пусть уравнения состояния заданы в виде

$$p = G(V, S), \quad T = T(V, S), \quad (1.4)$$

где V — удельный объем, $V = 1/\rho$, S — энтропия, T — температура газа. Тогда с помощью термодинамического тождества $d\varepsilon + pdV = TdS$ можно вычислить удельную внутреннюю энергию ε как функцию переменных V, S . Зная зависимости величин p и ε от V, S , определим давление p как функцию ρ, ε :

$$p = F(\rho, \varepsilon). \quad (1.5)$$

Таким образом, в случае, когда уравнение состояния может быть задано в виде (1.5), система уравнений (1.1) — (1.3) замыкается без привлечения энтропии S . В дальнейшем будем предполагать наличие зависимости (1.5) либо

$$\varepsilon = f(p, \rho). \quad (1.6)$$

Разумеется, функции f и F таковы, что имеет место тождество

$$p \equiv F(\rho, f(p, \rho)). \quad (1.7)$$

Одним из простейших является уравнение состояния идеального газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (1.8)$$

где величина γ — показатель адиабаты, обычно $\gamma = \text{const} > 1$.

В дальнейшем будем часто использовать векторную форму записи системы уравнений (1.1) — (1.3). Введем в рассмотрение векторы-столбцы

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \vec{\Phi}(u) = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ pu + \rho u E \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

где

$$E = \varepsilon + u^2/2, \quad (1.10)$$

т. е. E — полная энергия единицы массы газа. Тогда систему (1.1) — (1.3) можно записать следующим образом:

$$\partial\vec{u}/\partial t + \partial\vec{\Phi}(\vec{u})/\partial x = 0. \quad (1.11)$$

Система (1.11) есть дивергентная форма уравнений Эйлера. Нам понадобится также недивергентная форма системы (1.1) — (1.3). Положим

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix},$$

где

$$u_1 = \rho, \quad u_2 = \rho u, \quad u_3 = \rho E;$$

$$\varphi_1 = \rho u = u_2, \quad \varphi_2 = p + \rho u^2 = F(u_1, (u_3/u_1) - 0,5(u_2/u_1)^2) + u_2^2/u_1; \quad (1.12)$$

$$\varphi_3 = F(u_1, u_3/u_1 - 0,5(u_2/u_1)^2)(u_2/u_1) + u_3 u_2/u_1,$$

$F(\rho, \varepsilon)$ — функция, входящая в уравнение состояния (1.5). Тогда элементы a_{lm} матрицы Якоби

$$A = \partial\vec{\Phi}/\partial\vec{u} \quad (1.13)$$

определяются по формулам $a_{lm} = \partial\varphi_l/\partial u_m$. Если для замыкания системы (1.1) — (1.3) используется уравнение состояния (1.5), элементы a_{lm} имеют следующие выражения (см., например, [154]):

$$a_{11} = 0; \quad a_{12} = 1; \quad a_{13} = 0;$$

$$a_{21} = \theta + rz - u^2; \quad a_{22} = u(2 - z); \quad a_{23} = z; \quad (1.14)$$

$$a_{31} = -u(E + m - \theta - rz); \quad a_{32} = E + m - u^2z; \quad a_{33} = uz_1.$$

В формулах (1.14) $r = u^2 - E$, $z = (1/\rho)\partial p/\partial\varepsilon$, $z_i = 1 + z$, $\theta = \partial p/\partial\rho$, $m = p/\rho$. С использованием матрицы A (1.13) недивергентная форма системы (1.11), очевидно, записывается как

$$\partial\vec{u}/\partial t + A(\vec{u})\partial\vec{u}/\partial x = 0. \quad (1.15)$$

Как известно, собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы A имеют вид

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c, \quad (1.16)$$

где c — адиабатическая скорость звука. В случае уравнения состояния (1.5) квадрат скорости звука вычисляется по формуле

$$c^2 = (p/\rho^2) \partial F / \partial e + \partial F / \partial \rho.$$

Таким образом, если функция $F(\rho, e)$ в уравнении состояния (1.5) удовлетворяет неравенству

$$(p/\rho^2) \partial F / \partial e + \partial F / \partial \rho > 0, \quad (1.17)$$

то (1.15) — система гиперболического типа. В дальнейшем предполагается, что используемые уравнения состояния удовлетворяют неравенству (1.17). Матрица A , элементы которой определяются по формулам (1.14), обладает также свойством [118]

$$(A - uI)^{2k+1} = c^{2k}(A - uI), \quad (1.18)$$

$$(A - uI)^{2k+2} = c^{2k}(A - uI)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где I — единичная матрица, c — скорость звука.

1.2. Условия на разрывах

Пусть Ω — любая подобласть с границей Γ в плоскости (x, t) , лежащая в области определения решения системы (1.11). Интегральные законы сохранения для этой системы имеют вид

$$\oint_{\Gamma} \vec{u} dx - \vec{\phi}(\vec{u}) dt = 0. \quad (1.19)$$

В отличие от (1.1)–(1.3), соотношения (1.19) сохраняют смысл также для разрывных решений. Выведем условия, которые должны выполняться на линиях разрыва решений уравнений газовой динамики как следствия интегральных законов сохранения. Пусть $x = x_s(t)$ — уравнение одной из линий разрыва гидродинамических величин и функция $f(x, t)$ терпит разрыв на линии $x = x_s(t)$. Обозначим

$$f_1(t) = f(x_s(t) - 0, t); \quad f_2(t) = f(x_s(t) + 0, t); \quad (1.20)$$

$$[f] = f_2(t) - f_1(t).$$

Пусть разрыв распространяется со скоростью $dx_s/dt = D$. В плоскости (x, t) рассмотрим замкнутый контур, две линии которого бесконечно близко примыкают к некоторому участку линии разрыва $x_s(t)$. Из законов сохранения, выписанных для этого контура, следует, что вдоль линии разрыва

$$\int ([\vec{u}]D - [\vec{\phi}(\vec{u})]) dt = 0$$

интегралы берутся вдоль любого участка разрыва. Из-за произвольности области интегрирования в каждой точке разрыва выполнены

соотношения

$$[\vec{u}]D = [\vec{\phi}(\vec{u})], \quad (1.21)$$

связывающие скачки гидродинамических величин на линии разрыва $x = x_s(t)$ и ее скорость $D = \dot{x}_s(t)$. В случае системы уравнений Эйлера (1.1)–(1.3) равенства (1.21) можно записать с учетом формул (1.9), (1.10) в виде трех алгебраических соотношений

$$D[\rho] = [\rho u]; \quad (1.22)$$

$$D[\rho u] = [p + \rho u^2]; \quad (1.23)$$

$$D[\rho(\varepsilon + u^2/2)] = [\rho u(\varepsilon + p/\rho + u^2/2)]. \quad (1.24)$$

Соотношения (1.22)–(1.24) называют условиями Гюгонио. Учитывая обозначения (1.20), можно переписать условия Гюгонио (1.22)–(1.24) в форме равенств

$$\rho_2(u_2 - D) = \rho_1(u_1 - D) = m; \quad (1.25)$$

$$p_2 + \rho_2(u_2 - D)^2 = p_1 + \rho_1(u_1 - D)^2; \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(u_2 - D)(\varepsilon_2 + p_2/\rho_2 + (u_2 - D)^2/2) &= \rho_1(u_1 - D)(\varepsilon_1 + \\ &+ p_1/\rho_1 + (u_1 - D)^2/2). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Если в равенстве (1.25) $m(t) = 0$, то такой вид разрыва будем называть контактным; если $m(t) \neq 0$ — ударной волной. В случае контактного разрыва из равенства (1.25) следует: $D = u_1 = u_2 = x_s'(t)$, т. е. линия разрыва совпадает с траекторией частицы. Полагая $u_1 = D$, $u_2 = D$, получим из (1.26), что $p_1 = p_2$. Условие (1.27) при $u_1 = u_2 = D$ выполняется тождественно. Итак, на контактном разрыве в одномерном течении газа давление и скорость течения непрерывны. Контактный разрыв, в частности, может быть границей раздела двух разных газов, удовлетворяющих различным уравнениям состояния.

В случае ударной волны, т. е. когда $m \neq 0$, из (1.25)–(1.27) как алгебраическое следствие получается уравнение адиабаты Гюгонио [118]

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = (1/2)(p_2 + p_1)(V_1 - V_2), \quad (1.28)$$

где V — удельный объем, $V = 1/\rho$. Для устойчивых ударных волн имеет место теорема Цемплена [118], согласно которой скорость ударной волны является дозвуковой по отношению к газу за фронтом и сверхзвуковой относительно газа перед ним.

Пусть нижний индекс «1» в (1.20) относится к состоянию газа за фронтом ударной волны, а индекс «2» — перед фронтом. Тогда теорема Цемплена записывается в виде неравенств

$$|u_2 - D| > c_2; \quad |u_1 - D| < c_1. \quad (1.29)$$

1.3. Задача о распаде разрыва

Произвольным разрывом называют начальное состояние двух бесконечных масс газа, характеризуемых постоянными параметрами $u_1, p_1, V_1, \varepsilon_1, T_1$; $u_2, p_2, V_2, \varepsilon_2, T_2$ и имеющих общую грани-

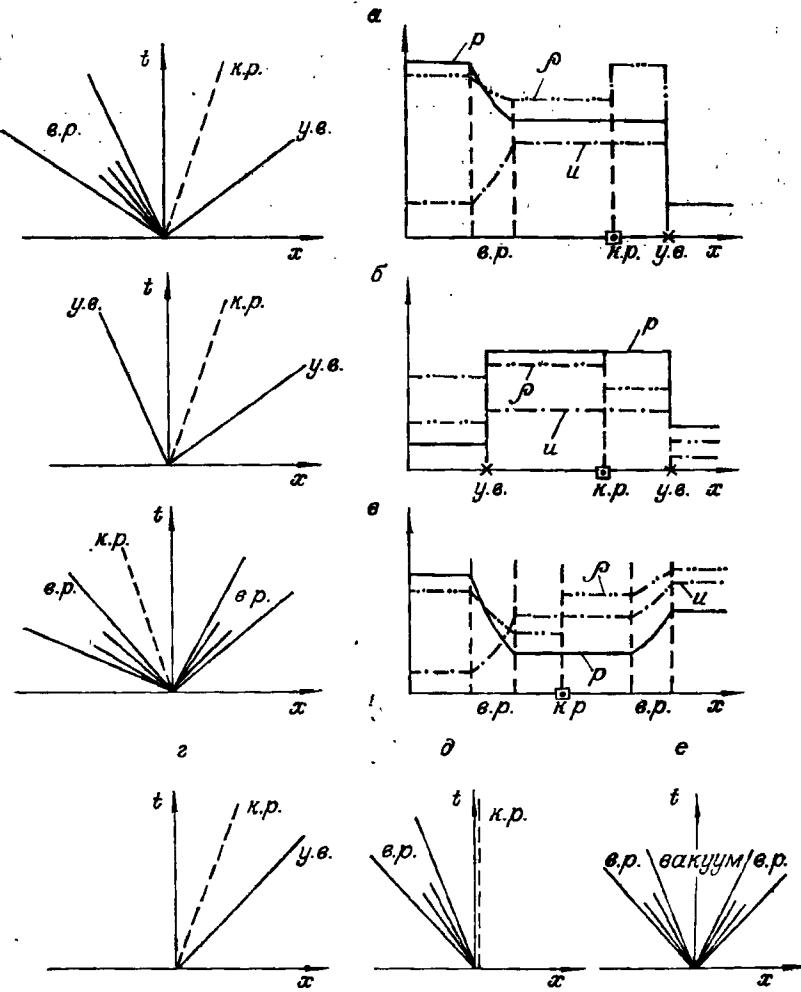


Рис. 1. Конфигурация течения при распаде разрыва (в. р.— волна разрежения, к. р.— контактный разрыв, у. в.— ударная волна).

ци в начальный момент $t = 0$ вдоль плоскости $x = 0$. Величины слева и справа от разрыва произвольны и подчиняются лишь уравнениям состояния газов, которые могут быть различными для граничащих газов.

Определение течения, возникающего при $t > 0$ в этих начальных условиях, называют задачей о распаде произвольного разрыва. Если произвольный разрыв не контактный и не ударная волна, то он распадается, образуя определенную конфигурацию устойчивых разрывов и непрерывных газодинамических течений. В [118], [104] рассмотрены все возможные конфигурации течения, возникающего при распаде разрыва в газе. При этом конфигурация А содержит волну разрежения, распространяющуюся по газу «1», контактный разрыв и ударную волну, распространяющуюся по газу «2» (рис. 1, а). Кон-

Фигурация B содержит ударные волны, движущиеся влево и вправо от точки $x = 0$, и контактный разрыв (рис. 1, б). В конфигурации B присутствуют две волны разрежения и контактный разрыв (рис. 1, в). В [118] выведены критические значения параметров, отделяющие одну конфигурацию от другой. Им соответствуют некоторые конфигурации течения, которые можно назвать промежуточными между основными конфигурациями A , B , B . Промежуточной между A и B является конфигурация, состоящая из одной ударной волны и контактного разрыва (рис. 1, г). Промежуточной между B и B служит конфигурация, включающая неподвижную контактную границу (рис. 1, д) и волну разрежения. В частном случае конфигурации B газы «1» и «2» могут отрываться друг от друга, тогда волны разрежения будут разделены областью вакуума, в которой $\rho = p = c = 0$ (рис. 1, е).

§ 2. ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

2.1. Два подхода к построению схем для расчета разрывных решений

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \vec{\partial u / \partial t} + \vec{\partial \Phi(u) / \partial x} &= 0, \\ \vec{u}(x, 0) &= \vec{u}_0(x), \quad 0 \leq t \leq \bar{t}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Этой задаче поставим в соответствие разностную задачу Коши

$$\begin{aligned} (1/\tau)(T_0 - I)\vec{u}^n &= \Lambda(T_1, \vec{u}^n, \vec{u}^{n+1}); \\ \vec{u}^0(x) &= \vec{u}_0(x), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где Λ — векторно-матричный разностный оператор, T_0 , T_1 — операторы сдвига,

$$\begin{aligned} T_1 &\equiv T_{+1}; \quad T_0 \equiv T_{+0}; \quad T_{+1}f(x, t) = f(x + h, t); \\ T_{+0}f(x, t) &= f(x, t + \tau); \\ T_1^m f(x, t) &= f(x + mh, t); \\ T_0^m f(x, t) &= f(x, t + m\tau), \quad m \in R, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где h — шаг равномерной сетки на оси x ; I — тождественный оператор,

$$I\vec{u}^n = \vec{u}^n, \quad \vec{u}^n(x) = \vec{u}(x, \tau n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

τ — временной шаг. Систему уравнений (2.2), связывающую функции \vec{u}^{n+1} , \vec{u}^n на двух слоях по времени $t^{n+1} = (n+1)\tau$ и $t^n = n\tau$, называют обычно двухслойной разностной схемой [118].

Введем разностный оператор Ω по формуле

$$\vec{\Omega} \vec{u}^n = [(1/\tau) (\vec{T}_0 - \vec{I}) \vec{u}^n - \Lambda(\vec{T}_1, \vec{u}^n, \vec{T}_0 \vec{u}^n)] = 0.$$

Будем говорить, что разностная схема (2.2) аппроксимирует систему (1.11), если на некотором классе функций $\vec{u}(x, t)$ (это могут быть сплайн-функции достаточно высокой гладкости) выполняется условие

$$\|\vec{\Omega} \vec{u} - \vec{\partial u}/\partial t - \vec{\partial \Phi(u)}/\partial x\| \rightarrow 0 \quad (\tau, h \rightarrow 0),$$

где двойные прямые скобки обозначают некоторую подходящим образом выбранную норму. Если для любого n и при $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ выполняется условие $\|\vec{u}^n - \vec{u}(x, t^n)\| \rightarrow 0$, то говорят, что решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной. В случае аппроксимации по разностной схеме, к примеру вида (2.2), системы нелинейных уравнений (1.11), (1.9) доказать сходимость схемы возможно, но затруднительно.

В [193] дан обзор результатов по сходимости некоторого класса аппроксимаций задачи Коши $du/dt = Au, u|_{t=0} = u_0$, где A — некоторый линейный или нелинейный оператор. Пусть K_t — оператор продвижения решения на один временной шаг t , соответствующий разностной аппроксимации уравнения $du/dt = Au$. Если $t = t/n$, и сделано n шагов, то предполагается, что оператор $K_{t/n}^n = K_{t/n} \circ \dots \circ K_{t/n}$ аппроксимирует эволюционный оператор уравнения $du/dt = Au$. Обозначим теперь через F_t эволюционный оператор уравнения, т. е. $F_t(u_0)$ — решение с начальным значением u_0 . Тогда сходимость алгоритма запишем (см. [193]) в виде

$$F_t = \lim_{n \rightarrow \infty} K_{t/n}^n.$$

Теория сходимости, изложенная в [193], существенно обобщает известную теорему эквивалентности Лакса [116], доказанную для линейных систем. Теория Лакса давала условия, обеспечивающие сходимость вычислительного алгоритма. Одно из них (устойчивость) детально исследовано в [116] для случая, когда двухслойная разностная схема (2.2) имеет вид $\vec{B}_1 \vec{u}^{n+1} = \vec{B}_0 \vec{u}^n$, где B_1, B_0 — линейные операторы. Рассмотрение устойчивости в [116] основывалось на использовании преобразований Фурье операторов B_1 и B_0 , входящих в систему разностных уравнений $\vec{B}_1 \vec{u}^{n+1} - \vec{B}_0 \vec{u}^n = 0$. Исследование устойчивости пелинейных разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений Эйлера (1.9), (1.11), сопряжено с большими трудностями. Анализ устойчивости линеаризованных разностных уравнений (описание соответствующей методики можно найти, например, в [116]) может приводить к неверным заключениям относительно устойчивости схемы.

Известны примеры, показывающие, что схема, неустойчивая в соответствии с линейным анализом, нелинейно устойчива. Например,

схемы методов частиц в ячейках Харлоу [150, 160], «жидкость в ячейке» [210] и «крупных частиц» [12] неустойчивы в линейном приближении при расчете течений, в которых скорость жидкости и мала. Однако при счете по таким схемам бесконечного возрастания амплитуды колебаний разностного решения с ростом t нет, но имеет место некоторый автоколебательный режим разностного решения в подобластях с малой скоростью жидкости. Это явление впервые изучено в [197]. В [83] приведены примеры расчетов по разностным схемам, аппроксимирующими нелинейное уравнение со знакопеременным коэффициентом вязкости. С точки зрения линейного анализа схемы также неустойчивы, но нелинейно они устойчивы.

Разностные схемы, формулы которых однотипны, единообразны в точках сетки независимо от наличия и характера особенностей решения в окрестности точки сетки, получили название однородных. Простота реализации таких схем обусловила их широкое распространение при расчетах течений газа с разрывами. Однородность схемы предъявляет дополнительные требования к вычислительному алгоритму, так как он теперь должен хотя бы в принципе «одинаково хорошо» описывать как гладкие, так и разрывные течения.

Существуют два общих подхода к построению однородных разностных схем для расчета разрывных решений. Первый основан на том, что интегральные законы сохранения (1.19) должны выполняться для любой выделенной части газа или пространства. Законы сохранения (1.19) должны быть дополнены требованием неубывания энтропии любой фиксированной массы газа, чтобы исключить появление неустойчивых разрывов. После этого разностную схему строят с помощью непосредственной аппроксимации интегральных законов сохранения. Хорошая разностная аппроксимация законов сохранения должна вносить «положительную» вязкость, в противном случае вносимые ею погрешности могут дестабилизировать численное решение. Примерами устойчивых разностных схем, аппроксимирующих интегральные законы сохранения без явного введения в них псевдовязкости, являются схемы Лакса [234], Лакса — Вендрофа [235] и С. К. Годунова [34].

Характерная черта прямой аппроксимации интегральных законов сохранения — так называемое свойство консервативности или дивергентности получающихся при этом разностных схем. Оно состоит в том, что уравнения разностной схемы можно интерпретировать как запись интегральных законов сохранения (1.19) для ячейки сетки, образованной пересечением прямых $t = n\tau$, $t = (n+1)\tau$ с прямыми $x = ih$, $x = (i+1)h$ при некоторой аппроксимации (или интерполяции) величин, входящих в законы сохранения на границах ячейки. Вид аппроксимации на данной границе ячейки при записи законов сохранения одинаков в соседних ячейках. Это обеспечивает свойство аддитивности консервативной разностной схемы, которое состоит в том, что суммирование разностных уравнений по соседним ячейкам дает новое уравнение, которое также можно рассматривать как запись законов сохранения для внешней границы области, составленной из объединения ячеек. Таким образом, раз-

ностные уравнения обладают теми же свойствами, что и криволинейные интегралы (1.19).

Если консервативная разностная схема сходится, т. е. семейство разностных решений имеет предел при $\tau, h(\tau) \rightarrow 0$ (в некоторой слабой норме), то предел удовлетворяет именно нужным законам сохранения (1.19), а не каким-либо другим [118]. Данное свойство консервативных схем схоже с таковым системы дифференциальных уравнений параболического типа

$$\frac{\partial \vec{u}_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(\vec{u}_\mu)}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(B(\vec{u}_\mu, x, t) \frac{\partial \vec{u}_\mu}{\partial x} \right), \quad (2.4)$$

в которую «вязкость» [правая часть (2.4)] входит дивергентным образом как производная от выражения $B \vec{u}_\mu / \partial x$, где B — довольно произвольная матрица.

Для системы (2.4) также имеем подобное свойство. Если при $\mu \rightarrow 0$ решение $\vec{u}_\mu(x, t)$ имеет предел $\vec{u}(x, t)$ в подходящем смысле, то он удовлетворяет законам сохранения (1.19), т. е. является обобщенным решением системы уравнений (1.11) [118]. Таким образом, устойчивые аппроксимации интегральных законов сохранения имеют сходство с методом «исчезающей вязкости» построения разрывных решений систем квазилинейных уравнений.

Перейдем ко второму, наиболее распространенному, подходу — построению однородных разностных схем, основанному на введении искусственной вязкости или «псевдовязкости». Введение в уравнения газовой динамики псевдовязкости позволяет приблизенно описать ударные волны как плавный ударный переход [255]. Первый метод введения псевдовязкости, предложенный Неймаром и Рихтмайером, состоял в том, что искусственную вязкость q вводили аддитивно в давление [255]. В более поздних исследованиях другими авторами предложены более сложные псевдовязкости, имеющие векторно-матричный вид и вводимые во все уравнения системы (1.1)–(1.3). Обзор ряда таких исследований дан в книге [120].

2.2. Две формы дифференциальных приближений

Поведение разностного решения в окрестности сильных разрывов существенно зависит от вида вводимой псевдовязкости, но не определяется ею полностью. На «размазывание» разрывов влияет также схемная вязкость, которая неявно присутствует из-за наличия погрешностей аппроксимации интегральных законов сохранения. Таким образом, для детального исследования поведения разностных решений необходим одновременный учет как аппроксимационной, так и искусственной вязкости в конечно-разностной схеме. Для этой цели широко применяют метод дифференциального приближения [118, 154]. Введем понятие первого дифференциального приближения разностной схемы. Используем операторные представления

[118, 154]

$$\begin{aligned} T_0 &= e^{\tau D_0} = e^{\frac{\tau}{\partial t}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tau^l}{l!} D_0^l; \\ T_1 &= e^{h D_1} = e^{\frac{h}{\partial x}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{h^l}{l!} D_1^l. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляя формулы (2.5) в схему (2.2) вместо T_0 , T_1 , получим систему уравнений в частных производных бесконечного порядка

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tau^{l-1}}{l!} \frac{\partial^l \vec{u}}{\partial t^l} = \Lambda(e^{h D_1}, \vec{u}, e^{\tau D_0} \vec{u}). \quad (2.6)$$

Предположим, что разностная схема (2.2) аппроксимирует исходную систему $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{L}\vec{u}$ с порядком $O(\tau^{\gamma_1}) + O(h^{\gamma_2})$. Тогда, отбрасывая в уравнении (2.6) члены порядка $O(\tau^\alpha)$, $O(h^\beta)$, где $\alpha = \gamma_1 + 1, \gamma_1 + 2, \dots, \beta = \gamma_2 + 1, \gamma_2 + 2, \dots$, получим

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \dots + \frac{\tau^{\gamma_1}}{(\gamma_1 + 1)!} \frac{\partial^{\gamma_1 + 1} \vec{u}}{\partial t^{\gamma_1 + 1}} = \vec{L}\vec{u} + L_1(D)(\vec{u}), \quad (2.7)$$

где $L_1(D)$ — дифференциальный оператор, коэффициенты которого имеют порядки $O(\tau, \tau^2, \dots, \tau^{\gamma_1}, h, h^2, \dots, h^{\gamma_2})$. Уравнение (2.7) будем называть Г-формой первого дифференциального приближения (п. д. п.) разностной схемы (2.2). Заменим в (2.7) производные $\frac{\partial^l u}{\partial t^l}$ ($l \geq 2$) производными по x , используя Г-форму п. д. п. Например, чтобы получить такое выражение для $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, продифференцируем обе части п. д. п. (2.7) по t . В итоге получим П-форму п. д. п. разностной схемы (2.2)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{L}\vec{u} + \tilde{L}_1(D)(\vec{u}),$$

где $\tilde{L}_1(D)$ — дифференциальный оператор, содержащий только операторы дифференцирования по x $\frac{\partial^k}{\partial x^k}$, $k = 0, 1, \dots, 1 + \max(\gamma_1, \gamma_2)$.

При мер. Рассмотрим явную разностную схему с односторонними разностями

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\tau} + a \frac{u^n(x) - u^n(x-h)}{h} = 0, \quad (2.8)$$

аппроксимирующую уравнение с постоянным коэффициентом $a > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.9)$$

Г-форма п. д. п. разностной схемы (2.8) легко вычисляется с помощью разложений (2.5):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = (ah/2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (\tau/2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.10)$$

Чтобы найти из (2.10) П-форму п. д. п., выразим производную u_{tt} через производные по x . Дифференцируя обе части (2.10) по x ,

имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{ah}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}. \quad (2.11)$$

Выразим в (2.11) смешанную производную u_{xt} через производные по x . Для этого продифференцируем обе части равенства (2.10) по x :

$$\partial^2 u / \partial t \partial x = -a \partial^2 u / \partial x^2 + O(\tau) + O(h). \quad (2.12)$$

Используя формулу (2.12), перепишем равенство (2.11) в виде

$$\partial^2 u / \partial t^2 = a^2 \partial^2 u / \partial x^2 + O(\tau) + O(h). \quad (2.13)$$

Подставляя правую часть (2.13) вместо u_{tt} в (2.10), получим П-форму п. д. п. схемы (2.8)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a}{2} (h - a\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.14)$$

§ 3. О ПРИМЕНИМОСТИ РЕШЕНИЙ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ УРАВНЕНИЙ П. Д. П.

Как показано в § 1, в одномерном течении невязкого сжимаемого газа могут присутствовать сильные разрывы двух видов: ударные волны и контактные разрывы. Скорость распространения D разрыва является в общем случае функцией времени. В случае, когда разрыв движется с постоянной скоростью, величина D , очевидно, не зависит от t , т. е. $D = \text{const}$. Как известно, среди решений системы (1.1)–(1.3), (1.5) имеются решения, содержащие либо стационарную ударную волну, либо стационарный контактный разрыв [118], а в задаче о распаде разрыва могут присутствовать одновременно оба вида разрывов, движущихся с постоянными скоростями.

Положение сильного разрыва внутри зоны его «размазывания» при использовании однородных разностных схем зависит от структуры разностного решения в данной зоне, а структура — от аппроксимационной и искусственной вязкости, присутствующей в разностной схеме [118, 120, 154]. Поэтому конструкция алгоритмов локализации разрывов в пределах зон их размазывания, вообще говоря, должна учитывать свойства аппроксимационной и искусственной вязкостей схемы. Математическое исследование структуры ударных переходов в жидкости, обладающей физической вязкостью и теплопроводностью, обычно осуществляется на примере стационарной ударной волны [118]. При этом полагают, что все искомые функции в уравнениях течения газа зависят от одной переменной

$$\xi = x - Dt, \quad (3.1)$$

где D — скорость стационарной ударной волны. Решения, зависящие от переменной ξ (3.1), обычно называют решениями типа бе-

гущей волны. Их использование позволяет свести анализ структуры ударного перехода к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В монографии использован тот же подход при изучении свойств размазывания ударных волн в результате воздействия аппроксимационной или искусственной вязкости разностной схемы. При этом в качестве математической модели, описывающей структуру разностного решения в размазанной ударной волне, применена система уравнений первого дифференциального приближения разностной схемы. Разумеется, возникает вопрос о степени близости решений типа бегущей волны уравнений п. д. п. к сеточным решениям, полученным по конечно-разностной схеме. Возможны три пути исследования этого вопроса. Первый — получение явного аналитического решения уравнений п. д. п. Для многих известных скалярных искусственных вязкостей, вводимых аддитивно в давление, такой путь реален, что впервые продемонстрировано в работе [255]. В более сложных случаях, когда вязкость схемы имеет матрично-векторную форму, решить уравнения п. д. п. в явном виде не удается из-за их существенной нелинейности. При этом возможны два пути исследования. Первый из них — получение в некоторой норме, скажем в норме пространства L_2 , оценок для разности $\vec{w} - \vec{w}_h$, где \vec{w} — решение уравнений п. д. п., \vec{w}_h — разностных уравнений. По-видимому, первые оценки подобного рода приведены в первом издании книги [118] в 1968 г. Они, а также оценки, содержащиеся в [218, 221], относились к скалярному линейному уравнению (2.9). Но уже для случая конечно-разностной аппроксимации скалярного нелинейного уравнения

$$\partial u / \partial t + \partial(u^2/2) / \partial x = 0 \quad (3.2)$$

подобные оценки в литературе отсутствуют. В этом случае для исследования близости решений уравнений п. д. п. и разностных уравнений применяется способ прямого сопоставления численных решений, получаемых при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений п. д. п. с сеточными, найденными из конечно-разностных, аппроксимирующих исходную систему уравнений в частных производных. Для случая конечно-разностной аппроксимации нелинейного уравнения (3.2) такое прямое сопоставление впервые осуществлено, по-видимому, в [240]. Заметим, что в [240] в качестве разностной схемы была взята схема Лакса [234] и затем интегрировалась численно П-форма п. д. п. этой схемы. В [63] конечно-разностное решение, полученное по схеме «уголок» при аппроксимации нелинейного неоднородного уравнения $\partial u / \partial t + \partial \varphi(u) / \partial x = \psi(u)$, сравнивалось с численным решением уравнений п. д. п., записанных как система обыкновенных дифференциальных уравнений для двух функций, зависящих только от переменной (3.1). Эти два уравнения интегрировали по А-устойчивому методу из пакета GEAR. В результате найдено, что относительное отклонение решения уравнения п. д. п. от разностного не превышает 4%.

Косвенные данные о применимости решений типа бегущей волны уравнений п. д. п. для описания свойств разностного решения в зоне размазывания сильного разрыва дает также качественный анализ обыкновенных дифференциальных уравнений п. д. п. Он позволяет выявить, монотонный или немонотонный характер имеет численное решение в окрестности разрывов. Как правило, результаты такого анализа п. д. п. согласуются с расчетами по конечно-разностным схемам различных порядков точности. В цикле работ [54–58] этот анализ выполнен для п. д. п. уравнений (2.9) и (3.2), в [100, 124] — для (3.2).

3.1. Особые точки уравнений п. д. п.

Рассмотрим задачу о движении стационарной ударной волны в газе. Пусть \vec{W}_1, \vec{W}_2 — постоянные векторы, описывающие состояние газа соответственно за и перед фронтом разрыва. С целью изучения свойств размазывания ударного фронта при численном расчете указанной задачи рассмотрим подробнее случай, когда система уравнений Эйлера (1.11), (1.9) аппроксимируется конечно-разностными схемами первого порядка точности. Для замыкания этой системы используем, как и в [276], уравнение состояния идеального газа (1.8). Пусть Г-форма первого дифференциального приближения дивергентной разностной схемы, аппроксимирующей систему (1.11), имеет вид

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(\vec{w})}{\partial x} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[C(\vec{w}, h, \tau) \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \right]. \quad (3.3)$$

В (3.3) введено обозначение $\vec{w}(x, t)$ для решения уравнений п. д. п., чтобы подчеркнуть его отличие от решения $\vec{u}(x, t)$ исходной системы (1.11), (1.9). Далее, в (3.3) C — некоторая матрица размерности 3×3 . Тогда П-форма п. д. п. записывается в виде

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(\vec{w})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \{ B(\vec{w}, h, \tau) \vec{w} \}, \quad (3.4)$$

где $B(\vec{w}, h, \tau) = B_{\Pi}(\vec{w}, h, \tau) = C(\vec{w}, h, \tau) - (\tau/2) A^2(\vec{w})$, $A = \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{w}}$.

Рассмотрим решения систем (3.3), (3.4) вида $\vec{w} = \vec{w}(\xi)$, где ξ — переменная, определяемая по (3.1). При этом система (3.3) переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\vec{\varphi}(\vec{w}) - D\vec{w} + \vec{G} = B(\vec{w}, h, \tau) d\vec{w}/d\xi, \quad (3.6)$$

где $\vec{\varphi}(\vec{w}) = B_{\Gamma}(\vec{w}, h, \tau) = C(\vec{w}, h, \tau) - (\tau/2) D^2 I$,

I — единичная матрица, \vec{G} — постоянный вектор. Для определения

вектора \vec{G} потребуем, чтобы решение системы (3.6) удовлетворяло условиям

$$\vec{w}(\xi) = \begin{cases} \vec{\tilde{W}}_1, & \xi \rightarrow -\infty; \\ \vec{\tilde{W}}_2, & \xi \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.8)$$

Условия вида (3.8) обычные при исследовании структуры ударного перехода в газах, обладающих физической вязкостью и теплопроводностью, см., например, [118]. Для существования решения $\vec{w}(\xi)$, удовлетворяющего условиям (3.8), необходимо [118], чтобы \vec{W}_1, \vec{W}_2 были стационарными точками системы (3.6), что приводит к соотношениям

$$\vec{G} = D\vec{W}_1 - \vec{\varphi}(\vec{W}_1) = D\vec{W}_2 - \vec{\varphi}(\vec{W}_2). \quad (3.9)$$

Легко видеть, что (3.9) совпадают с условиями Гюгонио (1.21).

Следуя [276], рассмотрим две разностные схемы первого порядка точности для системы (1.11): 1) Лакса [234]; 2) «распад разрыва» [33, 34]. Г-форма п. д. п. схемы Лакса имеет вид (3.3), где $C = (\hbar^2/2\tau)I$, поэтому

$$\begin{aligned} B_{\Pi}(\vec{w}, \hbar, \tau) &= (\hbar^2/(2\tau))I - (\tau/2)A^2; \\ B_{\Gamma}(\vec{w}, \hbar, \tau) &= (\hbar^2/(2\tau))I - (\tau/2)D^2I. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В случае, когда рассчитываемое течение сверхзвуковое, причем $u > c > 0$, схема [33] является разностной схемой с односторонними разностями по x и t . Поэтому Г-форма п. д. п. этой схемы в случае $u > c > 0$ легко записывается и имеет вид (3.3), где $C = (\hbar/2)A$. Тогда

$$\begin{aligned} B_{\Pi}(\vec{w}, \hbar, \tau) &= A((\hbar/2)I - (\tau/2)A); \\ B_{\Gamma}(\vec{w}, \hbar, \tau) &= (\hbar/2)A - (\tau/2)D^2I. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Обозначим особые точки системы (3.6), в которых $\vec{w} = \vec{W}_1$, $\vec{w} = \vec{W}_2$, соответственно через O_1, O_2 . Определим тип особых точек O_1, O_2 при использовании матриц B вида (3.10), (3.11). Для этого линеаризуем систему (3.6) в окрестности особой точки O_j , $j = 1, 2$. Положим

$$\vec{w}(\xi) = \vec{W}_j + \delta \vec{w}'(\xi), \quad (3.12)$$

где δ — малая величина. Для $\vec{w}'(\xi)$ получим линейную систему

$$d\vec{w}'/d\xi = \mathcal{F}_j \vec{w}', \quad (3.13)$$

где

$$\mathcal{F}_j = B^{-1}(\vec{W}_j)[A(\vec{W}_j) - DI], \quad j = 1, 2. \quad (3.14)$$

Здесь и ниже предполагается, что временной шаг τ удовлетворяет неравенству $\tau < \hbar/\max(|u| + c)$, известному под названием условия

устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви [116, 120]. Используя формулы (1.16) для собственных чисел матрицы A , входящей в формулы (3.10), (3.11), и неравенства (1.29), легко показать, что в случае матриц B_{Π} , B_{Γ} , определяемых формулами (3.10), (3.11), $\det B(\vec{W}_j) \neq 0$ при $B = B_{\Pi}$ и $B = B_{\Gamma}$. Таким образом, обратная матрица $B^{-1}(\vec{W}_j)$, входящая в формулу (3.14), существует. Например, в случае матрицы B_{Π} из (3.11) имеем в особой точке $w = \vec{W}_j$,

$$\det B_{\Pi} = \prod_{h=1}^3 \lambda_{jh} \left(\frac{h}{2} - \frac{\tau}{2} \lambda_{jh} \right),$$

где λ_{jh} — k -е собственное число матрицы $A(\vec{W}_j)$.

Пусть $\mu_{jk}^{\Pi}, \mu_{jk}^{\Gamma}$, $k = 1, 2, 3$ — собственные числа матрицы \mathcal{F} , получаемые из (3.14) при $B = B_{\Pi}$ и $B = B_{\Gamma}$ соответственно. В случае схемы Лакса из выражения (3.14) с учетом формул (3.10) находим

$$\mu_{jk}^{\Pi} = 2(\lambda_{jk} - D)/(h^2/\tau - \tau\lambda_{jk}^2), \quad (3.15)$$

$$\mu_{jk}^{\Gamma} = 2(\lambda_{jk} - D)/(h^2/\tau - \tau D^2). \quad (3.16)$$

Рассмотрим для определенности ударную волну, движущуюся слева направо. Тогда $D > 0$, и в силу теоремы Цемплена (1.29) имеют место неравенства

$$u_1 + c_1 > D > u_2 + c_2. \quad (3.17)$$

С учетом формул (1.16), (3.17) из соотношений (3.15), (3.16) получаем: как в случае матрицы B_{Π} , так и в случае матрицы B_{Γ} из (3.10) в особой точке O_1 имеют место неравенства

$$\mu_{11}^{\Pi, \Gamma} < 0; \quad \mu_{12}^{\Pi, \Gamma} < 0; \quad \mu_{13}^{\Pi, \Gamma} > 0,$$

таким образом, O_1 является седлом первого рода [141]. Аналогичным образом устанавливается, что в правой особой точке O_2 при использовании матриц (3.10) имеют место неравенства $\mu_{2k}^{\Pi, \Gamma} < 0$, $k = 1, 2, 3$. Таким образом, точка O_2 — устойчивый узел [141]. Следовательно, в случае схемы Лакса устойчивым направлением численного интегрирования системы (3.6) будет направление интегрирования от особой точки O_1 к O_2 .

При использовании матриц B_{Π} , B_{Γ} (3.11) получаем

$$\begin{aligned} \mu_{jk}^{\Pi} &= 2(\lambda_{jk} - D)/[\lambda_{jk}(h - \tau\lambda_{jk})]; \\ \mu_{jk}^{\Gamma} &= 2(\lambda_{jk} - D)/(h\lambda_{jk} - \tau D^2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Аналогично предыдущему легко устанавливается, что и в этом случае особая точка O_1 является седлом первого рода, а O_2 — устойчивым узлом в случае матрицы B_{Π} из (3.11). Как показано в п. 3.2, в том случае, когда известно направление устойчивого интегрирования системы (3.6), возможно использование одноступенчатых методов численного интегрирования, а именно, методов Рунге — Кутта. Для их реализации необходимо привести систему (3.6) к виду, разрешен-

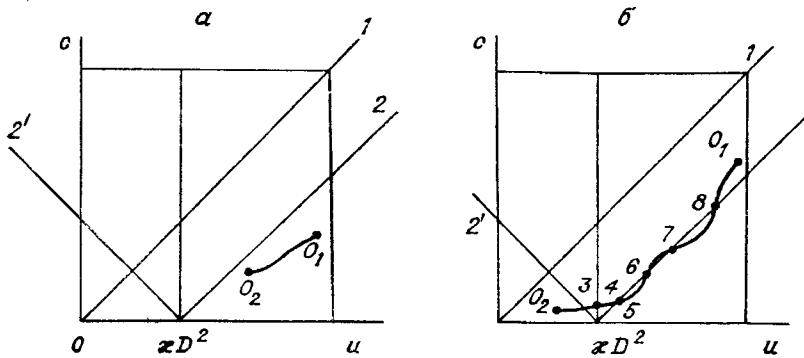


Рис. 2. Особые точки в плоскости (u, c) :

а — при отсутствии внутренних особых точек; б — при их наличии.
 1 — $u=c$; 2 — $u-c=\kappa D^2$; 2' — $u+c=\kappa D^2$; 3—8 — внутренние особые точки.

ному относительно производных $\vec{dw}/d\xi$:

$$\vec{dw}/d\xi = (\det B)^{-1} B^*(\vec{w}) [\vec{\varphi}(\vec{w}) - \vec{D}\vec{w} + \vec{G}], \quad (3.19)$$

где $B^*(\vec{w})$ — присоединенная матрица для B [31]. Покажем, что при использовании матрицы B_g из (3.11) система (3.6) может иметь внутри зоны размазанной ударной волны несколько особых точек, которые будем называть внутренними особыми точками в отличие от особых точек O_1, O_2 . Предположим, что в зоне сглаженной ударной волны имеют место неравенства

$$0 < |\vec{dw}/d\xi| < \infty. \quad (3.20)$$

Пусть в зоне сглаженной ударной волны имеется такая точка ξ_0 , в которой $\vec{w}(\xi_0) = \vec{w}_0$, причем $\det B(\vec{w}_0, h, \tau) = 0$. Рассмотрим $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \vec{dw}/d\xi$. В силу (3.20) следует предположить, что

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} B^*(\vec{w}) [\vec{\varphi}(\vec{w}) - \vec{D}\vec{w} + \vec{G}] = 0.$$

Таким образом, в точке ξ_0 имеет место особенность системы (3.19). С учетом формул (3.5), (1.12) получаем

$$\det B_g(\vec{w}, h, \tau) = (h^3/8)(u - \kappa D^2)(u - c - \kappa D^2)(u + c - \kappa D^2),$$

где $\kappa = \tau/h$. Рассмотрим в плоскости (u, c) прямоугольную область такую, что особые точки O_1, O_2 входят в эту область (рис. 2). Пусть $u = u(\xi)$, $c = c(\xi)$ — интегральная кривая системы (3.6), проходящая через особые точки O_1 и O_2 . Рассматривая различные случаи расположения этой интегральной кривой относительно прямых $u = \kappa D^2$, $u - c = \kappa D^2$, $u + c = \kappa D^2$, легко установить, что число внутренних особых точек O_j , $j \geq 3$, может меняться от 0 до N , где $N \geq 4$. Для примера на рис. 2, а изображен один из четырех случаев отсут-

ствия внутренних особых точек (ниже представлены соответствующие численные результаты). Рис. 2, б иллюстрирует случай наличия восьми особых точек системы (3.6). Наличие внутренних особых точек создает дополнительные серьезные трудности при численном интегрировании системы (3.6) [103]. Но даже если внутренних особых точек у системы (3.6) нет, то одношаговые численные методы могут оказаться неприменимыми из-за отсутствия устойчивого направления интегрирования. Последнее может иметь место при использовании матрицы B_g из (3.11), как это следует из (3.18). В таких ситуациях необходимо применять для численного решения задачи (3.6), (3.8) итерационные методы, подобные описанным в [103, 246, 227, 209].

3.2. Численное исследование структуры размазанной ударной волны

Опишем вычислительный алгоритм решения задачи (3.6), (3.8), реализованный для случая отсутствия внутренних особых точек и наличия направления устойчивого интегрирования. Осуществим в (3.6) обезразмеривание по формулам

$$\begin{aligned}\bar{p} &= p/p_1; \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_1; \quad \bar{u} = u/u_a; \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon\rho_1/p_1; \\ \bar{\xi} &= \xi/(0,5h); \quad \bar{\tau} = \tau/t_a; \quad u_a = \sqrt{p_1/\rho_1}; \quad t_a = 0,5h/u_a.\end{aligned}$$

Легко проверить, что при таком обезразмеривании вид системы (3.6) не меняется при использовании матриц B из (3.10), (3.11). В дальнейшем черточки над безразмерными величинами опустим для краткости. С целью приведения системы (3.6) к форме Коши вычислим матрицу B^* в (3.19) в случае использования матрицы B_Π из (3.10). Используя результаты [31], имеем

$$\begin{aligned}B^*(\vec{w}) &= \frac{\tau^2}{4} \left[A^4 - 2r_1A^3 + \left(\frac{1}{\kappa^2} - 2r_2 + r_1^2 \right) A^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2r_1r_2A + \left(\frac{1}{\kappa^2} - \frac{r_1}{\kappa} - r_2 \right) \left(\frac{1}{\kappa^2} + \frac{r_1}{\kappa} - r_2 \right) I \right], \quad (3.21)\end{aligned}$$

где $\kappa = \tau/h$; r_1 , r_2 , r_3 — коэффициенты характеристического уравнения матрицы A

$$\begin{aligned}\lambda^3 - r_1\lambda^2 - r_2\lambda - r_3 &= 0; \\ r_1 &= 3u, \quad r_2 = c^2 - 3u^2, \quad r_3 = u(u^2 - c^2).\end{aligned}$$

Упростим выражение (3.21), используя формулы (1.18):

$$\begin{aligned}A^3 &= r_1A^2 + r_2A + r_3I; \\ A^4 &= (r_1^2 + r_2)A^2 + (r_1r_2 + r_3)A + r_1r_3I.\end{aligned}$$

В результате формула (3.21) принимает вид

$$B^*(\vec{w}) = (\tau^2/4)(d_1A^2 + d_2A + d_3I), \quad (3.22)$$

$$\text{где } d_1 = \frac{1}{\kappa^2} - r_2, \quad d_2 = r_3 + r_1 r_2, \quad d_3 = d_1^2 - \left(\frac{r_1}{\kappa}\right)^2 - r_1 r_3. \quad (3.23)$$

Аналогичным образом вычисляется матрица B^* , соответствующая матрице B_Γ из (3.11). При этом в формуле (3.22) нужно положить

$$d_1 = \frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{\kappa} r_1 - r_2; \quad d_2 = r_3 - r_1 d_1; \quad d_3 = r_3 \left(\frac{1}{\kappa} - r_1 \right) - r_2 d_1.$$

И, наконец, матрицу B^* , соответствующую B_Γ из (3.10), находим по (3.22), где

$$d_1 = \frac{1}{\kappa^2}; \quad d_2 = \frac{D^2}{\kappa} - \frac{r_1}{\kappa^2}; \quad d_3 = D^4 - \frac{r_1 D^2}{\kappa} - \frac{r_3}{\kappa^2}.$$

Рассмотрим случай, когда особая точка O_1 — седло первого рода, O_2 — устойчивый узел. Тогда, согласно п. 3.1, интегрирование нужно начинать от особой точки O_1 . Как известно [141], для описания решения $\vec{w}(\xi)$ системы (3.6) в окрестности особой точки O_1 в случае седловидной особенности можно использовать решение линеаризованной системы (3.13). Опишем алгоритм выхода из особой точки O_1 на основе (3.13). Пусть $\omega_k = \{\omega_{1k}, \omega_{2k}, \omega_{3k}\}$ — собственный вектор системы (3.13) в окрестности особой точки O_1 , где индекс $k = 1, 2, 3$ соответствует собственному значению μ_{ik} . Согласно [209, 3], интегральные кривые выходят из особой точки O_1 по направлениям собственных векторов $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Расположим собственные числа $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}$ матрицы \mathcal{F}_1 в порядке их возрастания, т. е. $\mu_{11} < \mu_{12} < 0, \mu_{13} > 0$. В плоскостях, проходящих через особую точку O_1 и содержащих пары векторов ω_1, ω_3 и ω_2, ω_3 , точка O_1 является седлом, а в плоскости векторов ω_1, ω_2 — узлом. Поэтому по направлению ω_3 из точки O_1 выходит единственная интегральная кривая [3]. Выпишем алгебраическую систему для нахождения компонент собственного вектора ω_3 , соответствующего собственному значению μ_{13} ,

$$(\mathcal{F}_1 - \mu_{13} I) \omega_3 = 0. \quad (3.24)$$

Поскольку определитель этой системы равен нулю, можно лишь выразить две компоненты собственного вектора ω через третью с помощью (3.24). Пусть $\mathcal{F}_l = \|f_{ml}\|$, $m, l = 1, 2, 3$. Тогда из (3.24) можем найти

$$\omega_{13} = \omega_{33}; \quad \omega_{23} = -\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \omega_{13}; \quad \omega_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \omega_{13}, \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} f_{11} - \mu_{13} & f_{13} \\ f_{21} & f_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{12} & f_{13} \\ f_{22} - \mu_{13} & f_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \\ &= \begin{vmatrix} f_{11} - \mu_{13} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - \mu_{13} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

С учетом качественного поведения интегральных кривых в окрестности седла первого рода имеем в (3.12), что $\delta \vec{w}(\xi) \cong \omega_3$ [141].

В расчетах полагали, что в (3.25) $\omega_{13} = -\varepsilon_0$, где ε_0 — малое положительное число. Чтобы функции $w_2(\xi)$, $w_3(\xi)$ также убывали при движении вдоль интегральной кривой от особой точки O_1 к O_2 , необходимо потребовать выполнение неравенств

$$-\Delta_1/\Delta_2 > 0; \quad \Delta_3/\Delta_2 > 0. \quad (3.26)$$

Численное интегрирование системы (3.19) осуществлялось по методу Рунге — Кутта четвертого порядка точности с постоянным шагом $\Delta\xi$. При выходе из особой точки O_1 с использованием формул (3.25) проверялись неравенства (3.26). Во всех проведенных расчетах с использованием п. д. п. схем Лакса и [33] эти неравенства выполнялись. Для проверки правильности вычисления матрицы $B^{-1}\vec{w}(h, \tau)$, входящей в (3.19), использовалось соотношение

$$\det(B^{-1}) = \prod_{j=1}^3 \mu_j(B^{-1}), \quad (3.27)$$

где определитель в левой части равенства вычислялся разложением по столбцу, $\mu_j(B^{-1})$ — j -е собственное число матрицы B^{-1} , которое в случае формул (3.10), (3.11) легко выражается через j -е собственное число матрицы A . В расчете получено полное совпадение обеих частей равенства (3.27). В [276] исследовано также влияние выбора постоянной $\varepsilon_0 = -\omega_{13}$, входящей в (3.25), при этом величина ε_0 варьировалась в пределах $10^{-4} \leq \varepsilon_0 \leq 10^{-2}$. Весьма несущественное расхождение в результатах для различных ε_0 (менее 0,1%) согласуется с качественным поведением интегральных кривых в окрестности седла первого рода [141].

Прежде чем перейти к непосредственному сопоставлению численных решений обыкновенных дифференциальных уравнений п. д. п. и сеточных решений конечно-разностных уравнений, введем ряд обозначений. Пусть $\rho(x, t)$ — плотность газа, полученная при решении разностных уравнений схемы при некотором t , $\rho_p(\xi)$, $\rho_g(\xi)$ — решения типа бегущей волны уравнений П- и Г-формы п. д. п. рассматриваемой разностной схемы. При численном решении задачи о движении стационарной ударной волны для системы уравнений Эйлера (1.1) — (1.3), (1.8) задавались при $t = 0$ начальные данные Коши вида «полочки» для каждой из искомых функций, причем постоянные значения компонент решения по обеим сторонам разрыва удовлетворяли условиям Гюгошио (1.22) — (1.24), а сам разрыв «размазывался» на одну ячейку расчетной сетки на оси x .

Так как решения типа бегущей волны определяются с точностью до сдвига вдоль оси ξ , для сравнения $\rho_p(\xi)$, $\rho_g(\xi)$ с $\rho(x, t)$ в этих профилях находили такую узловую точку, в которой величина $|u_i + c_i - D|$ была минимальной, где i — номер узла сетки с шагом h на оси x . Этую точку принимали в качестве начала отсчета $i = 0$ для ρ_p , ρ_g , $\rho(x, t)$.

В [116] указано на существование начального нестационарного участка при расчете движения стационарной ударной волны по схеме сквозного счета, в связи с чем возникает вопрос о выборе момен-

та времени t для сравнения разностного решения $\rho(x, t)$ с $\rho_n(\xi)$, $\rho_r(\xi)$. При изучении выхода разностного решения $w(x, t)$ на стационарный режим в [276] предложено следить за поведением толщины по Прандтлю $X(w)$ [250, 118] как функции времени, где $w_1 = \rho$, $w_2 = \rho u$, $w_3 = \rho(\varepsilon + u^2/2)$.

На рис. 3 изображены графики толщин $X(w_1), X(w_3)$, полученные при расчете по схеме Лакса движения стационарной ударной волны конечной интенсивности. «Пи-

лообразный» характер кривых означает, что численное решение $w(x, t)$, строго говоря, нестационарное в системе координат, связанной с ударной волной. Начиная с некоторого момента $t_* > 0$ величина X колеблется с малой амплитудой около некоторого постоянного значения. Поэтому будем считать, что при $t \geq t_*$ решение $w(x, t)$ выходит на квазистационарный режим. Такой же режим отмечен в [20] при использовании других разностных схем. В «стартовом» промежутке $[0, t_*]$ разностное решение $w(x, t)$ существенно нестационарное в системе координат, связанной с ударной волной [269, 237]. С учетом высказанных выше момента t для сравнения сеточного решения для плотности $\rho(x, t)$ с решениями $\rho_n(\xi)$, $\rho_r(\xi)$ выбирали согласно требованию $t > t_*$. Штриховыми линиями на рис. 3 указаны стационарные значения толщин $X(w_1), X(w_3)$, полученные при численном интегрировании системы (3.19), где матрица B^* вычислялась для П-формы п. д. п. Лакса по (3.22), (3.23). Проведенное в [276] сравнение конечно-разностного решения $\rho(x, t)$ с решениями $\rho_n(\xi)$, $\rho_r(\xi)$ при использовании схемы П. Лакса [234] и схемы С. К. Годунова [33] показало, что соответствующие относительные погрешности не превышают 4% в случае ударных волн конечной интенсивности.

При решении ряда газодинамических задач в течении возникают слабые ударные волны, которые, вообще говоря, также должны эффективно рассчитываться по конечно-разностным схемам. С целью выяснения применимости решений типа бегущей волны уравнений п. д. п. для описания размазанной ударной волны слабой интенсивности в [276] проведена серия расчетов по схемам Лакса и «распад разрыва» [33]. В качестве параметра, характеризующего интенсивность ударной волны, взята величина $\eta = p_1/p_2$, при этом предполагалось, что $p_2 \neq 0$; ρ_1, ρ_2 — давления газа соответственно за и перед фронтом ударной волны. Сделаны расчеты для таких значений η , когда $\eta \rightarrow 1$. В результате получены следующие выводы:

1. Толщина по Прандтлю X размазанной ударной волны зависит от интенсивности волны, причем эта зависимость в общем случае немонотонная.

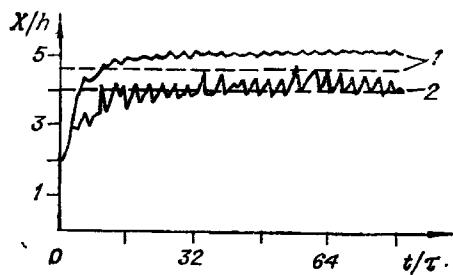


Рис. 3. График толщин, вычисленных по схеме Лакса.
1 — ρ ; 2 — $\rho(\varepsilon + 0,5u^2)$.

2. Имеет место свойство $\lim_{\eta \rightarrow 1} t_* = \infty$, где момент времени t_*

характеризует выход численного решения на квазистационарный режим. При $t < t_*$ толщина X является возрастающей функцией t . Эта зависимость X от t не может быть описана простой формулой $X \sim t^\alpha$, где $\alpha = \text{const}$, как в случае линейного разрыва [259, 219].

3. С увеличением интенсивности ударной волны требуется все меньшее число шагов по t (при фиксированном числе Куранта $K = \max((t/h)(|u| + c))$) для выхода разностного решения на квазистационарный режим. Значение времени t_* при фиксированном η неодинаково для различных разностных схем и ударных волн.

4. Таким образом, при $t < t_*$ (в силу чисто нестационарного характера численного решения) решения типа бегущей волны уравнений п. д. п. разностной схемы нельзя использовать для описания свойств численного решения в «размазанной» ударной волне.

5. Наблюдается более интенсивное «размазывание» ударных волн слабой интенсивности по сравнению с ударными волнами конечной интенсивности. Отметим, что это свойство имеет место не только для схем Лакса и «распад разрыва» [33]. В [97] указано на сильное «размазывание» ударных волн слабой интенсивности при счете по схеме [59]. Эффект интенсивного «размазывания» слабых ударных волн схемами первого порядка точности необходимо учитывать при численном исследовании задач, в которых изучаются закономерности движения слабых ударных волн, в частности задач геометрической акустики [226, 271, 113].

Глава 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ АНАЛИЗАТОРЫ УДАРНЫХ ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА

Конечно-разностные методы сквозного счета — одно из наиболее эффективных средств математического моделирования течений газа с разрывами. Для этих методов характерно значительное (на несколько порядков) превышение объема числовой информации, получаемой при решении задачи с помощью ЭВМ, над объемом, представляющим интерес для исследователя [102, 261]. Другая характерная черта методов сквозного счета — их низкая точность в окрестности сильных разрывов, которые «размазываются» на нескольких интервалах расчетной сетки. Эти обстоятельства приводят к возникновению двух практических проблем: интерпретации получаемых числовых результатов и повышения точности численного решения в окрестности сильных разрывов. Проблема интерпретации включает локализацию (т. е. определение положения) различных особенно-

стей в течениях газа и их классификацию (ударные волны, контактные разрывы и т. п.).

С другой стороны, информацию о положении разрыва внутри зоны его «размазывания» можно непосредственно использовать для повышения точности численных решений в окрестности разрывов. В [260] предложено использовать информацию о положении разрывов для улучшения качества размытых профилей без нарушения точности в гладких областях на основе перехода от однородных к неоднородным схемам переменного порядка точности. В главе 6 показано, как информацию о положении разрыва можно применять для уточнения разностного решения.

С учетом изложенного актуальными являются вопросы разработки и обоснования алгоритмов, предназначенных для локализации особенностей в расчетной области по результатам сквозного счета. Автоматизация определения положения разрывов на основе использования таких алгоритмов позволяет существенно облегчить процесс извлечения действительно нужной информации из огромного числа данных, выдаваемых компьютером в процессе решения стационарных и особенно нестационарных многомерных задач газовой динамики. Отметим еще один аспект применения информации о положении разрывов, в частности вновь возникающих в процессе расчета: ее можно использовать для активного управления процессом счета, включающего, например, изменение некоторых граничных условий, переход к другой конструкции разностной сетки или к другой разностной схеме и т. п. Управление счетом можно осуществлять либо с помощью соответствующим образом подготовленной программы для ЭВМ, либо в диалоговом режиме, применяя средства интерактивной машинной графики [32, 12].

Перечислим известные алгоритмы локализации ударных волн по результатам сквозного счета. Их можно разделить на две большие группы. Первая характеризуется тем, что наряду с расчетом всего поля течения, включающего ударные волны, рассчитывается движение поверхностей разрыва. Во второй группе используются лишь мгновенные (на заданный момент времени) числовые значения параметров течения. Перечислим сначала методы явного выделения и отслеживания поверхностей ударных фронтов. В [116] предлагалось аппроксимировать кривую разрыва некоторым количеством точек. Движение разрыва во времени авторы находили как движение указанных точек по нормали к фронту разрыва. Другой простой способ представления линии разрыва, описанный в [222], состоит в том, что вводится «функция высоты» $h = f(x, t)$ точек этой линии над выбранной, в данном случае линией $y = 0$. Как показано в [222], метод неэффективен, когда наклон dh/dx превосходит отношение h_y/h_x , и совсем не применим в случае неоднозначных функций $h = f(x, t)$, когда одному значению x соответствует более чем одно значение h ; h_x , h_y — шаги прямоугольной сетки в плоскости пространственных координат x , y .

Способ представления линии разрыва в виде совокупности прямолинейных отрезков применяли авторы [78, 94, 96, 113, 244].

В [78, 94, 96] в рамках программы расчета по схеме С. К. Годунова на установление ударную волну выделяли с помощью специальной процедуры, которая опирается на принцип Гюйгенса и помогает избежать пилообразной структуры поверхности разрыва. В этой процедуре поверхность ударного фронта аппроксимируется ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков. В [113] ударные фронты тоже аппроксимировались прямолинейными отрезками. При этом скорости перемещения звеньев ломаной, аппроксимирующей ударный фронт, вычислялись из решения задачи о распаде произвольного разрыва. В [244] сначала находили прямолинейные отрезки фронта разрыва в прямоугольных ячейках сетки. Затем концы отрезков перемещали в два шага: на первом — вдоль оси x , на втором — вдоль оси y .

Из-за ошибок в разностном решении в окрестности разрыва движение звеньев ломаной с течением времени может стать нерегулярным и получится пилообразная ломаная. В этом отношении полезна процедура расчета движения двух соседних звеньев ломаной, когда их скорость вычисляют как некоторую среднюю величину скоростей перемещения этих двух звеньев [283].

Метод случайного выбора А. Чорина [190, 191, 266, 192, 199] позволяет свести к минимуму ширину «размазывания» ударных волн. Однако, как отмечено в [213], метод дает ошибки в положении разрывов величины $\pm 2,5h$. В связи с этим в [213] в контексте метода случайного выбора для выслеживания разрывов предложены методы сгущения сетки в окрестности разрыва и подгонки скачка. В [195] при расчете распадов разрыва в методе случайного выбора Чорина использовано в явном виде условие Гюгоню на разрыве и условия возрастания энтропии при переходе через фронт ударной волны. Такая модификация метода случайного выбора, как показано в [195] на примерах расчетов, существенно повышает точность локализации разрывов при решении уравнения Баклея — Леверетта из теории фильтрации. В [265] разрывы выделялись явно, а в областях непрерывного течения между ними расчет проводили по схеме Мак-Кормака [245]. В [180] предложен метод расчета течений с разрывами, в котором положение $s(t)$ разрыва рассматривается в качестве зависимой переменной. Уравнения квазидимерного течения преобразуются к уравнениям в новых координатах (ξ, τ) , в которых положение ударной волны s становится фиксированным. Для этого делается замена $\xi = \xi(x, t) = x/s(t)$. В [46] применен метод локализации фронта автомодельной ударной волны в размазанном профиле, основанный на том, что величина

$$\frac{2}{\gamma+1} \left(\gamma \frac{(\vec{r}\vec{n} - \vec{u}_-\vec{n}t)^2}{a_-^2 t^2} - \frac{\gamma-1}{2} \right) - \frac{p_+}{p_-}$$

меняет знак на фронте такой волны. Здесь \vec{r} — радиус-вектор точки поверхности разрыва, \vec{n} — нормаль к поверхности разрыва, γ — отношение удельных теплоемкостей c_p/c_v , \vec{u}_- , a_- , p_- — соответственно

скорости газа и звука, давление за фронтом ударной волны. Результаты применения этого алгоритма локализации при расчетах двумерного течения с ударной волной по методу типа «жидкость в ячейке» сопоставлены в [46] с данными эксперимента. Сравнение свидетельствует о работоспособности предложенного метода локализации. В [248, 249] на примере уравнения Бюргерса показано, как задачу наблюдения за эволюцией во времени первоначально заданного разрыва можно свести к некоторой вариационной задаче, при этом течение в пространственной области можно рассчитать по схеме сквозного счета.

Перечислим теперь известные алгоритмы локализации ударных волн по результатам сквозного счета, относящиеся ко второй из указанных выше групп, когда положение разрывов определяется только исходя из «размазанных» профилей на данный момент времени. Наиболее распространен способ визуального определения положения ударных фронтов и контактных поверхностей по сближению различных изолиний. В качестве последних используют, например, линии постоянного давления (изобары), постоянной плотности (изохоры), постоянного числа Маха [93, 34]. На рис. 4, взятом из [167], приведены изобары, полученные при расчете по методу Харлоу [150] задачи о высокоскоростном соударении цилиндрического ударника с полубесконечной преградой. По сгущениям изobar на рис. 4 можно приблизенно определить положение криволинейных ударных волн, распространяющихся по преграде и ударнику. В некоторых работах, например в [74, 53, 22], ударный фронт находили по максимальным градиентам параметров потока. На рис. 5 кружками нанесены точки ударных волн, найденные в [22] по $\max |\partial p / \partial y|$ на линиях $x = \text{const}$. В [16, 119] положение ударной волны определяли по точке перегиба в профиле давления вдоль луча $x = \text{const}$, в [228, 4, 137] — по внезапному изменению направления линий тока, в [118, 286, 285, 232, 120] — по максимуму искусственной вязкости. В [214] при расчете задачи двухфазной фильтрации с разрывом функции насыщенности $s(x, y, t)$ значения s менялись от $s = 0$ (чистая нефть) до $s = 1$ (чистая вода). Положение фронта разрыва насыщенности при фиксированном t находили как линию уровня $s(x, y, t) = 0,01$.

Большинство из перечисленных выше способов локализации ударных волн по результатам сквозного счета, относящихся ко второй группе, до недавнего времени не имело теоретического обоснования. Авторы [162] предложили, по-видимому, первую методику исследования точности некоторых методов локализации ударных

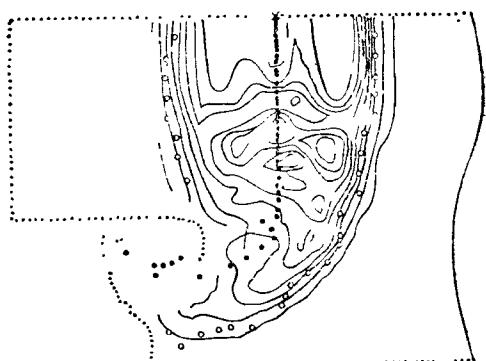


Рис. 4. Высокоскоростной удар цилиндра о преграду. Расчет по методу Харлоу.

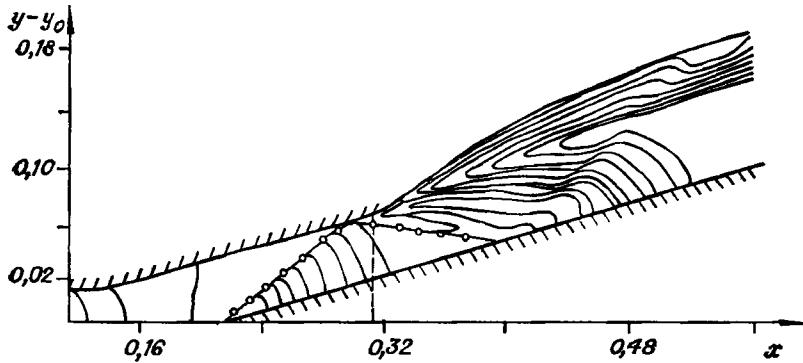


Рис. 5. Расчет двумерного течения химически неравновесной смеси газов в кольцевом сопле и струе по методу [22]. Сплошные линии — изобары.

волн по результатам сквозного счета одномерных задач газовой динамики, названных дифференциальными анализаторами. В этой методике в качестве основного использовано понятие центра размазанной ударной волны. Прежде чем приступить к систематическому изложению материалов исследований дифференциальных анализаторов, поясним смысл основного понятия на простом примере.

§ 4. ВВОДНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + u_\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x^2}, \quad \mu = \text{const} > 0, \quad (4.1)$$

с начальным условием

$$u_\mu(x, 0) = \begin{cases} u_1, & x < x_0, \\ u_2, & x > x_0, \end{cases} \quad (4.2)$$

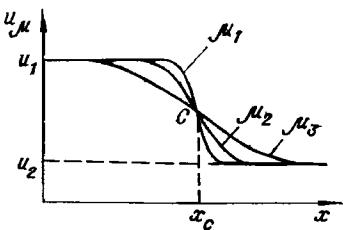
где u_1, u_2, x_0 — постоянные, причем $u_1 > u_2$; x — пространственная координата; t — время. Точное решение задачи (4.1), (4.2) имеет вид [144]

$$u_\mu(x, t) = u_2 + \frac{u_1 - u_2}{1 + g(x, t) \exp \left\{ \frac{u_1 - u_2}{2\mu} (x - x_0 - Dt) \right\}}, \quad (4.3)$$

где $g(x, t) = \int_{-(x-x_0-u_2 t)/\sqrt{4\mu t}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta / \int_{(x-x_0-u_1 t)/\sqrt{4\mu t}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad (4.4)$

$D = (u_1 + u_2)/2$. Отметим следующие свойства решения (4.3), (4.4) [290]:

Рис. 6. График решений уравнения Бюргерса u_μ при различных μ .



1. При любом фиксированном $t > 0$ в точке (x_c, t) , где $x_c = x_c(t) = x_0 + Dt$, пересекаются графики решений (4.3), (4.4), полученных при различных значениях постоянной $\mu > 0$ (рис. 6).

$$2. \max_x |\partial u_\mu / \partial x| = |\partial u_\mu / \partial x|_{x=x_c}.$$

3. В [144] показано, что при $t \rightarrow \infty$ решение задачи (4.1), (4.2) сходится в области $u_1 > (x - x_0)/t > u_2$ к решению типа бегущей волны $U_\mu(\xi)$ уравнения (4.1), где $\xi = x - x_0 - 0,5(u_1 + u_2)t$,

$$U_\mu(\xi) = 0,5(u_1 + u_2) - 0,5(u_1 - u_2) \operatorname{th}[(u_1 - u_2)\xi/(4\mu)].$$

(Ряд результатов по исследованию сходимости решения $u_\mu(x, t)$ к решению типа бегущей волны можно найти также в работах [61, 257, 181].)

4. Геометрическое место точек (x_c, t) образует в плоскости (x, t) линию, которая является траекторией разрыва в решении $u(x, t)$ задачи

$$\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x = 0;$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_1, & x < x_0, \\ u_2, & x > x_0, \end{cases} \quad u_1 > u_2. \quad (4.5)$$

Таким образом, хотя разрыв в решении задачи (4.1), (4.2) при $t > 0$ сглаживается, существует в профилях $u_\mu(x, t_0)$, $t_0 > 0$, получаемых при различных μ , точка, в которой величина $u_\mu(x, t_0)$ не зависит от μ и абсцисса которой совпадает с точным положением разрыва в решении задачи (4.5). В [162, 204, 25, 167, 291, 290, 276] эта точка названа центром размазанной ударной волны.

Покажем, что при произвольном профиле с ударной волной свойства 1—4 решения задачи Коши для уравнения Бюргерса (4.1), вообще говоря, не имеют места. Для этого рассмотрим решение вида N -волны уравнения Бюргерса (4.1). Для его получения используем, следуя [144], замену Коула — Хопфа

$$u_\mu(x, t) = -2\mu\varphi_x/\varphi, \quad (4.6)$$

где в качестве функции $\varphi(x, t)$ в данном случае выбирается решение уравнения теплопроводности в виде функции источника

$$\varphi = 1 + \sqrt{a/t} \exp(-x^2/(4\mu t)), \quad (4.7)$$

где $a = \text{const} > 0$. В силу формулы (4.6) имеем соответствующее решение

$$u_\mu = -\frac{2\mu\varphi_x}{\varphi} = \frac{x}{t} \frac{\sqrt{a/t} \exp(-x^2/(4\mu t))}{1 + \sqrt{a/t} \exp(-x^2/(4\mu t))}. \quad (4.8)$$

При $t \rightarrow 0$ функция φ (4.7) ведет себя как дельта-функция, в связи с чем выражение (4.8) затруднительно интерпретировать как

решение задачи Коши для u_μ с начальными данными, задаваемыми при $t=0$ [144]. Однако для любого $t>0$ решение (4.8) представляется графиком, напоминающим букву И, с положительной и отрицательной фазами, в качестве начального профиля можно взять профиль при любом значении $t=t_0>0$. Площадь положительной фазы профиля

$$\int_0^\infty u_\mu dx = -2\mu [\ln \varphi]_0^\infty = 2\mu \ln(1 + \sqrt{a/t}). \quad (4.9)$$

Если величину интеграла (4.9) в начальный момент времени t_0 обозначить через A , то можно ввести число Рейнольдса

$$R_0 = A/2\mu = \ln(1 + \sqrt{a/t_0}). \quad (4.10)$$

Из формулы (4.10) находим, что $a = t_0(e^{R_0} - 1)^2$, поэтому формулу (4.8) можно переписать в виде

$$u_\mu = \frac{x}{t} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{t}{t_0}} \frac{\exp(x^2/(4\mu t))}{e^{R_0} - 1} \right\}^{-1}. \quad (4.11)$$

Если $\mu \rightarrow 0$, то в соответствии с (4.10) $R_0 \gg 1$, так как $A = \text{const}$, поэтому можно ожидать, что решение соответствующей задачи Коши для уравнения $u_t + uu_x = 0$ будет хорошим приближением в течение некоторого времени t . Но при $t \rightarrow \infty$ будет преобладать диффузионный член [144].

Рассмотрим теперь решение (4.11) для конечных x, t при $R_0 \gg 1$ (соответственно $t_0 \ll a$). Согласно [144], при фиксированном t и $R_0 \rightarrow \infty$

$$u_\mu \cong \begin{cases} x/t, & -\sqrt{2At} < x < \sqrt{2At}, \\ 0, & |x| > \sqrt{2At}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Результат (4.12) в точности совпадает с решением «невязкого» уравнения $u_t + uu_x = 0$. Пусть $x = \xi(t)$ — уравнение траектории разрыва, движущегося вправо, в решении «невязкого» уравнения. Согласно (4.12),

$$x = \xi(t) = \sqrt{2At}. \quad (4.13)$$

Как и в предыдущем примере (4.1)–(4.2) с начальной функцией $u_\mu(x, 0)$ вида «полочки», постараемся выяснить, будет ли значение решения (4.11) вдоль траектории (4.13) не зависящим от μ . С этой целью подставим в решение (4.11) вместо x величину $\xi(t)$, определяемую по формуле (4.13), и запишем результат подстановки в виде

$$u_\mu(\xi(t), t, v) = \sqrt{2At} / \left(1 + \sqrt{\frac{t}{t_0}} \frac{e^v}{e^v - 1} \right), \quad (4.14)$$

где введено обозначение $v = R_0 = A/(2\mu)$. Очевидно, для того, чтобы значение $u_\mu(\xi(t), t, v)$ не зависело от v , производная $\partial u_\mu/\partial v$,

$t, v)/\partial v$ должна быть тождественно равна нулю. Из (4.14) получаем

$$\frac{\partial u_\mu(\xi(t), t, v)}{\partial v} = \frac{\sqrt{2A/t_0} e^v}{(e^v - 1 + e^v \sqrt{t/t_0})^2} \neq 0. \quad (4.15)$$

Таким образом, вдоль «невязкой» траектории (4.13) значение решения (4.11) зависит от μ . Однако при достаточно малых μ , т. е. когда v велика, $\partial u_\mu(\xi(t), t, v)/\partial v \sim e^{-v}$, что означает слабую зависимость величины $u_\mu(\xi(t), t, v)$ от μ при малых μ , другими словами, при малых $\mu > 0$ значение $u_\mu(\xi(t), t, v)$ приблизительно постоянно. Это свойство можно установить и непосредственно с помощью формулы (4.14). Введем обозначение $e = e^{-v}$. Величина $e \rightarrow 0$ при $R_0 \rightarrow \infty$ или при $\mu \rightarrow 0$. Возьмем два малых положительных значения ε_1 и ε_2 и оценим разность $u_\mu(\xi(t), t, \varepsilon_1) - u_\mu(\xi(t), t, \varepsilon_2)$. По теореме Лагранжа

$$u_\mu(\xi(t), t, \varepsilon_1) - u_\mu(\xi(t), t, \varepsilon_2) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left. \left(\frac{\partial u_\mu}{\partial e} \right) \right|_{e=e_*} = \\ = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (-\sqrt{2A/t_0}) (1 - e_* + \sqrt{t/t_0})^{-2}, \quad (4.16)$$

где $e_* = \varepsilon_1 + \theta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$, $0 < \theta < 1$. Из формулы (4.16) следует, что при малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ значения $u_\mu(\xi(t), t, \varepsilon_1)$ и $u_\mu(\xi(t), t, \varepsilon_2)$ мало различаются на «невязкой» траектории (4.13), и можно говорить, что свойства решения u_μ , аналогичные свойствам 1—4 при начальной функции $u_\mu(x, 0)$ вида «полочки» (4.2), выполняются приближенно при начальной функции $u_\mu(x, t_0)$, рассмотренной выше и отличающейся от «полочки».

Заметим, что аналог свойства (3) (свойство стабилизации решения $u_\mu(x, t)$ к стационарному решению) в данном примере с N -волной отсутствует, поскольку форма профиля типа N -волны с ростом t изменяется, причем так, что площадь положительной фазы, т. е. $\int_0^\infty u_\mu(x, t) dx$, стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ согласно (4.9); отрицательная фаза имеет такую же площадь.

§ 5. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЦЕНТРА РАЗМАЗАННОЙ ВОЛНЫ В РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ С ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

5.1. Общие соображения

По-видимому, наиболее простой математической моделью, описывающей эффекты «размазывания» газодинамической ударной волны в результате введения искусственной вязкости, является стационарная система уравнений газодинамики, получаемая из системы уравнений (1.1)—(1.3) путем замены давления p на величину $p + q$, где q есть псевдовязкость, или искусственная вязкость, которую предложили вводить Нейман и Рихтмайер [255]. В связи с

этим представлялось естественным сначала исследовать вопрос о существовании центра размазанной ударной волны в решении указанной системы. Возьмем задачу о стационарной ударной волне, в которой u , p , ρ , ϵ — постоянные величины в областях за и перед фронтом разрыва. Будем помечать их соответственно нижним индексом «1» и «2». Следуя работе [255], проанализируем решения системы (1.1) — (1.3), зависящие только от переменной $x' = x - Dt$, т. е. решения типа бегущей волны, где D — скорость стационарной ударной волны. Положим $u' = u - D$. Проинтегрировав систему один раз, получим

$$\rho u = C_1 = m, \quad (5.1)$$

$$p + q + mu = C_2, \quad (5.2)$$

$$m[p/(\rho(\gamma - 1)) + u^2/2] + (p + q)u = C_3, \quad (5.3)$$

где C_1 , C_2 , C_3 — постоянные интегрирования, штрихи при величинах x , и опущены для краткости обозначений. Для определенности предположим, что ударная волна движется слева направо; тогда $D > 0$, $m < 0$. По аналогии с [255, 118, 120] предположим, что искусственная вязкость q , входящая в уравнения (5.1) — (5.3), имеет вид

$$q = \begin{cases} F(hdu/dx, hdp/dx, hd\rho/dx, p, \rho), & du/dx < 0, \\ 0, & du/dx \geq 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

где h — шаг равномерной расчетной сетки на оси x .

Рассматривая систему уравнений (5.1) — (5.3) как систему трех уравнений относительно четырех функций ρ , u , p , q , найдем u , p , q как функции удельного объема $\vartheta = 1/\rho$

$$\begin{aligned} u &= m\vartheta, \quad p = (\gamma - 1)(C_3/(m\vartheta) + m^2\vartheta/2 - C_2), \\ q &= (1/\vartheta)[C_2\gamma\vartheta - (\gamma + 1)m^2\vartheta^2/2 - (\gamma - 1)C_3/m]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В силу формулы (5.4) $q(\vartheta_1) = q(\vartheta_2) = 0$. Из этих условий находим постоянные C_2 , C_3 , предполагая величину m заданной

$$C_2 = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} m^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2), \quad C_3 = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} m^3 \vartheta_1 \vartheta_2. \quad (5.6)$$

С учетом (5.6) имеем из (5.5)

$$q = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{m^2}{\vartheta} (\vartheta_2 - \vartheta)(\vartheta - \vartheta_1), \quad (5.7)$$

$$p(\vartheta) = (\gamma - 1) \frac{m^2}{2} \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta} + \vartheta - \frac{\gamma + 1}{\gamma} (\vartheta_1 + \vartheta_2) \right]. \quad (5.8)$$

Подставляя в формулу (5.7) выражение (5.4) для q в зоне размазанной ударной волны, получим с учетом формул (5.5), (5.7), (5.8) обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\vartheta(x)$

$$\tilde{F}(\vartheta(x), h d\vartheta/dx) = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{m^2}{\vartheta} (\vartheta_2 - \vartheta)(\vartheta - \vartheta_1), \quad (5.9)$$

$$\text{где } \tilde{F}(\vartheta(x), h d\vartheta/dx) = F(h m d\vartheta/dx, h(\gamma - 1)(m^2/2) \left(1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta^2}\right) \frac{d\vartheta}{dx}, \\ -\frac{1}{\vartheta^2} h \frac{d\vartheta}{dx}, p(\vartheta), 1/\vartheta). \quad (5.10)$$

Уравнение (5.9) рассматриваем в дальнейшем аналогично (3.8) при краевых условиях

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \vartheta(x) = \vartheta_1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \vartheta(x) = \vartheta_2. \quad (5.11)$$

Заметим, что (5.9) — автономное дифференциальное уравнение, т. е. переменная x в него явно не входит. Согласно общим свойствам решений автономных уравнений, переменная x может входить в решение $\vartheta(x)$ только в виде комбинации $x - x_0$, где x_0 — произвольная постоянная, т. е. $\vartheta = \vartheta(x - x_0)$ (см., например, [85, 10]).

Обозначим через G_s конечный отрезок на оси x , который находится в зоне «размазывания» ударной волны и где наиболее существенно изменяется решение $\vartheta(x - x_0)$ при возрастании x .

Определение 1. Центром размазанной ударной волны в решении $\vartheta(x - x_0)$ задачи (5.9), (5.11) назовем точку $x_* \in G_s$, в которой значение решения $\vartheta(x_* - x_0)$ не зависит от величины шага сетки h при фиксированной постоянной x_0 . Будем далее полагать, что центр размазанной ударной волны единственный, если, во-первых, при фиксированном значении постоянной x_0 существует единственная точка x_* , в которой $\vartheta(x_* - x_0)$ не зависит от h ; во-вторых, $\vartheta(x_* - x_0)$ не обусловлена выбором постоянной сдвига.

Поскольку в ударной волне происходит сжатие вещества (см., например, [118]), $\rho_1 > \rho_2$, следовательно, $\vartheta_1 < \vartheta_2$. В этой связи нас будет интересовать такой корень $h d\vartheta/dx = f(\vartheta)$ уравнения (5.9), который положителен в интервале $(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Однако в действительности уравнение (5.9) может иметь несколько корней $h d\vartheta/dx = f_i(\vartheta)$, $i = 1, \dots, N$. Эта проблема неединственности решения уравнения (5.9), являющегося алгебраическим или трансцендентным уравнением относительно $h d\vartheta/dx$, возникает уже в случае квадратичной вязкости Неймана — Рихтмайера. В работе [284] предложена вязкость q вида (5.4), где

$$F = ah^{3/2}\rho(p/\rho)^{1/4} |du/dx|^{3/4} \left| \left[-\frac{dp}{dx} \frac{d\vartheta}{dx} \right]^{1/2} \right|^{3/4}.$$

Легко видеть, что в этом случае уравнение для определения корней $h d\vartheta/dx = f_i(\vartheta)$ из (5.9) является алгебраическим уравнением шестой степени. Пусть в общем случае (5.9) имеет N корней, среди которых K вещественных корней $f_i(\vartheta)$, где $K > 1$. Среди этих корней $f_i(\vartheta)$ могут быть такие, которые меняют знак в интервале $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$. Нас интересуют положительные в указанном интервале корни $f_i(\vartheta)$; как показано далее, положительность $f_i(\vartheta)$ является одним из условий, обеспечивающих единственность центра размазанной ударной волны. Пусть среди K вещественных корней $f_i(\vartheta)$ имеются K_1 корней $f_i(\vartheta)$ таких, что

$f_i(\vartheta) > 0$ при $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$, $f_i(\vartheta_1) = f_i(\vartheta_2) = 0$. Решая каждое из K_1 уравнений $hd\vartheta/dx = f_i(\vartheta)$, получим K_1 интегральных кривых $\vartheta = \vartheta(x)$, удовлетворяющих условиям (5.11), т. е. неединственность решения уравнения (5.9) при условиях (5.11).

Заметим, что возможен другой способ исследования интегральных кривых задачи (5.9)–(5.11), когда анализируется непосредственно уравнение (5.9), т. е. оно рассматривается в виде, не разрешенном относительно производной $d\vartheta/dx$. При этом можно попытаться использовать качественные приемы и методы, изложенные в [5]. Подобное исследование до настоящего времени не проводилось. Если уравнение (5.9) удается разрешить относительно $hd\vartheta/dx$ и при этом среди корней $f_i(\vartheta)$ оказывается только один положительный корень при $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$, нетрудно ответить на вопрос о существовании и единственности центра размазанной ударной волны в решении задачи (5.9), (5.11). Пусть $C^l[\vartheta_1, \vartheta_2]$ ($l = 0, 1, \dots$) — совокупность непрерывных в $[\vartheta_1, \vartheta_2]$ функций, имеющих непрерывные в $[\vartheta_1, \vartheta_2]$ производные до порядка l включительно.

Теорема 1. *Если выполнены условия:*

1) *уравнение (5.9), где функция \tilde{F} определяется по формулам (5.10), (5.8), имеет единственный положительный корень $hd\vartheta/dx = f(\vartheta)$, причем*

2) $f(\vartheta) > 0$ при $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$, $f(\vartheta_1) = f(\vartheta_2) = 0$;

3) $f(\vartheta) \in C^l[\vartheta_1, \vartheta_2]$,

то существует единственный центр размазанной ударной волны в решении задачи (5.9), (5.11).

Доказательство. Решение уравнения $hd\vartheta/dx = f(\vartheta)$ имеет вид

$$x - x_0 = h\Phi(\vartheta), \quad (5.12)$$

где

$$\Phi(\vartheta) = \int d\vartheta/f(\vartheta), \quad (5.13)$$

x_0 — постоянная интегрирования. Заметим, что функция $\Phi(\vartheta)$ непрерывно дифференцируемая при $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$ с учетом условия 3. При этом $\Phi'(\vartheta) > 0$, если $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$, в силу условия 2. С учетом формул (5.12) и (5.11) получаем, что $\Phi(\vartheta)$ меняет знак в интервале $(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Поэтому уравнение $\Phi(\vartheta) = 0$ имеет единственный корень $\vartheta_0 \in (\vartheta_1, \vartheta_2)$. Так как функция $\Phi(\vartheta)$ не зависит от h и x_0 , величина ϑ_0 также не зависит от них. В соответствии с известными теоремами существования и единственности решений автономных дифференциальных уравнений существует единственное решение задачи (5.9), (5.11), удовлетворяющее условию $\vartheta((x - x_0)/h)|_{x=x_0} = \vartheta_0$. Таким образом, центр размазанной ударной волны является единственным, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если искусственная вязкость q вида (5.4) выбрана так, что удовлетворяются условия теоремы 1, то величина $\max q$ не зависит от конкретной формы q .*

Действительно, при выполнении условий 1–3 решение $\vartheta(x - x_0) \in C^2(-\infty, +\infty)$ с учетом результатов [85]; кроме того,

переход из особой точки $\vartheta = \vartheta_1$ в точку $\vartheta = \vartheta_2$, при возрастании x происходит монотонно в силу условия 2. Следовательно, в данном случае решение ϑ задачи (5.9), (5.11) обладает свойством $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$. Найдем максимум функции $q(\vartheta)$, определяемой формулой (5.7), в промежутке $[\vartheta_1, \vartheta_2]$:

$$\max q = q\left(\sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}\right) = \frac{\gamma+1}{2} m^2 (\sqrt{\vartheta_2} - \sqrt{\vartheta_1})^2. \quad (5.14)$$

Этот факт указан ранее в [185].

Следствие 2. Если $\Phi(\sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}) < 0$ ($\Phi(\sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}) > 0$), то точка максимума искусственной вязкости находится левее (правее) центра размазанной ударной волны. Если, кроме того, обозначить $B \equiv |\Phi(\sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2})|$, то абсцисса точки максимума искусственной вязкости q отстоит от абсциссы центра размазанной ударной волны на расстоянии Bh .

Следствие 3. На фронте устойчивой ударной волны выполняется неравенство $u_1 > u_2$ [118]. Поэтому, если функция $u(x)$ монотонна в зоне «размазывания» ударной волны, здесь имеет место неравенство $du/dx < 0$. Из уравнений (5.1)–(5.3) легко видеть, что в такой зоне будут монотонными также функции ρ , $p + q$, ϑ , при этом получаем соотношения $du/dx < 0$, $\text{sign}(d(p+q)/dx) = \text{sign } m$, $\text{sign}(d\vartheta/dx) = -\text{sign } m$.

Следствие 4. Если функция $f(\vartheta)$ в (5.13) представима в виде

$$f(\vartheta) = f_1(\vartheta) (\vartheta - \vartheta_1)^{\beta_1} (\vartheta_2 - \vartheta)^{\beta_2},$$

где $\beta_1 < 1$, $\beta_2 < 1$ и функция f_1 ограничена и положительна в промежутке $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$, то ширина X зоны размазанной ударной волны конечна.

Действительно, ширина X с учетом формул (5.12), (5.13) определяется как

$$X = h [\Phi(\vartheta_2) - \Phi(\vartheta_1)] = h \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta / f(\vartheta) \quad (5.15)$$

и подынтегральное выражение имеет интегрируемые особенности в точках ϑ_1 и ϑ_2 .

Замечание. Функция F в (5.4) выбрана не зависящей от u с целью обеспечения инвариантности вязкости (5.4) по отношению к преобразованию Галилея.

Следствие 5. Если вязкость (5.4) такова, что удовлетворяются условия теоремы 1 и, кроме того, имеет место равенство $\Phi''(\vartheta_0) = 0$, где ϑ_0 — значение функции ϑ в центре размазанной ударной волны $x = x_0$, то центр размазанной ударной волны совпадает с точкой экстремума функций

$$|du/dx|, \quad d\vartheta/dx, \quad |d(p+q)/dx|. \quad (5.16)$$

Если, к тому же, $\Phi'''(\vartheta_0) > 0$ ($\Phi'''(\vartheta_0) < 0$), то центр размазанной ударной волны — точка максимума (локального минимума) функций (5.16).

Продифференцируем дважды по x обе части равенства (5.12), в итоге получим

$$\Phi''(\theta) (d\theta/dx)^2 + \Phi'(\theta) d^2\theta/dx^2 = 0. \quad (5.17)$$

С учетом условия 2 $\Phi'(\theta) > 0$, поэтому из (5.17) следует, что $(d^2\theta/dx^2)|_{x=x_0} = 0$. Продифференцировав обе части равенства (5.17) по x , находим, что в точке x_0

$$(d\theta/dx)^3 \Phi'''(\theta(x_0)) + \Phi'(\theta(x_0)) (d^3\theta/dx^3)|_{x=x_0} = 0,$$

откуда следует второе утверждение относительно $\theta(x)$; тот же вывод справедлив и для остальных функций в (5.16) с учетом (5.1) — (5.2). Если x_0 — точка минимума функций (5.16), то этот минимум будет локальным, поскольку внутри зоны размазанной ударной волны по условию теоремы 1, $d\theta/dx > 0$, а абсолютный минимум функций (5.16), равный нулю, достигается в концах упомянутой зоны.

Пример. Рассмотрим вязкость q из работ [255, 231]

$$q = \begin{cases} a\rho(hdu/dx)^2, & du/dx < 0, \\ 0, & du/dx \geqslant 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

С учетом формул (5.5), (5.7), (5.18) уравнение (5.9) в рассматриваемом случае имеет вид

$$a(hd\theta/dx)^2 = (1/2)(\gamma + 1)(\theta_2 - \theta)(\theta - \theta_1). \quad (5.19)$$

Разрешая (5.19) как алгебраическое уравнение второй степени относительно $hd\theta/dx$, находим, что в промежутке $\theta_1 < \theta < \theta_2$ у него единственный положительный корень

$$hd\theta/dx = \sqrt{((\gamma + 1)/(2a))(\theta_2 - \theta)(\theta - \theta_1)}. \quad (5.20)$$

С учетом (5.20) легко найти, что функция $\Phi(\theta)$ в равенстве (5.12) примет вид

$$\Phi(\theta) = \sqrt{\frac{2a}{\gamma + 1}} \arcsin \frac{2\theta - \theta_1 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1}. \quad (5.21)$$

Уравнение $\Phi(\theta) = 0$ в промежутке $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ имеет единственный корень $\theta_0 = 0.5(\theta_1 + \theta_2)$. Таким образом, центр размазанной ударной волны существует. Согласно (5.12), (5.21), $\theta = \theta_0$ при $x_0 = x_0 \pm k\pi$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Из (5.12) с учетом (5.21) получаем, что

$$\theta(x - x_0) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \sin \left(\sqrt{\frac{\gamma + 1}{2a}} \frac{x - x_0}{h} \right). \quad (5.22)$$

Для нас представляет интерес лишь участок кривой (5.22), в котором $d\theta/dx > 0$. Это есть участок

$$-\frac{\pi}{2} < \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2a}} \frac{x - x_0}{h} < \frac{\pi}{2}.$$

В рассматриваемом случае решение $\vartheta(x)$ задачи (5.9), (5.11) имеет вид (см. также [116])

$$\vartheta = \begin{cases} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2} \sin \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{2a}} \frac{x - x'_0}{h} \right), \\ |x - x'_0| \leq (\pi/2) \sqrt{2a/(\gamma+1)} h, \\ \vartheta_1, \quad x - x'_0 \leq -(\pi/2) \sqrt{2a/(\gamma+1)} h, \\ \vartheta_2, \quad x - x'_0 \geq (\pi/2) \sqrt{2a/(\gamma+1)} h. \end{cases} \quad (5.23)$$

Из (5.21) следует, что при $x = x'_0$ $\Phi''(\vartheta(x'_0)) = 0$, т. е. в соответствии со следствием 5 теоремы 1, x'_0 — точка максимума функций (5.16); кроме того, при $x = x'$

$$(d^{2n}/dx^{2n})(\vartheta, p+q, u) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть x_* — абсцисса точки максимума искусственной вязкости q (5.18). Легко убедиться, что $\Phi(\sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}) < 0$, поэтому в соответствии со следствием 2 теоремы 1 $x_* < x_0$. Из (5.21) следует: значение $\Phi(\sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2})$ возрастает с увеличением интенсивности ударной волны. Как известно, в случае бесконечно сильной ударной волны $\vartheta_2/\vartheta_1 = (\gamma+1)/(\gamma-1)$, поэтому

$$|x_* - x_0| \leq h \sqrt{2a/(\gamma+1)} \arcsin [(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})^{-1}]. \quad (5.24)$$

Формула (5.24) может дать дополнительную информацию при выборе безразмерного коэффициента a , если потребовать, чтобы выполнялось неравенство $|x_* - x_0| \leq h$. Тогда из (5.24) получаем ограничение на a

$$a \leq 0,5(\gamma+1)\{\arcsin[(\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2})^{-1}]\}^{-2}. \quad (5.25)$$

Например, при $\gamma = 1,4$ находим из (5.25): $a \leq 6,34$. Таким образом, неравенство $|x_* - x_0| \leq h$ выполняется при обычно используемых значениях a (обычно берут $a \leq 4$, см. [255]).

Из формулы (5.20) следует, что ширина X зоны «размазывания» ударной волны в решении задачи (5.9), (5.11) при использовании квадратичной вязкости (5.18) конечна,

$$X = \sqrt{2a/(\gamma+1)} \pi h. \quad (5.26)$$

Из формулы (5.26) следует, что $X \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, так что в пределе $h = 0$ имеем разрывное решение. Если ширина X , определяемая формулой (5.15), оказывается бесконечной, то можно рассмотреть толщину по Прандтлю,

$$X_1 = |\vartheta_2 - \vartheta_1| / (\max_x |d\vartheta/dx|). \quad (5.27)$$

Формула (5.27) определяет размер вдоль оси x области, в которой наиболее существенно изменяется решение ϑ в зоне «размазывания» ударной волны. Если функция $d\vartheta/dx$ непрерывная и сохраня-

ет знак внутри зоны «размазывания», то для вычисления ширины X_1 можно воспользоваться с учетом (5.12) формулой

$$X_1 = h |\vartheta_1 - \vartheta_2| \min_{\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2} |\Phi'(\vartheta)|. \quad (5.28)$$

Из (5.28) следует, что $X_1 \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Таким образом, в пределе опять получаем разрывное решение (см. также [127]). Возникает вопрос, совпадает ли это предельное разрывное решение с обобщенным решением исходных уравнений Эйлера (1.1)–(1.3). Он обсужден в § 6, где рассмотрены более сложные выражения для диссилиативных членов, чем в данном параграфе. Здесь лишь заметим, что если указанная сходимость имеет место при $h \rightarrow 0$, то при оценивании точности различных способов локализации фронтов ударных волн в размазанных профилях разумно использовать введенное выше понятие центра размазанной ударной волны, поскольку в силу определения 1 положение этого центра не зависит от величины шага сетки h в системе координат, связанной с ударной волной. Следовательно, центр размазанной ударной волны в решении задачи (5.9), (5.11) движется с точной скоростью ударной волны. Определение координат центра можно непосредственно использовать как основу алгоритмов локализации ударных фронтов, что осуществлено в [204, 25, 20, 276, 291, 101, 142]. Вопросы практической реализации таких алгоритмов рассмотрены в п. 7.3.

5.2. Анализ искусственных вязкостей

Рассмотрим вопрос о существовании центра размазанной ударной волны в решении системы (5.1)–(5.3) при некоторых конкретных формах искусственной вязкости.

Теорема 2. [25]. *Если безразмерные постоянные a , b , входящие в искусственную вязкость*

$$q = -ah\varphi \left(1 + b\varphi \frac{du}{dx} \right) \min \left(\frac{du}{dx}, 0 \right), \quad (5.29)$$

где c — местная скорость звука, удовлетворяют неравенствам

$$a > 0; \quad b > \frac{|\eta - (\gamma + 1)/(\gamma - 1)| \sqrt{\gamma - 1}}{\left[2\gamma \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \eta + \eta^2 - \frac{\gamma + 1}{\gamma} \eta (1 + \eta) \right) \right]^{1/2}}, \quad (5.30)$$

где $\eta = \vartheta_2/\vartheta_1$, то центр размазанной ударной волны в решении соответствующей задачи (5.9), (5.11) существует и притом один.

Доказательство. Используя формулы (5.7)–(5.9), (5.29), получим для $\vartheta(x)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dx} = & [(\gamma + 1) |m| (\vartheta_2 - \vartheta) (\vartheta - \vartheta_1) / 2] / \{ ah \times \\ & \times [c - b(c^2/\vartheta) ((\gamma - 1)(|m|/2)(1 - (\gamma + 1)\vartheta_1\vartheta_2/((\gamma - 1)\vartheta^2)))^{-1}] \}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где правая часть положительна в интервале $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ в силу (5.30). Решение уравнения (5.31) имеет вид

$$\Phi(\theta) = J_1(\theta) - J_2(\theta) = (x - x_0)/h, \quad (5.32)$$

где $\theta = \vartheta/\vartheta_1$,

$$\begin{aligned} J_1(\theta) &= 2a[0,5\gamma(\gamma-1)]^{1/2}[(\eta-1)(\gamma+1)]^{-1}\{(1-\eta)\times \\ &\times \ln[2(R(\theta))^{0.5} + 2\theta + a_2] - (R(1))^{1/2}\ln[2(R(1)\times \\ &\times (1+(a_2+2)/(\theta-1)+R(1)(\theta-1)^{-2}))^{1/2} + a_2 + 2 + \\ &+ 2R(1)/(\theta-1)] + (R(\eta))^{1/2}\ln[2(R(\eta)(1+(a_2+2\eta)\times \\ &\times |\theta-\eta|^{-1} + R(\eta)(\theta-\eta)^{-2}))^{1/2} + 2R(\eta)/(\theta-\eta) + a_2 + 2\eta]\}; \end{aligned}$$

$$J_2(\theta) = (\gamma+1)^{-1}2ab\ln[(\theta-1)^{\beta_2}(\eta-\theta)^{-\beta_1}(\theta - \sqrt{a_1})^{\beta_3}(\theta + \sqrt{a_1})^{\beta_4}];$$

$$R(\theta) = a_1 + a_2\theta + \theta^2;$$

$$a_1 = (\gamma+1)\eta/(\gamma-1); \quad a_2 = -(\gamma+1)(1+\eta)/\gamma; \quad \eta = \vartheta_2/\vartheta_1; \quad (5.33)$$

$$\beta_i = \Delta_i/\Delta, \quad i = 1, \dots, 4; \quad \Delta = 2(\eta-1)a_1^{1/2}(1-a_1)(a_1-\eta^2);$$

$$\Delta_1 = 2a_1^{1/2}\eta(a_1-1)R(\eta); \quad \Delta_2 = 2a_1^{1/2}R(1)(a_1-\eta^2);$$

$$\Delta_3 = (\eta-1)a_1(a_2+2a_1^{1/2})(a_1^{1/2}+1)(a_1^{1/2}+\eta);$$

$$\Delta_4 = (\eta-1)a_1(a_2+2a_1^{1/2})(a_1^{1/2}-1)(\eta-a_1^{1/2}).$$

Найдем условия на безразмерные коэффициенты a, b в (5.29), при которых функция $\Phi(\theta)$, определяемая формулами (5.32), (5.33), меняет знак в интервале $(1, \eta)$. Для этого сначала сгруппируем в (5.33) члены, содержащие разность $\theta - 1$:

$$\begin{aligned} -a\ln\{[2(R(1)(1+(a_2+2)/(\theta-1)+R(1)(\theta-1)^{-2}))^{1/2} + \\ + 2R(1)/(\theta-1) + a_2 + 2]^{\lambda_1}(\theta-1)^{\lambda_2}\}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

где $\lambda_1 = [R(1)0,5\gamma(\gamma-1)]^{1/2}(\eta-1)^{-1}$, $\lambda_2 = b\beta_2\gamma$. Пользуясь выражением (5.34), легко показать, что для выполнения соотношения

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} \Phi(\theta) = -\infty$$

необходимо, чтобы $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, откуда с учетом неравенства $\beta_2 < 0$ получаем

$$b > [R(1)0,5\gamma(\gamma-1)]^{1/2}/[\beta_2\gamma(\eta-1)] = b_2. \quad (5.35)$$

Исследуя аналогично случай, когда $\theta \rightarrow \eta$, будем иметь из требования $\lim_{\theta \rightarrow \eta} \Phi(\theta) = +\infty$ неравенство

$$b > [R(\eta)0,5\gamma(\gamma-1)]^{1/2}/[\beta_1\gamma(\eta-1)] = b_1. \quad (5.36)$$

Очевидно, что если $b > \max(b_1, b_2)$, то оба неравенства (5.35), (5.36) удовлетворяются. Несложный анализ выражений для b_1, b_2 показывает: $\max(b_1, b_2) = b_1$ и b_1 совпадает с правой частью второго из неравенств (5.30). Таким образом, в случае вязкости (5.29) условие существования центра размазанной ударной волны совпа-

дает с одним из условий положительности $d\theta/dx$ в зоне размазанной ударной волны. Теорема доказана.

Замечание 1. Искусственная вязкость (5.29) является частным случаем псевдовязкости более общего вида

$$q = -ahc\rho \left\{ 1 + \sum_{k=1}^N b_k \left(c\rho \left| \frac{du}{dx} / \frac{dp}{dx} \right| \right)^k \right\} \min \left(\frac{du}{dx}, 0 \right),$$

где $N \geq 1$; b_k , $k = 1, \dots, N$ — неотрицательные постоянные.

Замечание 2. В [25] дан ряд рекомендаций по выбору значений постоянных a , b в (5.29). В [25] показано на примерах расчетов, что вязкость (5.29) при $b \neq 0$ приводит к меньшему «размазыванию» фронта ударной волны, чем вязкость (5.29) с $a \neq 0$, $b = 0$, в то же время при $b \neq 0$ эффективно подавляются осцилляции решения за фронтом ударной волны. Возможный выбор значений коэффициентов a , b в (5.29), указанный в [25] для случая $\gamma = 2$ в уравнении состояния (1.8), это $a = 0,15$, $b = 0,77$.

Теорема 3 [25]. Если безразмерные постоянные a , σ_1 , σ_2 , входящие в искусственную вязкость

$$q = -ah\rho(\sigma_1 c + \sigma_2 h |du/dx|) \min(du/dx, 0), \quad (5.37)$$

где c — местная скорость звука, удовлетворяют неравенствам

$$1 + \eta^2 (\gamma + 1) [4\sigma_2 - a\sigma_1^2 (\gamma - 1)]^2 - 4\eta [a\sigma_1^2 \gamma (\gamma - 1) - 4\sigma_2 (\gamma + 1)] \times \\ \times (a\sigma_1^2 \gamma - 4\sigma_2) \leqslant 0; \quad (5.38)$$

$$a > 0; \quad 4a\sigma_2 (\gamma + 1) < a^2\sigma_1^2 \gamma (\gamma - 1); \quad \sigma_2 \neq 0; \quad (5.39)$$

$$a^2\sigma_1^2 \gamma (\gamma - 1) < b, \quad (5.40)$$

тогда $b = \min(b_1, b_2)$, $\eta = \theta_2/\theta_1$;

$$b_1 = \left\{ [A_1(1)/(A_2(1))^\lambda]^{(\eta-1)} [B_2(\eta)/B_1(\eta)] \sqrt{s_2} \right\}^{1/s_2};$$

$$b_2 = \left\{ [A_1(\eta)/(A_2(\eta))^\lambda]^{-(\eta-1)} [B_2(1)/B_1(1)] \sqrt{s_1} \right\}^{1/s_2};$$

$$A_i(\theta) = 2[aR_i(\theta)]^{0.5} + 2a\theta + b_i; \quad s_i = R_i(1);$$

$$s_2 = R_1(\eta); \quad \lambda = [1 - 4a\sigma_2 (\gamma + 1)/(a^2\sigma_1^2 \gamma (\gamma - 1))]^{0.5};$$

$$B_i(\theta) = 2[R_i(\theta)[a_i + (b_i + 2a_i\theta)/(\eta - 1) + R_i(\theta)(\eta - 1)^{-2}]]^{0.5} + \\ + 2R_i(\theta)/(\eta - 1) + b_i + 2a_i\theta;$$

$$R_i(\theta) = a_i\theta^2 + b_i\theta + c_i, \quad i = 1, 2;$$

$$a_1 = 1; \quad b_1 = -(\gamma + 1)(1 + \eta)/\gamma; \quad c_1 = (\gamma + 1)\eta/(\gamma - 1);$$

$$a_2 = (a\sigma_1)^2 \gamma (\gamma - 1) - 4a\sigma_2 (\gamma + 1); \quad c_2 = a(\gamma + 1)\eta(a\sigma_1^2 \gamma - 4\sigma_2);$$

$$b_2 = (\gamma + 1)(1 + \eta) [4a\sigma_2 - a^2\sigma_1^2 (\gamma - 1)],$$

то центр размазанной ударной волны в решении соответствующей задачи (5.9), (5.11) существует и при том один.

Доказательство этой теоремы аналогично таковому теоремы 2, поэтому его не приводим.

Замечание 1. Неравенства (5.38) и $a > 0$, $4a\sigma_2(\gamma - 1) < \gamma^2\sigma_1^2(\gamma - 1)$ — условия существования непрерывного монотонного перехода в зоне размазанной ударной волны, в то время как неравенство (5.40) — условие существования центра размазанной ударной волны.

Замечание 2. Ширина X размазанной ударной волны при значениях $a \neq 0$, $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, удовлетворяющих условиям (5.38) — (5.40), вычисляется по формуле

$$X = \frac{ha\sigma_1[\gamma(\gamma-1)]^{0.5}}{2^{1/2}(\gamma+1)(\eta-1)} \times \\ \times \{R_1(1)\ln b_1 + R_1(\eta)\ln b_2 - \\ - [(R_1(1))^{0.5} + (R_1(\eta))^{0.5}] \times \\ \times \ln [a^2\sigma_1^2\gamma(\gamma-1)]\}.$$

Замечание 3. Рассмотрим ударную волну слабой интенсивности, когда $\eta = 1 + \varepsilon$, ε — малое положительное число. Линеаризуя выражения для b_1 и b_2 относительно ε , нетрудно показать, что с точностью до членов $O(\varepsilon)$ имеет место соотношение $b = 1 + \varepsilon \ln \varphi(\gamma, a, \sigma_1, \sigma_2)$, где $\varphi > 1$. Тогда вместо неравенства (5.40) можно применять более ограничительное, но очень простое неравенство $a^2\sigma_1^2\gamma(\gamma-1) < 1$.

Замечание 4. В случае $\sigma_2 = 0$ (линейная относительно du/dx вязкость (5.37)) легко видеть, что центр размазанной ударной волны существует и к тому же один при единственном условии $a\sigma_1 > 0$, причем ширина X зоны размазанной ударной волны бесконечна.

В табл. 1 сведены результаты исследования существования центра размазанной ударной волны при использовании некоторых искусственных вязкостей вида (5.4).

Таблица 1

q	$ah^2 p \left(\frac{du}{dx} \right)^*$	$-ah\sigma_1 \rho du/dx$	$-ah\rho du/dx$	$-\frac{ah\rho du/dx}{\sigma_1 h} \left[\frac{\sigma_1 c}{du/dx_1} + \frac{b c \rho du/dx}{du/dx_1} \right]$	$-\frac{ah\rho du/dx}{\sigma_1 h} \left[\frac{\sigma_1 c}{du/dx_1} + \frac{b c \rho du/dx}{du/dx_1} \right]$
[255]	[160]	[125]	[125]	[162]	[162]
Наличие центра размазанной ударной волны	при $a > 0$	при $a > 0$	при $a > 0$	при (5.38), (5.39), (5.40)	при (5.30)
Практический критерий для нахождения центра размазанной ударной волны	по $\max_{du/dx < 0} du/dx $ при $du/dx < 0$	по $\max_{du/dx < 0} du/dx $ при $du/dx < 0$	по $\max_{du/dx < 0} du/dx $ при $du/dx < 0$	по $\max_{du/dx < 0} q$ при $du/dx < 0$, $ \Phi(\sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}) < 1$	по $\max_{du/dx < 0} q$ при $du/dx < 0$, $ \Phi(\sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}) < 1$

§ 6. СХЕМНАЯ ВЯЗКОСТЬ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ЦЕНТРА РАЗМАЗАННОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Как показано в § 3, для описания структуры аппроксимационной вязкости разностных схем газовой динамики пригодно первое дифференциальное приближение (п. д. п.). Структура аппроксимационной вязкости, определяемая уравнениями п. д. п., намного сложнее, чем в случае модельной системы (5.1)–(5.4), подробно рассмотренной в предыдущем параграфе. Кроме того, в § 5 единственным сеточным параметром был лишь шаг h сетки на оси x ; в общем же случае, как следует из § 2, 3, в разностной схеме, аппроксимирующей нестационарную систему (1.1)–(1.3), присутствуют два сеточных параметра h и τ , τ — временной шаг.

Поскольку в настоящее время в газодинамических расчетах применяют в основном дивергентные разностные схемы [118, 120, 127], в дальнейшем ограничимся рассмотрением некоторого класса таких схем. Возьмем класс разностных схем, аппроксимирующих систему (1.11), (1.9) с r -м порядком точности, $r \geq 1$, и таких, что Г-форма их первого дифференциального приближения представима в виде

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(\vec{w})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} h^i \tau^j \vec{F}_{ij} \left(\vec{w}, \frac{\partial \vec{w}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^r \vec{w}}{\partial x^r}, \frac{\partial^r \vec{w}}{\partial x^{r-1} \partial t}, \dots, \frac{\partial^r \vec{w}}{\partial t^r} \right) \right]. \quad (6.1)$$

Выразим производные $\partial^m \vec{w} / \partial x^k \partial t^{m-k}$, $m - k > 0$, входящие в \vec{F}_{ij} , через производные по x , пользуясь алгоритмом, описанным в § 2,

$$\partial^m \vec{w} / \partial x^k \partial t^{m-k} = \vec{f}_{m-k}(\vec{w}, \partial \vec{w} / \partial x, \dots, \partial^m \vec{w} / \partial x^m). \quad (6.2)$$

В результате получим из системы (6.1) П-форму п. д. п.

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(\vec{w})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} h^i \tau^j \vec{\mathcal{F}}_{ij} \left(\vec{w}, \frac{\partial \vec{w}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^r \vec{w}}{\partial x^r} \right) \right]. \quad (6.3)$$

Будем рассматривать решения типа бегущей волны уравнений первого дифференциального приближения (6.3) или (6.1), т. е. решения, зависящие только от переменной $\xi = x - Dt$, где D — скорость стационарной ударной волны. Подставив вместо $\vec{w}(x, t)$ функцию $\vec{w}(\xi)$ в (6.1), (6.3), с учетом результатов § 3 будем иметь следующие две системы обыкновенных дифференциальных урав-

пений:

$$\sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} h^i \tau^j \vec{\mathcal{F}}_{ij} \left(\vec{w}, \frac{d\vec{w}}{d\xi}, -D \frac{d\vec{w}}{d\xi}, \dots, \frac{d^r \vec{w}}{d\xi^r}, \right. \\ \left. - D \frac{d^r \vec{w}}{d\xi^r}, \dots, (-D)^r \frac{d^r \vec{w}}{d\xi^r} \right) = \vec{\varphi}(\vec{w}) - \vec{\varphi}(\vec{W}_1) - D(\vec{w} - \vec{W}_1); \quad (6.4)$$

$$\sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} h^i \tau^j \vec{\mathcal{F}}_{ij} (\vec{w}, d\vec{w}/d\xi, \dots, d^r \vec{w}/d\xi^r) = \vec{\varphi}(\vec{w}) - \vec{\varphi}(\vec{W}_1) - D(\vec{w} - \vec{W}_1), \quad (6.5)$$

где \vec{W}_1 — постоянный вектор, входящий в краевые условия (3.8):

$$\vec{w}(\xi) = \begin{cases} \vec{W}_1, & \xi \rightarrow -\infty; \\ \vec{W}_2, & \xi \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

При $r > 1$ наряду с краевыми условиями (3.8) будем накладывать также условия

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} d\vec{w}/d\xi = 0, \quad r = 2; \quad \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} d\vec{w}/d\xi = 0, \quad r = 3; \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} d^2 \vec{w}/d\xi^2 = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} d\vec{w}/d\xi = 0, \quad r = 4. \quad (6.6)$$

В (6.6) выписаны $(r-1)$ краевых условий для случаев $r = 2, r = 3, r = 4$; $(r-1)$ краевых условий для $r > 4$ записываются из аналогичных соображений. Как известно, решение типа бегущей волны определяется с точностью до сдвига вдоль оси ξ . Пусть ξ_0 — постоянная, характеризующая произвольный сдвиг вдоль оси ξ . Как и в § 5, обозначим через G_s конечный промежуток на оси ξ , в котором наиболее существенно изменяется решение \vec{w} .

Определение 2. Центром размазанной ударной волны будем называть точку $\xi_* \in G_s$, в которой значения компонент вектора решения типа бегущей волны $\vec{w}(\xi_*, \xi_0, h, \tau)$ при краевых условиях (3.8), (6.6) системы уравнений первого дифференциального приближения (6.4) или (6.5) не зависят от h и τ при каждом фиксированном значении ξ_0 .

Замечание. При исследовании вопроса о существовании центра размазанной ударной волны на основе Г-формы п. д. п. (6.1), приводящей к системе (6.4), можно рассматривать более широкий класс схем, чем тот, для которых возможно представление п. д. п. в виде (6.1). Это такой класс схем r -го порядка аппроксимаций, Г-форма п. д. п. которых представлена в виде

$$\vec{\partial w}/\partial t + \vec{\partial \varphi(w)}/\partial x = (\partial/\partial x) \left[\sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} h^i \tau^j \vec{F}_{ij}^{(1)} (\vec{w}, \vec{\partial w}/\partial x, \vec{\partial w}/\partial t, \dots, \vec{\partial^r w}/\partial x^r, \right]$$

$$\left. \frac{\partial^r \vec{w}}{\partial x^{r-1} \partial t}, \dots, \frac{\partial^r \vec{w}}{\partial t^r} \right] + \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} h^{i,j} \vec{F}_{ij}^{(2)} (\vec{w}, \frac{\partial \vec{w}}{\partial x}, \right. \\ \left. \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^r \vec{w}}{\partial x^r}, \frac{\partial^r \vec{w}}{\partial x^{r-1} \partial t}, \dots, \frac{\partial^r \vec{w}}{\partial t^r}) \right]. \quad (6.7)$$

Действительно, подставляя в (6.7) $\vec{w} = \vec{w}(\xi)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно проинтегрировать один раз.

6.1. Связь между дивергентностью разностных схем и п. д. п.

Прежде чем сформулировать класс дивергентных разностных схем для системы (1.11), рассматриваемый в п. 6.2 с точки зрения дифференциальных анализаторов, введем ряд обозначений. Пусть $T_{\pm h}$, $T_{\pm 0}$ — операторы сдвига по x и t такие, что

$$T_{\pm h} \vec{w}(x, t) = \vec{w}(x \pm h, t); \quad T_{\pm 0} \vec{w}(x, t) = \vec{w}(x, t \pm \tau); \\ T_0 = T_{+0}, \quad T_1 = T_{+1}, \quad T_{\pm 1/2} \vec{w}(x, t) = \vec{w}(x \pm h/2, t).$$

Теорема 4. Если конечно-разностная схема, аппроксимирующая систему (1.11), представима в виде

$$(1/\tau) C \{ \beta_1 [T_0 - (\alpha_3 T_1 + \alpha_4 I + \alpha_5 T_{-1})] + \beta_2 [(\alpha_6 T_1 + \\ + \alpha_7 I + \alpha_8 T_{-1}) - T_{-0}] \vec{w}(x, t) + (1/h) [\alpha_1 (T_1 - I) + \\ + \alpha_2 (I - T_{-1})] (\beta_3 T_0 + \beta_4 I + \beta_5 T_{-0}) \vec{w}(x, t) \} = \\ = (1/h) (T_{1/2} - T_{-1/2}) [(1/h) \Omega(\vec{w}(x, t)) (T_{1/2} - T_{-1/2}) \times \\ \times (\beta_6 T_0 + \beta_7 I + \beta_8 T_{-0})] \vec{w}(x, t) \quad (6.8)$$

и выполнены условия:

1) C — трехточечный оператор такой, что его второе дифференциальное приближение \tilde{C} имеет вид

$$\tilde{C} = I + \sum_{i=1}^2 h^i (\partial^i / \partial x^i) a_i(\vec{w}) I, \quad (6.9)$$

где $a_i(\vec{w})$, $\Omega(\vec{w})$ — матрицы размерности 3×3 , которые могут зависеть не только от \vec{w} , но и от производных функций $\vec{w}(x, t)$;

2) элементы матрицы Ω есть величины порядка $O(\tau) + O(h)$;

3) $\alpha_i, \beta_i, i = 1, \dots, 8$ — константы такие, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 1, \quad \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 1; \\ \beta_1 + \beta_2 = 1, \quad \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 1, \quad \beta_6 + \beta_7 + \beta_8 = 1; \quad (6.10) \\ 0 \leq \alpha_j \leq 1, \quad 0 \leq \beta_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, 8,$$

тогда первое дифференциальное приближение разностной схемы (6.8) можно представить в дивергентном виде

$$\vec{\partial w}/\partial t + \vec{\partial \Phi}(\vec{w})/\partial x = \vec{\partial \Psi}(\vec{w})/\partial x. \quad (6.11)$$

Доказательство теоремы сводится к разложению операторов, входящих в схему (6.8), в ряды Тейлора по степеням h и τ относительно точки (x, t) . В результате простых, но довольно громоздких выкладок получается следующее выражение для дифференциального приближения:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\partial w}}{\partial t} + \frac{\vec{\partial \Phi}(\vec{w})}{\partial x} &= \sum_{i=1}^3 \frac{h^i}{i! \tau} [\beta_1 (\alpha_3 + (-1)^i \alpha_5) - \beta_2 (\alpha_6 + (-1)^i \alpha_8)] \times \\ &\times \frac{\vec{\partial^i w}}{\partial x^i} - \sum_{j=2}^3 \tau^{j-1} \frac{1}{j!} [\beta_1 + (-1)^{j-1} \beta_2] \frac{\vec{\partial^j w}}{\partial t^j} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h^i \tau^{j-1} \frac{1}{j!} \times \\ &\times [\beta_1 + (-1)^{j-1} \beta_2] \frac{\partial^i}{\partial x^i} a_i(\vec{w}) \frac{\vec{\partial^j w}}{\partial t^j} - \sum_{j=1}^2 \frac{\tau^j}{j!} [\beta_3 + (-1)^j \beta_5] \frac{\vec{\partial^{j+1} \Phi}}{\partial t^j \partial x} - \\ &- \sum_{i=2}^3 \frac{h^{i-1}}{i!} [\alpha_1 + (-1)^{i-1} \alpha_2] \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\vec{\Phi} + \sum_{j=1}^2 \frac{\tau^j}{j!} [\beta_3 + (-1)^j \beta_5] \frac{\vec{\partial^j \Phi}}{\partial t^j} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\Omega(\vec{w}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\vec{w} + \tau (\beta_6 - \beta_8) \frac{\vec{\partial w}}{\partial t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Чтобы привести (6.12) к виду (6.11), достаточно заменить в правой части (6.12) дифференцирование по t на дифференцирование по x . Используя первое дифференциальное приближение, которое легко получить из (6.12), можем найти выражение

$$\frac{\vec{\partial^j w}}{\partial t^j} = (-1)^j \frac{\vec{\partial^{j-1}}}{\partial x^{j-1}} \left(A^j \frac{\vec{\partial w}}{\partial x} \right) + \delta_j^1 \frac{\vec{\partial \Phi}_1}{\partial x} + \delta_j^2 \frac{\vec{\partial \Phi}_2}{\partial x}, \quad (6.13)$$

$j = 1, 2$, $\vec{\partial^0 w}/\partial x^0 = I$, $A = \vec{\partial \Phi}/\vec{\partial w}$, δ_j^1, δ_j^2 — символы Кронекера,

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_1(\vec{w}) &= \tau (\beta_3 - \beta_5 - 0,5 \beta_1 + 0,5 \beta_2) A^2 \vec{\partial w}/\partial x + \\ &+ h a_1(\vec{w}) A(\vec{w}) \vec{\partial w}/\partial x - (h/2) (\alpha_4 - \alpha_2) A \vec{\partial w}/\partial x + \Omega \vec{\partial w}/\partial x; \\ \vec{\Phi}_2(\vec{w}) &= -\tau (\beta_3 - \beta_5 - 0,5 \beta_1 + 0,5 \beta_2) (\partial/\partial x) (A^2 \vec{\partial w}/\partial x) - \\ &- (\partial/\partial x) (\Omega A \vec{\partial w}/\partial x) - h A [(\partial/\partial x) (a_1 A \vec{\partial w}/\partial x) + \\ &+ a_1 (\partial A/\partial x) (\vec{\partial w}/\partial x)] + (h/2) (\alpha_1 - \alpha_2) (\partial/\partial x) (A^2 \vec{\partial w}/\partial x). \end{aligned}$$

Используя формулы (6.12) и (6.13), а также соотношения (6.10), легко найти функцию $\vec{\Psi}(\vec{w})$, входящую в (6.11):

$$\vec{\Psi}(\vec{w}) = \sum_{i=1}^3 h^i / (i! \tau) [\beta_1 (\alpha_3 + (-1)^i \alpha_5) - \beta_2 (\alpha_6 + (-1)^i \alpha_8)] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times (\partial^{i-1} \vec{w} / \partial x^{i-1}) - \sum_{j=2}^3 (\tau^{j-1} / j!) [\beta_1 + (-1)^{j-1} \beta_2] [(-1)^j \times \\
& \quad \times (\partial^{j-2} / \partial x^{j-2}) (A^j \vec{\partial w} / \partial x) + \delta_j^1 \vec{\Phi}_1 + \delta_j^2 \vec{\Phi}_2] - \\
& - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (h^i \tau^{j-1} / j!) [\beta_1 + (-1)^{j-1} \beta_2] (\partial^{i-1} / \partial x^{i-1}) [a_i(\vec{w}) (-1)^j \times \\
& \times (\partial^{j-1} / \partial x^{j-1}) (A^j \vec{\partial w} / \partial x) + a_i(\vec{w}) \delta_j^1 \vec{\partial \Phi}_1 / \partial x + a_i(\vec{w}) \delta_j^2 \vec{\partial \Phi}_2 / \partial x] - \sum_{j=1}^2 (\tau^j / j!) \times \\
& \times [\beta_3 + (-1)^j \beta_5] [(-1)^{j+1} (\partial^{j-1} / \partial x^{j-1}) (A^{j+1} \vec{\partial w} / \partial x) - \delta_j^1 \vec{\Phi}_1 - \delta_j^2 \vec{\Phi}_2] - \\
& - \sum_{i=2}^3 (h^{i-1} / i!) (\alpha_1 + (-1)^{i-1} \alpha_2) (\partial^{i-1} / \partial x^{i-1}) [\vec{\Phi} - \tau (\beta_3 - \beta_5) A^2 \vec{\partial w} / \partial x] + \\
& + \Omega(\vec{w}) (\partial / \partial x) [\vec{w} - \tau (\beta_6 - \beta_8) (A \vec{\partial w} / \partial x - \vec{\partial \Phi}_1 / \partial x)],
\end{aligned}$$

что и требовалось *.

6.2. О существовании центра размазанной ударной волны

Рассмотрим вопрос о существовании центра размазанной ударной волны для многопараметрического семейства разностных схем (6.8), аппроксимирующих систему уравнений газовой динамики в переменных Эйлера вида (1.11), (1.9). Предположим, что постоянные коэффициенты α_i , β_i в схеме (6.8) и матрицы $a_i(\vec{w})$, $\Omega(\vec{w})$ удовлетворяют условиям:

$$1) \beta_1(\alpha_3 - \alpha_5) - \beta_2(\alpha_6 - \alpha_8) = 0;$$

$$2) h D a_1(\vec{w}) + \tau(\beta_3 - \beta_5) D A(\vec{w}) - (h/2)(\alpha_6 - \alpha_2) A(\vec{w}) + \Omega(\vec{w}) = \beta_0(D, h, \tau) I;$$

$$3) e = (h^2/2\tau)[\beta_1(\alpha_3 + \alpha_5) - \beta_2(\alpha_6 + \alpha_8)] - (\tau/2)(\beta_1 - \beta_2) D^2 + \beta_0 > 0.$$

Подставим в формулу (6.12) $\vec{w} = \vec{w}(\xi)$, получим

$$\begin{aligned}
& \vec{\psi}(\vec{w}) = \sum_{i=1}^3 \frac{h^i}{i! \tau} [\beta_1(\alpha_3 + (-1)^i \alpha_5) - \beta_2(\alpha_6 + (-1)^i \alpha_8)] \frac{d^{i-1} \vec{w}}{d\xi^{i-1}} - \\
& - \sum_{j=2}^3 \tau^{j-1} \frac{1}{j!} [\beta_1 + (-1)^{j-1} \beta_2] \frac{d^{j-1} \vec{w}}{d\xi^{j-1}} (-D)^j - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h^i \tau^{j-1} \frac{(-D)^j}{j!} \times \\
& \times [\beta_1 + (-1)^{j-1} \beta_2] \frac{d^{i-1}}{d\xi^{i-1}} a_i(\vec{w}) \frac{d^j \vec{w}}{d\xi^j} - \sum_{j=1}^2 \frac{\tau^j}{j!} [\beta_3 + (-1)^j \beta_5] \frac{d^j \vec{\Phi}}{d\xi^j} (-D)^j - \\
& - \sum_{i=2}^3 \frac{h^{i-1}}{i!} [\alpha_1 + (-1)^{i-1} \alpha_2] \frac{d^{i-1}}{d\xi^{i-1}} \left[\vec{\Phi} + \sum_{j=1}^2 \frac{\tau^j}{j!} (\beta_3 + (-1)^j \beta_5) (-D)^j \times \right. \\
& \left. \times \frac{d^j}{d\xi^j} \vec{\Phi} \right] + \Omega(\vec{w}) \frac{d}{d\xi} \left(\vec{w} + \tau (\beta_6 - \beta_8) (-D) \frac{d \vec{w}}{d\xi} \right). \quad (6.14)
\end{aligned}$$

* Схема с оператором C вида (6.9) для системы (1.11) рассмотрена в [106].

С помощью формулы (6.14) легко получить выражение для п. д. п. схемы (6.8) на решении типа бегущей волны, удовлетворяющем краевым условиям (3.8):

$$B(\vec{w}, h, \tau) d\vec{w}/d\xi = \vec{\varphi}(\vec{w}) - D_1 \vec{w} - \vec{\varphi}(\vec{W}_1) + D_1 \vec{W}_1, \quad (6.15)$$

где

$$\begin{aligned} B(\vec{w}, h, \tau) &= (h^2/(2\tau)) [\beta_1(\alpha_3 + \alpha_5) - \beta_2(\alpha_6 + \alpha_8)] I - (\tau/2)(\beta_1 - \beta_2) D^2 I + \\ &+ h a_4(\vec{w}) D + \tau(\beta_3 - \beta_5) D A(\vec{w}) - (h/2)(\alpha_1 - \alpha_2) A(\vec{w}) + \Omega(\vec{w}); \quad (6.16) \\ D_1 &= D + (h/\tau)[\beta_1(\alpha_3 - \alpha_5) - \beta_2(\alpha_6 - \alpha_8)]. \end{aligned}$$

Заметим, что $D_1 = D$ в силу условия 1. С учетом условия 2 систему (6.15) перепишем в виде

$$\varepsilon d\vec{w}/d\xi = \vec{\varphi}(\vec{w}) - \vec{\varphi}(\vec{W}_1) - D(\vec{w} - \vec{W}_1). \quad (6.17)$$

Поскольку рассматривается система уравнений Эйлера (1.11), (1.9), (1.8), можно записать (6.17) так:

$$\begin{aligned} dw_1/d\xi &= (1/\varepsilon) g_1(w_1, w_2, w_3); \quad dw_2/d\xi = \\ &= (1/\varepsilon) g_2(w_1, w_2, w_3); \quad dw_3/d\xi = (1/\varepsilon) g_3(w_1, w_2, w_3), \quad (6.18) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \{w_1, w_2, w_3\}, \quad w_1 = \rho, \quad w_2 = \rho u, \quad w_3 = \rho \left[\frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{u^2}{2} \right]; \\ \vec{W}_1 &= \{W_{11}, W_{12}, W_{13}\}; \quad (6.19) \\ \vec{g} &= \{g_1, g_2, g_3\}, \quad \vec{g} = \vec{\varphi}(\vec{w}) - \vec{\varphi}(\vec{W}_1) - D(\vec{w} - \vec{W}_1); \\ \vec{\varphi} &= \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}, \quad \varphi_1 = w_2, \quad \varphi_2 = (\gamma - 1) \left(w_3 - \frac{1}{2} \frac{w_2^2}{w_1} \right) + \frac{w_2^2}{w_1}; \\ \varphi_3 &= w_2 w_3 / w_1 + (\gamma - 1) \left(w_3 - \frac{1}{2} w_2^2 / w_1 \right) w_2 / w_1, \end{aligned}$$

здесь γ — постоянная в уравнении состояния (1.8). В [207] доказано существование непрерывного решения задачи (6.17), (3.8) для случая слабых ударных волн. Если предположить, что для ударных волн произвольной конечной интенсивности существует непрерывно дифференцируемое решение задачи (6.17), (3.8), то можно доказать существование центра размазанной ударной волны следующим образом.

Так как система (6.18) автономная, ее можно свести к двум уравнениям относительно функций $w_2(w_1)$, $w_3(w_1)$

$$\frac{dw_2}{dw_1} = r_1(w_1, w_2, w_3); \quad \frac{dw_3}{dw_1} = r_2(w_1, w_2, w_3), \quad (6.20)$$

где $r_j(w_1, w_2, w_3) = g_{j+1}(w_1, w_2, w_3)/g_1(w_1, w_2, w_3)$, $j = 1, 2$. Решив систему (6.20), получим уравнение для определения $w_1(\xi)$

$$dw_1/d\xi = (1/\varepsilon) g_1(w_1, w_2(w_1), w_3(w_1)) = (1/\varepsilon) \tilde{g}_1(w_1). \quad (6.21)$$

решение (6.21) имеет вид

$$\Phi(w_1) = \frac{\xi - \xi_0}{\varepsilon}, \quad \Phi(w_1) = \int \frac{dw_1}{g_1(w_1)}. \quad (6.22)$$

Функция $\Phi(w_1)$ не зависит от ε , поскольку ε не входит в систему (6.20) для определения $w_2(w_1)$, $w_3(w_1)$. Чтобы убедиться в монотонности непрерывно дифференцируемой функции $w_1(\xi)$ в зоне размазанной ударной волны, достаточно показать, что внутри этой зоны (т. е. при конечных ξ) система (6.17) не имеет стационарных особых точек. Действительно, пусть w_* — еще одна особая точка системы (6.17) наряду с особыми точками \vec{W}_1 и \vec{W}_2 , т. е.

$$\vec{\varphi}(w_*) - \vec{\varphi}(\vec{W}_1) - D(\vec{w}_* - \vec{W}_1) = 0. \quad (6.23)$$

Эта алгебраическая система имеет, как известно (см. [118]), два решения: $\vec{w}_* = \vec{W}_1$, $\vec{w}_* = \vec{W}_2$, т. е. получаем, что \vec{w}_* совпадает с одним из постоянных предельных значений функции $w_*(\xi)$. Согласно общим свойствам автономных систем вида (6.17) [111, 85], значения $\vec{w}_* = \vec{W}_1$ и $\vec{w}_* = \vec{W}_2$ могут достигаться только при $\xi \rightarrow -\infty$ и при $\xi \rightarrow +\infty$ соответственно. С учетом установленной монотонности функции $w_1(\xi)$ в зоне «размазывания» ударной волны и того факта, что в волне происходит сжатие вещества, в силу чего $\rho_2 - \rho_1 < 0$, в этой зоне имеет место неравенство $1/\tilde{g}_1(w_1) < 0$. Легко показать, что функция $\Phi(w_1)$ меняет знак в интервале (W_{21}, W_{11}) , $\vec{W}_2 = \{\vec{W}_{21}, \vec{W}_{22}, \vec{W}_{23}\}$. Действительно, аргумент ξ меняется от $-\infty$ до $+\infty$ при движении вдоль интегральной кривой $w(\xi)$ от особой точки $w = \vec{W}_1$ к $w = \vec{W}_2$. Тогда из первой формулы в (6.22) приходим к выводу, что функция $\Phi(w_1)$ меняет знак в интервале (W_{21}, W_{11}) . В сочетании с монотонностью и непрерывностью функции $1/\tilde{g}_1(w_1)$ это означает, что функция $\Phi(w_1)$ имеет единственный корень $w_{10} \in (W_{21}, W_{11})$. В точке ξ_0 значения функций w_2 , w_3 также не зависят от ε , поскольку в этой точке $w_2 = w_2(w_{10})$, $w_3 = w_3(w_{10})$, где функции $w_2(w_1)$, $w_3(w_1)$ есть решение системы (6.20). На этом завершается доказательство существования центра размазанной ударной волны в решении задачи (6.17), (3.8).

В том случае, когда матрица коэффициентов аппроксимационной вязкости $B(w, h, \tau)$ в системе обыкновенных дифференциальных уравнений отличается от диагональной матрицы $B = \varepsilon(D, h, \tau)I$, исследование вопроса о существовании и единственности центра размазанной ударной волны в решении задач вида (3.6), (3.8) можно проводить с привлечением методов качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, по этому вопросу [3, 209]). Исследование разбивается на два этапа: на первом с помощью упомянутых качественных методов устанавливают существование и свойства гладкости интегральной кривой $w = \vec{w}(\xi)$,

соединяющей особые точки $\vec{w} = \vec{W}_1$ и $\vec{w} = \vec{W}_2$. На втором этапе выясняют существование и единственность центра размазанной ударной волны. При проведении исследований первого этапа могут возникнуть вопросы о качественном поведении интегральных кривых системы вида (3.6) в фазовом пространстве $\{w_1, w_2, w_3\}$ в окрестности внутренних особых точек (см. § 3). Для анализа решений трехмерных автономных систем в окрестности седловидных особых точек применяют ряд качественных приемов и методов (см., например, [81, 29, 47, 165]). В свое время авторы предприняли попытку исследования по вышеуказанной схеме п. д. п. разностного метода «распад разрыва» [33], к сожалению, это сложное исследование так и не было доведено до конца.

В [166] указаны примеры существования и несуществования центра размазанной ударной волны при использовании конечно-разностных схем сквозного счета для численного решения задач, в которых присутствуют ударные волны с релаксацией. Такие особенности с зоной релаксации, примыкающей к фронту волны, встречаются, например, в неравновесной газодинамике, в динамике многофазных сред.

Поскольку, как и в § 5, положение центра размазанной ударной волны в решении задачи (3.6), (3.8) принимается за основу при оценивании точности локализации ударных фронтов внутри зоны их «размазывания», после выяснения вопроса о существовании и единственности центра размазанной ударной волны должен последовать этап исследования сходимости решения задачи с аппроксимационной вязкостью к обобщенному решению уравнений течения невязкого газа (1.1)–(1.3). Для случая, когда матрица коэффициентов вязкости $B(w, h, \tau)$ в системе (3.6) имеет вид $B = \varepsilon I$, где $\varepsilon = \text{const} > 0$ — достаточно малая величина, в [207] доказана сходимость решения задачи с вязкостью (3.6), (3.8) при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению «невязкой» гиперболической системы (1.11). Обзор ряда аналогичных исследований дан в [193]. В [83] на примере вязкого баротропного газа рассмотрен вопрос о сходимости к обобщенному решению соответствующей системы без вязкости, когда коэффициент вязкости $\mu \rightarrow 0$, при уравнении состояния, соответствующем гипотетическому газу Чаплыгина, для которого показатель адиабаты $\gamma = -1$. В [118] процитирован ряд примеров такого подбора матрицы B в системе (3.6), когда при стремлении малого параметра к нулю имеет место неединственность обобщенного решения. Проблема установления общих критериев, которым должны удовлетворять матрицы B в (3.6), чтобы получить сходимость к единственному обобщенному решению при $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, до сих пор остается нерешенной.

Исследование вопросов существования и единственности центра размазанной ударной волны и сходимости к обобщенному решению при $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ в случае разностных схем второго и более высоких порядков точности, т. е. когда $r \geq 2$ в (6.4)–(6.6), до настоящего времени в литературе отсутствует. Доказательство суще-

ствования и единственности непрерывного решения задач типа (6.4), (3.8), (6.6) при $r=2$ существенно затрудняется осциллирующим характером решения $\vec{w}(\xi)$ в окрестности ударной волны. Для случая аппроксимации модельного уравнения $u_t + uu_x = 0$ наличие таких осцилляций, а также солитоноподобных решений соответствующих уравнений п. д. п. показано в ряде работ (см., например, [240, 55, 100]).

Имеющаяся обширная практика расчетов разрывных течений газа с использованием хорошо зарекомендовавших себя конечно-разностных схем сквозного счета (как правило, они дивергентные или консервативные) указывает: точность численных решений улучшается при измельчении пространственной сетки, т. е. при уменьшении шага h . В этих случаях разумно ожидать, что непосредственное использование понятия центра размазанной ударной волны для локализации ее фронта будет давать хорошие результаты.

Аналогично способу определения положения сильного разрыва в зоне размазывания ударной волны, основанному на вычислении абсциссы точки максимума искусственной вязкости q , введенной аддитивно в давление (см. § 5), можно рассмотреть метод, в котором положение разрыва находят по максимуму модуля какой-либо компоненты вектора $B(\vec{w}, h, \tau) \vec{dw}/d\xi$, входящего в систему уравнений п. д. п. (3.6). В [276] изложены некоторые предварительные результаты исследования данного способа локализации, в частности, найдено некоторое необходимое условие экстремума компонент вектора $B(\vec{w}, h, \tau) \vec{dw}/d\xi$.

Следуя [276], рассмотрим гиперболическую систему

$$\partial \vec{U} / \partial t + \partial \vec{\Phi}(\vec{U}) / \partial x = 0; \quad \vec{U} = (U_1, \dots, U_n)^T; \quad \vec{\Phi} = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)^T. \quad (6.24)$$

С учетом результатов работы [233] будем предполагать выполнение на линии разрыва соотношения

$$D[\vec{U}] = [\vec{\Phi}], \quad (6.25)$$

где символ $[\vec{\Phi}]$ обозначает скачок через линию разрыва и определяется по (1.20), а $D = D(t)$ — скорость распространения разрыва. Соотношения (6.25) являются обобщением условий Ренкина — Гюгонио (1.22) — (1.24). Относительно системы (6.24) предполагаем далее, что она допускает наличие ударных волн в смысле определения, данного в [233], в частности стационарных. Аппроксимируем систему (6.24) дивергентной конечно-разностной схемой первого порядка точности такой, что ее первое дифференциальное приближение представимо в виде (3.4). Как и в § 3, ищем решение типа бегущей волны системы (3.4), удовлетворяющее условиям (3.8).

Предположим, что матрица $A = d\vec{\Phi}/d\vec{w}$ имеет n действительных собственных значений $\lambda_1(\vec{w}), \dots, \lambda_n(\vec{w})$, причем $\lambda_1(\vec{w}) < \lambda_2(\vec{w}) < \dots < \lambda_n(\vec{w})$ в зоне размазанной ударной волны, где функции $\lambda_i(\vec{w})$,

$j = 1, \dots, n$, предполагаются непрерывными и монотонными. Покажем, что, если $w(\xi) \in C^2(-\infty, +\infty)$, элементы матрицы $B(w, h, \tau)$ непрерывно дифференцируемы по компонентам w , существует такой номер k , $1 \leq k \leq n$, что

$$\lambda_k(\vec{W}_1) > D > \lambda_k(\vec{W}_2) \quad (6.26)$$

и компоненты вектора аппроксимационной вязкости \vec{Q} в уравнении (3.6)

$$\vec{Q} = B \vec{w}/d\xi; \quad \vec{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)^T \quad (6.27)$$

достигают экстремума в одной точке ξ_0 , общей для всех компонент вектора \vec{Q} , тогда в точке ξ_0 имеет место соотношение

$$\lambda_k(w) = D. \quad (6.28)$$

Очевидно, что в точке экстремума компонент вектора (6.27) должно выполняться равенство

$$(d/d\xi)[B(w, h, \tau) \vec{w}/d\xi] = 0.$$

Продифференцировав обе части (3.6) по ξ , получим в указанной точке

$$[A(\vec{w}) - DI](d\vec{w}/d\xi) = 0, \quad (6.29)$$

где I — единичная матрица. Рассмотрим (6.29) как алгебраическую систему для определения компонент вектора $d\vec{w}/d\xi$. Пусть в зоне размазанной ударной волны $|d\vec{w}/d\xi| \neq 0$. Тогда нужно положить $\det[A(\vec{w}) - DI] = 0$ для существования нетривиального решения системы (6.29). Так как

$$\det[A(\vec{w}) - DI] = \prod_{j=1}^n [\lambda_j(\vec{w}) - D],$$

с учетом неравенств (6.26) имеем соотношение (6.28). Заметим, что равенство (6.28) есть лишь необходимое условие экстремума величины (6.27). Для выполнения достаточного условия экстремума необходимо, чтобы производная

$$(d^2/d\xi^2)[B(w, h, \tau) \vec{w}/d\xi] \quad (6.30)$$

отличалась от нуля в точке $\xi = \xi_0$ предполагаемого экстремума. Прежде чем воспользоваться величиной (6.30), нужно выяснить, обладают ли функции $B(w, h, \tau)$ и $d\vec{w}/d\xi$, входящие в (6.30), необходимой степенью гладкости и дифференцируемости. Если, например, элементы матрицы B — полиномиальные функции компонент вектора w (см. [118, 154]), то наличие вторых непрерывных производных этих элементов по компонентам w очевидно.

Рассмотрим теперь случай, когда (6.24) является системой уравнений Эйлера, описывающих течение невязкой сжимаемой жидкости. Пусть в некоторой точке $\xi = \xi_0$ выполнены необходимые и достаточные условия экстремума величин (6.27). Тогда точка движется со скоростью ударной волны D . Действительно, если ударная волна в газе перемещается слева направо, $D > 0$ и в силу теоремы Цемпленя имеют место неравенства

$$u_1 + c_1 > D > u_2 + c_2, \quad (6.31)$$

где u, c — соответственно скорости газа и звука. С учетом формул (1.16) $\lambda_s = u + c$, следовательно, в (6.26) $k = 3$ в силу (6.31) и

$$u(\xi_0) + c(\xi_0) = D. \quad (6.32)$$

Как указано в [261], характеристики численного решения, имеющие наклон $(u + c)$ в плоскости (x, t) , не пересекаются на ударной волне в отличие от точного решения, а асимптотически приближаются к линии, соответствующей траектории ударного фронта. Отсюда следует с учетом (6.32), что точка экстремума величины (6.27) движется вдоль траектории ударной волны.

§ 7. АНАЛИЗ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ГАЗОДИНАМИКИ

7.1. Схемы первого порядка точности

Проанализируем ряд известных разностных схем с точки зрения теорем, доказанных в § 5, 6.

Схема Лакса [234] получается как частный случай (6.8), если в последней положить

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1; \quad \beta_2 = 0; \quad \alpha_3 = \alpha_5 = 0,5; \quad \alpha_4 = 0; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0,5; \\ \beta_3 &= \beta_5 = 0; \quad \beta_4 = 1; \quad \Omega(\vec{w}) = a_1(\vec{w}) = a_2(\vec{w}) = 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Система (6.15) принимает вид (6.17), где $\varepsilon = h^2/(2\tau) - \tau D^2/2$ с учетом (7.1). Неравенство $\varepsilon > 0$ в силу теоремы Цемпленя (1.29) не противоречит известному условию устойчивости схемы Лакса. Таким образом, центр размазанной ударной волны для схемы Лакса существует по меньшей мере для ударных волн небольшой интенсивности. На рис. 7 приведен пример расчета по схеме Лакса за-

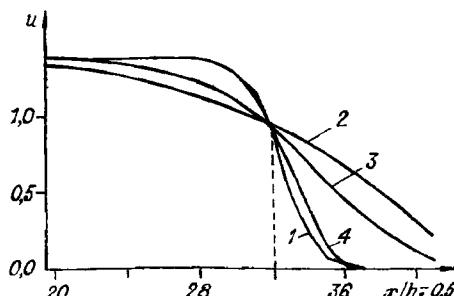


Рис. 7. Схема Лакса.

1 — $h_1, 2\tau_1$; 2 — $h_1, \tau_1/2$; 3 — h_1, τ_1 ;
4 — $h_1/3, \tau_1/3$.

дачи о движении стационарной ударной волны конечной интенсивности (давления $p_1 = 5$, $p_2 = 1$) [167]. Абсцисса точки пересечения графиков конечно-разностных решений, полученных по схеме Лакса при различных τ и h , совпадает с точным положением ударного фронта в пределах погрешности $0,1 h$.

Схема Русанова [122]. Для ее получения из семейства схем (6.8) достаточно положить

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1, \quad \beta_2 = 0, \quad \alpha_3 = \alpha_5 = 0, \quad \alpha_4 = 1, \quad C = I, \quad \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0, \\ \alpha_1 &= \alpha_2 = 0,5, \quad \beta_3 = \beta_5 = 0, \quad \beta_4 = 1, \quad \Omega(\vec{w}) = (\hbar/2)\omega(|u| + c)I, \\ \omega &= \text{const}, \quad \beta_6 = \beta_8 = 0, \quad \beta_7 = 1, \end{aligned}$$

где c — местная скорость звука. Г-форма п. д. п. схемы Русанова с учетом (6.12) имеет вид

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\Phi}(\vec{w})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\omega \frac{\hbar}{2} (|u| + c) \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \right] - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2}. \quad (7.2)$$

Подставляя в систему (7.2) $\vec{w} = \vec{w}(\xi)$, где ξ определяется по формуле (3.1), получим

$$\frac{\hbar}{2} [\omega (|u| + c) - \kappa D^2] \frac{d\vec{w}}{d\xi} = \vec{\Phi}(\vec{w}) - D\vec{w} - \vec{\Phi}(\vec{W}_1) + D\vec{W}_1, \quad (7.3)$$

где $\kappa = \tau/\hbar$. Из (7.3) следует, что $\kappa = \text{const} > 0$ — необходимое условие существования центра размазанной ударной волны, так как в рассматриваемом случае аналог формул (6.22) записывается как

$$\Phi(w_1) = \frac{\xi - \xi_0}{\hbar}, \quad \Phi(w_1) = \int \frac{[\omega (|u| + c) - \kappa D^2] dw_1}{2\tilde{g}_1(w_1)}.$$

Метод частиц в ячейках [150] исследуем в асимптотическом приближении, когда число частиц в каждой ячейке стремится к бесконечности. Тогда может быть получена Г-форма п. д. п. схемы полного шага метода частиц в ячейках [25, 12]

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= \left(\frac{\hbar}{2} |u| \rho_x \right)_x + \tau (p_{xx} - 0,5 \rho_{tt}); \\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x &= \left[\frac{\hbar}{2} |u| (\rho u)_x \right]_x + \tau [2(p_x u)_x - 0,5 (\rho u)_{tt}]; \\ (\rho E)_t + (pu + \rho u E)_x &= \left[\frac{\hbar}{2} |u| (\rho E)_x \right]_x + \tau [(p_x E)_x + ((1/(2\rho)) pp_x)_x + \\ &\quad + (u(pu)_x)_x - 0,5 (\rho E)_{tt}], \end{aligned} \quad (7.4)$$

где $E = e + 0,5u^2$. Метод FLIC [210] имеет то же самое п. д. п., если в нем не вводить искусственные вязкости в схему эйлерова этапа расчета. Рассмотрим случай, когда при различных значениях шага h шаг τ связан с h зависимостью

$$\tau = \kappa h, \quad \kappa = \text{const} > 0. \quad (7.5)$$

Используя векторы \vec{w} и $\vec{\varphi}$ с компонентами, определяемыми по формулам (6.19), можно из (7.4) на решении типа бегущей волны $w = \vec{w}(\xi)$, $\xi = x - Dt$, получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{h}{2} B(\vec{w}, \kappa) \frac{d\vec{w}}{d\xi} = \vec{\varphi}(\vec{w}) - D\vec{w} - \vec{\varphi}(\vec{W}_1) + D\vec{W}_1, \quad (7.6)$$

где матрица B имеет вид

$$B = (|u| - \kappa D^2) I + \kappa(\gamma - 1) \tilde{B}(\vec{w}), \quad (7.7)$$

$$\tilde{B}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} u^2 & -2u & 2 \\ 2u^3 & -4u^2 & 4u \\ u^3 \left(2u^2 - E + \frac{c^2}{2\gamma}\right), & -3u^3 - \frac{c^2 u}{\gamma}, & 2 \left(E + u^2 + \frac{c^2}{2\gamma}\right) \end{pmatrix},$$

c — местная скорость звука. Из формулы (7.7) следует, что матрица B отличается от диагональной. Заменив в (7.6) независимую переменную ξ по формуле

$$\eta = (\xi - \xi_0)/h, \quad (7.9)$$

перепишем систему (7.6) в виде

$$\frac{1}{2} B(\vec{w}, \kappa) \frac{d\vec{w}}{d\eta} = \vec{\varphi}(\vec{w}) - D\vec{w} - \vec{\varphi}(\vec{W}_1) + D\vec{W}_1. \quad (7.10)$$

Из (7.10) вытекает: если решение системы (7.10) при краевых условиях (3.8) существует, то оно, очевидно, является функцией независимой переменной η и постоянных κ , D , \vec{W}_1 :

$$\vec{w} = \vec{w}(\eta, \kappa, D, \vec{W}_1). \quad (7.11)$$

Из соотношения (7.11) следует, что различным значениям постоянной κ соответствуют разные графики решения \vec{w} . Таким образом, если при расчетах на трех сетках по x не соблюдать условие $\kappa = \text{const}$, то полученные три графика решения не пересекутся в одной точке, т. е. центр размазанной ударной волны не существует. Итак, $\tau/h = \text{const}$ — необходимое условие существования центра размазанной ударной волны для методов частиц в ячейках [150] и метода «жидкость в ячейках» [210]. С другой стороны, из формулы (7.7) следует, что

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} B(\vec{w}, \kappa) = |u| I,$$

т. е. матрица B при малых κ почти не отличается от диагональной.

На рис. 8 приведены результаты расчета по модифицированному методу Харлоу [25] задачи о движении стационарной ударной волны по покоящемуся газу, полученные на трех различных сетках вдоль оси x . При этом в случае рис. 8, а соблюдалось условие $\tau/h = \text{const}$,

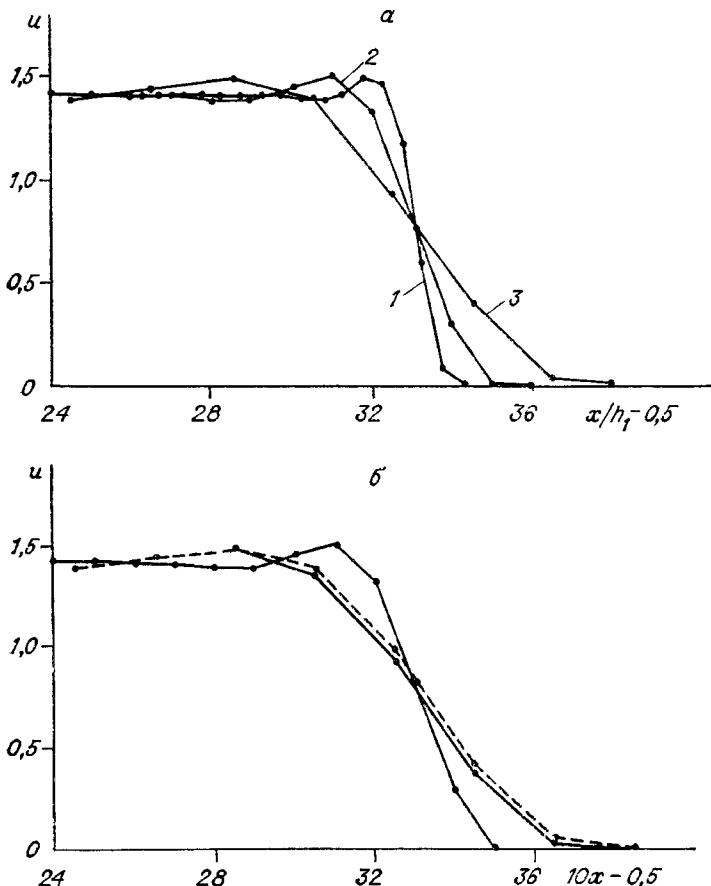


Рис. 8. Результаты расчета по методу Харлоу:
 $a - \tau/h = \text{const}; b - \tau/h \neq \text{const}.$
 1 — $0,5h_1$, 2 — h_1 ; 3 — $2h_1$

а на рис. 8, б это условие было преднамеренно нарушено. Расчеты подтверждают факт отсутствия центра размазанной ударной волны при различных κ .

Рассмотрение, аналогичное предыдущему для метода «крупных частиц» [12], приводит к матрице коэффициентов аппроксимационной вязкости вида (7.7), где матрица $\vec{B}(w)$ несколько отличается от (7.8). Таким образом, и в случае метода «крупных частиц» условие (7.5) является необходимым для существования центра размазанной ударной волны.

Схема «распад разрыва» [33]. Если рассматриваемые волны слабые (звуковые), то можно пользоваться приближенными формулами расчета распада разрыва, указанными в [33]. В этом случае имеет место [282]

Лемма 1. Аппроксимационная вязкость схемы «распад разрыва» [33] меняется непрерывно при переходе от дозвукового режима течения к сверхзвуковому.

Для доказательства рассмотрим расчетные формулы работы [33] для двух случаев: $0 < u < c$, $u > c > 0$, где c — скорость звука. Используя приближенные формулы расчета распада, приведенные в [33] при уравнении состояния (1.8), и выполняя выкладки по алгоритму, изложенному в § 2, получим для случая $0 < u < c$ следующую систему уравнений Г-формы п. д. п.:

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= -\frac{\tau}{2} \rho_{tt} + \frac{h}{2} \left[\frac{1}{c} \left(1 - \frac{u}{c} \right) p_x + u \rho_x + \frac{u}{c} \rho u_x \right]_x; \\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x &= -\frac{\tau}{2} (\rho u)_{tt} + \frac{h}{2} \left[\left(2 \frac{u}{c} - \frac{u^2}{c^2} \right) p_x + \right. \\ &\quad \left. + u^2 \rho_x + \rho u_x \left(c + \frac{u^2}{c} \right) \right]_x; \\ (\rho E)_t + (p u + \rho u E)_x &= -\frac{\tau}{2} (\rho E)_{tt} + \frac{h}{2} \left[\frac{1}{\gamma-1} c p_x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho c u u_x + \left(\frac{3}{2} \frac{u^2}{c} - \frac{u^3}{2c^2} \right) p_x + \frac{u^3}{2} \left(\rho_x + \rho \frac{u_x}{c} \right) \right]_x. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Аналогичным образом для $u > c > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= -\frac{\tau}{2} \rho_{tt} + \frac{h}{2} (\rho u)_{xx}; \\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x &= -\frac{\tau}{2} (\rho u)_{tt} + \frac{h}{2} (p + \rho u^2)_{xx}; \\ (\rho E)_t + (p u + \rho u E)_x &= -\frac{\tau}{2} (\rho E)_{tt} + \frac{h}{2} (p u + \rho u E)_{xx}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Легко видеть, что правые части систем (7.12), (7.13) совпадают при $u = c$, что и требовалось доказать. Аналогичный факт установлен ранее в [60] для случая линеаризованных уравнений газодинамики.

Повторяя в случае п. д. п. (7.12), (7.13) рассуждения, аналогичные изложенными выше для метода частиц в ячейках, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (7.10), где вид матрицы $B(w, x)$ легко определяется с помощью (7.12), (7.13). Таким образом, и в случае схемы [33] условие (7.5) является необходимым для существования центра размазанной ударной волны. На рис. 9, взятом из [276], изображены профили скорости в окрестности ударной волны, полученные по схеме [33] на трех различных сетках по x с соблюдением условия $t/h = \text{const}$. Абсцисса точки пересечения графиков различных решений для различных h отстоит от точного положения ударного фронта на величину менее $0,3h$.

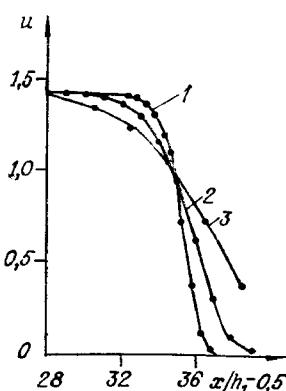


Рис. 9. Схема С. К. Годунова.
1 — $h_1/2$, 2 — h_1 , 3 — $2h_1$.

7.2. Схемы второго порядка

$\tilde{\mathcal{P}}_{\beta}^{\alpha}$ представляет собой семейство схем типа «предиктор-корректор» второго порядка точности, которое отличается от $\mathcal{P}_{\beta}^{\alpha}$ [241, 270] наличием в разностных уравнениях предиктора и корректора квадратичной вязкости q вида (5.18), входящей аддитивно в давление, как в системе (5.1)–(5.3). С учетом результатов [241] Г-форма п. д. п. рассматриваемого семейства схем $\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha}^{\beta}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\varphi}(\vec{w})}{\partial x} = & \frac{h^2}{6} \left\{ -\kappa^2 \frac{\partial^3 \vec{w}}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 \vec{\varphi}(\vec{w})}{\partial x^3} + \frac{3}{2\alpha} [\mathcal{B}(\vec{\varphi}_x^0, \vec{\varphi}_x^1)]_x \right\} + \\ & + h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\Omega_1(\vec{w}, \vec{w}_x) \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (7.14)$$

где α, β — постоянные весовые коэффициенты, Ω_1 — матрица

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g \frac{w_2}{w_1^2}, & g \frac{1}{w_1}, & 0 \\ -g \frac{w_2^2}{w_1^3}, & g \frac{w_2}{w_1^2}, & 0 \end{pmatrix}, \quad g = aw_1 \min \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w_2}{w_1} \right), 0 \right],$$

$$\vec{\varphi}^0 = (1 - \beta) \vec{w} + \alpha \kappa \vec{\varphi}(\vec{w}),$$

$$\vec{\varphi}^1 = \beta \vec{w} - \alpha \kappa \vec{\varphi}(\vec{w}), \quad \kappa = \tau/h,$$

\mathcal{B} — симметричное билинейное отображение $\mathcal{B} = \vec{\varphi}''(\vec{w})$. На решениях типа бегущей волны получаем из (7.14) систему

$$\begin{aligned} h^2 \left[(\kappa^2/6) D^3 d^2 \vec{w}/d\xi^2 - (1/6) d^2 \vec{\varphi}(\vec{w})/d\xi^2 + (1/(4\alpha)) \mathcal{B}(\vec{\varphi}_{\xi}^0, \vec{\varphi}_{\xi}^1) + \right. \\ \left. + \Omega_1(\vec{w}, \vec{w}_{\xi}) d\vec{w}/d\xi \right] = \vec{\varphi}(\vec{w}) - D\vec{w} - \vec{\varphi}(\vec{W}_1) + D\vec{W}_1. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Сделав в системе (7.15) замену (7.9), перепишем (7.15) в виде

$$\begin{aligned} (\kappa^2/6) D^3 d^2 \vec{w}/d\eta^2 - (1/6) d^2 \vec{\varphi}(\vec{w})/d\eta^2 + (1/(4\alpha)) \mathcal{B}(\vec{\varphi}_{\eta}^0, \vec{\varphi}_{\eta}^1) + \\ + \Omega_1(\vec{w}, \vec{w}_{\eta}) d\vec{w}/d\eta = \vec{\varphi}(\vec{w}) - D\vec{w} - \vec{\varphi}(\vec{W}_1) + D\vec{W}_1. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Из системы (7.16) следует, что необходимым условием существования центра размазанной ударной волны при использовании схем из семейства $\tilde{\mathcal{P}}_{\beta}^{\alpha}$ является соотношение $\tau/h = \text{const}$. В [241] изучено влияние различных членов порядка $O(h^2)$, входящих в П-форму п. д. п. семейства $\mathcal{P}_{\beta}^{\alpha}$, на дисперсионные и диссипативные свойства разностных решений, указаны члены, ответственные за наличие паразитических осцилляций в численном решении. Введение псевдовязкости q в $\mathcal{P}_{\beta}^{\alpha}$ вносит дополнительный диссипативный эффект, как показано в § 5 на модельной системе (5.1)–(5.4). Семейство $\mathcal{P}_{\beta}^{\alpha}$

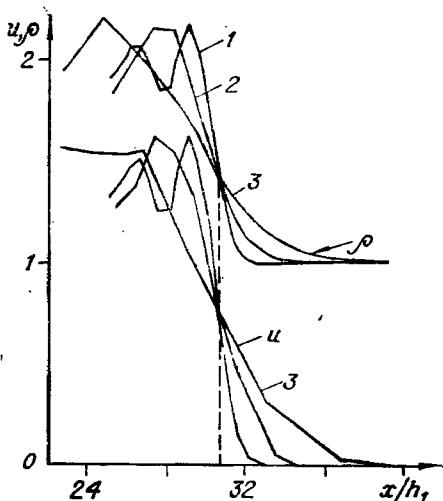


Рис. 10. Схема Лакса — Вендрофа.

1 — $h_1/2$; 2 — h_1 , 3 — $2h_1$.

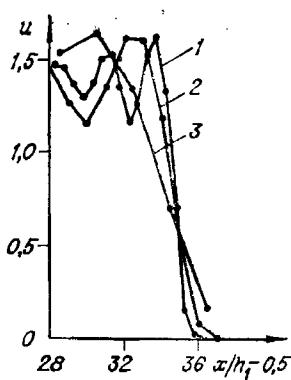


Рис. 11. Схема Мак-Кормака (обозначения те же, что и на рис. 8—10).

включает как частный случай двухшаговую схему Лакса — Вендрофа [116] при $\alpha = \beta = 1/2$, схемы Мак-Кормака [245] при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и при $\alpha = 1$, $\beta = 1$. На рис. 10, 11 приведены графики разностных решений, полученных соответственно по двухшаговой схеме Лакса — Вендрофа с добавочной вязкостью q вида (5.18) при $a = 3$ и схеме Мак-Кормака \mathcal{P}_0^1 . Абсцисса точки пересечения графиков решений для различных h отстоит от точного положения ударной волны на величину менее $0,3h$, т. е. точность локализации разрыва на основе понятия центра волны высокая, несмотря на присутствие в разностном решении паразитических осцилляций.

7.3. Практическая реализация алгоритмов дифференциальных анализаторов ударных волн (с учетом § 5, 6)

В отличие от размазанной ударной под конечно-разностной ударной волной будем понимать решение конечно-разностных уравнений, аппроксимирующее ударную волну и вычисленное в дискретных точках сетки в плоскости (x, t) . Аналогично понятию центра размазанной ударной волны введем понятие центра конечно-разностной ударной волны [167, 291].

Определение 3. Центром конечно-разностной ударной волны (д. к.-р. у. в.) будем называть точку в зоне конечно-разностной ударной волны, принадлежащую решениям конечно-разностных уравнений при одном и том же t , полученным при двух различных значениях постоянных шагов h , τ : $h = h_1$, $\tau = \tau_1$, $h = h_2$, $\tau = \tau_2$, причем $|h_1 - h_2| + |\tau_1 - \tau_2| \neq 0$, и доопределенным в точках (x, t) , не являющихся узловыми, с помощью линейной интерполяции.

Определение 4. Под дифференциальным анализатором ударной волны будем понимать алгоритм, позволяющий найти коор-

динаты центра конечно-разностной ударной волны в расчетной ячейке по результатам сквозного счета.

Из определения 3 следует, что для непосредственного использования понятия центра конечно-разностной ударной волны необходимо выполнить два расчета одной и той же задачи с различными шагами по x или t . Результаты первого можно записать на устройства внешней памяти, затем провести расчет на другой сетке по x или t . После этого с помощью специальной программы организуется поиск областей «размазывания» ударных волн. Для этого в одномерном случае привлекаются неравенство $\partial u / \partial x < 0$ (см. § 5) и численная проверка выполнения условий Гюгонио на ударных волнах. С этой целью можно использовать формулы вычисления погрешности Δ выполнения условий Гюгонио, предложенные в [20], например

$$\Delta_1 = \frac{\rho_1(u_1 - D) - \rho_2(u_2 - D)}{\rho_2(u_2 - D)}, \quad (7.17)$$

где для определения скорости ударной волны D в [20] предложено использовать формулы

$$D = dD_1 + (1-d)D_2, \quad 0 \leq d \leq 1; \quad (7.18)$$

$$D_1 = (\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2) / (\rho_1 - \rho_2); \quad D_2 = u_2 + (p_2 - p_1) / (\rho_2(u_2 - u_1)).$$

Величины с нижними индексами «1» и «2», входящие в (7.17), (7.18), определяют состояние среды, соответственно за и перед фронтом конечно-разностной ударной волны.

После того как зоны «размазывания» ударных волн найдены, положение ударных фронтов в этих зонах определяется как точка пересечения графиков решений при различных h и τ . В [276] с помощью такой процедуры локализации ударных фронтов численно определены положения ударных волн при использовании семи разностных схем первого и второго порядков точности, включающих разностные схемы, рассмотренные в § 7. В итоге установлено, что погрешность локализации разрыва на основе понятия центра конечно-разностной ударной волны не превышала $0,3h$ для рассмотренных схем. Проводились численные эксперименты по сравнению абсцисс центров конечно-разностных ударных волн, полученных на сетках с шагами h , $h/2$ и $h/2$, $h/4$. Оказалось, что эти абсциссы различаются меньше, чем на $h/4$; при этом различие значений компонент решения в центрах волны было весьма несущественно. Таким образом, центр конечно-разностной ударной волны, определенный по численному решению, есть такая точка, в которой значения компонент вектора решения в наименьшей степени зависят от сеточных параметров h , τ .

Для реализации вышеизложенного метода локализации сильных разрывов в конечно-разностном решении требуется выполнение двух расчетов одной и той же задачи. Это делает его неэкономичным при решении многомерных задач с ударными волнами. Поэтому актуальными остаются вопросы разработки алгоритмов приближенного определения центра конечно-разностной ударной волны с по-

грешностью, приемлемой для практики. Один из таких алгоритмов, основанный на определении точки максимума искусственной вязкости q , исследован в § 5. Однако в реально используемых разностных схемах паряду с искусственной вязкостью присутствует также схемная вязкость, которая, вообще говоря, имеет весьма сложную структуру, как показано в вышеприведенных примерах. Возникает вопрос: можно ли использовать определение максимума некоторой нормы схемной вязкости в алгоритмах дифференциальных анализаторов подобно случаю скалярной искусственной вязкости q ? Первое исследование в этом направлении выполнено в [276] (см. также § 6). Ранее в [19] проведены численные эксперименты, подтверждающие возможность непосредственного использования информации о структуре схемной вязкости, получаемой из п. д. п., для построения алгоритмов дифференциальных анализаторов ударных волн.

В [276] осуществлена численная проверка предварительных результатов § 6, показывающих, что точка экстремума величины (6.27) движется вдоль траектории ударной волны. При этом применяли три схемы первого порядка точности: 1) С. К. Годунова [33], 2) «жидкость в ячейке» [210]; 3) Лакса [234]. С учетом (6.32) исходную абсциссу ударного фронта находили обращением линейной интерполяции сеточных значений функции $u(x, t) + c(x, t)$ в точку, где $u + c = D$. В случае схем Годунова и «жидкость в ячейке» погрешность локализации ударного фронта на основе свойства (6.32), по данным [276], не превышала $0,5h$; для схемы Лакса указанная погрешность достигала $1,22h$. Однако следует заметить, что в случае схемы Лакса ширина зоны «размазывания» ударной волны превышала $10h$ (см. график на рис. 7, помеченный номером 3). Приведенные данные свидетельствуют о возможности использования свойства, выражаемого формулой (6.32), для разработки новых алгоритмов локализации ударных волн по результатам сквозного счета на основе схем первого порядка точности.

Так как в общем случае скорость ударной волны D в (6.32) неизвестна, то с учетом соображений § 6 можно искать точку ударного фронта как точку максимума величины

$$\|\vec{B}(w, h, \tau) \partial \vec{w} / \partial x\|, \quad (7.19)$$

что впервые реализовано в расчетах в [19].

§ 8. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ АНАЛИЗАТОРОВ В ЗАДАЧАХ О ЗАРОЖДЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН

На примерах простейших течений в [148] показано, что решения уравнений газовой динамики, как правило, остаются непрерывными ограниченное время, а затем в решении возникают разрывы. Существует ряд важных для приложений задач механики сплошной среды, в которых ударные волны возникают в непрерыв-

ном течении. Для примера укажем задачу расчета явления бафтина крыла самолета при трансзвуковых скоростях полета [274] и задачи термокапиллярной диффузии [18]. В одном из известных подходов к определению зарождения разрыва — метода характеристик [120, 118] — образование ударной волны определяется по пересечению характеристик одного семейства. Метод подгонки скачка [251, 252, 130, 158] также позволяет определять зарождение ударных волн. Разработаны варианты метода подгонки скачка, в которых зарождение ударной волны определяется без использования пересечения характеристик [252]. Однако, как отмечено в [120], метод подгонки скачка особенно трудно программировать, если в программу включать алгоритм определения зарождения ударных волн.

8.1. Анализ проблемы зарождения ударных волн при использовании равномерной сетки

Конечно-разностные схемы сквозного счета выгодно отличаются от метода характеристик и метода подгонки скачка универсальностью и простотой программной реализации. В п. 8.2 показано, как, оставаясь в рамках использования однородных разностных схем, можно численно решать задачу об образовании ударной волны. В процессе временной эволюции волны сжатия в ударную волну градиенты решения в зоне сжатия увеличиваются и в момент образования разрыва становятся бесконечными. В связи с этим разумно было использовать метод определения момента зарождения разрыва, основанный на сравнении в каждый момент времени t_n максимального градиента $|u_{xh}|_{\max}$ разностного решения в волне сжатия с некоторым теоретическим значением $|u_x|_{\max}$, характеризующим максимальное значение градиентов разностного решения в размазанной ударной волне. Дальнейшее рассмотрение осуществлено на модельном уравнении

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0, \quad (8.1)$$

где

$$\varphi(u) = 0.5u^2. \quad (8.2)$$

Аппроксимируем уравнение (8.1) на равномерной сетке по простейшей явной схеме с односторонними разностями, предполагая, что в расчетной области $\varphi'(u) \geq 0$

$$(u_i^{n+1} - u_i^n)/\tau + (\varphi(u_i^n) - \varphi(u_{i-1}^n))/h = 0, \quad (8.3)$$

где $u_i^n = u(ih, nt)$. Выпишем П-форму первого дифференциального приближения схемы (8.3):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(w)}{\partial x} = (\partial/\partial x)(B(w, h, \tau) \frac{\partial w}{\partial x}), \quad (8.4)$$

где

$$B(w, h, \tau) = (h/2)w - (\tau/2)w^2. \quad (8.5)$$

Как показано в [240, 276, 54], в случае стационарной ударной волны, т. е. когда $D(t) = \text{const}$, решения типа бегущей волны уравнения п. д. п. (8.4) пригодны для описания поведения разностного ре-

шения u_h в размазанной ударной волне. Пусть $D = \text{const}$. Как и в § 3, будем искать среди решений уравнения

$$-Ddw/d\xi + d\varphi/d\xi = (d/d\xi)(B(w, h, \tau)dw/d\xi) \quad (8.6)$$

такое решение $w(\xi)$, которое удовлетворяет условиям

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} w(\xi) = u_1, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} w(\xi) = u_2, \quad (8.7)$$

где u_1, u_2 — постоянные величины, равные значению решения за и перед фронтом ударной волны соответственно; $u_1 > u_2$ и, кроме того, в дальнейшем берем $u_2 \geq 0$. Величины u_1, u_2, D связаны условием Гюгонио

$$\varphi(u_1) - \varphi(u_2) = D(u_1 - u_2). \quad (8.8)$$

Проинтегрировав (8.6), получаем с учетом (8.7), (8.8) обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dw/d\xi = g(w), \quad (8.9)$$

где $g(w) = \{\varphi(w) - Dw - [\varphi(u_2) - Du_2]\}/B(w, h, \tau)$. (8.10)

Найдем толщину по Прандтлю X зоны размазанной ударной волны, определяемой решением задачи (8.9), (8.7). По определению

$$X = \min_{\xi} \frac{u_1 - u_2}{|dw/d\xi|} = \frac{u_1 - u_2}{\max_{\xi} |dw/d\xi|}. \quad (8.11)$$

Используя формулы (8.10), (8.11), (8.2), легко найти, что

$$X = h(1 + \bar{V}\chi)/(1 - \bar{V}\chi), \quad (8.12)$$

где $\chi = u_2(1 - \kappa u_1)/[u_1(1 - \kappa u_2)]$; $\kappa = \tau/h$. (8.13)

Заметим: если временной шаг τ взят из области устойчивости разностной схемы (8.3), т. е. $\kappa\tau \leq 1$, то $\chi \geq 0$, как легко видеть из формулы (8.13). Рассмотрим теперь для уравнения (8.1), (8.2) начальную функцию $u(x, 0)$ вида

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_1, & x \leq x_1; \\ u_1 + k_1(x - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2; \\ u_2, & x > x_2, \end{cases} \quad (8.14)$$

где u_1, u_2, x_1, x_2, k_1 — постоянные, причем $u_1 > u_2 \geq 0, x_1 < x_2, k_1 = (u_2 - u_1)/(x_2 - x_1)$. Точное решение тестовой задачи (8.1), (8.2), (8.14) легко находится с помощью известного функционального соотношения [118]

$$u(x, t) = u_0(x - u(x, t)t)$$

и имеет вид

1) $t < t_*$,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & x \leq x_1 + u_1 t; \\ [u_1 + k_1(x - x_1)]/(1 + k_1 t), & x_1 + u_1 t \leq x \leq x_2 + u_2 t; \\ u_2, & x > x_2 + u_2 t; \end{cases} \quad (8.15)$$

2) $t \geq t_*$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & x \leq x_* + D_0(t - t_*); \\ u_2, & x > x_* + D_0(t - t_*), \end{cases} \quad (8.16)$$

где (x_*, t_*) — координаты точки возникновения разрыва,

$$x_* = x_1 - u_1/k_1, \quad t_* = -1/k_1, \quad D_0 = (u_1 + u_2)/2. \quad (8.17)$$

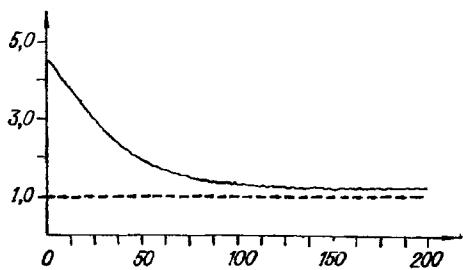


Рис. 12. График отношения X_p/X_t как функции времени

На рис. 12 представлен график отношения X_p/X_t как функция безразмерного времени t/τ , где X_p — толщина по Прандтлю зоны конечно-разностной ударной волны, вычисленная на основе разностного решения u^n , полученного по схеме (8.3), причем

$$X_p = \min_i (u_1 - u_2) / |(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)/(2h)|,$$

X_t — толщина зоны размазанной ударной волны, полученная на основе п. д. п. и вычислявшаяся по формулам (8.12), (8.13). На рис. 12 момент образования разрыва $t = t_* = 70\tau$ в соответствии с (8.17). Как видно из рисунка, квазистационарный* профиль стационарной ударной волны формируется в разностном решении с большим запаздыванием по отношению к истинному моменту образования разрыва.

8.2. Неравномерная подвижная сетка, адаптирующаяся к потоку

Ясно, что абсолютную ошибку в определении величин x_* , t_* из разностного решения можно существенно уменьшить, применяя достаточно мелкую сетку на оси x . Однако в случае равномерной сетки потребовалось бы большое количество узлов. С другой стороны, известно, что область сжатия принимает с увеличением t все меньший размер по отношению ко всей расчетной области, и так как ударная волна образуется в разностном решении в пределах зоны сжатия, разумно использовать мелкую сетку только внутри зоны сжатия. Поскольку с течением времени зона сжатия перемещается вдоль оси x , вообще говоря, должна перемещаться и подобласть сетки с мелкими шагами, т. е. сетка должна адаптироваться к решению. Неравномерная сетка такого рода предложена в [189] в связи с численным решением уравнения Бюргерса (4.1) и модифицированного уравнения Бюргерса. Позднее эту сетку успешно примени-

* Термин «квазистационарный» понимается здесь в том же смысле, что и в § 3.

ли авторы работы [243]. В [189] при построении адаптирующейся сетки использовало понятие «центра волны», которое по своему геометрическому смыслу совпадает с определением центра конечно-разностной ударной волны, данным в [162]. Положение центра волны определялось в [189] по $\max |du/dx|$. С учетом результатов § 6 этот способ дает положение центра волны с некоторой погрешностью; более точные данные позволяет получить критерий по $\max |0,5(hu - tu^2)du/dx|$ согласно формулам (8.4), (8.5). Нами реализован алгоритм [189] построения динамической сетки, подстраивающейся к решению, с некоторыми изменениями, характер которых будет ясен из дальнейшего краткого изложения этого алгоритма. Разобъем всю необходимую последовательность вычислений на отдельные этапы.

Первый этап. Находим номер ячейки I_n такой, что в ней $|\Delta_{1x}(u_i^n)|$ достигает своего максимума. Здесь $u_i^n = u(x_i^n, t_n)$,

$$0 = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{N_n}^n = l, \quad (8.18)$$

Δ_{1x} — оператор разностного дифференцирования на неравномерной сетке, аппроксимирующий оператор $\partial/\partial x$;

$$\Delta_{1x}(u_i^n) = (u_i^n - u_{i-1}^n)/h_i,$$

где $h_i = x_i^n - x_{i-1}^n$, $i = 1, \dots, N_n$. С учетом сделанных выше замечаний абсцисса x_{I_n} приближенно определяет центр волны сжатия, который при $t \geq t_*$ переходит в центр конечно-разностной ударной волны. Так же как в [189], проверяем, продвинулся ли центр волны настолько, что уже необходимо перестраивать сетку на оси x .

Второй этап. Если уже нужно перестраивать сетку, то начинаем вычислять новые абсциссы ее узлов. Для этого находим величину

$$\epsilon = 1/|\Delta_{1x}(u_{I_n}^n)|. \quad (8.19)$$

Пусть $h^{(1)}$ — наперед задаваемое характерное значение величины шага сетки вне зоны сжатия. Тогда вводим в окрестности узла I_n равномерную сетку с шагом

$$h^{(2)} = \max(h_{\min}, \alpha \epsilon h^{(1)}), \quad (8.20)$$

где $\alpha > 0$, например $\alpha = 0,4$ (см. [189]); h_{\min} — наперед задаваемое минимально допустимое значение шага $h^{(2)}$, например $h_{\min} = 10^{-4}$. Эта величина введена, чтобы не допустить счет с чрезмерно малыми шагами на оси x при $t \geq t_*$ (если вычислять $h^{(2)}$ просто по формуле $h^{(2)} = \alpha \epsilon h^{(1)}$, то при $t \cong t_*$ получаются значения $h^{(2)} < 10^{-7}$). Вычисляем слева и справа от узла $x_{I_n}^n$ соответственно $M_l^{(n)}$ и $M_r^{(n)}$

абсцисс равноотстоящих узлов с шагом $h^{(2)}$. В результате получаем на оси x подобласть $G_r^{(n)}$ с равномерной сеткой.

Третий этап. Пусть X_l^n — абсцисса левой границы области $G_r^{(n)}$. Двигаясь справа налево от X_l^n , вычисляем M_2 шагов h , по формуле

$$h_i = h^{(2)}(1 + \beta h^{(1)})^i, i = 1, \dots, M_2. \quad (8.21)$$

В формуле (8.21) $\beta = \text{const} > 0$, например $\beta = 2,5$ согласно [189]. Номер M_2 определяется здесь в процессе счета как наименьший, для которого $h_{M_2+1} > h^{(1)}$, $h_{M_2} < h^{(1)}$. После этого вычисляем абсциссу X_{l1}^n левой границы ячейки размера h_{M_2} и отрезок $[0, X_{l1}^n]$ разбиваем на M_1 одинаковых ячеек, где $M_1 = \max(1, X_{l1}^n/h^{(1)})$. Пусть теперь X_r^n — абсцисса правой границы области $G_r^{(n)}$. Двигаясь слева направо от X_r^n , вычисляем M_3 шагов h , по формуле (8.21). Номер M_3 определяется по аналогии с M_2 . После этого вычисляем абсциссу X_{r1}^n правой границы ячейки размера h_{M_3} . Отрезок $[X_{r1}^n, l]$ разбивается на M_4 одинаковых ячеек, где $M_4 = \max(1, X_{r1}^n/h^{(1)})$.

Четвертый этап. Вычисляем решение u^n на новой сетке с помощью кубической сплайн-интерполяции [2] по значениям u^n на старой сетке. В [189] показано, что вычисление шагов сетки по формуле (8.21) (т. е. h — член геометрической прогрессии) обеспечивает равномерную точность разностного решения во всей расчетной области. Заметим, что в [88] получены сетки из некоторого критерия оптимальности, которые как частный случай включают закон изменения шагов сетки (8.21).

При использовании вышеописанной неравномерной сетки момент t_* возникновения разрыва определяется как наименьшее из значений t_n ,

$$t_n = \sum_{k=1}^n \tau_k,$$

для которого выполнялось неравенство

$$X_p < \delta_1 h^{(2)}, \quad (8.22)$$

где δ_1 — наперед задаваемая постоянная, равная среднему характеристичному для используемой разностной схемы количеству ячеек на оси x , в пределах которого (в соответствии с определением толщины по Прандтлю) наиболее резко изменяется решение u_h в зоне размазанной ударной волны. Для предварительной оценки величины δ_1 использовала формула (8.12), которая в данном случае применима потому, что в окрестности центра волны сжатия сетка равномерна в силу ее конструкции; нужно положить $h = h^{(2)}$ в (8.12).

Разумеется, формула (8.12) неприменима в общем случае пе-стационарной ударной волны. На рис. 13 иллюстрируется влияние выбора постоянной δ_1 в неравенстве (8.22) на точность определения момента t_* образования разрыва. По оси ординат отложена величина $\delta t = (t_* - t_{*h})/t_*$, где t_* — момент образования разрыва в со-

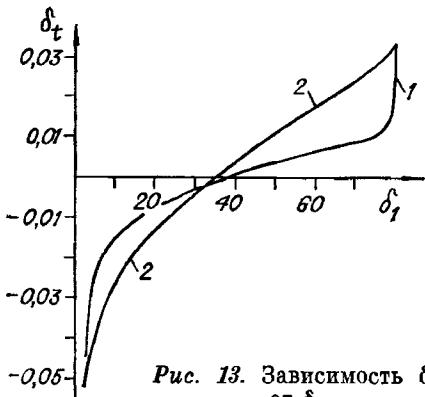


Рис. 13. Зависимость δt от δ_1 .

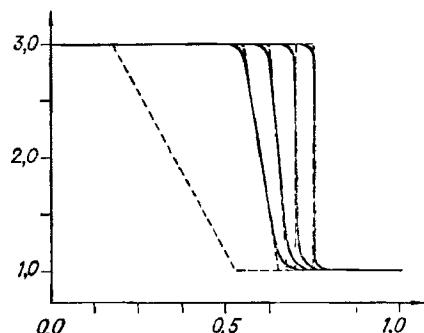


Рис. 14 Результаты расчетов задачи о возникновении разрыва.

ответствии с точным решением тестовой задачи (8.1), (8.2), (8.14); t_{*h} — момент образования разрыва, определенный с помощью неравенства (8.22). Кривая 1 на рис. 13 получена при $M_l^{(n)} = M_r^{(n)} = 30$, $h_{\min} = 10^{-4}$ в формуле (8.20); кривая 2 — при $M_l^{(n)} = M_r^{(n)} = 20$, $h_{\min} = 2 \cdot 10^{-4}$. При этом в формуле (8.14) взяты значения $u_1 = 3$, а $u_2 = 1$; $x_1 = 0,175$; $x_2 = 0,525$; $h^{(1)} = 0,05$; $\alpha = 0,5$; $\beta = 2,0$ — в формуле (8.21). Из рис. 13 следует, что при $3,5 \leq \delta_1 \leq 80$ значение по-грешности $|\delta t|$ не превышает 4,5 %.

На рис. 14 сплошными линиями изображены для различных моментов времени t графики разностного решения, полученные по схеме

$$(u_i^{n+1} - u_i^n)/\tau_n + [\varphi(u_i^n) - \varphi(u_{i-1}^n)]/(x_i^n - x_{i-1}^n) = 0$$

при решении задачи (8.1), (8.2), (8.14), исходные данные те же, что и для кривой 1 на рис. 13. Штриховыми линиями на рис. 14 на-несено точное решение. В примере расчета на этом рисунке число расчетных ячеек на оси x к моменту $t \cong t_*$ достигло 186. Заметим, что при использовании равномерной сетки для достижения сравни-мой точности разностного решения в окрестности ударной волны пришлось бы взять 10 000 ячеек.

Таким образом, информацию о положении подобластей больших градиентов, получаемую с помощью дифференциального анализатора, можно использовать при построении динамической сетки, сгущающейся в указанных подобластях, что позволяет существенно повысить точность разностного решения при умеренном количестве узлов сетки. В результате заметно повышается точность определения места и времени зарождения разрывов при численном исследовании тех задач, где эти явления могут иметь место. Заметим, что для некоторых задач механики сплошной среды характерны явления исчезновения ударных волн, когда ударная волна, затухая, переходит в непрерывное течение. Изложенный метод расчета на адаптирующейся к потоку сетке после внесения небольших изменений можно применять для численного исследования таких задач.

Глава 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ АНАЛИЗАТОРЫ УДАРНЫХ ВОЛН В ДВУМЕРНЫХ РАСЧЕТАХ

В газодинамике для практики наиболее важны двух- и трехмерные задачи. Увеличение количества пространственных переменных на единицу приводит к существенному росту объема числовых данных, с помощью которых представляется решение задачи на ЭВМ. Это имеет место, в частности, при использовании конечно-разностных схем сквозного счета для численного решения многомерных задач газовой динамики. Как и в одномерном случае, сильные разрывы в разностных решениях двух- и трехмерных задач «размазываются». «Размазывание» происходит в направлении каждой пространственной координаты, что существенно затрудняет эффективное использование получаемой на ЭВМ числовой информации о решении задачи, в частности извлечение информации о положении и типе поверхностей разрывов. В этой связи актуальными являются вопросы разработки алгоритмов локализации особенностей при численном решении многомерных задач газовой динамики и методов исследования их точности.

Перенос методики дифференциальных анализаторов одномерных ударных волн на многомерный случай связан с необходимостью учета ряда специфических факторов, присущих многомерным расчетам на фиксированной прямоугольной эйлеровой сетке. Во-первых, с увеличением числа пространственных переменных возникает такая проблема, как неинвариантность разностной схемы при тех преобразованиях, по отношению к которым инвариантна исходная система уравнений Эйлера невязкого сжимаемого газа [154]. Эта неинвариантность в общем случае приводит к анизотропии свойств разностных решений в различных направлениях в плоскости пространственных переменных (x, y). Например, в [120] отмечалось, что в случае ударной волны, фронт которой располагается под углом к линиям расчетной сетки, условия Гюгонио не выполняются точно, так как при «размазывании» разрыва может возникать пневматический градиент нормального потока количества движения в направлении, касательном к разрыву. Поэтому нельзя автоматически перепосить одномерную методику, описанную в главе 2, на рассмотрение свойств разностного решения вдоль лучей, ортогональных к ударному фронту, даже когда согласно точному решению касательная составляющая скорости за и перед фронтом скачка в выбранных точках равна нулю.

Указанные обстоятельства обусловили отсутствие достаточно детально разработанной методики анализа точности алгоритмов локализации ударных волн даже на «дифференциальном» уровне, т. е. в рамках первых дифференциальных приближений разностных схем. Далее излагается ряд полученных авторами результатов исследова-

ния дифференциальных анализаторов ударных волн в двумерных газодинамических течениях.

В § 9 рассмотрен вопрос о критериях, с помощью которых можно выделять в разностных решениях двумерных задач зоны «размазывания» ударных фронтов. Их использование позволяет при поиске ударных волн в двумерной области исключить из дальнейшего анализа подобласти, которые заведомо не содержат таких особенностей (например, области разрежения, постоянного течения).

После того как локализованы зоны «размазывания» фронтов ударных волн в двумерном течении, возникает вопрос о том, как зависит ширина этих зон от ориентации фронта разрыва по отношению к линиям прямоугольной расчетной сетки в плоскости (x, y) . Информация подобного рода имеет значение, например, в тех случаях, когда сильные разрывы при движении в пределах расчетной области сближаются настолько, что их зоны «размазывания» начинают взаимно перекрываться. Это приводит к росту ошибок решения в областях перекрытия и, как следствие, к ухудшению точности алгоритмов локализации сильных разрывов по результатам сквозного счета. В данной связи в § 9 изложен метод исследования свойств «размазывания» двумерных ударных волн с криволинейным фронтом на примере асимптотической разностной схемы метода частиц в ячейках Харлоу [150], которая совпадает со схемой метода «жидкость в ячейке» [210].

В § 5–7 использовались, в частности, соображения теории подобия и размерностей при анализе возникающих дифференциальных уравнений с двумя малыми параметрами h, τ . В § 10 подобный анализ проведен в двумерном случае для некоторого класса п.д.п. разностных схем, содержащих три малых параметра h_x, h_y, τ , где h_x, h_y – размеры ячейки прямоугольной расчетной сетки в плоскости (x, y) . Показано: если сеточные параметры h_x, h_y, τ введены в аппроксимационную и искусственную вязкость, описываемую уравнениями п.д.п., с учетом некоторых соображений подобия и размерности, то можно сформулировать необходимые условия существования центра размазанной ударной волны вдоль луча, ортогонального к ударному фронту. В § 10 изложен ряд алгоритмов дифференциальных анализаторов ударных волн, основанных на использовании норм схемной вязкости.

В начале главы 2 перечислен ряд известных способов локализации ударных волн в двумерных течениях, в том числе такой распространенный, как определение положения разрывов по сближению изолиний. В последние годы интенсивно развивается подход к решению задач механики жидкостей с большими градиентами, в котором сетка предполагается динамической, подстраивающейся к решению так, что ее линии сгущаются в областях больших градиентов решения. В данном случае положение линий разрывов можно определять по сближению линий сетки. В этом смысле использование подвижных сеток, адаптирующихся к решению, можно интерпретировать как один из методов локализации особенностей в решении. В § 11 изложен ряд вопросов, связанных с реализацией идеи адап-

тивных сеток: вид уравнений течения в подвижных координатах, управление сеткой и др. Локализацию поверхностей разрывов с помощью подвижных сеток можно рассматривать как часть более широкой проблемы локализации особых зон и особенностей в численных решениях задачи механики жидкостей. При этом под особыми зонами имеются в виду пограничные слои, фронты пламен, вязкие слои перемешивания, фронты вытеснения в задачах теории фильтрации, ударные переходы в вязком теплопроводном газе и др. [291, 244, 214]. В [287] отмечено, что такие, к примеру, особенности, как контактные разрывы, фронты пламен, детонационные волны, фронты ионизации и тепловые волны, поддерживающие переносом излучения, можно рассчитывать аналогично случаю ударных волн.

§ 9. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ «РАЗМАЗЫВАНИЯ» КРИВОЛИНЕЙНЫХ УДАРНЫХ ФРОНТОВ

9.1. Неравенства в зоне «размазывания» двумерной ударной волны

Как указано в п. 7.3, вычислению координат точек ударного фронта должно предшествовать определение местонахождения зон «размазывания» ударных волн. В одномерном случае для этой цели проверялись неравенство $\partial u/\partial x < 0$, где u — скорость газа, и условия Гюгонио. Систему уравнений Эйлера, описывающих течение невязкого сжимаемого пневматического газа в случае двух пространственных переменных x , y и времени t , можно записать в виде

$$\partial w / \partial t + \partial F(w) / \partial x + \partial G(w) / \partial y = 0, \quad (9.1a)$$

$$\text{где } w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F(w) = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ pu + \rho uE \end{pmatrix}, \quad G(w) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ pv + \rho vE \end{pmatrix}. \quad (9.1b)$$

В формулах (9.1б) $E = \varepsilon + 0,5(u^2 + v^2)$, u , v — проекции вектора скорости на оси x , y соответственно.

Заметим, что система уравнений (9.1а)–(9.1б) не является единственной возможной дивергентной формой уравнений. В [138] в общем случае трехмерного нестационарного течения совершенного газа получено 13 линейно независимых дивергентных форм уравнений, которые можно интегрировать через сильные разрывы.

Выведем аналог неравенства $\partial u/\partial x < 0$ для двумерного случая, когда ударная волна есть некоторая кривая в плоскости координат x , y . Условия Гюгонио для идеального газа имеют вид [77]

$$\begin{aligned} \rho \theta [\vec{u}] &= [\vec{p}] \vec{n}, \quad [\rho \theta] = 0; \\ (1/2) \rho \theta [|\vec{u}|^2] + (\rho \theta / (\gamma - 1)) [p/\rho] &= [p u_n], \end{aligned}$$

где $\theta = D - u_n$, D — скорость ударной волны, \vec{u} — вектор скорости газа, u_n , u_τ — проекции вектора скорости \vec{u} соответственно на нормаль n и касательную τ к ударной волне, γ — показатель политропы. В [77] показано, что $[u_\tau] = 0$ на ударной волне, т. е. касательная к ударному фронту составляющая скорости непрерывна. По теореме Цемплена [77], на устойчивом сильном разрыве $[u_n] < 0$. Пусть на момент времени $t = t^*$ вычислены значения составляющих скорости u , v в узлах расчетной сетки в плоскости (x, y) . Доопределим решение u , v в остальных точках (x, y) расчетной области с помощью сплайн-функций достаточной гладкости (например, с помощью полиномиальных кубических сплайнов), которые обозначим соответственно через $S_u(x, y, t^*)$ и $S_v(x, y, t^*)$. По этим функциям S можем найти нормальную составляющую скорости u_n к фронту разрыва: $u_n = u_n(x, y, t^*)$. Проведем нормаль к линии разрыва в точке этой линии такой, что в ней касательная к линии разрыва существует и единственна. Если вдоль данной нормали переход от состояния за фронтом к состоянию перед фронтом в зоне «размазывания» ударной волны происходит монотонно, то в силу неравенства $[u_n] < 0$ в этой зоне выполняется условие

$$\partial u_n / \partial n < 0, \quad (9.2)$$

если координата n возрастает в направлении движения ударной волны.

Рассмотрим произвольную ударную волну с криволинейным фронтом. Пусть $F_0(x_0, y_0)$ — фиксированная точка фронта ударной волны при $t = t_0$. Поместим в точку (x_0, y_0) начало декартовой прямоугольной системы (τ, n) , ось $F_0 n$ направим по нормали к фронту ударной волны в точке F_0 в сторону движения фронта, а ось $F_0 \tau$ — по касательной к фронту в точке F_0 так, чтобы система координат (τ, n) была правой. Пусть $\vec{n} = \{n_1, n_2\}$ — единичный орт оси $F_0 n$, n_1 , n_2 — его координаты в декартовой системе (x, y) . Тогда

$$u_n = n_1 u + n_2 v, \quad u_\tau = n_2 u - n_1 v, \quad (9.3)$$

где u , v — проекции вектора скорости на оси x , y , вычисляемые в точке (x, y) с помощью введенных выше сплайнов S_u , S_v . С учетом неравенства (9.2) получаем формулу

$$n_1 (\partial / \partial x) (n_1 u + n_2 v) + n_2 (\partial / \partial y) (n_1 u + n_2 v) < 0. \quad (9.4)$$

В неравенство (9.4) входят неизвестные координаты n_1 , n_2 .

Покажем, что в одном частном случае, когда в зоне размазанной ударной волны в окрестности точки (x_0, y_0) течение газа нормально к фронту, неравенство (9.4) переходит в

$$\operatorname{div} \vec{u} < 0, \quad (9.5)$$

где \vec{u} — вектор скорости. Действительно, пусть $y = \varphi(x, t)$ — уравнение кривой фронта ударной волны. Относительно функции $\varphi(x, t)$ будем предполагать существование непрерывной производной $\partial \varphi / \partial x$.

Тогда легко вычислить координаты вектора \vec{n} в точке (x_0, y_0) :

$$n_1 = -\dot{\varphi}_0 (1 + \dot{\varphi}_0^2)^{-0.5}, \quad n_2 = (1 + \dot{\varphi}_0^2)^{-0.5}, \quad (9.6)$$

где

$$\dot{\varphi}_0 = (\partial\varphi/\partial x)|_{x=x_0, t=t_0}.$$

С учетом соотношений (9.6) формулу (9.4) можно переписать в виде

$$(1 + \dot{\varphi}_0^2)^{-1} \left\{ \dot{\varphi}_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \dot{\varphi}_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} < 0. \quad (9.7)$$

Предположим, что в точке (x_0, y_0) и в некоторой ее окрестности течение газа нормально к фронту ударной волны, т. е. $u_r = 0$. Тогда с учетом формул (9.3), (9.6) получаем в точке (x_0, y_0) и ее окрестности равенство

$$u + v\dot{\varphi}_0 = 0. \quad (9.8)$$

Продифференцируем обе части равенства (9.8) по x и подставим в формулу (9.7) вместо $\dot{\varphi}_0 \partial v / \partial x$ выражение $-\partial u / \partial x$. Затем заменим в (9.7) $\partial u / \partial y$ на $-\dot{\varphi}_0 \partial v / \partial y$. В итоге получим $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = -\operatorname{div} u < 0$.

Лемма 1. Если в зоне размазанной стационарной ударной волны с плоским фронтом, движущейся по покоящемуся газу под углом β к положительному направлению оси x , течение газа нормально к фронту, то справедливы соотношения [19]

$$\begin{aligned} u_x &< 0, \quad v_y < 0, \quad \operatorname{div} \vec{u} < 0; \\ u_y &= v_x; \quad u_y < 0 \text{ при } 0 < \beta < \pi/2, \quad \pi < \beta < 3\pi/2; \\ u_y &> 0 \text{ при } \pi/2 < \beta < \pi, \quad 3\pi/2 < \beta < 2\pi. \end{aligned}$$

Доказательство. В системе координат (x^*, y^*) , ось x^* которой параллельна движению волны, течение одномерно в направлении оси x^* . Пусть $u^* = u^*(x^*, t)$ — скорость одномерного течения. Воспользуемся формулами

$$x^* = x \cos \beta + y \sin \beta, \quad y^* = -x \sin \beta + y \cos \beta, \quad (9.9)$$

$$u = u^* \cos \beta, \quad v = u^* \sin \beta. \quad (9.10)$$

Дифференцируя обе части равенств (9.10) по x , получим

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x^*}^* \cos^2 \beta, \quad u_y = v_x = u_{x^*}^* \sin \beta \cos \beta, \\ v_y &= u_{x^*}^* \sin^2 \beta, \quad u_x + v_y = u_{x^*}^*. \end{aligned} \quad (9.11)$$

откуда и следуют утверждения леммы с учетом неравенства (9.2), которое в рассматриваемом случае записывается в виде $\partial u^*/\partial x^* < 0$.

9.2. Анализ на основе п. д. п.

Излагаемый далее метод изучения свойств «размазывания» криволинейных ударных волн предложен в работе [205]. Его цель — выяснение конкретного характера зависимости толщины зо-

ны размазанной криволинейной ударной волны от угла между нормалью к ударному фронту и липпиями прямоугольной расчетной сетки в плоскости эйлеровых декартовых координат (x, y) . Информация подобного рода полезна для оценки точности алгоритмов локализации ударных волн, взаимодействующих с другими разрывами либо со свободными поверхностями и жесткими стенками. Кроме того, метод преобразования п.д.п. с помощью простых тригонометрических формул можно применять для определения инвариантности п. д. п. разностной схемы по отношению к преобразованию поворота.

Анализ проведен на примере метода частиц в ячейках Харлоу [215, 150, 4, 160]. Хотя со временем его создания прошло более двадцати пяти лет, он и поныне применяется в численных расчетах [135–137, 149, 196, 117, 203, 288]. Это объясняется эффективностью метода частиц в ячейках при решении задач с большими деформациями среды и гидродинамически неустойчивыми поверхностями раздела.

В предположении бесконечного числа частиц, используемых при расчете методом Харлоу, заменим дискретные потоки массы, импульса и энергии разностными аппроксимациями, выведенными впервые в [201]. Тогда перенос массы, импульса и энергии частицами описывается следующими конечно-разностными уравнениями [210, 205]:

$$h_x h_y [(\rho w)_{jk}^{m+1} - \rho_{jk}^m \tilde{w}_{jk}] = [d_{1jk} \tilde{w}_{j-1k} + (1 - d_{1jk}) \tilde{w}_{jk}] \Delta M_{j-1/2,k}^m - [d_{3jk} \tilde{w}_{j+1,k} + (1 - d_{3jk}) \tilde{w}_{jk}] \Delta M_{j+1/2,k}^m + [d_{2jk} \tilde{w}_{jk-1} + (1 - d_{2jk}) \tilde{w}_{jk}] \times \Delta M_{j,k-1/2}^m - [d_{4jk} \tilde{w}_{j,k+1} + (1 - d_{4jk}) \tilde{w}_{jk}] \Delta M_{j,k+1/2}^m, \quad (9.12)$$

где h_x, h_y — шаги прямоугольной сетки в направлении осей x и y соответственно, m — номер временного шага, δt — величина этого шага, индексы (j, k) относятся к центру ячейки, w — вектор, $w = \{1, u, v, E\}$, $E = \varepsilon + 0,5(u^2 + v^2)$, ε — удельная внутренняя энергия.

$$\begin{aligned} d_{1jk} &= \begin{cases} 1, & \tilde{u}_{j-1/2,k} > 0, \\ 0, & \tilde{u}_{j-1/2,k} \leqslant 0; \end{cases} & d_{3jk} &= \begin{cases} 1, & \tilde{u}_{j+1/2,k} < 0, \\ 0, & \tilde{u}_{j+1/2,k} \geqslant 0; \end{cases} \\ d_{2jk} &= \begin{cases} 1, & \tilde{v}_{j,k-1/2} > 0, \\ 0, & \tilde{v}_{j,k-1/2} \leqslant 0; \end{cases} & d_{4jk} &= \begin{cases} 1, & \tilde{v}_{j,k+1/2} < 0, \\ 0, & \tilde{v}_{j,k+1/2} \geqslant 0, \end{cases} \\ \Delta M_{j+1/2,k}^m &= \begin{cases} h_y \rho_{jk}^m \tilde{u}_{j+1/2,k} \delta t, & \tilde{u}_{j+1/2,k} > 0, \\ h_y \rho_{j+1,k}^m \tilde{u}_{j+1/2,k} \delta t, & \tilde{u}_{j+1/2,k} \leqslant 0; \end{cases} \\ \Delta M_{j,k+1/2}^m &= \begin{cases} h_x \rho_{jk}^m \tilde{v}_{j,k+1/2} \delta t, & \tilde{v}_{j,k+1/2} > 0, \\ h_x \rho_{j,k+1}^m \tilde{v}_{j,k+1/2} \delta t, & \tilde{v}_{j,k+1/2} \leqslant 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Символом «~» снабжены величины, являющиеся результатом вычислений на эйлеровом этапе расчета одного временного шага [150]. Рассмотрим сначала случай, когда $\tilde{u}_{j\pm 1/2,k} > 0, \tilde{v}_{j,k\pm 1/2} > 0$.

Тогда формулу (9.12) с учетом соотношений (9.13) можно записать в виде

$$[(\rho w)_{jk}^{m+1} - \rho_{jk}^m \tilde{w}_{jk}] / \delta t = (\tilde{u}_{j-1/2,k} \rho_{j-1k}^m \tilde{w}_{j-1k} - \tilde{u}_{j+1/2,k} \rho_{jk}^m \tilde{w}_{jk}) / h_x + \\ + (\tilde{v}_{j,k-1/2} \rho_{jk-1}^m \tilde{w}_{jk-1} - \tilde{v}_{jk+1/2} \rho_{jk}^m \tilde{w}_{jk}) / h_y. \quad (9.14)$$

Используя формулу (9.14), получим п. д. п. схемы полного шага метода частиц в ячейках при реализации на эйлеровом этапе схемы Харлоу [150]. С целью сокращения объема дальнейших выкладок введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{l-1/2}^\alpha &= \begin{cases} \tilde{u}_{l-1/2,k}, & \alpha = 1, \\ \tilde{v}_{j,l-1/2}, & \alpha = 2; \end{cases} \quad \tilde{W}_l^\alpha = \begin{cases} \tilde{w}_{l,k}, & \alpha = 1, \\ \tilde{w}_{j,l}, & \alpha = 2; \end{cases} \\ l &= \begin{cases} j, & \alpha = 1, \\ k, & \alpha = 2; \end{cases} \quad u_1 \equiv u, \quad u_2 \equiv v, \quad h_1 = h_x, \quad h_2 = h_y. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Тогда уравнение (9.14) можно переписать в виде

$$\frac{(\rho w)_{jk}^{m+1} - \rho_{jk}^m \tilde{w}_{jk}}{\delta t} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\tilde{U}_{l-1/2}^\alpha \rho_{l-1}^\alpha \tilde{W}_{l-1}^\alpha - U_l^\alpha \rho_l^\alpha \tilde{W}_l^\alpha}{h_\alpha}. \quad (9.16)$$

Разностные уравнения эйлерова этапа представим как

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\alpha jk} &= u_{\alpha jk}^m - (\delta t / \rho_{jk}^m) F_{1jk}^\alpha, \quad \alpha = 1, 2; \\ \tilde{\varepsilon}_{jk} &= \varepsilon_{jk}^m - (\delta t / \rho_{jk}^m) (F_{2jk}^1 + F_{2jk}^2). \end{aligned} \quad (9.17)$$

С помощью алгебраических действий из (9.17) получим

$$\tilde{E}_{jk} = E_{jk}^m - (\delta t / \rho_{jk}^m) F_{3jk}, \quad (9.18)$$

где $F_{3jk} = \sum_{\alpha=1}^2 [F_{2jk}^\alpha + u_{\alpha jk} F_{1jk}^\alpha - (\delta t / 2) (F_{1jk}^\alpha)^2 / \rho_{jk}^m]$.

С учетом формул (9.17), (9.18) и (9.15) имеем

$$\tilde{U}_l^\alpha = U_l^\alpha - (\delta t / \rho_{jk}^m) F_{1jk}^\alpha, \quad \tilde{E}_{jk} = E_{jk}^m - (\delta t / \rho_{jk}^m) F_{3jk}. \quad (9.19)$$

Положим $F_l = \{0, F_{1jk}^1, F_{1jk}^2, F_{3jk}\}^T$. Тогда схема эйлерова этапа в векторной записи будет

$$\tilde{W}_l^\alpha = W_l^\alpha - (\delta t / \rho_l) F_l. \quad (9.20)$$

С учетом членов первого порядка малости относительно δt , h_1 , h_2 разложения компонент вектора F_l в ряды Тейлора в точке $(x_j, y_k, t\delta t)$, где (x_j, y_k) — координаты центра ячейки (j, k) , в случае схемы Харлоу имеют вид

$$F_l = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & \\ & p_{x_1} & \\ & p_{x_2} & \\ \sum_{\alpha=1}^2 (p u_\alpha - (\delta t / 2) p p_{x_\alpha} / \rho)_{x_\alpha} & \end{pmatrix}, \quad (9.21)$$

где введены обозначения $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $p_{x_\alpha} \equiv \partial p / \partial x_\alpha$ и т. д. Подставляя формулы (9.19), (9.20) в равенство (9.16) и разлагая величины, входящие в равенство (9.16), в ряды Тейлора относительно точки $(x_j, y_k, t\delta t)$, получим п. д. п. схемы полного шага

$$(pw)_t + (\delta t/2)(\rho w)_{tt} + F = \sum_{\alpha=1}^2 \{ -(\rho u_\alpha w)_{x_\alpha} + (h_\alpha/2)(u_\alpha \rho w_{x_\alpha})_{x_\alpha} + \\ + (h_\alpha/2)(u_\alpha \rho w_{x_\alpha})_{x_\alpha} + \delta t [(F_1^\alpha w)_{x_\alpha} + (u_\alpha F)_{x_\alpha}] \}. \quad (9.22)$$

Подставляя в (9.22) компоненты вектора w и соответствующие компоненты вектора F (см. формулу (9.21)) и возвращаясь к первоначальным обозначениям u , v , x , y , будем иметь п. д. п. схемы полного шага метода частиц в ячейке Харлоу

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \partial \rho u / \partial x + \partial \rho v / \partial y &= (\partial / \partial x) ((h_x/2) u \partial \rho / \partial x + \delta t \partial p / \partial x) + \\ &+ (\partial / \partial y) ((h_y/2) v \partial \rho / \partial y + \delta t \partial p / \partial y) - (\delta t/2) \partial^2 \rho / \partial t^2; \\ \partial \rho u / \partial t + \partial (p + \rho u^2) / \partial x + \partial \rho u v / \partial y &= (\partial / \partial x) ((h_x/2) u \partial \rho u / \partial x + \\ &+ 2 \delta t u \partial p / \partial x) + (\partial / \partial y) ((h_y/2) v \partial \rho u / \partial y + \delta t (u \partial p / \partial y + v \partial p / \partial x)) - \\ &- (\delta t/2) \partial^2 \rho u / \partial t^2; \\ \partial \rho v / \partial t + \partial \rho u v / \partial x + \partial (p + \rho v^2) / \partial y &= (\partial / \partial x) ((h_x/2) u \partial \rho v / \partial x + \\ &+ \delta t (v \partial p / \partial x + u \partial p / \partial y)) + (\partial / \partial y) ((h_y/2) v \partial \rho v / \partial y + \\ &+ 2 \delta t v \partial p / \partial y) - (\delta t/2) \partial^2 \rho v / \partial t^2; \quad (9.23) \\ \partial \rho E / \partial t + \partial (p u + \rho u E) / \partial x + \partial (p v + \rho v E) / \partial y &= \\ = (\partial / \partial x) ((h_x/2) u \partial \rho E / \partial x + \delta t ((E + p/(2\rho)) \partial p / \partial x + u \partial \rho u / \partial x)) + \\ + (\partial / \partial y) ((h_y/2) v \partial \rho E / \partial y + \delta t ((E + p/(2\rho)) \partial p / \partial y + v \partial \rho v / \partial y)) - \\ &- (\delta t/2) \partial^2 \rho E / \partial t^2. \end{aligned}$$

Перейдем в декартову систему координат (n, τ) , ось On которой составляет угол β с положительным направлением оси Ox , а положительное направление оси $O\tau$ выбрано так, чтобы система координат (n, τ) была правой. Введем ряд обозначений. Пусть $w = w(x, y, t) = \{\rho, u, v, E\}$. Положим $w^* = w^*(n, \tau, t) = w(x(n, \tau), y(n, \tau), t) = \{\rho^*, u^*, v^*, E^*\}$. Обозначим через u_n , u_τ составляющие вектора скорости вдоль осей On , $O\tau$. Тогда

$$u^* = u_n \cos \beta - u_\tau \sin \beta; \quad v^* = u_\tau \cos \beta + u_n \sin \beta, \quad (9.24)$$

$$\begin{aligned} \partial w / \partial x &= -\sin \beta \partial w^* / \partial \tau + \cos \beta \partial w^* / \partial n; \\ \partial w / \partial y &= \cos \beta \partial w^* / \partial \tau + \sin \beta \partial w^* / \partial n. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Воспользовавшись формулами (9.24), (9.25), (9.23), легко получить п. д. п. уравнения неразрывности в переменных n , τ , t :

$$\begin{aligned} \partial \rho^* / \partial t + \partial \rho^* u_n / \partial \tau + \partial \rho^* u_n / \partial n &= (\partial / \partial \tau) \{ -\sin \beta [(h_x/2) (-\sin \beta u_\tau + \\ &+ \cos \beta u_n) (-\sin \beta \partial \rho^* / \partial \tau + \cos \beta \partial \rho^* / \partial n) + \delta t (-\sin \beta \partial p^* / \partial \tau + \\ &+ \cos \beta \partial p^* / \partial n)] + \cos \beta [(h_y/2) (\cos \beta u_\tau + \sin \beta u_n) (\cos \beta \partial \rho^* / \partial \tau + \\ &+ \sin \beta \partial \rho^* / \partial n)] \} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \beta \partial \rho^*/\partial n) + \delta t (\cos \beta \partial p^*/\partial \tau + \sin \beta \partial p^*/\partial n) \} \} + (\partial/\partial n) \times \\
& \times \{ \cos \beta [(h_x/2) (-\sin \beta u_\tau + \cos \beta u_n) (-\sin \beta \partial \rho^*/\partial \tau + \cos \beta \partial \rho^*/\partial n) + \\
& + \delta t (-\sin \beta \partial p^*/\partial \tau + \cos \beta \partial p^*/\partial n)] + \sin \beta [(h_y/2) (\cos \beta u_\tau + \\
& + \sin \beta u_n) (\cos \beta \partial \rho^*/\partial \tau + \sin \beta \partial \rho^*/\partial n) + \delta t (\cos \beta \partial p^*/\partial \tau + \\
& + \sin \beta \partial p^*/\partial n)] \} - (\delta t/2) \partial^2 \rho^*/\partial t^2. \quad (9.26)
\end{aligned}$$

Покажем, что правая часть уравнения (9.26) явно зависит от β . Для этого приведем подобные члены в правой части (9.26). В результате уравнение (9.26) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& \partial \rho^*/\partial t + \partial \rho^* u_\tau / \partial \tau + \partial \rho^* u_n / \partial n = (h_x/2) \{ \partial/\partial \tau [a_1(\beta, \lambda) u_\tau \partial \rho^*/\partial \tau + \\
& + a_2(\beta, \lambda) (u_\tau \partial \rho^*/\partial n + u_n \partial \rho^*/\partial \tau) + a_3(\beta, \lambda) u_n \partial \rho^*/\partial n + \delta t \partial p^*/\partial \tau] + \\
& + \partial/\partial n [a_2(\beta, \lambda) u_\tau \partial \rho^*/\partial \tau + a_3(\beta, \lambda) (u_\tau \partial \rho^*/\partial n + u_n \partial \rho^*/\partial \tau) + \\
& + a_4(\beta, \lambda) u_n \partial \rho^*/\partial n + \delta t \partial p^*/\partial n] \} - (\delta t/2) \partial^2 \rho^*/\partial t^2, \quad (9.27)
\end{aligned}$$

где $\lambda = h_y/h_x$; $a_1(\beta, \lambda) = \lambda \cos^3 \beta - \sin^3 \beta$;

$$a_2(\beta, \lambda) = \sin^2 \beta \cos \beta + \lambda \cos^2 \beta \sin \beta;$$

$$a_3(\beta, \lambda) = \lambda \sin^2 \beta \cos \beta - \cos^2 \beta \sin \beta;$$

$$a_4(\beta, \lambda) = \cos^3 \beta + \lambda \sin^3 \beta.$$

Нетрудно показать, что правая часть уравнения (9.27) явно зависит от β , достаточно лишь заметить, что $da_i(\beta, \lambda)/d\beta \neq 0$ при $\beta \in [0, 2\pi]$, $\lambda > 0$. Это означает: п. д. п. разностной аппроксимации уравнения перенесенности по схеме (9.12) неинвариантно относительно преобразования поворота. Аналогичный вывод получаем, выписывая п. д. п. уравнений импульса и энергии в переменных n , τ , t (ввиду громоздкости здесь они не приведены). Ранее на неинвариантность аппроксимационной вязкости метода частиц в ячейках относительно преобразования поворота указывалось в [160]. Эта же инвариантность может приводить к большим погрешностям при счете сферических сходящихся течений [160, 150]. Заметим, что использованный выше метод анализа п. д. п. на инвариантность относительно преобразования поворота несколько проще более общего подхода, описанного в [154] и примененного в [155] при построении инвариантных схем с расщеплением типа Харлоу.

Рассмотрим задачу о цилиндрическом распаде разрыва. Начальные данные при $t = 0$ для этой задачи в [205] ставили следующим образом: прямоугольную расчетную область $\{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ разбивали на две подобласти. Подобласть I была сектором круга конечного радиуса $R < \min(a, b)$, подобласть II охватывала оставшуюся часть расчетной области. Начальная скорость газа с уравнением состояния (1.8) равна нулю, и течение при $t > 0$ возникало вследствие перепада давления и плотностей по обе стороны разрывы. На границах $x = 0$ и $y = 0$ задавались условия непротекания, на двух других границах — условия непрерывности потока (границы оттока вещества).

Возьмем при фиксированном $t > 0$ точку $F_0(x_0, y_0)$ на фронте цилиндрической ударной волны, находящемся на конечном расстоянии от начала координат O . Переайдем в систему координат (n, τ) с началом в точке F_0 и осью $F_0 n$, перпендикулярной к фронту в точке F_0 . Обозначим через β ($0 \leq \beta \leq \pi/2$) угол наклона оси $F_0 n$ к оси Ox . Предположим, что расстояние от точки F_0 до начала координат O достаточно велико и основной вклад в «размазывание» фронта ударной волны в направлении по нормали к поверхности разрыва вносят только те члены в правых частях уравнений п. д. п. типа (9.27), которые содержат нормальную составляющую скорости u_n и производные $\partial^2 w^*/\partial n^2$. Пренебрегая в правых частях уравнений п. д. п. членами, содержащими u_τ , $\partial w^*/\partial \tau$, и производными этих членов по n и τ , получаем из формулы (9.27), а также из п. д. п. уравнений импульса и энергии п. д. п. схемы полного шага метода частиц в ячейках в системе координат (n, t)

$$\partial \rho^*/\partial t + \partial \rho^* u_n / \partial n = (\partial / \partial n) [a(\beta, h_x, h_y) u_n \partial \rho^*/\partial n + \delta t \partial p^*/\partial n] - (\delta t/2) \partial^2 \rho^*/\partial t^2; \quad \text{---} \quad \ddot{\tau}$$

$$\partial \rho^* u_n / \partial t + \partial(p^* + \rho^* u_n^2) / \partial n = (\partial / \partial n) [a(\beta, h_x, h_y) u_n \partial \rho^* u_n / \partial n + 2 \delta t u_n \partial p^*/\partial n] - (\delta t/2) \partial^2 \rho^* u_n / \partial t^2; \quad (9.28)$$

$$\partial \rho^* E^* / \partial t + \partial(\rho^* E^* u_n + p^* u_n) / \partial n = (\partial / \partial n) [a(\beta, h_x, h_y) u_n \partial \rho^* E^*/\partial n + \delta t ((E^* + p^*)/(2\rho)) \partial p^*/\partial n + u_n \partial p^* u_n / \partial n b(\beta)] - (\delta t/2) \partial^2 \rho^* E^*/\partial t^2,$$

где

$$a(\beta, h_x, h_y) = (h_x/2) \cos^3 \beta + (h_y/2) \sin^3 \beta; \quad (9.29)$$

$$b(\beta) = \cos^4 \beta + \sin^4 \beta. \quad (9.30)$$

Следуя § 3, будем искать частные решения системы (9.28) вида $w^* = w^*(\xi)$, где $\xi = n - Dt$, D — скорость ударной волны, которая предполагается локально постоянной. Тогда система (9.28) интегрируется один раз и при этом переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\delta t \frac{dp}{d\xi} + \left(au - \frac{\delta t}{2} D^2 \right) \frac{du}{d\xi} = \rho(u - D) - A_1; \quad (9.31)$$

$$\left(au\rho - \frac{\delta t}{2} D^2 \rho \right) \frac{du}{d\xi} + \delta t u \frac{dp}{d\xi} = p - A_2 + uA_1; \quad (9.32)$$

$$au \frac{dE}{d\xi} + \frac{\delta t}{2\rho} p \frac{dp}{d\xi} + \delta t bu \frac{dpu}{d\xi} - \frac{\delta t}{2} D^2 \rho \frac{dE}{d\xi} = pu - A_3 + A_1 E. \quad (9.33)$$

Поскольку используем уравнение состояния (1.8), то (9.33) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \left(a\rho u^2 + \delta t bu p - \frac{\delta t}{2} D^2 \rho u \right) \frac{du}{d\xi} + \left[\frac{au}{\gamma - 1} + \delta t \left(\frac{p}{2\rho} + bu^2 \right) - \frac{\delta t}{2} \frac{D^2}{\gamma - 1} \right] \times \\ & \times \frac{dp}{d\xi} + \left[\frac{\delta t}{2} \frac{D^2 p}{\rho(\gamma - 1)} - \frac{au p}{\rho(\gamma - 1)} \right] \frac{d\rho}{d\xi} = pu - A_3 + A_1 \dot{E}(u, p, \rho). \end{aligned} \quad (9.34)$$

В уравнениях (9.31) — (9.34) для краткости обозначений опущен верхний индекс * при величинах p , ρ , E , а также нижний индекс n при u . Величины A_1 , A_2 , A_3 — постоянные интегрирования. Снабдим величины, характеризующие состояние среды за и перед фронтом, нижними индексами соответственно «1», «2» и верхним индексом «0». Пусть $\vec{f} = (u, p, \rho)^T$ и $X(u_1^0, u_2^0, \vec{f}, h_x, h_y, \beta)$ — толщина по Прандтлю зоны размазанной ударной волны в профиле скорости $u(\xi)$, т. е.

$$X = |u_1^0 - u_2^0| / \max_{\xi} |du/d\xi|. \quad (9.35)$$

Чтобы оценить некоторым образом толщину X , разрешим систему уравнений (9.31), (9.32), (9.34) относительно производных $du/d\xi$, $d\rho/d\xi$, $d\rho/d\xi$. Определитель этой системы

$$d = (au\rho - (\delta t/2)D^2\rho)(b_{01}a^2 + b_{02}\delta t + b_{03}\delta t^2), \quad (9.36)$$

где

$$\begin{aligned} b_{01} &= u^2/(\gamma - 1); \quad b_{02} = u[b(\beta)p/(\rho(\gamma - 1)) + (3/2)(b(\beta) - 1)u^2 - \\ &- D^2/(\gamma - 1)]; \quad b_{03} = D^4/(4(\gamma - 1)) - b(\beta)(3D^2u^2/4 + \\ &+ D^2p/(2\rho(\gamma - 1)) + u^2p/\rho) + 3D^2u^2/4. \end{aligned} \quad (9.37)$$

В рассматриваемой задаче о цилиндрическом распаде разрыва $u > 0$ в области наиболее резкого изменения решения в зоне «размазывания» ударной волны. Из формулы (9.36) и выражений для b_{0k} (9.37) следует, что $d \neq 0$ в области больших градиентов при достаточно малых δt . Разрешая систему (9.31), (9.32), (9.34) относительно $du/d\xi$, $d\rho/d\xi$, $d\rho/d\xi$, получаем для $du/d\xi$ выражение

$$du/d\xi = (1/d)(b_{11}a^2 + b_{12}\delta t + b_{13}\delta t^2), \quad (9.38)$$

где определитель d вычисляется по формулам (9.36), (9.37),

$$\begin{aligned} b_{11} &= (u^2/(\gamma - 1))(p - A_2 + uA_1); \\ b_{12} &= -(u^2p/(\rho(\gamma - 1)))[\rho(u - D) - A_1] - u^2(pu - A_3 + A_1E) + \\ &+ u(p - A_2 + uA_1)[(3b(\beta) - 1)u^2/2 + (b(\beta) - 1)p/(\rho(\gamma - 1)) - \\ &- 3D^2/(2(\gamma - 1))]; \\ b_{13} &= (D^2/2)up/(\rho(\gamma - 1))[\rho(u - D) - A_1] + (uD^2/2) \times \\ &\times (pu - A_3 + A_1E) - (D^2/2)(p - A_2 + uA_1)[(3b(\beta) - 1)u^2/2 + \\ &+ (b(\beta) - 1)p/(\rho(\gamma - 1)) - D^2/(2(\gamma - 1))]. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Если величины u , p , ρ ограничены в зоне «размазывания» ударной волны, то при достаточно малых δt с учетом формул (9.38), (9.39), (9.36), (9.37) получаем

$$X(u_1^0, u_2^0, \vec{f}, h_x, h_y, \beta) = |u_1^0 - u_2^0| \min_{\xi} (|au^3\rho/((\gamma - 1)b_{11})|) + O(\delta t). \quad (9.40)$$

Введем в рассмотрение с учетом (9.40) величину

$$X_0(u_1^0, u_2^0, \vec{f}, h_x, h_y, \beta) = |u_1^0 - u_2^0| \min_{\xi} |au^3\rho/((\gamma - 1)b_{11})|. \quad (9.41)$$

Из формулы (9.40) следует, что при достаточно малых δt толщина X будет мало отличаться от величины X_0 , определяемой по формуле (9.41). Зафиксируем точку ξ и вычислим отношение

$$\frac{X_0(u_1^0, u_2^0, \vec{f}, h_x, h_y, \beta)}{X_0(u_1^0, u_2^0, \vec{f}, h_x, h_y, 0)} = \tilde{a}(\lambda, \beta), \quad (9.42)$$

где

$$\lambda = h_y/h_x, \quad \tilde{a}(\lambda, \beta) = \cos^3 \beta + \lambda \sin^3 \beta. \quad (9.43)$$

Легко найти минимум функции $\tilde{a}(\lambda, \beta)$ при фиксированном λ в промежутке $0 \leq \beta \leq \pi/2$. Этот минимум достигается при $\beta = \text{arctg}(1/\lambda)$, причем

$$\min_{\beta, 0 < \beta < \pi/2} \tilde{a}(\lambda, \beta) = \lambda / \sqrt{\lambda^2 + 1} = h_y / \sqrt{h_x^2 + h_y^2}. \quad (9.44)$$

По аналогии с формулой (9.35) можно определить толщины по Прандтлю $X(p_1^0, p_2^0, \vec{f}, h_x, h_y, \beta)$, $X(\rho_1^0, \rho_2^0, \vec{f}, h_x, h_y, \beta)$ в размывания ударной волны в профилях функций $p(\xi)$, $\rho(\xi)$. После введения аналогично предыдущему величин $X_0(p_1^0, p_2^0, \vec{f}, h_x, h_y, \beta)$ и $X_0(\rho_1^0, \rho_2^0, \vec{f}, h_x, h_y, \beta)$ для них устанавливается зависимость от угла β , совпадающая с указанной в формулах (9.42), (9.43). Штриховой линией на рис. 15, а и сплошными линиями на рис. 15, б, в нанесен график функции $\tilde{a}(\lambda, \beta)$ при трех значениях λ . Сплошными кривыми на рис. 15, а, точками и штриховыми линиями на рис. 15, б, в изображены графики отношения $X(\beta)/X(0)$, полученные при расчетах задачи о цилиндрическом распаде разрыва методом частиц в ячейках [205]. Цифрами 1, 2 на рис. 15, а, в помечены кривые численного решения на моменты времени $t = 20\delta t$, $t = 40\delta t$ соответственно. Статистические флуктуации плотности, присущие методу Харлоу, приводят к осцилляциям толщины $X(\beta)$. Тем не менее рис. 15, а свидетельствует, что величина $X(\beta)$ достигает минимума при $\beta \approx \pi/4$.

Чтобы уменьшить эффект дискретности плотности, проведены также расчеты модифицированным методом Харлоу, при вычислении давления из уравнения состояния (1.8) использовалась плотность ρ , полученная пересчетом по разностной схеме, аппроксимирующей уравнение неразрывности [160, 108]. Соответствующие результаты расчета при $h_y/h_x = 2$ изображены на рис. 15, в. По сравнению с рис. 15, б поведение толщины $X(\beta)$ на рис. 15, в более монотонно благодаря пересчету плотности. Итак, результаты численных расчетов полностью согласуются с выводами, полученными при анализе п. д. п. асимптотической разностной схемы полного шага

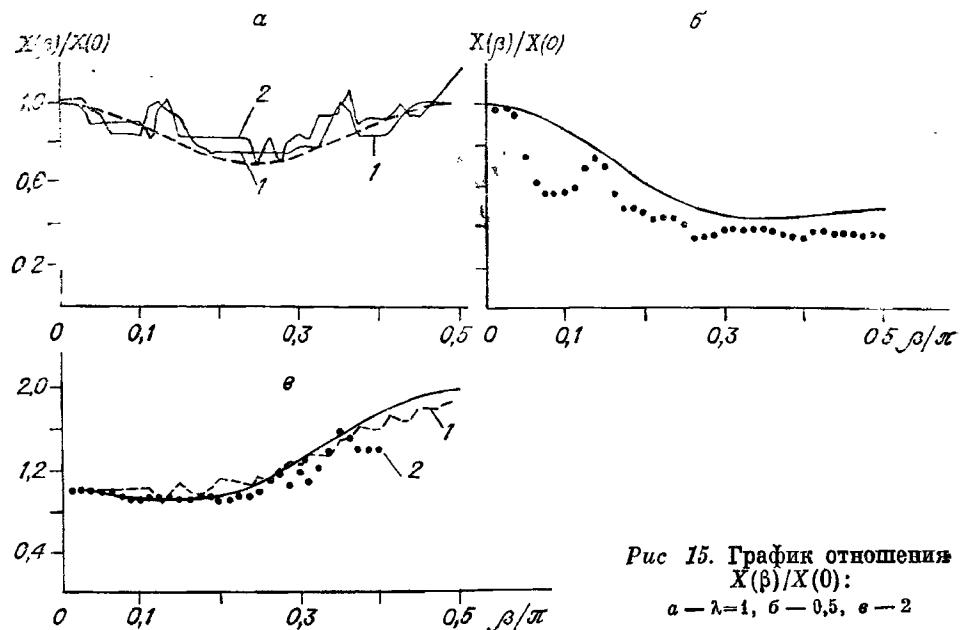


Рис. 15. График отношения $X(\beta)/X(0)$:
а — $\lambda=1$, б — $0,5$, г — 2

метода частиц в ячейках Харлоу. Отметим, что результаты проведенного рассмотрения применимы также к методу «жидкость в ячейке» [210], поскольку использованная в п. 9.2 для анализа разностная схема совпадает со схемой метода [210].

§ 10. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЦЕНТРА РАЗМАЗАННОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В СЛУЧАЕ ПРЯМОГО ФРОНТА

10.1. Анализ на основе решений типа бегущей волны уравнений п. д. п.

Рассмотрим в плоскости (x, y) стационарную ударную волну с бесконечным прямолинейным фронтом, движущуюся под постоянным пленулевым углом к линиям прямоугольной эйлеровой расчетной сетки. Возьмем класс разностных схем первого порядка точности, П-форму п. д. п. которых можно записать (см. [154]) как

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F(w)}{\partial x} + \frac{\partial G(w)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{21} \frac{\partial w}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (10.1)$$

где векторы-столбцы w , F , G определяются по формулам (9.16), а C_{ij} , $i, j = 1, 2$, есть квадратные матрицы размерности 4×4 , причем

$$C_{ij} = C_{ij}(w, h_x, h_y, \tau), \quad i, j = 1, 2. \quad (10.2)$$

Пусть \vec{D} — вектор скорости ударной волны, а D_1, D_2 — проекции этого вектора на оси x, y соответственно. По аналогии с [194] будем рассматривать решения типа бегущей волны п. д. п. (10.1), т. е. решения, зависящие только от двух автомодельных переменных

$$\xi = x - D_1 t, \quad \eta = y - D_2 t. \quad (10.3)$$

Лемма 2. Если матрицы C_{ij} в (10.1) представимы в виде

$$C_{ij} = h_i C_{ij}(w, \lambda, \kappa), \quad i, j = 1, 2, \quad (10.4)$$

здесь

$$\lambda = h_y/h_x, \quad \kappa = \tau/h_x, \quad (10.5)$$

тогда необходимым условием существования центра размазанной ударной волны в профиле решения $w(\xi, \eta)$ вдоль любого луча, ортогонального к ударному фронту, будут равенства $\lambda = \text{const}$, $\kappa = \text{const}$.

Доказательство. Перепишем систему (10.1) в более компактном виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = R, \quad (10.6)$$

где R — вектор-столбец,

$$R = (R_\rho, R_u, R_v, R_E)^T,$$

верхний индекс T обозначает операцию транспонирования. Введем обозначения

$$U = u - D_1, \quad V = v - D_2. \quad (10.7)$$

Подставив в (10.6) $w = w(\xi, \eta)$, получим с учетом обозначений (10.7) п. д. п. уравнения неразрывности

$$\partial \rho U / \partial \xi + \partial \rho V / \partial \eta = R_\rho. \quad (10.8)$$

Рассмотрим второе уравнение системы (10.6). Умножим обе части (10.8) на D_1 и вычтем почленно из обеих частей второго уравнения в системе (10.6). В итоге будем иметь

$$\partial(p + \rho U^2) / \partial \xi + \partial \rho UV / \partial \eta = R_u - D_1 R_\rho. \quad (10.9)$$

Аналогично

$$\partial \rho UV / \partial \xi + \partial(p + \rho V^2) / \partial \eta = R_v - D_2 R_\rho. \quad (10.10)$$

Умножим обе части (10.8) на 0,5 ($D_1^2 + D_2^2$) и вычтем почленно из обеих частей четвертого уравнения в системе (10.6). Затем умножим обе части (10.9) на D_1 и вычтем почленно из обеих частей четвертого уравнения системы (10.6). Умножим обе части (10.10) на D_2 и вычтем почленно из обеих частей п. д. п. уравнения энергии в (10.6). В итоге получим

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial \xi)(pU + \rho U \mathcal{E}) + (\partial/\partial \eta)(pV + \rho V \mathcal{E}) = \\ & = R_E + (1/2)(D_1^2 + D_2^2)R_\rho - D_1 R_u - D_2 R_v; \end{aligned} \quad (10.11)$$

где $\mathcal{E} = \varepsilon + 0,5(U^2 + V^2)$. Правые части уравнений (10.8) — (10.11) представляют собой линейные комбинации (с постоянными коэф-

фициентами) величин R_p , R_u , R_v , R_w . Поэтому с учетом соотношений (10.4) можем переписать систему (10.6) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(W)}{\partial \xi} + \frac{\partial G(W)}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[Q_1 \left(W, h_x \frac{\partial w}{\partial \xi}, \lambda h_x \frac{\partial w}{\partial \eta}, \kappa, \lambda, D_1, D_2 \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[Q_2 \left(W, h_x, \lambda h_x \frac{\partial w}{\partial \eta}, \kappa, \lambda, D_1, D_2 \right) \right], \end{aligned} \quad (10.12)$$

где $W = (\rho, \rho U, \rho V, \rho \mathcal{E})^T$. Сделаем в системе (10.12) замену переменных $\xi' = (\xi - \xi_0)/h_x$, $\eta' = (\eta - \eta_0)/h_y$, где ξ_0, η_0 — произвольные постоянные. Тогда система (10.12) принимает форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(W)}{\partial \xi'} + \frac{\partial G(W)}{\partial \eta'} &= \frac{\partial}{\partial \xi'} \left[Q_1 \left(W, \frac{\partial W}{\partial \xi'}, \lambda \frac{\partial W}{\partial \eta'}, \kappa, \lambda, D_1, D_2 \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta'} \left[Q_2 \left(W, \frac{\partial W}{\partial \xi'}, \lambda \frac{\partial W}{\partial \eta'}, \kappa, \lambda, D_1, D_2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Из (10.13) следует, что решение W зависит от ξ' , η' , λ , κ , D_1 , D_2 . Повторяя те же рассуждения, что и в § 7, приходим к выводу: для существования центра размазанной ударной волны в решении $w(\xi, \eta)$ необходимо выполнение равенств $\lambda = \text{const}$, $\kappa = \text{const}$.

Следствие 1. Утверждение, сформулированное в виде леммы 2, справедливо также по отношению к разностным схемам, Г-форма п. д. п. которых записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F(w)}{\partial x} + \frac{\partial G(w)}{\partial y} &= -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{21} \frac{\partial w}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (10.14)$$

где матрицы C_i , обладают свойством (10.4).

Действительно, на решениях типа бегущей волны $w = w(\xi, \eta)$ оператор $\partial^2/\partial t^2$ в (10.14) заменяется линейным оператором $\partial^2/\partial t^2 = (D_1 \partial/\partial \xi + D_2 \partial/\partial \eta)^2$.

Следствие 2. Использование формул (10.8) — (10.11) и осуществление тех же выкладок, которые имеют целью получение интеграла Бернуlli, дает равенство

$$\begin{aligned} U \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{U^2 + V^2}{2} \right) + V \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{U^2 + V^2}{2} \right) &= \\ = \frac{1}{\rho} \left[\bar{R}_E - R_\rho \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{U^2 + V^2}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (10.15)$$

где γ — постоянная в уравнении состояния (1.8), $\bar{R}_E = R_E + \frac{1}{2} (D_1^2 + D_2^2) R_\rho - D_1 R_u - D_2 R_v$.

Формулу (10.15) можно использовать следующим образом. Пусть в некотором газодинамическом течении имеет место соотношение

$$U \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{U^2 + V^2}{2} \right) + V \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{U^2 + V^2}{2} \right) = 0. \quad (10.16)$$

Рассмотрим линию тока $d\eta/d\xi = V/U$. Если в некотором сечении $\xi = \xi_*$ выполняется равенство

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{U^2 + V^2}{2} = \text{const}, \quad (10.17)$$

то в силу (10.16) оно справедливо также в области $\xi \geq \xi_*$, а соотношение (10.17) называется интегралом Бернулли. Тогда при конструировании разностных схем для системы (9.1) разумно потребовать, чтобы п. д. п. (10.6) удовлетворяло свойству

$$\bar{R}_E - R_\rho \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{U^2 + V^2}{2} \right) = 0. \quad (10.18)$$

Пример. Рассмотрим Г-форму п. д. п. схемы Лакса [116, 120]

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{h_x^2}{4\tau} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h_y^2}{4\tau} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (10.19)$$

В этом случае в уравнении (10.14)

$$C_{12} = C_{21} = 0; \quad C_{11} = (h_x^2/(4\tau)) I; \quad C_{22} = (h_y^2/(4\tau)) I, \quad (10.20)$$

I — единичная матрица. Используя обозначения (10.5), перепишем формулы (10.20) в виде

$$C_{12} = C_{21} = 0, \quad C_{11} = (h_x/(4\kappa)) I, \quad C_{22} = h_x(\lambda^2/(4\kappa)) I.$$

Можно показать, что для схемы Лакса равенство (10.18) не имеет места ни при каких соотношениях между τ , h_x , h_y , D_1 , D_2 .

10.2. Применение нормы схемной вязкости в алгоритмах анализаторов ударных волн

Непосредственное использование понятия центра конечно-разностной ударной волны для локализации ударных волн в двумерных расчетах требует выполнения двух расчетов одной задачи, т. е. в общем случае неэкономично. В § 6 показано, что при ряде ограничений на матрицу коэффициентов схемной вязкости $B(w, h, \tau)$ в П-форме п. д. п. (3.4) можно реализовать определение точек максимума величины (7.19) в алгоритмах дифференциальных анализаторов. Доказательство аналога этого свойства схемой вязкости в двумерном случае затруднительно. Однако в данном случае можно построить дифференциальные анализаторы, которые в частных случаях движения части ударного фронта параллельно оси x или y совпадают с одномерным случаем, выражаемым формулой (7.19). Алгоритмы такого рода впервые опробованы в [19]. Перечислим некоторые из этих дифференциальных анализаторов. В [19] поиск точек ударных фронтов осуществлялся вдоль некоторого количества лучей, пересекавших расчетную область под различными углами к осям x , y так, чтобы лучи были приблизительно ортогональны к возникающим ударным волнам. При этом использовалась имеющаяся информация о качественном характере рас-

пространения ударных волн в решаемой двумерной задаче. Допустим, что Q — некоторая норма схемной вязкости в выбранной точке (x, y) (значения Q на лучах вычислялись с помощью интерполяции), λ — номер луча. Перечислим некоторые из форм величины Q , рассмотренных в [19].

Алгоритм 1. Пусть

$$Q_1 = |C_{11}(\partial w/\partial x) + C_{12}(\partial w/\partial y)|, \quad \operatorname{div} \vec{u} < 0; \quad (10.21)$$

$$Q_2 = |C_{21}(\partial w/\partial x) + C_{22}(\partial w/\partial y)|, \quad \operatorname{div} \vec{u} < 0.$$

Запись (10.21) означает, что величины Q_1, Q_2 вычислялись только в тех точках, где $\operatorname{div} \vec{u} < 0$.

Предположим, что $(x_\lambda, y_\lambda)_1, (x_\lambda, y_\lambda)_2$ — координаты точек максимума величин соответственно Q_1 и Q_2 на луче с номером λ . Тогда искомая точка ударного фронта на этом луче вычисляется по формуле

$$(x_\lambda, y_\lambda) = 0.5[(x_\lambda, y_\lambda)_1 + (x_\lambda, y_\lambda)_2]. \quad (10.22)$$

Неотрицательная величина $|C_{11}\partial w/\partial x + C_{12}\partial w/\partial y|$ в (10.21) представляет собой обычную евклидову норму вектора $C_{11}\partial w/\partial x + C_{12}\partial w/\partial y$, входящего в Π -форму п. д. п. (10.1).

Алгоритм 2.

$$Q = Q_{u,v} : Q_{u,v} = \sum_{i,j=1}^2 q_{ij}^2; \quad \operatorname{div} \vec{u} < 0, \quad (10.23)$$

т. е. в рассматриваемом случае Q есть свертка матрицы Q , вычисленной из (10.1), если получить из (10.1) Π -форму п. д. п. уравнений количества движения, преобразованных к недивергентному виду

$$\rho \vec{u} \cdot \vec{u} + \nabla p = \operatorname{div} Q_{u,v}, \quad (10.24)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad Q_{u,v} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}. \quad (10.25)$$

В качестве примера в [19] выписаны выражения для функций q_{ij} , $i, j = 1, 2$, входящих в формулу (10.25), для случая метода частиц в ячейках Харлоу [150]. Эти формулы можно легко получить из Γ -формы п. д. п. (9.23) путем перехода к Π -форме и выполнения ряда алгебраических преобразований уравнений Π -формы п. д. п. Заметим, что выражения коэффициентов схемной вязкости в недивергентном п. д. п. (10.24) имеют более простую структуру, чем в дивергентной системе (10.1). В [19] анализируется поведение максимума величины (10.23) как функции угла наклона β луча к оси x в предположении одномерного течения в ударной волне с прямым фронтом, имеющим ненулевой наклон к оси y . Этот анализ, проведенный для случая схемы метода Харлоу и квадратных ячеек сетки в плоскости (x, y) , показал, что величина $Q_{u,v} : Q_{u,v}$ достигает минимума при $\beta = \pi/4$.

Алгоритм 3. Непосредственное использование п. д. п. (10.1) приводит к довольно громоздким формулам для вычисления Q . Поэтому необходимо было выяснить возможности реализации более простых выражений для Q , не связанных с применением п. д. п. Как показано в § 5, при определенной структуре искусственной вязкости точка $\max |\partial u_i / \partial x_i|$, где u — скорость газа по нормали к фронту, совпадает с центром размазанной ударной волны. В двухмерном случае (см. § 9) имеет место формула

$$\partial u_n / \partial n = \operatorname{div} \vec{u} \quad (10.26)$$

при $u_\tau = 0$, где u_τ — касательная к поверхности ударного фронта составляющая скорости. В [19] рассмотрен следующий алгоритм дифференциального анализатора, основанный на формуле (10.26):

$$Q = |\operatorname{div} \vec{u}|, \quad \operatorname{div} \vec{u} < 0. \quad (10.27)$$

§ 11. ЛОКАЛИЗАЦИЯ УДАРНЫХ ВОЛН С ПОМОЩЬЮ ПОДВИЖНЫХ СЕТОК

Исследованные в § 10 алгоритмы локализации ударных волн по результатам сквозного счета предусматривали использование фиксированной прямоугольной расчетной сетки в плоскости пространственных координат x, y . Само существование проблемы локализации разрывов в двухмерном случае связано с тем обстоятельством, что ширина зоны «размазывания» разрыва на равномерной прямоугольной сетке может быть довольно значительной, особенно если приходится применять в расчете сравнительно небольшое число ячеек сетки. В то же время можно добиться реального уменьшения толщины зон размазанных разрывов при умеренном числе узлов с помощью подвижных сеток, автоматически подстраивающихся к решению так, что линии сетки сгущаются в областях больших градиентов решения [140, 34, 89, 163, 68, 291, 67]. В [50] локальное измельчение ячеек сетки в направлении наибольших градиентов параметров потока предложено рассматривать как одну из форм выделения особенностей течения.

Можно выделить два подхода к разработке подвижных сеток, адаптирующихся к решению, в зависимости от способа «увязывания» алгоритма расчета сетки с алгоритмом решения системы дифференциальных уравнений, описывающих течение жидкости [173]. Первый из них предусматривает одновременный поиск как решения исходных дифференциальных уравнений, так и распределения узлов расчетной сетки. Во втором случае вычисления ведут последовательно. Сначала на заданной сетке рассчитывают решение, затем по нему вычисляют новое положение сетки. В § 8 описан алгоритм такого типа. Следует заметить, что есть существенное различие в реализации указанных подходов. Первый из них предполагает использование уравнений газодинамики, записанных в общих подвижных координатах. Для их замыкания в общем случае

следует добавить еще два уравнения для вычисления координат $x_\alpha(t)$, $y_\alpha(t)$ узлов подвижной сетки. Второй из указанных подходов позволяет использовать систему уравнений, описывающих течение, в исходной декартовой системе эйлеровых координат x , y , например (9.1). Однако второй подход требует интерполяции для вычисления величин решения на «новой» сетке по значениям решения на «старой» сетке. В § 8 для этой цели взяты кубические сплайны. В общем случае интерполяция газодинамических параметров с одной сетки на другую должна выполняться с учетом законов сохранения массы, импульса и энергии.

11.1. Уравнения течения невязкого газа в подвижных координатах

Рассмотрим подробнее первый подход к построению адаптирующихся сеток, когда решаются уравнения совместного расчета течения газа и координат сетки. Их вывод дан в [89, 67]. В случае двумерного нестационарного течения невязкого газа эти уравнения (без соотношений для вычисления координат узлов сетки) имеют вид [67]

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t)(\rho\Delta) + (\partial/\partial q^\alpha)[\rho\Delta(v^\alpha - \omega^\alpha)] &= 0; \\ (\partial/\partial t)[\rho\Delta(v^i - \omega^i)] + (\partial/\partial q^\alpha)[\rho\Delta(v^i - \omega^i)(v^\alpha - \omega^\alpha) + \Delta p^{i\alpha}] + \\ + \Delta\Gamma_{\alpha\beta}^i[p^{\alpha\beta} + \rho(v^\alpha - \omega^\alpha)(v^\beta - \omega^\beta)] &= 0; \end{aligned} \quad (11.1)$$

$$(\partial/\partial t)(\Delta\rho E) + (\partial/\partial q^\alpha)[\rho E\Delta(v^\alpha - \omega^\alpha) + p^{i\alpha}g_{ik}v^k] = 0,$$

$$\Delta = \det \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\beta} \right|, \quad \omega^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}; \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (11.2)$$

В системе (11.1) ρ — плотность, q^α — криволинейные координаты, по повторяющимся индексам производится суммирование; $p^{i\alpha} = pg^\alpha$, v^α — проекция вектора скорости на ось x^α ;

$$E = e + (1/2)[(v^1)^2 + (v^2)^2], \quad g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ 1, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

Символы Кристоффеля $\Gamma_{\alpha\beta}^i$ вычисляются по формуле

$$\Gamma_{\alpha\beta}^i = A_s^i \frac{\partial a_\beta^s}{\partial q^\alpha} (\alpha, \beta, i, s, k = 1, 2),$$

где $a_\beta^s = \partial x^s / \partial q^\beta$, $A_s^i = \partial q^i / \partial x^s$, $i, s = 1, 2$, $a_\beta^\alpha A_\gamma^\beta = \delta_\gamma^\alpha$. Для замыкания системы (11.1) необходимо уравнение состояния вида (1.5) и уравнения движения сетки, с помощью которых находят $\vec{\omega} = \{\omega^i\}$, являющийся контравариантным вектором скорости координатной сетки; $\vec{\omega}$ можно рассматривать как вектор управления сеткой. В отличие от широко распространенного геометрического подхода, когда сетка определяется геометрией расчетной области, а не самим решением, анализируемый динамический подход

предусматривает решение задачи построения континуального дифференцируемого отображения $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$, соответствующего состоянию всего потока. Затем осуществляется дискретизация этого отображения и на основе дискретной сетки строится эффективная разностная схема, адаптирующаяся к потоку.

11.2. Уравнения движения сетки

Простейшим способом вычисления координат $x(q_i)$ узлов сетки в одномерном случае с учетом градиентов искомой функции $f(x, t)$ является использование соотношения

$$[x(q_{i+1}) - x(q_i)](|\partial f / \partial x| + \delta) = \text{const},$$

где δ — наперед задаваемая положительная постоянная. Для некоторых двумерных задач газовой динамики, например в случае обтекания газом выпуклых тел, достаточно ограничиться сгущением сетки в одном координатном направлении (по нормали к поверхности тела). Пусть, как и в [67], при расчете обтекания тела в качестве криволинейных координат x^1, x^2 берутся «естественные» координаты $x^1 = s, x^2 = n$, где ось s направлена по касательной к поверхности обтекаемого тела, ось n — по нормали. Для рассматриваемой задачи обтекания затупленного тела (см. рис. 21) зоны больших градиентов решения расположены в области пограничного слоя и ударного перехода, положение которого априори неизвестно. В криволинейных ортогональных координатах это соответствует максимальным градиентам функций в направлении x^2 .

Для построения разностной сетки, автоматически сгущающейся в области больших градиентов, в [67] введено преобразование координат $q^1 = q^1(x^1), q^2 = q^2(x^1, x^2)$, переводящее расчетную область в единичный квадрат $R\{0 \leq q^i \leq 1\}, i = 1, 2$. В стандартной области R взята равномерная сетка с шагами h_1, h_2 , соответствующая ей сегма в физической области строилась неравномерной, задаваемой обратным преобразованием

$$x^1 = x^1(q^1), \quad x^2 = x^2(q^1, q^2). \quad (11.3)$$

Вдоль координатного направления x^1 шаги сетки выбирались равномерными. В направлении x^2 преобразование координат (11.3) задавалось уравнением

$$(|\partial f / \partial x^2|^{\alpha} + \delta) (\partial x^2 / \partial q^2) = \text{const}, \quad (11.4)$$

где α, δ — задаваемые положительные постоянные, $\partial f / \partial x^2$ — градиент функции f в направлении x^2 . В качестве f можно выбрать любую из функций ρ, v^1, v^2, ϵ или их комбинацию. Коэффициентом α задается необходимое сгущение узлов разностной сетки (сгущение координатных линий) в направлении x^2 , а параметр δ выбирается отличным от нуля, чтобы избежать особенности сетки в узлах, где $\partial f / \partial x^2 = 0$. Условие (11.4) получено в [67] на основе вариационного принципа, выполнение которого обеспечивает небольшие значения градиентов потока $\partial v / \partial q^2$. При расчетах на уста-

новление значение координаты x^2 определялось из решения уравнения

$$\frac{\partial x^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q^2} \left[\left(\left| \frac{\partial f}{\partial x^2} \right|^{\alpha} + \delta \right) \frac{\partial r^2}{\partial q^2} \right] \quad (11.5)$$

со стационарными краевыми условиями. При установлении решение уравнения (11.5) сходится к решению (11.4).

Вариационный функционал довольно общего вида для управления сеткой предложен авторами [163] (см. также [291, 67]). Функции $x^1(q^1, q^2, t)$ и $x^2(q^1, q^2, t)$, минимизирующие этот функционал, удовлетворяют одновременно нескольким требованиям, предъявляемым к сетке, где x^1, x^2 — подвижные декартовы координаты, q^1, q^2 — криволинейные координаты. Следуя [163, 291], положим

$$h_1 = \sum_{i=1}^2 (v^i - \omega^i)^2; \quad h_2 = (\partial q^1 / \partial x^1 - \partial q^2 / \partial x^2)^2 + (\partial q^1 / \partial x^2 - \partial q^2 / \partial x^1)^2; \\ h_3 = \Delta = \det \|\partial x^\alpha / \partial q^i\|, \quad i, \alpha = 1, 2.$$

Авторы [163] величину h , рассматривали в качестве меры отклонения сетки от лагранжиевой (меры нелагранжиевости), h_2 — как меру деформации, характеризующей отклонение от конформного преобразования, h_3 — меру сгущения сетки. Вариационный принцип построения сетки сформулирован в [163] как задача нахождения минимума функционала

$$\Phi(q^i) = \int \varphi(h_1, h_2, h_3) dx^1 dx^2 dt, \quad (11.6)$$

где φ — произвольная неотрицательная функция трех аргументов h_1, h_2, h_3 , зависящая дополнительно от газодинамических параметров и их градиентов. Экстремальная поверхность удовлетворяет в декартовых координатах уравнению Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial (\partial q^i / \partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial (\partial q^i / \partial x^j)} \right] = 0,$$

которое в новых координатах t, q^i принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial (\partial q^i / \partial t)} \right\} + \frac{\partial}{\partial q^j} \left\{ \Delta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial (\partial q^i / \partial x^k)} \frac{\partial q^j}{\partial x^k} - \omega \frac{\partial \varphi}{\partial (\partial q^i / \partial t)} \right] \right\} = 0.$$

Положим

$$\varphi = \varepsilon_1 h_1 \Delta^\alpha + \varepsilon_2 h_2 + \varepsilon_3 \Delta^\beta, \quad (11.7)$$

где $\varepsilon_i, i = 1, 2, 3$ — функции, зависящие от газодинамических величин и их градиентов. В этом конкретном случае уравнения Эйлера в координатах q^i можно записать так:

$$(\partial / \partial t) [\varepsilon_1 \Delta^{\alpha+1} (v^i - \omega^i)] + (\partial / \partial q^\alpha) [(v^i - \omega^i) (v^\alpha - \omega^\alpha) \Delta^{\alpha+1} - \\ - \delta^{ij} \varepsilon_1 \Delta^{\alpha+1} \sum_{\beta=1}^2 (v^\beta - \omega^\beta) + \varepsilon_2 ((\Delta g^{i\alpha} - \delta^{i\alpha}) - \delta^{i\alpha} \beta \varepsilon_2 \Delta^{\beta+1})] = 0, \quad (11.8)$$

где

$$g^{ij} = (\partial q^i / \partial x^k)(\partial q^j / \partial x^k), \quad \delta^{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Присоединяя к системе (11.1) уравнения состояния (1.5) и сетки (11.8), получим замкнутую систему для составного вектора $\{\rho, v^i, E, \omega^i\}$, характеризующего состояние материальной и информационной среды [67]. До настоящего времени уравнения движения сетки в их полном виде (11.7), т. е. при $\epsilon_1 \neq 0, \epsilon_2 \neq 0, \epsilon_3 \neq 0$, ввиду их сложности не использовались в газодинамических расчетах. Как уже говорилось, для ряда задач газовой динамики, достаточно стущать сетку в одном координатном направлении, скажем q^2 . В этом случае нужно найти такое одномерное отображение $x^2 = x^2(q^2, t)$, чтобы градиенты $\partial f_i / \partial q^2$ газодинамических величин не были большими по отношению к новой координате q^2 . Эти отображения можно определить как минимизацию функционалов [164, 291]

$$\Phi_1(q^2, t) = \int_{x^2} [\sum a_i |\partial f_i / \partial q^2|^{\alpha_i} + b \ln \Delta] dx^2;$$

$$\Phi_2(q^2, t) = \int_{x^2} [\sum a_i |\partial f_i / \partial q^2|^{\alpha_i} + b \Delta^\beta + c \Delta^{-\eta}] dx^2,$$

где $\alpha_i, b, c, \eta, \beta$ — вещественные параметры, a_i — функции градиентов газодинамических величин. Отображение $x^2(q^2, t)$ удовлетворяет уравнениям Эйлера

$$(\partial / \partial q^2) [(\sum a_i \alpha_i |\partial f_i / \partial q^2|^{\alpha_i} + b) \partial x^2 / \partial q^2] = 0;$$

$$(\partial / \partial q^2) [\sum a_i \alpha_i |\partial f_i / \partial q^2|^{\alpha_i} \partial x^2 / \partial q^2 + b \beta (\partial x^2 / \partial q^2)^{\beta+1} - c \eta (\partial x^2 / \partial q^2)^{-\eta+1}] = 0.$$

Соображения о построении и использовании адаптирующихся к потоку сеток изложены также в работах [184, 263, 291, 87, 229, 223, 224]. В частности, в [184], [263] предложен функционал для сетки, аналогичный функционалу (11.6), (11.7)

$$I = I_s + \lambda_v I_v + \lambda'_0 I'_0,$$

где I_s, I_v, I'_0 — функционалы, характеризующие различные свойства сетки. При этом

$$I_s = \int_D [(\nabla \xi)^2 + (\nabla \eta)^2] dV; \quad I_v = \int_D w J dV; \quad I'_0 = \int_D (\nabla \xi \nabla \eta)^2 J^3 dV,$$

где $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, J — якобиан преобразования $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$. Интеграл I_s характеризует гладкость сетки, I'_0 — степень ее ортогональности, с помощью интеграла I_v учитываются особенности решения за счет выбора весовой функции w .

В [291, 87] указан подход к построению сетки, исходя из минимизации локальной погрешности. Пусть $\mathcal{L}(u) = 0$ — система дифференциальных уравнений относительно вектор-функции u , а $\Lambda(u_i)$ — аппроксимация \mathcal{L} на подвижной сетке. Обозначим через ε главный член погрешности u , а через R — главный член погреш-

ности аппроксимации \mathcal{L} . Как показано в [86], ε и R связаны уравнением $\mathcal{L}_1(\varepsilon) = R$, где левая часть \mathcal{L}_1 получена как первая вариация системы $\mathcal{L}(u) = 0$. Из уравнения $\mathcal{L}_1(\varepsilon) = R$ при $R = 0$ получаем $\varepsilon = 0$. Очевидно, что та сетка, при которой $R = 0$, будет оптимальной. Поэтому если уравнение $R = 0$ разрешимо относительно координат узлов x^i , то тем самым найдено оптимальное отображение. Однако при произвольной схеме $\Lambda(u_i) = 0$, аппроксимирующей систему $\mathcal{L}(u) = 0$, уравнение $R = 0$ неразрешимо. Задача генерирования оптимальной сетки в этом случае решается совместно с задачей построения такой разностной схемы $\Lambda(u_i) = 0$, при которой уравнение $R = 0$ разрешимо относительно координат узлов x . Примеры аналогичного расчета сетки для уравнения $du/dx = f(u, x)$ даны в [87]. Однако, как показывают примеры, такая сетка, согласно [87], зависит от градиентов решения.

В [229] предлагалось при построении адаптивных сеток применять дифференциальные приближения разностных схем. В [223, 224] предложен алгоритм вычисления адаптивной сетки для расчетов потенциального обтекания крыловых профилей околосзвуковым потоком газа. В этом алгоритме используются лишь значения решения на поверхности профиля крыла и перестраиваются узлы тоже только на поверхности. Таким образом, задача перестройки расчетной сетки на одно измерение меньше, чем исходная задача расчета потока. Показано, что предлагаемый алгоритм построения сеток существенно увеличивает точность численного решения. Алгоритм [224] был реализован в следующей последовательности. Сначала около профиля крыла с помощью решения уравнений Пуассона генерировали обычную сетку, на которой решали полное уравнение для потенциала скорости. Полученную при этом информацию о градиентах решения, использовали для перераспределения узлов сетки на поверхности профиля крыла. После этого строили новую сетку во всей расчетной области (по той же программе для уравнений Пуассона) при заданном новом распределении узлов на профиле. Затем осуществляли численное решение полного уравнения для потенциала скорости на новой сетке.

Если в решаемой задаче присутствуют особенности течения (ударные волны, контактные поверхности), имеющие сложную геометрическую конфигурацию и быстро изменяющиеся во времени, то использование подвижных сеток, адаптирующихся к потоку с учетом градиентов решения, может вызвать определенные трудности. В этих случаях, по-видимому, наиболее мощным средством численного моделирования остается метод частиц в ячейках Харлоу [150, 4, 160]. Отметим также недавно разработанный метод концентраций [8], с помощью которого оказалось возможным рассчитать неустойчивость тангенциального разрыва скорости в сжимаемых газах (неустойчивость Кельвина — Гельмгольца [9]). Можно указать еще ряд сложных задач, для которых характерно наличие многих взаимодействующих особенностей. Как следствие, при численном исследовании таких задач трудно реализовать идею подвижных сеток, линии которых можно удобным способом отобра-

зить на прямоугольную сетку в квадрате: это, например, задачи со сложными типами маxовских отражений ударных волн [13] и сверхзвуковые течения в воздухозаборниках [130]. В связи с изложенным разумно учитывать свойства различных типов сеток на начальном этапе подбора расчетной методики для численного исследования конкретного класса задач. Ряд полезных рекомендаций по выбору сеток можно найти в книге [120].

§ 12. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

При реализации дифференциальных анализаторов ударных волн, основанных на формулах (10.21) и (10.23), нужно сначала пытаться вид П-формы первого дифференциального приближения используемой разностной схемы. В [171] выписаны П-формы п. д. п. для 23 разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений Эйлера (9.1). В работе [19] рассматривались П-формы п. д. п. следующих разностных схем: а) инвариантной схемы [170]; б) метода частиц в ячейках с явной схемой эйлерова этапа расчета из [150]; в) метода частиц в ячейках с пеявией схемой типа «предиктор — корректор» для эйлерова этапа расчета, построенной на основе общей методологии схем «предиктор — корректор», изложенной в [159]:

этап «предиктор»

$$\begin{aligned}
 & (u_{j+1/2,k}^{n+\beta/2} - u_{j+1/2,k}^n)/(\beta\tau) = -(p_{j+1,k}^{n+\beta/2} - p_{jk}^{n+\beta/2})/(\rho_{j+1/2,k}^n h_x); \\
 & v_{jk}^{n+\beta/2} = v_{jk}^n, \quad \rho_{jk}^{n+\beta/2} = \rho_{jk}^n; \\
 & \frac{\partial f(p_{jk}^n, \rho_{jk}^n)}{\partial p} \frac{p_{jk}^{n+\beta/2} - p_{jk}^n}{\beta\tau} = - \frac{p_{jk}^n}{\rho_{jk}^n} \frac{u_{j+1/2,k}^{n+\beta/2} - u_{j-1/2,k}^{n+\beta/2}}{h_x}, \\
 & (v_{j,k+1/2}^{n+\beta} - v_{j,k+1/2}^{n+\beta/2})/(\beta\tau) = -(p_{j,k+1}^{n+\beta} - p_{jk}^{n+\beta})/h_y; \quad (12.1) \\
 & u_{jk}^{n+\beta} = u_{jk}^{n+\beta/2}, \quad \rho_{jk}^{n+\beta} = \rho_{jk}^{n+\beta/2}; \\
 & \frac{\partial f(p_{jk}^{n+\beta/2}, \rho_{jk}^{n+\beta/2})}{\partial p} \frac{p_{jk}^{n+\beta} - p_{jk}^{n+\beta/2}}{\beta\tau} = \\
 & = -(p_{jk}^{n+\beta/2}/\rho_{jk}^{n+\beta/2})(v_{j,k+1/2}^{n+\beta} - v_{j,k-1/2}^{n+\beta})/h_y;
 \end{aligned}$$

этап «корректор»

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\rho}_{jk} = \rho_{jk}^n; \\
 & (\tilde{u}_{jk} - u_{jk}^n)/\tau = -(p_{j+1/2,k}^{n+\beta} - p_{j-1/2,k}^{n+\beta})/h_x; \\
 & (\tilde{v}_{jk} - v_{jk}^n)/\tau = -(p_{j,k+1/2}^{n+\beta} - p_{j,k-1/2}^{n+\beta})/h_y; \\
 & (\tilde{E}_{jk} - E_{jk}^n)/\tau = -\left\{[(pu)_{j+1/2,k}^{n+\beta} - (pu)_{j-1/2,k}^{n+\beta}]/h_x + \right. \quad (12.2) \\
 & \left. + [(pv)_{jk+1/2}^{n+\beta} - (pv)_{jk-1/2}^{n+\beta}]/h_y\right\}/\rho_{jk}^n.
 \end{aligned}$$

Смысл обозначений в (12.1), (12.2) аналогичен применявшимся

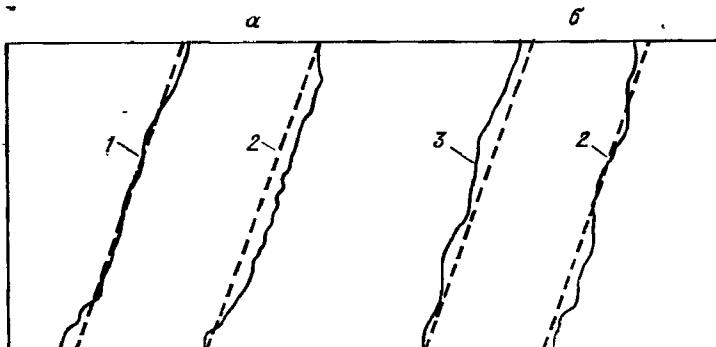


Рис. 16. Результаты расчетов движения ударной волны:
а — по схеме Яненко — Шокина [170]; б — по методу частиц
в ячейках с явной схемой Эйлерова этапа из [150].
1 — $t=0,016$; 2 — $0,036$; 3 — $0,018$.

в § 9. Кроме того, $f(p, \rho)$ — это функция в уравнении состояния (1.6), в (12.1) $u_{j+1/2k}^n = 0,5(u_{jk}^n + u_{j+1k}^n)$; $\rho_{j+1/2k}^n = 0,5(\rho_{jk}^n + \rho_{j+1k}^n)$; $v_{jk+1/2}^{n+\beta/2} = 0,5(v_{jk}^{n+\beta/2} + v_{j,k+1}^{n+\beta/2})$; в уравнениях (12.2) $p_{j+1/2k}^{n+\beta} = 0,5(p_{jk}^{n+\beta} + p_{j+1k}^{n+\beta})$; $p_{jk+1/2}^{n+\beta} = 0,5(p_{jk}^{n+\beta} + p_{j,k+1}^{n+\beta})$. Множитель $\beta \in [0,5; 1]$ введен в формулы (12.1) с целью дополнительного повышения устойчивости схемы эйлерова этапа (12.1), (12.2).

Выполненные в [19] по указанным трем схемам расчеты модельной задачи о движении одномерной ударной волны под углом к линиям прямоугольной расчетной сетки в плоскости (x, y) показали, что абсолютная погрешность локализации ударного фронта на основе дифференциальных анализаторов (10.21), (10.23) и (10.27) не превышает величины $\max(h_x, h_y)$. Для иллюстрации на рис. 16 приведены результаты расчетов движения ударной волны, фронт которой наклонен под углом 70° к оси x . В случае, представленном на рис. 16, а, применялся дифференциальный анализатор (10.27), а на рис. 16, б — анализатор (10.23) для локализации ударного фронта.

Метод частиц в ячейках [150] является одним из наиболее эффективных методов численного моделирования задач высокоскоростного взаимодействия тел [30, 52, 292, 177, 203]. Опишем алгоритм дифференциального анализатора ударных волн для одной из задач указанного класса, реализованный в [167] в рамках метода Харлоу. Рассмотрим задачу о высокоскоростном соударении цилиндра с пластиной конечных размеров (рис. 17). Предположим, что ударник вступает в контакт с мишенью при $t=0$. От контактной границы раздела двух тел при $t>0$ в противоположные стороны распространяются ударные волны. Свободные поверхности при взаимодействии

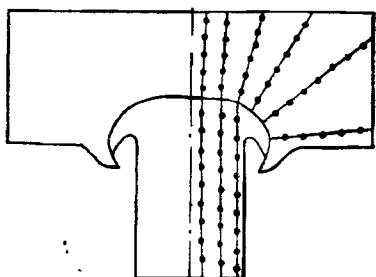


Рис. 17.

с ударными волнами инициируют волны разрежения. По мере развития процесса волны разрежения, идущие от боковых свободных поверхностей, вызывают выброс вещества ударника и мишени в направлении, противоположном направлению удара. С приходом продольной ударной волны в мишени к тыльной свободной поверхности она отражается в противоположном направлении волной разрежения, увеличивает выпучивание массы вещества ударника и мишени. Такая волновая картина взаимодействия, особенно при малых скоростях соударения, приводит к образованию трещин в среде и ее дроблению. Движение в области, не охваченной волнами разрежения, остается одномерным, и это обстоятельство можно использовать для проверки точности расчета.

При построении дифференциального анализатора учтен тот факт, что условия Гюгонио на ударной волне, записанные в координатах по нормали и касательной к ней, совпадают с одномерными. Поэтому точность локализации ударного фронта будет выше, если определить положение центра конечно-разностной ударной волны па каждом из лучей в плоскости (x, y) , проведенных в направлении к фронту ударной волны, как можно меньше отличающихся от нормального. Из этих соображений создана программа дифференциального анализатора со следующей последовательностью вычислений:

для определения фронта ударной волны в мишени проводятся лучи перпендикулярно контактной границе через каждую частицу «маркер» контактной границы (см. рис. 17);

находится точка пересечения луча с верхней (либо с правой) границей расчетной области; отрезок луча между маркером контактной границы и найденным концом делится на N частей;

в каждую точку на этом отрезке интерполируется значение $\vec{\text{div}} \vec{u}$ и среди точек, в которых $\vec{\text{div}} \vec{u} < 0$, находится та, где значение $|\vec{\text{div}} \vec{u}|$ достигает максимума. Координаты этой точки и выдаются на печатающее устройство.

Выбор лучей для локализации ударного фронта в ударнике аналогичен предыдущему и изображен на рис. 17. На рис. 18 представлены картины внедрения ударника в преграду, полученные при расчете плоского двумерного течения модифицированным методом Харлоу. Модификация метода частиц заключалась во введении параметров формы частиц в двумерном случае. При этом частицы имели форму круга в случае плоского течения и форму тороида вращения с круглым поперечным сечением в случае осесимметричного течения. Эта идея впервые предложена в [160] и для одномерного случая «частиц-слоев» реализована в [107].

В [275] описан алгоритм расчета перемещения частиц-кругов в модифицированном методе Харлоу и изложены результаты исследования влияния параметров формы частиц на свойства аппроксимационной вязкости метода. Скорость удара в расчете на рис. 18 составляла 10 км/с при $t = 0$. Снизу на рис. 18 даны графики давления p на оси симметрии. В расчете использовалось уравнение

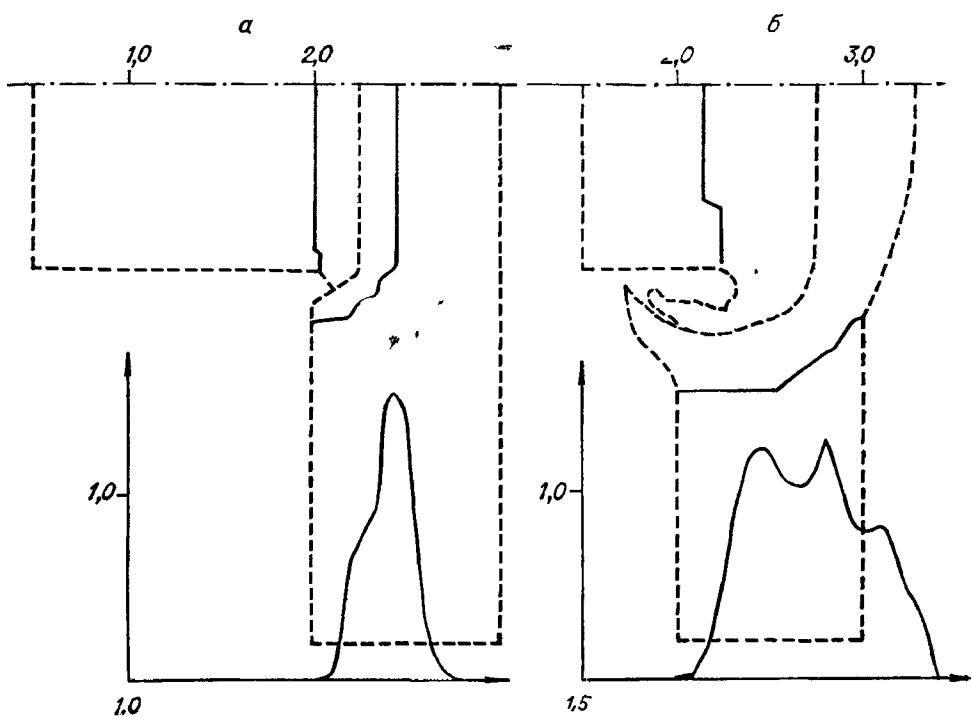


Рис. 18. Расчет по методу Харлоу:
а — $t = 20\tau$; б — $t = 60\tau$.

сстояния идеального газа (преграда и ударник из алюминия). Ударные фронты изображены на рис. 18 сплошными линиями, а контактные поверхности и свободные границы — штриховыми. На зоне давления (см. график для p , соответствующий времени $t = 60\tau$, на рис. 18) формируются два пика, характеризующие две ударные волны, движущиеся в противоположные стороны. Фронт ударной волны в мишени искажается с правой стороны вследствие взаимодействия волн разрежения, идущих от свободной поверхности.

На рис. 19 изображен результат расчета высокоскоростного соударения двух тел с преградой методом частиц-кругов [149]. Ударные волны, идущие от поверхностей контакта ударников с преградой, при некотором $t > 0$ начинают взаимодействовать. Буквами S и R на рис. 19 обозначены соответственно падающая и отраженная ударные волны; M — ударная волна Маха; a , b — положение ударников на 50-м шаге по t ; числами 40, 50, 60 помечены ударные фронты в моменты времени соответственно 40τ , 50τ , 60τ ; $\alpha = -\beta = 45^\circ$, $|u(x, y, 0)| = \sqrt{2} \cdot 9,659$ км/с для ударников. В зависимости от величин начальной скорости соударения тел с преградой и углов α , β направления векторов скорости ударников может возникнуть в преграде тройная (маховская) конфигурация ударных волн. Схема расположения лучей в преграде для локализации ударных фронтов в алгоритме дифференциального анализатора, построенном

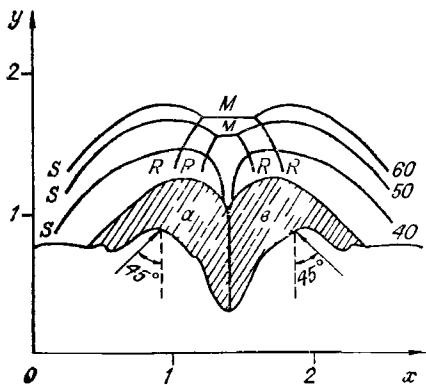


Рис. 19 Расчет соударения двух тел с препятствием (пояснения в тексте).

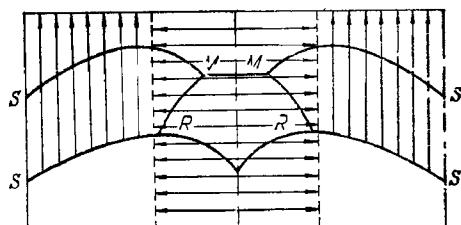


Рис. 20 К построению алгоритма дифференциального анализатора (обозначения те же, что и на рис. 19).

для этой задачи, показана на рис. 20. Точки ударных фронтов на лучах определялись, как и на рис. 18, по $\max |\vec{u}|$ при $\vec{u} \rightarrow 0$.

На рис. 21 приведены примеры расчета [291, 67] обтекания выпуклого (а) и невыпуклого тела составной формы (б) сверхзвуковым потоком вязкого сжимаемого теплопроводного газа с использованием подвижной сетки, управляемой уравнением (11.4). В процессе счета на установление уравнение для сетки (11.5) решали численно на каждом временном слое n по неявной разностной схеме [67]

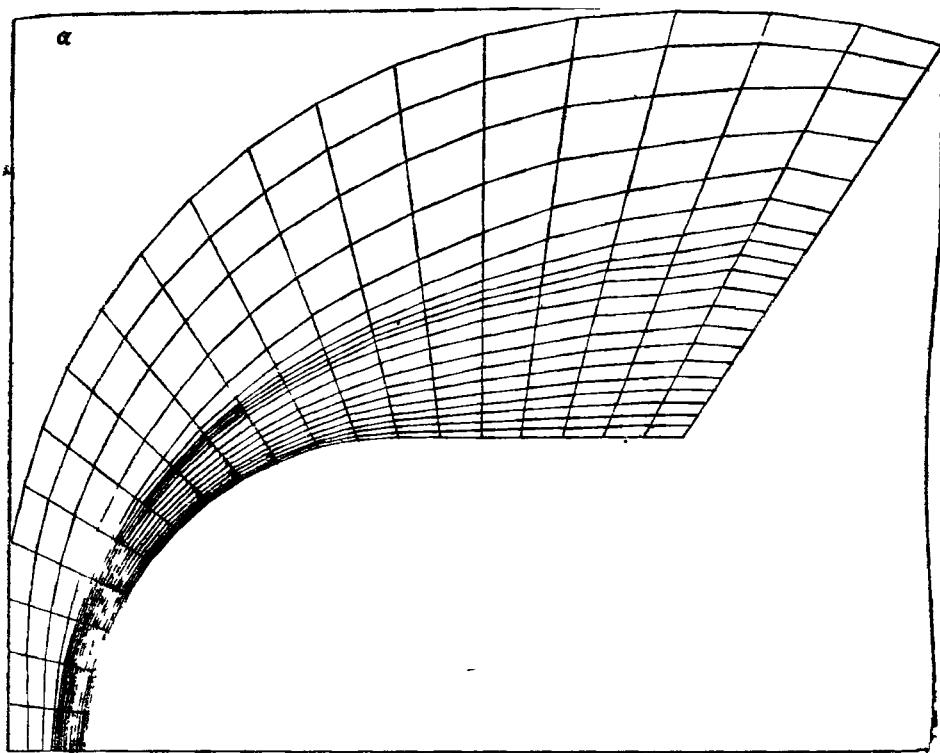
$$((x^2)^{n+1} - (x^2)^n)/\tau = \bar{\Lambda}_2 b^n \Lambda_2 (x^2)^{n+1}, \quad (12.3)$$

где $b = |\partial f / \partial x^2|^\alpha + \delta = |z_1 \Lambda_2|^\alpha + \delta$, затем со вторым порядком вычисляли значения коэффициентов z и z_1 по формулам

$$z_1 = \frac{\partial q^2}{\partial x^2} = \frac{1}{(\partial x^2 / \partial q^2)}; \quad z = \frac{\partial q^2}{\partial x^1} = - \left[\left(\frac{\partial r^1}{\partial q^1} \right) \left(\frac{\partial x^2}{\partial q^2} \right) \right]^{-1} \frac{\partial x^2}{\partial q^1}. \quad (12.4)$$

Систему Навье — Стокса и уравнение для сетки (11.5) решали в следующей последовательности. Перед началом счета в узлах сетки вычисляли значения координаты x^1 и коэффициента $z_0 = \partial q^1 / \partial x^1 = 1 / (\partial x^1 / \partial q^1)$. На каждом итерационном слое n по известным значениям компонент вектора решения w^n с помощью решения уравнения для сетки (12.3) вычисляли значения координаты x^2 в узлах сетки и по формулам (12.4) — коэффициентов z_1 , z . По найденным на n -м слое значениям коэффициентов z_1 , z определяли по неявной схеме расщепления новые значения функций w^{n+1} на слое $n+1$. Затем весь процесс вычислений повторяли до установления. Из рис. 21 видно, что сетка стущается в областях пограничного слоя и ударной волны. В невыпуклой области (рис. 21, б) образуется зона возвратного течения — компонента скорости u меняет знак. Для сравнения проведены расчеты обтекания данного тела на фиксированной равномерной сетке, показавшие сильное «размывание» областей с большими градиентами. Например, вихрь при расчете обтекания невыпуклого тела на равномерной сетке не возникал [67].

α



β

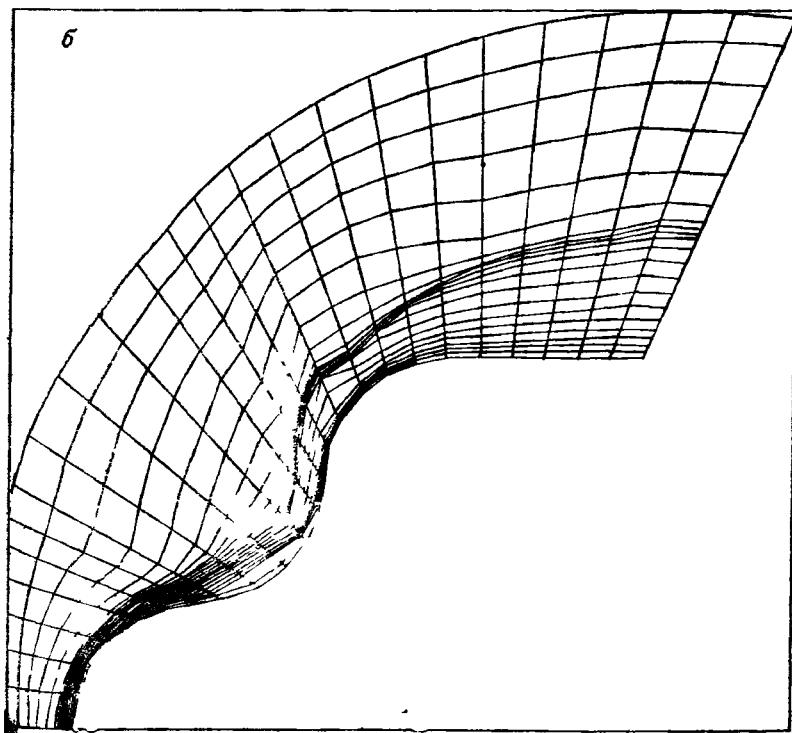


Рис. 21. Примеры расчета обтекания тел.

С. В. Ворожцов, Н. Н. Яценко

Глава 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ АНАЛИЗАТОРЫ КОНТАКТНЫХ РАЗРЫВОВ В ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА

По определению, контактный разрыв в идеальной жидкости — это поверхность разрыва, через которую жидкость не течет (см. § 1). Контактный разрыв имеет место, например, на границе раздела двух различных идеальных жидкостей либо между слоями одной и той же жидкости, движущимися с различными скоростями (тангенциальный разрыв). В ряде случаев могут появляться новые контактные границы в процессе эволюции газодинамического течения, например при столкновении двух ударных волн различной интенсивности, соединении ударных волн, идущих в одном направлении [118], переходе регулярного отражения ударной волны в нерегулярное (маховское) [82], взаимодействии ударной волны с волной разрежения [212, 118].

При расчете по однородным разностным схемам особенности типа ударных волн и контактных границ аппроксимируются непрерывными переходными зонами, занимающими несколько интервалов расчетной сетки. В случае ударной волны толщина такой переходной зоны остается примерно постоянной, а для контактной границы она увеличивается с ростом времени t при расчете в эйлеровых переменных. Например, при вычислении по схеме Лакса ширина X контактной полосы, как указано в [234, 206], возрастает пропорционально $n^{1/2}$, где n — число временных шагов. В работах [122, 147] также сообщалось о том, что ширина X растет пропорционально $n^{1/2}$ при использовании ряда других разностных схем первого порядка точности. В [123, 259, 80, 262, 218, 219] дана более общая асимптотическая оценка величины X , имеющая вид $X = \text{const } n^{1/(r+1)}$, где r — порядок точности конечно-разностной схемы.

Указанное обстоятельство затрудняет интерпретацию результатов газодинамических численных расчетов и ставит две проблемы: повышения точности расчета задач с контактными разрывами; разработки и обоснования алгоритмов локализации контактных разрывов в расчетной области по результатам сквозного счета.

Перечислим предложенные ранее способы локализации контактных разрывов в расчетной области при использовании конечно-разностных схем в эйлеровых переменных. Один из известных способов локализации контактных границ по результатам сквозного счета состоит в визуальном определении положения таких разрывов по сближению различных изолиний. Как отмечено в [230], в силу того что давление непрерывно при переходе через контактную поверхность, линии постоянного давления не сближаются в окрестности такой поверхности разрыва. Поэтому в качестве изолиний необходимо брать только линии постоянных значений тех функций,

которые терпят разрыв на контактной границе (например, плотность, температуру). В тех случаях, когда начальное положение контактной границы при $t = 0$ известно, за ее движением при $t > 0$ можно следить с помощью частиц-«маркеров». При $t = 0$ эти частицы помещаются на контактную границу, а затем сдвигаются на каждом последующем временном шаге с привлечением значений скорости, полученных при решении конечно-разностных уравнений (см., например, работы [38, 105, 176]).

Аналогичный прием применен в [283, 78] с тем отличием, что фронт разрыва аппроксимируется прямолинейными отрезками, совокупность которых образует некоторую ломаную. Ясно, что погрешность в определении положения контактной границы с помощью частиц-«маркеров» увеличивается с ростом t , что связано с накоплением ошибок при аппроксимации интеграла от скорости частицы по той или иной квадратурной формуле. В работе [45] применялся способ локализации контактной границы в стационарном течении, основанный на изменении коэффициента интеграла Бернулли, различной для потоков по обе стороны контактной границы. В [8] предложен метод расчета газодинамических течений с использованием попытания массовой концентрации вещества, примыкающий к методам типа «частиц в ячейках» [150]. Локализация контактных разрывов осуществляется в [8] на основе анализа поля концентраций. При этом достигается локализация положения контактных границ с точностью до одной счетной ячейки. В [11] для локализации контактных разрывов в двумерных нестационарных задачах о взаимодействии струй с преградами применялся дифференциальный анализатор, основанный на определении точек максимума величины $|\nabla \rho|$, где ρ — плотность, ∇ — вектор скорости. При расчетах методом крупных частиц задачи о разлете-тейлоровской неустойчивости контактная поверхность раздела локализована в [39] как совокупность точек, в которых плотность $\rho = 0,5(\rho_1 + \rho_2)$, ρ_2 — плотность тяжелой жидкости, ρ_1 — легкой. Такой же способ применен ранее в [206].

Идея метода дифференциального анализатора реализована также при численном моделировании плоских и осесимметричных течений неоднородных несжимаемых жидкостей в поле силы тяжести. В [101] рассмотрена задача об эволюции « пятна » однородной жидкости в стратифицированной среде. При ее решении представляют интерес построение алгоритма определения границы « пятна ». В [101] такой алгоритм строился следующим образом. Для описания течения дополнительно к уравнениям Навье — Стокса привлекалось уравнение сохранения недифундирующей пассивной примеси, концентрация которой в начальный момент времени полагалась постоянной, пензлевой в « пятне » и пулевой вне его. Численное моделирование задачи проводилось на последовательности « пар » сеток. В качестве границы « пятна » бралась линия, вдоль которой для заданной « пары » сеток с шагами $(\Delta t, h_1, h_2)$ и $(\Delta t, h_1/2, h_2/2)$ разность концентраций $c_1^n - c_2^n$ (индексы « 1 », « 2 » относятся к двум указанным сеткам) обращалась в нуль. При этом измене-

ние во времени горизонтального размера « пятна » в плоской задаче, в частности, оказалось в достаточно хорошем соответствии с известными экспериментальными данными.

Далее излагается предложенная ранее авторами в работах [161, 281, 26, 290] методика исследования дифференциальных анализаторов контактных разрывов применительно к одномерным задачам газовой динамики, рассчитываемым в переменных Эйлера. Показано, что в рамках этой методики можно ввести понятие центра контактной полосы, по геометрическому смыслу аналогичное понятию центра размазанной ударной волны, введенному в главе 2. Излагаются также предложенные в [28, 27, 290, 282, 278–280] методы повышения точности численных решений в окрестности контактного разрыва для тех случаев, когда используемое уравнение состояния отличается от уравнения состояния идеального газа.

§ 13. МЕТОДЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ КОНТАКТНЫХ РАЗРЫВОВ ПРИ НАЛИЧИИ К-СОГЛАСОВАННОСТИ

13.1. Метод исследования. Основные определения

При построении дифференциальных анализаторов ударных волн в главе 2 в качестве одномерного течения с ударной волной взята задача о движении стационарной ударной волны. Ее сравнительная простота позволила применить аппарат решений типа бегущей волны для анализа свойств аппроксимационной вязкости довольно широкого класса разностных схем с точки зрения построенной теории дифференциальных анализаторов. С целью изучения свойств численного «размазывания» контактного разрыва естественно было обратиться к распаду разрыва с контактной границей в течении. Наряду с контактной границей в возникающем при $t > 0$ течении могут присутствовать ударные волны и волны разрежения (см. § 1 и рис. 22). Штриховыми линиями на рисунке нанесено точное решение, которое в данном примере содержит волну разрежения, контактный разрыв и ударную волну. В общем случае при численном решении рассматриваемой задачи о распаде по схеме сквозного счета возможно пересечение зон «размазывания» контактного разрыва и ударной волны (как на рис. 22, а), что создает дополнительные трудности при математическом исследовании «размазанного» решения. Представленная на рисунке картина свидетельствует о существовании в численном решении такой окрестности контактного разрыва, в которой функции давления $p(x, t)$ и скорости $u(x, t)$ постоянны.

Рассмотрим для системы уравнений Эйлера (1.11), (1.9), дополненной уравнением состояния (1.6), задачу о распаде разрыва при следующих начальных условиях:

$$t = 0, \quad u(x, t) = u_0, \quad p(x, t) = p_0, \quad \rho(x, t) = \begin{cases} \rho_1, & x < x_0; \\ \rho_2, & x > x_0, \end{cases} \quad (13.1)$$

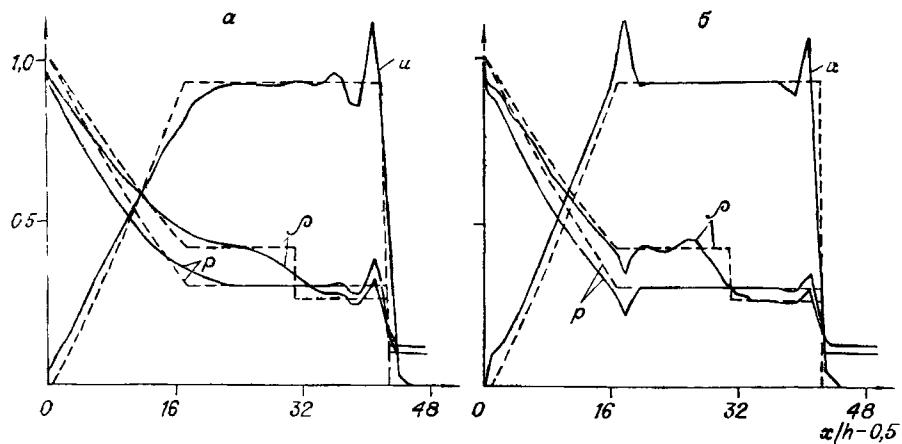


Рис. 22. Численные решения задачи о распаде разрыва:
а — по методу FLIC [210]; б — по схеме Лакса — Вендрофа [116].

где u_0 , p_0 , ρ_1 , ρ_2 , x_0 — постоянные, причем $\rho_1 \neq \rho_2$. Точное решение этой задачи имеет вид

$$t \geq 0, \quad u(x, t) = u_0, \quad p(x, t) = p_0, \quad \rho(x, t) = \begin{cases} \rho_1, & x < x_0 + u_0 t; \\ \rho_2, & x > x_0 + u_0 t. \end{cases} \quad (13.2)$$

и, таким образом, содержит только контактный разрыв. Для определенности далее полагаем $u_0 > 0$, т. е. контактный разрыв движется слева направо. В дальнейшем функция $f(p, \rho)$ в уравнении состояния (1.6) предполагается трижды непрерывно дифференцируемой по обоим аргументам в области ее определения. Возьмем класс разностных схем, аппроксимирующих систему (1.11) с порядком точности $O(h^r) + O(\tau^r)$, $1 \leq r \leq 2$, и таких, что Г-форму их п. д. п. можно записать как

$$\vec{\Gamma}w \equiv \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\Phi}(\vec{w})}{\partial x} - \sum_{i+j=r} h^i \tau^j \vec{F}_{ij} \left(\vec{w}, \frac{\partial \vec{w}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{r+1} \vec{w}}{\partial x^k \partial t^{r+1-k}} \right) = 0, \quad (13.3)$$

где $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}^T$, $r \geq 1$; $\vec{F}_v = \{F_{v1}, F_{v2}, F_{v3}\}^T$, $k = 0, 1, \dots, r+1$; h — шаг равномерной расчетной сетки на оси x ; τ — временной шаг. Выразим производные $\partial^m \vec{w} / \partial x^k \partial t^{m-k}$, $m - k > 0$, входящие в \vec{F}_v , через производные по x , пользуясь формулами (6.2). В результате получим из (13.3) П-форму п. д. п.

$$\vec{\Pi}w \equiv \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\Phi}(\vec{w})}{\partial x} - \sum_{i+j=r} h^i \tau^j \vec{\mathcal{F}}_{ij} \left(\vec{w}, \frac{\partial \vec{w}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{r+1} \vec{w}}{\partial x^{r+1}} \right) = 0, \quad (13.4)$$

где

$$\vec{\mathcal{F}}_v(\vec{w}, \partial \vec{w} / \partial x, \dots, \partial^{r+1} \vec{w} / \partial x^{r+1}) = \vec{F}_v(\vec{w}, \partial \vec{w} / \partial x, f_{1,0}(\vec{w}, \partial \vec{w} / \partial x), \dots, f_{r+1,k}(\vec{w}, \partial^{r+1} \vec{w} / \partial x^{r+1})). \quad (13.5)$$

В соответствии с (1.9) положим в (13.3), (13.4) $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}^T$, $w_1 = \rho$, $w_j = f_j(\rho, u, p, \varepsilon(p, \rho))$, $j = 2, 3$.

Определение 1. Операцией квазилинеаризации L первого дифференциального приближения (13.3) или (13.4) назовем операцию $\Gamma L\vec{w} = 0$, $\Pi L\vec{w} = 0$, где $L\vec{w} = \{w_1, Lw_2, Lw_3\}^T$; $Lw_j = f_j(\rho, u_0, p_0, \varepsilon(p_0, \rho))$, $j = 2, 3$, а u_0, p_0 — постоянные значения скорости и давления, входящие в (13.1).

Введем в рассмотрение вектор-столбец

$$U = \left(1, u_0, 0.5u_0^2 + f(p_0, \rho) + \rho \frac{\partial f}{\partial \rho}(p_0, \rho) \right)^T. \quad (13.6)$$

Определение 2. Первое дифференциальное приближение (13.3) будем называть К-согласованным, если

$$\begin{aligned} \Gamma L\vec{w} = U \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} h^i \tau^j F_{ij1} \left(L\vec{w}, \frac{\partial L\vec{w}}{\partial x}, \frac{\partial L\vec{w}}{\partial t}, \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots, \frac{\partial^{r+1} L\vec{w}}{\partial x^r \partial t^{r+1-h}} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

т. е. левые части уравнений системы $\Gamma L\vec{w} = 0$ отличаются друг от друга лишь па скалярный множитель. Аналогично определяется К-согласованность П-формы п. д. п. (13.4). Заметим, что исходная система уравнений (1.1) — (1.3) обладает свойством К-согласованности. Действительно, применяя операцию квазилинеаризации L к (1.11), (1.9), получим

$$L \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(\vec{u})}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) U = 0. \quad (13.7)$$

Из (13.7) следует, что при начальных данных (13.1) решение задачи Коши (1.11), (1.9), (1.6), (13.1) сводится к решению линейного уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (13.8)$$

Разрывы в решениях (13.8) распространяются вдоль характеристик $dx/dt = u_0$. В соответствии с общими определениями, данными в [233] (см. также [42]), эти разрывы контактные, и характеристику $dx/dt = u_0$ называют контактной [233, 118]. Этот вывод согласуется с известным фактом для системы (1.11), (1.9), состоящим в том, что она не является «истинно пелинейной» в смысле определения, данного в [233] (см. также [118, 42]).

Лемма 1. Из К-согласованности Г-формы первого дифференциального приближения (13.3) следует К-согласованность П-формы п. д. п. (13.4).

Доказательство леммы использует определение 2, формулы (13.5) и ввиду тривиальности опускается.

В дальнейшем будем рассматривать П-форму п. д. п. Из определения 2 вытекает, что исследование К-согласованного первого

дифференциального приближения (13.4) при начальных условиях (13.1) сводится к анализу одного уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} h^i \tau^j \mathcal{F}_{ij1} \left(\vec{Lw}, \frac{\delta \vec{Lw}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{r+1} \vec{Lw}}{\partial x^{r+1}} \right). \quad (13.9)$$

Для (13.9) в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t \leq T$, где $0 < T < \infty$, задаются начальное условие

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_1, & x < x_0; \\ \rho_2, & x > x_0 \end{cases} \quad (13.10)$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \rho(x, t) &= \rho_1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x, t) = \rho_2, \quad 0 < t \leq T; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \quad r = 2; \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad r = 3; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad r = 4; \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (13.11)$$

В случае, когда решение $\rho(x, t)$ задачи (13.9)–(13.11) монотонно, контактную полосу G_{KD} можно определить как открытую односвязную область в плоскости (x, t) такую, что при $t > 0$ в любой точке $(x, t) \in G_{KD}$ выполняются условия

- 1) $\operatorname{sign} \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) / \partial x = \operatorname{sign} (\rho_2 - \rho_1);$
- 2) $\rho_1(1 - \delta) > \rho > \rho_2(1 + \delta)$, $\rho_1 > \rho_2$; $\rho_1(1 + \delta) < \rho < \rho_2(1 - \delta)$, $\rho_1 < \rho_2$, где δ — малое положительное число;
- 3) если $(x, t) \notin G_{KD}$, то не выполняется хотя бы одно из соотношений 1, 2.

Заметим, что это определение по геометрическому смыслу близко к данному Тейлором и Макколлом в [250] для зоны ударной волны в вязком теплопроводном газе.

Определение 3. Центральной линией контактной полосы G_{KD} назовем линию $L_{KD} \subset G_{KD}$, на которой значение функции $\rho(x, t)$, где ρ — решение задачи (13.9)–(13.11), не зависит от величин сеточных параметров h, τ .

Обозначим через $w_h(x, t, h, \tau)$ вектор-функцию, которая в узлах сетки в плоскости (x, t) совпадает с решением конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих систему (1.11), (1.9) при начальных условиях (13.1), а в остальных точках (x, t) доопределена с помощью интерполяции. При этом в профиле $\rho_h(x, t, h, \tau)$, получаемом для фиксированного $t > 0$, контактный разрыв «размазывается» на интервале, ширина которого зависит от t . Найдем при $t = t^n = n\tau$ границы $(x_l^n, t^n), (x_r^n, t^n)$ на оси x зоны «размазывания» контактного разрыва в разностном решении ρ_h . Проделывая эту операцию для возрастающих $n = 1, \dots, N$, получим N точек (x_l^n, t^n) и N точек (x_r^n, t^n) . Соединяя соседние точки $(x_l^n, t^n), (x_l^{n+1}, t^{n+1}), \dots, (x_r^n, t^n), (x_r^{n+1}, t^{n+1})$, а затем $(x_r^n, t^n), (x_r^{n+1}, t^{n+1})$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, отрезками прямой, получим в плоскости (x, t) две линии. Вместе

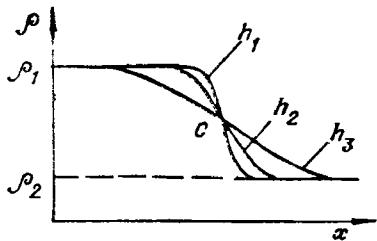


Рис. 23.

Найдем теперь при фиксированном $t = t^n = n\tau$ точку (x_k^n, t^n) пересечения профилей $\rho_h(x, t, h_1, \tau_1)$, $\rho_h(x, t, h_2, \tau_2)$, где $|h_1 - h_2| + |\tau_1 - \tau_2| \neq 0$, в контактной полосе G_K . Проделывая эту операцию для возрастающих $n = 1, 2, \dots, N$, получим N точек (x_k^n, t^n) . Соединение соседних точек (x_k^n, t^n) , (x_k^{n+1}, t^{n+1}) , $n = 0, \dots, N-1$, отрезками прямой дает линию L_K , которую будем называть центральной линией контактной полосы G_K .

Замечание. Введенное попытание центральной линии L_{KD} контактной полосы G_{KD} имеет простой геометрический смысл. Действительно, если существует единственная линия L_{KD} , то графики плотности ρ , полученные, например, при $0 < h_1 < h_2 < h_3$, при каждом фиксированном $t > 0$ пересекутся в точке C (рис. 23).

Лемма 2. Если на линии L_{KD} имеет место равенство

$$\sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} h^i \tau^j \mathcal{F}_{ij1}(\vec{Lw}, \partial \vec{Lw} / \partial x, \dots, \partial^{r+1} \vec{Lw} / \partial x^{r+1}) = 0$$

и линия L_{KD} единственна, то она совпадает с траекторией контактного разрыва.

Действительно, с учетом (13.9) равенство $\partial \rho / \partial t + u_0 \partial \rho / \partial x = 0$ означает, что вдоль линии $dx/dt = u_0$ функция $\rho(x, t)$ постоянна. Отсюда следует с учетом единственности линии L_{KD} утверждение леммы.

Определение 4. Величину

$$X(t, h, \tau, u_0, p_0) = |\rho_1 - \rho_2| / \max_{x, x \in G_{KD}} |\partial \rho / \partial x| \quad (13.12)$$

назовем толщиной по Прандтлю контактной полосы, где $\rho(x, t)$ — решение задачи (13.9) — (13.11).

13.2. Анализ схем, обладающих свойством К-согласованности

Теорема 1. Если

- 1) первое дифференциальное приближение разностной схемы r -го порядка точности К-согласовано ($1 \leq r \leq 2$);
- 2) уравнение (13.9) имеет вид

$$\partial \rho / \partial t + u_0 \partial \rho / \partial x = (-1)^{r+1} \mu(h, \tau, u_0, p_0) \partial^{r+1} \rho / \partial x^{r+1}; \quad (13.13)$$

с линией $t = N\tau$ они выделяют область, которую будем называть контактной полосой G_K . Если в решаемой задаче известны значения ρ_1 и ρ_2 плотности по обе стороны контактного разрыва, то для определения границ (x_l^n, t^n) , (x_r^n, t^n) можно проверить выполнение неравенства

$$\operatorname{sign} [\rho_h(x+h, t, h, \tau) - \rho_h(x-h, t, h, \tau)] = \operatorname{sign} (\rho_2 - \rho_1).$$

3) $\mu(h, \tau, u_0, p_0) > 0$;

4) $\mu = O(h)$,

то существует единственная центральная линия L_{KD} контактной полосы, совпадающая с траекторией контактного разрыва.

Доказательство теоремы сводится к получению точного решения задачи (13.13), (13.10), (13.11) и последующему изучению его свойств. Докажем сначала теорему для случая $r = 1$. Точное решение уравнения (13.13) при начальном условии (13.10) имеет вид [139]

$$\rho(x, t) = 0.5(\rho_1 + \rho_2) + 0.5(\rho_2 - \rho_1)\Phi(\xi(x, t)), \quad (13.14)$$

где

$$\xi(x, t) = (x - x_0 - u_0 t) / (2(\mu t)^{1/2}); \quad \Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\lambda^2} d\lambda; \quad (13.15)$$

таким образом, $\Phi(\xi)$ есть интеграл вероятности. Из формул (13.14), (13.15) следует, что только при $\xi = 0$ значение плотности ρ не зависит от h, τ ; при $t > 0$ оно равно $0.5(\rho_1 + \rho_2)$. Согласно (13.15), $\xi = 0$ совпадает с уравнением траектории контактного разрыва в плоскости (x, t) , что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай $r = 2$. Ищем решение (13.13) в виде $\rho(x, t) = \tilde{\rho}(\xi)$, где $\xi = (x - x_0 - u_0 t) / (\beta(\mu t)^{1/3})$, $\beta = \text{const}$. Относительно $\tilde{\rho}(\xi)$ получаем из (13.13) обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(3/(\beta^3)) d^3 \tilde{\rho} / d\xi^3 - \xi d^2 \tilde{\rho} / d\xi^2 = 0. \quad (13.16)$$

Сделаем в (13.16) замену

$$d\tilde{\rho} / d\xi = v(\xi), \quad \xi = \alpha \xi, \quad \alpha = \text{const}. \quad (13.17)$$

В результате получим

$$d^2 v / d\xi^2 - (\alpha^3 \beta^3 / 3) \xi v = 0; \quad (13.18)$$

если положить $\alpha^3 = 3/\beta^3$, то (13.18) совпадает с уравнением Эйри [131] $d^2 v / d\xi^2 = \xi v$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v(\xi) = a \text{Ai}(\xi) + b \text{Bi}(\xi),$$

где $\text{Ai}(\xi)$, $\text{Bi}(\xi)$ — функции Эйри; a, b — произвольные постоянные. Переменная $\xi = \hat{\xi}/\alpha$ уже не содержит произвольную постоянную β . С учетом соотношений (13.17) получаем общее решение уравнения (13.16) в виде

$$\tilde{\rho}(\xi) = \int_0^{\xi} (a \text{Ai}(\lambda) + b \text{Bi}(\lambda)) d\lambda + c, \quad (13.19)$$

где c — постоянная интегрирования. Найдем постоянные a, b, c , используя начальные условия (13.10), краевые условия (13.11) и свойства функций Эйри. Согласно [131, 133],

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \text{Ai}(\xi) = 0; \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \text{Bi}(\xi) = \infty,$$

поэтому для удовлетворения краевых условий (13.11) следует положить в формуле (13.19) $b = 0$. Согласно [133],

$$\int_0^\infty \text{Ai}(\lambda) d\lambda = 1/3, \quad \int_0^{-\infty} \text{Ai}(\lambda) d\lambda = -2/3. \quad (13.20)$$

С учетом формул (13.20), (13.19) и (13.10) получаем решение $\rho(x, t)$ в виде

$$\rho(x, t) = \tilde{\rho}(\xi) = (2\rho_2 + \rho_1)/3 + (\rho_2 - \rho_1) \int_0^\xi \text{Ai}(\lambda) d\lambda, \quad (13.21)$$

где

$$\xi = (x - x_0 - u_0 t) / [(3\mu t)^{1/3}]. \quad (13.22)$$

Из формул (13.21), (13.22) следует, что на линии $x = x_0 + u_0 t$, являющейся траекторией контактного разрыва, значение плотности не зависит от h, τ и равно $(2\rho_2 + \rho_1)/3$. Покажем, что значение плотности ρ не зависит от h, τ только на линии $x = x_0 + u_0 t$. Предположим, что существует еще одна линия $x = X(t)$, принадлежащая G_{KD} , причем на этой линии значение плотности ρ также не зависит от h, τ . Из формулы (13.21) имеем

$$\rho(X(t), t) = (2\rho_2 + \rho_1)/3 + (\rho_2 - \rho_1) \int_0^{\xi(X(t), t)} \text{Ai}(\lambda) d\lambda, \quad (13.23)$$

где

$$\xi(X(t), t) = (X(t) - x_0 - u_0 t) / [(3\mu t)^{1/3}]. \quad (13.24)$$

В соответствии с определением линии $x = X(t)$

$$\partial \rho(X(t), t) / \partial h = \partial \rho(X(t), t) / \partial \tau = 0.$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{\partial \rho(X(t), t)}{\partial h} = \frac{\partial \tilde{\rho}(\xi(X(t), t))}{\partial \xi} \frac{\partial \xi(X(t), t)}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial h}. \quad (13.25)$$

Так как μ зависит от h с учетом (13.13), $\partial \mu / \partial h \neq 0$. Из формулы (13.21) имеем

$$\partial \tilde{\rho}(\xi(X(t), t)) / \partial \xi = (\rho_2 - \rho_1) \text{Ai}(\xi(X(t), t)). \quad (13.26)$$

Так как линия $x = X(t)$ принадлежит контактной полосе G_{KD} , $\text{sign } \partial \rho(X(t), t) / \partial x = \text{sign}(\rho_2 - \rho_1)$, следовательно, $\text{Ai}(\xi(X(t), t)) > 0$ в силу (13.26) и условия 3. Поэтому из требования $\partial \rho(X(t), t) / \partial h = 0$ с учетом (13.25) получим

$$\frac{\partial \xi(X(t), t)}{\partial \mu} = - \frac{1}{3\mu^{4/3} (3t)^{1/3}} [X(t) - x_0 - u_0 t] = 0,$$

откуда находим, что $X(t) = x_0 + u_0 t$.

Следствие 1. При $r=1$ вдоль траектории контактного разрыва имеет место равенство $\partial^2 \rho / \partial x^2 = 0$. Тогда с учетом свойств функции $\Phi(\xi)$ легко установить, что линия L_{KD} является линией экстремума функции $\partial \rho(x, t) / \partial x$.

Следствие 2. При $r=2$ абсцисса точки максимума величины $|\partial\rho/\partial x|$, где $\rho(x, t)$ определяется по формулам (13.21), (13.22), лежит левее абсциссы контактного разрыва.

Действительно, рассмотрим формулу

$$\begin{aligned} \partial^2\rho/\partial x^2 = - & (d\text{Ai}(\xi)/d\xi) \times \\ & \times (\rho_1 - \rho_2) (3\mu t)^{-2/3}. \end{aligned}$$

Как известно, уравнение $\text{Ai}'(\xi)=0$ имеет корни только при $\xi < 0$. Обозначим через ξ_1 абсциссу первого локального минимума функции

$$a(\xi) = \int_0^\xi \text{Ai}(\lambda) d\lambda \quad (13.27)$$

при движении вдоль оси ξ влево от начала координат (рис. 24). Пусть ξ_0 — наименьший по модулю корень уравнения $d\text{Ai}(\xi)/d\xi = 0$, согласно [157], $\xi_0 \approx -1,018793$, $\xi_1 \approx -2,338107$. Таким образом, $\xi_0 > \xi_1$, следовательно, максимальное значение производной $|\partial\rho/\partial x|$ в зоне размазанного контактного разрыва достигается при $\xi = \xi_0$. Пусть x_* — абсцисса точки $\max_x |\partial\rho/\partial x|$ в контактной полосе. Тогда с учетом формулы (13.22)

$$x_* = x_0 + u_0 t + \xi_0 (3\mu t)^{1/3}, \quad (13.28)$$

откуда следует, что расстояние между абсциссой точки $\max_x |\partial\rho/\partial x|$ и абсциссой контактного разрыва растет пропорционально $t^{1/3}$.

Следствие 3. При $r=1$ (схемы первого порядка точности)

$$X = 2(\pi\mu t)^{1/2}. \quad (13.29)$$

Следствие 4. При $r=2$ (схемы второго порядка точности)

$$X = (3\mu t)^{1/3}/\text{Ai}(\xi_0), \quad (13.30)$$

где, согласно следствию 2, $\xi_0 \approx -1,018793$, $\text{Ai}(\xi_0) \approx 0,535657$.

Следствие 5. Абсцисса локального экстремума функции $\partial^2\rho/\partial x^2$ в контактной полосе совпадает при $r=2$ с точным положением контактной границы.

Действительно, в соответствии с (13.13) и леммой 2 вдоль траектории контактного разрыва $\rho_{\max}=0$. Из формулы (13.21) получаем

$$\partial^3\rho/\partial x^3 = \xi(\rho_2 - \rho_1)\text{Ai}(\xi)/(3\mu t); \quad (13.31)$$

$$\partial^4\rho/\partial x^4|_{\xi=0} = (\rho_2 - \rho_1)/[3^{2/3}\Gamma(2/3)(3\mu t)^{4/3}].$$

Соотношения (13.31) означают, что на линиях $\xi=0$ и $\xi=\xi_1$ производная $\partial^2\rho/\partial x^2$ достигает локальных экстремумов. Но $\partial\rho/\partial x|_{\xi=\xi_1} =$

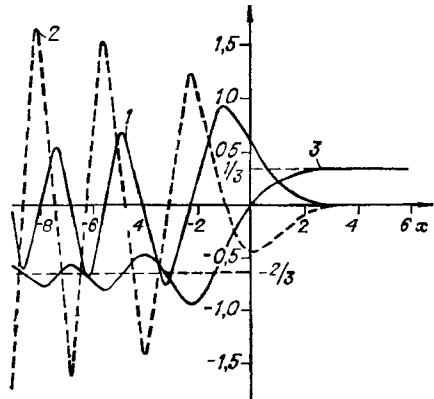


Рис. 24. График функций $\gamma\pi\text{Ai}'(2)$ и $\int_0^x \text{Ai}(x) dx (3)$.

= 0, таким образом, в зоне сглаженного контактного разрыва находится только один экстремум производной $\partial^2 \rho / \partial x^2$ — при $\xi = 0$.

Замену переменной $\xi(x, t) = (x - x_0 - u_0 t) / (2\sqrt{\mu t})$ иногда называют заменой Больцмана, впервые ее применившего [91].

Рассмотрим два примера применения теоремы 1.

Пример 1. Схема Лакса [234]. В соответствии с § 6, 7 П-форма п. д. п. этой схемы имеет вид

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\varphi}(\vec{w})}{\partial x} = \frac{h^2}{2\tau} \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(A^2 \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \right), \quad (13.32)$$

где $A = \partial \vec{\varphi} / \partial \vec{w}$. Применим к обеим частям равенства (13.32) операцию квазилинеаризации L . В результате получим систему уравнений

$$U (\partial \rho / \partial t + u_0 \partial \rho / \partial x) = \mu (\partial / \partial x) (U \partial \rho / \partial x), \quad (13.33)$$

где

$$\mu(h, \tau, u_0, p_0) = 0,5 (h^2 / \tau - \tau u_0^2). \quad (13.34)$$

Из уравнения (13.33) следует, что п. д. п. схемы Лакса не является К-согласованным в общем случае. Однако легко видеть: если функция $f(p, \rho)$ в уравнении состояния (1.6) удовлетворяет соотношению

$$(\partial^2 / \partial \rho^2) [\rho f(p_0, \rho)] = 0, \quad (13.35)$$

то К-согласованность п. д. п. (13.32) имеет место. При этом система (13.33) сводится к одному уравнению (13.13), где $r = 1$. Заметим, что нетрудно определить класс уравнений состояния, удовлетворяющих условию (13.35). Для этого проинтегрируем (13.35) как обыкновенное дифференциальное уравнение при фиксированном $p = p_0$. Решение получается в виде

$$\varepsilon = f(p, \rho) = f_1(p) + f_2(p) / \rho.$$

С учетом известного условия устойчивости схемы Лакса из (13.34) следует неравенство $\mu > 0$. Таким образом, при выполнении равенства (13.35) для схемы Лакса существует единственная центральная линия $L_{K\rho}$ контактной полосы. Заметим, что условию (13.35) удовлетворяет, например, функция

$$\varepsilon = f(p, \rho) = p / (\rho(\gamma - 1)), \quad (13.36)$$

где $\gamma = \text{const} > 1$ (идеальный газ).

Важность понятия (13.12) толщины X контактной полосы для построения дифференциальных анализаторов контактного разрыва обусловлена тем, что, согласно формулам (13.29), (13.34), графики плотности для фиксированного t будут пересекаться на линии $L_{K\rho}$ не только при различных шагах h , но и при различных τ . Далее, если ввести координату $x' = x - x_0 - u_0 t$, то графики плотности относительно оси x' будут пересекаться в одной точке $x' = 0$ при различных t в соответствии с формулами (13.14), (13.15), (13.29), отличаясь лишь « крутизной» профилей.

Пример 2. Одношаговая схема Лакса — Вендрофа [116]. Г-форма п. д. п. данной схемы имеет вид [204]

$$\vec{\partial w}/\partial t + \vec{\partial \Phi(w)}/\partial x = -(\tau^2/6)\vec{\partial^3 w}/\partial t^3 - (h^2/6)\vec{\partial^3 \Phi}/\partial x^3. \quad (13.37)$$

Применяя к обеим частям равенства (13.37) операцию квазилинейаризации L , получим систему

$$U \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = -\frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(U \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \frac{h^2}{6} u_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(U \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \quad (13.38)$$

Из уравнения (13.38) легко видеть, что К-согласованность п. д. п. (13.37) имеет место, если выполняется равенство (13.35). В этом случае легко получить П-форму из п. д. п. (13.38)

$$U (\partial \rho / \partial t + u_0 \partial \rho / \partial x) = -\mu U \partial^3 \rho / \partial x^3, \quad (13.39)$$

где

$$\mu(h, \tau, u_0) = (h^2/6) u_0 - (\tau^2/6) u_0^3. \quad (13.40)$$

С учетом условия устойчивости схемы Лакса — Вендрофа всегда $u_0 \tau / h < 1$, поэтому из формулы (13.40) следует положительность μ .

Рассмотрим п. д. п. (7.12), (7.13) схемы «распад разрыва» [33]. Применяя к обеим частям уравнений (7.12), (7.13) операцию квазилинейаризации L и переходя затем к П-форме п. д. п. по алгоритму, описанному в § 2, получим систему вида (13.33), где нужно положить

$$\mu(h, \tau, u_0) = 0.5 |u_0| (h - \tau |u_0|). \quad (13.41)$$

Рассмотрим метод FLIC [210]. Г-форма п. д. п. расчетной схемы этого метода при отсутствии искусственной вязкости q , вводимой аддитивно в давление в [210], имеет вид (7.4). В случае использования на лагранжевом этапе метода «крупных частиц» [12] формул первого порядка точности Г-форма п. д. п. схемы полного шага метода [12] совпадает с системой (7.4), если в уравнении энергии системы (7.4) опустить член $(\tau/2)(pp_x/\rho)_a$. Ясно, что он не влияет на результат применения операции квазилинейаризации L к системе (7.4). Таким образом, в случае методов FLIC и «крупных частиц» приходим после выполнения операции L к системе (13.33), где μ снова вычисляется по формуле (13.41), и предполагается выполненным условие (13.35). Таким образом, для методов FLIC, «распад разрыва» и «крупных частиц» существует единственная центральная линия $L_{\text{кд}}$ контактной полосы, на которой имеют место свойства решения (13.14), (13.15), сформулированные в следствиях теоремы 1. Обозначим через X_{Lax} толщину по Прандтлю контактной полосы для схемы Лакса, через X_{FLIC} — соответственно для метода FLIC. Тогда

$$X_{\text{Lax}}/X_{\text{FLIC}} = \sqrt{1 + h/(\tau |u_0|)}. \quad (13.42)$$

Из формулы (13.42) следует, что при $0 < |u_0| < \infty$ толщина «размывания» контактного разрыва при расчете по схеме Лакса больше, чем по схеме FLIC. Из формулы (13.41) следует, что

движения контактного разрыва. Аналогичная особенность метода FLIC выявлена также при расчетах течения с ударной волной [210].

Схема Рusanова [122]. Ее Г-форма п. д. п. имеет вид (7.1), где ω — постоянный коэффициент, $\omega = O(1)$. Легко убедиться в том, что при выполнении условия (13.35) п. д. п. (7.1) К-согласовано и уравнение (13.9) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = \left(\omega \frac{h}{2} |u_0| - \frac{\tau}{2} u_0^2 \right) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (13.43)$$

в случае использования уравнения состояния (13.36). Перепишем уравнение (13.43) как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = (\partial / \partial x) [b(\rho) \partial \rho / \partial x], \quad (13.44)$$

где

$$b(\rho) = \mu + \beta \rho^{-1/2}, \quad \mu = \omega \frac{h}{2} |u_0| - \frac{\tau}{2} u_0^2, \quad \beta = 0.5 \omega h (\gamma p_0)^{1/2}. \quad (13.45)$$

Из формул (13.45) следует, что при $\beta \neq 0$ уравнение (13.44) нелинейно. Этим оправдывается термин «квазилинеаризация», введенный в п. 13.1. Находим решение задачи (13.44), (13.10) в виде $\rho = \tilde{\rho}(\xi)$, где ξ определяется согласно (13.15). Для $\rho(\xi)$ получаем уравнение

$$-2\xi \frac{d\tilde{\rho}}{d\xi} = (1/\mu) (d/d\xi) [\tilde{b}(\tilde{\rho}) d\tilde{\rho} / d\xi]. \quad (13.46)$$

Сделаем замену

$$\tilde{\rho}(\xi) = (\beta^2 / \mu^2) \hat{\rho}(\xi), \quad (13.47)$$

предполагая, что $\beta > 0$, $\mu > 0$. Кроме того, будем предполагать в дальнейшем, что шаги τ и h связаны соотношением (7.5). В этом случае имеем с учетом формул (13.45)

$$\alpha = \beta^2 / \mu^2 = \omega^2 \gamma p_0 / [(\omega |u_0| - \kappa u_0^2)^2]. \quad (13.48)$$

Из (13.48) следует, что при $\tau/h = \kappa = \text{const}$ отношение β^2 / μ^2 остается постоянным с изменением τ , h . Подставив правую часть равенства (13.47) вместо ρ в уравнение (13.46), для определения $\hat{\rho}(\xi)$ получим

$$-2\xi \frac{d\hat{\rho}}{d\xi} = (d/d\xi) \left[\left(1 + 1/\sqrt{\hat{\rho}} \right) d\hat{\rho} / d\xi \right]. \quad (13.49)$$

С учетом формул (13.11), (13.47), (13.48) уравнение (13.49) будем решать при следующих краевых условиях:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{\rho}(\xi) = \rho_1^0; \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\rho}(\xi) = \rho_2^0, \quad (13.50)$$

где $\rho_v^0 = (1/\alpha) \rho_v$, $v = 1, 2$. В дальнейшем будем предполагать наличие неравенств $0 < \rho_v^0 < \infty$, $v = 1, 2$. Пусть $\tilde{b}(\hat{\rho}) = 1 + \hat{\rho}^{-1/2}$. С помощью замены

$$\tilde{v} = \int \tilde{b}(\hat{\rho}) d\hat{\rho} = \hat{\rho} + 2\sqrt{\hat{\rho}}$$

приведем уравнение (13.49) к виду

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} = -\xi G(v) \frac{dv}{d\xi}, \quad (13.51)$$

где $v(\xi) = \tilde{v}(\hat{\rho}(\xi))$, $G(v) = 2/\hat{b}(\hat{\rho}(v))$, $\hat{\rho}(v) = v + 2 + \sqrt{(v+2)^2 - v^2}$.

Краевые условия для $v(\xi)$ запишем с учетом (13.50)

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} v(\xi) = v_1^0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi) = v_2^0, \quad (13.52)$$

где $v_v^0 = \tilde{v}(\rho_v^0)$, $v = 1, 2$. На основании результатов [178, 236] можно, по-видимому, установить однозначную разрешимость задачи (13.51), (13.52). Однако авторы не задавались целью исследовать эти вопросы, и все дальнейшие рассуждения проводятся в предположении существования решения задачи (13.51) — (13.52).

Рассмотрим вопрос о существовании и единственности центральной линии контактной полосы L_{KD} в задаче (13.43), (13.10), (13.11) в предположении, что существует единственное ограниченное и монотонное решение задачи (13.51), (13.52). Возьмем некоторое $\delta \neq 0$. Рассмотрим в плоскости (x, t) точку с координатами $x_* = x_0 + u_0 t - \delta$, $t = t$. Тогда в соответствии с (13.15) имеем $\xi(x_*, t) = \tilde{\xi}(h, t)$, где

$$\tilde{\xi}(h, t) = -\delta/(2\sqrt{\mu t}) = -\delta h^{-1/2} [2t(\omega|u_0| - \kappa u_0^2)]^{-1/2}.$$

Тогда

$$\partial \rho(x_*, t)/\partial h = (\beta^2/\mu^2) d\hat{\rho}(\tilde{\xi}(h, t))/\partial \xi \approx 0.56 [2t(\omega|u_0| - \kappa u_0^2)]^{-1/2} h^{-3/2}. \quad (13.53)$$

В формуле (13.53) $d\hat{\rho}/d\xi \neq 0$ в силу предположения о монотонности решения задачи (13.51), (13.52). Поэтому равенство $\partial \rho(x_*, t)/\partial h = 0$ с учетом (13.53) имеет место только при $\delta = 0$. Таким образом, при указанных выше предположениях относительно решения $v(\xi)$ существует единственная центральная линия L_{KD} контактной полосы в решении задачи (13.43), (13.10), (13.11), причем уравнение этой линии $x = x_0 + u_0 t$ совпадает с точной траекторией контактного разрыва в решении модельной задачи о распаде (1.1) — (1.3), (1.5), (13.1).

Рассмотрим вопрос о вычислении толщины по Прандтлю X контактной полосы в решении задачи (13.43), (13.10), (13.11). В частном случае $\beta = 0$ из (13.45) имеем $b(\rho) = \mu$, поэтому $X = 2(\mu t)^{0.5}$. Возьмем случай $\beta > 0$. Пусть ξ_1 — точка, в которой $d\rho/d\xi = A_0$, где $0 < |A_0| < \infty$. Эта точка существует в случае ограниченного решения $\rho(\xi) \in C^2(-\infty, \infty)$. Пусть $\xi = \xi_0$ — такое значение переменной ξ , при котором $\rho_{\xi\xi} = 0$. Это значение ξ существует. Действительно, если предположить, что $\text{sign } \rho_{\xi\xi} = \text{const} \neq 0$, тогда из формулы

$$\rho(\xi) = \rho(\xi_1) + \int_{\xi_1}^{\xi} \left[A_0 + \int_{\xi_1}^{\xi} (d^2\rho(\lambda)/d\lambda^2) d\lambda \right]$$

получаем, что $\rho(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$, а это противоречит ограниченности решения $v(\xi)$. Из уравнения (13.46) имеем

$$-2\xi_0 (\tilde{d\rho}/d\xi)|_{\xi=\xi_0} = [(1/\mu)(db/d\tilde{\rho})(\tilde{d\rho}/d\xi)^2]|_{\xi=\xi_0}. \quad (13.54)$$

С помощью соотношения (13.54) найдем максимальное значение производной $|d\tilde{\rho}/d\xi|$ в контактной полосе

$$\tilde{d\rho}/d\xi = -2\xi_0 \mu / (db/d\tilde{\rho}) = 4\xi_0 \beta^{-1} \mu \tilde{\rho}(\xi_0)^{3/2}. \quad (13.55)$$

Использование формул (13.12), (13.29), (13.55) даст следующее выражение для толщины X контактной полосы. В случае схемы Русанова

$$X = \delta_{p_0}^0 2 (\pi \mu t)^{1/2} + (1 - \delta_{p_0}^0) |\rho_2 - \rho_1| 0,5 \beta \sqrt{\frac{t}{\mu}} |\xi_0|^{-1} \tilde{\rho}(\xi_0)^{-3/2}, \quad (13.56)$$

где $\delta_{p_0}^0$ — символ Кронекера. Покажем, что в формуле (13.55) $\operatorname{sgn} \xi_0 = \operatorname{sgn} (\rho_2 - \rho_1)$. В соответствии с уравнением (13.46) на линии $\xi = 0$ имеет место равенство $(db/d\tilde{\rho})(\tilde{d\rho}/d\xi)^2 + b(\tilde{\rho}) \tilde{d^2\rho}/d\xi^2 = 0$. Поэтому при $\xi = 0$ имеем с учетом формул (13.45), что $d^2\tilde{\rho}/d\xi^2 > 0$. Предположим монотонность профиля плотности $\tilde{\rho}(\xi)$ в контактной полосе. Рассмотрим сначала случай $\rho_1 > \rho_2$. Тогда $d^2\tilde{\rho}/d\xi^2 > 0$ при $\xi > \xi_0$, откуда следует, что $0 > \xi_0$. Аналогично рассматривается случай $\xi < \xi_0$.

Из формулы (13.56) видно, что схема Русанова [122] имеет недостаток: неподвижный контактный разрыв ($u_0 \neq 0$) размывается при расчете по этой схеме, если $p_0 \neq 0$. Тем же свойством обладают предложенные в [238, 267, 268, 272] модификации схемы Русанова, а также схема второго порядка точности Балакина — Буланова [6, 15, 121]. От данного недостатка свободны, например, схемы С. К. Годунова [33], FLIC [210], Лакса — Вендрофа [116] (см. табл. 2 и комментарии к ней).

С учетом изложенного, а также леммы 2 получаем, что абсцисса точки максимума величины

$$|[(\omega h/2)(|u| + c) - (\tau/2)u^2](\partial\rho/\partial x)|, \quad x \in G_{K,D}, \quad (13.57)$$

где c — местная скорость звука, будет совпадать с точным положением контактного разрыва. Интересно отметить, что известный способ визуального определения положения контактного разрыва по сближению изохор в данном случае, вообще говоря, неприменим из-за того, что $\xi_0 \neq 0$, как установлено выше. Таким образом, при разработке алгоритмов дифференциальных анализаторов контактных разрывов необходимо учитывать как неявно присутствующий в схеме диссипативный механизм, так и вводимые в схему искусственные диссипаторы.

В табл. 2 подытожены результаты исследований ряда разностных схем первого и второго порядков точности, проведенных в предположении, что уравнение состояния удовлетворяет требова-

Таблица 2

Метод	Порядок аппроксимации	μ	x	Практический критерий для нахождения линии L_K
Лакса [234]	$O(\tau) + O\left(\frac{h^2}{2\tau}\right)$	$h^2/(2\tau) - (\tau/2)u_0^2$	$2(\pi\mu t)^{1/2}$	
Годунова [33]	$O(\tau) + O(h)$	$ u_0 (h/2 - (\tau/2) u_0)$	$2(\pi\mu t)^{1/2}$	По $\max \partial\rho/\partial x $ при $\text{sign}(\partial\rho/\partial x) =$ $= \text{sign}(\rho_2 - \rho_1)$
FLIC [210]	$O(\tau) + O(h)$	$ u_0 (h/2 - (\tau/2) u_0)$	$2(\pi\mu t)^{1/2}$	
«Крупных частиц» [12]	$O(\tau) + O(h)$	$ u_0 (h/2 - (\tau/2) u_0)$	$2(\pi\mu t)^{1/2}$	
Русанова [122]	$O(\tau) + O(h)$	$\omega \frac{h}{2} u_0 - \frac{\tau}{2} u_0^2$	См. формулу (13.56)	По $\max \left[\left(\frac{\omega h}{2} u + c \right) - (\tau/2) u^2 \right] \partial\rho / \partial x$ при $\text{sgn } \rho_x =$ $= \text{sgn}(\rho_2 - \rho_1)$
Лакса — Вендрофа одностаг. [116]	$O(\tau^2) + O(h^2)$	$(u_0 /6)(h^2 - \tau^2 u_0^2)$		
Лакса — Вендрофа двухстаг. [116]	$O(\tau^2) + O(h^2)$	$(u_0 /6)(h^2 - \tau^2 u_0^2)$	$\frac{(3\mu t)^{1/3}}{\text{Ai}(\xi_0)},$ $\text{Ai}(\xi_0) \approx$ $\approx 0,535657$	По $\max \partial^2\rho/\partial x^2 $ при $\text{sign}(\partial\rho/\partial x) =$ $= \text{sign}(\rho_2 - \rho_1)$
Мак-Кормака [245]	$O(\tau^2) + O(h^2)$	$(u_0 /6)(h^2 - \tau^2 u_0^2)$		

нию (13.35) и, таким образом, К-согласованность п. д. п. имеет место. Для каждой схемы в табл. 2 указан конкретный вид функции $\mu(h, \tau, u_0, p_0)$, входящей в уравнение (13.13), что позволяет определить ширину области резкого изменения плотности в контактной полосе.

В дополнение к табл. 2 по аналогии с [239], [242] для уравнения (13.13) при $r = 1$ (схемы первого порядка точности) можно ввести понятие сеточного числа Пекле

$$P_\Delta = u_0 h / \mu \quad (13.58)$$

как безразмерного параметра, характеризующего разностную схему с точки зрения размера численной диффузии в контактной полосе. Если $\mu = 0$ (отсутствует численная диффузия контактной границы), то $P_\Delta = \infty$. Оценим на ряде примеров сеточное число Пекле (13.58) при использовании некоторых схем первого порядка точности.

Схема Лакса. Введем обозначение $\kappa = u_0 \tau / h$. Тогда с помощью табл. 2 легко вычислить, что $P_\Delta = 2\kappa / (1 - \kappa^2)$. Запишем условие устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви для схемы Лакса в виде $(\kappa_{\max} + \kappa_c) \leq 1$, где $\kappa_{\max} = \max_x |u| \tau / h$, $\kappa_c = \max_x c \tau / h$. Ясно, что $0 \leq \kappa \leq \kappa_{\max} \leq 1 - \kappa_c$, поэтому сеточное число P_Δ изменяется в пределах

$$0 \leq P_\Delta \leq 2(1 - \kappa_c) / [1 - (1 - \kappa_c)^2] \leq 2.$$

Метод FLIC. В этом случае [210] имеем $P_\Delta = 2 / (1 - \kappa)$, откуда получаются следующие пределы изменения числа P_Δ :

$$2 \leq P_\Delta \leq 2 / [1 - (1 - \kappa_c)^2].$$

Из определения (13.58) ясно, что число P_Δ обратно пропорционально при $u \neq 0$ величине коэффициента μ счетной вязкости. Поэтому чем больше P_Δ для конкретной схемы, тем она предпочтительнее для задач с контактными разрывами. Сравним для примера сеточные числа Пекле (P_Δ)_{Lax} и (P_Δ)_{FLIC} для методов Лакса и FLIC соответственно:

$$(P_\Delta)_{\text{Lax}} / (P_\Delta)_{\text{FLIC}} = \kappa / (1 + \kappa) < 1,$$

т. е. численная диффузия через контактную границу в схеме Лакса больше, чем в схеме FLIC.

Из проведенного рассмотрения свойств решения уравнения (13.13) можно вывести для практических расчетов с использованием схем первого и второго порядков точности, удовлетворяющих условиям теоремы 1, следующие три алгоритма дифференциального анализатора контактного разрыва.

Алгоритм 1. Локализация линии L_k непосредственно на основе ее определения.

Алгоритм 2. Определение при каждом $t > 0$ точки линии L_k как точки $\max |\partial^r \rho / \partial x^r|$ при $x \in G_k$.

Алгоритм 3. На линии L_{kD} выполняется свойство $\rho = 0.5(\rho_1 + \rho_2)$ при $r = 1$ и $\rho = (2\rho_2 + \rho_1)/3$ при $r = 2$. Поэтому при известных значениях ρ_1, ρ_2 можно приближенно найти абсциссу точки линии L_k обращением интерполяции функции $\rho_h(x, t, h, \tau)$.

Легко видеть, что известный способ определения положения контактных границ по сближению изохор соответствует алгоритму 2 при $r = 1$, так как ясно, что максимальное сближение изохор имеет место в области максимальных градиентов плотности. С другой стороны, при $r = 2$ в силу формулы (13.28) данный способ локализации контактных границ неприменим, так как подбором времени t в формуле (13.28) можно получить любое наперед заданное отклонение места наибольшего сближения изохор от истинного положения контактного разрыва.

Сделаем несколько замечаний, вытекающих из анализа табл. 2. За исключением схем Лакса [234] и Русанова [122], все схемы первого и второго порядков точности, перечисленные в табл. 2, обладают положительным свойством — они не размазывают неподвижные контактные разрывы. Данное свойство для схемы «распад раз-

рыва» отмечено ранее в [34]. Соотношение $\tau|u_0|/h = 1$ нельзя реализовать на практике для схем из табл. 2 ввиду условия устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви $\tau(|u| + c)/h \leq 1$.

Отсутствие «размазывания» неподвижного контактного разрыва, отмеченное выше для некоторых схем, имеет связь со свойством К, сформулированным в работах [168, 169]. Действительно, в [169] установлена связь между свойством К и обращением в ноль одного из собственных чисел матрицы $A = \partial\phi/\partial w$. Как известно, в случае уравнений Эйлера (1.11), (1.9) собственные числа λ , матрицы A выражаются формулами $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + c$. Контактный разрыв движется по характеристике $dx/dt = u$, поэтому в случае неподвижного контактного разрыва $\lambda_2 = 0$. Таким образом, наличие у разностной схемы для системы (1.11), (1.9) свойства К означает, что неподвижный контактный разрыв не будет «размазываться» при расчете по такой разностной схеме. В [169] показано, что схема Лакса — Вендрофа обладает свойством К, а схема Лакса нет. Эти выводы согласуются с табл. 2.

По-видимому, впервые требование отсутствия «размазывания» неподвижного контактного разрыва последовательно выполнено в работе [259] при практическом построении схем третьего порядка точности. В [154] построены классы разностных схем для системы (1.11), (1.9), (13.36), обладающих «свойством К». Некоторые из этих схем обладают также свойствами инвариантности в смысле, определенном в [154], в частности инвариантностью по отношению к преобразованию Галилея. Из выражений для μ , приведенных в табл. 2, следует пеинвариантность всех перечисленных в таблице схем по отношению к преобразованию Галилея. Этот вывод совпадает с результатами исследований, выполненных в [154, 172, 210, 289].

В работе [188] рассмотрена краевая задача для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (13.59)$$

Уравнение (13.59) решалось в [188] по методу прямых, в котором производные по x аппроксимировались центральными разностями. Полученная по методу прямых система обыкновенных дифференциальных уравнений решена в [188] точно. Точное их решение сравнивалось с решением уравнения первого дифференциального приближения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (h^2/12) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right), \quad (13.60)$$

полученного при разложении величин $u(x_k \pm h, t)$, входящих в уравнения метода прямых, относительно точки (x_k, t) , где $x_k = kh$. Решение уравнения (13.60) при функции $w(0, t)$ вида $w(0, t) = H(t)$ ($H(t)$ — функция Хевисайда), полученное в [188] методом сращиваемых асимптотических разложений, отличалось от точного решения обыкновенных дифференциальных уравнений метода прямых только по фазе в распространении ошибки. При этом относительная фазовая ошибка, связанная с пренебрежением членами

более высокого порядка малости, чем $O(h^2)$, в дифференциальном приближении, согласно [188], не превышала 4%. На основе этого в [188] сделан вывод, что дисперсионный характер численного решения, приводящий к возникновению явления Гиббса, в основном обусловлен первым членом погрешности аппроксимации, найденным при разложении в ряд Тейлора разностного частного, который в данном случае, согласно (13.53), имеет вид $(c^2 h^2 / 12) \partial^4 w / \partial x^4$.

. Найдем связь между уравнениями (13.60) и (13.13) при $r = 2$. Для этого продифференцируем обе части (13.13) по t и заменим в полученном уравнении ρ_{xt} , ρ_{xxx} через производные по x :

$$\rho_{tx} = -u_0 \rho_{xx} - \mu \rho_x^{(4)}; \quad (\rho_{tx})_{xx} = -(u_0 \rho_{xx})_{xx} - \mu \rho_x^{(6)}.$$

В результате получим

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = u_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + 2u_0 \mu \frac{\partial^4 \rho}{\partial x^4} + \mu^2 \frac{\partial^6 \rho}{\partial x^6}. \quad (13.61)$$

Пренебрегая в (13.54) членом порядка $O(\mu^2) = O(h^4)$ и сделав замену $t = \alpha t'$, $x = \alpha x'$, где $\alpha = \sqrt{24}\mu/(u_0 h^2)$, получим уравнение, совпадающее с (13.60) при $c = u_0$. Установленная связь между (13.60) и (13.13) может служить для обоснования использования первых дифференциальных приближений разностных схем второго порядка точности при теоретическом исследовании свойств разностных решений в окрестности контактного разрыва. Таким образом, существует тесная связь между дисперсионными свойствами и явлением Гиббса, установленными в [188] для полудискретной аппроксимации волнового уравнения, и свойствами решения (13.21).

Сделаем одно замечание по поводу исследования разностных схем третьего и более высоких порядков точности с точки зрения изложенной методики построения и исследования дифференциальных анализаторов контактных разрывов. Рассмотрим для системы уравнений Эйлера (1.1)–(1.3) такую разностную схему r -го порядка точности, $r \geq 3$, что ее первое дифференциальное приближение К-согласовано и уравнение (13.9) сводится к виду (13.13), где $r \geq 3$. Тогда при получении точного решения задачи (13.13), (13.10), (13.11) можно использовать результаты работы [48]. Следуя [48], введем в рассмотрение функцию

$$f_r(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iz\xi) \exp\left(\pm \frac{(iz)^{r+1}}{(r+1)!}\right) dz, \quad (13.62)$$

где $i = \sqrt{-1}$. При четных r формулу (13.62) имеет смысл рассматривать лишь с таким знаком в показателе, чтобы $\pm i^{r+1}$ было отрицательно, в противном случае оператор, выражающий погрешность численного интегрирования с использованием разностной схемы, будет неустойчивым [48]. В (13.62)

$$\xi = (x - x_0 - u_0 t) / [\beta(\mu t)^{1/(r+1)}], \quad (13.63)$$

где β – постоянная. При $r = 1$ функция $f_1(\xi)$ совпадает с нормаль-

ной плотностью вероятностей $f_r(\xi) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\xi^2/2}$; при $r=2$ (схемы второго порядка точности) она является функцией Эйри $Ai(\xi)$ (см. [17]). Продолжая ряд формул (13.14), (13.21), полученных соответственно для $r=1, 2$, запишем решение уравнения (13.13) в виде

$$\rho(x, t) = a + b \int_0^\xi f_r(\lambda) d\lambda \quad (13.64)$$

при $r \geq 3$, где выражения для постоянных a, b, β должны быть определены из условий (13.10), (13.11). Аналогично случаю $1 \leq r \leq 2$ приходим на основании (13.63), (13.64) к выводу о существовании и единственности центральной линии $L_{K\rho}$ контактной полосы при $r \geq 3$, причем вдоль этой линии величина $|\partial^r \rho / \partial x^r|$ достигает максимума в силу леммы 2.

Рассмотрим, как можно исследовать поведение энтропии в контактной полосе, опираясь на теорему 1. Согласно второму началу термодинамики, изменение энтропии описывается формулой

$$TdS = \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_\rho dp + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right)_p d\rho - p \frac{dp}{\rho^2}, \quad (13.65)$$

где функция $f(p, \rho)$ входит в уравнение состояния (1.6). Как известно из термодинамики, из трех функций T, p, ρ независимы две, поэтому существует связь $T = T(p, \rho)$. При изобарном процессе $dp = 0$, поэтому из равенства (13.65) получаем искомую формулу для энтропии $S(x, t)$:

$$S - S_0 = \int \left[\frac{\partial f}{\partial \rho} (p_0, \rho) - \frac{p_0}{\rho^2} \right] T^{-1}(p_0, \rho) d\rho, \quad (13.66)$$

где S_0 — произвольная постоянная. Пусть рассматриваемая разностная схема удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда функция $\rho(x, t)$ непрерывна при $t > 0$ согласно (13.14), (13.21) и из формулы (13.66) следует непрерывность энтропии $S(x, t)$ в контактной полосе при $t > 0$. Так как величины h, τ явно не входят в выражение (13.66), на центральной линии контактной полосы значение энтропии S не зависит от величины сеточных параметров h, τ . По аналогии с (13.12) можно ввести понятие толщины по Прандтлю X_s переходной зоны в профиле энтропии. Тогда из формулы (13.66) с учетом теоремы 1 будем иметь $X_s = C(h, \tau, u_0, p_0) t^{1/(r+1)}$, где вид функции $C(h, \tau, u_0, p_0)$ можно определить с помощью формулы (13.66) при заданных функциях $f(p, \rho)$, $T(p, \rho)$.

§ 14. О МЕТОДАХ ПОДАВЛЕНИЯ К-НЕСОГЛАСОВАННОСТИ

14.1. Предварительное обсуждение

Как показано в § 13, равенство (13.35) является необходимым условием К-согласованности п. д. п. широкого класса разностных схем для задач газовой динамики. Предположим теперь,

что равенство (13.35) не выполняется. Рассмотрим модельную задачу (1.11), (1.9), (1.6), (13.1). В точном решении (13.2) этой задачи давление и скорость постоянны независимо от вида используемого уравнения состояния. Применяя к системе уравнений Эйлера (1.1) — (1.3) операцию квазилинеаризации L , получили систему (13.7), которая будет совместной при любом уравнении состояния (1.5) или (1.6), поскольку решение уравнения (13.8) — это решение второго и третьего уравнений системы $(\partial \rho / \partial t + u_0 \partial \rho / \partial x) U = 0$, где вектор-столбец U определяется по формуле (13.6).

Теперь посмотрим, будет ли сохраняться совместность п. д. п. разностной схемы в том случае, когда используемое уравнение состояния таково, что равенство (13.35) не выполняется. Для примера возьмем схему Лакса. Выпишем все три уравнения системы (13.33). С учетом определения (13.6)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}; \quad (14.1)$$

$$u_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \mu u_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}; \quad (14.2)$$

$$\begin{aligned} & \left[0,5u_0^2 + f(p_0, \rho) + \rho \frac{\partial f}{\partial \rho}(p_0, \rho) \right] \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \\ & = \mu \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \left[0,5u_0^2 + f(p_0, \rho) + \rho \frac{\partial f}{\partial \rho}(p_0, \rho) \right] \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\}. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Решение уравнения (14.1) при начальном условии (13.10) имеет вид (13.14), (13.15). Умножив обе части равенства (14.1) на величину $- \left[0,5u_0^2 + f(p_0, \rho) + \rho \frac{\partial f}{\partial \rho}(p_0, \rho) \right]$ и прибавив результат к обеим частям (14.3), получим

$$\mu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} [f(p_0, \rho)] \right\} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 = 0,$$

откуда находим решение $\rho(x, t) = a(t)$, где $a(t)$ — произвольная функция. Таким образом, когда равенство (13.35) не имеет места, система (14.1) — (14.3) оказывается несовместной. В этой связи в [282] сделано предположение, что при отсутствии К-согласованности п. д. п. разностные решения для давления и скорости, получаемые при численном решении модельной задачи (1.11), (1.9), (1.6), (13.1), будут не постоянными в контактной полосе, а функциями x, t . С целью проверки этого предположения в [282] проведены расчеты задачи о распаде разрыва (1.1) — (1.3), (13.1) с применением ряда уравнений состояния, отличающихся от таковых для идеального газа и не удовлетворяющих условию (13.35). При этом использован ряд известных разностных схем первого и второго порядков аппроксимации. В зависимости от конкретного вида уравнения состояния и величины перепада плотностей по обе стороны контактного разрыва в [282] величина ошибок в определении давления и скорости составляет от нескольких процентов до десятков. В [280] на примере схем Лакса — Вендрофа и Мак-Кормака (см. также п. 14.3) показано: если используемое уравнение состояния имеет не слишком сложный вид, то можно получить явное выражение

для ошибки в разностном решении для давления на первых двух-трех шагах по t (для последующих аналитические выкладки становятся весьма трудными).

Указанные ошибки для скорости и давления в контактной полосе, возникающей при численном решении задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (13.1), не соответствуют физическим свойствам рассматриваемого течения, они имеют чисто вычислительную природу. В этой связи в п. 14.2 и 14.3 предложено несколько способов уменьшения или подавления ошибок в разностном решении в контактной полосе при использовании уравнений состояния, не удовлетворяющих условию (13.35). Как показано в § 15, реализация соответствующих алгоритмов подавления К-несогласованности существенно улучшает точность локализации контактных разрывов с помощью дифференциальных анализаторов, рассмотренных в § 13.

С учетом существующих методов построения конечно-разностных схем, аппроксимирующих систему (1.1)–(1.3), можно указать еще две причины, которые могут вызвать К-несогласованность п. д. п. [282]:

1) какое-либо из трех разностных уравнений, аппроксимирующих систему (1.1)–(1.3), использует сеточный шаблон, отличный от шаблона остальных разностных уравнений;

2) одно из трех разностных уравнений, аппроксимирующих систему (1.1)–(1.3), имеет структуру аппроксимационной вязкости, отличную от аппроксимационной вязкости других уравнений, в частности содержит «вязкостные» члены, пропорциональные производным $\partial^k \rho / \partial x^k$, $k = 1, 2, \dots$.

Этот перечень возможных причин К-несогласованности не претендует на исчерпывающую полноту. Далее в п. 14.2, 14.3 ограничимся лишь изучением влияния вида уравнения состояния на К-согласованность. Дело в том, что многие уравнения состояния, применяемые при численном решении задач механики сплошной среды, не удовлетворяют условию (13.35).

При конструировании алгоритмов подавления К-несогласованности разностных схем, излагаемых в п. 14.2 и 14.3, важную роль играет функция

$$B(p_0, \rho) \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} [\rho f(p_0, \rho)]. \quad (14.4)$$

Из (13.35) следует необходимое условие К-согласованности вида $B(p_0, \rho) = 0$. Поскольку в газодинамических расчетах уравнение (или уравнения) состояния используется в различной форме, например в виде (1.5), (1.6) или как

$$p = G(V, S), \quad T = T(V, S), \quad (14.5)$$

где S – энтропия, $V = 1/\rho$, T – температура, нужно иметь формулы для $B(p_0, \rho)$ в каждом из этих случаев. Найдем выражение для $B(p_0, \rho)$ в случае использования уравнения состояния (1.5). Продифференцируем обе части тождества (1.7) по ρ , предполагая, что

$p = \text{const}$. Получим

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = - \frac{\partial F}{\partial \rho} / \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}. \quad (14.6)$$

С учетом формулы (14.6) можем переписать соотношение (14.4):

$$B(p_0, \rho) = - \frac{\partial F}{\partial \rho} / \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} / \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right). \quad (14.7)$$

Предполагая, что аргумент ε в (1.5), в свою очередь, зависит от ρ : $\varepsilon = f(p_0, \rho)$, вычислим вторые производные, входящие в (14.7):

$$(d/d\rho)(\partial F/\partial \rho) = \partial^2 F / \partial \rho^2 - (\partial^2 F / \partial \rho \partial \varepsilon)(\partial F / \partial \rho) / (\partial F / \partial \varepsilon), \quad (14.8)$$

$$(d/d\rho)(\partial F / \partial \varepsilon) = \partial^2 F / \partial \varepsilon \partial \rho - (\partial^2 F / \partial \varepsilon^2)(\partial F / \partial \rho) / (\partial F / \partial \varepsilon).$$

Подставляя формулы (14.8) в выражение (14.7), получим окончательно

$$B(p_0, \rho) = -2F_\rho/F_\varepsilon - \rho(F_\varepsilon F_{\rho\rho} - F_{\rho\varepsilon} F_\rho - F_{\varepsilon\rho} F_\rho + F_\rho^2 F_{\varepsilon\varepsilon}/F_\varepsilon)/F_\varepsilon^2, \quad (14.9)$$

где $F_\varepsilon \equiv \partial F(\rho, \varepsilon) / \partial \varepsilon$, $F_{\rho\rho} \equiv \partial^2 F(\rho, \varepsilon) / \partial \rho^2$ и т. д.

Заметим, что при достаточно сложных уравнениях состояния вида (1.5) можно для вычисления производных, входящих в (14.9), использовать специальные программы, выполняющие аналитические выкладки на ЭВМ, в том числе дифференцирование аналитически заданных функций (см., например, [43]). Укажем способ вычисления величины $B(p_0, \rho)$ без формулы (14.9), когда уравнение состояния (1.5) можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^N f_k(p, \rho) \varphi_k(\rho \varepsilon) = 0, \quad (14.10)$$

где f_k , φ_k — дважды дифференцируемые функции, $N \geq 1$:

$$B(p_0, \rho) = (2S_1 S_2 S_3 - S_5 S_2^2 - S_4 S_1^2) / (S_2^3), \quad (14.11)$$

где

$$S_1 = \sum_{k=0}^N f'_k \varphi_k, \quad S_2 = \sum_{k=0}^N f_k \varphi'_k, \quad S_3 = \sum_{k=0}^N f''_k \varphi_k;$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^N f'_k \varphi''_k, \quad S_5 = \sum_{k=0}^N f''_k \varphi_k;$$

$$\varphi'_k \equiv \frac{\partial}{\partial \rho \varepsilon} \varphi_k(\rho \varepsilon), \quad f'_k \equiv \frac{\partial}{\partial \rho} f_k(p_0, \rho).$$

и т. д.

Для получения формулы (14.11) дифференцируем обе части равенства (14.10) по ρ , предполагая p фиксированным. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \varepsilon(p_0, \rho)] = - \left(\sum_{k=0}^N f'_k \varphi_k \right) / \left(\sum_{k=0}^N f_k \varphi'_k \right). \quad (14.12)$$

Дифференцируя обе части равенства (14.12) по ρ и выражая про-

изводную $\partial/\partial\rho[\varepsilon(p_0, \rho)]$ через правую часть (14.12), будем иметь формулу (14.11).

Иногда в качестве независимых переменных в уравнении состояния используются величины V, S , где V — удельный объем, S — энтропия. Получим выражение для $B(p_0, \rho)$ в случае, когда известны соотношения (14.5). Используем соотношение

$$F(1/V, \varepsilon(V, S)) \equiv G(V, S), \quad (14.13)$$

где функция $F(\rho, \varepsilon)$ входит в уравнение состояния (1.5). Дифференцируя обе части равенства (14.13) по V и по S , получим систему алгебраических уравнений для вычисления производных $\partial F/\partial\rho$, $\partial F/\partial\varepsilon$

$$\begin{aligned} -(1/V^2)F_\rho + F_\varepsilon \partial\varepsilon(V, S)/\partial V &= G_v; \\ F_\varepsilon \partial\varepsilon(V, S)/\partial S &= G_s, \end{aligned} \quad (14.14)$$

где $G_v = \partial G(V, S)/\partial V$, $G_s = \partial G(V, S)/\partial S$. Используя известные термодинамические соотношения [118]

$$\partial\varepsilon(V, S)/\partial V = -p(V, S); \quad \partial\varepsilon(V, S)/\partial S = T(V, S), \quad (14.15)$$

перепишем систему (14.14) в виде

$$-(1/V^2)F_\rho - pF_\varepsilon = G_v; \quad TF_\varepsilon = G_s. \quad (14.16)$$

Из уравнений (14.16) находим

$$F_\varepsilon = G_s/T, \quad F_\rho = -V^2(G_v + GG_s/T). \quad (14.17)$$

Дифференцируя обе части первого из уравнений системы (14.14) по V , получим

$$F_{\rho\rho}(1/V^4) + F_{\rho\varepsilon}2G/(V^2) + F_{\varepsilon\varepsilon}G^2 = G_{vv} + F_\varepsilon G_v - 2F_\rho/(V^3), \quad (14.18)$$

аналогично дифференцирование обеих частей второго из уравнений системы (14.16) по V даст

$$(F_{\varepsilon\rho}d\rho/dV + F_{\varepsilon\varepsilon}\partial\varepsilon/\partial V)T(V, S) + F_\varepsilon T_v = G_{sv}. \quad (14.19)$$

Используем одно из четырех известных в термодинамике уравнений Максвелла [118, 114]

$$\partial T(V, S)/\partial V + \partial p(V, S)/\partial S = 0. \quad (14.20)$$

С учетом формул (14.20), (14.15) перепишем равенство (14.19) в виде

$$[-(1/V^2)F_{\rho\rho} - GF_{\varepsilon\varepsilon}]T(V, S) - F_\varepsilon G_s = G_{sv}. \quad (14.21)$$

Дифференцируя обе части второго из уравнений системы (14.16) по S и используя соотношения (14.15), получим

$$F_\varepsilon T^2(V, S) + F_\varepsilon \partial T(V, S)/\partial S = G_{ss}. \quad (14.22)$$

Теперь имеем систему трех алгебраических уравнений (14.18), (14.21), (14.22) для вычисления $F_{\rho\rho}$, $F_{\rho\varepsilon}$, $F_{\varepsilon\varepsilon}$ в терминах производных функций $G(V, S)$, $T(V, S)$. При приведении подобных членов

предполагается здесь и далее, что $F_{\rho\varepsilon} = F_{\varepsilon\rho}$. Решая систему (14.18), (14.21), (14.22), находим искомые соотношения

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon\varepsilon} &= T^{-2}(G_{ss} - T_s G_s/T); \\ F_{\varepsilon\rho} &= -(V^2/T)(GG_s/T + G_v)_s; \\ F_{\rho\rho} &= V^4[2GT^{-1}(GG_s/T + G_v)_s - (G/T)^2(G_{ss} - T_s G_s/T) + \\ &\quad + G_{vv} + T^{-1}G_v G_s + 2V^{-1}(G_v + GG_s/T)]. \end{aligned} \quad (14.23)$$

Подставляя формулы (14.17), (14.23) и соотношение $\rho = 1/V$ в (14.9), будем иметь формулу для $B(p_0, \rho)$.

Пример 1. Пусть функция $F(\rho, \varepsilon)$ в уравнении (1.5) имеет вид (1.8), где $\gamma = c_p/c_v = \text{const}$. Тогда функции $G(V, S)$, $T(V, S)$ в (14.5) будут таковы (см. [118]):

$$G(V, S) = (a^2/\gamma) e^{S/c_v} V^{-\gamma}; \quad T(V, S) = \beta e^{S/c_v} V^{1-\gamma}, \quad (14.24)$$

где $a^2 = \text{const}$, $\beta = a^2/(R\gamma)$, R — универсальная газовая постоянная, $R = c_p - c_v$. Подставляя выражения (14.24) для функций G и T в (14.23), (14.17) и используя затем формулу (14.9), легко находим, что $B(p_0, \rho) = 0$. Этот результат совпадает с указанным в § 13 для уравнения (13.36).

Пример 2. Рассмотрим двучленное уравнение состояния

$$p = \beta \rho \varepsilon + \rho_0 c_0^2 (\rho/\rho_0 - 1)^k, \quad (14.25)$$

где β , ρ_0 , c_0 , k — постоянные. При $k = 1$ уравнение (14.25) применено в работах [216, 34, 90, 128]. Член $(\rho/\rho_0 - 1)^k$ при $k \neq 1$ использован, например, в [73, 264]. С помощью формулы (14.9) легко вычислить

$$B(p_0, \rho) = -\left(kc_0^2/(\beta\rho_0)\right)(k-1)(\rho/\rho_0 - 1)^{k-2}. \quad (14.26)$$

Из (14.26) следует, что условие (13.35) выполняется, например, при $c_0 = 0$ (идеальный газ); либо при $k = 1$, $c_0 \neq 0$ (двучленное уравнение состояния (14.25)).

Пример 3. Уравнение состояния [264]

$$p = [a + b/(\varepsilon/(I_0 \eta^2) + 1)] \varepsilon \rho + A \xi + B \xi^2, \quad (14.27)$$

где $\eta = \rho/\rho_0 = \xi + 1$; a , b , A , B , I_0 , I_s , ρ_0 — постоянные, характеризующие материал. Формула (14.27) является частью модифицированного уравнения состояния Тиллотсона из [264] и справедлива для вещества в сжатом ($\rho/\rho_0 > 1$) или в любом холодном состоянии ($\varepsilon < I_s$). Полная формула для $B(p_0, \rho)$ в этом случае имеет очень сложный вид. На практике величину $B(p_0, \rho)$ вычисляли по специальной подпрограмме, в которой сначала находили с использованием аналитических выражений производные F_ρ , $F_{\rho\varepsilon}$ и т. д. при заданных ρ , ε , а затем значение функции $B(p_0, \rho)$ по формуле (14.9). На рис. 25 приведены картины поверхностей $p = p(x, t)$, полученные при решении задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.3), (14.27), (13.1) по схеме Лакса [234] (рис. 25, а) и одношаговой

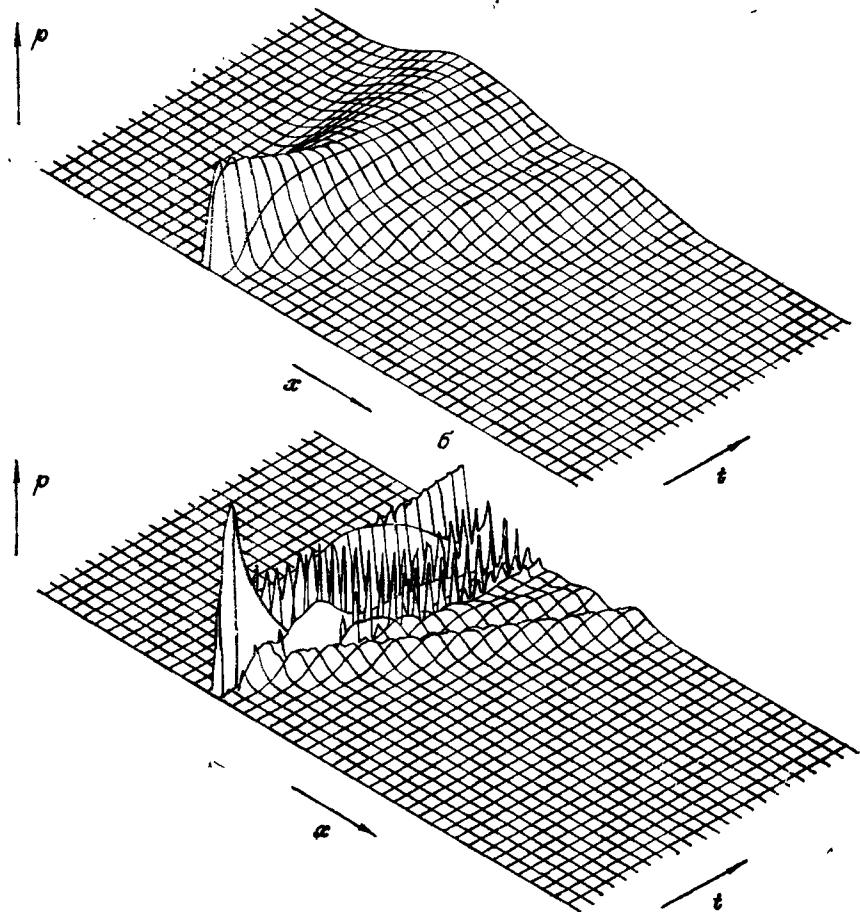


Рис. 25. Поверхности $p = p(x, t)$.

схеме Лакса — Вендрофа [116] (рис. 25, б). Из рисунка видно, что разностное решение для давления при отсутствии К-согласованности существенно отличается от точного решения, которое в данном случае представляет собой плато постоянного давления. В этом примере расчета ошибки в давлении достигали 18% для схемы Лакса и 50% для схемы Лакса — Вендрофа.

14.2. Построение алгоритмов подавления К-несогласованности в схемах первого порядка

Проиллюстрируем основную идею алгоритмов на ряде примеров. В [282] алгоритм подавления К-несогласованности построен на примере схемы Лакса [234]. Заметим, что эта схема используется как промежуточная в таких известных разностных ме-

тодах, как двухшаговый метод Лакса — Вендрофа [116] и схема Русанова третьего порядка точности [123, 259]. Аналогично строятся алгоритмы подавления К-несогласованности для ряда других известных схем первого порядка точности.

Рассмотрим П-форму п. д. п. схемы Лакса (13.32). Результат квазилинейаризации уравнений (13.32) есть уравнения (14.1) — (14.3). Уравнения (14.1) — (14.2) К-согласованы. Перепишем (14.3) в виде

$$\begin{aligned} & [0,5u_0^2 + f(p_0, \rho) + \rho\partial f(p_0, \rho)/\partial\rho] (\partial\rho/\partial t + u_0\partial\rho/\partial x) = \\ & = \mu [0,5u_0^2 + f(p_0, \rho) + \rho\partial f(p_0, \rho)/\partial\rho] (\partial^2\rho/\partial x^2) + \mu B(p_0, \rho) (\partial\rho/\partial x)^2, \end{aligned} \quad (14.28)$$

где функция $B(p_0, \rho)$ определяется по формуле (14.4). Сравнение (14.28) с уравнениями (14.1) и (14.2) наводит на мысль рассмотреть следующую аппроксимацию уравнения энергии, чтобы получить К-согласованность п. д. п. в случае $B(p_0, \rho) \neq 0$:

$$\partial\rho E/\partial t + \partial(\rho u + \rho u E)/\partial x = -\mu B(p_0, \rho) (\partial\rho/\partial x)^2. \quad (14.29)$$

Аппроксимируем левую часть уравнения (14.29) по схеме Лакса, а правую — по любой простейшей явной разностной формуле. В результате будем иметь модифицированную схему Лакса, п. д. п. которой К-согласовано при любом виде уравнения состояния (1.5) или (1.6). Введем обозначение

$$q = \mu B(p, \rho) (\partial\rho/\partial x)^2. \quad (14.30)$$

Предположим, следуя [28, 279], что явная (одно- или многошаговая) разностная схема, аппроксимирующая систему (1.11), (1.9), после исключения промежуточных шагов интегрирования представима в виде

$$p^{n+1} = H_1(u^n, p^n, \rho^n, \varepsilon^n, T_1, h, \tau); \quad (14.31)$$

$$(\rho u)^{n+1} = H_2(u^n, p^n, \rho^n, \varepsilon^n, T_1, h, \tau); \quad (14.32)$$

$$(\rho E)^{n+1} = H_3(u^n, p^n, \rho^n, \varepsilon^n, T_1, h, \tau), \quad (14.33)$$

где $u^n = u(x, t^n)$ и т. д., $t^n = n\tau$, τ — временной шаг, n — целое число, $n = 0, 1, 2, \dots$, T_1 — оператор сдвига вдоль оси x , т. е. $T_1 u(x, t) = u(x + h, t)$, $T_1^m u(x, t) = u(x + hm, t)$, h — шаг равномерной сетки на оси x .

С учетом (14.29) разностное уравнение энергии (14.33) исходной схемы модифицируется по формуле

$$(\rho E)^{n+1} = H_3(u^n, p^n, \rho^n, \varepsilon^n, T_1, h, \tau) - \tau q^n, \quad (14.34)$$

где q^n — аппроксимация корректирующего члена q (14.30) при $t = t^n$. В случае схемы Лакса в [279] рассмотрена следующая аппроксимация для q^n :

$$q^n = \mu^n B(p^n, \rho^n) [((T_1 - T_{-1})/(2h))\rho^n]^2, \quad (14.35)$$

$$\text{где } \mu^n = h^2/(2\tau) - (\tau/2)(u^n)^2. \quad (14.36)$$

Величина B в (14.35) при использовании уравнения состояния (1.5) вычисляется по формуле (14.9). В [282] предложено вместо (14.34) применять разностную аппроксимацию вида

$$(\rho E)^{n+1} = H_s(u^n, p^n, \rho^n, \varepsilon^n, T_1, h, \tau) - \tau(T_{1/2} - T_{-1/2})R^n/h, \quad (14.37)$$

где

$$R = \int_0^1 q(\xi, t) d\xi, \quad (14.38)$$

[0, 1] есть промежуток интегрирования на оси x . Используя различные квадратурные формулы для вычисления интеграла (14.38), получим разные приближения к функции q . В частности, в [282] предложено использовать для вычисления R правило трапеций.

Рассмотрим теперь Г-формы п. д. п. схем методов «жидкость в ячейке» (7.4) и «распад разрыва» (7.12), (7.13). Применяя к обеим частям уравнений этих систем операцию квазилинеаризации L и переходя затем к П-форме п. д. п., как это сделано в § 13, снова получим систему вида (13.33), где μ вычисляется теперь по формуле (13.41). Таким образом, чтобы получить К-согласованность п. д. п. рассматриваемых схем в случае $B(p_0, \rho) \neq 0$, нужно модифицировать разностное уравнение энергии по формуле (14.34) или (14.37), (14.38), где при расчете аппроксимации корректирующего члена q величина μ при $t = t^n$ вычисляется в соответствии с (13.41) по формуле

$$\mu^n = 0.5|u^n|(h - \tau|u^n|), \quad (14.39)$$

u^n — значение скорости при $t = t^n$. С учетом результатов § 13 корректирующий член (14.30), где μ вычисляется по формуле (13.41), применим также в случае метода «крупных частиц» [12], когда на лагранжиевом этапе расчета этого метода реализуют разностные формулы первого порядка точности.

В [279] в приближении линеаризованных разностных уравнений проведен анализ устойчивости модифицированной схемы Лакса (14.34) — (14.36), при этом «замораживалась» также величина $\beta = \mu B \partial \rho / \partial x$. Из этого анализа в [279] сделан вывод о незначительном влиянии вводимого члена на устойчивость счета. При выполнении неравенства $a_{23}\beta < 0$, где $a_{23} = (1/\rho)\partial F/\partial e$, анализ устойчивости [279] дает повышение устойчивости по сравнению со случаем $\beta = 0$. Аналогичные выводы получены в [279] при анализе устойчивости схемы С. К. Годунова [33] в случае $u > c > 0$ (сверхзвуковое течение).

14.3. Подавление К-несогласованности в схемах второго порядка

Конечно-разностные схемы второго порядка точности широко используют при численном моделировании течений сжимаемой жидкости [118, 120]. Например, схему Мак-Кормака [245] и ее многочисленные модификации часто применяют в аэродинамических расчетах. Из результатов § 13 следует, что ширина контактной по-

лосы при реализации схем второго порядка точности растет с увеличением времени t существенно медленнее, чем первого. Недостатком схем второго порядка аппроксимации является присутствие в разностном решении паразитических осцилляций за фронтом сильного разрыва. Для контактного разрыва анализ п. д. п. в § 13 привел к решению (13.21), (13.22), которое содержит интеграл от функции Эйри $\text{Ai}(\xi)$, являющийся, как известно [157], осциллирующей функцией при $\xi < 0$ (см. рис. 24). Как показано в [282], при наличии К-несогласованности разностных схем второго порядка точности в одномерной контактной полосе имеют место осцилляции не только плотности, но и таких непрерывных функций, как давление и скорость (см. рис. 25, б). При этом амплитуда осцилляций, вызванных К-несогласованностью, оказалась весьма значительной (до 50% точных значений давления в контактной полосе) при использовании схем Лакса — Вендрофа [235, 116, 118, 120] и Мак-Кормака [245, 241, 270].

Далее на примере этих двух схем обобщена основная идея алгоритмов подавления К-несогласованности, описанных в предыдущем пункте, на случай схем второго порядка аппроксимации.

Как показано в [282], амплитуда колебаний давления и скорости при наличии К-несогласованности убывает с ростом времени t . Поэтому для оценки величины этой амплитуды существенным является определение ее величины при $t = \tau$, т. е. на первом временишаге. Поскольку для системы (1.1) — (1.3) рассматриваются начальные данные (13.1), можно их использовать для вычисления сеточного решения при $t = \tau$. Покажем, что если уравнение состояния (1.5) или (1.6), не удовлетворяющее условию (13.35), имеет не слишком сложный вид, то можно получить явные выражения для ошибок в разностных решениях для давления и скорости в контактной полосе при $t = \tau$. С этой целью возьмем уравнение состояния

$$p = a\rho e + \sum_{k=1}^m B_k (\rho - \rho_0)^k, \quad (14.40)$$

где a, B_k, ρ_0 — постоянные, причем $a > 0, B_k \geq 0, m$ — целое число, $m \geq 1$. Рассмотрим для определенности случай $m = 2$. Пусть абсцисса правой границы j -й ячейки на оси x совпадает с начальной абсциссой x_0 контактного разрыва. Возьмем в соответствии с формулами (13.1) следующее начальное сеточное распределение величин ρ, p, u, e :

$$\rho_i^0 = \begin{cases} \rho_1, & i \leq j \\ \rho_2, & i > j \end{cases}; \quad p_i^0 = p_0; \quad u_i^0 = u_0; \quad e_i^0 = f(p_0, \rho_i^0), \quad (14.41)$$

где, согласно формулам (1.6), (14.40),

$$f(p, \rho) = \left(p - \sum_{k=1}^2 B_k (\rho - \rho_0)^k \right) / ap. \quad (14.42)$$

Тогда при $t = \tau$ после некоторых алгебраических выкладок в случае одностадийной схемы Лакса — Вендрофа получим точный результат

$$\begin{aligned} \rho_i^1 &= \rho_1, \quad i \leq j - 1, \quad \rho_i^1 = \rho_2, \quad i \geq j + 2, \\ \rho_j^1 &= \rho_1 + \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) (\kappa^2 - \kappa), \quad \rho_{j+1}^1 = \rho_2 - \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) (\kappa^2 + \kappa), \\ u_i^1 &= u_0 \forall i, \end{aligned} \quad (14.43)$$

$$p_i^1 = \begin{cases} p_0, & i \leq j - 1, \quad i \geq j + 2; \\ p_0 + \frac{1}{4} B_2 (\rho_2 - \rho_1)^2 \kappa (\kappa^2 - 1) (\kappa - 2), & i = j; \\ p_0 + \frac{1}{4} B_2 (\rho_2 - \rho_1)^2 \kappa (\kappa^2 - 1) (\kappa + 2), & i = j + 1, \end{cases}$$

где $\kappa = u_0 \tau / h$ — безразмерная скорость в контактной полосе. Заметим, что в силу условия устойчивости схемы Лакса — Вендрофа всегда $|\kappa| < 1$.

Схему Мак-Кормака для системы (1.11) запишем в виде

$$\tilde{\vec{w}}_i^{n+1} = \vec{w}_i^n - (\tau/h) (\vec{\varphi}_{i+1}^n - \vec{\varphi}_i^n); \quad (14.44)$$

$$\vec{w}_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\vec{w}_i^n + \tilde{\vec{w}}_i^{n+1}) - \frac{1}{2} (\tau/h) (\tilde{\vec{\varphi}}_i^{n+1} - \tilde{\vec{\varphi}}_{i-1}^{n+1}), \quad (14.45)$$

где $\vec{\varphi}_i^n \equiv \vec{\varphi}(\vec{w}_i^n)$, $\tilde{\vec{\varphi}}_i^{n+1} \equiv \vec{\varphi}(\tilde{\vec{w}}_i^{n+1})$ и т. д. Из уравнения (14.44) при $t = \tau$ (т. е. при $n = 0$ в формуле (14.44)) имеем

$$\tilde{\rho}_i^1 = \begin{cases} \rho_1, & i \leq j - 1, \\ \rho_2, & i \geq j + 1, \\ \rho_1 - \kappa (\rho_2 - \rho_1), & i = j; \end{cases} \quad \tilde{u}_i^1 = u_0 \forall i; \quad (14.46)$$

$$\tilde{p}_i^1 = \begin{cases} p_0, & i \leq j - 1, \quad i \geq j + 1; \\ p_0 + B_2 (\rho_1 - \rho_2)^2 \kappa (\kappa + 1), & i = j. \end{cases} \quad (14.47)$$

С учетом формул (14.46), (14.47), (14.41) получаем из уравнения (14.45) следующее сеточное решение при $t = \tau$:

$$\rho_i^1 = \begin{cases} \rho_1, & i \leq j - 1; \\ \rho_2, & i \geq j + 2; \\ \rho_1 + (1/2) (\rho_2 - \rho_1) (\kappa^2 - \kappa), & i = j, \quad u_i^1 = u_0 \forall i; \\ \rho_2 - (1/2) (\rho_2 - \rho_1) (\kappa^2 + \kappa), & i = j + 1; \end{cases} \quad (14.48)$$

$$p_i^1 = \begin{cases} p_0, & i \leq j - 1, \quad i \geq j + 2; \\ p_0 + (1/4) B_2 (\rho_1 - \rho_2)^2 \kappa (\kappa + 1) [(\kappa - 1)(\kappa - 2) - 2\kappa a], & i = j; \\ p_0 + (1/4) B_2 (\rho_1 - \rho_2)^2 \kappa (\kappa + 1) [(\kappa - 1)(\kappa + 2) + 2\kappa a], & i = j + 1. \end{cases}$$

Пусть $\Delta p^1 = \max_i |p_i^1 - p_0|$. Используя формулы (14.43), (14.48),

легко проверить, что в случае одношаговой схемы Лакса — Вендрофа и схемы Мак-Кормака справедливы соотношения

$$\Delta p^1 = \begin{cases} |p_j^1 - p_0|, & \kappa < 0; \\ |p_{j+1}^1 - p_0|, & \kappa > 0. \end{cases} \quad (14.49)$$

Обозначим значения величин Δp^1 для схем Лакса — Вендрофа и Мак-Кормака соответственно через $(\Delta p^1)_{LW}$, $(\Delta p^1)_M$. Пусть $\delta = (\Delta p^1)_M / (\Delta p^1)_{LW}$. Используя формулы (14.43), (14.48), нетрудно показать, что при $-1 < \kappa < 0$ имеет место неравенство $\delta > 1$. Если κ положительно, причем $\kappa < 1$, то при

$$\kappa > \min \{ ((3+a)/2) - (((3+a)/2)^2 - 2)^{1/2}, \\ [-((1+a)/2) + ((1+a)^2/4 + 2)^{1/2}] \} \quad (14.50)$$

также $\delta > 1$. Заметим, что при $a > 0$ правая часть неравенства (14.50) является положительным числом меньше единицы. Таким образом, если κ удовлетворяет любому из неравенств $-1 < \kappa < 0$ и (14.50), схема Мак-Кормака (14.44), (14.45) генерирует более значительные колебания давления в контактной полосе, чем одношаговая схема Лакса — Вендрофа. В процессе вывода формулы (14.48) можно было видеть, что появление в выражениях (14.48) слагаемого $2\kappa a$ вызвано использованием в «корректоре» (14.45) величин с тильдой [см. формулы (14.46), (14.47)].

Рассмотрим вопрос о построении алгоритма подавления К-несогласованности в случае одношаговой схемы Лакса — Вендрофа. Следуя [280], получим из (13.38) П-форму п. д. п. с помощью стандартного алгоритма, описанного в § 2,

$$U(\partial\rho/\partial t + u_0\partial\rho/\partial x) = -\mu(u_0, h, \tau)\partial^2/\partial x^2(U\partial\rho/\partial x), \quad (14.51)$$

где коэффициент μ определяется по формуле (13.40). Перепишем систему (14.51) в виде

$$U\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + u_0\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) = -\mu U\frac{\partial^3\rho}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu B\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right] - \mu B\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}.$$

По аналогии с п. 14.2 с целью восстановления К-согласованности п. д. п. разностного уравнения энергии в схеме Лакса — Вендрофа рассмотрим следующую аппроксимацию уравнения энергии:

$$\partial\rho E/\partial t + \partial(pu + \rho u E)/\partial x = q, \quad (14.52)$$

$$\text{где } q = (\partial/\partial x)[\mu B(\partial\rho/\partial x)^2] + \mu B(\partial\rho/\partial x)(\partial^2\rho/\partial x^2). \quad (14.53)$$

Используя теорему 1 из § 13, нетрудно объединить (14.53) и формулы для q , полученные в п. 14.2 для схем первого порядка точности, в более общую формулу

$$q = (-1)^r \mu \sum_{k=0}^{r-1} C_r^k \left\{ \frac{\partial^{r-k-1}}{\partial x^{r-k-1}} \left[B(p_0, \rho) \frac{\partial\rho}{\partial x} \right] \right\} \left(\frac{\partial^{k+1}\rho}{\partial x^{k+1}} \right), \quad (14.54)$$

где r — порядок аппроксимации разностной схемы,

$$\frac{\partial B(p_0, \rho)}{\partial x} = [dB(p_0, \rho)/d\rho] \frac{\partial \rho}{\partial x};$$

$$\partial^0 g(x, t) / \partial x^0 \equiv g(x, t); \quad 0! = 1; \quad C_r^k = r! / (k!(r-k)!).$$

Тогда вместо исходного уравнения энергии в системе (1.11), (1.9) нужно аппроксимировать в контактной полосе уравнение (14.52), где q определяется по формуле (14.54).

Рассмотрим теперь вопрос о построении алгоритмов подавления К-несогласованности в схеме Мак-Кормака (14.44), (14.45). В [27, 28, 280] реализованы два различных подхода к построению алгоритмов подавления К-несогласованности при использовании схем типа «предиктор — корректор». Первый из них предполагает последовательное подавление К-несогласованности на каждом из промежуточных этапов. Второй подход основан на подавлении К-несогласованности лишь при вычислении итогового вектора решения \vec{w}^{n+1} на этапе «корректор». Далее покажем, что эти подходы приводят к различным вычислительным алгоритмам, даже если сравнивать только формулы этапа «корректор».

Алгоритм 1. С целью подавления осцилляций в промежуточных профилях давления и скорости применим к схеме «предиктор» (14.44) общую процедуру, изложенную в § 13. Для этого сначала выпишем Г-форму п. д. п. схемы (14.44):

$$\vec{w}_t + \vec{\varphi}_x = -(\tau/2) \vec{w}_{tt} - (h/2) \vec{\varphi}_{xx}. \quad (14.55)$$

Применяя к обеим частям равенства (14.55) операцию квазилинейаризации L , определенную в § 13, получим систему

$$U(\rho_t + u_0 \rho_x) = -(\tau/2)(U\rho_t)_t - (hu_0/2)(U\rho_x)_x, \quad (14.56)$$

где вектор U определяется по формуле (13.6), а u_0 — постоянное значение скорости из (13.1). Используя общую процедуру вывода П-формы п. д. п. из Г-формы п. д. п., легко получить из уравнения (14.56) П-форму п. д. п.:

$$U(\rho_t + u_0 \rho_x) = -\mu_0 U \rho_{xx} - \mu_0 (dU/d\rho) \rho_x^2, \quad (14.57)$$

где

$$\mu_0 = 0.5h(1+\kappa), \quad \kappa = u_0 \tau / h, \quad (14.58)$$

$$dU/d\rho = \{0, 0, B(p_0, \rho)\}^T, \quad (14.59)$$

функция $B(p_0, \rho)$ определяется формулой (14.4). Из (14.57) следует, что для восстановления К-согласованности п. д. п. уравнения энергии необходимо с учетом (14.59) рассмотреть следующую аппроксимацию уравнения энергии на этапе «предиктор»:

$$(\rho E)_t + (pu + \rho u E)_x = \mu_0 B(p_0, \rho) \rho_x^2. \quad (14.60)$$

Предположим, что в результате использования аппроксимации (14.60)

$$\tilde{p}_i^{n+1} = p_0, \quad \tilde{u}_i^{n+1} = u_0 \forall i. \quad (14.61)$$

Тогда из разностного уравнения импульса схемы (14.45) легко найти, что $u_i^{n+1} = u_0$ для всех i . Перепишем разностное уравнение энергии схемы «корректор» (14.45) с учетом соотношений (14.61) и того, что $u_i^{n+1} = u_0$:

$$(\rho e)_i^{n+1} + \rho_i^{n+1} u_0^2 / 2 = (1/2) [(\rho e)_i^n + (u_0^2 / 2)(\rho_i^n + \tilde{\rho}_i^{n+1}) + (\tilde{\rho}e)_i^{n+1}] - \\ - (\kappa / 2) [(\tilde{\rho}e)_i^{n+1} - (\tilde{\rho}e)_{i-1}^{n+1} + (u_0^2 / 2)(\tilde{\rho}_i^{n+1} - \tilde{\rho}_{i-1}^{n+1})]. \quad (14.62)$$

Воспользуемся теперь разностными уравнениями схемы «предиктор» (14.44). Пусть при $t = t^n u_i^n = u_0$, $p_i^n = p_0 \forall i$. Тогда из разностного уравнения энергии схемы «предиктор» следует

$$(\tilde{\rho}e)_i^{n+1} + \tilde{\rho}_i^{n+1} u_0^2 / 2 = (\rho E)_i^n - \kappa [(\rho E)_{i+1}^n - (\rho E)_i^n]. \quad (14.63)$$

Используя равенство (14.63), после некоторых выкладок получим из формулы (14.62) следующее разностное уравнение:

$$(\rho e)_i^{n+1} + \rho_i^{n+1} u_0^2 / 2 = (\rho E)_i^n - 0,5 \kappa [(\rho E)_{i+1}^n - (\rho E)_{i-1}^n] + \\ + 0,5 \kappa^2 [(\rho E)_{i+1}^n - 2(\rho E)_i^n + (\rho E)_{i-1}^n]. \quad (14.64)$$

Применяя операцию квазилинеаризации L к разностному уравнению неразрывности в схеме (14.45), будем иметь

$$\rho_i^{n+1} = 0,5(2\rho_i^n - \kappa(\rho_{i+1}^n - \rho_i^n)) - 0,5\kappa[(\rho_i^n - \rho_{i-1}^n) - \kappa(\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \\ + \rho_{i-1}^n)]. \quad (14.65)$$

Подстановка в равенство (14.64) вместо ρ_i^{n+1} выражения (14.65) даст

$$(\rho e)_i^{n+1} = (\rho e)_i^n - 0,5\kappa [(\rho e)_{i+1}^n - (\rho e)_{i-1}^n] + 0,5\kappa^2 [(\rho e)_{i+1}^n - 2(\rho e)_i^n + \\ + (\rho e)_{i-1}^n]. \quad (14.66)$$

П-форма п. д. п. уравнения (14.66) имеет вид

$$(\rho e)_i + u_0(\rho e)_x = -\mu_1(\rho e)_{xxx}, \quad (14.67)$$

где

$$\mu_1 = (h^2/6) u_0 - (\tau^2/6) u_0^3. \quad (14.68)$$

Применяя операцию квазилинеаризации L к дифференциальному уравнению (14.68), легко найти, что для восстановления К-согласованности п. д. п. уравнения энергии схемы (14.45) необходимо ввести в уравнение энергии корректирующий член q по формулам (14.52), (14.53), где нужно положить $\mu = \mu_1$. Таким образом, при введении корректирующего члена на этапе «предиктор» в соответствии с (14.60) функциональная форма корректирующего члена q для этапа «корректор» совпадает с выражением для q (14.53), найденным для одностаговой схемы Лакса — Бендрофа.

Алгоритм 2. Положив в формуле (7.14) $\alpha = 1$, $\beta = 0$ в соответствии со схемой Мак-Кормака (14.44), (14.45), запишем Г-форму п. д. п. этой схемы в виде

$$\vec{w}_t + \vec{\Phi}(\vec{w})_x = \frac{h^2}{6} \{-\sigma^2 \vec{w}_{ttt} - \vec{\Phi}(\vec{w})_{xxx} + \frac{3}{2} [\mathcal{B}(\vec{\varphi}_x^0, \vec{\varphi}_x^1)]_x\}, \quad (14.69)$$

где $\sigma = \tau/h$, $\vec{\varphi}_0 = \vec{w} + \vec{\sigma}\vec{\varphi}(w)$, $\vec{\varphi}_1 = -\vec{\sigma}\vec{\varphi}(w)$, а \mathcal{B} есть билинейное симметричное отображение, $\mathcal{B} = \vec{\varphi}''(w)$. Необходимо найти результат применения операции квазилинеаризации L к уравнению (14.69), чтобы затем из требования К-согласованности п. д. п. (14.69) вывести структурный вид корректирующего члена q . Сначала получим более подробное выражение для (14.69). Подставим в (14.45) вместо $\tilde{\vec{w}}_i^{n+1}$ правую часть уравнения (14.44) и разложим величины \vec{w}_i^n , $\vec{\varphi}_i^n$, $\vec{\varphi}_{i+1}^n$ в ряды Тейлора относительно точки с индексами (i, n) в плоскости (x, t) . $\vec{\varphi}_i^{n+1}$, $\vec{\varphi}_{i-1}^{n+1}$ разложим пока относительно точки $(i, n+1)$. Удерживая члены лишь первого и второго порядков малости относительно h , τ , будем иметь из (14.45) уравнение

$$\vec{w}_t + (\tau/2)\vec{w}_{tt} + (\tau^2/6)\vec{w}_{ttt} + (1/2)\vec{\varphi}_x + (1/2)\tilde{\vec{\varphi}}_x^{n+1} = (h/12)(3\vec{\varphi}_{xx}^{n+1} - h\vec{\varphi}_{xxx}^{n+1} - 3\vec{\varphi}_{xx} - h\vec{\varphi}_{xxx}). \quad (14.70)$$

В уравнении (14.70) $\tilde{\vec{\varphi}}^{n+1} = \vec{\varphi}(w^{n+1})$. Найдем выражения для $\vec{\varphi}_{xx}^{n+1}$, $\vec{\varphi}_{xxx}^{n+1}$ через производные функций $\vec{w}(x, t^n)$, $\vec{\varphi}(w(x, t^n))$. С учетом формулы (14.44) введем в рассмотрение вектор

$$\vec{v} = \vec{w} - \tau(\vec{\varphi}_x + 0,5h\vec{\varphi}_{xx}). \quad (14.71)$$

Ясно, что $\vec{v} = \vec{v}(w_1, w_2, w_3)$. Пусть $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}^T$. Тогда

$$v_i = v_i(w_1, w_2, w_3); \quad i = 1, 2, 3, \quad (14.72)$$

где в соответствии с формулами (1.9)

$$w_1 = \rho, \quad w_2 = \rho u, \quad w_3 = \rho E, \quad \vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}^T.$$

По формуле Тейлора имеем

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}(v_1, v_2, v_3) &= \vec{\varphi}(v_1^0, v_2^0, v_3^0) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v_j} \Big|_{v^0} (v_j - v_j^0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v^0} (v_i - v_i^0)(v_j - v_j^0) + \dots \end{aligned} \quad (14.73)$$

Положим в формуле (14.73) с учетом определения (14.71)

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \{v_1, v_2, v_3\}^T = \vec{w} - \tau(\vec{\varphi}_x + 0,5h\vec{\varphi}_{xx}), \\ \vec{v}^0 &= \vec{w}(x, t^n). \end{aligned} \quad (14.74)$$

Дифференцируя затем обе части равенства (14.73) нужное число раз, получим приближенные выражения производных $\vec{\varphi}_{xx}^{n+1}$, $\vec{\varphi}_{xxx}^{n+1}$

через производные функций $\vec{w}(x, t^n)$, $\vec{\varphi}(\vec{w}(x, t^n))$. Введем общепринятое обозначение

$$A = \vec{\partial \varphi} / \vec{\partial w} = \|a_{ik}\| = \|\partial \varphi_i / \partial w_k\|.$$

Выражения для a_{ik} в случае использования уравнения состояния (1.5) даются формулами (1.14); $H_3 = \|\partial^2 \varphi_3 / \partial w_i \partial w_j\|$, по определению, является матрицей Гессе, соответствующей функции $\varphi_3(w_1, w_2, w_3)$ (см., например, [270]). Приведем выражения для элементов матрицы H_3 , поскольку они понадобятся нам в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial w_1^2} &= \frac{\partial a_{31}}{\partial w_1} = \frac{u}{\rho} \left[2E + 2 \frac{p}{\rho} - 2 \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} (5u^2 - 4E) + \right. \\ &\quad \left. + u \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \varepsilon} \left(\frac{u^2}{\rho} - \frac{E}{\rho} \right) + F_{ee} \left(\frac{u^2}{\rho} - \frac{E}{\rho} \right)^2 \right] \right]; \\ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial w_1 \partial w_2} &= \frac{\partial a_{31}}{\partial w_2} = \frac{\partial a_{32}}{\partial w_1} = -\frac{1}{\rho} \left(E + \frac{p}{\rho} - \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \frac{E}{\rho} \right) - \\ &\quad - \frac{u^2}{\rho^3} [-4\rho F_e + \rho^2 F_{ee} + \rho F_{ee} (u^2 - E)]; \end{aligned} \tag{14.75}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial w_1 \partial w_3} &= \frac{\partial a_{31}}{\partial w_3} = \frac{\partial a_{33}}{\partial w_1} = -\frac{u}{\rho} \left[1 + \frac{2}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \varepsilon} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} (u^2 - E) \right]; \\ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial w_3^2} &= \frac{\partial a_{33}}{\partial w_3} = \frac{u}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2}; \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial w_2^2} = \frac{\partial a_{32}}{\partial w_2} = -3 \frac{u}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{u^3}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2}; \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial w_3 \partial w_2} = \\ &= \frac{\partial a_{33}}{\partial w_2} = \frac{\partial a_{32}}{\partial w_3} = \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right) - \frac{u^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Используя определение (14.74) вектор-функций \vec{v} , \vec{v}^0 , легко показать, что

$$\begin{aligned} L(v_1 - v_1^0) &= -\tau(u_0 \rho + 0,5 h u_0 \rho_x)_x; \\ L(v_2 - v_2^0) &= -\tau(u_0^2 \rho + 0,5 h u_0^2 \rho_x)_x; \\ L(v_3 - v_3^0) &= -\tau\{u_0(\varepsilon + 0,5 u_0^2) + 0,5 h [u_0 \rho (\varepsilon + 0,5 u_0^2)]_x\}_x, \end{aligned} \tag{14.76}$$

где L — операция квазилинейаризации. Используя формулы (14.76), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 La_{3j} L(v_j - v_j^0) &= -\tau u_0^2 [\rho \varepsilon_x + (\varepsilon + u_0^2/2) \rho_x] - \\ &\quad - (\tau u_0 h/2) [(F_\rho + 0,5 u_0^2) \rho_{xx} + (\rho \varepsilon)_{xx} + (F_e/\rho)(2\rho_x \varepsilon_x + \rho \varepsilon_{xx})]. \end{aligned} \tag{14.77}$$

Из (14.75), (14.76) после некоторых вычислений следует

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 L(\partial^2 \varphi_3 / \partial w_i \partial w_j) L(v_i - v_i^0) L(v_j - v_j^0) = \tau^2 u_0^3 (F_{\rho\rho} \rho_x^2 + 2F_{\rho e} \rho_x \epsilon_x - (2/\rho) F_{e\rho} \rho_x \epsilon_x + F_{ee} \epsilon_x^2). \quad (14.78)$$

Подвергнув квазилинеаризации L остальные члены в (14.73), (14.70), будем иметь результат квазилинеаризации п. д. п. уравнения энергии схемы Мак-Кормака (14.44), (14.45) в виде

$$[\rho(\epsilon + 0.5 u_0^2)]_t + u_0 [\rho(\epsilon + 0.5 u_0^2)]_x = -(\tau^2/6) [\rho(\epsilon + 0.5 u_0^2)]_{ttt} - (h^2/6) u_0 [\rho(\epsilon + 0.5 u_0^2)]_{xxx} + \mu_2 (F_{\rho\rho} \rho_{xx} + F_{e\rho} \epsilon_{xx} + (2/\rho) \times F_{e\rho} \rho_x \epsilon_x)_x, \quad (14.79)$$

где

$$\mu_2 = (u_0 h^2 / 4) (\kappa + \kappa^2), \quad \kappa = u_0 \tau / h. \quad (14.80)$$

Преобразуем последний член в правой части (14.79), используя предположение о том, что при $t = t^n u(x, t^n) = u_0$, $p(x, t^n) = p_0$. Продифференцируем дважды по x обе части равенства (1.5), предполагая, что в левой его части $p = \text{const}$. После некоторых вычислений найдем

$$F_{\rho\rho} \rho_{xx} + F_{e\rho} \epsilon_{xx} + (2/\rho) F_{e\rho} \rho_x \epsilon_x = (F_e / \rho) B(p_0, \rho) \rho_x^2, \quad (14.81)$$

где функция $B(p_0, \rho)$ определяется формулой (14.4) и может быть вычислена, например, по формуле (14.9) при использовании уравнения состояния (1.5). С учетом соотношения (14.81) формулу (14.79) можно переписать в виде

$$\mathcal{E}(p_t + u_0 \rho_x) = -\mu_1 \mathcal{E} \rho_{xxx} - \mu_1 [(dB(p_0, \rho) / d\rho) \rho_x^3 + 3B \rho_x \rho_{xxx}] + \mu_2 [(F_e / \rho) B(p_0, \rho) \rho_x^2]_x, \quad (14.82)$$

где $\mathcal{E} = \epsilon + \rho^{\theta f}(p_0, \rho) / \partial \rho + 0.5 u_0^2$, а μ_1 определяется по формуле (14.68). В процессе вывода (14.82) от Г-формы п. д. п. (14.79) сначала перешли к П-форме п. д. п. с помощью стандартной процедуры, описанной в § 2. Из (14.82) получаем следующую формулу для члена q в уравнении (14.52):

$$q = q_{\text{кор}} = \frac{\partial}{\partial x} [(\mu_1 - \mu_2 F_e / \rho) B(p_0, \rho) \rho_x^2] + \mu_1 B \rho_x \rho_{xxx}. \quad (14.83)$$

Следует подчеркнуть, что величина (14.83) вводится только на этапе «корректор» схемы Мак-Кормака.

§ 15. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

В этом параграфе содержатся некоторые результаты применения изложенных в § 13 способов локализации контактных разрывов при расчете как сравнительно простого течения, содержащего только один разрыв — контактный, так и более сложных конфи-

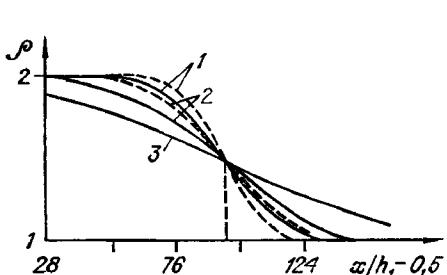


Рис. 26. Расчет по схеме Лакса при различных h :

1 — h_1 ; 2 — $3h_1$, 3 — $9h_1$

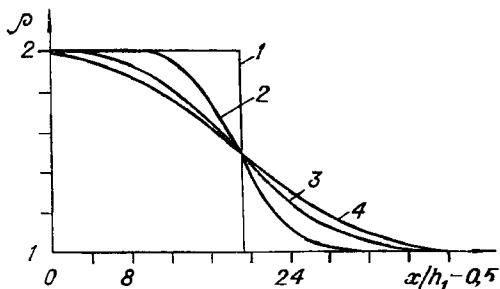


Рис. 27. Неподвижный контактный разрыв Схема Лакса.

1 — $t=0$, 2 — 0,09; 3 — 0,27; 4 — 0,45.

тураций, включающих кроме контактного разрыва ударные волны и волны разрежения.

Приведем сначала некоторые результаты расчетов задачи о распаде разрыва (1.11), (1.9), (1.8), (13.1) по разностным схемам первого и второго порядков точности. Пусть K — число Куранта $K = \max(|u| + c)\tau/h$. На рис. 26 представлены результаты расчета по схеме Лакса при $K = 0,5$ (сплошные кривые) и $K = 0,9$ (штриховые линии) на момент времени, когда контактный разрыв прошел около $70h_1$ [281]. В этом расчете $h_1 = 1/126$, $p_0 = u_0 = 1$, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 1$, $\gamma = 2$. В пределах точности графика все пять кривых численного решения пересекаются в той же ячейке, где находится истинный контактный разрыв. Заметим, что ширина контактной полосы на сетке $h = h_1$, $K = 0,5$ составляет, согласно рис. 26, примерно $75h_1$, т. е. величину, сравнимую с размером промежутка интегрирования. Таким образом, точность локализации контактного разрыва на основе определения центральной линии контактной полосы оказывается весьма высокой.

Из формул (13.29), (13.34) следует, что при фиксированных h , u_0 толщина контактной полосы увеличивается с уменьшением шага τ , т. е. с уменьшением числа Куранта. Рис. 26 наглядно подтверждает этот эффект. На рис. 27 показан эффект размазывания неподвижного контактного разрыва ($u_0 = 0$) при вычислении по схеме Лакса, указывавшийся в § 13. В то же время аналогичные расчеты с $u_0 = 0$ по схеме «распад разрыва» и FLIC подтвердили полностью вывод об отсутствии «размазывания» неподвижного контактного разрыва при расчете по обеим указанным схемам. На рис. 28 линиями, параллельными оси x , заштрихована область существенного изменения плотности в контактной полосе при использовании схемы Лакса с числом Куранта $K = 0,5$. Толщина X заштрихованной области для фиксированного t вычислялась по формулам (13.29), (13.34) при $h = 1/126$. Середина каждого отрезка длины X , параллельного оси x , помещалась на линии контактного разрыва $dx/dt = u_0$ с учетом свойств решения (13.14), (13.15). Параллельными линиями, проведенными под углом к оси x ,

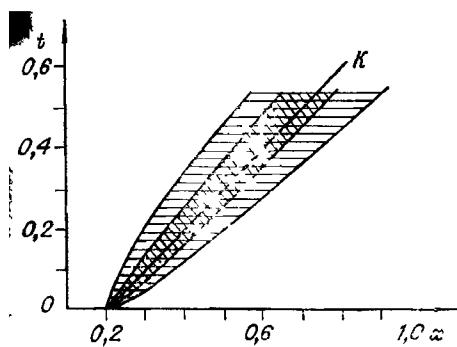


Рис. 28. Контактная полоса в плоскости (x, t) .
 K — линия $dx/dt = u_0$.

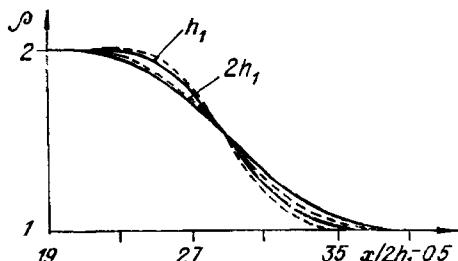


Рис. 29. График расчета по схеме С. К. Годунова.

на рис. 28 заштрихована аналогичная область, полученная по одн шаговой схеме Лакса — Вендрофа; величины K и h те же, что и в случае схемы Лакса. Толщина X подсчитывалась в соответствии с табл. 2. Из рис. 28 видно, что при $t = 0,54$ толщина по Прандтлю контактной полосы X при использовании схемы Лакса — Вендрофа примерно в три раза меньше толщины X , полученной по схеме Лакса.

На рис. 29, аналогичном рис. 26, изображены графики, полученные по методу С. К. Годунова [33] и методу FLIC [210]. Здесь $h_1 = 1/80$, $p_0 = u_0 = 1$, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 1$, $K = 0,5$ (сплошные), $K = 0,9$ (штриховые линии).

В § 7 указано необходимое условие существования центра размазанной ударной волны при использовании метода FLIC [210], имеющее вид $\tau/h = \text{const}$. С другой стороны, из формулы для ξ (13.15) следует независимость центральной линии L_{KD} контактной полосы от величины τ/h . Таким образом, налицо существенное различие свойств разностной схемы в ударной волне и контактной полосе.

При использовании в расчетах одн шаговой схемы Лакса — Вендрофа из формул (13.21), (13.27) можно получить условие неотрицательности $\rho(x, t)$:

$$\rho_1/\rho_2 > [a(\xi_1) + 2/3]/[a(\xi_1) - 1/3] \cong 0,21529. \quad (15.1)$$

Неравенство (15.1) хорошо предсказывает появление отрицательных плотностей при численном интегрировании по схеме Лакса — Вендрофа системы (1.1) — (1.3). Например, при $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 5$ ($\rho_1/\rho_2 = 0,200$) расчет по этой схеме дает отрицательные давления и плотности.

На рис. 30 сплошной линией нанесено решение (13.21) при $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 4$, кружками — численное решение по схеме Лакса — Вендрофа при $K = 0,9$. Штриховыми линиями показано точное решение при $t = 0$ и $t = 0,54$ (в этом примере расчета $h = 1/40$, $u_0 = p_0 = 1$, $\gamma = 2$). На рис. 31 сплошные линии изображают реше-

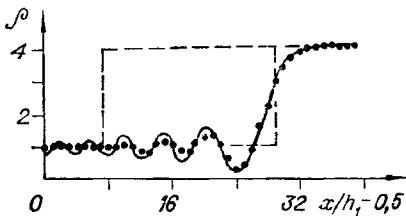


Рис. 30. Расчет движения контактного разрыва по схеме Лакса — Вендрофа.

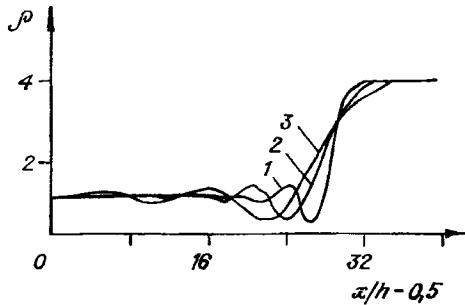


Рис. 31. Расчет по схеме Лакса — Вендрофа при различных h :
1 — $0,5h$; 2 — h ; 3 — $2h$

ние той же задачи, что и на рис. 30, по схеме Лакса — Вендрофа при $h = 1/40$. Установленный в § 13 колебательный характер решения для плотности ρ в области слева от контактного разрыва (см. формулу (13.20) и рис. 24, 30, 31) объясняет присущие схемам второго порядка точности осцилляции в указанной области при решении более общей задачи о распаде разрыва, включающей при $t > 0$ волну разрежения, контактный разрыв и ударную волну [220, 266, 69].

На примерах расчетов в [281] показана применимость описанных выше алгоритмов локализации I—III контактных разрывов в одномерных течениях. При этом погрешность локализации не превышает величины шага сетки h . На центральной линии контактной полосы L_k значение плотности ρ наиболее слабо зависит от величин шагов h , τ аналогично локализации центра конечно-разностной ударной волны (см. § 7).

Рассмотрим поведение численных решений по методу частиц в ячейках [201, 150, 160, 4, 137, 107, 275] в окрестности одномерного контактного разрыва. В работе [201] показано, что в пределе, когда число частиц в каждой ячейке стремится к бесконечности, расчет перепоса частиц по методу Харлоу эквивалентен таковому по некоторой разностной схеме первого порядка точности, совпадающей со схемой метода FLIC [210]. В связи с этим представляло интерес сравнение свойств метода частиц в ячейках и метода FLIC при решении задачи (1.11), (1.9), (13.1) с контактной границей, когда $N \rightarrow \infty$, где N — минимальное число частиц в ячейке. Из формулы для ширины X контактной полосы, приведенной в табл. 2 для метода FLIC, следует, что X возрастает пропорционально \sqrt{t} при расчетах по методу FLIC и, согласно вышеизведенным соображениям, по методу Харлоу. Однако имеющийся опыт использования метода частиц в расчетных задачах с контактными разрывами [4, 137] показывает, что метод Харлоу в отличие от известных чисто эйлеровых схем сохраняет постоянство ширины контактной полосы. Это, несомненно, важное положительное свойство метода Харлоу.

Таблица 3

Метод частиц в ячейках, частицы-точки				Метод частиц в ячейках, частицы-квадраты				Метод FLIC		
N_1	4	20	40	N_1	1	2	8	t/τ	$h^{-1}X_p$	$h^{-1}X_I$
t/τ				t/τ						
20	3,20	3,26	3,47	20	2,66	2,93	3,23	20	5,10	4,85
40	4,00	4,71	4,57	40	4,42	4,35	4,59	40	7,04	6,86
60	5,33	5,00	5,00	60	3,98	4,96	4,93	60	8,55	8,41
80	6,40	5,41	5,71	80	7,22	5,83	5,62	80	9,83	9,71
100	6,40	6,67	6,96	100	4,83	6,91	7,03	100	10,97	10,85
120	6,40	6,15	6,15	120	5,76	5,90	5,86	120	11,99	11,89
140	5,33	5,52	5,61	140	3,94	6,84	5,45	140	12,94	12,84
160	5,33	6,15	6,27	160	3,00	5,91	5,50	160	13,82	13,73
180	5,33	4,85	4,85	180	2,94	6,30	5,25	180	14,64	14,56
200	6,40	4,71	5,08	200	2,54	4,59	4,45	200	15,43	15,35

Рассмотрим задачу о распаде разрыва (1.11), (1.9), (13.36), (13.1) при начальных условиях

$$p_1 = p_2 = \rho_1 = u_1 = u_2 = 1, \quad \rho_2 = 5. \quad (15.2)$$

Численное интегрирование при данных (15.2) осуществлялось на промежутке $0 \leq x \leq 1,5$ с постоянными шагами $h = 0,02$, $\tau = 0,005$, $\gamma - 1 = 1$ в уравнении состояния (13.36). Обозначим через N_1 и N_2 число частиц в ячейке с плотностью соответственно ρ_1 и ρ_2 при $t = 0$. В табл. 3 отображены результаты расчетов задачи о распаде разрыва при начальных значениях (15.2) по трем методам: 1) частиц-точек Харлоу [150], 2) частиц-квадратов [275], 3) FLIC [210]. Толщину X_I рассчитывали в соответствии с формулой табл. 2, а «разностную» толщину X_p — по формуле $X_p = |\rho_1 - \rho_2| 2h / (\max |\rho_{i+1} - \rho_{i-1}|)$. Табл. 3 содержит числовые значения величины X_p (кроме крайнего правого столбца). В этой серии расчетов N_2 взято зависящим от N_1 в соответствии с формулой $\rho_1/\rho_2 = N_1/N_2$. Такое соотношение числа частиц в ячейках с различными начальными плотностями оптимально при расчетах по методу частиц в ячейках [150, 4].

Профили численного решения на момент $t = 200\tau$ по методу частиц для случая $N_1 = 40$, $N_2 = 200$ нанесены на рис. 32 сплошной линией,

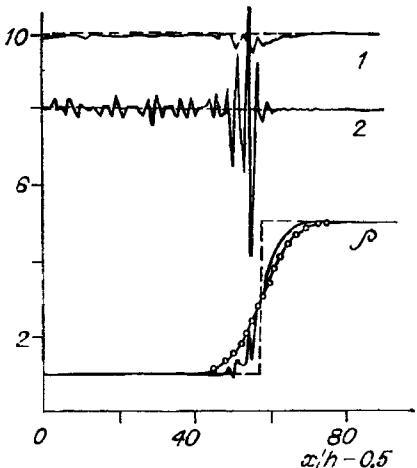


Рис. 32. Расчет движения контактного разрыва по методам частиц и FLIC.

1 — $10u$; 2 — $10p - 2$.

точное решение — штриховой, решение по методу FLIC — линией со светлыми кружками. Отметим присутствие сильных колебаний давления в области за контактным разрывом при использовании частиц-точек (в случае метода FLIC получено разностное решение для давления и скорости, совпадающее с точным решением (13.2)). Из табл. 3 следует: в случаях частиц-точек и частиц-квадратов толщина X , сначала растет, а с момента $t = t_*$ начинает осциллировать около постоянного значения, составляющего примерно $6h$. При реализации метода FLIC [210] формула (13.29) очень хорошо описывает реальное поведение пироны контактной полосы. С другой стороны, формула (13.29), как видно из табл. 3, оказывается неприменимой для метода частиц в ячейках. Точного теоретического объяснения этого эффекта пока нет, однако ясно, что он связан прежде всего с использованием лагранжевых частиц в методе Харлоу. Каждая частица, двигаясь со скоростью контактного разрыва u_0 , переносит информацию о состоянии газа на одной из сторон контактного разрыва. В работе [275] рассмотрено влияние геометрических размеров и формы частиц на свойства численных решений, получаемых по методу частиц в ячейках, в окрестности контактного разрыва. В частности, показано: если характерный размер каждой частицы достаточно велик, то с увеличением времени t ширина контактной полосы возрастает, однако более медленно, чем в методе FLIC.

Во многих задачах величины ρ_1, ρ_2 по обе стороны контактного разрыва заранее неизвестны, поэтому описанный в § 13 алгоритм III локализации контактных разрывов имеет ограниченную область применения. Рассмотрим подробнее вопросы реализации алгоритма II из § 13. В случае схем первого порядка точности, удовлетворяющих условиям теоремы 1 из § 13, этот алгоритм сводится к определению координат точек максимума градиента $|\partial\rho/\partial x|$ в пределах контактных полос. Величина $|\partial\rho/\partial x|$ может быть большой не только в зоне «размазывания» контактного разрыва, но и в зонах «размазывания» ударных волн и в волнах сжатия. В этой связи при построении алгоритмов локализации контактных разрывов для сложных течений, содержащих кроме указанного вида разрывов ударные волны и волны сжатия, целесообразно использовать имеющуюся информацию об общих свойствах исследуемого течения, а также данные экспериментов.

Рассмотрим для примера конфигурацию задачи о распаде разрыва, содержащую ударную волну, контактный разрыв и волну разрежения (см. рис. 1, a). Из общих свойств решения одномерной задачи о распаде известно [118], что в некоторой окрестности контактного разрыва давление и скорость постоянны. При численном решении этой задачи по схемам сквозного счета такого постоянства p , u в общем случае нет из-за погрешностей разностного решения. Как показывают численные эксперименты (см., например, рис. 22), а также многочисленные примеры расчетов в [218–220, 266, 217], при наличии K -согласованности п. д. п. разностных схем разности $|p_{i+1}^n - p_{i-1}^n|$, $|u_{i+1}^n - u_{i-1}^n|$ в окрестности контактного разрыва не-

велики. В этой связи в [279] предложено определять положение контактных полос при численных расчетах одномерных задач о распаде путем проверки неравенств

$$|\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n| > \delta_1 \rho_i^n, \quad |g_{i+1}^n - g_{i-1}^n| < \delta_2 |g_i^n|, \quad (15.3)$$

где δ_1, δ_2 — безразмерные положительные постоянные, подбираемые эмпирическим путем, g — одна из функций u, p . Проверка выполнения неравенства $|\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n| > \delta_1 \rho_i^n$ служит для исключения из рассмотрения подобласти постоянного течения.

В случае схем второго порядка точности, удовлетворяющих условиям теоремы 1 из § 13, в разностном решении для плотности присутствуют осцилляции. В терминах переменной ξ [см. формулу (13.22)], эти осцилляции имеют место при $\xi \leq \xi_0$, где $\xi_0 < -1$ (см. § 13). В подобласти $\xi > \xi_0$, как показывает практика расчетов, разностное решение, получаемое, например, по схеме Лакса — Вендрофа [116], не содержит осцилляций, как и решение (13.21). В этой связи при определении координат точек максимума величины $|\partial^2 \rho / \partial x^2|$ в пределах контактных полос наряду с неравенствами (15.3) предварительно проверялось выполнение некоторого локального условия монотонности разностного решения

$$\operatorname{sign}(\rho_{i+1}^n - \rho_i^n) = \operatorname{sign}(\rho_i^n - \rho_{i-1}^n), \quad r = 2. \quad (15.4)$$

На рис. 33 показаны результаты локализации ударной волны и контактного разрыва при расчете конфигурации A задачи о рас-

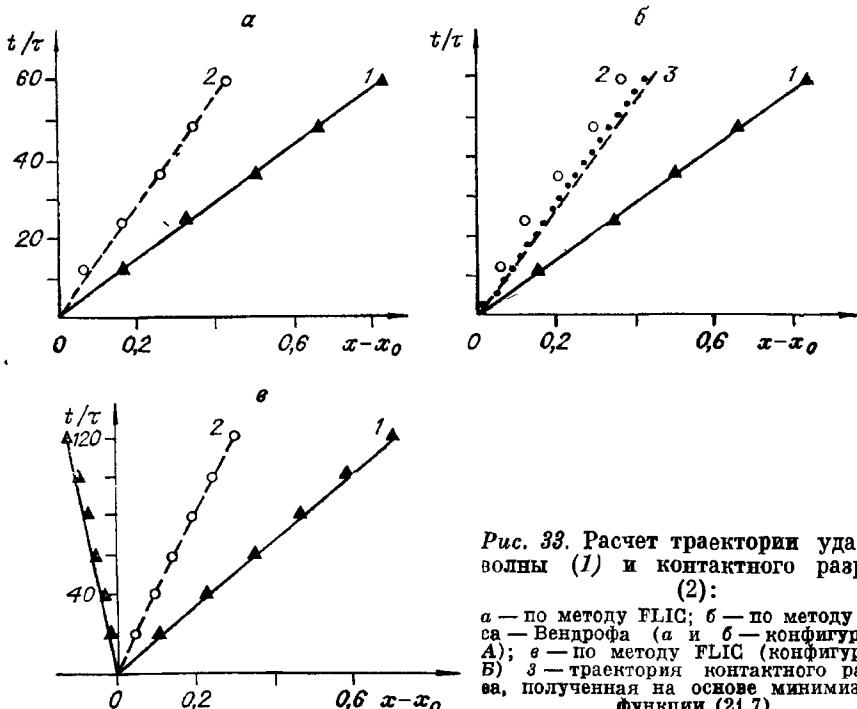


Рис. 33. Расчет траектории ударной волны (1) и контактного разрыва (2):

a — по методу FLIC; *b* — по методу Лакса — Вендрофа (*a* и *b* — конфигурация A); *c* — по методу FLIC (конфигурация B); *3* — траектория контактного разрыва, полученная на основе минимизации функции (21.7).

паде разрыва. В неравенствах (15.3), как и в [279], использовались значения $\delta_1 = 0,01$, $\delta_2 = 0,05$, $g_i \equiv u_i^n$. Начальные данные для этих расчетов взяты из [266] (см. также рис. 22); применялось уравнение состояния идеального газа (1.8) с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$. Последовательность вычислений в подпрограмме дифференциального анализатора была следующей. Сначала при заданном $t = t^n$ находили положение контактного разрыва по $\max |\partial^r \rho / \partial x^r|$ с учетом неравенств (15.3), (15.4). Затем определяли положение фронта ударной волны. Для этого «просматривали» ячейки сетки на оси x в поисках той, где достигла максимума величина $|u_{i+1}^n - u_{i-1}^n|$, аппроксимирующая на равномерной сетке градиент $|2h\dot{u}/\partial x|$, при выполнении неравенства $\partial u / \partial x < 0$ (см. также в § 12 описание дифференциального анализатора для задач высокоскоростного взаимодействия тел). В случае конфигурации A ячейки просматривали в направлении слева направо, начиная от контактного разрыва; при конфигурации B (см. рис. 33, в) — справа налево начиная от контактного разрыва. При этом определяли положение второй ударной волны в течении. Заметим, что в силу малости перепада плотностей по обе стороны контактного разрыва (в данном примере расчета $\rho_2 - \rho_1 \approx 0,016$, $\rho_1 = 4,7546$, см. [279]; $h = 0,02$) и наличия осцилляций в численном решении дифференциальный анализатор по $\max |\rho_r|$ здесь становится неприменимым. В этой связи абсцисса x_k^{n+1} контактного разрыва (кружки на рис. 33, в) вычислена по формуле $x_k^{n+1} = x_k^n + \tilde{u}_i t$, где i — номер ячейки на оси x , в которой находилась точка-«маркер» контактной границы при $t = t^n$, \tilde{u}_i — значение скорости, определенное на эйлеровом этапе расчета метода FLIC (см. [150, 210] и § 9). Сплошными и штриховыми линиями на рис. 33 изображены траектории соответственно ударных волн и контактных разрывов, вычисленные с высокой точностью путем решения нелинейных алгебраических соотношений, представляющих собой динамические условия совместности на разрывах.

Приведем теперь некоторые примеры расчетов для иллюстрации эффективности алгоритмов подавления К-несогласованности, описанных в § 14. На рис. 34, взятом из [282], показаны результаты расчета по модифицированной схеме Лакса (14.35) — (14.38) задачи (1.11), (1.9), (13.1) при использовании двучленного уравнения состояния (14.25). Из анализа рис. 34, в следует, что профиль плотности в контактной полосе в пределах точности графика совпадает при использовании алгоритма подавления К-несогласованности с тем профилем, который получен при наличии К-согласованности, т. е. когда $k = 1$ в уравнении состояния (14.25). Рис. 35, взятый из [279], иллюстрирует расчет по методу FLIC (сплошные линии) задачи (1.11), (1.9), (13.1) с применением уравнения состояния Тиллотсона (14.27). Треугольниками на рис. 35 панесено численное решение, полученное при реализации алгоритма подавления К-несогласованности (14.34), (14.35), (14.39). На рис. 36 приведены результаты расчета по методу FLIC (сплошные линии) задачи о высокоскоростном нормальном ударе полубесконечного снаряда

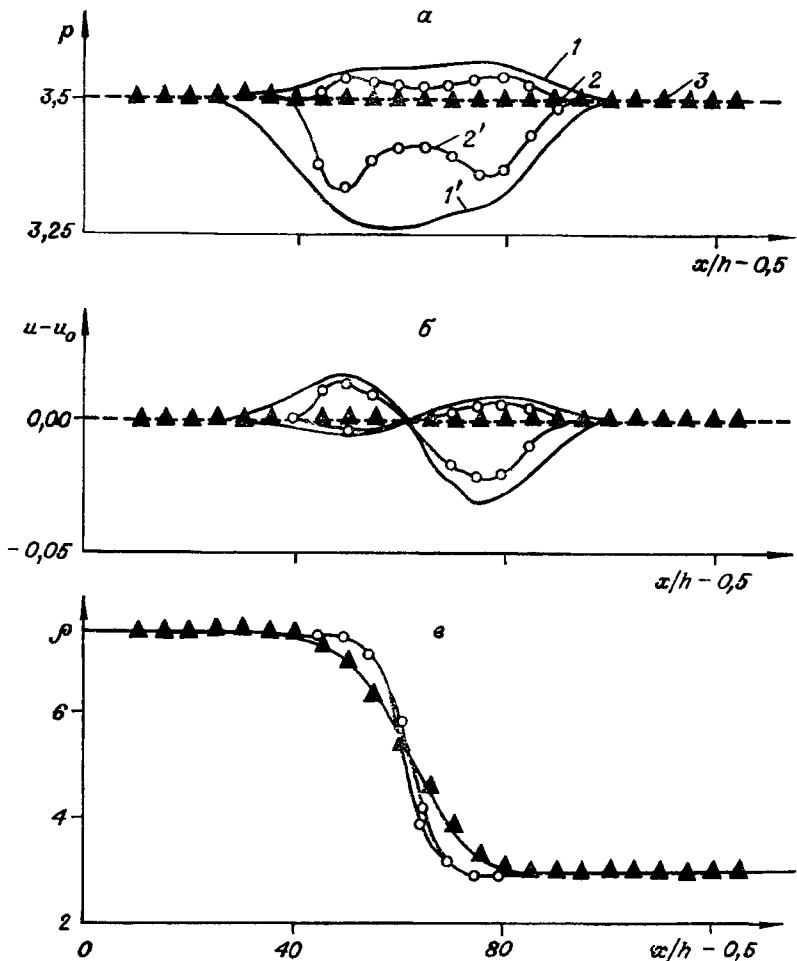


Рис. 34. Графики численных решений в контактной полосе:

α — давления; *β* — скорости; *γ* — плотности. 1, 1' — схема Лакса, 2, 2' — схема С. К. Годунова ($1, 2 - h=0,5$; $1', 2' - h=2$), 3 — численное решение по схеме Лакса при $h=2$ в уравнении (14.25) в сочетании с алгоритмом подавления К-несогласованности. Штриховая линия — точное и разностное решения по схемам Лакса и С. К. Годунова при $h=1$ в уравнении (14.25). Момент времени $t=100t$; $\tau=0,002$; $h=0,02$

из алюминия о полуబесконечную преграду из того же материала. При $t=0$ всюду в расчетной области полагали $p=0$, $\rho=\rho_0$, $u_0=1$ см/мкс или 3 см/мкс — скорость снаряда. Использовали уравнение состояния Тиллотсона (14.27). В этих расчетах корректирующий член q (14.35), (14.39) вводили в схему метода «жидкость в ячейке» только в тех узловых точках на оси x , в которых выполнялись неравенства (15.3). Это делали с целью экономии машинного времени, затрачиваемого на вычисление функции $B(p_0, \rho)$ по формуле (14.9). Результаты локализации ударных волн и контактного разрыва в этом течении с помощью описанной выше

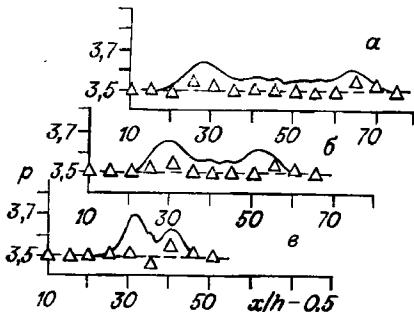


Рис. 35. Расчет по методу FLIC при использовании уравнения состояния Тиллотсона:
а — $t=60\tau$; б — 40τ ; в — 20τ .

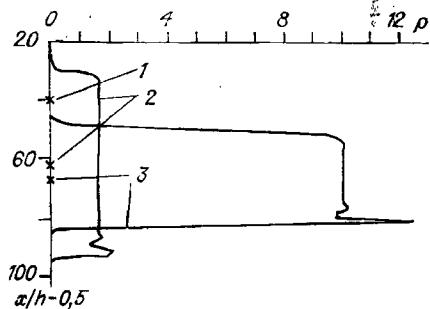


Рис. 36. Расчет высокоскоростного удара по методу FLIC.
1 — $t=0$; 2 — $u_0=1$, $t=0,8$; 3 — $u_0=3$, $t=0,36$.

программы дифференциального анализатора показаны на рис. 33, в для скорости соударения $u_0 = 1$ см/мкс.

Представленные на рис. 37, а графики получены при применении алгоритма подавления К-несогласованности (14.52), (14.53) в [280]; численное решение задачи (1.11), (1.9), (13.1), замыкаемой уравнением состояния Тиллотсона (14.27), осуществлялось по одноступенчатой схеме Лакса — Вендрофа [116]. Величины, входящие в (14.53), аппроксимировали с помощью известных разностных формул (см., например, [120])

$$((\partial/\partial x)[\mu B(\partial\rho/\partial x)^2])_i^n \cong [(\mu B)_{i+1/2}^n (\rho_{i+1}^n - \rho_i^n)^2 - \\ - (\mu B)_{i-1/2}^n (\rho_i^n - \rho_{i-1}^n)^2]/(h^3),$$

$$B_{i\pm 1/2} = 0,5(B_i + B_{i\pm 1}), \quad (\partial\rho/\partial x)_i^n \cong (\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n)/(2h),$$

$$(\partial^2\rho/\partial x^2)_i^n \cong (\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n)/(h^2).$$

Рис. 37, б иллюстрирует результаты решения той же задачи о распаде по схеме Мак-Кормака (см. также [280]). (Сплошная линия — численное решение по исходной разностной схеме; штриховая — точное решение.)

Так как член q , определяемый формулой (14.54), имеет недивергентный вид, его использование в расчетах по дивергентным схемам, рассмотренным в § 14, приводит к парушению сохранения полной энергии жидкости в расчетной области. Как показывает практика расчетов (см. [27, 279—280]), размер соответствующей относительной ошибки в энергии невелик: во всех расчетах в [27, 279—280] он не превышал 1% для схем первого порядка точности и 0,1% для второго.

Заметим, что в [278] предложены еще два метода уменьшения ошибок в давлении и скорости в одномерной контактной полосе. Первый опирается на введенные в [28, 26, 278] определения К-согласованности разностных схем для задач газодинамики. Второй метод основан на аппроксимации нестационарного уравнения $\partial p/\partial t +$

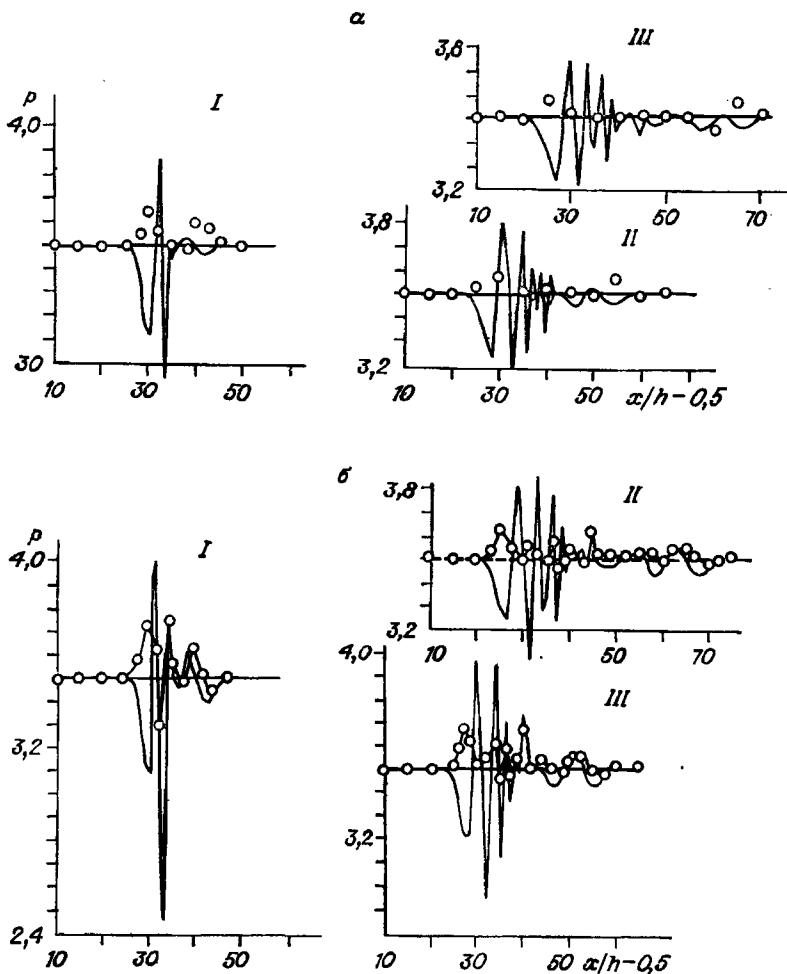


Рис. 37. Расчет движения контактного разрыва с использованием уравнения (14.27):

а — по схеме Лакса — Вендрофа; б — по схеме Мак-Кормака.
I — $t=20\tau$; II — 40τ ; III — 60τ .

$+ u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ [116] вместо уравнения для энергии (1.3). Оба эти метода, как свидетельствуют численные эксперименты [278], эффективны при достаточно малых $|p_{i+1}^n - p_{i-1}^n|$, $|u_{i+1}^n - u_{i-1}^n|$ в контактной полосе. Устойчивость модифицированных схем, описанных в § 14, имела место при обычно применяемых в газодинамических расчетах по исходным явным схемам значениям числа Куранта $K = \max(|u| + c) \tau / h \leqslant 1$.

На рис. 38 отображено влияние использования алгоритмов подавления К-несогласованности на точность локализации контактного разрыва. Вдоль оси ординат отложена абсолютная погрешность Δx_k локализации контактного разрыва с помощью алгоритма 2 из § 13; $\Delta x_k = x_k - x_{\delta a}$, x_k — абсцисса контактного разрыва в соответствии

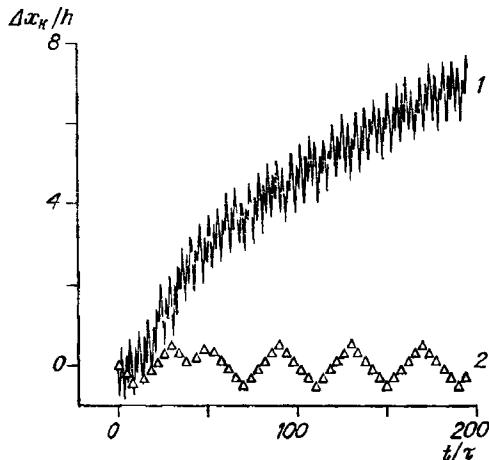


Рис. 38. Погрешность локализации контактного разрыва как функция времени при использовании алгоритма 2 в схеме Лакса. Уравнение состояния (14.27).

1 — результат локализации при отсутствии алгоритма подавления К-несогласованности, 2 — результат применения алгоритма (14.30), (14.36), (14.38).

с точным решением, x_{θ_0} — абсцисса центра ячейки, в которой достигается $\max |\partial \rho / \partial x|$.

Из рис. 38 видно, что в случае отсутствия алгоритма подавления К-несогласованности величина Δx_k растет и в момент

$t = 200\tau$ достигает $8h$; в то же время при наличии алгоритма подавления К-несогласованности величина $|\Delta x_k|$ не превышает $0,5h$ в течение всего расчета. В [278] приведены аналогичные графики для ряда других разностных схем первого и второго порядков точности, рассмотренных в § 14. Эти результаты также указывают на существенное улучшение точности локализации контактных разрывов, полученной с помощью алгоритмов подавления К-несогласованности.

Применение описанных в § 14 алгоритмов подавления К-несогласованности позволяет существенно (в 5—15 раз) уменьшить ошибки в определении давления в контактной полосе. Расчетные формулы этих алгоритмов не снижают порядка аппроксимации используемой разностной схемы, просты в программировании и легко могут быть включены в существующие газодинамические расчетные программы, реализующие известные конечно-разностные схемы сквозного счета.

Глава 5

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ

В начале главы 2 перечислялся ряд известных методов локализации ударных волн по результатам сквозного счета, в том числе предложенный Миранкером и Пиронпо [248, 249, 258]. Этот метод, названный ими «глобальным методом подгонки скачка», сводит локализацию сильного разрыва в решении задачи Коши для уравнения Бюргерса к минимизации некоторого интегрального функционала. В настоящей главе метод Миранкера — Пиронпо детально проанализирован с целью выяснения точности локализации ударных волн. Разработанный в [248, 249] оптимизационный подход обобщен на случай локализации ударных волн в численных решениях одно-

Первых задач газовой динамики, вычисленных по конечно-разностным схемам сквозного счета. Предложена модификация метода Миранкера — Пиронно, которая использует в вариационном принципе информацию об аппроксимационной вязкости разностной схемы, получаемую из первого дифференциального приближения. С помощью методов классического вариационного исчисления показано, что применение такого принципа дает траекторию, совпадающую с траекторией истинного разрыва для случая ударной волны, движущейся с постоянной скоростью. На основе модификации метода Миранкера — Пиронно предложен еще один алгоритм, который сводит задачу локализации разрыва к задаче минимизации функции одной переменной.

Исследования модификаций метода Миранкера — Пиронно, выполненные в § 17—20, позволили выявить ряд преимуществ описываемых в настоящей главе оптимизационных процедур локализации разрывов по сравнению с дифференциальными анализаторами ударных волн, рассмотренными в главах 2, 3. Эти преимущества перечислены в начале § 21, посвященного вопросам построения оптимизационных методов локализации контактных разрывов в одномерных течениях газа. Такие методы, в отличие от дифференциальных анализаторов, рассмотренных в § 13, применимы также в случаях неоднородных копечных градиентов давления и скорости в контактной полосе. И наконец, в § 22 метод Миранкера — Пиронно обобщен на случай локализации ударных волн в двумерном течении, рассчитываемом с помощью схем сквозного счета. При этом использованы полярные координаты, и для фиксированного t задача определения линии разрыва сведена к некоторой одномерной задаче безусловной оптимизации.

Заметим, что рассматриваемые в настоящей главе методы применимы только в тех задачах, для которых известно наличие ударных волн в рассчитываемом течении. Если же ударная волна возникает в течении в процессе численного расчета задачи, анализируемые далее оптимизационные методы локализации следует комбинировать с методом определения места и времени возникновения скачка. Для этой цели можно использовать концепцию адаптирующейся к потоку сетки, изложенную в § 8 и существенно использующую понятие центра волны сжатия, который в момент возникновения разрыва переходит в центр конечно-разностной ударной волны. Материал главы основан на результатах работ [248, 249, 23, 24, 277].

§ 16. АНАЛИЗ МЕТОДА МИРАНКЕРА — ПИРОННО

Следуя [248, 249], рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} = 0 \quad (16.1)$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (16.2)$$

Функция $\varphi(u)$ в уравнении (16.1) предполагается дважды непрерывно дифференцируемой, причем $\varphi''(u) \neq 0$. Будем считать, что функция $u_0(x)$ в условии (16.2) имеет разрыв в точке x_0 , $-\infty < x_0 < \infty$, и

$$u_0(x) = \begin{cases} U_1(x), & x < x_0, \\ U_2, & x \geq x_0, \end{cases} \quad (16.3)$$

где $U_2 = \text{const}$, $U_1(x)$ — непрерывная функция такая, что $U_1(x_0 - 0) - U_2 > 0$. Кроме того, относительно функции $U_1(x)$ предполагается, что при $0 < t \leq T$ в решении $u(x, t)$ не возникают другие ударные волны. Как и в [248, 249], введем две вспомогательные задачи Коши P^+ и P^- для уравнения (16.1) с решением u^+ и u^- соответственно. В качестве начальных данных возьмем функции u_0^+ и u_0^- в $C^1(-\infty, \infty)$, причем $u_0^- \equiv u_0$ для $x < x_0$, $u_0^+ \equiv u_0$ для $x > x_0$. Функции u_0^+ и u_0^- выбираются так, чтобы решения u^+ и u^- не содержали ударных волн при $0 \leq t \leq T$. Пусть далее, как и в [248, 249], C^+ (соответственно C^-) — характеристика в задаче P^+ (соответственно P^-), выходящая из точки $(x_0, 0)$. Пусть уравнения этих характеристик есть $x(t) = C^\pm(t)$. Далее пусть $\Omega = \{(x, t) | C^+(t) \leq x \leq C^-(t), 0 \leq t \leq T\}$. Отметим следующее свойство характеристик C^+ , C^- и Ω : они не зависят от выбора u_0^+ и u_0^- ; кроме того, значения u^+ , u^- в Ω также не зависят от этого выбора. Предположим, что $x = \xi(t)$ — уравнение траектории разрыва в решении задачи (16.1), (16.2). Возьмем некоторую функцию $\zeta(t) \in C^1[0, T]$. Введем функции (см. [248])

$$\begin{aligned} J(\zeta(t), t) = & \{\varphi(u^-(\zeta(t), t)) - \\ & - \varphi(u^+(\zeta(t), t))\} / \{u^-(\zeta(t), t) - u^+(\zeta(t), t)\} \end{aligned} \quad (16.4)$$

и

$$F(\zeta(t), \dot{\zeta}(t), t) = J(\zeta(t), t) - \dot{\zeta}(t), \quad (16.5)$$

где $\dot{\zeta}(t) \equiv d\zeta(t)/dt$. Теперь, как и в [248], рассмотрим неотрицательный функционал

$$I(\zeta) = \int_0^T F^2(\zeta(t), \dot{\zeta}(t), t) dt. \quad (16.6)$$

Условие Ренкина — Гюгонио влечет за собой равенство $I(\xi) = 0$. Поскольку при $t = 0$ положение разрыва известно согласно формуле (16.3), можно считать $\xi(0) = x_0$. Положение абсциссы $x = \xi(T)$ в общем случае неизвестно, ее надо найти. Поэтому естественно наложить на правом конце $t = T$ условие трансверсальности [151, 277]

$$2FF_{\dot{\zeta}}|_{t=T} = 0, \quad (16.7)$$

где $F_{\dot{\zeta}} = (\partial/\partial \dot{\zeta}) F(\zeta, \dot{\zeta}, t)$.

Проанализируем следующую вариационную задачу для функционала (16.6):

$$I(\zeta) \rightarrow \min, \quad \zeta(0) = x_0, \quad 2FF_{\zeta} \Big|_{t=T} = 0. \quad (16.8)$$

С учетом формулы (16.3) положим $u_0^+ = U_2$. Тогда с учетом свойств уравнения (16.1) $u^+(x, t) = U_2$. Функцию $u^-(x, t)$, являющуюся решением вспомогательной задачи P^- , можно приближенно определить как решение, полученное по схеме сквозного счета (в [248] для этой цели использована схема Лакса — Вендрофа). Таким образом, в решении $u^-(x, t)$ ударный фронт аппроксируется переходной зоной, занимающей несколько интервалов расчетной сетки на оси x .

Уравнение Эйлера — Лагранжа, соответствующее функционалу (16.6), имеет вид [151, 277]

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{d\zeta}{dt} \frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{\partial F}{\partial t} - F \frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0. \quad (16.9)$$

Используя формулу (16.5), перепишем уравнение (16.9) в виде

$$\ddot{\zeta} - \frac{\partial J}{\partial t} - J \frac{\partial J}{\partial \zeta} = 0. \quad (16.10)$$

В силу конструкции решения $u^-(x, t)$ справедливо соотношение

$$\partial u^- / \partial t = -\varphi'(u^-) \partial u^- / \partial x. \quad (16.11)$$

Используя (16.4), (16.11), легко найти, что

$$\begin{aligned} J_t + JJ_\zeta &= -(u^- - U_2)^{-1} (\partial u^- / \partial x) (\zeta(t), t) \times \\ &\times \langle \{[\varphi(u^-) - \varphi(U_2)] / (u^- - U_2)\} - \varphi'(u^-) \rangle^2. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Возьмем теперь формулу

$$\varphi(U_2) = \varphi(u^-) + \varphi'(u^-) (U_2 - u^-) + 0,5\varphi''(u^*) (U_2 - u^-)^2, \quad (16.13)$$

где $u^* \in [U_2, u^-(\zeta(t), t)]$. С учетом (16.42) и (16.13) перепишем уравнение (16.10) в виде

$$\ddot{\zeta} = -(u^- - U_2) \frac{\partial u^-}{\partial x} (\zeta(t), t) \left[\frac{1}{2} \varphi''(u^*) \right]^2. \quad (16.14)$$

При использовании в качестве $u^-(x, t)$ приближенного решения, полученного по схеме сквозного счета, в зоне слаженной ударной волны $\partial u^- / \partial x < 0$ (см. [118]). Кроме того, здесь функция $u^-(x, t)$ такова, что $u^- > U_2$ в переходной зоне. Поэтому из формулы (16.14) получим: при начальных данных (16.3) всегда $\dot{\zeta} > 0$. Это неравенство означает, что ударная волна, найденная в результате минимизации функционала (16.6), всегда ускоряется независимо от реального поведения истинного разрыва. Таким образом, решение вариационной задачи (16.8) в общем случае не совпадает с истинной траекторией разрыва в решении задачи (16.1), (16.2).

Как и в [248, 249], вариационная задача (16.8) для функционала (16.6) не содержит энтропийное условие

$$\varphi'(u(\xi(t)+0, t)) \leq \dot{\xi}(t) \leq \varphi'(u(\xi(t)-0, t)) \quad (16.15)$$

в виде ограничений. Заметим, что неравенство $u^- > U_2$, которое предполагалось выполненным при доказательстве соотношения $\ddot{\xi} > 0$, влечет за собой выполнение условия возрастания энтропии (16.15), во всяком случае при $\varphi''(u) > 0$ [118]. В этой связи заметим также, что расчеты, представленные в [248, 249] для уравнения Бюргерса (16.1) с $\varphi(u) = 0.5u^2$, подтверждают полученный выше результат $\ddot{\xi} > 0$. С другой стороны, включение условий (16.15) в формулировку задачи оптимизации для функционала (16.6) в виде двух ограничений существенно усложняет численное решение возникающей при этом задачи вариационного исчисления. В данной связи в § 17 предложена и исследована альтернативная задача оптимизации с применением искусственной или аппроксимационной вязкости в основном функционале. При этом использован известный факт, что возрастания энтропии при переходе через ударный фронт можно добиться, вводя члены искусственной вязкости (см., например, [116, 120, 118]).

Теперь возникает естественный вопрос, насколько большой может быть разность $|\xi(t) - \zeta(t)|$. Покажем, следуя [277], что с помощью функционала Миранкера — Пиронно (16.6) в случае локализации ударной волны в некоторой модельной газодинамической задаче можно получить точную формулу для экстремали $\zeta(t)$, дающей решение задачи (16.8).

Рассмотрим пример о движении стационарной ударной волны в газе. Следуя § 5, используем одномерные газодинамические уравнения в переменных Эйлера при наличии искусственной вязкости (5.18):

$$q = ah^2\rho [\min(\partial u / \partial x, 0)]^2,$$

введенной additivno в давление. Рассмотрим решения типа бегущей волны упомянутой системы уравнений, т. е. зависящие только от переменной

$$y = x - Dt - x_0, \quad (16.16)$$

где $D = \text{const}$ — скорость стационарной ударной волны, x_0 — произвольная постоянная. Тогда рассматриваемую систему уравнений можно проинтегрировать один раз. В результате получается система [ср. с (5.4) — (5.6)]

$$\rho(u - D) = C_1 = m; \quad (16.17)$$

$$p + q + m(u - D) = C_2; \quad (16.18)$$

$$m[p/(\rho(\gamma - 1)) + (1/2)(u - D)^2] + (p + q)(u - D) = C_3. \quad (16.19)$$

В уравнениях (16.17) — (16.19) C_1 , C_2 , C_3 — константы интегрирования; γ — постоянная, входящая в уравнение состояния (1.8).

Придадим произвольной величине x_0 , входящей в формулу (16.16), следующий смысл: пусть x_0 — абсцисса центра размазанной ударной волны в решении системы (5.18), (16.17) — (16.19) при $t = 0$, т. е.

$$\xi(0) = x_0. \quad (16.20)$$

Тогда траектория центра размазанной ударной волны при $t \geq 0$ описывается уравнением (см. § 5)

$$x = \xi(t) = Dt + x_0 \quad (16.21)$$

и, таким образом, совпадает с траекторией стационарной ударной волны. Величины, определяющие состояние за и перед фронтом исходной неразмазанной ударной волны, будем помечать **нижними индексами** «1» и «2» соответственно. Как и в § 5, эти состояния предполагаются постоянными. Пусть $V(y) = 1/\rho$. Аналогично § 5 найдем из системы (16.17) — (16.19) ρ , u , p , q как функции удельного объема V . В предположении, что значение m в (16.17) задано, определим постоянные C_2 , C_3 из условий $q(V_1) = q(V_2) = 0$. В результате ρ , u , p , q как функции V запишутся в виде

$$\begin{aligned} \rho &= 1/V, \quad u = mV + D; \\ p &= (\gamma - 1) \frac{m^2}{2} \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{V_1 V_2}{V} + V - \frac{\gamma + 1}{\gamma} (V_1 + V_2) \right]; \quad (16.22) \\ q &= \frac{\gamma + 1}{2} \frac{m^2}{V} (V_2 - V) (V - V_1). \end{aligned}$$

По аналогии с (16.4) — (16.6) введем функционал $I(\zeta)$ по формулам (16.23), (16.5), (16.6), где

$$J(\zeta(t), t) = [(p + \rho u^2)(\zeta(t), t) - (p_2 + \rho_2 u_2^2)] / [(\rho u)(\zeta(t), t) - \rho_2 u_2]. \quad (16.23)$$

В (16.23) предполагается, что p , ρ , u — это решение системы (16.22), (5.18) при начальном условии (см. § 5) $V(0) = 0,5(V_1 + V_2)$. Тогда

$$V(y) = 0,5[V_1 + V_2 + (V_2 - V_1) \sin by], \quad (16.24)$$

где

$$b = (1/h)[(\gamma + 1)/(2a)]^{0.5}. \quad (16.25)$$

Поскольку рассматриваем решения типа бегущей волны, уравнение Эйлера — Лагранжа (16.10) можно переписать так:

$$\ddot{\zeta} - (J - D)(dJ/dy) = 0. \quad (16.26)$$

С учетом формул (16.23), (16.16) введем в рассмотрение функцию $v(t) = \zeta(t) - Dt - x_0$. Тогда уравнение (16.26) примет вид

$$\ddot{v} - ((J - D)(dJ/dy))|_{v=v} = 0. \quad (16.27)$$

Используя формулы (16.22) — (16.23), легко найти, что

$$J(v) = (1/D)[D^2 - (m^2/2)(\gamma + 1)V_2(V - V_1)], \quad (16.28)$$

где

$$V = V(v) = 0,5 [V_1 + V_2 + (V_2 - V_1) \sin bv(t)]. \quad (16.29)$$

С помощью (16.28), (16.29) перепишем уравнение (16.27) в виде

$$\ddot{v} - bc(1 + \sin bv) \cos bv = 0, \quad (16.30)$$

где

$$c = [m^2(\gamma + 1)V_2(V_2 - V_1)/(4D)]^2, \quad (16.31)$$

а постоянная b определяется по (16.25). Будем искать решение уравнения (16.30) в промежутке $[0, T]$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v(0) = 0, \quad J(v(T)) - \dot{v}(T) - D = 0. \quad (16.32)$$

Подстановки $\dot{v} = s(v)$, а также

$$z = bv, \quad \chi = \operatorname{tg}(z/2), \quad t_1 = (\chi + 1)/(\chi - 1),$$

$$\sin^2 \varphi = (a_1^2 + a_2^2)/(a_2^2 + t_1^2), \quad (16.33)$$

позволяют записать общее решение уравнения (16.30)

$$t + A_2 = \sigma(A_1) F(\varphi \backslash \alpha), \quad (16.34)$$

где A_1, A_2 — постоянные интегрирования,

$$\sigma(A_1) = (2/b) [A_1(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(a_1^2 + a_2^2)]^{-1/2};$$

$$\lambda_1 = v + \sqrt{v^2 - v}, \quad \lambda_2 = v - \sqrt{v^2 - v}, \quad v = c/A_1;$$

$$a_1^2 = (\lambda_1 - 1)/(\lambda_1 + 1), \quad a_2^2 = (1 - \lambda_2)/(1 + \lambda_2);$$

$$\alpha = \operatorname{arcctg}(a_1/a_2) = \operatorname{arcctg} \left[\left(\frac{2\sqrt{v} + \sqrt{v-1}}{2\sqrt{v} - \sqrt{v-1}} \right)^{0,5} \right],$$

$F(\varphi \backslash \alpha)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода [133]. Решение (16.34) справедливо при $v > 1$.

Используя краевое условие $v(0) = 0$, цепочку замен (16.33) и формулу (16.34), легко найти постоянную A_2 как функцию величины A_1 :

$$A_2 = \frac{2}{b} [4A_1[v(v-1)]^{0,5}]^{-0,5} F \left(\arcsin \left[\frac{2(v^2 - v)^{0,5}}{1 + v + (v^2 - v)^{0,5}} \right]^{0,5} \middle| \alpha \right).$$

Найдем константу интегрирования A_1 с помощью второго из условий (16.32). Введем обозначение

$$r(t) = b[A_1 \sqrt{v(v-1)}]^{0,5} (t + A_2). \quad (16.35)$$

Тогда формулу (16.34) можно переписать с учетом соотношений (16.33):

$$v(t) = \frac{1}{b} \left[2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} ds r(t) \right) - \pi/2 \right], \quad (16.36)$$

где, по определению [133], $ds r = dn r / sn r$, dn , sn — эллиптические функции Якоби. Применяя формулы (16.28), (16.29), запишем ус-

ловие трансверсальности $J(v(T)) - \dot{v}(T) - D = 0$ в виде

$$\sqrt{c}[1 + \sin(bv(T))] + \dot{v}(T) = 0. \quad (16.37)$$

Используя формулы (16.33), (16.36), находим из условия (16.37) уравнение для определения постоянной A_1

$$\operatorname{cn} r(T) = [(1 - \tilde{m})/\tilde{m}]^{0.5}, \quad (16.38)$$

где $\tilde{m} = \sin^2 \alpha = a_2^2/(a_1^2 + a_2^2)$.

Рассматривая поведение левой и правой частей уравнения (16.38) как функций постоянной A_1 , нетрудно показать, что (16.38) имеет единственный корень $A_1 = c$. Однако при таком значении A_1 решение (16.34) становится недействительным. Поэтому случай $A_1 = c$ следует рассмотреть отдельно, в результате чего можно легко получить с помощью формул (16.33) следующее решение уравнения (16.30):

$$v(t) = (2/b)\{-(\pi/4) - \operatorname{arctg}[1/(\pm b\sqrt{c}(t + A_2))]\}, \quad (16.39)$$

где A_2 — постоянная интегрирования. Из равенства $v(0) = 0$ находим $A_2 = \mp 1/(b\sqrt{c})$, а из условия трансверсальности вытекает, что в формуле (16.39) надо ставить знак минуса перед \sqrt{c} . Итак, в случае $A_1 = c$ решение уравнения (16.30) при условиях (16.32) дается формулой

$$v(t) = (2/b)[-(\pi/4) + \operatorname{arctg}(1 + b\sqrt{c}t)]. \quad (16.40)$$

В случае ударной волны, движущейся слева направо, $m < 0$, $V_2 > V_1$, тогда из (16.29) получаем $dV/dv > 0$ при $|v(t)| < \pi/(2b)$. Следовательно, использование решения (16.29) в функционале (16.6) законно только при таких значениях $\zeta(t)$, когда

$$|v(t)| \leq \pi/(2b). \quad (16.41)$$

Используя формулу (16.40), легко показать, что при любом $a > 0$ в формуле (5.18) неравенство (16.41) имеет место. Из (16.40) нетрудно получить оценку сверху на $|v(t)|$. Действительно, с учетом формулы (16.25)

$$|v(t)| \leq h\sqrt{2a/(\gamma + 1)}(\pi/2), \quad t \geq 0. \quad (16.42)$$

Если, в частности,

$$a \leq 2(\gamma + 1)/(\pi^2), \quad (16.43)$$

то $|v(t)| \leq h$. Так как при $t > 0$ имеет место неравенство $\operatorname{arctg}(1/(1 + b\sqrt{c}t)) < \pi/4$, из (16.40) следует, что $v(t) < 0$. Это означает: при $t > 0$ ударный фронт, вычисленный по экстремуму функционала (16.6), (16.28), (16.29), отстает от истинного.

Интересно отметить, что в предыдущем примере с уравнением Бюргерса (16.1) ситуация была противоположной. Подставляя точное решение (16.40) в функционал (16.6), (16.28), (16.29), легко вычислить, что $I(\zeta) = 0$. Хотя отклонение $|v(t)|$ растет с увеличе-

нием t , при надлежащем выборе безразмерного коэффициента a в формуле (5.18) можно добиться, чтобы при любых $t \geq 0$ имело место неравенство $|v(t)| \leq h$. Однако формула (16.43) дает значения величины a , слишком малые для успешного применения псевдовязкости (5.18), см. [116]. Таким образом, на практике $|v(t)|$ может достигать величины в несколько интервалов h . С другой стороны, из оценки (16.42) следует, что $|v(t)| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Однако в практических расчетах всегда приходится использовать конечные размеры интервалов сетки, более того, в общем случае расчетная сетка в многомерных расчетах грубее.

§ 17. ВКЛЮЧЕНИЕ В ОСНОВНОЙ ФУНКЦИОНАЛ ИНФОРМАЦИИ ОБ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ВЯЗКОСТИ

Рассмотрим модификацию основного функционала (16.4)–(16.6) с целью повышения точности локализации разрыва при использовании оптимизационной процедуры, основанной на подобном функционале. Уравнения Эйлера сжимаемого невязкого нетеплопроводного газа запишем в виде (1.11), (1.9). Эта система замыкается уравнением состояния (1.8). Аппроксимируем (1.11) по дивергентной разностной схеме r -го порядка точности ($1 \leq r$). Как показано в § 6, первое дифференциальное приближение (п. д. п.) такой разностной схемы можно представить в дивергентном виде

$$\partial \vec{w} / \partial t + \partial \vec{\varphi}(\vec{w}) / \partial x = \partial \vec{Q}(x, t) / \partial x. \quad (17.1)$$

Вектор $\vec{Q}(x, t)$ запишем более подробно:

$$\begin{aligned} \vec{Q}(x, t) &= \tilde{\vec{Q}}(\vec{w}(x, t)), \\ h \partial \vec{w}(x, t) / \partial x, \dots, h^r \partial^r \vec{w}(x, t) / \partial x^r, x, t, h, \tau, \end{aligned} \quad (17.2)$$

причем

$$\tilde{\vec{Q}} = O(h^r) + O(\tau^r). \quad (17.3)$$

В формулах (17.2), (17.3) τ — временной шаг, h — шаг равномерной расчетной сетки на оси x . В соответствии с формулами (1.9), (17.2) введем обозначения

$$\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}^T, \quad \vec{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^T, \quad \vec{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}^T,$$

где $w_1 = \rho_1$, $w_2 = \rho u$, $w_3 = \rho E$; $\varphi_1 = \rho u$, $\varphi_2 = p + \rho u^2$, $\varphi_3 = \rho u + \rho u E$. Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим решения типа бегущей волны системы (17.2), т. е. зависящие только от переменной y , определяемой по формуле (16.16). Тогда систему (17.1) можно проинтегрировать один раз:

$$-D\vec{w}(y) + \vec{\varphi}(\vec{w}) + \vec{C} = \vec{Q}(y), \quad (17.4)$$

где \vec{C} — постоянный вектор. Как и в § 6, будем искать решение системы (17.4), удовлетворяющее условиям

$$\vec{w}(y) = \begin{cases} \vec{W}_1, & y \rightarrow -\infty, \\ \vec{W}_2, & y \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (17.5)$$

где \vec{W}_1, \vec{W}_2 — постоянные векторы, удовлетворяющие условиям Ренкина — Гюгонио. Тогда вектор \vec{C} в уравнении (17.4) должен удовлетворять требованиям

$$\vec{C} = D\vec{W}_1 - \vec{\varphi}(\vec{W}_1) = D\vec{W}_2 - \vec{\varphi}(\vec{W}_2). \quad (17.6)$$

Как показано в § 3, точное решение задачи (17.4), (17.5) хорошо описывает реальное поведение разностного решения в зоне сглаженного сильного разрыва. Например, соответствующая относительная ошибка, полученная в § 3, не превышала 4% для ударных волн конечной интенсивности.

Пусть в формуле (17.5) $\vec{W}_j = \{W_{j1}, W_{j2}, W_{j3}\}^T$, $j = 1, 2$. Используя формулу (17.6), перепишем равенство (17.4) для k -й компоненты ($1 \leq k \leq 3$) в виде

$$[\varphi_k(\vec{w}) - \varphi_k(\vec{W}_2) - Q_k(y)]/[w_k(y) - W_{2k}] - D = 0. \quad (17.7)$$

Рассмотрим теперь на основе формулы (17.7) функционал

$$I_k(\zeta) = \int_0^T \left[\frac{\varphi_k(\vec{w}(\zeta(t), t)) - \varphi_k(\vec{W}_2) - Q_k(\zeta(t), t)}{w_k(\zeta(t), t) - W_{2k}} - \dot{\zeta}(t) \right]^2 dt. \quad (17.8)$$

По аналогии с (16.8) проанализируем для функционала (17.8) вариационную задачу

$$I_k(\zeta) \rightarrow \min, \quad \zeta(0) = x_0, \quad (17.9)$$

$$[\varphi_k(\vec{w}(\zeta(T), T)) - \varphi_k(\vec{W}_2) - Q_k(\zeta(T), T)]/[w_k(\zeta(T), T) - W_{2k}] - \dot{\zeta}(T) = 0. \quad (17.10)$$

Рассмотрим функционал (17.8) на решениях $\vec{w} = \vec{w}(y)$ задачи (17.4), (17.5). Предположим, что структура аппроксимационной вязкости \vec{Q} в системе (17.1) такова, что имеет место гладкий переход от состояния «1» к состоянию «2» в размазанной ударной волне, описываемой решением $\vec{w}(y)$, при фиксированных $h > 0$, $\tau > 0$. Тогда с учетом формулы (17.7), равенства $\zeta(0) = x_0$ и условия трапециевальности (17.10) легко видеть, что на решении типа бегущей волны $\vec{w} = \vec{w}(y)$ функционал (17.8) достигает минимума на функции $\zeta(t) = x_0 + Dt$, описывающей точную траекторию стационарной ударной волны.

В случае нестационарной ударной волны, распространяющейся в среде, описываемой непостоянными функциями ρ , u , p , ϵ , возвы-

мем функционал

$$I(\zeta) = \int_{t_0}^T \left\{ \sum_{k=1}^3 \alpha_k [J_k(\zeta(t), t) - \dot{\zeta}(t)]^2 \right\} dt, \quad (17.11)$$

где функции $J_k(\zeta(t), t)$ определяются по формуле

$$\begin{aligned} J_k(\zeta(t), t) = & [\varphi_k(\vec{w}^-(\zeta(t), t)) - \varphi_k(\vec{w}^+(\zeta(t), t)) - \\ & - Q_k(\zeta(t), t)] / [\vec{w}_k^-(\zeta(t), t) - \vec{w}_k^+(\zeta(t), t)], \end{aligned} \quad (17.12)$$

\vec{w}^- , \vec{w}^+ — решения вспомогательных задач Коши P^- и P^+ для системы (1.11), (1.9), (1.5), т. е. \vec{w}^- , \vec{w}^+ получены при начальных данных вида (см. § 16)

$$\vec{w}^-(x, 0) = \vec{u}(x, t_0) \text{ при } x < x_0, \quad \vec{w}^+(x, t_0) = \vec{u}(x, t_0), \quad x > x_0, \quad (17.13)$$

x_0 — абсцисса разрыва типа ударной волны в начальном профиле $\vec{u}(x, t_0)$, $t_0 < T$. Далее, в формуле (17.11) α_1 , α_2 , α_3 — неотрицательные постоянные такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > 0$. Формула (17.8) является частным случаем функционала (17.11) при $\vec{w}^-(\zeta(t), t) = \vec{w}(\zeta(t), t)$, $\vec{w}^+(\zeta(t), t) = \vec{W}_2$, $\alpha_j = \delta_k^j$, $j = 1, 2, 3$. Проведенное выше рассмотрение функционала (17.8) в рамках решений типа бегущей волны уравнений п. д. п. дает основания ожидать более высокую точность локализации стационарных и нестационарных ударных волн на основе минимизации функционала (17.11) по сравнению с функционалом Миранкера — Пиронно, рассмотренным в § 16.

Пример 1. Вернемся к системе (16.17)–(16.19). В этом случае

$$\vec{Q} = \{0, -q, -qu\}^T,$$

где q , u можно выразить как функции удельного объема V посредством формул (16.22). В свою очередь, (16.24) обеспечивает гладкий переход от состояния «1» за фронтом ударной волны к состоянию «2» перед фронтом в случае квадратичной искусственной вязкости (5.18) (см. также [116]). В § 5 показано, что точность локализации ударного фронта по $\max q$ существенно зависит от значения безразмерных коэффициентов, входящих в выражение для q . Вместе с тем в случае локализации разрыва на основе функционала (17.8) от конкретной формы используемой вязкости q требуется только, чтобы она обеспечивала гладкий переход от одного состояния к другому в стационарной ударной волне. Тогда результат локализации совпадает с точным положением фронта стационарной ударной волны, как показано выше в рамках п. д. п. Таким образом, при использовании функционала (17.8) для локализации стационарной ударной волны имеет место сравнительно более слабая зависимость ее точности от конкретного вида q , чем

в случае дифференциального анализатора § 5, основанного на определении точек максимума искусственной вязкости q .

Пример 2. Рассмотрим схему «распад разрыва» [33]. В § 20 представлены результаты практического применения функционала (17.8) при $k = 1$. В этом случае выражение для $Q_1(\xi, t)$ легко найти из систем уравнений п. д. п. (7.12), (7.13)

$$Q_1(\xi, t) = \begin{cases} -(\tau/2)(p + \rho u^2)_x + (h/2)[(1/c)(1 - u/c)p_x + \\ \quad + up_x + (u/c)\rho u_x], & 0 < u < c, \\ -(\tau/2)(p + \rho u^2)_x + (h/2)(\rho u)_x, & u \geq c > 0. \end{cases} \quad (17.14)$$

Итак, с помощью методов классического вариационного исчисления в рамках рассмотрения п. д. п. показано, что включение в основной функционал информации об искусственной или аппроксимационной вязкости разностной схемы, получаемой из п. д. п., обеспечивает результат, совпадающий с точной траекторией разрыва, по крайней мере в случае стационарной ударной волны. В этом состоит преимущество функционала (17.8) по сравнению с (16.4) — (16.6).

§ 18. ЛОКАЛИЗАЦИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ОСНОВЕ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ

Из конструкции основного функционала (16.4) — (16.6) или (17.8) следует, что в памяти ЭВМ необходимо хранить значения величин u , p , ρ , ε , найденных как решение конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих систему уравнений Эйлера (1.1) — (1.3), в некоторой области $\Omega(T)$ плоскости (x, t) . Чтобы оценить минимальный размер вдоль оси x этой области при $T = N\tau$, N — целое положительное число, воспользуемся условием устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви

$$(|u| + c)\tau/h \leq 1 \quad (18.1)$$

и теоремой Цемплена (1.29). Действительно, в силу неравенств (18.1) и (1.29) ударный фронт за время τ не может пройти расстояние больше h . Пусть x_0 — абсцисса разрыва при $t = 0$. Тогда область $\Omega(T)$ охватывает все точки (x, t) , для которых выполняются неравенства $x_0 - nh \leq x \leq x_0 + nh$, $n = 1, \dots, N$.

От этого требования дополнительной памяти можно избавиться, если вместо задачи минимизации функционала (17.11) рассмотреть задачу минимизации для требуемых моментов времени t некоторой функции $F(\zeta(t))$. Исходя из (17.11), рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} F(\zeta(t^{n+1})) = & \sum_{k=1}^3 \alpha_k \{ [\varphi_k(\vec{w}^-(\zeta^{n+1}, t^{n+1})) - \\ & - \varphi_k(\vec{w}^+(\zeta^{n+1}, t^{n+1})) - \tilde{Q}_k(\vec{w}^-, h \partial \vec{w}^- / \partial x, \dots, h^r \partial^r \vec{w}^- / \partial x^r, \\ & \zeta(t^{n+1}), t^{n+1}, h, \tau)] / [w_k^-(\zeta^{n+1}, t^{n+1}) - w_k^+(\zeta^{n+1}, t^{n+1})] - \dot{\zeta}_{\tau_1}(t^{n+1}) \}^2, \end{aligned} \quad (18.2)$$

где $\zeta^{n+1} = \zeta(t^{n+1})$, $t^{n+1} = (n+1)\tau$, \vec{w}^- , \vec{w}^+ — решения вспомогательных задач P^- и P^+ соответственно (см. § 16 и [23]); $\dot{\zeta}_{\tau_1}(t^{n+1})$ — некоторая разностная аппроксимация производной $\dot{\zeta}(t^{n+1})$, использующая шаг $\tau_1 = \beta\tau$, $\beta \geq 1$; α_1 , α_2 , α_3 — штрафные постоянные, $\alpha_k \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Простейшей аппроксимацией для $\dot{\zeta}_{\tau_1}(t^{n+1})$ является

$$\dot{\zeta}_{\tau_1}(t^{n+1}) = [\zeta(t^{n+1}) - \zeta(t^{n+1} - \tau_1)]/\tau_1. \quad (18.3)$$

В отличие от случая минимизации функционала (17.11) при численном решении задачи

$$\begin{aligned} F(\zeta(t^{n+1})) &\rightarrow \min, \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ \zeta(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (18.4)$$

нет нужды хранить в памяти ЭВМ значения величин u , p , ρ , e в вышеупомянутой области $\Omega(T)$. В соответствии с формулами (18.2), (18.3) для вычисления $\zeta(t^{n+1})$ достаточно знать решения $\vec{w}^-(x, t)$ и $\vec{w}^+(x, t)$ только при $t = t^{n+1}$ и значение абсциссы $x = \zeta(t)$ при $t = t^{n+1} - \tau_1$. В качестве \vec{w}^- можно использовать, как и в § 16, конечно-разностное решение по разностной схеме, аппроксимирующей уравнения (1.1)–(1.3); $\vec{w}^+(x, t)$ можно взять равным $\vec{W}_2 = \text{const}$ в случае движения ударной волны по газу с постоянными параметрами ρ , u , p , e . Пусть $\vec{w}(y)$, где y определяется по формуле (16.16), есть точное решение задачи (17.4), (17.5). Как было показано в § 3, разностное решение $\vec{w}^-(x, t)$ хорошо аппроксимируется функцией $w(y)$ в зоне размазанной стационарной ударной волны конечной интенсивности. Подставим в формулу (18.2) $\vec{w}^- = \vec{w}(y)$, $\vec{w}^+ = \vec{W}_2 = \text{const}$. Тогда с учетом формул (17.7) и (18.2) получаем, что

$$F(\zeta(t^{n+1})) = [D - \dot{\zeta}_{\tau_1}(t^{n+1})]^2. \quad (18.5)$$

При достаточно малом τ_1 в формуле (18.3) будем иметь

$$[\zeta(t^{n+1}) - \zeta(t^{n+1} - \tau_1)]/\tau_1 = \partial \zeta(t^{n+1}) / \partial t + O(\tau_1). \quad (18.6)$$

Пусть величина $\zeta(t^{n+1})$ вычислена как решение задачи минимизации (18.4). Тогда при достаточно малых τ_1 и с учетом формул (18.5) и (18.6) $d\zeta/dt \cong D$. Таким образом, совокупность точек $x = \zeta(t^{n+1})$, полученных при $n = 0, 1, \dots, N-1$ как решение задачи (18.4), дает приближение к траектории стационарной ударной волны.

Укажем на связь между процедурами численного решения задачи (18.4) и некоторого обыкновенного дифференциального уравнения. Рассмотрим для большей наглядности случай, когда в фор-

мule (18.2) при некотором $k = k_0$, $1 \leq k_0 \leq 3$, $\alpha_{k_0} = 1$, $\alpha_k = 0$ при $k \neq k_0$. Тогда в сумме, стоящей в правой части равенства (18.2), только одно слагаемое отлично от нуля. Возьмем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} d\zeta/dt = & \left[\Phi_{k_0}(\vec{w}^-(\zeta(t), t)) - \Phi_{k_0}(\vec{w}^+(\zeta(t), t)) - \right. \\ & - \tilde{Q}_{k_0}(\vec{w}^-(\zeta(t), t), h\partial\vec{w}^-(\zeta(t), t)/\partial x, \dots, h^r\partial^r\vec{w}^-(\zeta(t), t)/\partial x^r, \\ & \left. \zeta(t), t, h, \tau) \right] / [w_{k_0}^-(\zeta(t), t) - w_{k_0}^+(\zeta(t), t)]. \end{aligned} \quad (18.7)$$

Аппроксимируем (18.7) по неявной разностной схеме Адамса [79]

$$\begin{aligned} G(\zeta^{n+1}) = & [\zeta(t^{n+1}) - \zeta(t^{n+1} - \tau_1)]/\tau_1 - \left[\Phi_{k_0}(\vec{w}^-(\zeta^{n+1}, t^{n+1})) - \right. \\ & - \Phi_{k_0}(\vec{w}^+(\zeta^{n+1}, t^{n+1})) - \tilde{Q}_{k_0}(\vec{w}^-, h\partial\vec{w}^-/\partial x, \dots, h^r\partial^r\vec{w}^-/\partial x^r, \\ & \left. \zeta(t^{n+1}), t^{n+1}, h, \tau) \right] / [w_{k_0}^-(\zeta^{n+1}, t^{n+1}) - w_{k_0}^+(\zeta^{n+1}, t^{n+1})] = 0, \end{aligned} \quad (18.8)$$

где $\zeta^{n+1} = \zeta(t^{n+1})$. Для (18.7) поставим начальное условие $\zeta(0) = x_0$. Тогда с помощью разностной схемы (18.8) можем найти $\zeta(t^{n+1})$. Однако получение точного решения $\zeta(t^{n+1})$ уравнения (18.8) затруднительно, поскольку $\zeta(t^{n+1})$ входит в (18.8) нелинейным образом из-за нелинейности функций Φ_{k_0} , Q_{k_0} . Поэтому для вычисления $\zeta(t^{n+1})$ нужно пользоваться каким-либо приближенным численным методом. Один из известных подходов к численному решению нелинейного уравнения $G(\zeta^{n+1}) = 0$ (см., например, [72]) состоит в решении задачи минимизации

$$(G(\zeta^{n+1}))^2 \rightarrow \min,$$

которая в случае схемы Адамса (18.8), как легко видеть, совпадает с задачей минимизации (18.4).

Таким образом, решая уравнение (18.7) при начальном условии $\zeta(0) = x_0$ с использованием какой-либо устойчивой разностной схемы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (по поводу устойчивости см., например, [132]), получим приближение $\zeta(t)$ к траектории разрыва. В случае стационарной ударной волны (18.7) с учетом формулы (17.7) переходит в уравнение $d\zeta/dt = D$, решение которого при начальном условии $\zeta(0) = x_0$, очевидно, совпадает с точной траекторией ударной волны $x = x_0 + Dt$.

§ 19. ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ ОСНОВНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Пусть начальные данные для системы (1.1)–(1.3) заданы при некотором $t = t_0$. Для численной минимизации основного функционала (17.11), (17.12) можно использовать любые известные методы; их описание можно найти, например, в [109, 99, 44, 211,

110]. В частности, широко применяются градиентные методы минимизации функционалов. Две различные реализации градиентных методов для функционала вида (17.11), (17.12) изложены в [248, 249, 23].

Чтобы иметь возможность использовать выкладки работ [248, 249], вместо приближения $\zeta(t)$ к траектории разрыва будем рассматривать функцию $\bar{\zeta}(t) = \zeta(t) - x_0$. Таким образом, $\bar{\zeta}(t_0) = 0$. Далее черточку над ζ опускаем для краткости. Возьмем функции $\zeta(t)$ и $\zeta(t) + \delta\zeta(t)$ из $C^1[t_0, T]$, причем $\dot{\zeta}(t_0) = \delta\dot{\zeta}(t_0) = 0$. Воспользуемся формулой

$$J_k(\zeta + \delta\zeta, t) = J_k(\zeta, t) + \frac{\partial J_k(\zeta, t)}{\partial x} \delta\zeta + o(\delta\zeta). \quad (19.1)$$

Тогда с помощью формулы (17.11) получим выражение

$$\begin{aligned} I(\zeta + \delta\zeta) - I(\zeta) &= 2 \int_{t_0}^T \left\{ \sum_{k=1}^3 \alpha_k \left[(\dot{\zeta}(t) - J_k(\zeta, t)) \left(\delta\dot{\zeta} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{\partial J_k}{\partial x}(\zeta, t) \delta\zeta \right) \right] \right\} dt + o(\delta\zeta). \end{aligned} \quad (19.2)$$

Используя формулу

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^T (\dot{\zeta} - J_k(\zeta, t)) (\partial J_k(\zeta, t)/\partial x) \delta\zeta dt = \\ &= \int_{t_0}^T \delta\dot{\zeta}(t) \left\{ \int_t^T [\dot{\zeta}(\tau) - J_k(\zeta, \tau)] (\partial J_k(\zeta, \tau)/\partial x) d\tau \right\} dt, \end{aligned}$$

полученную интегрированием по частям, перепишем (19.2), опустив члены $o(\delta\zeta)$, в виде

$$\begin{aligned} I(\zeta + \delta\zeta) - I(\zeta) &= 2 \int_{t_0}^T \left\{ \sum_{k=1}^3 \alpha_k [\dot{\zeta}(t) - J_k(\zeta, t) - \right. \\ &\quad \left. - \int_t^T (\dot{\zeta}(\tau) - J_k(\zeta, \tau)) (\partial J_k/\partial x)(\zeta, \tau) d\tau] \right\} \delta\dot{\zeta}(t) dt. \end{aligned} \quad (19.3)$$

Пусть задана функция $\zeta(t)$ с $\zeta(t_0) = 0$ и соответствующее значение $I(\zeta)$. Выберем следующее приближение $\zeta(t) + \delta\zeta(t)$ так, чтобы $I(\zeta) > I(\zeta + \delta\zeta)$. Используя метод наискорейшего спуска, положим

$$\delta\dot{\zeta}(t) = -\lambda \nabla I(\zeta)(t), \quad (19.4)$$

где λ — положительная постоянная и с учетом формулы (19.3)

$$\begin{aligned} \nabla I(\zeta)(t) &= 2 \left\{ \sum_{k=1}^3 \alpha_k \left[\dot{\zeta}(t) - J_k(\zeta(t), t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_t^T (\dot{\zeta}(\tau) - J_k(\zeta(\tau), \tau)) \frac{\partial J_k}{\partial x}(\zeta(\tau), \tau) d\tau \right] \right\}. \end{aligned} \quad (19.5)$$

При таком выборе $\delta\zeta$ имеем

$$I(\zeta + \delta\zeta) - I(\zeta) = -\lambda \int_{t_0}^T [\nabla I(\zeta)(t)]^2 dt + o(\lambda \nabla I).$$

При достаточно малых $\lambda \nabla I$ правая часть этого равенства отрицательна.

Опишем алгоритм минимизации функционала (17.11), основанный на формулах (19.3) — (19.5). Обозначим через $\zeta_i(t)$ i -е приближение к траектории разрыва $\xi(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Алгоритм 1.

Шаг 1. Выберем $\zeta_0(t) \in C^1[t_0, T]$, причем $\zeta_0(t_0) = 0$, $i = 0$. Возьмем $\lambda \in (0, 1)$.

Шаг 2. Вычисляем \vec{w}^- , \vec{w}^+ .

Шаг 3. Находим $\nabla I(\zeta_i)(t)$ по формулам (19.5), (17.12).

Шаг 4. Проверяем, удовлетворяется ли неравенство

$$I\left(\zeta_i - \lambda \int_{t_0}^T \nabla I(\zeta_i)(t) dt\right) - I(\zeta_i) \leq -\frac{\lambda}{2} \|\nabla I\|_{L^2[t_0, T]}^2. \quad (19.6)$$

Если λ не удовлетворяет неравенству (19.6), то уменьшаем λ по формуле $\lambda = \theta\lambda$, где в соответствии с рекомендациями работы [109] берем $\theta \in (0,5; 0,8)$.

Шаг 5. Полагаем

$$\zeta_{i+1}(t) = \zeta_i(t) - \lambda \int_{t_0}^t \nabla I(\zeta_i)(\tau) d\tau. \quad (19.7)$$

Шаг 6. Проверяем выполнение неравенства

$$(\Delta\zeta_{i+1})_{\max} = \max_t |\zeta_{i+1}(t) - \zeta_i(t)|/h < \delta_1, \quad (19.8)$$

где h — шаг равномерной расчетной сетки на оси x , δ_1 — наперед заданное число, $\delta_1 \in (0,1)$. Если неравенство (19.8) не выполняется, то полагаем $i = i + 1$ и переходим к шагу 3.

Алгоритм 2 отличается от алгоритма 1 лишь стратегией выбора параметра λ при подсчете следующего приближения $\zeta_{i+1}(t)$ по формуле (19.7) [23].

Шаг 1. Выберем $\zeta_0(t) \in C^1[t_0, T]$, причем $\zeta_0(t_0) = 0$; $i = 0$.

Шаг 2. Вычисляем \vec{w}^+ , \vec{w}^- .

Шаг 3. Находим $\nabla I(\zeta_i)(t)$ по формулам (19.5), (17.12).

Шаг 4. Положим $\lambda_0 = 0$, $k = 0$ и зададимся некоторым приращением к λ , равным $\Delta\lambda$.

Шаг 5. Проверяем, удовлетворяется ли неравенство

$$I\left(\zeta_i - (\lambda_0 + \Delta\lambda) \int_{t_0}^T \nabla I(\zeta_i)(t) dt\right) \leq I(\zeta_i). \quad (19.9)$$

Если оно не выполняется, то полагаем $\Delta\lambda = -\Delta\lambda$ и переходим к шагу 6.

Шаг 6. Вычисляем $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda$. Положим в формуле (19.7) $\lambda = \lambda_{k+1}$ и обозначим через $I_{(k+1)}(\zeta_i(t))$ соответствующее значение функционала I .

Шаг 7. Если $I_{(k+1)}(\zeta_i(t)) \leq I_{(k)}(\zeta_i(t))$, то удваиваем $\Delta\lambda$ и возвращаемся к шагу 6 при $k = k + 1$. Если $I_{(k+1)}(\zeta_i(t)) > I_{(k)}(\zeta_i(t))$, то введем обозначения $\lambda_{(m)} = \lambda_{k+1}$, $\lambda_{(m-1)} = \lambda_k$, уменьшим $\Delta\lambda$ в два раза и вернемся к шагу 6 для еще одного (только одного) вычисления.

Шаг 8. Из четырех полученных величин $\lambda\{\lambda_{(m+1)}, \lambda_{(m)}, \lambda_{(m-1)}, \lambda_{(m-2)}\}$ исключим $\lambda_{(j)}$, при котором значение функционала

$$I_{(j)}(\zeta_i(t)) \equiv I\left(\zeta_i - \lambda_{(j)} \int_{t_0}^t \nabla I(\zeta_i)(t) dt\right),$$

$$j = m + 1, m, m - 1, m - 2,$$

максимально. Оставшиеся три значения параметра λ упорядочим в возрастающей последовательности. Обозначим ее элементы через $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ таким образом, чтобы $\lambda_{(1)} < \lambda_{(2)} < \lambda_{(3)}$.

Шаг 9. Вычисляем приближенное значение λ в точке минимума I с использованием параболической аппроксимации функции $I(\lambda)$ по формуле

$$\begin{aligned} \lambda^* = 0,5 &\{[\lambda_{(2)}^2 - \lambda_{(3)}^2] I_1 + [\lambda_{(3)}^2 - \lambda_{(1)}^2] I_2 + \\ &+ [\lambda_{(1)}^2 - \lambda_{(2)}^2] I_3\} / \{[\lambda_{(2)} - \lambda_{(3)}] I_1 + [\lambda_{(3)} - \lambda_{(1)}] I_2 + [\lambda_{(1)} - \lambda_{(2)}] I_3\}, \end{aligned}$$

где обозначено $I_k = I_k(\zeta_i(t))$, $k = 1, 2, 3$. Если λ^* и любое из значений $\{\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}\}$ различаются меньше, чем на заданное малое число δ_2 , то заканчиваем поиск λ^* . В противном случае проверяем выполнение неравенства

$$I_{(3)}(\zeta_i(t)) < I\left(\zeta_i - \lambda^* \int_{t_0}^t \nabla I(\zeta_i)(t) dt\right). \quad (19.10)$$

Если неравенство (19.10) имеет место, то уменьшаем приращение $\Delta\lambda$ в два раза и возвращаемся к шагу 4.

Шаг 10. Полагаем в формуле (19.7) $\lambda = \lambda^*$ и вычисляем $\zeta_{i+1}(t)$.

Шаг 11. Проверяем выполнение неравенства (19.8). Если оно не выполняется, то задаем $i = i + 1$ и возвращаемся к шагу 3.

Заметим, что сходимость метода наискорейшего спуска, реализованного в алгоритме 1, исследовалась, например, в [109], где, в частности, получено ее условие (19.6). Изложение варианта градиентного метода, реализованного в алгоритме 2, можно найти, например, в [14, 110]. Сходимость алгоритма минимизации вида алгоритма 2 анализируется, в частности, в [110] (см. также [23]).

Обратимся теперь к вопросу о численной реализации изложенных выше градиентных методов минимизации основного функционала (17.11), (17.12). В плоскости (x, t) введем равномерную сет-

ку с шагами h и τ по x и t соответственно. Обозначим через I_h дискретный функционал, аппроксимирующий I . Пусть $t_n = t_0 + n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N_1$ и $\zeta^n = \zeta(t_n)$, $j_n = \text{entier}(\zeta^n/h + 0,5)$ т. е. (j_n, n) — индексы точки сетки, ближайшей к (ζ^n, t_n) . В соответствии с формулой (17.12) положим

$$J_{k,j}^n \equiv J_k(x_j, t_n) = [\varphi_k(\vec{w}^-(x_j, t_n)) - \varphi_k(\vec{w}^+(x_j, t_n)) - Q_k(x_j, t_n)] / [w_k^-(x_j, t_n) - w_k^+(x_j, t_n)], \quad (19.11)$$

где $x_j = (j + 0,5)h$ — абсцисса центра ячейки сетки на оси x . Рассмотрим по аналогии с [248, 249] следующие простейшие аппроксимации для функционала (17.11) и градиента (19.5):

$$I_h = \sum_{n=0}^{N_1-1} \sum_{k=1}^3 \alpha_k [(\zeta^{n+\beta} - \zeta^n)/\Delta t - J_{k,j_{n+\beta}}^{n+\beta}]^2 \Delta t, \quad (19.12)$$

$$\begin{aligned} \nabla I_h \equiv \nabla I_h(t_n) = 2 \sum_{k=1}^3 \alpha_k & \left\{ (\zeta^{n+\beta} - \zeta^n)/\Delta t - J_{k,j_{n+\beta}}^{n+\beta} - \right. \\ & \left. - \sum_{r=n}^{N_1-1} \Delta t [(\zeta^{r+\beta} - \zeta^r)/\Delta t - J_{k,j_{r+\beta}}^{r+\beta}] (1/h) (J_{k,j_{r+\beta}+1}^{r+\beta} - J_{k,j_{n+\beta}}^{r+\beta}) \right\}, \end{aligned} \quad (19.13)$$

$$\int_{t_0}^{t_0 + n\Delta t} \nabla I(\zeta(t)) dt \cong \sum_{k=0}^{n-1} \nabla I_h(t_k) \Delta t. \quad (19.14)$$

В формулах (19.12), (19.13) использованы обозначения $\Delta t = \beta\tau$, где β — целое число, $\beta \geq 1$; $N_1 = \text{entier}((T - t_0)/\Delta t)$. Шаг Δt , кратный шагу τ , введен с целью экономии памяти ЭВМ, требуемой для реализации описанных выше методов минимизации функционала I .

Функцию $\vec{w}(x, t)$, входящую в формулу (19.11), вычисляли по одной из известных конечно-разностных схем сквозного счета. Таким образом, разрывы в конечно-разностном решении $\vec{w}^-(x, t)$ «размазывались». Функцию $\vec{w}^+(x, t)$ полагали не зависящей от t , при этом с учетом начальных условий (17.13) брали $\vec{w}^+(x, t) = \vec{u}(x, t_0)$ при $x > x_0$. Ясно, что если $T - t_0 = O(1)$, то формулы (19.12) — (19.14) имеют погрешность аппроксимации $O(\Delta t)$ и аналогично [248, 249] устанавливается: путь разрыва $\zeta(t)$ будет определяться при использовании этих формул с погрешностью $O(\Delta t)$.

Нулевое приближение $\zeta_0(t)$ задано с использованием того, что в зоне размазанной ударной волны $\partial u/\partial x < 0$. Поэтому $\zeta_0(t)$ при фиксированном t полагали равным абсциссе того конца зоны слаженной ударной волны, который соответствует состоянию за фронтом. Эту абсциссу определяли по аналогии с [205], в ряде случаев произвольно сдвигая ее влево на расстояние, достигавшее

10 h для больших значений t (сдвиг делали по формуле $\zeta_0(t) = x_0 + 0,7(\zeta_0(t) - x_0)$, т. е. только для $t > t_0$). Сходимость метода наискорейшего спуска, описанного выше, имела место и в данном случае. При этом требовалось 4—12 итераций, чтобы достичь точности локализации абсциссы порядка $10^{-3} h$.

§ 20. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Обозначим через $x_f(t)$ абсциссу фронта ударной волны, вычисленную в соответствии с точным решением, и через $\zeta(t)$ — приближенную абсциссу фронта ударной волны, рассчитанную с помощью того или иного оптимизационного алгоритма либо дифференциального анализатора, описанного в главе 2. Введем в рассмотрение погрешность локализации

$$[x_f(t) - \zeta(t)]/h. \quad (20.1)$$

На рис. 39, *a* (см. [277]) погрешность (20.1) изображена как функция безразмерного времени t/τ , которое отложено вдоль оси абсцисс; коэффициент $a = 3$ в формуле (5.18). Как отмечалось ранее [97, 120, 276, 286], в некоторых случаях фронт ударной волны при использовании схем сквозного счета «размазывается» более чем на 10 ячеек. Для моделирования этой ситуации и выяснения точности локализации в (5.18) также взято значение $a = 15$. Ему соответствует толщина $X = 9,95 h$ зоны «размазывания» ударной волны (5.26).

На рис. 39, *б* отражены результаты расчетов при значении коэффициента $a = 15$ в формуле для псевдовязкости (5.18). Рис. 39

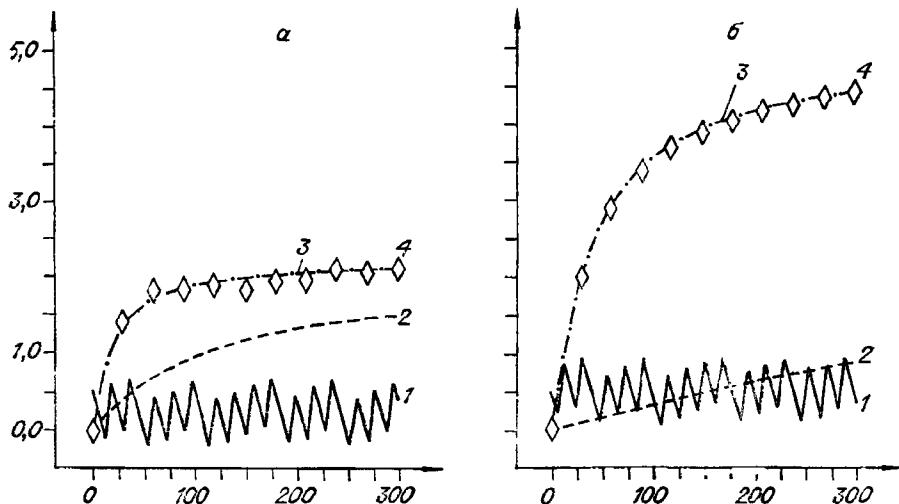


Рис. 39. Погрешность локализации (20.1) как функция времени:

а — коэффициент $a = 3$ в (5.18); *б* — $a = 15$.
 1 — локализация по $\max q$, где q — псевдовязкость (5.18); 2 — использование функционала (17.8) с $k=2$, $Q_0=-q$; 3 — функция $v(t)/h$, где $v(t)$ — функция (16.40); 4 — использование исходного алгоритма Миранкера — Пиронно.

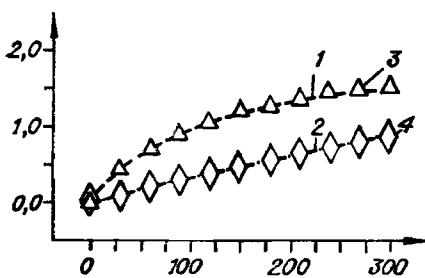


Рис. 40. Использование функционала (17.8) с $k = 2$, $Q_2 = -q$.

1 — $a=3$ в (5.18), 2 — $a=15$ в (5.18). Минимизация функции (18.2), (18.3) по методу Фибоначчи; 3 — $a=3$, 4 — $a=15$ в формуле (5.18).

свидетельствует, что траектория $x = \zeta(t)$, полученная при численной минимизации функционала Миранкера — Пиронно (16.23), (16.5), (16.6), очень хорошо согласуется с аналитическим решением (16.40) при различных значениях коэффициента a в (5.18). Это объясняется тем, что с увеличением коэффициента a в (5.18) профили в зоне ударной волны становятся более гладкими, вследствие чего уменьшаются погрешности аппроксимации, обусловленные использованием односторонних разностей для $\partial J(\zeta(t), t)/\partial x$ в формуле (19.13) и формулы прямоугольников (19.14). Эти же соображения объясняют увеличение точности локализации разрыва с помощью нового функционала (17.8), $k = 2$, при увеличении коэффициента a в (5.18). Следует отметить, что использование функционала (17.8) обеспечивает более высокую точность локализации, чем в случае функционала (16.23), (16.5), (16.6).

При тех же исходных данных, что и для рис. 39, применен метод локализации на основе минимизации функции (18.2). Минимизация функции одной переменной (18.2) выполнена на ЭВМ БЭСМ-6 с использованием стандартной программы MNGGR, входящей в математическое обеспечение БЭСМ-6. Существенным элементом программы MNGGR является использование метода Фибоначчи для нахождения локального минимума функции [7]. Соответствующие графики для различных значений a в (5.18) представлены на рис. 40. Легко видеть, что результаты локализации на основе минимизации функции (18.2) и функционала (17.8), $k = 2$, практически совпадают.

Рис. 41 дает представление о погрешности локализации (20.1) фронта стационарной ударной волны при использовании разностного решения, полученного по схеме «распад разрыва» [33]. Видно, что погрешность (20.1) растет с увеличением при использовании функционала Миранкера — Пиронно (16.6). Разностная аппроксимация

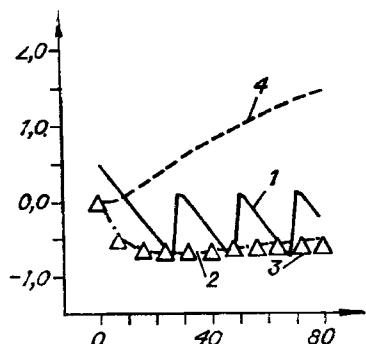


Рис. 41. Погрешность (20.1).

1 — локализация по $\max |Q_1|$, где Q_1 — функция (17.14); 2 — использование функционала (17.8) при $k=1$, Q_1 — функция (17.14); 3 — минимизация функции (18.2), (18.3) по методу золотого сечения; 4 — исходный алгоритм Миранкера — Пиронно.

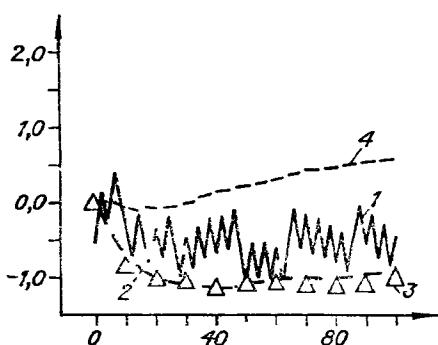


Рис. 42. Задача о распространении нестационарной ударной волны в неоднородной атмосфере. (Обозначения те же, что и на рис. 41.)

ксимация функции Q_1 (17.14), использующая односторонние разности для u_x , p_x , ρ_x , представляет собой кусочно-постоянную функцию, точнее, она постоянна внутри каждого промежутка $(j-1)h \leq x \leq jh$, $j = 1, 2, \dots$. В связи с этим и получаемый по тах $|Q_1|$

ударный фронт будет двигаться скачкообразно, что и отражено на рис. 39, 41. Однако если в используемый алгоритм локализации искомая абсцисса фронта входит явным образом, как в случае функционалов (16.6), (17.8) и функции (18.2), то скачкообразность в поведении абсциссы локализованного разрыва исчезает, несмотря на дискретный характер разностного решения, на основе которого был локализован фронт. Это свойство методов локализации (16.6), (17.8) и (18.2) легко прослеживается на рис. 39—42. Качественное объяснение описанного поведения можно дать на примере функции (18.2). Возьмем два таких значения ζ_1 , ζ_2 непрерывной переменной $\zeta(t^{n+1})$, что $\zeta_1 \neq \zeta_2$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} \vec{w}^+(\zeta_1, t^{n+1}) &= \vec{w}^+(\zeta_2, t^{n+1}) = \vec{b}^+, \quad \vec{b}^\pm = \{b_1^\pm, b_2^\pm, b_3^\pm\}^T, \\ \vec{w}^-(\zeta_1, t^{n+1}) &= \vec{w}^-(\zeta_2, t^{n+1}) = \vec{b}^-, \quad Q_k|_{\zeta=\zeta_1} = \\ &= Q_k|_{\zeta=\zeta_2}, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (20.2)$$

Тогда с помощью формул (18.2), (18.3) легко убедиться, что $F(\zeta_1) \neq F(\zeta_2)$. Действительно, введем обозначения

$$a_k = [\Phi_k(\vec{b}^-) - \Phi_k(\vec{b}^+) - Q_k|_{\zeta=\zeta_1, \zeta_2}] / (b_k^- - b_k^+), \quad \zeta_0 = \zeta(t^{n+1} - \tau_1). \quad (20.3)$$

Пусть в формуле (18.2) $\alpha_k = 1$ при некотором k , $\alpha_j = 0$ при $j \neq k$.

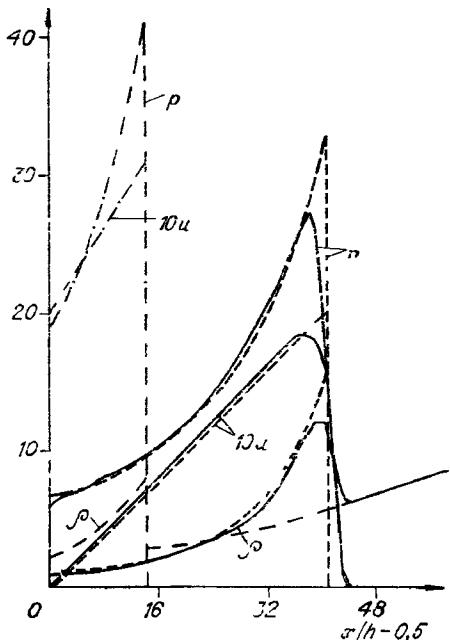


Рис. 43. Профили решений задачи об автомодельной ударной волне.

Тогда с учетом обозначений (20.3) и соотношений (20.2) получим

$$F(\zeta_1) - F(\zeta_2) = \frac{2(\zeta_1 - \zeta_2)}{\tau_1} \left[\left(\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} - \zeta_0 \right) / \tau_1 - a_k \right]. \quad (20.4)$$

Зафиксируем значение ζ_2 и найдем такой промежуток $\Delta(\zeta_2) = [\zeta_2 - \delta_1, \zeta_2 + \delta_2]$, что при $\zeta_1 \in \Delta(\zeta_2)$ выполняются равенства (20.2). Введем обозначение $z = \zeta_1$ и перепишем (20.4) в виде

$$F(z) = F(\zeta_2) + \frac{2(z - \zeta_2)}{\tau_1} \left[\left(\frac{z + \zeta_2}{2} - \zeta_0 \right) / \tau_1 - a_k \right]. \quad (20.5)$$

Из формулы (20.5) следует, что на каждом из определенных выше промежутков $\Delta(\zeta_2)$ функция (18.2) аппроксимируется параболой. Результаты минимизации функции (18.2), представленные на рис. 41 и 42, получены по методу золотого сечения [64, 211]. При этом для вычисления абсциссы ζ^{n+1} с погрешностью $0,01 h$ требовалось только 17 вычислений функции $F(\zeta^{n+1})$.

Хотя исследование точности методов локализации, описанных в предыдущих пунктах, проводили только для случая стационарной ударной волны, было интересно посмотреть, применимы ли новые методы локализации, описанные выше, для задач с нестационарными ударными волнами. С этой целью рассмотрели задачу об автомодельной ударной волне, вызванной кратковременным плоским ударом и распространяющейся в неоднородной атмосфере. Подробная ее постановка и решение содержатся в главе XII книги [51]. Здесь лишь отметим: профили точного решения в области за фронтом таковы, что при $t \geq 0$ $\partial u / \partial x > 0$, $\partial p / \partial x > 0$, $\partial \rho / \partial x > 0$; кроме того, $\partial \rho / \partial x > 0$ также в невозмущенной среде перед фронтом.

Соответствующие профили точного и конечно-разностного решения, полученного по схеме «распад разрыва» [33], даны на рис. 43, взятым из [23]. В этой задаче точная абсцисса x , ударного фронта при $t \geq 0$ рассчитана по формуле $x_f(t) = 6 \ln(t + t_0)$, где t_0 определено из условия $x_0 = 6 \ln t_0$, x_0 — заданная абсцисса фронта ударной волны при $t = 0$. (Штрихпунктирная линия — начальные данные; штриховая — точное решение при $t = 100t_0$; сплошная — численное решение.) В расчетах по схеме [33] взяты значения $h = 0,1$, $\tau = 0,007$ (см. [23]), что соответствовало числу Куранта $K \approx 0,4$. Из рис. 42 следует, что предложенные в § 17—18 оптимизационные алгоритмы применимы также и для нестационарной ударной волны. Необходимо отметить, что в случае и стационарной (см. рис. 39, 41), и нестационарной (рис. 42) ударной волны введение в оптимизационную процедуру локализации информации об аппроксимационной и искусственной вязкости сдвигает вправо траекторию $\zeta(t)$ по сравнению с исходным алгоритмом Миранкера — Пиронно [248, 249].

Основной функционал (17.11) использовали при различных комбинациях весовых коэффициентов α_1 , α_2 , α_3 , в результате показана возможность реализации в функционале (17.11) любого из трех условий Гюгонио либо их комбинации вида (17.11) [23].

Изложенные выше градиентные методы минимизации основного функционала реализованы в виде подпрограммы. Эту подпрограмму, или «модуль», как продемонстрировано в [23], можно применять в сочетании с различными разностными схемами газодинамики. Таким образом, она является одним из средств решения проблемы интерпретации результатов сквозного счета задач газодинамики и повышения точности численных решений в окрестности разрывов.

§ 21. ОБ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ АЛГОРИТМАХ ЛОКАЛИЗАЦИИ КОНТАКТНЫХ РАЗРЫВОВ

В § 17—20 рассмотрены некоторые оптимизационные методы локализации ударных волн по результатам сквозного счета, при этом отмечены следующие их положительные свойства. Во-первых, точность локализации стационарных ударных волн при наличии в основном функционале (17.11) — (17.12) информации об аппроксимационной или искусственной вязкости повышается и сравнительно слабо зависит от конкретного вида вязкости \vec{Q} , как показано в § 17 с использованием решений типа бегущей волны уравнений п. д. п. От схемной вязкости \vec{Q} требуется только, чтобы ее структура обеспечивала гладкий переход от одного состояния к другому в размазанной ударной волне.

Во-вторых, ошибка локализации абсциссы ударного фронта (20.1) является гладкой функцией при использовании оптимизационных процедур § 16—19 в отличие от дифференциальных анализаторов главы 2. Это соответствует физическим свойствам рассматривавшихся газодинамических течений с ударными волнами. В-третьих, для анализа сходимости численных методов минимизации основных функционалов можно использовать хорошо разработанную теорию численных методов оптимизации, как показано в § 19. В-четвертых, изложенная в главе 4 методика исследования точности дифференциальных анализаторов контактных разрывов применима, строго говоря, только к тем течениям с контактными разрывами, в которых давление и скорость постоянны (или близки к постоянным) в окрестности контактных разрывов.

В связи с вышеизложенным представляет интерес разработка методов локализации контактных разрывов, основанных на иных принципах, чем изложенная в главе 4 методика дифференциальных анализаторов контактных разрывов. Далее рассмотрим способы построения оптимизационных алгоритмов локализации контактных разрывов в одномерных течениях, которые основаны на минимизации либо некоторых интегральных функционалов, либо функций.

Известно, что в одномерном течении контактный разрыв движется со скоростью

$$dx/dt = u(x, t), \quad (21.1)$$

где u — скорость газа в окрестности разрыва. Возьмем спачала, как

и в главе 4, задачу о распаде разрыва (1.11), (1.9), (1.5), (13.1). Пусть эта задача решается в промежутке $0 \leq t \leq T$, где $0 < T < \infty$. Пусть $\zeta(t) \in C^1[0, T]$. С учетом формулы (21.1) рассмотрим функционал

$$I(\zeta) = \int_0^T (d\zeta/dt - u(\zeta(t), t))^2 dt. \quad (21.2)$$

Для функционала (21.2) на левом конце $t = 0$ поставим условие $\zeta(0) = x_0$, на правом конце $t = T$ — условие трансверсальности (16.7), где в данном случае

$$F(\zeta(t), \dot{\zeta}(t), t) = [d\zeta/dt - u(\zeta(t), t)]^2. \quad (21.3)$$

С учетом того, что $\zeta(0) = x_0$ и условия трансверсальности (16.7), где функция F определяется по формуле (21.3), легко находим: решение задачи оптимизации вида (16.8) совпадает с точной траекторией контактного разрыва.

Предположим теперь, что в рассматриваемом течении при $t > 0$ наряду с контактным разрывом возникают ударные волны, траектории которых также начинаются из точки $x = x_0$ (см. общую задачу о распаде разрыва в § 1). Для этой ситуации модифицируем функционал (21.2) по формуле

$$\begin{aligned} I_1(\zeta) = \int_0^T & \left[(\dot{\zeta} - u)^2 + \alpha_1 R_1 \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right) + \alpha_2 R_2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) + \right. \\ & \left. + \alpha_3 R_3 \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right) \right] dt, \end{aligned} \quad (21.4)$$

где R_1, R_2, R_3 — непрерывно дифференцируемые функции такие, что

$$\begin{aligned} R_j(z) > 0, \quad z > 0, \quad j = 1, 2, 3; \quad R'_1(z) > 0, \\ R'_2(z) > 0, \quad R'_3(z) < 0. \end{aligned} \quad (21.5)$$

В формуле (21.4) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — постоянные весовые коэффициенты, причем $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0$. Слагаемое $\alpha_3 R_3$ введено в формулу (21.4), чтобы при поиске траектории контактного разрыва исключить из рассмотрения подобласти постоянного течения, так как в них заведомо нет контактных разрывов.

В зоне размазанной ударной волны конечной интенсивности градиенты $|du/dx|, |dp/dx|$ обычно велики при достаточно малом шаге h равномерной сетки на оси x . В то же время в области контактного разрыва градиенты $du/dx, dp/dx$ конечны в силу того, что давление и скорость в одномерном течении непрерывны при переходе через контактный разрыв. Если траектория $\zeta(t) = x$ находится в зоне «размазывания» контактного разрыва, то ей с учетом предыдущих соображений и формулы (21.5) будет соответствовать меньшее значение функционала (21.4), чем в случае траектории $x = \zeta(t)$, лежащей в зоне «размазывания» ударной волны. Таким

образом, при наличии в одномерном течении близко расположенных ударных волн и контактного разрыва решение задачи минимизации функционала (21.4) будет давать при достаточно малых h приближение именно к траектории контактного разрыва. Для численной минимизации функционала (21.4) можно использовать известные методы (см., например, [109, 211], а также § 19).

Следуя § 18, рассмотрим ряд оптимизационных методов локализации контактных разрывов в одномерных течениях, основанных на минимизации некоторых функций. С учетом формул (21.2), (21.4) введем функции

$$J(\zeta^{n+1}) = (\dot{\zeta}_{\tau_1}(t^{n+1}) - u(\zeta^{n+1}, t^{n+1}))^2, \quad (21.6)$$

$$\begin{aligned} J_1(\zeta^{n+1}) = & (\dot{\zeta}_{\tau_1}(t^{n+1}) - u(\zeta^{n+1}, t^{n+1}))^2 + \alpha_1 R_1(p_x^2) + \\ & + \alpha_2 R_2(u_x^2) + \alpha_3 R_3(p_x^2). \end{aligned} \quad (21.7)$$

В формулах (21.6) — (21.7) $\dot{\zeta}_{\tau_1}(t^{n+1})$ — разностная аппроксимация производной $\partial\zeta/\partial t$; ее можно взять, например, в виде (18.3).

Заметим, что все введенные выше функционалы (21.2), (21.4) и функции (21.6), (21.7) содержат явно искомую переменную ζ . Поэтому на основе рассмотрения, аналогичного проведенному в § 20, заключаем, что получаемая на основе численной минимизации указанных функционалов и функций траектория контактного разрыва будет монотонной функцией времени в отличие от случая использования алгоритма 2 дифференциального анализатора контактного разрыва, описанного в § 13 (см. рис. 38).

На рис. 33, б черными точками изображена траектория контактного разрыва, полученная на основе минимизации функции (21.7). При этом в (21.7) полагали

$$\begin{aligned} R_1(z) = R_2(z) = z, \quad R_3(z) = \exp(30/(1+z)), \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1. \end{aligned} \quad (21.8)$$

Минимизацию функции $J_1(\zeta^{n+1})$ осуществляли в промежутке

$$\zeta(t^{n+1} - \tau_1) - \beta h \leq \zeta^{n+1} \leq \zeta(t^{n+1} - \tau_1) + \beta h,$$

учитывая, что за время $\tau_1 = \beta\tau$ контактный разрыв не может продвинуться на расстояние больше βh , поскольку шаг τ задан для схемы Лакса — Вендрофа [235] с учетом критерия Куранта — Фридрихса — Леви $(\tau/h)\max(|u| + c) \leq 1$. В расчете, результат которого приведен на рис. 33, б, точность определения абсциссы минимума функции $J_1(\zeta^{n+1})$ взята равной $0,05 h$; $\beta = 3$ в формуле $\tau_1 = \beta\tau$.

§ 22. ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА МИРАНКЕРА — ПИРОННО НА СЛУЧАЙ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ В ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ

Процессы фильтрации двухфазной жидкости без учета капиллярных и гравитационных сил в плоской области описывают-

ся системой уравнений [70, 24]

$$\operatorname{div} [f_0(s) \operatorname{grad} p] = 0, \quad (22.1)$$

$$m \partial s / \partial t = \operatorname{div} [f_0(s) \varphi(s) \operatorname{grad} p], \quad (22.2)$$

где $f_0(s) = k [f_1(s)/\mu_1 + f_2(s)/\mu_2]$, $k = \text{const}$ — абсолютная проницаемость пористой среды; $f_i(s)$ и μ_i — функция относительной проницаемости и динамическая вязкость i -й фазы, $i = 1, 2$; p — давление двухфазной жидкости; $s = s_2$ — насыщенность вытесняющей фазы; m — пористость среды; $\varphi(s) = \mu_0 f_2(s) / [f_1(s) + \mu_0 f_2(s)]$ — функция распределения вытесняющей фазы, $\mu_0 = \mu_1/\mu_2$. Постановка задач двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей без учета капиллярных и гравитационных сил в плоской области систематически рассмотрена в работе [152]. Показано, что уравнение (22.1) относительно p эллиптическое и граничные условия для давления должны быть заданы как для эллиптического, а уравнение (22.2) относительно s гиперболическое и его решение состоит из движений, начинающихся на линиях начального распределения насыщенности и контурах закачки вытесняющей фазы. Однако поскольку при реальных функциях $f_1(s)$ и $f_2(s)$ скорости перемещения изостат (линий равной насыщенности) являются, как правило, немонотонными функциями от s , с течением времени может произойти касание и пересечение различных изосат. Для устранения возникающей неоднозначности решения допускается образование линий, вдоль которых насыщенность изменяется скачкообразно [152]. При этом давление p остается непрерывной функцией.

Таким образом, в решении системы (22.1), (22.2) только одна функция — насыщенности s — может иметь сильные разрывы. В данном смысле (22.1), (22.2) проще системы уравнений Эйлера (9.1), описывающих двумерное течение невязкого сжимаемого не теплопроводного газа, так как на фронте газодинамической ударной волны в двумерном течении терпят разрыв четыре функции ρ , u , v , ε . В этой связи было решено обобщить метод Миранкера — Пиронно, изложенный в § 16, 17, на двумерный случай сначала на примере более простой системы (22.1) — (22.2). В работах [142, 143] метод Миранкера — Пиронно применен для локализации разрыва функций насыщенностей в численных решениях одномерных задач фильтрации.

22.1. Вариационная формулировка задачи локализации разрыва функции насыщенности

Линия разрыва в каждый момент времени t характеризуется предельными значениями насыщенности $s^+(x, y, t)$ и $s^-(x, y, t)$ по обе стороны линии разрыва, связанными условиями сопряжения. Одним из условий сопряжения является условие неразрывности индивидуального потока вытесняющей фазы, которое записывается в виде

$$D_n = (w_{n2}^+ - w_{n2}^-) / [m (s^+ - s^-)], \quad (22.3)$$

где D_n — нормальная скорость перемещения линии разрыва, $w_{n2} = -k/\mu_2 f_2(s) \partial p / \partial n$ — поток вытесняющей фазы по направлению нормали к линии разрыва. В частном случае, когда через контур закачки подается только вытесняющая фаза, а пористая среда в начальный момент времени содержит связанный вытесняющей фазой, скачок насыщенности образуется с момента закачки. При этом линия разрыва формируется как изосата со значением s_* , определяемым из соотношения

$$\varphi'(s_*) = \Phi(s_*)/(s_* - s), \quad (22.4)$$

где s — нижнее предельное значение s , $\varphi'(s) = d\varphi/ds$ [152].

Рассматриваемая далее задача фильтрации такова, что если уравнение фронта разрыва насыщенности искать в виде $y = Y(x, t)$ или $x = X(y, t)$, то при фиксированном t обе функции могут не быть однозначными в некоторых отрезках соответствующей пространственной оси координат. В связи с этим целесообразно использовать полярные координаты (r, θ) , где r — радиус-вектор, θ — полярный угол. Пусть уравнение

$$r = R(\theta, t) \quad (22.5)$$

описывает линию разрыва насыщенности в плоскости (r, θ) при каждом фиксированном t . Эта линия в исследуемой в п. 22.3 задаче о площадном заводнении при пятиточечной системе расположения скважин имеет при достаточно больших t форму «языка», вытянутого в направлении биссектрисы угла xOy (см. штрихпунктирную линию на рис. 45). Так что в рассматриваемом случае функция $R(\theta, t)$ в формуле (22.5) однозначна. Построим определяющий функционал для нахождения линии разрыва исходя из условия (22.3). Введем обозначение $g(r, \theta, t) = r - R(\theta, t)$. Тогда скорость разрыва D_n вычисляется по формуле $D_n = (\partial R / \partial t) / |\operatorname{grad} g|$ [75]. Очевидно, что равенство

$$(\partial R / \partial t) / |\operatorname{grad} g| = \Phi(R(\theta, t), \theta, t), \quad (22.6)$$

где в соответствии с (22.3) $\Phi(R(\theta, t), \theta, t) = (w_{n2}^+ - w_{n2}^-) / [m(s^+ - s^-)]$ имеет место только тогда, когда уравнение $r = R(\theta, t)$, описывает линию разрыва.

Пусть линия с уравнением $r = Q(\theta, t)$ является некоторым приближением к искомой линии разрыва. Рассмотрим неотрицательный функционал

$$F(Q) = \int_{t_*}^{t_* + \Delta t} U(I(Q, t)) dt, \quad (22.7)$$

где

$$I(Q, t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} a(Q) [(\partial Q / \partial t) |\operatorname{grad} g| - \Phi(Q, \theta, t)]^2 d\theta, \quad (22.8)$$

t_* , Δt — постоянные величины, причем $t_0 \leq t_* \leq t_* + \Delta t \leq T$; t_0 и T — начальный и конечный моменты времени; $[\theta_1, \theta_2]$ — об-

ласть изменения полярного угла θ , $\theta_1 < \theta_2$. Положительная функция $a(Q)$ введена со следующими целями: во-первых, чтобы обеспечить нужную размерность градиента функционала $F(Q)$; во-вторых, при подходящем выборе функции $a(Q)$ можно достичь более высокой скорости сходимости вычислительного процесса минимизации функционала (22.7) [109]. Функция $U(z)$ в формуле (22.7) выбирается из требований $U(z) > 0$, $U'(z) > 0$ при $z > 0$ и $U(0) = 0$. Простейшей функцией $U(z)$, удовлетворяющей указанным требованиям, является функция $U(z) = z$.

Решение нестационарной системы (22.1) с помощью конечноразностных схем (см. п. 22.3) вычисляется последовательно для шагов $t^n = n\tau$, $n = 1, 2, \dots$. В соответствии с этим функцию $Q(\theta, t)$ в уравнении $r = Q(\theta, t)$, определяющем приближение к линии разрыва, также можно находить для возрастающих значений $t = n\tau$. Пусть значения функции $Q(\theta, t^n)$ найдены в виде таблицы величин $\{r_i, \theta_i\}$ при некотором $t = t^n$, где $r_i = Q(\theta_i, t^n)$, $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N$. Соединив соседние точки (r_i, θ_i) и (r_{i+1}, θ_{i+1}) , $i = 1, \dots, N - 1$, отрезками прямой, получим некоторую линию $r = R^{(n)}(\theta)$. Поскольку за шаг $\Delta t = O(\tau)$ каждая точка (r_i, θ_i) продвигается на малое расстояние порядка $O(h)$ при $\tau = O(h)$, где h — характерный размер ячейки эйлеровой расчетной сетки, в целях уменьшения требуемого числа итераций удобно искать положение линии разрыва на следующий момент $t = t^{n+1}$ в ε -окрестности $\Omega(t^n)$ линии $r = R^{(n)}(\theta)$, где $\varepsilon = O(h)$. Положим в (22.7) $t_* = t^n$, $\Delta t = \beta\tau$: $\beta = O(1)$, например $\beta = 2$. Тогда линию разрыва $r = R(\theta, t)$ при $t_* \leq t \leq t_* + \Delta t$ можно искать как решение следующей задачи на экстремум:

$$\min_Q \{F(Q) | Q(\theta, t^n) = R^{(n)}(\theta), Q(\theta, t) \in \Omega(t^n)\}. \quad (22.9)$$

Построим определяющий функционал, используя более простое условие на разрыве (22.4). Перепишем условие (22.4) в координатах r и θ

$$J(R) = \varphi'(s(R - 0)) - \varphi(s(R - 0)) / [s(R - 0) - s(R + 0)] = 0, \quad (22.10)$$

где аргументы $R - 0$ и $R + 0$ означают, что величина s вычислена соответственно за и перед фронтом разрыва. Сконструируем неотрицательный функционал

$$G(Q) = \int_{t_*}^{t_* + \Delta t} \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} b(Q) [J(Q)]^2 d\theta \right\} dt. \quad (22.11)$$

Положительная функция $b(Q)$ введена в функционал (22.11) для тех же целей, что и функция $a(Q)$ в функционал (22.8). Тогда поверхность разрыва $r = R(\theta, t)$ можно рассматривать как решение задачи на экстремум функционала (22.1).

При минимизации функционала (22.11) находим функцию двух переменных θ, t . Численное решение двумерных задач минимиза-

ции требует существенно больших расходов машинного времени, чем решение одномерных задач. С другой стороны, в практических приложениях достаточно знать вид функции $r = R(\theta, t)$ лишь для нескольких интересующих нас моментов времени. Учитывая это, можно существенно упростить предложенные выше двумерные задачи оптимизации, сводя задачу поиска линии разрыва на фиксированный момент времени к задаче минимизации следующих одномерных функционалов (сохраним соответствующие прежние обозначения)

$$F(Q) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} a(Q(\theta, t)) [(\partial Q / \partial t) / |\operatorname{grad} g| - \Phi(Q(\theta, t))]^2 d\theta,$$

$$G(Q) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} b(Q(\theta, t)) [J(Q(\theta, t))]^2 d\theta. \quad (22.12)$$

Так как эти функционалы содержат только интегрирование по θ , будем опускать для краткости второй аргумент у функции $Q(\theta, t)$. Тогда задача поиска линии разрыва на основе минимизации функционала (22.12) формулируется как

$$\min_Q \{G(Q) | Q(\theta) \in C^1[\theta_1, \theta_2]\}.$$

22.2. Метод численной минимизации определяющего функционала

Следуя [24], ограничимся описанием вычислительного метода минимизации функционала (22.12), предназначенного по конструкции для определения линии разрыва в фиксированный момент времени. Второй аргумент у функции $Q(\theta, t)$ для краткости будем опускать. Возьмем функцию $Q(\theta)$ и приращение $\Delta Q(\theta)$ к ней из пространства $C^1[\theta_1, \theta_2]$. Соответствующее приращение функционала можно представить в виде

$$G(Q + \Delta Q) - G(Q) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \nabla G(Q) \Delta Q d\theta + O((\Delta Q)^3), \quad (22.13)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla G(Q) = & \{2b(Q)J(Q)\partial J(Q)/\partial Q + db(Q)/dQ[J(Q)]^2 + \\ & + \{b(Q)J(Q)\partial^2 J(Q)/\partial Q^2 + b(Q)[\partial J(Q)/\partial Q]^2 + \\ & + 2db(Q)/dQJ(Q)\partial J(Q)/\partial Q + 0,5d^2b(Q)/dQ^2[J(Q)]^2\}\Delta Q. \end{aligned} \quad (22.14)$$

Выберем приращение ΔQ следующим образом:

$$\Delta Q = -\lambda \nabla G(Q), \quad (22.15)$$

где λ — некоторая безразмерная положительная величина. Подстав-

ляя правую часть формулы (22.15) в равенство (22.13), получим

$$G(Q + \Delta Q) - G(Q) = -\lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\nabla G(Q)]^2 d\theta + O((\lambda \nabla G)^3). \quad (22.16)$$

Из формулы (22.16) следует, что при достаточно малой величине $|\lambda \nabla G|$ правая часть отрицательна и, следовательно, функционал (22.12) убывает. Тогда, в соответствии с формулой (22.15), полагаем

$$Q_{n+1}(\theta) = Q_n(\theta) - \lambda \nabla G(Q_n). \quad (22.17)$$

Согласно (22.17) и (22.14), функция $b(Q)$ в функционале (22.12) должна быть выбрана имеющей размерность L^2 , где L — размерность длины.

Опишем алгоритм минимизации функционала (22.12), основанный на формулах (22.12) — (22.17).

1. Выбрать $Q_0(\theta) \in C^1[\theta_1, \theta_2]$, $\sigma \in (0,5; 0,8)$ и положить $n = 0$.
2. Вычислить значение $H(Q_n) = -\nabla G(Q_n)$ по формулам (22.14) и (22.10).
3. Если $H(Q_n) = 0$, то остановиться; иначе перейти к шагу 4.
4. Выбрать $\lambda > 0$.
5. Вычислить

$$\Delta = G(Q_n + \lambda H(Q_n)) - G(Q_n) + 0,5\lambda \|H(Q_n)\|_{L^2[\theta_1, \theta_2]}^2. \quad (22.18)$$

6. Если $\Delta \leq 0$, то положить $\lambda_n = \lambda$ и перейти к шагу 7; иначе принять $\lambda = \sigma \lambda$ и перейти к шагу 5.
7. Вычислить $Q_{n+1}(\theta)$ по формуле (22.17).
8. Проверить выполнение условия

$$\max_{\theta} [|Q_{n+1}(\theta) - Q_n(\theta)| / h] < \delta, \quad (22.19)$$

где δ — наперед заданная величина, $0 \leq \delta \leq 1$. Если (22.19) не выполняется, то положить $n = n + 1$ и перейти к шагу 2. При указанных выше условиях на входные данные описанный алгоритм наискорейшего спуска будет сходящимся [109].

Рассмотрим теперь вопрос о реализации алгоритма минимизации основного функционала (22.12). Предположим, что начально-краевая задача, соответствующая системе уравнений (22.1), (22.2), рассчитана в основной эйлеровой разностной сетке в плоскости (x, y) . Пусть номер i разностной ячейки отсчитывается вдоль оси x , а номер j — вдоль оси y . Разобьем отрезок $[\theta_1, \theta_2]$ на N_θ равных частей и пусть $\bar{\theta}_\alpha = \alpha \Delta \theta + \theta_1$, $\Delta \theta = (\theta_2 - \theta_1) / N_\theta$, $\alpha = 0, 1, \dots, N_\theta$. Возьмем при произвольном α , $0 \leq \alpha \leq N_\theta$, точку $(Q_n(\bar{\theta}_\alpha), \bar{\theta}_\alpha)$. Пусть ближайший к ней узел прямоугольной сетки имеет индексы (i_α, j_α) . Производную $\partial J / \partial Q$, входящую в формулу (22.14), вычислим по формуле

$$\partial J(Q_n(\bar{\theta}_\alpha), \bar{\theta}_\alpha) / \partial Q = (\partial J / \partial x)_{i_\alpha, j_\alpha} \cos \bar{\theta}_\alpha + (\partial J / \partial y)_{i_\alpha, j_\alpha} \sin \bar{\theta}_\alpha.$$

Здесь производные по переменным x и y аппроксимированы с использованием двухточечных разностей. Отметим также, что в численных экспериментах использованы простейшие аппроксимации функционала (22.12) и градиента (22.14), аналогичные формулам (19.12), (19.13). Упомянутые разностные формулы для функционала (22.12) и градиента (22.14) имеют погрешность соответственно $O(\Delta\theta)$ и $O(h_x) + O(h_y)$, где h_x и h_y — шаги равномерной разностной сетки в плоскости (x, y) .

22.3. Результаты численных расчетов

Пусть область фильтрации покрыта пятиточечной системой скважин [70]. Выделим квадрат $1232'$ (см. рис. 44, 45), в вершине 1 которого расположена нагнетательная скважина Γ_8 с контуром $4'54'$, в вершине 2 — эксплуатационная скважина с контуром $676'$. Картина течения в таком квадрате дает представление о течении в целом в области фильтрации.

Допустим далее, что на нагнетательной скважине подается только вытесняющая фаза с объемным расходом $W_0(t)$, на эксплуатационной скважине поддерживается постоянное давление p_0 , а на остальной части границы области фильтрации задано условие симметрии. Будем считать также, что в начальный момент времени $t = t_0 \geq 0$ пористая среда содержит связанную вытесняющую фазу. Тогда для искомых функций формулируются следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{grad}_n p|_{\Gamma_8} &= -W_0(t)/(k/\mu_2); \\ p|_{\Gamma_8} &= p_0, \quad \text{grad}_n p|_{\Gamma_{426} + \Gamma_{6'2'4'}} = 0; \\ s|_{D_{1232'} - D_{1454'}, t=t_0} &= \underline{s}, \quad s|_{\Gamma_8, t \geq t_0} = \bar{s}, \end{aligned} \quad (22.20)$$

где через $D_{1232'}$, $D_{1454'}$ и Γ_{426} , $\Gamma_{6'2'4'}$ обозначены соответствующие области и контуры, \bar{s} — верхнее предельное значение насыщенности.

Численный расчет задачи (22.1), (22.2), (22.20) осуществлен по алгоритму, предложенному в [41, 71]. Уравнение (22.1) решали по итерационной схеме переменных направлений [62]. При организации итерационного процесса задано постоянное начальное давление $p_{i,j} = p_0$, $0 \leq i \leq N_x$, $0 \leq j \leq N_y$, где N_x и N_y — число узлов разностной сетки по осям x и y . Итерационный процесс при определении поля давления продолжался до выполнения условия

$$\max_{i,j} |p_{i,j}^{\omega+1} - p_{i,j}^{\omega}| \leq \epsilon_p,$$

где ω — номер итерации.

При выборе разностной схемы интегрирования уравнения (22.2) необходимо учитывать, что функция $\phi(s)$ не выпукла (см., например, [71]). В [221] показано, что такие немонотонные схемы, как схема Лакса — Вендрофа, могут сходиться к решениям, не удовлетворяющим условию возрастания энтропии при переходе че-

рез разрыв, в случае невыпуклой функции $\varphi(s)$ в уравнении $s_t + (\varphi(s))_x = 0$. С другой стороны, монотонными схемами, как показано, например, в [221], могут быть только схемы первого порядка точности, недостаток которых — большая численная диффузия. Но эта же диффузия играет и положительную роль: ее наличие обеспечивает выполнение энтропийного неравенства в случае невыпуклой функции $\varphi(s)$ (см. [221, 179]). В связи с этим в [179] сделан вывод о предпочтительности схем первого порядка точности, которые предотвращают появление ложных слабых решений. Результаты недавнего исследования [217] указывают на то, что для обеспечения энтропийного неравенства в газодинамических расчетах достаточно применять диффузию первого порядка $O(h)$ только локально, вблизи разрывов. В [179] сообщается об обнаруживающих результатах, полученных при обобщении метода Хартена [217] на случай невыпуклой функции $\varphi(s)$. В соответствии с [179] альтернативный подход к решению проблемы повышения точности разностных решений задач фильтрации состоит в использовании конечно-разностной сетки, адаптирующейся к потоку так, что линии сетки сгущаются в областях быстрого пространственного изменения решения.

В приводимых далее примерах расчетов уравнение (22.2) решалось на фиксированной прямоугольной сетке по разностной схеме первого порядка точности с уменьшенной ориентационной погрешностью [84]. Как и в [40], при проведении численных расчетов использовали функции $f_1(s) = (1-s)^2$, $f_2(s) = s^2$, для которых $s=0$, $\bar{s}=1$. Значение насыщенности за фронтом разрыва при $\mu_0 = 10$, определяемое из соотношения (22.4), равно $s_* = 0,3015$. На рис. 44 сплошными линиями обозначены изосаты в поле насыщенности при некотором $t > t_0$ [24]. Штриховой кривой на рис. 44, 45 нанесена линия разрыва насыщенности, полученная приближенным аналитическим методом — методом зональной линеаризации [40]. Если линию разрыва функции насыщенности в численном решении определять по сгущению изосат, то точность определения на рис. 44 составит до $2h$ (на рис. 44 и 45 по осям координат нанесены номера узлов разностной сетки с шагами $h_x = h_y = h = 1$ см).

На рис. 45 представлены результаты локализации линии разрыва функции насыщенности путем минимизации на численном решении определяющего функционала (22.12) при $b(Q) = 1 \text{ см}^2$. В расчетах в соответствии с классическим методом наискорейшего спуска [109, 115] ограничивались первым слагаемым в формуле (22.14). Поскольку итерационный процесс поиска линии разрыва осуществляется при некотором конечном значении параметра λ и соответственно приращения ΔQ , знак $\nabla G(Q)$, вообще говоря, не определяется только знаком первого слагаемого в формуле (22.14). В некоторых расчетах это действительно имело место, что объясняется большими градиентами насыщенности в окрестности искомой линии разрыва. В качестве начального приближения к искомой линии разрыва задавалась дуга окружности радиуса 1 см. Для рассмотренного элемента симметрии области фильтрации угол θ ме-

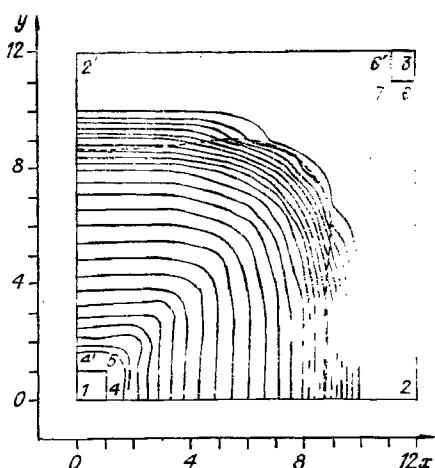


Рис. 44. Изосаты в поле насыщенности.

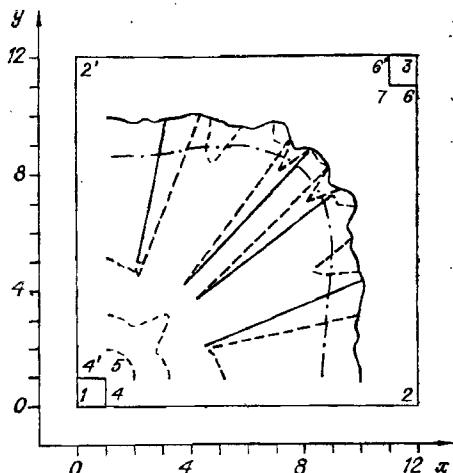


Рис. 45. Локализация фронта разрыва насыщенности.

няется в сегменте $[0, \pi/2]$, число делений этого сегмента выбрано $N_\theta = 40$, $\sigma = 0,5$. Итерационный процесс начинался с $\lambda = 20$. Для оценки точности определения линии разрыва в [24] введен параметр

$$\delta R_n = \max_0 |(R_a(\theta, t) - R_{G,n}(\theta, t))/h|,$$

где $R_a(\theta, t) = r$ — линия разрыва, построенная методом зональной линеаризации [40]; $R_{G,n}(\theta, t)$ — линия разрыва, вычисленная оптимизационным методом, n — номер итерации. Результат последней итерации обозначен на рис. 45 сплошной линией, а предыдущих — штриховыми. В примере расчета, приведенном на рис. 45, погрешность δR_n составила 1,336.

Алгоритм поиска линий разрыва функции насыщенности реализован в виде отдельной подпрограммы, которая может работать параллельно с основной программой решения исходной задачи. Это особенно удобно, когда линию разрыва необходимо определить последовательно на нескольких моментах времени или когда информация о местоположении линии разрыва на данный момент времени используется для уточнения последующих расчетов. Время обработки числовой информации в целях определения линии разрыва по вышеизложенному оптимизационному методу составляло незначительную долю времени расчета основной задачи — 10—15 с; или 3—5 %.

Предложенный метод локализации разрыва в многомерных задачах имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционным способом визуального определения линии разрыва по сближению изолиний. Во-первых, он поддается теоретическому исследованию на сходимость (см. [109], а также § 19 и п. 22.2); во-вторых, предложенный метод позволяет получать автоматически, без последующего вмешательства со стороны пользователя, искомую поверхность разрыва, что создает предпосылки для более точного моделирования некоторых важных технологических показателей.

Глава 6

УТОЧНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ

Как отмечалось, «размазывание» сильных разрывов при использовании конечно-разностных схем сквозного счета создает две проблемы: 1) интерпретации результатов численного расчета; 2) повышения точности разностных решений в окрестности разрывов. В главах 2—5 проблема локализации сильных разрывов рассматривалась как один из основных аспектов интерпретации числовых результатов.

Проблема повышения точности численных решений в окрестности сильных разрывов давно является объектом исследований. Один из путей ее решения состоит в явном выделении разрывов, подобно тому, как это делается в различных вариантах метода «подгонки скачка» [251, 252, 158, 130]. Еще один способ явного учета разрывов основан на особой конструкции расчетной сетки, когда некоторые из ее узлов помещают в точки разрывов [93, 1, 34].

Другое направление исследований по проблеме повышения точности численных решений в окрестности сильных разрывов характеризуется тем, что в разностной схеме разрывы явно не выделяют, а используют расчетные сетки, автоматически сгущающиеся в областях больших градиентов решения (см. § 8, 11, а также [67, 208, 273]).

Третье направление предусматривает разработку такой разностной схемы, которая бы обеспечивала на простейшей равномерной сетке минимальную ширину зоны «размазывания» разрыва. К нему можно отнести метод перепоса подправленных потоков Бориса и Бука [182, 183, 266, 293, 112, 174, 294, 202], метод искусственного сжатия Хартена [218—220, 266, 217]. В [219] сделан вывод, что метод Бориса — Бука не предотвращает «размазывания» контактных разрывов. Из данных газодинамических тестовых расчетов, приведенных в [266], следует, что метод Хартена дает результаты, сравнимые с полученными по другим известным разностным схемам в эйлеровых переменных (см. § 26).

Метод уточнения разностных решений в окрестности разрывов [21], излагаемый в настоящей главе, использует равномерную расчетную сетку на оси x , где x — эйлерова пространственная координата. Заметим, что фиксированные во времени равномерные пространственные сетки широко применяют при расчетах течений жидкости в областях с прямоугольными границами (см., например, [120, 253]). Характерной чертой излагаемого ниже метода уточнения является использование информации о положении разрыва. Для его локализации применен дифференциальный анализатор, построение и исследование которого осуществлены в главах 2—4. Отметим, что ранее в работах [189, 243] информацией о положении

разрыва с успехом пользовались для целей уточнения разностного решения в окрестности разрыва с помощью адаптирующейся к решению сетки (см. § 8).

§ 23. КОНСТРУКЦИЯ ОСНОВНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Как показано в § 1, одним из видов сильных разрывов в одномерных течениях невязкого сжимаемого газа является контактный разрыв. При переходе через контактный разрыв давление и нормальная к поверхности разрыва составляющая скорости меняются непрерывно, а плотность, температура и энтропия теряют разрыв. В некоторых частных случаях (например, в задаче о распаде разрыва) градиенты давления и скорости в окрестности одномерного контактного разрыва равны нулю. При разработке алгоритмов уточнения представлялось разумным сначала рассмотреть наиболее простые ситуации и научиться строить подобные алгоритмы для таких ситуаций. В этой связи выбран тот случай одномерного контактного разрыва, когда производные du/dx и dr/dx по обе стороны контактного разрыва равны нулю, где u — скорость, r — давление газа. Как показано в § 13, в данном случае задача исследования свойств разностных решений в окрестности контактного разрыва сводится к исследованию разностных схем для линейного уравнения (13.8): $\partial r/\partial t + u_0 \partial r/\partial x = 0$, где $u_0 = \text{const}$ — скорость газа в окрестности контактного разрыва. Ниже всюду предполагаем, что $u_0 > 0$ (случай $u_0 < 0$ рассматривается аналогично). В дальнейшем в целях удобства обозначений линейное уравнение переноса (13.8) будем использовать в виде формулы (2.9): $\partial u/\partial t + a \partial u/\partial x = 0$, таким образом, уравнения (2.9) и (13.8) совпадают, если обозначим $u = r$, $a = u_0$.

Обычно задачи газовой динамики решаются в областях конечных размеров. В этой связи будем искать решение уравнения (2.9) в конечной области D , определяемой неравенствами $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, где $0 < l < \infty$. Поставим для функции $u(x, t)$ начальное и краевое условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (23.1)$$

$$u(0, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (23.2)$$

где функции ψ и u_0 таковы, что $\psi(0) = u_0(0)$. Тогда решение начально-краевой задачи (2.9), (23.1), (23.2) легко находится во всей области и имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \psi(t - x/a), & 0 \leq x < at, \\ u_0(x - at), & at \leq x \leq l. \end{cases} \quad (23.3)$$

Перейдем к получению разностного решения задачи (2.9), (23.1), (23.2). Введем в области D равномерную сетку G_h с шагами h по оси x и t по оси t . Аппроксимируем уравнение (2.9) по явной конечноразностной схеме с односторонними разностями

(«уголок»)

$$u_i^n = u_i^{n-1} - \kappa (u_i^{n-1} - u_{i-1}^{n-1}). \quad (23.4)$$

где κ — число Куранта,

$$\kappa = at/h, \quad (23.5)$$

n — номер временного шага, $n = 1, 2, \dots, n = u(x_i, t_n)$, где $x_i = (i + 0,5)h$, $i = 0, 1, \dots, i_x$, $(i_x + 1)h = l$, $t_n = n\tau$. В § 13 показано, что разностная схема (23.4) описывает на одномерном контактном разрыве в решении модельной задачи (1.11), (1.9), (13.1) свойства таких известных разностных методов первого порядка точности, как «распад разрыва» [33], FLIC [210], метод «крупных частиц» [12].

Поскольку нас интересует расчет сильных разрывов, будем предполагать наличие в начальном профиле $u_0(x)$ [см. формулу (23.1)] хотя бы одного сильного разрыва. Пусть N_d — число сильных разрывов в расчетной области при $t = 0$; $N_d \geq 1$. Обозначим через Ω окрестность сильного разрыва, не содержащую других разрывов. Наряду с сеткой G_h введем в окрестности Ω сетку G_Δ следующим образом. Пусть x_f^m — значение абсциссы рассматриваемого разрыва при $t = t_m$. Обозначим через x_f^n приближенное значение абсциссы разрыва при $t = t_n$. На линиях $t = t_m$ и $t = t_n$ будем вычислять абсциссы ξ_k^m, ξ_k^n узлов сетки G_Δ по формулам

$$\begin{aligned} \xi_k^m &= x_f^m - (M_1 - k)(\Delta x)_1, \quad k = 0, \dots, M_1; \\ \xi_k^n &= x_f^n + (k - M_1 - 1)(\Delta x)_2, \quad k = M_1 + 1, \dots, M + 1, \end{aligned} \quad (23.6)$$

где $v = m$ или n . В формулах (23.6) M_1, M — целые числа, $M_1 \geq 1$, $M \geq M_1 + 1$. Таким образом, сетка G_Δ содержит $(M + 2)$ узлов при $t = t_m$ и столько же узлов при $t = t_n$.

Вопрос о подборе чисел M_1 и M и шагов $(\Delta x)_1, (\Delta x)_2$ тесно связан со свойствами «размазывания» разрыва при счете по той или иной разностной схеме и подробно обсужден далее. А сейчас приступим к построению основного функционала. При $k = 0, \dots, M + 1$ соединим точки $(\xi_k^m, t_m), (\xi_k^n, t_n)$ отрезками прямых (рис. 46). В результате получим M подобластей Ω_k . Поскольку такие области Ω_k выстраиваются в окрестности сильного разрыва на каждом временном шаге, можно сказать, что они сопровождают сильный разрыв при его движении в плоскости (x, t) . Граница Γ_k каждой из подобластей Ω_k имеет форму параллелограмма в плоскости (x, t) . Найдем теперь среди узлов сетки G_h такие два узла, которые являются ближайшими к граничным узлам $x = \xi_0^n, x = \xi_{M+1}^n$ сетки G_Δ . Пусть номера этих узлов сетки G_h вдоль оси x есть соответственно i_l и i_r . Дополнительно потребуем, чтобы координаты $x_{i_l} = (i_l + 0,5)h$, $x_{i_r} = (i_r + 0,5)h$ удовлетворяли неравенствам

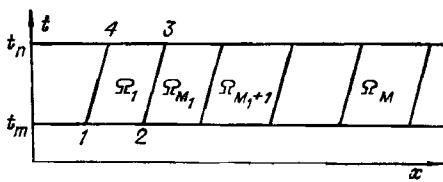


Рис. 46. Сетка в окрестности разрыва.

$$\xi_0^n \leqslant x_{i_1}, \quad \xi_{M+1}^n \geqslant x_{i_r}. \quad (23.7)$$

Обозначим через U_k^n значение приближенного решения задачи (2.9), (23.1), (23.2) на сетке G_Δ ; $U_k^n = U(\xi_k^n, t_n)$. Уравнению (2.9) соответствует интегральный закон сохранения

$$I_k = \oint_{\Gamma_k} u dx - a u dt = 0, \quad (23.8)$$

справедливый для каждой из подобластей Ω_k . Апроксимируем интеграл (23.8) следующим образом. Пронумеруем угловые точки области Ω_k цифрами 1, 2, 3, 4 (см. рис. 46). Тогда

$$I_k = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1.$$

Используем приближенные формулы

$$\begin{aligned} \int_1^2 &= [\alpha_1 U_{k-1}^m + (1 - \alpha_1) U_k^m] (\Delta x)_1; \\ \int_2^3 &= [\alpha_2 U_k^m + (1 - \alpha_2) U_k^n] k_f \tau - a \tau [\alpha_3 U_k^m + (1 - \alpha_3) U_k^n]; \\ \int_3^4 &= - [\alpha_4 U_{k-1}^n - (1 - \alpha_4) U_k^n] (\Delta x)_1; \\ \int_4^1 &= - k_f \tau [\alpha_5 U_{k-1}^m + (1 - \alpha_5) U_{k-1}^n] + a \tau [\alpha_6 U_{k-1}^m + (1 - \alpha_6) U_{k-1}^n], \end{aligned} \quad (23.9)$$

где $k = 1, \dots, M_1$, α_j — постоянные, $0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1$, $j = 1, \dots, 6$,

$$k_f = (x_f^n - x_f^m) / (t_n - t_m). \quad (23.10)$$

В итоге получаем разностные уравнения

$$a^{(1)} U_{k-1}^n + b^{(1)} U_k^n + c^{(1)} U_{k-1}^m + d^{(1)} U_k^m = 0, \quad (23.11)$$

где

$$k = 1, \dots, M_1, \quad \kappa_1 = a \tau / (\Delta x)_1, \quad \kappa_2 = k_f \tau / (\Delta x)_1, \quad (23.12)$$

$$a^{(1)} = -\alpha_4 - \kappa_2 (1 - \alpha_5) + \kappa_1 (1 - \alpha_6);$$

$$b^{(1)} = (1 - \alpha_2) \kappa_2 - \kappa_1 (1 - \alpha_3) - (1 - \alpha_4); \quad (23.13)$$

$$c^{(1)} = \alpha_1 - \kappa_2 \alpha_5 + \kappa_1 \alpha_6;$$

$$d^{(1)} = 1 - \alpha_1 + \alpha_2 \kappa_2 - \alpha_3 \kappa_1.$$

Задавая конкретные значения весовых коэффициентов α_j , будем иметь одну из схем многошагового семейства (23.11) — (23.13). Зададимся целью найти в семействе (23.11) — (23.13) схе-

му, имеющую порядок аппроксимации $O(\tau) + O((\Delta x)_1)$ и обладающую таким запасом устойчивости, который позволял бы устойчивый счет по схеме (23.11) — (23.13) даже при шаге $(\Delta x)_1 < h$ с тем же значением временного шага τ , обеспечивающим устойчивый счет по схеме (23.4). Разложим величины $U_{k-1}^n, U_k^n, U_{k-1}^m, U_k^m$ в формуле (23.11) в ряды Тейлора относительно точки с координатами (ξ_k^m, t_m) , $m = n - 1$, где ξ_k^m вычисляется по соответствующей формуле в соотношениях (23.6). Например, U_k^n разлагаем по формуле

$$U_k^n = U_k^m + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_k^m \tau k_f + \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_k^m \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_k^m \tau^2 k_f^2 + \\ + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right)_k^m \tau k_f / \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_k^m \tau^2 + O(\tau^3). \quad (23.14)$$

Подставляя разложения типа (23.14) в уравнение (23.11), после некоторых вычислений получаем Г-форму первого дифференциального приближения (п. д. п.) разностной схемы (23.11) в виде

$$B_1 U_t + B_2 U_x + B_3 U_{xx} + B_4 U_{xt} + B_5 U_{tt} = 0, \quad (23.15)$$

где

$$B_1 = \tau(a^{(1)} + b^{(1)}), \\ B_2 = a^{(1)} \tau k_f + b^{(1)} (\tau k_f + (\Delta x)_1) + d^{(1)} (\Delta x)_1, \\ B_3 = (1/2) (a^{(1)} \tau^2 k_f^2 + b^{(1)} (\tau k_f + (\Delta x)_1)^2) + d^{(1)} (1/2) ((\Delta x)_1)^2, \quad (23.16) \\ B_4 = a^{(1)} \tau^2 k_f + b^{(1)} \tau \cdot (\tau k_f + (\Delta x)_1); \\ B_5 = (1/2) \tau^2 (a^{(1)} + b^{(1)}).$$

С целью обеспечения аппроксимации исходного уравнения (2.9) потребуем, чтобы

$$B_2 = a B_1. \quad (23.17)$$

Предполагая, что a , выбраны так, что равенство (23.17) имеет место, найдем, исходя из (23.15), П-форму п. д. п.

$$U_t + a U_x = (1/B_1) (a B_4 - B_3 - B_5 a^2) U_{xx}. \quad (23.18)$$

Теперь проведем анализ устойчивости схемы (23.11) по методу Фурье. Подставим в (23.11) частное решение вида $U_k^n = \lambda^n e^{i k \alpha}$, где $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = s(\Delta x)_1$, s — вещественная постоянная. В результате получим для квадрата модуля комплексного числа λ выражение

$$|\lambda|^2 = \{[(c^{(1)} + d^{(1)} \cos \alpha)(a^{(1)} + b^{(1)} \cos \alpha) + b^{(1)} d^{(1)} \sin^2 \alpha]^2 + \\ + (a^{(1)} d^{(1)} - b^{(1)} c^{(1)})^2 \sin^2 \alpha\} / [(a^{(1)} + b^{(1)} \cos \alpha)^2 + (b^{(1)})^2 \sin^2 \alpha]^2. \quad (23.19)$$

Для обеспечения устойчивости необходимо потребовать выполнения неравенства

$$|\lambda|^2 \leq 1. \quad (23.20)$$

Здесь не будем останавливаться на детальном исследовании семейства схем (23.11) — (23.13), выберем из него некоторую частную схему и покажем, что она удовлетворяет требованиям аппроксимации и устойчивости. А именно: положим в соотношениях (23.13)

$$\alpha_1 = \alpha_4 = 1/2, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0. \quad (23.21)$$

Выбирая такой набор α_i , исходим из того общего соображения, что неявные схемы для гиперболического уравнения (2.9) обладают более высокой счетной устойчивостью, чем явные (см. также [118]). Подставляя значения (23.21) в формулы (23.13), будем иметь

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= -(1/2) - \kappa_2 + \kappa_1, \quad b^{(1)} = \kappa_2 - \kappa_1 - (1/2), \\ c^{(1)} &= d^{(1)} = 1/2. \end{aligned} \quad (23.22)$$

С учетом формул (23.16), (23.22) легко видеть, что условие аппроксимации (23.17) выполняется. Используя формулы (23.16), (23.18), получим П-форму п. д. п. разностной схемы (23.11), (23.22) в виде

$$U_t + aU_x = (\tau/2)(k_f - a)^2 U_{xx}. \quad (23.23)$$

Важно отметить, что разность $k_f - a$ входит в уравнение (23.23) возвещенной в квадрат, поэтому коэффициент при U_{xx} в формуле (23.23) всегда неотрицателен, что говорит об устойчивости схемы (23.11), (23.22) [154]. Кроме того, видим из уравнения (23.23), что при $k_f = a$ разностная схема (23.11), (23.22) имеет порядок аппроксимации не ниже второго. Так как в соответствии с формулой (23.10) k_f зависит от x_f^n , из вышеизложенного следует вывод о том, что желательно определять абсциссу разрыва x_f^n с как можно более высокой точностью. Подстановка значения (23.22) в формулу (23.19) дает $|\lambda|^2 = 1/(1 + 4(\kappa_2 - \kappa_1)^2 \tan^2 \alpha/2)$, откуда следует вывод об абсолютной устойчивости схемы (23.11), (23.22).

Разностные уравнения при $k = M_1 + 2, \dots, M + 1$ совпадут с системой (23.11) — (23.13), если в формулах (23.11), (23.13) заменить верхний индекс (1) на индекс (2), а величину $(\Delta x)_1$ в формуле (23.12) — на $(\Delta x)_2$. Исходя из известного разностного решения u^n на сетке G_h и используя схему (23.4), будем иметь разностное решение u_i^n , $i = 0, \dots, i_x$. С другой стороны, с помощью разностной схемы (23.11) — (23.13) можем получить решение U^n на сетке G_Δ . Введем обозначение

$$\Omega = \bigcup_{h=1}^M \Omega_h. \quad (23.24)$$

Потребуем, чтобы решение U^n непрерывно примыкало на границах области Ω к решению u^n , полученному на сетке G_h . Для обеспечения этого требования вычислим U_0^n, U_{M+1} по формулам

$$U_0^n = u^n(\xi_0^n), \quad U_{M+1}^n = u^n(\xi_{M+1}^n), \quad (23.25)$$

где $u^n(\xi_0^n)$, $u^n(\xi_{M+1}^n)$ определяются интерполяцией по значениям решения u^n в близлежащих узлах сетки G_h .

Если при каждом $t = t^n = n\tau$, $n = 1, 2, \dots$, выполняется равенство $k_f = a$, то запечатия U_h^n , вычисляемые по схеме (23.11), (23.22), точны, так как в этом случае просто имеет место перенос значений вдоль характеристик и схема (23.11), (23.22) имеет бесконечный порядок аппроксимации (см. также [118]). Но на практике равенство $k_f = a$ не выполняется, так как x_f^n в (23.10) определяется приближенно, значение U_0^n отличается от точного по-грешностью, размер которой зависит от локальной погрешности разностного решения u^n . Таким образом, при практическом счете реализуется только первый порядок аппроксимации схемы (23.11), (23.22).

По конструкции разностных уравнений (23.11), (23.13) видно, что в этих уравнениях исключено разностное дифференцирование по x через разрыв. Требование о том, что оно должно выполняться разностное дифференцирование через разрыв, является одним из основных в методе «подгонки скачка» [251, 130]. Поскольку узлу $\xi_{M_1}^n = \xi_{M_1+1}^n = x_f^n$ приписаны два, вообще говоря, различных значения $U_{M_1}^n, U_{M_1+1}^n$, решение U^n на сетке G_Δ будет содержать разрыв. Таким образом, в профиле $U^n(x)$ «размазывание» разрыва отсутствует. С другой стороны, в подобластях непрерывного течения слева и справа от точки $x = x_f^n$ разностная схема с односторонними разностями (23.11), (23.22), как было показано, аппроксимирует исходное уравнение (2.9) с порядком $O(\tau) + O((\Delta x)_1)$ или $O(\tau) + O((\Delta x)_2)$. В связи с перечисленными свойствами сеточного решения U^n его можно использовать вместо разностного решения u^n в окрестности Ω сильного разрыва. Для этого значения u_n вычисляют в точках сетки G_h , находящихся в области Ω , с помощью интерполяции по значениям U_h^n на сетке G_Δ .

Как известно [118], требований аппроксимации и устойчивости разностной схемы, вообще говоря, недостаточно для удовлетворительного расчета разрывных решений. Важным при расчете обобщенных решений является также требование дивергентности или консервативности разностной схемы [118, 127]. Разностная схема (23.4) консервативна. Обозначим через \mathcal{M}_n «массу газа» в расчетной области при $t = t_n$:

$$\mathcal{M}_n = \sum_{i=0}^{i_x} u_i^n h.$$

Представим \mathcal{M}_n в виде суммы трех слагаемых:

$$\mathcal{M}_n = \sum_{i=0}^{i_l-1} u_i^n h + S_h + \sum_{i=i_l+1}^{i_x} u_i^n h, \quad (23.26)$$

где введено обозначение

$$S_h = \sum_{i=i_l}^{i_r} u_i^n h. \quad (23.27)$$

Если во всех узлах на оси x при подсчете суммы (23.26) используется решение u^n , полученное по разностной схеме (23.26), то \mathcal{M}_n имеет верное значение в силу дивергентности разностной схемы (23.4). Предположим теперь, что при подсчете суммы S_h , определяемой по формуле (23.29), используем значения u_i^n , найденные линейной интерполяцией по значениям U_k^n . Тогда вместо S_h получим величину S'_h , которую можно представить в виде

$$S'_h = \sum_{h=0}^{M+1} c_h U_h^n h, \quad (23.28)$$

где коэффициенты c_h неотрицательны в силу того, что u_i^n определяется по U_k^n с помощью интерполяции. $S'_h \neq S_h$ из-за ошибок в определении абсциссы разрыва x_f^n и погрешности аппроксимации разностной схемы для вычисления U^n . Поэтому подстановка S'_h в сумму (23.26) вместо S_h приведет к нарушению закона сохранения величины \mathcal{M}_n . С целью минимизации разности $|S_h - S'_h|$ введем в рассмотрение квадратичный функционал

$$I(x_f^n) = (S_h - S'_h)^2. \quad (23.29)$$

В формуле (23.29) величина S_h предполагается заданной и фиксированной, а S'_h является функцией абсциссы x_f^n . Ясно, что при поиске минимума функционала (23.29) можно варьировать x_f^n только в пределах области Ω , так как вне ее могут оказаться другие (соседние) разрывы решения. Поэтому необходимо наложить ограничения на x_f^n в виде

$$x_l^n \leq x_f^n \leq x_r^n, \quad (23.30)$$

где величины x_l^n , x_r^n должны удовлетворять неравенствам $\xi_0^n \geq x_l^n$, $x_r^n \leq \xi_{M+1}^n$. Сформулируем для функционала (23.29) следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} I(x_f^n) &\rightarrow \min, \\ x_f^n &\geq x_l^n, \quad x_f^n \leq x_r^n. \end{aligned} \quad (23.31)$$

В заключение этого пункта рассмотрим вопрос о численной реализации разностной схемы (23.11), (23.22). Исследуем сначала разностное уравнение (23.11) при $1 \leq k \leq M_1$. Покажем, что при достаточно больших значениях величины M_1 нельзя использовать рекуррентную формулу

$$U_k^n = (-a^{(1)}U_{k-1}^n - c^{(1)}U_{k-1}^m - d^{(1)}U_k^m)/b^{(1)}, \quad k = 1, \dots, M_1, \quad (23.32)$$

из-за накопления ошибок округления. Чтобы это накопление не происходило, необходимо [126] выполнение неравенства

$$|a^{(1)}/b^{(1)}| < 1. \quad (23.33)$$

С учетом формул (23.22) легко показать, что (23.33) имеет место, если $k_f < a$, где величина k_f определяется по формуле (23.10). Из-за ошибок в определении x_f^n неравенство $k_f < a$ может нарушаться (и это действительно наблюдается в практике расчетов). Аналогичным образом показывается неустойчивость рекуррентного счета по формуле

$$\begin{aligned} U_{k-1}^n = & (-b^{(1)}U_k^n - c^{(1)}U_{k-1}^m - d^{(1)}U_k^m)/a^{(1)}, \quad k = M + \\ & + 1, M, \dots, M_1 + 2, \end{aligned}$$

при достаточно больших значениях величины $M - M_1$. В связи с изложенным необходимо при больших M_1 , $M - M_1$ использовать другой алгоритм для решения разностных уравнений (23.11), (23.22). Пусть

$$\vec{U} = \{U_1^n, \dots, U_{M_1}^n\}, \quad \vec{F} = \{\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{M_1}^{(1)}\}^T.$$

Тогда разностные уравнения (23.11) при $k = 1, \dots, M_1$ легко записать в виде алгебраической системы

$$H\vec{U} = \vec{F}, \quad (23.34)$$

где H — квадратная матрица размерности $M_1 \times M_1$, выражения для ее элементов здесь выписывать не будем для краткости изложения. Легко видеть с учетом уравнения (23.11), что матрица H ленточная, у нее пленулевыми являются только элементы на главной диагонали и один элемент слева от главной диагонали в каждой строке. Эффективные алгоритмы обращения ленточных матриц, изложенные в [145], требуют положительной определенности матрицы H . Покажем, что матрица H не будет положительно определенной. Для этого достаточно доказать [146], что не является положительно определенной квадратичная форма

$$(Hb, b) = \sum_{j=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{M_1} \chi_{jk} b_j b_k,$$

где χ_{jk} — элемент матрицы H ; b_j , b_k — компоненты произвольного вектора-столбца $b = \{b_1, \dots, b_{M_1}\}^T$ такого, что

$$(b, b) = \sum_{i=1}^{M_1} b_i^2 > 0.$$

После некоторых вычислений получим

$$(Hb, b) = \frac{1}{2} b^{(1)} b_1^2 + \sum_{j=2}^{M_1} (a^{(1)} + b^{(1)}) b_j^2 + \frac{1}{2} b^{(1)} b_{M_1}^2 - \frac{1}{2} b^{(1)} \sum_{j=1}^{M_1-1} (b_j - b_{j+1})^2. \quad (23.35)$$

Пусть в формуле (23.35) $b_j = 1$, $j = 1, \dots, M_1$. Так как у нас с учетом формул (23.22) $a^{(1)} + b^{(1)} = -1 < 0$, из формулы (23.35) следует, что $(Hb, b) < 0$.

§ 24. УТОЧНЕНИЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

24.1. Формулировка задач условной оптимизации

Известно, что при построении неявных и полу неявных разностных схем для гиперболических систем уравнений в частных производных первого порядка возникает проблема обеспечения хорошей обусловленности матриц алгебраических систем, возникающих после дискретизации задачи (см., например, [186, 67]). Этот вывод согласуется с изложенными в § 23 результатами исследования неявной разностной схемы (23.12), (23.22) для уравнения (2.9). В [186] показано: если при построении разностной схемы для стационарного уравнения сохранения массы $\partial \rho u / \partial x + \partial \rho v / \partial y = 0$ исходить из квадратичного функционала

$$I = \int_D (\partial \rho u / \partial x + \partial \rho v / \partial y)^2 dx dy, \quad (24.1)$$

то получаемая в результате разностной аппроксимации условий минимальности функционала (24.1) алгебраическая система обладает свойством хорошей обусловленности (см. также [187]).

Пусть Ω_h — одна из введенных в предыдущем параграфе подобластей в окрестности сильного разрыва (см. рис. 46). Рассмотрим функционал

$$I_h = \int_{\Omega_h} (\partial u / \partial t + a \partial u / \partial x)^2 dx dt. \quad (24.2)$$

Используем для минимизации квадратичного функционала (24.2) обобщение метода Ритца, описанное в [66]. Оно состоит в аппроксимации функции $u(x, t)$ в функционале (24.2) функцией $u_{ah}(x, t)$, определяемой по формуле

$$u_{ah}(x, t) = \sum_{j=0}^{N_x} a_{hj}(t) (x - x_*^{(h)})^j, \quad (x, t) \in \Omega_h, \quad (24.3)$$

где $(x_*^{(h)}, t) \in \Omega_h$, $N_x \geq 1$, $a_{hj}(t)$ — функции, подлежащие определению из требований минимальности функционала (24.2). По ана-

логии с [95] аппроксимируем также функцию $a_{kj}(t)$ в равенстве (24.3):

$$a_{kj}(t) = \sum_{v=0}^{N_t} a_{kjv} (t - t_*)^v, \quad j = 0, \dots, N_x, \quad (24.4)$$

где a_{kjv} — постоянные, $(x_*^{(k)}, t_*) \in \Omega_k$, $N_t \geq 1$.

Пусть N — общее число постоянных коэффициентов a_{kjv} в представлении (24.3), (24.4) функции $u_{hk}(x, t)$. В [98] приведены примеры, указывающие на неустойчивость процесса Ритца по отношению к малым погрешностям промежуточных вычислений при достаточно больших N и использовании полиномиальной аппроксимации вида (24.3). В нашем случае нет необходимости в больших значениях N , так как аппроксимация (24.3) берется локально в подобласти Ω_k , размер которой вдоль оси x может быть сделан малым за счет увеличения числа M подобластей Ω_k в окрестности разрыва. Поэтому можно добиться вполне приемлемой точности решения, выбирая при подходящем числе M подобластей Ω_k значения $N_x, N_t \leq 2$ в формулах (24.3), (24.4).

Подставляя разложение (24.4) в формулу (24.3) и затем аппроксимацию (24.3) в формулу (24.2) и выполняя входящие в формулу (24.2) операции дифференцирования и интегрирования, получим

$$I_k = I_k(a_{k00}, a_{k01}, \dots, a_{kN_x N_t}, x_f^n). \quad (24.5)$$

Входящие в выражение (24.5) постоянные a_{k00}, \dots, x_f^n должны быть найдены как решение некоторой задачи оптимизации. Переайдем к формулировке этой задачи. Рассмотрим частный случай $N_x = N_t = 1$ в формулах (24.3), (24.4). Тогда

$$u_{hk}(x, t) = a_{k00} + a_{k01}(t - t_*) + [a_{k10} + a_{k11}(t - t_*)](x - x_*^{(k)}). \quad (24.6)$$

Пусть при $t = t_m$, $m = n - 1$, разностное решение $u_h(x, t_m)$ уже уточнено. Аппроксимируем в области Ω_k $u_h(x, t_m)$ отрезком прямой

$$u_h(x, t_m) = b_{0k} + b_{1k}(x - x_*^{(k)}), \quad (24.7)$$

где b_{0k}, b_{1k} — известные постоянные. В соответствии с общей идеей метода Ритца [66] потребуем, чтобы функция (24.6) при $t = t_m$ удовлетворяла начальному условию (24.7). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях величины $(x - x_*^{(k)})$ в формулах (24.7) и (24.6), получаем уравнения

$$\begin{aligned} a_{k00} + a_{k01}(t_m - t_*) &= b_{0k}; \\ a_{k10} + a_{k11}(t_m - t_*) &= b_{1k}. \end{aligned} \quad (24.8)$$

Перепишем формулу (24.6) с учетом выражений (24.8):

$$u_{hk}(x, t) = b_{0k} + a_{k01}(t - t_m) + [b_{1k} + a_{k11}(t - t_m)](x - x_*^{(k)}). \quad (24.9)$$

Обозначим через $x_{l_k}^{(m)}$ и $x_{r_k}^{(m)}$ абсциссы соответственно левой и правой угловых точек области Ω_k на линии $t = t_m$ (см. рис. 46). Конк-

ретизируем выбор величины $x_*^{(k)}$ в формуле (24.9), а именно положим $x_*^{(k)} = x_{lk}^{(m)}$. Вместо a_{001} , a_{111} будем писать в дальнейшем a_{0k} , a_{1k} . Таким образом, для $u_{ak}(x, t)$ в области Ω_k получим представление

$$u_{ak}(x, t) = b_{0k} + a_{0k}(t - t_m) + [b_{1k} + a_{1k}(t - t_m)](x - x_{lk}^{(m)}). \quad (24.10)$$

Введем функционал

$$I^{(l)} = \sum_{k=1}^{M_1} \int_{\Omega_k} (\partial u_{ak}/\partial t + a \partial u_{ak}/\partial x)^2 dx dt \quad (24.11)$$

и будем рассматривать его при фиксированном значении абсциссы разрыва x_r^n . Выписывая аналог уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала (24.11), будем иметь

$$\partial I^{(l)}/\partial a_{0k} = \partial I^{(l)}/\partial a_{1k} = 0, \quad k = 1, \dots, M_1. \quad (24.12)$$

Так как a_{0k} , a_{1k} входят только в интеграл

$$I_k = \int_{\Omega_k} (\partial u_{ak}/\partial t + a \partial u_{ak}/\partial x)^2 dx dt, \quad (24.13)$$

уравнения (24.12) можем переписать в виде

$$\partial I_k/\partial a_{0k} = \partial I_k/\partial a_{1k} = 0. \quad (24.14)$$

Равенства (24.14) дают систему двух линейных алгебраических уравнений для определения a_{0k} , a_{1k} . Решив эту систему, можем найти значение функции $u_{ak}(x, t)$ в точке $(x, t) \in \Omega_k$ по формуле (24.10). Положим, в частности, $t = t_n$, $x = x_{rk}^{(n)}$. Тогда

$$u_{ak}(x_{rk}^{(n)}, t_n) = b_{0k} + a_{0k}\tau + (b_{1k} + a_{1k}\tau)(x_{rk}^{(n)} - x_{lk}^{(m)}). \quad (24.15)$$

С другой стороны, точка $(x_{rk}^{(n)}, t_n) \in \Omega_{k+1}$, поэтому можем также записать

$$u_{a,k+1}(x_{rk}^{(n)}, t_n) = b_{0,k+1} + a_{0,k+1}\tau + [b_{1,k+1} + a_{1,k+1}\tau](x_{rk}^{(n)} - x_{l,k+1}^{(m)}). \quad (24.16)$$

Из формул (24.15), (24.16) следует, что, вообще говоря, $u_{ak}(x_{rk}^{(n)}, t_n) \neq u_{a,k+1}(x_{rk}^{(n)}, t_n)$, $k = 1, \dots, M_1 - 1$. Это означает, что функция $u_a(x, t)$, минимизирующая функционал (24.11), имеет разрывы на стыках между соседними областями Ω_k и Ω_{k+1} , $k = 1, \dots, M_1 - 1$.

Хотя абсолютные значения разностей величин (24.15) и (24.16) могут оказаться небольшими, целесообразно устраниć эти разрывы, поскольку их не должно быть в подобластях непрерывного течения. С этой целью сформулируем следующую задачу математи-

ческого программирования:

$$\begin{aligned} I^{(l)}(a_{01}, a_{11}, \dots, a_{0M_1}, a_{1M_1}, x_f^n) &\rightarrow \min; \\ u_{a1}(x_{l1}^{(n)}, t_n) &= u_h(x_{l1}^{(n)}, t_n); \\ u_{ak}(x_{rk}^{(n)}, t_n) &= u_{a,k+1}(x_{rk}^{(n)}, t_n), \quad k = 1, \dots, M_1 - 1. \end{aligned} \quad (24.17)$$

Первое из ограничений-равенств в формулах (24.17) обеспечивает непрерывное примыкание функции $u_{a1}(x, t_n)$ к разностному решению u_h^n , полученному по схеме (23.4), на левой границе области Ω [см. также формулы (23.25)].

По аналогии с формулой (24.11) рассмотрим функционал

$$I^{(r)} = \sum_{k=M_1+1}^M (\partial u_{ak}/\partial t + a \partial u_{ak}/\partial x)^2 dx dt. \quad (24.18)$$

Для функционала (24.18) формулируем аналогично (24.17) следующую задачу математического программирования:

$$\begin{aligned} I^{(r)}(a_{0,M_1+1}, a_{1,M_1+1}, \dots, a_{0M}, a_{1M}, x_f^n) &\rightarrow \min; \\ u_{ak}(x_{rk}^{(n)}, t_n) &= u_{a,k+1}(x_{rk}^{(n)}, t_n), \quad k = M_1 + 1, \dots, M - 1; \\ u_{aM}(x_{rM}^{(n)}, t_n) &= u_h(x_{rM}^{(n)}, t_n). \end{aligned} \quad (24.19)$$

Во многих приложениях решение $u(x, t)$ должно быть неотрицательным по физическому смыслу: $u(x, t)$ может быть плотностью (см. § 13), концентрацией [247]. В силу линейности функции (24.10) при фиксированном t легко выписать условия неотрицательности $u_a(x, t)$ в Ω . С учетом этих условий можно рассматривать более сложную, чем (24.17), задачу математического программирования

$$\begin{aligned} I^{(l)}(a_{01}, a_{11}, \dots, a_{0M_1}, a_{1M_1}, x_f^n) &\rightarrow \min; \\ u_{a1}(x_{l1}^{(n)}, t_n) &= u_h(x_{l1}^{(n)}, t_n); \\ u_{ak}(x_{rk}^{(n)}, t_n) &= u_{a,k+1}(x_{rk}^{(n)}, t_n), \quad k = 1, \dots, M_1 - 1; \\ u_{ak}(x_{rk}^{(n)}, t_n) &\geq 0, \quad k = 1, \dots, M_1. \end{aligned} \quad (24.20)$$

Аналогично можно усложнить задачу (24.19).

Предположим, что найдено решение задач (24.17), (24.19) при некотором фиксированном значении x_f^n . Введем обозначение

$$\begin{aligned} U_0^n &= u_{a1}(x_{l1}^{(n)}, t_n), \quad U_k^n = u_{ak}(x_{rk}^{(n)}, t_n), \quad k = 1, \dots, M_1; \\ U_k^n &= u_{ak}(x_{rk}^{(n)}, t_n), \quad k = M_1 + 1, \dots, M; \\ U_{M+1}^n &= u_h(x_{rM}^{(n)}, t_n). \end{aligned} \quad (24.21)$$

Вычислив по формулам (24.21), (24.10) U_k^n , можно найти значение суммы (23.18), а затем значение функции (23.19). Поскольку по-прежнему требуется выполнение закона сохранения, необходимо

решать задачу условной оптимизации (23.31). При использовании безградиентных методов оптимизации достаточно найти значения функции (23.29) в некотором количестве определенным образом задаваемых точек $x = x_j^n$ (см. в следующем разделе о методе золотого сечения). Поэтому возникает вопрос об эффективном методе решения задач математического программирования (24.17), (24.19) или двух вида (24.20), каждая из которых является общей нелинейной задачей математического программирования, содержащей ограничения типа равенств и неравенств.

24.2. Построение дискретного функционала и его минимизация

Покажем, что, учитывая специфику задачи (24.17) — линейность ограничений относительно a_{0k} , a_{1k} — можно эффективно решить задачу (24.17) или (24.19) с помощью метода прогонки. Рассмотрим сначала первую из них. Предположим, что на момент времени $t = t_m$ она уже решена и, следовательно, имеют место равенства вида (24.21) и ограничения-равенства в задаче (24.19), где нужно n заменить на $m = n - 1$. Тогда можно легко выразить b_{0k} , b_{1k} в (24.10) через

$$b_{0k} = U_{k-1}^m, \quad b_{1k} = (U_k^m - U_{k-1}^m)/(\Delta x)_1, \quad k = 1, \dots, M_1. \quad (24.22)$$

После этого, предполагая выполнение ограничений-равенств при $t = t_n$ в (24.17), легко можем найти выражения для неизвестных постоянных a_{0k} , a_{1k} через новые неизвестные U_j^n :

$$\begin{aligned} a_{0k} &= [U_{k-1}^n - b_{0k} - (U_k^n - U_{k-1}^n)(x_j^n - x_j^m)/(\Delta x)_1]/(t_n - t_m); \\ a_{1k} &= [U_k^n - U_{k-1}^n - b_{1k}(\Delta x)_1]/[(t_n - t_m)(\Delta x)_1], \quad k = 1, \dots, M_1. \end{aligned} \quad (24.23)$$

Таким образом, с помощью ограничений-равенств в формулах (24.17) исключены M_1 неизвестных и вместо $2M_1$ неизвестных a_{0k} , a_{1k} стало только M_1 неизвестных $U_1^n, \dots, U_{M_1}^n$. Вычисления интеграл (24.13) с использованием формулы (24.10), получим

$$I_k = D_0 [(a_{0k} + ab_{1k} + (1/2)D_1 a_{1k})^2 + D_2 a_{1k}^2], \quad (24.24)$$

где

$$\begin{aligned} D_0 &= (\Delta x)_1(t_n - t_m), \quad D_1 = a(t_n - t_m) + k_f(t_n - t_m) + (\Delta x)_1, \\ D_2 &= (1/12)[(a + k_f)^2(t_n - t_m)^2 + ((\Delta x)_1)^2], \end{aligned} \quad (24.25)$$

величина k_f , определяется по формуле (23.10), a — коэффициент в исходном уравнении (2.9). Подставляя в (24.24) вместо a_{0k} , a_{1k} выражения (24.23), найдем, что

$$I_k = I_k(U_k^n, U_{k-1}^n), \quad k = 1, \dots, M_1. \quad (24.26)$$

Таким образом, имеем M_1 дискретных функционалов I_k , каждый из которых зависит от двух величин U_k^n, U_{k-1}^n , вычисляемых в дис-

ретных точках — узлах сетки G_Δ . Подстановка выражения (24.26) в (24.11) дает для дискретного функционала $I^{(1)}$ следующую задачу безусловной минимизации:

$$I^{(1)}(U_1^n, \dots, U_{M_1}^n) \rightarrow \min, \quad (U_1^n, \dots, U_{M_1}^n) \in \mathcal{E}_{M_1}, \quad (24.27)$$

где \mathcal{E}_{M_1} — M_1 -мерное евклидово пространство. Чтобы решить задачу (24.27), выпишем, как обычно делается при решении таких задач (см., например, [95]), дискретные уравнения Эйлера

$$\partial I^{(1)} / \partial U_k^n = 0, \quad k = 1, \dots, M_1. \quad (24.28)$$

С учетом (24.26) можно переписать уравнения (24.28) в виде

$$\partial I_k / \partial U_k^n + \partial I_{k+1} / \partial U_k^n = 0, \quad k = 1, \dots, M_1 - 1; \quad (24.29)$$

$$\partial I_{M_1} / \partial U_{M_1}^n = 0. \quad (24.30)$$

Формула (24.30) возникает потому, что функционал I_{M_1+1} не входит в $I^{(1)}$. Для вычисления производных в формулах (24.29), (24.30) воспользуемся очевидной формулой

$$\partial I_k / \partial U_k = \sum_{j=0}^1 (\partial I_k / \partial a_{jk}) (\partial a_{jk} / \partial U_k). \quad (24.31)$$

Используя формулы (24.23), (24.24), (24.29), (24.31), после некоторых вычислений получим разностное уравнение

$$A^{(1)} U_{k-1}^n + B^{(1)} U_k^n + C^{(1)} U_{k+1}^n = F_k, \quad k = 1, \dots, M_1 - 1; \quad (24.32)$$

$$\alpha^{(1)} U_{k-1}^n + \beta^{(1)} U_k^n + \gamma^{(1)} = 0, \quad k = M_1, \quad (24.33)$$

где

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= (1/s) (D_1 - 2k_f s) (1 + k_f s / (\Delta x)_1) - (D_1^2/2 + 2D_2 - D_1 k_f s) / D_0; \\ B^{(1)} &= -(D_1 - 2k_f s) k_f / (\Delta x)_1 + (4D_2 - D_1 k_f s + D_1 a s) / D_0 + \\ &\quad + (D_1 - 2a s) (1 + k_f s / (\Delta x)_1) / s; \\ C^{(1)} &= -(D_1 - 2a s) k_f / (\Delta x)_1 + (D_1^2/2 - D_1 a s - 2D_2) / D_0; \end{aligned} \quad (24.34)$$

$$\begin{aligned} F_k &= (D_1 - 2k_f s) (b_{0k} / s - a b_{1k}) + (D_1 - 2a s) (b_{0,k+1} / s - a b_{1,k+1}) + \\ &\quad + (b_{1k} / s) (D_1^2/2 + 2D_2 - D_1 k_f s) + (b_{1,k+1} / s) (D_1^2/2 - 2D_2 - D_1 a s); \\ \alpha^{(1)} &= (D_1 - 2k_f s) (1 + k_f s / (\Delta x)_1) / s - (D_1^2/2 + 2D_2 - D_1 k_f s) / D_0; \\ \beta^{(1)} &= -(D_1 - 2k_f s) k_f / (\Delta x)_1 + (D_1^2/2 + 2D_2 - D_1 k_f s) / D_0; \\ \gamma^{(1)} &= -(D_1 - 2k_f s) b_{0k} / s - (b_{1k} / s) (D_1^2/2 + 2D_2 - D_1 k_f s) + \\ &\quad + (D_1 - 2k_f s) a b_{1k}, \quad k = M_1. \end{aligned} \quad (24.35)$$

В формулах (24.34), (24.35) $s = t_n - t_m$; при $m = n - 1$ $s = \tau$. По-

кажем, что коэффициенты $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $C^{(1)}$ удовлетворяют неравенствам

$$|B^{(1)}| > |A^{(1)}| + |C^{(1)}| + \delta, \quad (24.36)$$

где δ — положительная величина, $\delta = 2(\Delta x)_1/(3s)$. Подстановка в формулы (24.34) выражения для D_0 , D_1 , D_2 из (24.25) дает

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= C^{(1)} = [2k_f as^2 + ((\Delta x)_1)^2 - 2a^2 s^2 - 2k_f^2 s^2]/(3s(\Delta x)_1); \\ B^{(1)} &= 2[(\Delta x)_1/s - A^{(1)}]. \end{aligned}$$

Рассматривая отдельно случаи $A^{(1)} > 0$, $A^{(1)} < 0$, легко получим неравенство (24.36).

С учетом результатов [35] и формулы (24.36) приходим к выводу о хорошей обусловленности разностной схемы (24.32). Обратимся теперь к вопросу о численном решении алгебраической системы (24.32), (24.33). Сначала рассмотрим случай $M_1 = 1$. Используя формулы (24.33), (24.35), находим

$$U_1^n = -(\alpha^{(1)} U_0^n + \gamma^{(1)})/\beta^{(1)}. \quad (24.37)$$

Остается выяснить, может ли обращаться в нуль величина $\beta^{(1)}$ в формуле (24.37). С помощью (24.35), (24.25), будем иметь

$$\begin{aligned} \beta^{(1)} &= [as + (\Delta x)_1 - k_f s]^2/(2s(\Delta x)_1) + \\ &+ (a + k_f)^2 s/(6(\Delta x)_1) + (\Delta x)_1/(6s) > (\Delta x)_1/(6s) > 0. \end{aligned}$$

Пусть теперь $M_1 > 1$. Поскольку (24.32) является алгебраической системой с трехдиагональной матрицей, с учетом (24.36) для решения системы (24.32) можно применить метод прогонки. Границное условие для прогоночных коэффициентов на левом конце получается из того, что величина U_0^n известна, она вычисляется согласно первой формуле (23.25). На правом конце используется равенство (24.33).

Перейдем к задаче (24.19). Вводя новые неизвестные U_k^n , $k = M_1, \dots, M$, по формулам (24.21), аналогично предыдущему, получаем систему

$$A^{(2)} U_{k-1}^n + B^{(2)} U_k^n + C^{(2)} U_{k+1}^n = \tilde{F}_k, \quad k = M_1 + 2, \dots, M; \quad (24.38)$$

$$\partial I_{M_1+1}/\partial U_{M_1+1}^n = \alpha^{(2)} U_k^n + \beta^{(2)} U_{k+1}^n + \gamma^{(2)} = 0, \quad k = M_1 + 1, \quad (24.39)$$

где коэффициенты $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$, \tilde{F}_k отличаются от $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $C^{(1)}$, F_k [см. формулы (24.34)], тем, что $(\Delta x)_1$ заменено на $(\Delta x)_2$, эта замена осуществлена также в (24.25);

$$\alpha^{(2)} = (D_1 - 2as)(1 + k_f s/(\Delta x)_2)/s - (D_1^2/2 - D_1 as - 2D_2)/D_0;$$

$$\beta^{(2)} = -(D_1 - 2as)k_f/(\Delta x)_2 + (D_1^2/2 - D_1 as - 2D_2)/D_0;$$

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)} &= -(D_1 - 2as)b_{0,k+1}/s - (b_{1,k+1}/s)(D_1^2/2 - D_1 as - 2D_2) + \\ &+ (D_1 - 2as)ab_{1,k+1}. \end{aligned}$$

При решении системы (24.38), (24.39) рассмотрим два случая: $M_1 + 1 = M$ и $M_1 + 1 < M$. Пусть $M_1 + 1 = M$. Из (24.39) находим $U_M^n = -(\beta^{(2)} U_{M+1}^n + \gamma^{(2)})/\alpha^{(2)}$. Величина $\alpha^{(2)}$ всегда положительна, так как

$$\begin{aligned}\alpha^{(2)} &= (k_f s + (\Delta x)_2 - a s)^2 / (2 s (\Delta x)_2) + \\ &+ [(a s + k_f s)^2 + ((\Delta x)_2)^2] / (6 s (\Delta x)_2) > (\Delta x)_2 / (6 s) > 0.\end{aligned}$$

При $M > M_1 + 1$ решаем систему (24.38), (24.39) с помощью трехточечной прогонки. При этом на левом конце используется формула (24.39), на правом — заданное в соответствии с формулами (23.25) значение U_{M+1}^n .

Рассмотрим вопрос о порядке аппроксимации разностной схемы (24.32), которая выведена на параллелограммной сетке в плоскости (x, t) (см. рис. 46). Подставляя разложения в ряды Тейлора типа (23.14) в разностные уравнения (24.32), после некоторых вычислений получим Г-форму п. д. п. разностной схемы (24.32) в виде

$$U_t + a U_x + \tau k_f (U_{xt} + a U_{xx}) + (\tau/2) (U_{tt} - a^2 U_{xx}) + \\ + a_1 U_{xxx} + (1/2) k_f \tau^2 U_{xxt} + (1/6) \tau^2 U_{ttt} + a_2 U_{xxt} = 0, \quad (24.40)$$

где $a_1 = (1/3) k_f a \tau^2 (k_f - a) + (1/6) [a ((\Delta x)_1)^2 - k_f^3 \tau^2]$;

$$a_2 = (2/3) k_f a \tau + (1/3) ((\Delta x)_1)^2 / \tau - (2/3) a^2 \tau + \tau k_f^2 / 3.$$

Перейдем от Г-формы п. д. п. (24.40) к П-форме п. д. п., пользуясь рекуррентными формулами, приведенными на с. 16 книги [154]:

$$U_t + a U_x = (1/6) (k_f - a) \tau^2 (a^2 + k_f^2) U_{xxx}. \quad (24.41)$$

Из выражения (24.41) для П-формы п. д. п. следует, что разностная схема (24.32) имеет порядок аппроксимации не ниже третьего, если $k_f = a$. Заметим, что шаблон разностной схемы (24.32) использует по три точки на верхнем слое n и на нижнем $m = n - 1$. Ранее схемы третьего порядка точности с таким шаблоном на прямоугольной сетке в плоскости (x, t) построены для уравнения (2.9) и исследованы в ряде работ (см., например, [106]).

В заключение этого параграфа заметим, что разностную схему (24.32) можно назвать также вариационно-разностной схемой [95], поскольку она получена в результате минимизации некоторого функционала.

§ 25. ОБ УТОЧНЕНИИ РАЗНОСТНОГО РЕШЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ

При расчете течений с ударными волнами по однородным разностным схемам ударные волны «размазываются», хотя и менее интенсивно, чем контактные разрывы. Поэтому можно ставить и решать задачу об уточнении разностного решения в окрестности фронта ударной волны. Можно указать еще ряд причин, по которым желательно такое уточнение. Во-первых, ударные волны слабой интен-

сивности усиленно «размазываются» при расчете по схемам первого порядка точности (см. § 3). Вследствие этого при решении задач с несколькими взаимодействующими слабыми ударными волнами может совсем «потеряться» информация об имеющихся в потоке ударных волнах [97]. Во-вторых, при использовании схем второго порядка точности в разностном решении за фронтом разрыва присутствуют паразитические осцилляции, от которых трудно избавиться. С другой стороны, аппроксимация разностного решения в окрестности разрыва в процедуре уточнения по формуле (24.3), как показывает практика расчетов по методике § 24, не содержит осцилляций. В-третьих, рассмотрение ударной волны как разрыва в процедурах уточнения, аналогичных описанным в § 23, 24, восстанавливает истинное свойство ударной волны в невязком газе — свойство разрывности параметров течения на ее фронте.

Далее рассматриваются вопросы построения оптимизационных процедур уточнения разностного решения в окрестности фронта ударной волны на примере задачи Коши (16.1)–(16.3) для уравнения Бюргерса. Пусть Ω_k — одна из введенных в § 23 подобластей в окрестности фронта разрыва (см. рис. 46). Возьмем функционал

$$I_k = \int_{\Omega_k} (\partial u / \partial t + \partial \phi(u) / \partial x)^2 dx dt. \quad (25.1)$$

Наряду с областью Ω [см. формулу (23.24)] введем области

$$\Omega^{(l)} = \bigcup_{k=1}^{M_1} \Omega_k, \quad \Omega^{(r)} = \bigcup_{k=M_1+1}^M \Omega_k, \quad \Omega = \Omega^{(l)} \cup \Omega^{(r)}$$

и функционалы

$$I^{(l)} = \sum_{k=1}^{M_1} I_k, \quad I^{(r)} = \sum_{k=M_1+1}^M I_k.$$

В § 24 при фиксированном значении x_j^n решались независимо две задачи минимизации для функционалов (24.11) и (24.18). В случае ударной волны такой подход невозможен, так как на ударной волне должны выполняться динамические условия совместности — условия Гюгонио (6.25). В случае одного уравнения [уравнения Бюргерса (16.1)] условия (6.25) представляют собой одно соотношение

$$[\phi(u)] = D[u]. \quad (25.2)$$

В связи с вышеприведенным рассмотрим при заданном приближенном значении абсциссы разрыва x_j^n квадратичный функционал $I_0 = I^{(l)} + I^{(r)}$. По аналогии с формулами (24.3), (24.4) возьмем в Ω_k локальные аппроксимации

$$u_{ak}(x, t) = \sum_{j=0}^{N_x} \sum_{v=0}^{N_t} a_{kjv} (x - x_*^{(k)})^j (t - t_*)^v, \quad (25.3)$$

$$(x, t) \in \Omega_k, \quad k = 1, \dots, M_1;$$

$$u_{bh}(x, t) = \sum_{j=0}^{M_x} \sum_{v=0}^{M_t} b_{kjv} (x - x_*^{(k)})^j (t - t_*)^v, \quad (25.4)$$

$(x, t) \in \Omega_k, \quad k = M_1 + 1, \dots, M.$

В формулах (25.3), (25.4) $N_x, N_t, M_x, M_t \geq 1$. Полагая в (25.3), (25.4) $x_*^{(k)} = x_{lk}^{(m)}$, $t_* = t_m$, как и в § 24, выпишем условия непрерывности решения u в областях слева и справа от разрыва [см. формулы (24.17), (24.19)]:

$$\begin{aligned} u_{a1}(x_{l1}^{(n)}, t_n) &= u_h(x_{l1}^{(n)}, t_n); \\ u_{ak}(x_{rk}^{(n)}, t_n) &= u_{a,k+1}(x_{rk}^{(n)}, t_n), \quad k = 1, \dots, M_1 - 1; \\ u_{bk}(x_{rk}^{(n)}, t_n) &= u_{b,k+1}(x_{rk}^{(n)}, t_n), \quad k = M_1 + 1, \dots, M - 1; \\ u_{b,M}(x_{rM}^{(n)}, t_n) &= u_h(x_{rM}^{(n)}, t_n). \end{aligned} \quad (25.5)$$

Предположим, что в момент времени $t = t_m = t_n - \tau$ ограничения-равенства (25.5), где нужно n заменить на $m = n - 1$, выполнены. Введем обозначение U_k^m для значения уточненного решения в k -м узле сетки G_Δ .

Потребуем, как и в § 24, чтобы функции (25.3), (25.4) удовлетворяли при $t = t_m$ условию

$$u_h(x, t_m) = \begin{cases} u_{ak}(x, t_m), & (x, t_m) \in \Omega_k, \quad 1 \leq k \leq M_1, \\ u_{bk}(x, t_m), & (x, t_m) \in \Omega_k, \quad M_1 + 1 \leq k \leq M. \end{cases} \quad (25.6)$$

Так как в области Ω значения решения u_h известны только в узлах сетки G_Δ , из формул (25.6) получаем по аналогии с (24.21) следующие ограничения-равенства:

$$\begin{aligned} u_{a1}(x_{l1}^{(m)}, t_m) &= U_0^m, \quad u_{ak}(x_{rk}^{(m)}, t_m) = U_k^m, \quad k = 1, \dots, M_1; \\ u_{bk}(x_{lk}^{(m)}, t_m) &= U_k^m, \quad k = M_1 + 1, \dots, M; \quad u_{bM}(x_{rM}^{(m)}, t_m) = U_{M+1}^m \end{aligned} \quad (25.7)$$

При заданных x, t и значениях левых частей равенства (25.3), (25.4) линейны относительно коэффициентов a_{kjv}, b_{kjv} , поэтому с помощью формул (25.7) можно легко исключить $M + 2$ неизвестных коэффициентов. Заметим, что можно исключить еще несколько величин из числа коэффициентов $\{a_{kjv}\}, \{b_{kjv}\}$, используя аппроксимацию функции $u_h(x, t_m)$ посредством сплайнов [2, 134, 49]:

$$u_h(x, t_m) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{N_x} c_{kj} (x - x_*^{(k)})^j, & (x, t_m) \in \Omega_k, \quad 1 \leq k \leq M_1, \\ \sum_{j=0}^{M_x} d_{kj} (x - x_*^{(k)})^j, & (x, t_m) \in \Omega_k, \quad M_1 + 1 \leq k \leq M. \end{cases} \quad (25.8)$$

Действительно, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях разности $(x - x_*^{(k)})$ в формулах (25.6) и (25.8), получим соот-

ношения

$$\begin{aligned} a_{kj0} &= c_{kj}, \quad 1 \leq k \leq M_1; \\ b_{kj0} &= d_{kj}, \quad M_1 + 1 \leq k \leq M, \end{aligned} \quad (25.9)$$

где c_{kj} , d_{kj} — известные величины, найденные при построении сплайнов в формуле (25.8). Введем в рассмотрение векторы искомых коэффициентов a_{jk} , b_{jk} : $\vec{a} = \{a_{k,jv}\}$, $\vec{b} = \{b_{k,jv}\}$, где, разумеется, часть коэффициентов $a_{k,jv}$, $b_{k,jv}$ предполагается уже найденной с помощью формул (25.7) или (25.9). В целях краткости обозначений введем вспомогательную функцию $u_a(x, t)$, определенную в области $\Omega^{(l)}$ и такую, что $u_a(x, t) = u_{ak}(x, t)$ при $(x, t) \in \Omega_k$, $k = 1, \dots, M_1$. Аналогично определяется в области $\Omega^{(r)}$ функция $u_b(x, t)$. Аппроксимируем функционал $I_0 = I^{(l)} + I^{(r)}$ по формуле

$$\begin{aligned} I_0 = & \int_{\Omega^{(l)}} [\partial u_a(x, t)/\partial t + (\partial/\partial x) \varphi(u_a(x, t))]^2 dx dt + \\ & + \int_{\Omega^{(r)}} [\partial u_b(x, t)/\partial t + (\partial/\partial x) \varphi(u_b(x, t))]^2 dx dt. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Пусть, как и в § 16, уравнение $x = \zeta(t)$ определяет некоторое приближение к истинной траектории разрыва $x = \xi(t)$ в решении задачи (16.1) — (16.3). Условие Гюгонио (25.2) запишем в виде ограничения типа равенства

$$\Phi_1(\vec{a}, \vec{b}, x_f^n) = 0, \quad (25.11)$$

где

$$\Phi_1(\vec{a}, \vec{b}, x_f^n) = \varphi(u_a(x_f^n, t_n)) - \varphi(u_b(x_f^n, t_n)) - \dot{\zeta}(t_n)[u_a(x_f^n, t_n) - u_b(x_f^n, t_n)]. \quad (25.12)$$

В формуле (25.12) $\dot{\zeta}(t_n) = d\zeta(t_n)/dt$. Простейшую аппроксимацию для $\dot{\zeta}(t_n)$ можно взять, как и в § 24:

$$\dot{\zeta}(t_n) = (x_f^n - x_f^m)/(t_n - t_m). \quad (25.13)$$

На ударной волне должно выполняться условие возрастания энтропии, которое в случае уравнения Бюргерса (16.1) имеет вид (16.15). Неравенства (16.15) запишем в виде двух ограничений

$$\Psi_1(\vec{a}, x_f^n) \geq 0, \quad \Psi_2(\vec{b}, x_f^n) \geq 0, \quad (25.14)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Psi_1(\vec{a}, x_f^n) &= \varphi'(u_a(x_f^n, t_n)) - \dot{\zeta}(t_n), \\ \Psi_2(\vec{b}, x_f^n) &= \dot{\zeta}(t_n) - \varphi'(u_b(x_f^n, t_n)). \end{aligned} \quad (25.15)$$

Предполагается, что в формулах (25.15) производная $\dot{\zeta}(t_n)$ заменена ее разностной аппроксимацией, например по формуле (25.13). В не-

которых задачах механики и математической физики функция $u(x, t)$ должна быть неотрицательной по физическому или механическому смыслу. В этом случае к ограничениям (25.11), (25.14) можно добавить ограничения-неравенства

$$u_a(x, t_n) \geq 0, \quad x_l^n \leq x \leq x_f^n;$$

$$u_b(x, t_n) \geq 0, \quad x_f^n \leq x \leq x_r^n.$$

С учетом требования выполнения условия Гюгонио (25.11) и условий возрастания энтропии (25.14) получаем линейную задачу условной оптимизации (значение x_f^n фиксировано):

$$I_0(\vec{a}, \vec{b}, x_f^n) \rightarrow \min; \quad (25.16)$$

$$\Phi_1(\vec{a}, \vec{b}, x_f^n) = 0, \quad \Psi_1(\vec{a}, x_f^n) \geq 0, \quad \Psi_2(\vec{b}, x_f^n) \geq 0.$$

При решении задач математического программирования вида (25.16) распространен подход, когда задачу условной оптимизации (25.16) стремятся свести к безусловной [153, 99, 44]. Один из вариантов такого сведения состоит в рассмотрении вспомогательной функции [64], использующей идею штрафных функций

$$I_1(\vec{a}, \vec{b}, x_f^n) = I_0(\vec{a}, \vec{b}, x_f^n) + \mu_1(\Phi_1(\vec{a}, \vec{b}, x_f^n))^2 +$$

$$+ \mu_2(\Psi_1(\vec{a}, x_f^n))^2 [1 - \text{sign } \Psi_1(\vec{a}, x_f^n)] +$$

$$+ \mu_3(\Psi_2(\vec{b}, x_f^n))^2 [1 - \text{sign } \Psi_2(\vec{b}, x_f^n)] \rightarrow \min. \quad (25.17)$$

В формуле (25.17) μ_1, μ_2, μ_3 — положительные штрафные постоянные. Управляя порядком величины постоянных μ_1, μ_2, μ_3 , можно управлять точностью выполнения тех или иных ограничений в исходной задаче (25.16) [200]. Например, если необходимо, чтобы условие Гюгонио (25.11), (25.12) выполнялось с более высокой точностью, чем остальные ограничения в задаче (25.16), то следует задать в формуле (25.17) значение постоянной μ_1 , превышающее по порядку величины постоянные μ_2, μ_3 .

После того как задача (25.16) решена при фиксированном значении x^{t_n} , можно найти значение функционала (23.29), нужное в процессе решения основной задачи условной оптимизации (23.31). При этом сумма S'_h , входящая в функционал (23.29), может быть вычислена либо по (23.28), либо по формуле

$$S'_h = \sum_{i=i_l}^{i_{f_n}-1} u_a(x_i, t_n) h + u_{i_{f_n}}^n h + \sum_{i=i_{f_n}+1}^{i_p} u_b(x_i, t_n) h, \quad (25.18)$$

где i_{f_n} — номер ячейки сетки G_h , в которой находится точка с координатами (x_f^n, t_n) . Пусть $x_{i_{f_n}-1/2}, x_{i_{f_n}+1/2}$ есть абсциссы соответственно левой и правой границ ячейки i_{f_n} сетки G_h . Тогда для вычисления величины $u_{i_{f_n}}^n$ в равенстве (25.18) можно использовать

формулу [21]

$$u_{i,f,n}^n = \frac{1}{h} \left[\int_{x_{i,f,n}-1/2}^{x_f^n} u_a(x, t_n) dx + \int_{x_f^n}^{x_{i,f,n}+1/2} u_b(x, t_n) dx \right]. \quad (25.19)$$

Заметим, что изложенная последовательность вычислений как решение серии задач вида (25.16) при фиксированных значениях x_f^n с целью получения решения задачи (23.31) — эта лишь один из возможных способов решения задачи условной оптимизации

$$\begin{aligned} I_0(\vec{a}, \vec{b}, x_f^n) &\rightarrow \min; \\ \Phi_1(\vec{a}, \vec{b}, x_f^n) &= 0, \quad \Psi_1(\vec{a}, x_f^n) \geq 0; \quad \Psi_2(\vec{a}, x_f^n) \geq 0, \\ S'_h - S_h &= 0, \quad x_f^n - x_l^n \geq 0, \quad x_r^n - x_f^n \geq 0. \end{aligned} \quad (25.20)$$

Используя метод штрафных функций, можно уменьшить число ограничений в (25.20), решая задачу условной оптимизации

$$\begin{aligned} I_2(\vec{a}, \vec{b}, x_f^n) &\equiv I_1(\vec{a}, \vec{b}, x_f^n) + \mu_4 (S_h - S'_h)^2 \rightarrow \min, \\ x_f^n - x_l^n &\geq 0, \quad x_r^n - x_f^n \geq 0, \end{aligned}$$

где функционал I_1 определяется по формуле (25.17). В [64] отмечено, что метод штрафных функций медленный и не слишком надежный. Он применим при небольшом числе переменных ($N \leq 10$). В этой связи полезно рассмотреть для численного решения задач (25.16) или (25.20) другие методы условной оптимизации. В [256] сопоставлены 20 численных методов решения общей нелинейной задачи математического программирования и сделан вывод о том, что для задач условной оптимизации большой размерности наиболее эффективны симплекс-метод в реализации Нелдера — Мида и предложенный автором работы [256] подход, комбинирующий идеи методов прямого поиска и возможных направлений (о двух последних см., например, [99]). Заметим, что в [156] штрафная функция $\mu_1 \Phi_1^2$ добавлялась к основному вариационному функционалу задачи при расчетах трансзвукового потенциального обтекания крылового профиля по методу копечных элементов (МКЭ). При численной дискретизации это приводило к появлению дополнительных слагаемых в некоторых коэффициентах алгебраической системы МКЭ.

Используя результаты § 17, можно рассмотреть в формуле (25.17) вместо $\mu_1 \Phi_1^2$ слагаемое

$$\begin{aligned} \mu_1 \int_{t_m}^{t_n} &\{\varphi(u_a(\zeta(t), t)) - \varphi(u_b(\zeta(t), t)) - \dot{\zeta}(t)[u_a(\zeta(t), t) - \\ &- u_b(\zeta(t), t)]\}^2 dt, \end{aligned}$$

где для $\zeta(t)$, $\dot{\zeta}(t)$ можно использовать, например, аппроксимации

$\zeta(t) = x_f^n + \dot{\zeta}(t_n)(t - t_m)$, $\dot{\zeta}(t) = \dot{\zeta}(t_n) = (x_f^n - x_f^m)/(t_n - t_m)$. Заметим, что полиномиальная аппроксимация функций u_{ak} , u_{bk} по формулам (25.3), (25.4) не единственно возможная. Например, известна дробно-рациональная аппроксимация [64].

Изложенный выше метод сведения задачи уточнения к задачам математического программирования основан на локальных аппроксимациях (25.3), (25.4), имеющих силу в области Ω_k . Если размеры областей $\Omega^{(l)}$, $\Omega^{(r)}$ невелики, то более эффективным может оказаться использование вместо M локальных аппроксимаций (25.3), (25.4) двух «глобальных» аппроксимаций $u_a(x, t)$ и $u_b(x, t)$ в областях соответственно $\Omega^{(l)}$ и $\Omega^{(r)}$. После того как вид аппроксимирующих функций u_a и u_b конкретизирован, можно снова сформулировать задачи условной оптимизации вида (25.16) или (25.20). В этом случае существенно уменьшается размерность задач оптимизации, так как при глобальной аппроксимации она зависит не от количества областей Ω_k , а только от числа неизвестных коэффициентов в аппроксимирующих функциях u_a и u_b .

С помощью описанного метода уточнения можно решать на равномерной пространственной сетке задачу о вырождении ударной волны в непрерывное течение. Действительно, если величина $|u_a(x_f^n, t_n) - u_b(x_f^n, t_n)|$ становится меньше наперед заданного положительного числа при некотором $n = n_0$, то будем считать, что ударная волна исчезла и перешла в непрерывное течение. Тогда при $t > t_{n_0}$ нет необходимости использовать процедуру уточнения. Заметим, что в § 8 изложен метод решения задачи о вырождении ударных волн, использующий неравномерную подвижную сетку, адаптирующуюся к потоку. Таким образом, рассмотренный метод уточнения разностных решений в окрестности ударных волн характеризуется чрезвычайной гибкостью и разнообразием конкретных способов численной реализации.

§ 26. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Из результатов § 23—25 следует, что нужно стремиться к уменьшению количества итераций при численном решении задачи условной оптимизации (23.31), так как вычисление функционала $I(x_f^n)$ [см. формулу (23.29)], в свою очередь, связано с решением некоторой задачи оптимизации. Поэтому необходимо как можно точнее задавать начальное приближение для абсциссы сильного разрыва x_f^n . Для этой цели в [21] использован дифференциальный анализатор. С учетом результатов § 13 для нахождения положения разрыва в зоне его «размазывания» при счете по схеме «уголок» (23.4) можно применить дифференциальный анализатор, основанный на определении абсциссы максимума величины $|\partial u/\partial x|$, найти которую можно путем перебора по всем ячейкам сетки G_h на оси x . Такой способ применялся нами ранее, например в [26, 281, 19, 20], но он не самый экологичный. Метод золотого сечения [99] известен как

один из наиболее эффективных для задачи одномерного оптимального поиска. Чтобы иметь возможность использовать его, нужно от поиска максимума функции $|\partial u_h/\partial x|$ перейти к эквивалентной задаче поиска минимума. Введем для этой цели функцию

$$g(x, t) = 1/[1 + (\partial u_h/\partial x(x, t))^2]. \quad (26.1)$$

Легко видеть, что $g(x, t)$ имеет локальные минимумы в тех точках, где у $|\partial u_h/\partial x|$ — максимумы. Ясно, что найденное с помощью функции (26.1) значение x_f^n является лишь приближенным решением задачи минимизации основного функционала (23.29), поскольку абсолютная погрешность локализации может достигать значения $\pm 0,5h$ (см. примеры расчетов в § 15, 20). Пусть $(x_f^n)_{\text{д.а}}$ — вычисленное с помощью дифференциального анализатора значение x_f^n . Зададим величины x_l^n , x_r^n в формулах (23.30), (23.31) следующим образом:

$$x_l^n = (x_f^n)_{\text{д.а}} - 0,5h; \quad x_r^n = (x_f^n)_{\text{д.а}} + 0,5h.$$

Для решения задачи (23.31) используем метод золотого сечения. Заметим, что он лишь незначительно уступает оптимальному по требуемому количеству вычислений значений функции $I(x_f^n)$ методу Фибоначчи [99]. Пусть $\delta_3 h$ — наперед задаваемая абсолютная погрешность вычисления x_f^n по методу золотого сечения при решении задачи (23.31). Обозначим через δI соответствующую ошибку в значении функции $I(x_f^n)$. Тогда, согласно [64],

$$\delta I = O((\delta_3 h)^2). \quad (26.2)$$

Из предыдущего следует: если в качестве x_f^n брать $(x_f^n)_{\text{д.а}}$ и вообще не решать задачу (23.31), то, очевидно, в формуле (26.2) надо положить $\delta_3 = 0,5$. Так как точное значение функционала (23.29) в точке минимума должно равняться пулю, с учетом формулы (26.2) $|S_h - S'_h| = O(\delta_3 h)$, т. е. при большом значении $\delta_3 h$ и погрешность нарушения закона сохранения «массы» M_n (23.26) может оказаться значительной. Между тем погрешность можно легко уменьшить, решая задачу (23.31) с разумно подобранным значением δ_3 . Если взять δ_3 очень малым, например $\delta_3 = 10^{-5}$, то потребуется довольно большое количество вычислений значений функции (23.29), что приведет к увеличению требуемого машинного времени. С другой стороны, во многих задачах газодинамики вполне приемлемой оказывается относительная погрешность в M_n порядка 0,1% (см., например, [67]).

Рассмотрим вопрос об учете выхода некоторых сильных разрывов из расчетной области. В случае, когда $a > 0$, в уравнении (2.9) разрывы в его решении перемещаются слева направо со скоростью $dx/dt = a$. Пусть $x = l$ — абсцисса правой границы расчетной области. Предположим, что абсцисса x_f^m изучаемого разрыва известна, $m = n - 1$. Если $x_f^m + 2h > l$, то при $t \geq t_n$ в окрестности данного разрыва больше не применяем алгоритм уточнения разностного ре-

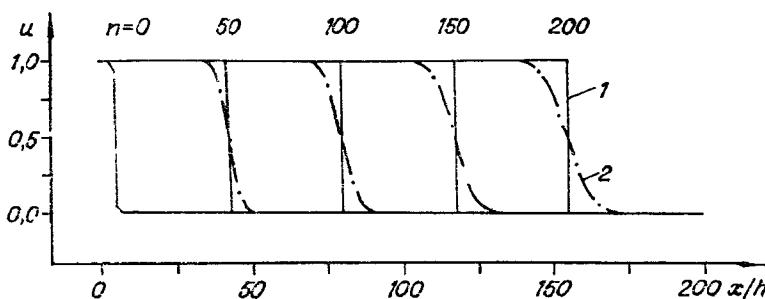


Рис. 47. Результаты расчета «классического» теста.
1 — с уточнением; 2 — разностное решение по схеме (23.4).

шения. Таким образом, в течение нескольких временных шагов, за которые разрыв продвинется на расстояние $2h$, чтобы покинуть расчетную область, его находим по разностной схеме (23.4) «сквозным» образом.

С целью проверки правильности работы программы метода золотого сечения число вычислений $v_{\text{сч}}$ функции $I(x_f^n)$ (23.29) сравнено с теоретической оценкой числа вычислений v , которую легко получить с помощью [99]

$$v \geq v_*, \quad v_* = \ln(\delta_3^{-1}) / \ln[(1 + \sqrt{5})/2], \quad (26.3)$$

где $\delta_3 h$ — наперед задаваемая погрешность определения x_f^n по методу золотого сечения. Например, при $\delta_3 = 0,1$ из формулы (26.3) имеем $v_* = \ln 10 / \ln 1,618 \approx 8,34$; в расчете по нашей программе метода золотого сечения получено $v_{\text{сч}} = 9$; при $\delta_3 = 10^{-3}$ $v_* = 25,02$, $v_{\text{сч}} = 22$; при $\delta_3 = 0,25$ $v_* = 5,02$, $v_{\text{сч}} = 6$.

На рис. 47 показан результат расчета классического теста, когда начальная функция имеет вид «полочки». В этом примере выполнено 200 шагов по t с числом Куранта $\kappa = 0,75$ с использованием разностной схемы (24.32) — (24.35), (24.38) — (24.39) при $M_1 = 1$, $M = 2$; при этом $h = 0,02$, $\delta_3 = 10^{-3}$. При $t = 200\tau$ значение x_f^n , найденное при решении задачи (23.31), отличалось от точного на порядок 10^{-10} , а относительная погрешность в «массе» \mathcal{M}_n [см. формулу (23.26)] составляла величину порядка 10^{-9} . Результат расчета, приведенный на рис. 48, также получен по схеме (24.32) — (24.35), (24.38), (24.39) при $\kappa = 0,75$, $M_1 = 1$, $M = 2$. При $t = 150\tau$ погрешность в «массе» \mathcal{M} составила 0,15 %. Из рис. 48 видно, что при рас-

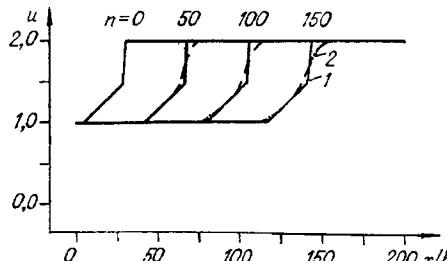


Рис. 48 Расчет профиля с разрывами.

1 — с уточнением в окрестности слабого и сильно-го разрывов, 2 — разностное решение по схеме (23.4).

чете без уточнения теряется информация о характерных изломах профиля решения. В представленных на этом рисунке вычислениях разностное решение уточнялось также в окрестности слабого разрыва по методике § 23, 24, т. е. разрыв рассматривался так, как если бы он был сильным. Абсциссу x_f^n слабого разрыва находили в процессе минимизации функционала (23.29) по методу золотого сечения, причем в формулах (23.31) полагали, что

$$x_l^n = x_f^n - 2h, \quad x_r^n = x_f^n + 2h.$$

Точное решение на рис. 47—53 в пределах точности графиков совпадает с разностным решением, полученным с использованием процедур уточнения § 23, 24.

Интересно было сравнить описанную выше методику с методом «искусственного сжатия», предложенным А. Хартеном [218—220, 266] специально для более аккуратного сквозного расчета течений газа с контактными разрывами и ударными волнами. В соответствии с [219] метод искусственного сжатия можно реализовать как следующий трехступенчатый алгоритм.

Первая ступень — получение разностного решения уравнения (2.9) по обычной разностной схеме [нами использована схема (23.4)]. Это разностное решение будем обозначать \tilde{u}^n .

Вторая ступень состоит в использовании искусственной вязкости Лапидуса [266], или «слаживания по Лапидусу»,

$$\tilde{\tilde{u}}_i^n = \tilde{u}_i^n + (\nu t/h) \Delta' [\Delta' \tilde{u}_{i+1}^n | \Delta' \tilde{u}_{i+1}^n], \quad (26.4)$$

где $\Delta' \tilde{u}_i^n = \tilde{u}_i^n - \tilde{u}_{i-1}^n$, ν — коэффициент искусственной вязкости, полагалось, как и в [266], $\nu = 2$. Такое значение коэффициента ν , как указывалось в [266], нужно для того, чтобы разностное решение, к которому применяется метод искусственного сжатия, было без осцилляций. (Эти осцилляции в случае использования схемы (23.4) может генерировать схема искусственного сжатия Хартина (26.5)—(26.9) в силу ее нелинейного характера.)

Третья ступень — «искусственное сжатие» Хартина [219, 220, 266]

$$u_i^n = \tilde{\tilde{u}}_i^n - (\tau/(2h)) (\theta_{i+1/2}^n G_{i+1/2}^n - \theta_{i-1/2}^n G_{i-1/2}^n), \quad (26.5)$$

где

$$\hat{\theta}_i = \begin{cases} \left| \frac{|\Delta_{i+1/2}| - |\Delta_{i-1/2}|}{|\Delta_{i+1/2}| + |\Delta_{i-1/2}|} \right|^p & \text{при } |\Delta_{i+1/2}| + |\Delta_{i-1/2}| > \varepsilon_n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (26.6)$$

В формуле (26.6) полагали $p = 1$, как и в [266],

$$\Delta_{i+1/2} = \tilde{u}_{i+1}^n - \tilde{u}_i^n;$$

$\varepsilon_n > 0$ — мера пренебрежимого изменения решения \tilde{u}^n . По аналогии с [220] взято $\varepsilon_n = 0,01 \max_i |\Delta_{i+1/2}|$.

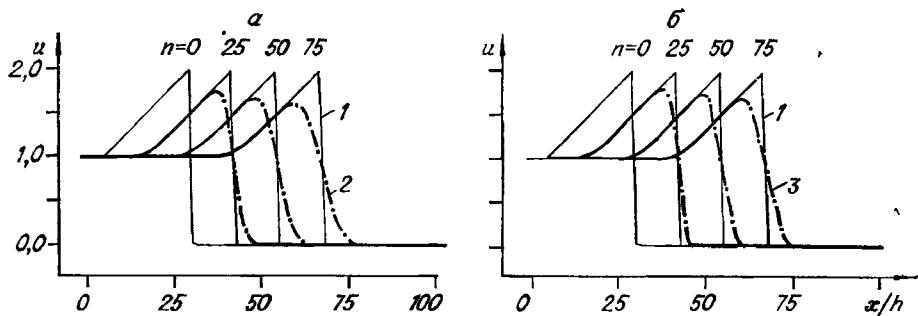


Рис. 49. Расчет движения разрывного профиля при ненулевых градиентах:
а — по схеме (23.6): 1 — с уточнением, схема (23.11), (23.22); 2 — без уточнения;
б — с использованием алгоритма (23.4), (26.5)–(26.9) (кривая 3).

$$\theta_{i+1/2} = \max(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_{i+1}). \quad (26.7)$$

$$G_{i+1/2}^n = g_i^n + g_{i+1}^n - |g_{i+1}^n - g_i^n| S_{i+1/2}, \quad (26.8)$$

$$g_i^n = \alpha_i \Delta_i, \quad S_{i+1/2} = \operatorname{sgn}(\Delta_{i+1/2}),$$

$$\Delta_i = \tilde{u}_{i+1}^n - \tilde{u}_{i-1}^n, \quad (26.9)$$

$$\alpha_i = \max \left\{ 0, \frac{\min(|\Delta_{i+1/2}|, |\Delta_{i-1/2}| S_{i+1/2})}{|\Delta_{i+1/2}| + |\Delta_{i-1/2}|} \right\}.$$

В [21] на примерах расчетов показано, что использование сглаживания по Лапидусу (26.4) при $v=2$ приводит к чрезмерному «размазыванию» разрывов. В связи с этим в [21] проведены также вычисления без сглаживания по Лапидусу (26.4) в методе искусственного сжатия. В качестве разностного решения \tilde{u}^n использовано полученное по схеме (23.4). Сравнение рис. 49, б и 49, а показывает, что искусственное сжатие по Хартену позволяет уменьшить ширину зоны «размазывания» сильного разрыва. Например, из рис. 49, б видно, что при $t=75\tau$ ширина этой зоны составляет приблизительно $12h$, в то время как на рис. 49, а она равна $17h$. Отметим, что использование алгоритма уточнения, описанного в предыдущих разделах, давало ширину «размазывания», равную $h \div 2h$. Возвращаясь к рис. 49, б, отчетливо видим, что ширина «размазывания» сильного разрыва при использовании метода искусственного сжатия Хартена (26.5)–(26.9) увеличивается с ростом t . Кроме того, высота пика разностного решения при использовании формул (26.5)–(26.9) с ростом t падает, а при реализации алгоритма уточнения, описанного в предыдущих разделах, она колеблется с малой амплитудой относительно значения, очень близкого к точному значению решения непосредственно за фронтом сильного разрыва.

На рис. 50–51 показан пример расчета движения конфигурации, содержащей семь разрывов при $t=0$. Угол наклона к оси линейного профиля за фронтом каждого разрыва взят равным 30° , расстояние при $t=0$ между соседними разрывами составляло $6h$. Для получения решения U^n использовалась схема (23.11), (23.22).

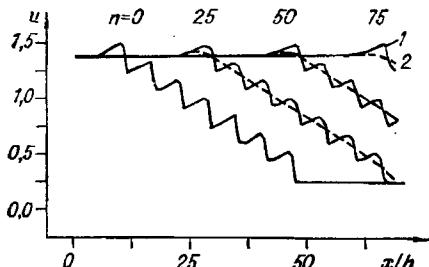


Рис. 50. Расчет движения профиля с семью разрывами:
1 — с уточнением; 2 — без уточнения по схеме (23.4).

ваются очень быстро, в течение первых 10–15 шагов по t , после чего полностью теряется информация о количестве разрывов и форме профилей в окрестности каждого разрыва.

На рис. 52 приведен пример расчета движения конфигурации, содержащей 40 разрывов при $t = 0$. Вычисления проводили по схеме (23.11), (23.22). При $t = 0$ расстояние между соседними разрывами было $4h$ (за исключением 20-го и 21-го, находящихся в вершине «пирамиды», между ними было $8h$). В этом примере расчета погрешности в локализации разрывов при $t = 100\tau$ составили $0,005h$. В силу конструкции вышеописанного алгоритма уточнения эту процедуру можно применять к разрывам в любой их последовательности. В частности, при счете на ЭВМ БЭСМ-6 разрывы рассматривались в порядке «слева направо» с помощью соответствующим образом организованного цикла. Использование многопроцессорных ЭВМ, допускающих параллельный счет, позволяет эффективно экономить машинное время [36], поскольку каждому из имеющихся в наличии процессоров дается «задание» на обработку определенной группы разрывов.

Если в окрестности сильного разрыва производная $\partial^2 u / \partial x^2$ велика, то погрешность аппроксимации разностной схемы (23.11), (23.22) может оказаться большой [см. п. д. н. (23.23)]. Поэтому в таких случаях более целесообразным может оказаться использование схемы второго порядка точности (24.32)–(24.35), (24.38), (24.39). С целью проверки этого предположения проведены расчеты для случая, когда начальный профиль $u_0(x)$ составлен из трех параболических дуг так, что имеют место сильные разрывы на стыке между первой и второй, второй и третьей дугами и между третьей дугой и постоянным состоянием $u_0(x) = \text{const}$ (нумерация дуг слева направо, см. рис. 53). Отметим, что с ростом времени t знак кривизны профиля решения по схеме без уточнения (штриховая линия) меняется на противоположный по отношению к истинной кривизне в области первой параболической дуги. Это объясняется эффектом скругления профиля разностного решения, получаемого по схеме (23.4), в окрестности слабого разрыва (сплошная кривая получена с уточнением решения также в окрестности слабого разрыва). Ал-

Уточнение решения в окрестности каждого разрыва позволяет проследить за его эволюцией во времени вплоть до момента, когда он покинет расчетную область через правую границу $x = l$. Например, из рис. 50 видно, что при $t = 50\tau$ в расчетной области еще находятся четыре разрыва, в то время как при $t = 75\tau$ остался только один, остальные уже покинули расчетную область. Из рис. 51, б видно, что при вычислении без уточнения по схеме (23.4) ступеньки сглаживаются очень быстро, в течение первых 10–15 шагов по t , после чего полностью теряется информация о количестве разрывов и форме профилей в окрестности каждого разрыва.

На рис. 52 приведен пример расчета движения конфигурации, содержащей 40 разрывов при $t = 0$. Вычисления проводили по схеме (23.11), (23.22). При $t = 0$ расстояние между соседними разрывами было $4h$ (за исключением 20-го и 21-го, находящихся в вершине «пирамиды», между ними было $8h$). В этом примере расчета погрешности в локализации разрывов при $t = 100\tau$ составили $0,005h$. В силу конструкции вышеописанного алгоритма уточнения эту процедуру можно применять к разрывам в любой их последовательности. В частности, при счете на ЭВМ БЭСМ-6 разрывы рассматривались в порядке «слева направо» с помощью соответствующим образом организованного цикла. Использование многопроцессорных ЭВМ, допускающих параллельный счет, позволяет эффективно экономить машинное время [36], поскольку каждому из имеющихся в наличии процессоров дается «задание» на обработку определенной группы разрывов.

Если в окрестности сильного разрыва производная $\partial^2 u / \partial x^2$ велика, то погрешность аппроксимации разностной схемы (23.11), (23.22) может оказаться большой [см. п. д. н. (23.23)]. Поэтому в таких случаях более целесообразным может оказаться использование схемы второго порядка точности (24.32)–(24.35), (24.38), (24.39). С целью проверки этого предположения проведены расчеты для случая, когда начальный профиль $u_0(x)$ составлен из трех параболических дуг так, что имеют место сильные разрывы на стыке между первой и второй, второй и третьей дугами и между третьей дугой и постоянным состоянием $u_0(x) = \text{const}$ (нумерация дуг слева направо, см. рис. 53). Отметим, что с ростом времени t знак кривизны профиля решения по схеме без уточнения (штриховая линия) меняется на противоположный по отношению к истинной кривизне в области первой параболической дуги. Это объясняется эффектом скругления профиля разностного решения, получаемого по схеме (23.4), в окрестности слабого разрыва (сплошная кривая получена с уточнением решения также в окрестности слабого разрыва). Ал-

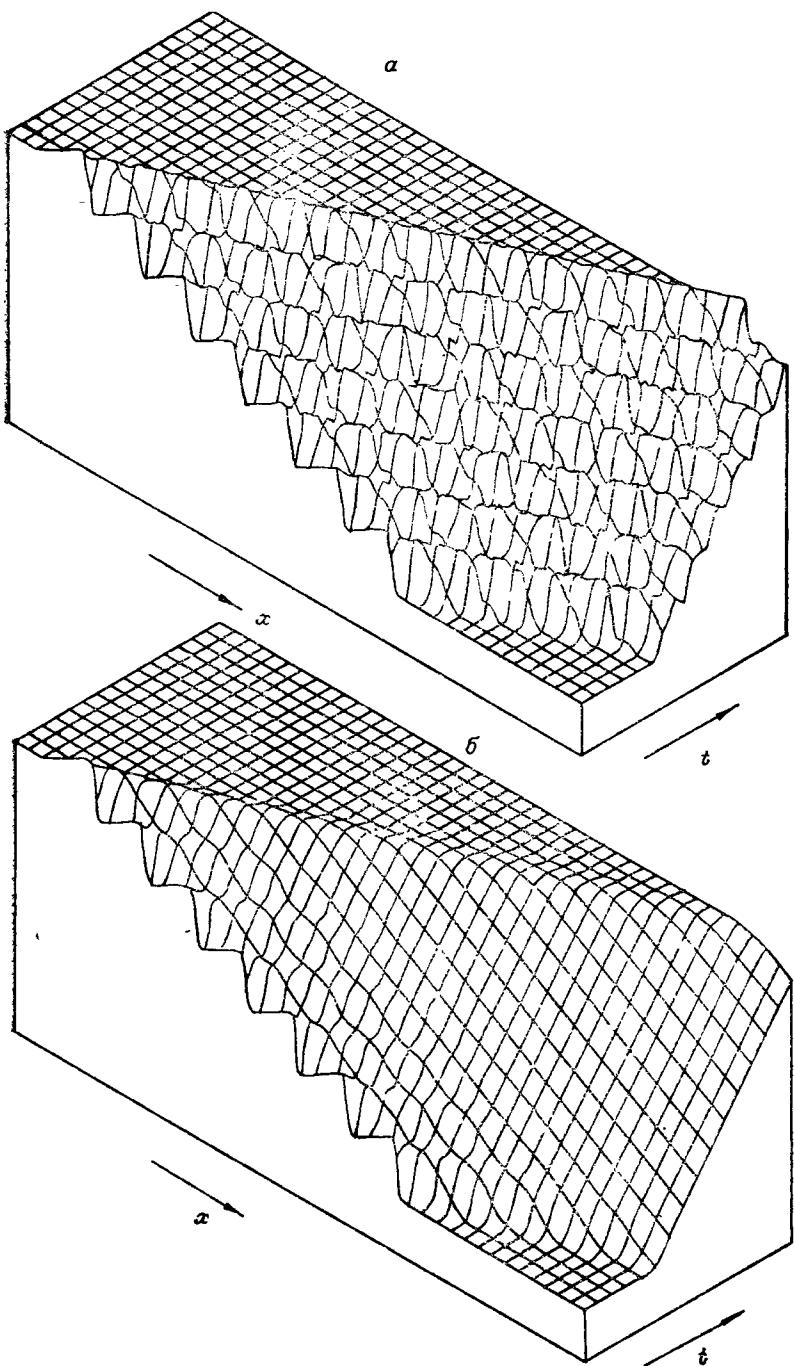


Рис. 51. Расчет поверхности $u = u(x, t)$:
а — с уточнением; б — без уточнения по схеме (23.4).

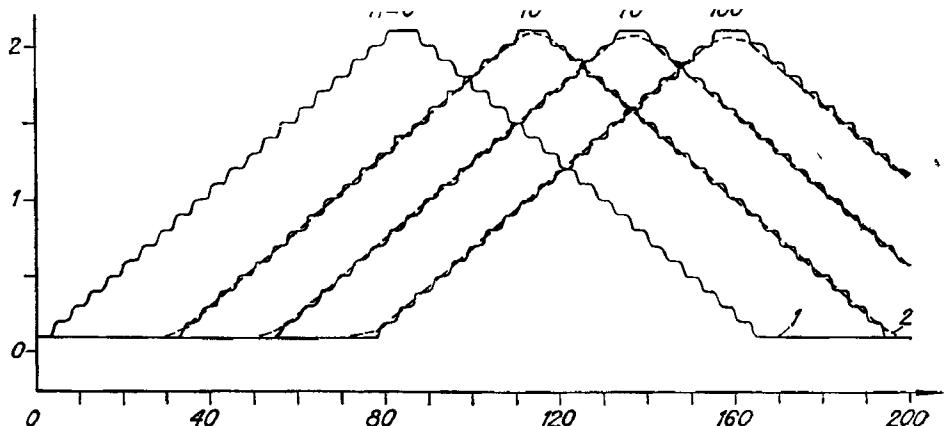


Рис. 52. Расчет движения профиля с 40 разрывами:
1 — с уточнением; 2 — без уточнения по схеме (23.4).

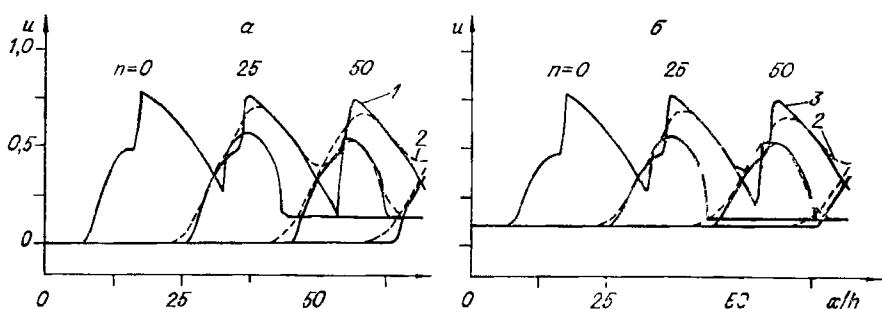


Рис. 53. Профиль из трех параболических дуг:
а — уточнение на основе минимизации дискретного функционала; б — на основе аппроксимации интегрального закона сохранения (23.8).
1 — расчет с уточнением, $M_1=2$, $M=4$ в схеме (23.32)–(23.35), (23.38), (23.39);
2 — без уточнения по схеме (23.4); 3 — с уточнением, $M_1=1$, $M=2$ в схеме (23.11), (23.22).

гебраическая система (23.34), возникающая при реализации схемы (23.11), (23.22) при $M_1 > 1$, $M - M_1 > 1$, решалась методом исключения Гаусса с выбором главного элемента в столбце.

В заключение параграфа приведем некоторые данные о требуемом для реализации вышеописанных алгоритмов уточнения машинном времени. Прежде всего ясно, что оно зависит от количества обсчитываемых разрывов, а также от чисел M_1 и M , характеризующих число узлов сетки G_Δ . Кроме того, машинное время зависит от количества временных шагов, которое нужно сосчитать, от количества узлов сетки G_h и сложности используемой на G_h разностной схемы. Например, для расчета задачи с семью разрывами (см. рис. 50, 51, а) потребовалось около 50 с машинного времени ЭВМ БЭСМ-6; в случае 40 разрывов (см. рис. 52) — уже около 200 с.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Сделаем некоторые замечания по поводу применимости ряда известных способов локализации разрывов в численных решениях задач газодинамики, получаемых с использованием конечноразностных схем сквозного счета. Сначала рассмотрим способ визуального определения положения разрывов по сближению различных изолиний. Как отмечено в § 13, максимальное сближение линий уровня некоторой функции, скажем, плотности, имеет место в областях наибольших градиентов этой функции. Из главы 2 следует, что, как правило, положение областей максимального сближения изолиний не совпадает с истинным положением фронтов ударных волн. Величина ошибки, возникающей при таком способе локализации, порядка $O(h)$. Кроме того, изолинии могут заметно сближаться также в областях волн сжатия и необходима дополнительная проверка, действительно ли места наибольшего сближения изолиний являются геометрическим местом точек ударного фронта или контактного разрыва. В § 13 отмечено, что такая функция, как давление, остается непрерывной при переходе через контактный разрыв, поэтому линии постоянного давления — изобары, вообще говоря, не сближаются в окрестности контактных границ и для локализации данного вида разрывов можно использовать линии уровня только тех функций, которые теряют разрыв на контактной границе, т. е. функций плотности и температуры.

Если используемая разностная схема первого порядка точности такова, что ее п. д. п. не удовлетворяет в контактной полосе условиям теоремы 1 из § 13, то положение областей максимального сближения линий постоянной плотности — изохор, в общем случае не совпадает с истинным положением контактных границ. При этом соответствующая ошибка локализации может достигать нескольких десятков интервалов пространственной расчетной сетки. В таком случае целесообразно использовать линии не постоянной плотности, а уровня некоторой функции $R(p, \rho)$, получение которой проиллюстрируем на примере схемы Русанова [122]. Действительно, из уравнения (13.44) с учетом § 13 получаем, что линии уровня функции

$$R(p, \rho) = \int b(\rho) d\rho = \left(\omega \frac{h}{2} |\vec{u}| - \frac{\tau}{2} |\vec{u}|^2 \right) \rho + \omega h \sqrt{\gamma p \rho}$$

при использовании схемы [122] будут максимально сближаться в подобластях, соответствующих положению контактной границы. Далее, из результатов § 13 следует, что в случае использования схем второго и более высоких порядков аппроксимации подобласти максимального сближения изохор будут также смешены по отношению к истинному положению контактных разрывов. Тем не менее результаты локализации разрывов в данном случае могут оказаться удовлетворительными для практики, если расчет нестационарной задачи проводится в ограниченном промежутке $0 \leq t \leq T$, где T —

сравнительно небольшая величина. Это связано с тем, что контактные разрывы «размазываются» в существенно меньшем размере при использовании схем второго и более высоких порядков точности (см. § 13 и табл. 2).

Легко видеть, что изохоры сближаются не только в подобластях течения, содержащих контактные разрывы, но и в подобластях, содержащих фронты ударных волн и волны сжатия. Поэтому может возникнуть неоднозначность при интерпретации результатов расчетов. На практике обычно неоднозначность преодолевается широким привлечением данных физических экспериментов, проводимых, скажем, в аэродинамических трубах. Немаловажную роль может сыграть также знание исследователем некоторых общих свойств решений изучаемого класса задач и, наконец, опыт и интуиция.

В начале главы 2 перечислен ряд работ, в которых способ определения точек максимума искусственной вязкости применялся для локализации ударных волн в ряде сложных двумерных нестационарных задач (см. также монографию [120]). Из результатов § 5 следует, что способ локализации по $\max q$, где q — искусственная вязкость, применим в практических расчетах. Если необходимо, чтобы ошибка в локализации разрыва не превышала величины h (h — характерный размер ячейки пространственной сетки), то нужно, вообще говоря, накладывать некоторые ограничения на безразмерные коэффициенты, входящие в выражения для искусственных вязкостей (см. табл. 1). Если не учитывать эти ограничения, то величина ошибки локализации ударного фронта может достигать нескольких интервалов h , как показано на примерах расчетов в § 20.

Способ локализации ударных фронтов по $\max q$ — дифференциальный анализатор — имеет преимущество перед визуальным определением положения разрывов по сближению изолиний. Преимущество состоит в том, что ЭВМ выдает готовую информацию об ударных фронтах в виде координат их точек или графических изображений на экране дисплея либо на графопостроителе (см. § 12). При этом достоверность выдаваемых картин течения повышается, если еще использовать проверку условий Гюгонио в зоне «размазывания» предполагаемого ударного фронта, как предлагалось делать в п. 7.3. Реализация описанных в § 12 дифференциальных анализаторов, использующих $\max q$ или максимум нормы схемной вязкости, связана с поиском точек максимума указанных величин вдоль лучей, которые проводятся в плоскости (x, y) так, чтобы они пересекали возможные ударные фронты под углами, близкими к прямым. Это означает, что конкретная стратегия выбора направлений лучей в подпрограммах дифференциального анализатора должна учитывать априорную информацию об исследуемом течении. Для получения этой информации, как и в способе локализации по изолиниям, важны имеющиеся экспериментальные данные, а также знания, опыт и интуиция исследователя.

Рассмотренные в главе 5 оптимизационные методы локализации сильных разрывов по результатам сквозного счета позволяют, как и дифференциальные анализаторы, получать информацию непосред-

ственno о линии разрыва. Предложенные в § 17, 18 модификации исходного оптимизационного подхода Миранкера и Пиронно имеют ряд преимуществ перед дифференциальными анализаторами глав 2—4. Эти преимущества перечислены в § 21. Недостатки описанных в § 16—21 оптимизационных методов локализации разрывов: повышенные по сравнению с дифференциальными анализаторами требования к памяти ЭВМ; наличие априорной информации о существовании сильного разрыва в рассчитываемой задаче.

Если информация о положении разрыва используется для уточнения разностного решения в окрестности разрыва, то, как указано в § 23—24, целесообразно применять алгоритмы локализации, обеспечивающие наиболее высокую точность. За счет этого можно в несколько раз сократить машинное время, требуемое для численного решения задач условной оптимизации, к которым сведена задача уточнения разностного решения в главе 6.

Если при численном исследовании некоторой задачи требуется большое число картин течения, показывающих динамику поверхностей разрывов, то становится важной проблема машинного времени, требуемого для получения каждой такой картины течения с использованием того или иного способа локализации. Известные способы локализации разрывов существенно различаются по требуемому машинному времени. Для некоторых алгоритмов, как, например, [244] (см. также обзор способов локализации в начале главы 2), оно сравнимо со временем решения основной двумерной задачи. Для уменьшения требуемого машинного времени целесообразно применять в процедурах построения изолиний и подпрограммах дифференциального анализатора, описанных в § 12, наиболее простые интерполяционные формулы (например, линейную). Заметим, что на ЭВМ с параллельными процессорами работа программ построения изолиний и программ дифференциального анализатора может идти одновременно с решением основной задачи.

* * *

Авторы благодарны сотрудникам отдела численных методов механики сплошной среды Вычислительного центра СО АН СССР, Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР, в коллективах которых обсуждалась работа. На точки зрения авторов повлияло также общение с коллективами, возглавляемыми А. Н. Тихоновым, С. К. Годуновым, Л. В. Овсянниковым. Особенно полезными были обсуждения и критика Ю. А. Березина, А. Ф. Воеводина, Ю. М. Давыдова, Ю. С. Завьялова, Б. Г. Кузнецова, В. А. Новикова, Б. Л. Рождественского, В. М. Фомина, Ю. И. Шокина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алалыкин Г. Б., Годунов С. К., Киреева И. Л., Плинер Л. А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках.— М.: Наука, 1970.— 112 с.
2. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения.— М.: Мир, 1972.— 320 с.
3. Андерсон Э. Ударные волны в магнитной гидродинамике.— М.: Атомиздат, 1968.— 271 с.
4. Анучин Н. Н. О методах расчета течений сжимаемой жидкости с большими деформациями.— Численные методы механики сплошной среды, 1970, т. 1, № 4, с. 3—84.
5. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 304 с.
6. Балакин В. Б., Булатов В. В. Численное решение задачи о взаимодействии ударной волны с цилиндром в сверхзвуковом потоке.— Инж.-физ. журн., 1971, т. 21, № 6, с. 1033—1039.
7. Батищев Д. И. Поисковые методы оптимального проектирования.— М.: Сов. радио, 1975.— 216 с.
8. Бахрах С. М., Глаголова Ю. П., Самигулин М. С. и др. Расчет газодинамических течений на основе метода концентраций.— Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 3, с. 566—569.
9. Бахрах С. М., Жидов И. Г., Рогачев В. Г., Янилкин Ю. В. Численное исследование неустойчивости тангенциального разрыва скорости в сжимаемых газах.— Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1983, № 2, с. 146—149.
10. Баутин Н. Н., Леонович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1976.— 496 с.
11. Белов И. А., Рудакова Г. М., Цымбалов В. В. Численное исследование взаимодействия струйных потоков с препятствиями при возникновении областей циркуляционного течения.— Красноярск, 1981.— 51 с.— (Препринт/АН СССР, СО, ВЦ; 33).
12. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент.— М.: Наука, 1982.— 391 с.
13. Бен-Дор Г., Гласс И. И. Нестационарные отражения косых ударных волн: данные экспериментов и результаты численных расчетов.— Ракетн. техника и космонавтика, 1978, т. 16, № 11, с. 33—42.
14. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. 3-е изд.— М.: Наука, 1966.— Т. 1, 632 с.
15. Булатов В. В. Численный анализ сверхзвукового течения идеального газа в следе за осесимметричным телом.— Инж.-физ. журн., 1977, т. 32, № 6, с. 1080—1086.
16. Васенин И. М., Рычков А. Д. Об одном способе расчета сверхзвуковых осесимметричных перераспределенных струй.— Численные методы механики сплошной среды, 1970, т. 1, № 2, с. 3—9.
17. Ватсон Г. П. Теория бесселевых функций.— М.: Изд-во иностр. лит., 1949.— Ч. 1. 799 с.

18. Воинов О. В., Шухачев В. В. Термокапиллярное движение в газожидкостной смеси.— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1980, № 5, с. 33—45.
19. Ворожцов Е. В. О дифференциальных анализаторах ударных фронтов.— В кн.: Комплексы программ математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972, с. 98—115.
20. Ворожцов Е. В. Численные тесты дифференциальных анализаторов ударных волн.— Численные методы механики сплошной среды, 1977, т. 8, № 2, с. 12—27.
21. Ворожцов Е. В. Об уточнении разностных решений в окрестности разрыва.— Новосибирск, 1983.— 52 с.— (Препринт/АН СССР, СО, ИТПМ; 13).
22. Ворожцов Е. В., Ермолин Н. Е., Фомин В. М. Расчет двухмерных химических неравновесных смесей газов в соплах и струях.— Численные методы механики сплошной среды, 1979, т. 10, № 2, с. 30—39.
23. Ворожцов Е. В., Крепкий В. М., Узаков З. Об одном оптимизационном подходе в задачах локализации ударных волн по результатам сквозного счета.— Там же, 1981, т. 12, № 4, с. 30—47.
24. Ворожцов Е. В., Узаков З. О локализации разрыва функции насыщенности в численных решениях двухмерных задач фильтрации.— Там же, 1983, т. 14, № 3, с. 18—32.
25. Ворожцов Е. В., Фомин В. М., Яненко Н. Н. Дифференциальные анализы ударных волн. Приложения теории.— Там же, 1976, т. 7, № 6, с. 8—23.
26. Ворожцов Е. В., Яненко Н. Н. Одномерная теория контактной полосы.— Новосибирск, 1981.— 47 с.— (Препринт/АН СССР, СО, ИТПМ; 45).
27. Ворожцов Е. В., Яненко Н. Н. О методах подавления К-несогласованности разностных схем газодинамики.— Новосибирск, 1981.— 49 с.— Препринт/АН СССР, СО, ИТПМ; 44).
28. Ворожцов Е. В., Яненко Н. Н. О свойстве К-согласованности разностных схем газодинамики.— Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 1, с. 18—24.
29. Вулис Л. А., Гусика П. Л., Жижин Г. В. Двухфазное течение в канале постоянного сечения (качественное исследование).— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1972, № 5, с. 143—156.
30. Высокоскоростные ударные явления/Под ред. Р. Кинслоу.— М.: Мир, 1973.— 533 с.
31. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 3-е изд.— М.: Наука, 1967.— 575 с.
32. Гилой В. Интерактивная машинная графика.— М.: Мир, 1981.— 380 с.
33. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двухмерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1961, т. 1, № 6, с. 1020—1050.
34. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики.— М.: Наука, 1976.— 400 с.
35. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. Введение в теорию.— М.: Наука, 1977.— 439 с.
36. Головкин Б. Л. Параллельные вычислительные системы.— М.: Наука, 1980.— 518 с.
37. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М.— Л.: Гостехтеоретиздат, 1941.— 400 с.
38. Гриднева В. А., Корнеев А. И., Трушков В. Г. О численном методе расчета течения упруго-пластических сред с большими деформациями.— В кн.: Материалы 5-й научной конференции по математике и механике. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1975. Т. 2, с. 115—116.
39. Давыдов Ю. М., Пантелейев М. С. Развитие трехмерных возмущений при рэлей-тейлоровской неустойчивости.— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1981, № 1, с. 117—122.
40. Данилов В. Л., Кац Р. М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде.— М.: Недра, 1980.— 264 с.
41. Данилов В. Л., Коновалов А. Н., Якуба С. И. Об уравнениях и краевых задачах теории двухфазных фильтрационных течений в пористой среде.— Докл. АН СССР, 1968, т. 183, № 2, с. 307—310.
42. Дафтермос К. Н. Квазилинейные гиперболические системы, вытекающие

- из законов сохранения.— В кн.: Нелинейные волны/Под ред. Лейбович, Сибасс. М.: Мир, 1977, с. 91—112.
43. Дуванов А. А., Мурзин Ф. А., Шапеев В. П. Аналитическое дифференцирование функций на ЭВМ.— Новосибирск, 1981.— 10 с.— (Препринт/АН СССР, СО, ИТПМ; 4)
 44. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.— М.: Наука, 1982.— 432 с.
 45. Еремин В. В. Взаимодействие плоской сверхзвуковой струи с препятствием в спутном сверхзвуковом потоке.— Тр. НИИмеханики МГУ, 1973, № 30, с. 176—181.
 46. Жигалко Е. Ф. Диагностика разрывов в автомодельном нестационарном течении газа.— В кн.: Течение вязкого и невязкого газа. Двухфазные жидкости/Под ред. Н. Н. Поляхова. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981, с. 77—83.
 47. Жижин Г. В. Двухфазные течения с трением.— Инж.-физ. журн., 1977, т. 32, № 1, с. 96—101.
 48. Жуков А. И. Предельная теорема для разностных операторов.— Успехи мат. наук, 1959, т. 14, вып. 3 (87), с. 129—136.
 49. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.— 352 с.
 50. Зарубин А. Г. К расчету обтекания крыльев со сверхзвуковыми острыми кромками.— Учен. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 6, с. 120—124.
 51. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.— 686 с.
 52. Златин Н. А., Красильщиков А. П., Мишин Г. И., Попов Н. Н. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях.— М.: Наука, 1974.— 344 с.
 53. Иванов М. Я. К решению двумерных и пространственных задач обтекания тел околовзвуковым потоком.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1975, т. 15, № 5, с. 1222—1240.
 54. Иванов М. Я., Корецкий В. В., Курочкина Н. Я. Исследование свойств разностных схем сквозного счета первого порядка аппроксимации.— Численные методы механики сплошной среды, 1980, т. 11, № 1, с. 81—110.
 55. Иванов М. Я., Корецкий В. В., Курочкина Н. Я. Исследование свойств разностных схем сквозного счета второго порядка аппроксимации.— Там же, № 2, с. 41—63.
 56. Иванов М. Я., Корецкий В. В., Курочкина Н. Я. Исследование свойств разностных схем сквозного счета повышенного порядка аппроксимации.— Там же, № 4, с. 88—103.
 57. Иванов М. Я., Корецкий В. В. Анализ свойств разностных схем газовой динамики.— В кн.: 5-й Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 169—170.
 58. Иванов М. Я. К анализу механизма осциляций численных решений уравнений гидродинамики.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1982, т. 22, № 2, с. 411—417.
 59. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В. Метод сквозного счета двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. I.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1972, т. 12, № 2, с. 441—463.
 60. Иванов М. Я., Рылько О. А. Расчет трансзвукового течения в пространственных соплах.— Там же, № 5, с. 1280—1291.
 61. Ильин А. М., Олейник О. А. Асимптотическое поведение решений задач Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времени.— Мат. сб., 1960, вып. 51, с. 191—216.
 62. Ильин В. П. Разностные методы решения эллиптических уравнений. Лекции для студентов НГУ.— Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1970.— 263 с.
 63. Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М. Дифференциальный анализатор ударных волн с релаксацией.— Новосибирск, 1983.— 35 с.— (Пре-принт/АН СССР, СО, ИТПМ; 5)
 64. Калиткин Н. Н. Численные методы.— М.: Наука, 1978.— 512 с.
 65. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 5-е изд.— М.: Наука, 1976.— 576 с.

66. Канторович Л. В., Крылов В. И. Методы приближенного решения уравнений в частных производных.—Л.—М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.—528 с.
67. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики.—Новосибирск: Наука. Спб. отд-ние, 1981.—304 с.
68. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Разностная схема на подвижных сетках для решения уравнений вязкого газа.—Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1979, т. 19, № 1, с. 174—188.
69. Колган В. П. Применение операторов слаживания в разностных схемах высокого порядка точности.—Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1978, т. 18, № 5, с. 1340—1345.
70. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы.—М.: Мир, 1964.—350 с.
71. Коновалов А. Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Лекции для студентов НГУ.—Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1972.—128 с.
72. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.—М.: Наука, 1968.—720 с.
73. Коротков П. Ф., Лобанов В. С. Расчет взрыва гексогена в алюминии.—Журн. прикл. механики и техн. физики, 1973, № 4, с. 156—162.
74. Косарев В. П. О расчете сверхзвуковых установившихся течений газа с внутренними скачками уплотнения.—Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1971, т. 11, № 5, с. 1262—1271.
75. Кочин Н. Е. К теории разрывов в жидкости.—Собр. соч. Т. II. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1949, с. 5—42.
76. Коchin Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. 6-е изд.—М.: Физматгиз, 1963.—583 с.
77. Коchin Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. 4-е изд.—М.: Физматгиз, 1963.—727 с.
78. Крайко А. Н., Макаров В. Е., Тилляева Н. И. К численному построению фронтов ударных волн.—Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1980, т. 20, № 3, с. 716—723.
79. Крылов В. П., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы.—М.: Наука, 1977.—Т. II. 400 с.
80. Кузнецов Н. Н. Асимптотика решений краево-разностной задачи Коши.—Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1972, т. 12, № 2, с. 334—351.
81. Куликовский А. Г., Слободкин Ф. А. Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек перехода через скорость звука.—Прикл. математика и механика, 1967, т. 31, вып. 4, с. 593—602.
82. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны.—М.: Изд-во иностр. лит., 1950.—426 с.
83. Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа.—Новосибирск: Наука. Спб. отд-ние, 1983.—270 с.
84. Леви Б. И., Зайдель Я. М., Саакян В. М. О методе снижения ориентационной погрешности при численном моделировании двухфазной фильтрации.—Численные методы механики сплошной среды, 1978, т. 9, № 6, с. 105—114.
85. Лейфштед С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений.—М.: Изд-во иностр. лит., 1961.—387 с.
86. Лисейкин В. Д., Яненко Н. Н. О выборе оптимальных разностных сеток.—Численные методы механики сплошной среды, 1977, т. 8, № 7, с. 100—104.
87. Лисейкин В. Д. Об оптимальной сетке для численного решения обыкновенного дифференциального уравнения.—Там же, 1978, т. 9, № 6, с. 115—118.
88. Лисейкин В. Д. Об оптимальных сетках для схем второго порядка, аппроксимирующих обыкновенное дифференциальное уравнение.—Там же, 1981, т. 12, № 1, с. 78—81.
89. Лисейкин В. Д., Яненко Н. Н. Метод подвижных координат в газовой динамике.—Там же, 1976, т. 7, № 2, с. 75—82.
90. Лобанов В. Ф. Численное моделирование течения при сжатии цилиндрических образцов скользящей детонационной волной.—Журн. прикл. механики и техн. физики, 1975, № 5, с. 145—149.
91. Лыков А. В. Теория теплопроводности.—М.: Высп. шк., 1967.—599 с.

92. Лыков А. В., Михайлов Ю. А. Теория тепло- и массопереноса.— М.— Л.: Государств. энергетич. изд-во, 1963.— 535 с.
93. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течения газа около тупых тел. Ч. 1. Метод расчета и анализ течений.— М.: Наука, 1970.— 287 с.
94. Макаров В. Е. К выделению поверхностей разрывов при численном расчете сверхзвуковых конических течений.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1982, т. 22, № 5, с. 1218—1226.
95. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1977.— 456 с.
96. Милешин В. И., Тилляева Н. И. Сверхзвуковое обтекание с отошедшей ударной волной тел с кольцевым протоком.— В кн.: 5-й Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 256.
97. Минайлос А. Н. О значении монотонности конечно-разностных схем в методах сквозного счета.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1977, т. 17, № 4, с. 1058—1063.
98. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов.— М.: Наука, 1966.— 432 с.
99. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации.— М.: Наука, 1978.— 352 с.
100. Мухин С. И., Попов С. Б., Попов Ю. П. Дисперсионные и диссипативные свойства разностных схем для нелинейного уравнения переноса.— М., 1981.— 32 с.— (Препринт/АН СССР, ИПМ им. М. В. Келдыша; 150)
101. Нартов В. П., Черных Г. Г. О численном моделировании течения, возникающего при коллапсе зоны смешения в стратифицированной среде.— Новосибирск, 1982.— 23 с.— (Препринт/АН СССР, СО, ИГПМ; 15)
102. Нейман Дж. фон. Теория самовоспроизводящихся автоматов.— М.: Мир, 1971.— 382 с.
103. Неуважаев В. Е. Неадиабатические движения в идеальном газе (автомодельные решения).— В кн.: Разностные методы решения задач математической физики. Ч. 2/Под ред. Н. Н. Яненко. М.: МИ АН СССР, 1973, с. 24—51.
104. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики.— М.: Наука, 1981.— 368 с.
105. О'Киф Дж. Д., Арене Т. Дж. Ударные эффекты при столкновении больших метеоритов с луной.— В кн.: Механика образования воронок при ударе и взрыве. М.: Мир, 1977, с. 62—79.
106. Паасонен В. И. Диссипативные неявные схемы с псевдовязкостью высших порядков для гиперболических систем уравнений.— Численные методы механики сплошной среды, 1973, т. 4, № 4, с. 44—57.
107. Петренко В. Е., Ворожцов Е. В. Применение частиц-слоев при расчетах по методу частиц в ячейках.— Там же, № 2, с. 132—141.
108. Петренко В. Е., Сапожников Г. А. Об устойчивости и точности метода частиц в ячейках для течений вязкой жидкости.— В кн.: Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1975, с. 95—111.
109. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход.— М.: Мир, 1974.— 376 с.
110. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию.— М.: Наука, 1983.— 384 с.
111. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 3-е изд.— М.: Наука, 1970.— 331 с.
112. Попов С. П., Ромашкевич Ю. И. Об алгоритме расчета двумерных неравновесных течений газа.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1979, т. 19, № 2, с. 546—550.
113. Потапкин А. В. Об использовании сгущающихся сеток в расчетах течений с большими градиентами.— Численные методы механики сплошной среды, 1983, т. 14, № 3, с. 126—139.
114. Путилов К. А. Термодинамика.— М.: Наука, 1971.— 375 с.
115. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975.— 320 с.
116. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 418 с.
117. Робул Г. И. Численное исследование процесса кратерообразования при вы-

- сокоскоростном ударе.— В кн.: Численные методы в аэродинамике. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 16—21.
118. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.— М.: Наука, 1978.— 688 с.
119. Росляков Г. С., Сухоруков В. П. Разностный метод для расчета течений газа с разрывами.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 19. М.: Изд-во МГУ, 1972, с. 83—96.
120. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.— М.: Мир, 1980.— 616 с.
121. Рудакова Г. М., Шашкин А. П. К расчету некоторых плоских нестационарных течений газа.— Изв. СО АН СССР. Сер. тех. наук, 1975, № 3, с. 70—77.
122. Русанов В. В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1961, т. 1, № 2, с. 267—279.
123. Русанов В. В. Расчет и исследование многомерных течений газа методом колечных разностей. Автореф. д-ра физ.-мат. наук.— М.: изд. ИПМ АН СССР, 1968.— 17 с.
124. Садков Ю. Н. Дифференциальные приближения разностных схем и разрывные решения квазилинейных уравнений.— Сб. работ Вычисл. центра МГУ, 1981, № 34, с. 136—144.
125. Самарский А. А., Арсенин В. Я. О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкости.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1961, т. 1, № 2, с. 357—360.
126. Самарский А. А., Nikolaev E. S. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 592 с.
127. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. 2-е изд.— М: Наука, 1980.— 352 с.
128. Сапожников Г. А. Влияние облицованной полости в заряде на движение оболочек.— В кн.: Аэрогазодинамика быстропротекающих процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1979, с. 71—78.
129. Сапожников Г. А. Совместный метод потоков жидкости и частиц в ячейках для расчета газодинамических течений.— В кн.: Вопросы разработки и эксплуатации пакетов прикладных программ. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1981, с. 89—97.
130. Сейлас М. Д. Применение метода подгонки скачка для расчета сложных стационарных двумерных сверхзвуковых течений.— Ракетн. техника и космоплавтика, 1976, т. 14, № 5, с. 49—55.
131. Смирнов В. И. Курс высшей математики.— М.: Наука, 1969.— Т. III, ч. 2. 672 с.
132. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений/Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта.— М.: Мир, 1979.— 312 с.
133. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамович, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.— 832 с.
134. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике.— М.: Наука, 1976.— 248 с.
135. Таран М. Д. Метод частиц конечного размера для моделирования многообластных двумерных задач газовой динамики.— М., 1979.— 18 с.— (Препринт/АН СССР, ИПМ; 177)
136. Таран М. Д., Таран Т. В., Фаворский А. П. Алгоритм численного моделирования гидродинамических течений с помощью частиц конечного размера.— М., 1979.— 35 с.— (Препринт/АН СССР, ИПМ; 114)
137. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики/Под ред. К. И. Бабенко.— М.: Наука, 1979.— 269 с.
138. Терентьев Е. Д., Шмыглевский Ю. Д. Полная система дивергентных уравнений динамики совершенного газа.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1975, т. 15, № 6, с. 1535—1544.
139. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 5-е изд.— М.: Наука, 1977.— 736 с.
140. Толстых А. И. О методе численного решения уравнений Навье — Стокса сжимаемого газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса.— Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 1, с. 48—51.
141. Тонды А. Нелинейные колебания механических систем.— М.: Мир, 1973.— 334 с.

142. Узаков З. О локализации разрыва в численном решении задачи Баклея — Леверетта.— Численные методы механики сплошной среды, 1979, т. 10, № 6, с. 141—149.
143. Узаков З. Об одном численном эксперименте по локализации разрыва в решении задачи фильтрации трехфазной несжимаемой жидкости.— В кн.: Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости (Труды IV Всес. семинара). Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1980, с. 241—245.
144. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.— 622 с.
145. Уилкинсон Дж. Х., Райниш К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра.— М.: Машиностроение, 1976.— 389 с.
146. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. И. Вычислительные методы линейной алгебры. 2-е изд.— М.: ГИФМЛ, 1963.— 734 с.
147. Федоренко Р. П. Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1962, т. 2, № 6, с. 1122—1128.
148. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 7-е изд.— М.: Наука, 1970.— Т. 1. 607 с.
149. Фомин В. М., Ермолин Н. Е., Крошко Е. А. и др. Дифференциальный анализатор и его применение в двухмерных расчетах газодинамических течений.— Численные методы механики сплошной среды, 1979, т. 10, № 3, с. 138—141.
150. Харлоу Ф. Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики.— В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967, с. 317—342.
151. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. Справочное руководство. 2-е изд.— М.: Наука, 1970.— 185 с.
152. Цыбульский Г. П. Плоская задача о двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей без учета капиллярных сил.— Изв. АН СССР. Сер. мех. жидкости и газа, 1975, № 1, с. 170—173.
153. Численные методы условной оптимизации/Под ред. Ф. Гилл, У. Мюррей.— М.: Мир, 1977.— 290 с.
154. Шокин Ю. И. Метод дифференциального приближения.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1979.— 224 с.
155. Шокин Ю. И., Урусов А. И. Об инвариантных разностных схемах расщепления.— В кн.: Труды IV Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973, с. 192—209.
156. Экер А., Экей Х. У. Расчет трансзвукового обтекания решетки профилей с помощью метода конечных элементов.— Ракетн. техника и космонавтика, 1981, т. 19, № 10, с. 82—92.
157. Яковleva Г. Д. Таблицы функций Эйри и их производных.— М.: Наука, 1969.— 377 с.
158. Ямamoto И., Каракима К. Расчет трехмерных невязких сверхзвуковых течений методом выделения плавающего скачка.— Ракетн. техника и космонавтика, 1982, т. 20, № 2, с. 9—18.
159. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.— 195 с.
160. Яненко Н. Н., Анучина Н. Н., Петренко В. Е., Шокин Ю. И. О методах расчета задач газовой динамики с большими деформациями.— Численные методы механики сплошной среды, 1970, т. 1, № 1, с. 40—62.
161. Яненко Н. Н., Ворожцов Е. В. К теории дифференциальных анализаторов контактных разрывов.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 1, с. 48—52.
162. Яненко Н. Н., Ворожцов Е. В., Фомин В. М. Дифференциальные анализаторы ударных волн.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 1, с. 50—53.
163. Яненко Н. Н., Дацаев Н. Т., Лисейкин В. Д. О вариационном методе построения сеток.— Численные методы механики сплошной среды, 1977, т. 8, № 4, с. 157—163.
164. Яненко Н. Н., Ковеня В. М., Лисейкин В. Д. и др. О некоторых методах численного моделирования течений сложной структуры.— В кн.: VI международная конференция по численным методам в гидродинамике (Тбилиси, 1978. Сб. докл.). Т. II. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1978, с. 211—224.

165. Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. Н., Фомин В. М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц.— Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1980.— 159 с.
166. Яненко Н. Н., Федоров А. В., Фомин В. М. Дифференциальный анализатор для разрывов решений неоднородных гиперболических уравнений.— Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 3, с. 554—559.
167. Яненко Н. Н., Фомин В. М., Ворожцов Е. В. Дифференциальные анализаторы ударных волн в схемах сквозного счета задач газодинамики.— Новосибирск, 1978.— 19 с.— (Препринт/АН СССР, ИТПМ; 7).
168. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. Об аппроксимационной вязкости разностных схем.— Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 2, с. 280—281.
169. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. Об аппроксимационной вязкости разностных схем для гиперболических систем уравнений.— В кн.: Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1969, с. 269—282.
170. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. Групповая классификация неявных разностных схем для системы уравнений газовой динамики.— Численные методы механики сплошной среды, 1971, т. 2, № 2, с. 85—92.
171. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И., Компаниец Л. А., Федотова З. И. Классификация разностных схем двумерной газовой динамики методом дифференциального приближения. Новосибирск, 1982.— 53 с.— (Препринт/АН СССР, СО, ИТПМ; 9).
172. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И., Тушева Л. А., Федотова З. И. Классификация разностных схем газовой динамики методом дифференциального приближения.— Численные методы механики сплошной среды, 1980, т. 11, № 2, с. 123—159.
173. Ablow C. M. Equidistant mesh for gas dynamic calculations.— Applied Mathematics and Computation, 1982, N 10—11, p. 859—863.
174. Adler G. An iterative method for reducing numerical diffusion in problems of flow through a porous medium.— Pubbl. Istituto applic. calcolo Mauro Picone, 1979, ser. 3, N 194, p. 1—28.
175. Angrand F., Dervieux A., Boulard V. e. a. Transonic Euler simulations by means of finite element explicit schemes.— AIAA Paper, 1983, N 1924, p. 1—7.
176. Awn A. G., Spalding D. B. Flow calculation in injection processes.— In: Flow, Mixing and Heat Transfer in Furnaces. First Conf. Mech. Power Eng., Cairo, Febr., 1977/Edited by K. H. Khalil. Oxford: Pergamon Press, 1978, p. 195—214.
177. Backman M. E., Goldsmith W. The mechanics of penetration of projectiles into targets.— Int. J. Engineer. Sci., 1978, v. 16, N 1, p. 1—99.
178. Batley P. B., Shampine L. F., Waltman P. E. Nonlinear Two Point Boundary Value Problems.— N. Y. and L.: Academic Press, 1968.— 171 p.
179. Bell J. B., Shubin G. R. An adaptive grid finite difference method for conservation laws.— J. Comput. Phys., 1983, v. 52, N 3, p. 569—591.
180. Bell J. B., Shubin G. R., Solomon J. M. Fully implicit shock tracking.— J. Comput. Phys., 1982, v. 48, N 2, p. 228—245.
181. Boldrighini C., Triolo L. Absence of turbulence in a unidimensional model of fluid motion (Burgers model).— Meccanica, 1977, v. 12, N 1, p. 15—18.
182. Boris J. P., Book D. L. Flux-corrected transport. I. Shasta, a fluid transport algorithm that works.— J. Comput. Phys., 1973, v. 11, N 1, p. 38—69.
183. Boris J. P., Book D. L. Flux-corrected transport. III. Minimal-error FCT algorithms.— J. Comput. Phys., 1976, v. 20, N 4, p. 397—431.
184. Brackbill J. U., Saltzman J. S. Adaptive zoning for singular problems in two dimensions.— J. Comput. Phys., 1982, v. 46, N 3, p. 342—368.
185. Cameron I. G. An analysis of the errors caused by using artificial viscosity terms to represent steady-state shock waves.— J. Comput. Phys., 1966, v. 1, N 1, p. 1—20.
186. Chatot J. J., Guiu-Roux J., Laminie J. Resolution numérique d'une équation de conservation par une approche variationnelle.— In: Proceedings of the 6th International Conference Numerical Methods in Fluid Dynamics. V. 1. Moscow: C. C. USSR Acad. Sci., 1978, p. 32—38.
187. Chatot J. J., Guiu-Roux J., Lamine J. Numerical solution of a first-order

- conservation equation by a least square method.— *Int. J. for Numer. Methods in Fluids*, 1982, v. 2, N 2, p. 209—219.
188. Chin R. C. Y. Dispersion and Gibbs phenomenon associated with difference approximations to initial boundary-value problems for hyperbolic equations.— *J. Comput. Phys.*, 1975, v. 18, N 3, p. 233—247.
 189. Chong T. H. A variable mesh finite difference method for solving a class of parabolic differential equations in one space variable.— *SIAM J. Numer. Anal.*, 1978, v. 15, N 4, p. 835—857.
 190. Chorin A. J. A random choice method in gas dynamics.— *Lecture Notes Phys.*, 1976, v. 59, p. 129—134.
 191. Chorin A. J. Random choice methods with applications to reacting gas flow.— *J. Comput. Phys.*, 1977, v. 25, N 3, p. 253—272.
 192. Chorin A. J. Flame advection and propagation algorithms.— *J. Comput. Phys.*, 1980, v. 35, N 1, p. 1—11.
 193. Chorin A. J., Hughes T. J. R., McCracken M. F., Marsden J. E. Product formulas and numerical algorithms.— *Comm. Pure Appl. Math.*, 1978, v. 31, N 2, p. 205—256.
 194. Collins R., Chen H.—T. Propagation of a shock wave of arbitrary strength in two half-planes containing a free surface.— В кн.: Труды Секции по численным методам в газовой динамике Второго международного конгресса по газодинамике взрыва и реагирующих систем (Новосибирск, 19—23 августа 1969 г.). Т. I. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1971, с. 178—226.
 195. Concus P., Proskurovski W. Numerical solution of a nonlinear hyperbolic equation by the random choice method.— *J. Comput. Phys.*, 1979, v. 30, N 2, p. 153—166.
 196. Cook T. L., Demuth R. B., Harlow F. H. PIC calculations of multiphase flow.— *J. Comput. Phys.*, 1981, v. 41, N 1, p. 51—67.
 197. Daly B. J. The stability properties of a coupled pair of non-linear partial difference equations.— *Math. Comp.*, 1963, v. 84, N 17, p. 346—360.
 198. Deckker B. E. L., Jeffries C., Iwamoto J. Axially symmetrical compressible flow in variable area ducts.— *Int. J. for Numer. Methods in Engineer.*, 1981, v. 17, N 1, p. 140—144.
 199. DiPerna R. J. Finite difference schemes for conservation laws.— *Comm. Pure Appl. Math.*, 1982, v. 35, N 3, p. 379—449.
 200. Eason E. D., Mote C. D. Solution of non—linear boundary value problems by discrete least squares.— *Int. J. for Numer. Methods in Engineer.*, 1977, v. 11, N 4, p. 641—652.
 201. Evans M. W., Harlow F. H. The particle—in—cell method for hydrodynamic calculations.— Los Alamos Scientific Lab. Rep., 1957, N LA—2139.
 202. Fisher K. Convective difference schemes and Hermite interpolation.— *Int. J. for Numer. Methods in Engineer.*, 1978, v. 12, N 6, p. 931—940.
 203. Fomin V. M., Shapeev V. P., Yanenko N. N. Modelling of continuum mechanics problems with large deformations.— *Comput. Methods in Appl. Mech. and Engineer.*, 1982, v. 32, N 1-3, p. 157—197.
 204. Fomin V. M., Vorozhtsov E. V., Yanenko N. N. Differential analysers of shock waves: theory.— *Computers and Fluids*, 1976, v. 4, N 3/4, p. 171—183.
 205. Fomin V. M., Vorozhtsov E. V., Yanenko N. N. On the properties of curvilinear shock waves “smearing” in calculations by the particle-in-cell method.— *Computers and Fluids*, 1979, v. 7, N 2, p. 109—121.
 206. Förster K. Numerische Untersuchung des Lax-Verfahrens.— *Ingenieur-Archiv*, 1968, Bd 37, N 1, S. 45—55.
 207. Foy L. R. Steady state solutions of hyperbolic systems of conservation laws with viscosity terms.— *Comm. Pure Appl. Math.*, 1964, v. 17, N 2, p. 177—188.
 208. Gelinas R. J., Doss S. K., Miller K. The moving finite element method: applications to general partial differential equations with multiple large gradients.— *J. Comput. Phys.*, 1981, v. 40, N 1, p. 202—249.
 209. Germain P. Contribution à la théorie des ondes de choc en magnétodynamique des fluides.— Paris: ONERA publication N 97, 1959.— 33 p.
 210. Gentry R. A., Martin R. E., Daly B. J. An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems.— *J. Comput. Phys.*, 1966, v. 1, N 1, p. 87—118.

211. Gill Ph. E., Murray W., Wright M. H. Practical optimization.— N. Y.: Academic Press, 1981.— 420 p.
212. Glass I., Patterson G. N. A theoretical and experimental study of shock tube flows.— J. Aero. Sci., 1953, v. 22, N 2, p. 73—100.
213. Glimm J., Marchesin D., McBryan O. Subgrid resolution of fluid discontinuities. II.— J. Comput. Phys., 1980, v. 37, N 3, p. 336—354.
214. Glimm J., Marchesin D., McBryan O. A numerical method for two phase flow with an unstable interface.— J. Comput. Phys., 1981, v. 39, N 1, p. 179—200.
215. Harlow F. H. The particle-in-cell method for two dimensional hydrodynamic problems.— In: Report N LAMS-2082, Los Alamos, N. Mex.: Los Alamos Scientific Lab., 1956.
216. Harlow F. H., Amsden A. A. Numerical calculation of almost incompressible flow.— J. Comput. Phys., 1968, v. 3, N 1, p. 80—93.
217. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws.— J. Comput. Phys., 1983, v. 49, N 3, p. 357—393.
218. Harten A. The method of artificial compression: 1. Shocks and contact discontinuities.— In: AEC Research and Development Report COO-3077—50, N. Y.: New York University, 1974.
219. Harten A. The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities. I. Single conservation laws.— Comm. Pure Appl. Math., 1977, v. 30, N 5, p. 611—638.
220. Harten A. The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities: III. Self-adjusting hybrid schemes.— Mathematics of Computation, 1978, v. 32, N 142, p. 363—389.
221. Harten A., Hyman J. M., Lax P. D. On finite — difference approximations and entropy conditions for shocks.— Comm. Pure Appl. Math., 1976, v. 29, N 3, p. 297—322.
222. Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries.— J. Comput. Phys., 1981, v. 39, N 1, p. 201—225.
223. Holst T. L., Brown D. Transonic airfoil calculations using solution-adaptive grids.— In: AIAA 5th Computational Fluid Dynamics Conf. Proc. N. Y.: AIAA, 1981, p. 136—148.
224. Holst T. L., Brown D. Transonic airfoil calculations using solution-adaptive grids.— AIAA J., 1983, v. 21, N 2, p. 304—306.
225. Huang Dun, Li Yin-fan, Huang Lu-ping, Liu Yiu-zhi. Two analytical solutions for the reflection of unsteady shock wave and relevant numerical tests.— Lecture Notes Phys., 1981, v. 141, p. 218—223.
226. Jeffrey A., Taniuti T. Non-linear wave propagation with applications to physics and magnetohydrodynamics.— N. Y.: Academic Press, 1964.— 369 p.
227. Jukes J. D. The structure of a shock wave in a fully ionized gas.— J. Fluid Mech., 1957, v. 3, N 3, p. 275—285.
228. Kentzer C. P. Transonic flows past a circuar cylinder.— J. Comput. Phys., 1970, v. 6, N 2, p. 168—182.
229. Klopfer G. H., McRae D. S. The nonlinear modified equation approach to analyzing finite difference schemes.— In: AIAA 5th Computational Fluid Dynamics Conf. Proc., N. Y.: AIAA, 1981, p. 317—332.
230. Kutler P., Sakell L., Aiello G. Two — dimensional shock-on — shock interaction problem.— AIAA J., 1975, v. 13, N 3, p. 361—367.
231. Latter R. Similarity solution for a spherical shock wave.— J. Appl. Phys., 1955, v. 26, N 8, p. 955—960.
232. Laval P. Méthode de pseudo — viscosité et problème de l'amorçage d'une tuyère.— Rech Aérospat., 1969, N 131, p. 3—16.
233. Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws II.— Comm. Pure Appl. Math., 1957, v. 10, N 4, p. 537—566.
234. Lax P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation.— Comm. Pure Appl. Math., 1954, v. 7, N 1, p. 159—193.
235. Lax P. D., Wendroff B. Systems of conservation laws III.— Comm. Pure Appl. Math., 1960, v. 13, N 2, p. 217—237.
236. Lee C. F. On the solution of some diffusion equations with concentration-dependent diffusion coefficients.— J. of the Institute of Mathematics and its Applications, 1972, v. 10, N 2, p. 129—133.

237. **Leer B., van.** A choice of difference schemes for ideal compressible flow.— Leiden: University of Leiden, 1970, p. 72—73.
238. **Leer B., van.** Stabilization of difference schemes for the equations of inviscid compressible flow by artificial diffusion.— *J. Comput. Phys.*, 1969, v. 3, N 4, p. 473—485.
239. **Leonard B. P.** A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation.— *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 1979, v. 19, N 1, p. 59—98.
240. **Lerat A.** Numerical shock structure and nonlinear corrections for difference schemes in conservation form.— *Lecture Notes Phys.*, 1979, v. 90, p. 345—351.
241. **Lerat A., Peyret R.** Propriétés dispersives et dissipatives d'une classe de schémas aux différences pour les systèmes hyperboliques non linéaires.— *Rech. Aéosp.*, 1975, N 2, p. 61—79.
242. **Leschziner M. A.** Practical evaluation of three finite difference schemes for the computation of steady-state recirculating flows.— *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 1980, v. 23, N 3, p. 293—312.
243. **Lohar B. L., Jain P. C.** Variable mesh cubic spline technique for N-wave solution of Burgers' equation.— *J. Comput. Phys.*, 1981, v. 39, N 2, p. 433—442.
244. **Lötstedt P.** A front tracking method applied to Burgers' equation and two-phase porous flow.— *J. Comput. Phys.*, 1982, v. 47, N 2, p. 211—228.
245. **MacCormack R. W.** The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering.— *AIAA Paper*, 1969, N 354, p. 1—6.
246. **Marshall W.** The structure of magneto-hydrodynamic shock waves.— *Proc. Roy. Soc. London*, 1955, Ser. A, v. 233, N 1194, p. 367—376.
247. **McRae G. J., Goodin W. R., Seinfeld J. H.** Numerical solution of the atmospheric diffusion equation for chemically reacting flows.— *J. Comput. Phys.*, 1982, v. 45, N 1, p. 1—42.
248. **Miranker W. L., Pironneau O.** A global shock fitting method.— IRIA, Rapport de Recherche, 1975, N 123, p. 3—15.
249. **Miranker W. L., Pironneau O.** An example of a global shock fitting method.— *An Int. J. Comput. and Math. with Appl.*, 1976, v. 2, N 1, p. 63—71.
250. **Morduchov M., Libby P.** On a complete solution of the one-dimensional flow equations of a viscous, heat-conducting, compressible gas.— *J. Aero. Sci.*, 1949, v. 16, N 11, p. 674—684, 704.
251. **Moretti G.** On the matter of shock fitting.— *Lecture Notes Phys.*, 1975, v. 35, p. 287—292.
252. **Moretti G.** The importance of boundary conditions in the numerical treatment of hyperbolic equations.— In: *High-Speed Computing in Fluid Dynamics, Physics of Fluids Supplement II*, N. Y.: Amer. Institute of Physics, 1969, p. II—13—II—20.
253. **Morton K. W.** Shock capturing, fitting and recovery.— *Lecture Notes Phys.*, 1982, v. 170, p. 77—93.
254. **Nagayama T., Adachi T., Hayashi Y.** Computation of turbine blade-to-blade flow by the modified FLIC method.— *Trans. Jap. Soc. Aeronaut. and Space Sci.*, 1981, v. 24, N 65, p. 125—138.
255. **Neumann J. von, Richtmyer R.** A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks.— *J. Appl. Phys.*, 1950, v. 21, N 2, p. 232—257.
256. **Pappas M.** An improved direct search numerical optimization procedure.— hydrodynamic shocks.— *J. Appl. Phys.*, 1950, v. 21, N 3, p. 232—237.
257. **Peletier L. A.** Asymptotic stability of travelling waves.— In: *IUTAM Symp. on Instability of Continuous Systems*.— Berlin: Springer-Verlag, 1971, p. 418—422.
258. **Pironneau O.** Sur les problèmes d'optimisation de structure en mécanique des fluides (Thèse doct. sci. math. Univ.) — Paris, 1976.— 228 p.
259. **Rusanov V. V.** Difference schemes of third-order accuracy for "across"—computation of discontinuous solutions.— In: *Fluid Dynam. Transact. Warszawa*: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1969, v. 4, p. 285—294.
260. **Rusanov V. V.** On the computation of discontinuous multidimensional gas flows.— *Lecture Notes Phys.*, 1981, v. 141, p. 31—43.
261. **Rusanov V. V.** Processing and analysis of computation results for multidimensional problems of aerohydrodynamics.— *Lecture Notes Phys.*, 1973, v. 18, p. 154—162.

262. Rusanov V. V. Some properties of difference schemes of third — order accuracy.— Lecture Notes Phys., 1976, v. 59, p. 378—383.
263. Saltzman J., Brackbill J. Applications and generalisations of variational methods for generating adaptive meshes.— Appl. Math. and Comput., 1982, N 10—11, p. 865—884.
264. Sedgwick R. T., Hageman L. J., Herrmann R. G., Waddell J. L. Numerical investigations in penetration mechanics.— Int. J. Engng. Sci., 1978, v. 16, N 11, p. 859—869.
265. Shubin G. R. Sharp discontinuity tracking applied to explosion problems.— Computers and Fluids, 1981, v. 9, N 3, p. 299—312.
266. Sod G. A. A survey of several finite difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws.— J. Comput. Phys., 1978, v. 27, N 1, p. 1—31.
267. Srinivas K., Gururaja J., Krishna Prasad K. On the first order local stability scheme for the numerical solution of the time-dependent compressible flows.— Computers and Fluids, 1977, v. 5, N 2, p. 87—97.
268. Srinivas K., Gururaja J. On the computation of two-dimensional compressible flow fields by the modified local stability scheme.— Computers and Fluids, 1977, v. 5, N 3, p. 139—150.
269. Srinivas K., Gururaja J. The starting error in the numerical computation of time-dependent compressible flows.— Indian J. of Technology, 1981, v. 19, N 10, p. 405—408.
270. Stark W., Wojcieszynski R. Zur Verallgemeinerung zweistufiger Differenzenverfahren für nichtlineare hyperbolische Differentialgleichungssysteme.— Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1980, Bd 60, H. 9, S. 383—391.
271. Sturtevant B. Studies of shock focusing and nonlinear resonance in shock tubes.— In: Recent Developments in Shock Tube Research. Stanford, California, 1973, p. 23—34.
272. Taki S., Fujiwara T. Numerical analysis of two — dimensional nonsteady detonations.— AIAA J., 1978, v. 16, N 1, p. 73—77.
273. Thompson J. F., Warsi Z. U. A., Mastin C. W. Boundary — fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations — a review.— J. Comput. Phys., 1982, v. 47, N 1, p. 1—108.
274. Tijdeman H., Seebass R. Transonic flow past oscillating airfoils.— Annual Review of Fluid Mechanics, 1980, v. 12, p. 181—202.
275. Vorozhtsov E. V. On the influence of shape and dimensions of particles on the properties of the modified particle-in-cell method.— Computers and Fluids, 1981, v. 9, N 3, p. 313—326.
276. Vorozhtsov E. V., Yanenko N. N. On some algorithms for shock wave recognition by shock-capturing computational results.— Computers and Fluids, 1980, v. 8, N 3, p. 313—326.
277. Vorozhtsov E. V., Yanenko N. N. On some optimization procedures for shock localization.— Int. J. for Numer. Methods in Fluids, 1984, v. 4, N 5, p. 477—496.
278. Vorozhtsov E. V., Yanenko N. N. On the construction of K-consistent difference schemes of gas dynamics.— Computers and Fluids, 1983, v. 11, N 3, p. 231—249.
279. Vorozhtsov E. V., Yanenko N. N. On the K-consistence property of difference schemes of gas dynamics. I. An analysis of first-order schemes.— Computers and Fluids, 1982, v. 10, N 3, p. 181—204.
280. Vorozhtsov E. V., Yanenko N. N. On the K-consistence property of difference schemes of gas dynamics. II. An analysis of second-order schemes.— Computers and Fluids, 1982, v. 10, N 3, p. 205—222.
281. Vorozhtsov E. V., Yanenko N. N. On the theory of differential analysers of contact discontinuities in one-dimensional flows. I.— Computers and Fluids, 1981, v. 9, N 1, p. 1—15.
282. Vorozhtsov E. V., Yanenko N. N. On the theory of differential analysers of contact discontinuities in one-dimensional flows. II.— Computers and Fluids, 1981, v. 9, N 1, p. 17—32.
283. Weeks G. E., Cost T. L. An algorithm for automatically tracking ablating

- boundaries.— Int. J. for Numer. Methods in Engineer., 1979, v. 14, N 3, p. 441—449.
284. White J. A new form of artificial viscosity.— J. Comput. Phys., 1973, v. 11, N 4, p. 573—590.
285. Wilkins M. L. Calculation of a slender body moving through air at supersonic and subsonic velocities.— AIAA J., 1971, v. 9, N 10, p. 2073—2075.
286. Wilkins M. L. Calculation of elastic-plastic flow.— В кн.: Труды секции по численным методам в газовой динамике Второго международного конгресса по газодинамике взрыва и реагирующих систем (Новосибирск, 1969 г.). М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1971, т. 1, с. 408—517.
287. Woodward P. R. Trade-offs in designing explicit hydrodynamical schemes for vector computers.— In: Parallel Computations/Edited by G. Rodrigue. N. Y.— L.: Academic Press, 1982, p. 153—171.
288. Xu Guoyong, Yu Zhilu, Liao Zhen-min e. a. Метод «жидкость в ячейке» с использованием мечевых частиц.— Лисюэ сюэбао, Acta mech. sin., 1982, N 3, с. 207—216.
289. Yanenko N. N., Fedotova Z. I., Tusheva L. A., Shokin Yu. I. Classification of difference schemes of gas dynamics by the method of differential approximation. I. One-dimentional case.— Computers and Fluids, 1983, v. 11, N 3, p. 187—206.
290. Yanenko N. N., Vorozhtsov E. V. Differential analysers of strong discontinuities in one-dimensional gas flow.— Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow/Edited by Taylor C. and Morgan K. Swansea: Pineridge Press Ltd, 1981, p. 59—96.
291. Yanenko N. N., Kovenya V. M., Lisejkin V. D. e. a. On some methods for the numerical simulation of flows with complex structures.— Comput. Methods in Appl. Mech. and Engineer., 1979, v. 17/18, Pt. III, p. 659—671.
292. Yanenko N. N., Kroshko E. A., Liseikin V. D. e. a. Methods for the construction of moving grids for problems of fluid dynamics with big deformations.— Lecture Notes Phys., 1976, v. 59, p. 454—459.
293. Zalesak S. T. Fully multidimensional flux — corrected transport algorithms for fluids.— J. Comput. Phys., 1979, v. 31, N 3, p. 335—362.
294. Zalesak S. T. High order “ZIP” differencing of convective terms.— J. Comput. Phys., 1981, v. 40, N 2, p. 497—508.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1	
НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ	6
§ 1. Исходные уравнения	6
1.1. Дивергентная и недивергентная формы (6).— 1.2. Условия на разрывах (8).— 1.3. Задача о распаде разрыва (9)	
§ 2. Однородные разностные схемы и их дифференциальные приближения	11
2.1. Два подхода к построению схем для расчета разрывных решений (11).— 2.2. Две формы дифференциальных приближений (14)	
§ 3. О применимости решений типа бегущей волны уравнений п. д. п.	16
3.1. Особые точки уравнений п. д. п. (18).— 3.2. Численное исследование структуры размазанной ударной волны (22)	
Глава 2	
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ АНАЛИЗАТОРЫ УДАРНЫХ ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА	26
§ 4. Вводный пример	30
§ 5. Существование и единственность центра размазанной волны в решении системы с искусственной вязкостью	33
5.1. Общие соображения (33).— 5.2. Анализ искусственных вязкостей (40)	
§ 6. Схемная вязкость и существование центра размазанной ударной волны	44
6.1. Связь между дивергентностью разностных схем и п. д. п. (46).— 6.2. О существовании центра размазанной ударной волны (48)	
§ 7. Анализ разностных схем газодинамики	54
7.1. Схемы первого порядка точности (54).— 7.2. Схемы второго порядка (59).— 7.3. Практическая реализация алгоритмов дифференциальных анализаторов ударных волн (с учетом § 5, 6) (60)	
§ 8. Применение дифференциальных анализаторов в задачах о зарождении ударных волн	62
8.1. Анализ проблемы зарождения ударных волн при использовании равномерной сетки (63).— 8.2. Неравномерная подвижная сетка, адаптирующаяся к потоку (63)	
Глава 3	
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ АНАЛИЗАТОРЫ УДАРНЫХ ВОЛН В ДВУМЕРНЫХ РАСЧЕТАХ	69
§ 9. Метод исследования свойств «размазывания» криволинейных ударных фронтов	71
9.1. Неравенства в зоне размазывания двумерной ударной волны (71).— 9.2. Анализ на основе п. д. п. (73)	
§ 10. Локализация центра размазанной ударной волны в случае прямого фронта	81
10.1. Анализ на основе решений типа бегущей волны уравнений п. д. п. (81).— 10.2. Применение нормы схемной вязкости в алгоритмах анализаторов ударных волн (84)	
§ 11. Локализация ударных волн с помощью подвижных сеток	86
11.1. Уравнения течения невязкого газа в подвижных координатах (87).— 11.2. Уравнения движения сетки (88)	
§ 12. Примеры численных расчетов	92
	223

Г л а в а 4	
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ АНАЛИЗАТОРЫ	
КОНТАКТНЫХ РАЗРЫВОВ	
В ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА	98
§ 13. Методы локализации контактных разрывов при наличии К-согласованности	100
13.1. Метод исследования Основные определения (100).— 13.2. Анализ схем, обладающих свойством К-согласованности (104)	
§ 14. О методах подавления К-несогласованности	117
14.1 Предварительное обсуждение (117) — 14.2. Построение алгоритмов подавления К-несогласованности в схемах первого порядка (123).— 14.3. Подавление К-несогласованности в схемах второго порядка (125)	
§ 15. Примеры численных расчетов	133
Г л а в а 5	
ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ	
СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ	144
§ 16. Анализ метода Миранкера — Пиронно	145
§ 17. Включение в основной функционал информации об аппроксимационной вязкости	152
§ 18. Локализация ударной волны на основе минимизации функции	155
§ 19. Градиентные методы минимизации основного функционала	157
§ 20. Результаты численных расчетов	162
§ 21. Об оптимизационных алгоритмах локализации контактных разрывов	166
§ 22. Обобщение метода Миранкера — Пиронно на случай полярных координат в задаче фильтрации	168
22.1. Вариационная формулировка задачи локализации разрыва функции насыщенности (169) — 22.2. Метод численной минимизации определяющего функционала (172).— 22.3. Результаты численных расчетов (174)	
Г л а в а 6	
УТОЧНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ	
В ОКРЕСТНОСТИ СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ	177
§ 23. Конструкция основного функционала	178
§ 24. Уточнение на основе метода наименьших квадратов	186
24.1 Формулировка задач условной оптимизации (186).— 24.2. Построение дискретного функционала и его минимизация (190)	
§ 25. Об уточнении разностного решения в окрестности фронта ударной волны	193
§ 26. Примеры численных расчетов	199
Заключительные замечания	207
Литература	210