Б. З. ВУЛИХ

ВВЕДЕНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

БИБЛИОТЕКА Колхоза
"Оскорка"
вернуть не позднее месяца
со дня выдачи

Инв №33
не более 1й книги в одни
руки и 2х в две

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

517.2
В 88
УДК 517.0

Введение в функциональный анализ. В у л и х Б. З., 1967 г.

Книга содержит элементарное изложение основ функционального анализа. В первых двух главах изучается конечно-мерное эвклидово пространство, и на этом примере читатель подготовляется к введению в последующих главах общих абстрактных понятий функционального анализа. Далее рассматриваются метрические пространства и непрерывные операторы в них. Вводится основной класс пространств, изучаемых в книге,— нормированные пространства. Отдельная глава посвящена гильбертову пространству, которое вводится как частный случай нормированного пространства. Даются обе классические реализации бесконечно-мерного сепарабельного гильбертова пространства — координатная и функциональная. Попутно указываются два подхода к построению функциональной реализации гильбертова пространства: обычная конструкция пространства функций, суммируемых с квадратом, и построение пространства, составленного из функций промежутка, иными словами, функций, задаваемых своими средними значениями. В книге изучаются также линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах, проводится специальное исследование самосопряженных, в частности, вполне непрерывных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Даются краткие сведения о применении методов функционального анализа к приближенному решению функциональных уравнений. В конце книги приводятся краткие сведения о счетно-нормированных и полуупорядоченных пространствах. Общая теория иллюстрируется многими примерами из алгебры, анализа, теории функций, дифференциальных и интегральных уравнений.

От читателя требуется знание лишь основ математического анализа, и только в некоторых местах предполагается знакомство с интегралом Лебега.

Во втором издании включена новая глава о счетно-нормированных пространствах, увеличено число примеров за счет привлечения пространств суммируемых функций, дан геометрический подход к изучению линейных функционалов (введено понятие гиперплоскости). Иллюстраций 21, библиографических ссылок 23.

2-2-3
78—67

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из предисловия к первому изданию 7

Предисловие ко второму изданию 8

Глава I. **Конечно-мерное эвклидово пространство** 9

1.1. Понятие пространства в математике 9
1.2. n-мерное векторное пространство 10
1.3. Норма вектора 12
1.4. Скалярное произведение векторов 15
1.5. Линейные преобразования 17
1.6. Матрицы 20
1.7. Норма оператора линейного преобразования 24
1.8. Непрерывность линейного преобразования 25
1.9. Линейные функционалы 27
1.10. Сопряженные и самосопряженные операторы 28
1.11. Подпространства в R_n 30
1.12. Ортогональный базис 35
1.13. Собственные числа и собственные векторы 39
1.14. Комплексное n-мерное эвклидово пространство 43

Глава II. **Бесконечно-мерное эвклидово пространство** 46

2.1. Векторы с бесконечным множеством координат 46
2.2. Пространство l^2 47
2.3. Скалярное произведение векторов из l^2 48
2.4. Сходимость последовательности векторов 49
2.5. Непрерывность нормы и скалярного произведения 53
2.6. Линейные функционалы 55
2.7. Линейные операторы 57
2.8. Подпространства в l^2 59
2.9. Ортогональный базис 62
2.10. Комплексное бесконечно-мерное эвклидово пространство 66

Глава III. **Метрические пространства** 68

3.1. Некоторые понятия теории множеств 68
3.2. Определение метрического пространства 71
3.3. Сходимость в метрическом пространстве 79
3.4. Замкнутые и открытые множества 83
3.5. Полные метрические пространства 87
3.6. Счетные множества 91
3.7. Сепарабельные пространства 96
3.8. Компактные множества 99
3.9. Критерий компактности в пространстве C 107

Глава IV. Непрерывные операторы в метрических пространетвах 111

4.1. Основные определения . . . 111
4.2. Непрерывные операторы и функционалы . . . 112
4.3. Неподвижные точки. Метод последовательных приближений 114
4.4. Операторы сжатия . . . 115
4.5. Интегральные уравнения . . . 123
4.6. Теорема Пеано . . . 125

Глава V. Нормированные пространства . . . 130

5.1. Линейные системы . . . 130
5.2. Нормированные пространства . . . 133
5.3. Конечно-мерные пространства . . . 138
5.4. Подпространства . . . 143
5.5. Задача о наилучшем приближении . . . 145
5.6. Пространства со счетным базисом . . . 148

Глава VI. Гильбертово пространство . . . 151

6.1. Скалярное произведение . . . 151
6.2. Определение гильбертова пространства . . . 153
6.3. Понятие ортогональности . . . 154
6.4. Проекция элемента на подпространство . . . 156
6.5. Ортогональные разложения гильбертова пространства . . 159
6.6. Ортогоиальные системы элементов . . . 161
6.7. Ортогонализация системы линейно независимых элементов 165
6.8. Задача о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве . . . 167
6.9. Изоморфизм произвольного сепарабельного гильбертова пространства с пространством l^2 . . . 168
6.10. Комплексное гильбертово пространство . . . 170

Глава VII. Пространство L^2 . . . 171

7.1. Основные свойства пространства L^2 . . . 171
7.2. Скалярное произведение . . . 173
7.3. Ортогональные ряды . . . 175
7.4. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма . . . 181
7.5. Среднее значение функции . . . 184
7.6. Определение пространства $\overline{L^2}$ . . . 187
7.7. Плотность множества непрерывных функций в пространстве $\overline{L^2}$ 193
7.8. Умножение функций из $\overline{L^2}$ . . . 197
7.9. Скалярное произведение в $\overline{L^2}$ . . . 200

Глава VIII. Линейные операторы . . . 203

8.1. Аддитивные операторы . . . 203
8.2. Линейные операторы . . . 205
8.3. Ограниченность линейных операторов . . . 206
8.4. Распространение линейных операторов . . . 211
8.5. Последовательности линейных операторов . . . 213
8.6. Пространство линейных операторов . . . 216
8.7. Обратные операторы . . . 219
8.8. Матричные линейные операторы . . . 224
8.9. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений 226
8.10. Некоторые интегральные операторы . . . 229
8.11. Линейные дифференциальные операторы в пространстве дифференцируемых функций . . . 231

Глава IX. **Линейные функционалы** 234

9.1. Линейный функционал как частный случай линейного оператора 234
9.2. **Общие формы линейных функционалов в некоторых пространствах** 235
9.3. Линейные функционалы в пространствах суммируемых функций 238
9.4. Распространение линейных функционалов 244
9.5. Линейные функционалы в пространстве непрерывных функций 248
9.6. Гиперплоскости 257
9.7. Сопряженное пространство 260
9.8. Второе сопряженное пространство 261
9.9. Слабая сходимость функционалов 264
9.10. Сходимость процесса механических квадратур 266
9.11. Линейные функционалы в пространстве сходящихся последовательностей 271
9.12. Обобщенные методы суммирования рядов 273
9.13. Линейные функционалы в комплексном нормированном пространстве 277

Глава X. **Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве** 278

10.1. Сопряженные операторы 278
10.2. Самосопряженные операторы 281
10.3. Инвариантные подпространства 285
10.4. Собственные числа и собственные элементы самосопряженного оператора 286
10.5. Неограниченные симметричные операторы 288
10.6. Спектр самосопряженного оператора 290
10.7. Интегральные самосопряженные операторы 298
10.8. Дифференциальные симметричные операторы 300
10.9. Самосопряженные операторы в комплексном гильбертовом пространстве 303

Глава XI. **Вполне непрерывные операторы** 305

11.1. Определение и общие свойства 305
11.2. Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве 309
11.3. Спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора 310
11.4. Разложение значений оператора по собственным элементам 313
11.5. Решение уравнения $(A - \lambda I)\, x = y$ 316
11.6. **Интегральные уравнения с симметричным ядром** 318
11.7. Применение интегральных операторов к краевым задачам для уравнения Штурма — Лиувилля 322

Глава XII. **Приближенное решение функциональных уравнений** 329

12.1. Замена точного уравнения «приближенным» 329
12.2. Замена произвольного интегрального уравнения на уравнение с вырожденным ядром 331
12.3. **Решение бесконечных систем линейных алгебраических уравнений по методу редукции** 335
12.4. Метод Ритца 337
12.5. Применение метода Ритца к решению дифференциальных уравнений Штурма — Лиувилля 342

12.6. Применение метода Ритца к нахождению собственных значений 346
12.7. Понятие о методе Бубнова — Галеркина 353

Глава XIII. **Счетно-нормированные пространства** 355

13.1. Полунормы и определение счетно-нормированного пространства 355
13.2. Примеры счетно-нормированных пространств 358
13.3. Эквивалентные системы полунорм 361
13.4. Введение метрики в счетно-нормированном пространстве . 365
13.5. Ограниченные множества в счетно-нормированном пространстве 368
13.6. Линейные операторы в счетно-нормированных пространствах 371
13.7. Линейные функционалы 375
13.8. Общие формы линейных функционалов в некоторых счетно-нормированных пространствах 378

Глава XIV. **Полуупорядоченные нормированные пространства** . . 383

14.1. Линейные структуры 383
14.2. Положительная и отрицательная части элементов линейной структуры 389
14.3. Полуупорядоченные банаховы пространства 392
14.4. Линейные функционалы в полуупорядоченных банаховых пространствах 394
14.5. Другой вывод общей формы линейного функционала в пространстве непрерывных функций 397
14.6. Монотонные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве 400
14.7. Частичное упорядочение пространства L^2 402
14.8. Сильно положительные линейные операторы 404

Литература по функциональному анализу 410

Предметный указатель 412

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Функциональный анализ — сравнительно молодая математическая дисциплина, возникшая в начале XX столетия. Однако, несмотря на свой небольшой возраст, функциональный анализ, развиваясь исключительно быстрыми темпами, превратился к настоящему времени в весьма обширную область математики, имеющую многочисленные приложения в целом ряде других ее разделов.

Функциональный анализ сложился в результате обобщения различных понятий и методов, использовавшихся в существовавших ранее математических дисциплинах, в первую очередь методов классического математического анализа, алгебры и геометрии. Это обобщение строилось за счет перехода на более высокую ступень математической абстракции, что весьма характерно для методов современной математики. Рассмотрение различных задач классической математики с более общей, более абстрактной точки зрения часто позволяет лучше выявить их основные закономерности, лучше вскрыть то общее, что присуще задачам, сходным по методам их решения, но различным по своему конкретному содержанию. Построенные же общие теории затем с большим успехом применяются при решении конкретных задач, вплоть до прикладных вопросов математики. Не будет преувеличением сказать, что в настоящее время трудно представить себе решение сколько-нибудь серьезного вопроса из области дифференциальных уравнений математической физики или приближенных вычислений без применения методов функционального анализа. Этим объясняется и тот факт, что методы функционального анализа проникают и в техническую литературу, в той ее части, которая использует серьезный математический аппарат.

Основную роль во всем функциональном анализе играет понятие оператора, представляющее обобщение понятия функции, изучаемого в математическом анализе. Исследование общей теории операторов с точки зрения ее использования в математическом анализе и есть главное содержание функционального анализа.

В настоящей книге излагаются лишь начальные сведения из функционального анализа, и тут же дается целый ряд приложений общей теории к задачам из различных областей математики. В то же время ряд важных более сложных вопросов самого функционального анализа совершенно не затрагивается. Для облегчения изложения некоторые вопросы разобраны при дополнительных предположениях, упрощающих исследование.

В первых двух главах ряд основных понятий функционального анализа, вводимых позднее в общем виде, рассматривается предварительно при более простых частных условиях — в эвклидовых пространствах. Такое изложение должно облегчить читателю переход, начиная с гл. III, к общей теории.

Для удобства ссылок параграфам даны номера, состоящие из двух частей: первая часть — номер главы, а вторая — номер данного параграфа внутри этой главы (например, 7.2—§ 2 гл. VII). Теоремы и леммы имеют нумерацию внутри каждого параграфа в отдельности. Например, теорема 3.5.2 означает — вторая теорема § 5 гл. III. Нумерация формул — сквозная в пределах каждой главы; при ссылках на формулу из той же главы указывается только ее номер.

Считаю своим долгом поблагодарить редактора книги Г. П. Акилова за ценные замечания, сделанные им при чтении рукописи.

Б. Вулих

Июнь 1957 г

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Наиболее существенные изменения, внесенные во второе издание этой книги, следующие: 1) добавлена глава о счетно-нормированных пространствах; 2) в примерах, иллюстрирующих общую теорию, широко используются пространства L^p, состоящие из функций, суммируемых с p-й степенью. Таким образом, в новом издании книги предполагается, что читатель имеет представление об интеграле Лебега. Однако читатель, не знакомый с интегралом Лебега, легко сможет пропустить при чтении книги те примеры, где этот интеграл используется.

Кроме того, добавлены краткие сведения о геометрическом подходе к изучению линейных функционалов (введено понятие гиперплоскостей) и о втором сопряженном пространстве. Несколько полнее проведено изучение сильно положительных линейных операторов. Внесены также небольшие изменения, касающиеся деталей изложения.

Элементарный характер книги сохранен и во втором издании. Книга по-прежнему рассчитана на довольно широкий круг читателей, не только математиков, механиков, физиков, но также и инженеров. В новом издании сохранены те пояснения, которые давались в этой книге при использовании сведений из математического анализа, обычно не включаемых в учебники для втузов.

Б. Вулих

Июнь 1966 г.

ГЛАВА I

КОНЕЧНО-МЕРНОЕ ЭВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

1.1. Понятие пространства в математике

Понятие пространства имеет в науке различный смысл. Как философская категория пространство есть одна из форм существования материи. Пространственные формы действительного мира составляют вместе с количественными отношениями предмет изучения математики, при этом именно пространственные формы составляли главное содержание геометрии, во всяком случае, на первых ступенях ее развития. В школьном курсе геометрии, в элементарном курсе аналитической геометрии понятие пространства встречается в его простейшей форме; под пространством понимается пространство трех измерений, удовлетворяющее определенной системе аксиом (так называемые аксиомы эвклидовой геометрии). Однако уже методы аналитической геометрии позволяют подойти к понятию трехмерного пространства с несколько иной, арифметической точки зрения. Именно, поскольку каждая точка пространства определяется тремя координатами и, обратно, каждая тройка чисел определяет некоторую точку пространства, для которой заданные числа являются координатами, точки трехмерного пространства можно отождествить с тройками вещественных чисел. Таким образом, трехмерное пространство можно рассматривать как множество всех троек вещественных чисел (x, y, z). При этом такое геометрическое понятие, как расстояние между двумя точками, может быть тоже определено арифметически по известной формуле из аналитической геометрии. Плоскость может быть определена как совокупность всех троек чисел, удовлетворяющих одному и тому же уравнению 1-й степени.

При таком подходе к понятию пространства последнее естественно обобщается в математике и на случай более сложных образований. Коротко говоря, под пространством в современной математике понимается совокупность любых объектов (ими могут быть наборы чисел, функции, наборы функций), между которыми устанавливаются соотношения, аналогичные тем или иным пространственным отношениям, изученным в элементарном трехмерном

пространстве. В пределах настоящей книги мы сможем проследить за несколькими стадиями обобщения понятия пространства, первой ступенью которого является изучаемое в этой главе конечно-мерное эвклидово пространство.

1.2. n-мерное векторное пространство

Понятие вектора является одним из основных понятий математики. Однако, если на более ранней ступени развития математики рассматривались лишь векторы в трехмерном пространстве, то обобщение понятия пространства существенно связано со значительным обобщением понятия вектора. Простейшим обобщением является понятие вектора в n-мерном пространстве, к рассмотрению которого мы и переходим.

В пределах этой главы мы будем пользоваться следующим определением.

Определение. *Вектором* называется совокупность n вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (n — любое натуральное число), расположенных в определенном порядке. Будем обозначать вектор одной буквой и записывать, например, так:

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ назовем *координатами* вектора a*).

Ниже мы встретимся также с более общим понятием вектора, координаты которого будут комплексными числами.

В этой главе, как правило, векторы и их координаты обозначаются латинскими буквами $a, b, c, \ldots$ (координаты — теми же буквами с надлежащими индексами); греческие буквы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ $\ldots, \lambda, \mu, \ldots$ будут обозначать числа.

Распространим на введенные нами векторы основные определения векторной алгебры, чем, в частности, будет вполне оправдано и само название «вектор». При этом предполагается, что в дальнейшем n имеет одно и то же фиксированное значение.

Прежде всего условимся считать векторы: $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, равными (и писать $a = b$) тогда и только тогда, когда $a_i = b_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Это определение равенства еще раз подчеркивает, что вектор определяется не просто как множество n чисел, а как совокупность n чисел, расположенных в определенном порядке. Действительно, совокупность тех же n чисел, расположенных в каком-нибудь другом порядке, представляет, как

*) Имея в виду единообразие с обозначениями, употребляемыми в функциональном анализе, мы отказываемся от принятого в геометрии того или иного специального обозначения для векторов (жирный шрифт, черточка наверху и др.).

правило, другой вектор. Такая трактовка понятия вектора вполне согласуется с обычными определениями для векторов в трехмерном пространстве.

Вектор, все координаты которого равны 0, называется *нулевым* и обозначается θ*).

Сложение двух векторов определяется покоординатно, т. е. суммой векторов a и b называется вектор $a + b$, определяемый формулой

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Аналогично определяется произведение λa вектора a на вещественное число λ:

$$\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Читатель без труда убедится, что при таких определениях для векторов сохраняются следующие основные законы алгебры:

1) $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения);
3) $\lambda (a + b) = \lambda a + \lambda b$ } (дистрибутивность умножения отно-
4) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ } сительно сложения);
5) $\lambda (\mu a) = (\lambda\mu)\, a$ (ассоциативность умножения);
6) $0a = \theta$ (произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор);
7) $1a = a$ (произведение любого вектора на число единица равно тому же вектору).

Эта группа свойств сложения и умножения будет играть существенную роль в последующих главах и мы назовем ее *основной группой алгебраических законов.*

Вычитание векторов определяется посредством умножения на -1 и сложения формулой

$$a - b = a + (-1)\, b,$$

т. е.

$$a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n),$$

и тогда само собою получается, что вычитание есть действие, обратное сложению:

$$(a - b) + b = a.$$

Заметим еще, что нулевой вектор обладает тем свойством, что $a + \theta = a$ для любого a.

Множество всех векторов (при заданном значении n) называется *n-мерным векторным пространством.* Будем обозначать его $\boldsymbol{R}_n$. В отличие от встречающегося в дальнейших главах более общего

*) Впрочем, часто нулевой вектор обозначается просто нулем. При этом в каждом конкретном случае из контекста видно, в каком смысле употреблен символ 0 — обозначает ли он число нуль или нулевой вектор.

понятия вектора, векторы, образующие пространство $\boldsymbol{R}_n$, мы будем иногда называть векторами n-мерного пространства. Если $n = 3$, то получаем обычное трехмерное пространство векторов. При $n = 1$ каждый вектор определяется всего лишь одной координатой; действия над такими векторами сводятся к тем же действиям над числами, а потому одномерное векторное пространство $\boldsymbol{R}_1$ можно отождествить с совокупностью вещественных чисел (или векторов на прямой).

Все n-мерные векторные пространства (с любым n) называются *конечно-мерными*.

Обобщим теперь на случай векторов из $\boldsymbol{R}_n$ формулу разложения произвольного вектора по координатным ортам. *Координатными ортами* в $\boldsymbol{R}_n$ называются векторы, у которых одна из координат равна единице, а остальные равны нулю. Обозначим через e_i тот координатный орт, у которого единице равна i-я координата. Всего в $\boldsymbol{R}_n$ существует n координатных ортов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Из определения действий над векторами сразу вытекает, что вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ представим в виде

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n; \tag{1}$$

действительно, это равенство при подробной записи входящих в него векторов имеет вид:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + a_n(0, 0, \ldots, 1),$$

а в такой форме оно очевидно. Таким образом, координаты a_i играют роль проекций вектора a на орты e_i. Ниже эта аналогия будет уточнена.

1.3. Норма вектора

По аналогии с выражением длины вектора в трехмерном пространстве назовем длиной, или *нормой*, вектора a из $\boldsymbol{R}_n$ арифметический (положительный) квадратный корень из суммы квадратов его координат; обозначим норму вектора a через $\| a \|$. Таким образом,

$$\| a \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\,. \tag{2}$$

Отметим следующие основные свойства нормы вектора:

1) $\| a \| \geqslant 0$ для любого a и $\| a \| = 0$ только для $a = 0$;

2) $\| \lambda a \| = | \lambda | \cdot \| a \|$.

Эти свойства совершенно очевидны. Некоторые выкладки требуются для проверки

3) $\| a + b \| \leqslant \| a \| + \| b \|$.

Это неравенство в трехмерном пространстве выражает тот элементарный геометрический факт, что сумма двух сторон треугольника

не меньше третьей стороны *), и потому называется *неравенством треугольника.* Дадим его доказательство.

Предварительно докажем важное *неравенство Коши*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), \tag{3}$$

справедливое для любых вещественных чисел a_i и b_i **). Простое доказательство этого неравенства основывается на следующем замечании: если квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами $Ax^2 + 2Bx + C$ неотрицателен при всех вещественных x, то его дискриминант $B^2 - AC \leqslant 0$ ***). Составим вспомогательную функцию $\varphi(x)$ от вещественной переменной x, сводящуюся к квадратному трехчлену:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Здесь

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \quad C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Из определения $\varphi(x)$ видно, что $\varphi(x) \geqslant 0$ при всех x. Тогда, на основании предыдущего замечания,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leqslant 0,$$

а это и есть иначе записанное неравенство Коши.

Теперь из неравенства Коши выведем неравенство треугольника, которое согласно определению нормы вектора в $\boldsymbol{R}_n$ можно

---

*) Знак равенства возможен для «вырождающегося» треугольника, у которого все три вершины лежат на одной прямой.

**) О. Л. К о ш и (1789—1857) — знаменитый французский математик, с именем которого связаны многие основные результаты математического анализа и теории функций комплексной переменной.

***) Действительно, если трехчлен $Ax^2 + 2Bx + C \geqslant 0$ при всех x и $A \neq 0$, то его график (парабола) не может пересекать ось абсцисс и, в крайнем случае, может лишь касаться ее. Поэтому такой трехчлен не может иметь двух различных вещественных корней. Но тогда из формулы для корней квадратного уравнения

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

сразу видно, что $B^2 - AC \leqslant 0$. Если же $A = 0$, то трехчлен превращается в линейную функцию $2Bx + C$, а линейная функция может быть неотрицательной при всех x только, если она сводится к постоянной, т. е. если $B = 0$ (а $C \geqslant 0$). Но в этом случае $B^2 - AC = 0$.

записать в виде

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\,. \tag{4}$$

Последнее неравенство тоже называют неравенством Коши.

Для доказательства неравенства (4) извлечем квадратные корни из обеих частей неравенства (3)*), затем обе части полученного нового неравенства удвоим и прибавим к ним выражение

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

В результате получим

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

Это неравенство можно переписать и так:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+2a_ib_i+b_i^2)\leqslant\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\leqslant\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2.$$

Извлекая теперь квадратные корни из обеих частей последнего неравенства, получим неравенство треугольника.

Отметим очевидное свойство нормы вектора: если $a\neq\theta$, то вектор $\frac{1}{\|a\|}a$ имеет норму, равную единице.

Существуют и другие определения нормы вектора в $\boldsymbol{R}_n$, при которых она также обладает тремя перечисленными выше свойствами. Например, иногда бывает полезно определение нормы по формуле $\|a\|=\max(|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_n|)$**). Однако при определении нормы по формуле (2) n-мерное пространство $\boldsymbol{R}_n$ оказывается по своим свойствам ближе к трехмерному пространству, изучаемому в эвклидовой геометрии.

---

*) При этом в левой части мы берем то значение корня, которое равно $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$.

**) Символ max обозначает, что из написанных за ним чисел нужно взять наибольшее. Аналогично, символ min употребляется для обозначения наименьшего из написанных за ним чисел.

Определение. n-мерное векторное пространство $\boldsymbol{R}_n$, в котором по формуле (2) определена норма вектора, называется *n-мерным эвклидовым пространством*.

В дальнейшем пространство $\boldsymbol{R}_n$ всегда рассматривается как эвклидово. Отметим, что в одномерном эвклидовом пространстве $\boldsymbol{R}_1$, т. е. в совокупности вещественных чисел, норма совпадает с абсолютной величиной числа.

1.4. Скалярное произведение векторов

Читателю известно, насколько широкое применение имеет не только в математике, но и в механике, в физике, понятие скалярного произведения векторов. Распространим это понятие на векторы из $\boldsymbol{R}_n$, принимая в качестве определения ту формулу, которая в трехмерном пространстве выводится на основе геометрического определения скалярного произведения.

Определение. *Скалярным произведением* (a, b) двух векторов a и b называется выражение, определяемое формулой

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{5}$$

Легко видеть, что скалярное произведение обладает свойствами коммутативности, т. е. $(b, a) = (a, b)$, ассоциативности по отношению к умножению на число, т. е. $(\lambda a, b) = \lambda (a, b)$; верен также и распределительный закон:

$$(a, b+c) = (a, b) + (a, c).$$

Последние два свойства можно объединить в одной формуле:

$$(a, \lambda b + \mu c) = \lambda (a, b) + \mu (a, c).$$

Эта формула, очевидно, обобщается и на случай любого конечного числа слагаемых:

$$\Big(a, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a^{(i)}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a, a^{(i)})$$

(здесь $a^{(i)}$ — векторы, λ_i — числа). Из определения скалярного произведения также следует, что

$$\| a \| = \sqrt{(a, a)}\,.$$

Определение. Два вектора a и b называются *ортогональными* $a \perp b$, если $(a, b) = 0$.

Это определение очевидным образом согласовано с признаком перпендикулярности векторов в трехмерном пространстве. Из него сразу следует, что координатные орты e_i попарно ортого-

нальны. Действительно, так как у орта e_i отлична от нуля только i-я координата, а у орта e_k — только k-я, то ясно, что

$$(e_i, e_k) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k.$$

Далее, если a — произвольный вектор, то

$$(a, e_i) = a_i,$$

следовательно, формуле (1) разложения вектора по координатным ортам можно придать и такой вид:

$$a = \sum_{i=1}^{n} (a, e_i)\, e_i. \tag{6}$$

Если учесть, что $\| e_i \| = 1$, то можно, опять — по аналогии с трехмерным случаем, назвать скалярное произведение (a, e_i) проекцией вектора a на орт e_i. Таким образом, для получения разложения (1) или (6) используются проекции вектора на координатные орты.

Из ассоциативности умножения скалярного произведения на число сразу следует, что если $a \perp b$, то и $\lambda a \perp \mu b$ при любых λ и μ. Действительно, $(\lambda a, \mu b) = \lambda\mu\,(a, b) = 0$, если $a \perp b$.

Выведенное в предыдущем параграфе неравенство Коши (3) можно переписать в такой форме:

$$(a, b)^2 \leqslant \| a \|^2 \| b \|^2.$$

Извлекая из обеих частей арифметические квадратные корни, получаем новую форму *неравенства Коши*

$$| (a, b) | \leqslant \| a \| \, \| b \|. \tag{7}$$

Неравенство (7) выражает одно из основных свойств скалярного произведения — *скалярное произведение двух векторов по абсолютной величине не превосходит произведения их норм.*

Отметим один факт, представляющий своеобразное обобщение теоремы Пифагора: если вектор a представлен в виде суммы нескольких попарно ортогональных векторов, $a = \sum_{i=1}^{p} a^{(i)}$, то

$$\| a \|^2 = \sum_{i=1}^{p} \| a^{(i)} \|^2,$$

т. е. *квадрат нормы суммы ортогональных векторов равен сумме квадратов норм всех слагаемых.* Действительно, из свойств скалярного произведения следует, что

$$\| a \|^2 = (a, a) = \Big(\sum_{i=1}^{p} a^{(i)}, \sum_{j=1}^{p} a^{(j)} \Big) = \sum_{i, j=1}^{p} (a^{(i)}, a^{(j)}).$$

Но $(a^{(i)}, a^{(j)}) = 0$ при $i \neq j$, поэтому

$$\| a \|^2 = \sum_{i=1}^{p} (a^{(i)}, a^{(i)}) = \sum_{i=1}^{p} \| a^{(i)} \|^2.$$

1.5. Линейные преобразования

Чтобы подойти к основному в функциональном анализе понятию линейного преобразования, рассмотрим следующий простой пример в пространстве R_2, т. е. на плоскости. Представим себе (рис. 1) два экземпляра плоскости в виде листов бумаги, наложенных друг на друга, причем для верхнего листа взята прозрачная бумага. Представим, что на нижнем листе изображены всевозможные векторы, проведенные из начала координат, и перенесем их изображения на верхний лист в виде точной копии. Затем повернем верхний лист вокруг начала координат на некоторый угол α, положительный или отрицательный, после чего для каждого вектора a с нижнего листа его изображение на верхнем листе будет находиться уже не против a, а против некоторого другого вектора a', отличающегося от a направлением. Этот вектор a' и назовем изображением вектора a после вращения. Таким образом, у нас установлено правило, по которому каждому вектору a из R_2 сопоставлен определенный вектор a', также из R_2. В этом случае говорят, что определен *оператор*, осуществляющий преобразование R_2 в R_2.

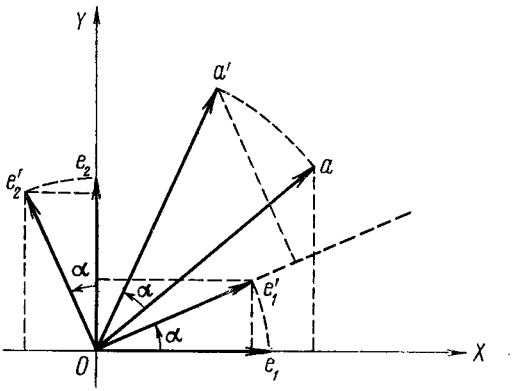

Рис. 1.

Найдем зависимость между координатами векторов $a = (a_1, a_2)$ и $a' = (a_1', a_2')$. Для этого рассмотрим сначала орт e_1, направленный по оси OX. В результате преобразования орт e_1 переходит в вектор e_1', имеющий ту же длину единица и составляющий угол α с осью OX. Проекции вектора e_1' на координатные оси будут, в таком случае, равны, соответственно, $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$:

$$e_1' = (\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Аналогично находим, что орт e_2 преобразуется в вектор $e_2' = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$. Для произвольного вектора a вектор a',

полученный из a также вращением на угол α, должен иметь те же проекции на e_1' и e_2', каковы проекции вектора a на e_1 и e_2. Следовательно,

$$a' = a_1e_1' + a_2e_2' = (a_1\cos\alpha - a_2\sin\alpha,\ a_1\sin\alpha + a_2\cos\alpha).$$

Тем самым мы нашли координаты a_1' и a_2' вектора a' и получили формулы, которыми и описывается рассматриваемое преобразование:

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= a_1\cos\alpha - a_2\sin\alpha,\\ a_2' &= a_1\sin\alpha + a_2\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Читатель, конечно, заметит сходство между этими формулами и формулами преобразования прямоугольных координат на плоскости при повороте осей. Предлагаем читателю, чтобы лучше понять причины этого сходства, самому получить формулы (8) несколько иным способом, исходя из формул преобразования координат.

Заменяя найденные коэффициенты при a_1 и a_2 в формулах (8) произвольными числами, напишем формулы более общего вида:

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= t_{11}a_1 + t_{12}a_2,\\ a_2' &= t_{21}a_1 + t_{22}a_2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Этими формулами определяется преобразование, которое при произвольных коэффициентах может иметь гораздо более сложный характер, чем рассмотренное выше вращение. В результате такого преобразования могут измениться и длины векторов и их взаимное расположение.

Возвращаясь к n-мерному пространству, составим формулы, аналогичные формулам (9):

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= t_{11}a_1 + t_{12}a_2 + \ldots + t_{1n}a_n,\\ a_2' &= t_{21}a_1 + t_{22}a_2 + \ldots + t_{2n}a_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_n' &= t_{n1}a_1 + t_{n2}a_2 + \ldots + t_{nn}a_n. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Коротко эти формулы можно записать так:

$$a_i' = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}a_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Все числа t_{ik} считаем вещественными. Формулами (10) каждому вектору $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из R_n сопоставляется вектор $a' = (a_1', a_2', \ldots, a_n')$ также из R_n, т. е. эти формулы определяют оператор, преобразующий R_n в R_n. Так как координаты вектора a' линейно выражаются через координаты вектора a, то и само преобразование назовем *линейным*.

Понятие оператора является непосредственным обобщением понятия числовой функции. Можно сказать, что рассматриваемый оператор есть функция, аргументом и значением которой являются векторы из R_n. Обобщая обозначение функционального соотношения, запишем тот факт, что вектор a' есть результат преобразования, произведенного по формулам (10) над вектором a, в виде $a' = Ta$. При этом мы считаем, что T есть обозначение оператора (или преобразования) *). Вектор a' называется также *образом* вектора a при преобразовании T.

Отметим некоторые, почти очевидные свойства линейного преобразования T:

1) $T(a + b) = Ta + Tb$ (аддитивность);
2) $T(\lambda a) = \lambda (Ta)$ (однородность);
3) $T\theta = \theta$.

Проверим, например, первое. Положим $c = T(a + b)$, $a' = Ta$, $b' = Tb$. Тогда при любом $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$c_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}a_k + \sum_{k=1}^{n} t_{ik}b_k = a'_i + b'_i$$

(здесь a'_i, b'_i — координаты векторов a' и b', соответственно). Таким образом, $c = a' + b'$.

Оказывается, что свойства аддитивности и однородности полностью характеризуют линейное преобразование, т. е. если каким угодно способом задано преобразование T, посредством которого каждому вектору a из R_n сопоставляется некоторый вектор a' также из R_n, и это преобразование аддитивно и однородно, то оно может быть записано формулами (10) при надлежаще подобранных коэффициентах.

Действительно, рассмотрим образы e'_k координатных ортов e_k ($e'_k = Te_k$). Обозначим через t_{ik} ($i = 1, 2, \ldots, n$) координаты вектора e'_k, т. е. $e'_k = (t_{1k}, t_{2k}, \ldots, t_{nk})$. Для произвольного вектора a, благодаря аддитивности и однородности преобразования T, имеем

$$a' = Ta = T\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k (Te_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k e'_k.$$

Отсюда для координат вектора a' получаем

$$a'_i = \sum_{k=1}^{n} a_k t_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

*) В отличие от записи функции [например $f(x)$], мы не заключаем здесь аргумент a в скобки. Однако это не должно наводить читателя на мысль о каком-то перемножении символов T и a. Впрочем, иногда и здесь заключают аргумент в скобки и пишут $T(a)$. Если же аргумент представляется выражением, составленным из нескольких векторов, например $a + b$, то запись его без скобок просто неудобна.

а это и есть формулы (10). Попутно мы выяснили и геометрический смысл коэффициентов t_{ik} (эти коэффициенты — координаты векторов e'_k).

1.6. Матрицы

Поскольку структура формул (10), определяющих линейное преобразование в R_n, для всех преобразований одна и та же, различие может сказываться лишь в коэффициентах, следовательно, каждое линейное преобразование полностью определяется коэффициентами t_{ik}. Выпишем эти коэффициенты в виде квадратной таблицы:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_2 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Такая таблица называется *матрицей* n-го порядка и мы будем обозначать ее той же буквой T, что и преобразование *). Будем также пользоваться краткой записью матрицы

$$T = (t_{ik})_{i,\, k=1,\, 2,\, \dots,\, n}.$$

Числа t_{ik} называются элементами матрицы T. В обозначении элементов первый индекс есть номер строки, а второй — столбца, на пересечении которых находится данный элемент. Как мы видели в предыдущем параграфе, столбцы матрицы T состоят из координат векторов $e'_k = Te_k$. Следовательно, изменение хотя бы одного элемента матрицы уже влечет изменение образа одного из координатных ортов. Таким образом, не только каждой матрице n-го порядка отвечает о д н о линейное преобразование, но и обратно, каждое линейное преобразование описывается т о л ь к о о д н о й матрицей. В таком случае говорят, что соответствие между матрицами и линейными преобразованиями в з а и м н о о д н о з н а ч н о е.

Приведем некоторые примеры.

1°. Е д и н и ч н а я м а т р и ц а

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

*) Понятие матрицы не следует смешивать с понятием определителя. Определитель есть число, составленное по определенному правилу из чисел квадратной таблицы, матрица же есть сама таблица.

Если элементы этой матрицы обозначить через δ_{ik} и записать $I = (\delta_{ik})_{i,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n}$, то ясно, что $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Из формул (10) сразу следует, что $Ia = a$ для любого a, т. е. матрица I описывает тождественное преобразование.

2°. Матрица равномерного растяжения $T = (\lambda\delta_{ik})_{i,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n}$, т. е.

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $Ta = \lambda a$.

3°. Матрица проектирования на орт e_i

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-я строка.} \\ \\ \\ \\ \uparrow \\ i\text{-й столбец} \end{matrix}$$

В этой матрице все элементы равны нулю, кроме элемента, стоящего на пересечении i-й строки и i-го столбца, который равен единице. Легко видеть, что $P_i a = a_i e_i$.

4°. Матрица круговой перестановки ортов, т. е. такого линейного преобразования, при котором орт e_1 переходит в e_2, e_2 в e_3, . . ., e_{n-1} в e_n, а e_n в e_1. На основании замечания о геометрическом смысле столбцов матрицы линейного преобразования мы сразу видим, что матрица круговой перестановки ортов имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5°. Нулевая матрица Θ, у которой все элементы равны нулю. Эта матрица преобразует все векторы пространства R_n в нулевой вектор.

Определим некоторые действия над матрицами. При этом будем рассматривать только матрицы одного и того же порядка. Прежде всего условимся считать матрицы $T=(t_{ik})_{i,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n}$ и $U=(u_{ik})_{i,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n}$ равными (и писать $T=U$) тогда и только тогда, когда $t_{ik}=u_{ik}$ при всех $i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$; иначе говоря, равными считаются матрицы, совпадающие по виду.

Сумма $T+U$ матриц T и U определяется как матрица V, элементы которой $v_{ik}=t_{ik}+u_{ik}$. *Произведение* λT матрицы T на число λ определяется как матрица с элементами λt_{ik} ($i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$). Таким образом, в отличие от правила умножения определителя на число, при умножении матрицы на число следует умножить на это число все элементы матрицы.

Сформулированные для матриц определения действий над ними можно перенести и на операторы линейных преобразований в $\boldsymbol{R}_n$. Так, суммой $V=T+U$ двух операторов T и U называется оператор, определяемый суммой матриц T и U. Полагая для любого a из $\boldsymbol{R}_n$ $a'=Va$, $b=Ta$, $c=Ua$, имеем

$$a'_i=\sum_{k=1}^{n}v_{ik}a_k=\sum_{k=1}^{n}(t_{ik}+u_{ik})\,a_k=\sum_{k=1}^{n}t_{ik}a_k+\sum_{k=1}^{n}u_{ik}a_k=b_i+c_i,$$

т. е. $a'=b+c$ или

$$Va=Ta+Ua. \tag{11}$$

Рассуждая в обратном порядке, читатель легко убедится, что из равенства (11) следует, что оператор V выражается суммой матриц $T+U$. Таким образом, равенство (11) полностью характеризует сумму операторов $T+U$.

Аналогично, посредством матриц определяется произведение $U=\lambda T$ оператора T на число λ и это произведение характеризуется равенством

$$Ua=\lambda\,(Ta), \tag{12}$$

справедливым для любого a из $\boldsymbol{R}_n$.

Возвращаясь к приведенным выше примерам матриц, мы можем теперь сказать, что матрица равномерного растяжения имеет вид λI, а единичную матрицу можно представить в виде суммы матриц проектирования на орты: $I=P_1+P_2+\ \ldots\ +P_n$.

Рассмотрим теперь вопрос о произведении линейных преобразований (или произведении операторов). Произведением UT двух линейных преобразований T и U называется преобразование, получающееся в результате последовательного применения преобразований T и U:

$$(UT)\,a=U\,(Ta).$$

Правую часть этого равенства нужно понимать как «сложное» преобразование (аналогично понятию сложной функции): сначала

над вектором a производится преобразование T, а затем над результатом этого преобразования, т. е. над вектором Ta, производится преобразование U *).

Покажем, что произведение двух линейных преобразований также является линейным преобразованием и найдем выражающую его матрицу. Положим $b = Ta$, $c = Ub = (UT)\,a$. Тогда

$$b_j = \sum_{k=1}^{n} t_{jk}a_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}b_j = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \sum_{k=1}^{n} t_{jk}a_k = \sum_{j,\,k=1}^{n} u_{ij}t_{jk}a_k = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} u_{ij}t_{jk} \Big) a_k$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

(последнее равенство получено за счет изменения порядка суммирования, которое в конечных суммах всегда возможно). Теперь введем матрицу V, элементы которой определяются формулой

$$v_{ik} = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}t_{jk} = u_{i1}t_{1k} + u_{i2}t_{2k} + \ldots + u_{in}t_{nk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Тогда мы имеем

$$c_i = \sum_{k=1}^{n} v_{ik}a_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. вектор c получается из a посредством линейного преобразования V, $c = Va$.

Согласно нашему определению, преобразование V и есть произведение UT, а матрицу V, элементы которой определяются формулой (13), мы также назовем *произведением* матриц T и U.

В отличие от произведения чисел или скалярного произведения векторов произведение матриц (и соответствующих им операторов) зависит от порядка сомножителей. Покажем это на примере матриц 2-го порядка. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для $V = UT$ имеем:

$$v_{11} = u_{11}t_{11} + u_{12}t_{21} = 0, \quad v_{12} = u_{11}t_{12} + u_{12}t_{22} = 0,$$

$$v_{21} = u_{21}t_{11} + u_{22}t_{21} = 0, \quad v_{22} = u_{21}t_{12} + u_{22}t_{22} = 1.$$

*) Вместо термина *произведение* для операторов употребляется также термин *суперпозиция*.

Меняя местами T и U, мы для $W = TU$ имеем вместо (13) формулу

$$w_{ik} = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} u_{jk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда

$$w_{11} = t_{11}u_{11} + t_{12}u_{21} = 1, \quad w_{12} = t_{11}u_{12} + t_{12}u_{22} = 0,$$
$$w_{21} = t_{21}u_{11} + t_{22}u_{21} = 0, \quad w_{22} = t_{21}u_{12} + t_{22}u_{22} = 0.$$

Таким образом,

$$V = UT = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W = TU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } UT \neq TU.$$

Благодаря зависимости произведения матриц от порядка сомножителей, их порядок необходимо указывать в определении произведения. Следовательно, формула (13) должна быть прочитана так: элемент v_{ik} произведения матриц UT равен сумме всех произведений элементов i-й строки л е в о г о сомножителя на соответствующие (т. е. взятые в том же порядке) элементы k-го столбца п р а в о г о сомножителя.

Нетрудно указать некоторые частные случаи, когда произведение матриц не зависит от порядка сомножителей. Например, читатель легко проверит, что если один из сомножителей — единичная матрица I, то для произвольной матрицы T (того же порядка) $TI = IT = T$.

Предоставляем также читателю проверку того, что сложение матриц и умножение матрицы на число подчиняются всей основной группе алгебраических законов (см. 1.2).

1.7. Норма оператора линейного преобразования

До сих пор мы изучили некоторые свойства линейных преобразований в $\boldsymbol{R}_n$, связанные только с алгебраическими действиями над векторами. Сейчас перейдем к сравнению вектора и его образа по норме.

Пусть $a' = Ta$, где T — линейное преобразование. Тогда имеем

$$\| a' \|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i'^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} t_{ik} a_k \Big)^2.$$

По неравенству Коши

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} t_{ik} a_k \Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} t_{ik}^2 \Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \Big) = \Big(\sum_{k=1}^{n} t_{ik}^2 \Big) \| a \|^2.$$

Подставляя в предыдущее равенство, находим

$$\| a' \|^2 \leqslant \Big(\sum_{i,\, k=1}^{n} t_{ik}^2 \Big) \| a \|^2.$$

Введем постоянную

$$M = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} t_{ik}^2}.$$

Тогда

$$\| a' \| \leqslant M \| a \|. \tag{14}$$

Таким образом, для оператора T существует такая постоянная M, что норма образа любого вектора удовлетворяет неравенству (14). Исключая случай $a = 0$, можно сказать, что отношение нормы образа к норме исходного вектора не превосходит некоторой постоянной M. Беря точную верхнюю границу C отношения $\frac{\| a' \|}{\| a \|}$ ($a \neq 0$) *) мы получим, что $\| a' \| \leqslant C \| a \|$ при всех a из R_n и, при этом C есть наименьшая из постоянных, которую можно поставить в неравенство (14) вместо M с сохранением этого неравенства при всех a из R_n. Эта наименьшая постоянная называется *нормой* оператора T и обозначается $\| T \|$. Таким образом, для любого a из R_n

$$\| Ta \| \leqslant \| T \| \| a \|, \tag{14а}$$

причем $\| T \| \leqslant M$ или $\| T \| \leqslant \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} t_{ik}^2}$.

1.8. Непрерывность линейного преобразования

В трехмерном эвклидовом пространстве расстояние между двумя точками может быть выражено как длина разности радиусов-векторов этих точек (рис. 2):

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}|.$$

Поэтому сходимость некоторой последовательности точек M_n к предельной точке N, т. е. стремление $|\overrightarrow{M_nN}| \to 0$, может быть охарактеризована следующим условием $|\overrightarrow{OM_n} - \overrightarrow{ON}| \to 0$. Аналогично, будем говорить, что последовательность векторов $a^{(m)}$ из R_n с х о д и т с я (или стремится) к вектору a (пишем $a^{(m)} \to a$ или $a = \lim a^{(m)}$), если

$$\| a^{(m)} - a \| \to 0. \tag{15}$$

*) Точной верхней границей ограниченного сверху множества чисел называется наименьшая из его верхних границ. Существование точной верхней границы доказывается в курсе математического анализа. Точная верхняя граница обозначается знаком sup, происходящим от латинского слова supremum — «наивысшее».

В этих обозначениях мы опускаем указание, что предел берется при $m \to \infty$, и будем поступать так же и в дальнейшем во всех случаях, когда не будет опасности какой-нибудь путаницы.

Пусть заданные векторы имеют вид:

$$a^{(m)} = (a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)})$$

и $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда условие (15) можно записать в форме

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k^{(m)} - a_k)^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Если сумма неотрицательных слагаемых стремится к нулю, то и каждое из них тоже стремится к нулю. Обратное верно (для конечной суммы) независимо от знака слагаемых. Поэтому условие (15) равносильно такому:

$$a_k^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} a_k \qquad (16)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. определенная выше сходимость последовательности векторов есть сходимость по координатам. Читателю известен аналогичный результат для сходимости последовательности точек в трехмерном пространстве.

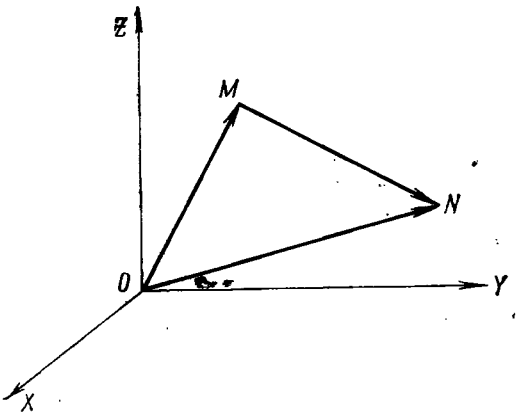

Рис. 2.

Теперь покажем, что линейное преобразование $a' = Ta$ в R_n обладает следующим свойством: если $a^{(m)} \to a$, то $Ta^{(m)} \to Ta$. По аналогии с соответствующим определением для функций это свойство называется *непрерывностью* оператора (или преобразования).

Действительно, по формулам (10) имеем для $b^{(m)} = Ta^{(m)}$.

$$b_i^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} a_k^{(m)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Но так как сходимость векторов в R_n есть покоординатная сходимость, то по (16)

$$b_i^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \sum_{k=1}^{n} t_{ik} a_k = a_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. $b^{(m)} = (b_1^{(m)}, b_2^{(m)}, \ldots, b_n^{(m)}) \to a' = (a_1', a_2', \ldots, a_n')$, где $a' = Ta$.

Непрерывность оператора T можно доказать и иначе, используя введенную в предыдущем параграфе норму оператора. Именно,

$$Ta^{(m)} - Ta = T(a^{(m)} - a),$$

следовательно,

$$\| Ta^{(m)} - Ta \| \leqslant \| T \| \| a^{(m)} - a \| \to 0.$$

В этом доказательстве мы не используем конкретного вида оператора T, а опираемся лишь на его аддитивность, однородность и тот факт, что для любого a выполнено неравенство (14) [или (14а)].

1.9. Линейные функционалы

Понятие функционала является более простым, по сравнению с оператором, обобщением понятия функции. Будем говорить, что в R_n задан *функционал* f, если каждому вектору a из R_n сопоставлено вещественное число $f(a)$. Примером функционала может служить скалярное произведение

$$f(a) = (a, c), \tag{17}$$

где c – заданный вектор из R_n. Развернутая запись формулы (17) имеет вид

$$f(a) = a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n$$

и потому этот функционал называется линейным.

Из свойств скалярного произведения сразу следует, что функционал f аддитивен и однороден в том смысле, как это было определено в 1.5 для операторов:

$$f(a+b) = f(a) + f(b); \quad f(\lambda a) = \lambda f(a).$$

Установим обратный результат. Для всякого аддитивного и однородного функционала f, заданного в R_n, существует такой вектор c, что при любом a имеет место равенство (17).

Действительно, положим $c_i = f(e_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где e_i — координатные орты, и введем вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Тогда для любого a имеем, благодаря аддитивности и однородности f,

$$f(a) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} a_ie_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_if(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_ic_i = (a, c)$$

и требуемое представление доказано.

Покажем еще, что по заданному функционалу f вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, с помощью которого функционал записывается в виде скалярного произведения, определяется единственным

образом. Действительно, если дана формула (17), то для $a = e_i$ имеем $(e_i, c) = f(e_i)$. Но $(e_i, c) = c_i$, следовательно, обязательно должно быть $c_i = f(e_i)$.

По неравенству (7)

$$|f(a)| = |(a, c)| \leqslant \|a\| \|c\|.$$

Таким образом, для $f(a)$ выполнено неравенство вида (14):

$$|f(a)| \leqslant M \|a\|, \tag{18}$$

причем в качестве одной из возможных постоянных M можно взять $\|c\|$. Оказывается, что $\|c\|$ — наименьшая из всех возможных постоянных. Чтобы убедиться в этом, положим $a = c$. Тогда получаем

$$f(c) = (c, c) = \|c\|^2 = \|c\| \|c\|,$$

и поскольку здесь имеется точное равенство, знак $\leqslant$ в формуле (18) нарушится хотя бы для $f(c)$ при попытке взять $M < \|c\|$ *).

Так же как для операторов, наименьшую постоянную в неравенстве (18) назовем *нормой* функционала f (обозначаем $\|f\|$). Мы показали, что $\|f\| = \|c\|$.

Предоставляем читателю самостоятельно проверить непрерывность линейного функционала, т. е. что из $a^{(m)} \to a$ следует, что $f(a^{(m)}) \to f(a)$.

Если в скалярном произведении (a, b) оба сомножителя считать переменными векторами, то получается обобщение функции двух переменных — функционал с двумя аргументами, линейный по отношению к каждому аргументу в отдельности. Этот функционал называется билинейным.

1.10. Сопряженные и самосопряженные операторы

Во многих вопросах, связанных с матрицами, встречается операция перестановки их строк со столбцами. Например, в простейшем случае преобразования координат на плоскости при повороте осей матрицы коэффициентов из выражений «старых» координат через «новые» и «новых» через «старые» получаются друг из друга перестановкой строк со столбцами. Введем общее определение.

Матрица $T^* = (t^*_{ik})_{i,\, k=1,\, 2,\, \ldots,\, n}$, получающаяся из матрицы T перестановкой строк со столбцами, т. е. элементы которой $t^*_{ik} = t_{ki}$,

*) Случай, когда $c = 0$, в этом рассуждении исключается. Однако в этом случае $f(a) \equiv 0$. Следовательно, и в этом случае $\|c\| (= 0)$ — наименьшая из возможных постоянных в неравенстве (18).

называется *транспонированной* (относительно T). Например,

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы T и T^*, как матрицы одного порядка, определяют линейные преобразования в одном и том же эвклидовом пространстве R_n. Оператор T^* называется *сопряженным* по отношению к оператору T.

Основное свойство сопряженного оператора заключается в равенстве

$$(Ta,\ b)=(a,\ T^*b), \tag{19}$$

имеющем место для любых a и b из R_n.

Для проверки этого равенства произведем следующий подсчет, полагая $a'=Ta$, $b'=T^*b$:

$$(Ta,\ b)=(a',\ b)=\sum_{i=1}^{n} a_i'b_i=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} t_{ik}a_k\Big)b_i=\sum_{i,\ k=1}^{n} t_{ik}a_kb_i;$$

$$(a,\ T^*b)=(a,\ b')=\sum_{k=1}^{n} a_kb_k'=\sum_{k=1}^{n} a_k\Big(\sum_{l=1}^{n} t_{kl}^*b_l\Big)=\sum_{k,\ l=1}^{n} t_{lk}a_kb_l.$$

Полученные результаты различаются только обозначением одного из индексов и, следовательно, (19) доказано.

Покажем, что оператор T^* — единственный линейный оператор в R_n, для которого при всех a и b выполнено (19). Пусть U — линейный оператор и

$$(Ta,\ b)=(a,\ Ub)$$

при всех a и b. Положим $a=e_i$, $b=e_k$. Тогда, как мы знаем из 1.5, Ta и Ub выражаются соответствующими столбцами матриц T и U, именно

$$Ta=(t_{1i},\ t_{2i},\ \ldots,\ t_{ni}),\quad Ub=(u_{1k},\ u_{2k},\ \ldots,\ u_{nk}),$$

и предыдущее равенство дает $t_{ki}=u_{ik}$ или $u_{ik}=t_{ik}^*$. Таким образом, $U=T^*$.

Благодаря доказанным свойствам сопряженный оператор T^* может быть определен как оператор, удовлетворяющий при любых a и b из R_n условию (19).

Из формулы (19) следует, что скалярное произведение $(Ta,\ b)$ при фиксированном b представляет линейный функционал от a. Впрочем, в этом легко убедиться и непосредственно, опираясь на результаты предыдущего параграфа.

Отметим очевидное соотношение $T^{**} = T$, т. е. оператор, сопряженный к сопряженному оператору, совпадает с исходным.

Оператор T, совпадающий со своим сопряженным T^* ($T^* = T$), называется *самосопряженным*. Из определения транспонированной матрицы T^* видно, что оператор T будет самосопряженным тогда и только тогда, когда $t_{ki} = t_{ik}$ при всех $i, k = 1, 2, \ldots, n$. Матрицы, удовлетворяющие этому условию, называются *симметричными*. Из равенства (19) вытекает следующее основное свойство самосопряженного оператора: для любых a и b из $\boldsymbol{R}_n$

$$(Ta, b) = (a, Tb). \tag{20}$$

Равенство (20) — частный случай равенства (19). Мы знаем, что равенством (19) по заданному T полностью определяется оператор T^*; поэтому, если некоторый оператор T удовлетворяет условию (20), то для него $T^* = T$. Таким образом, *выполнение равенства (20) при любых a и b является условием, необходимым и достаточным для самосопряженности оператора T.*

1.11. Подпространства в $\boldsymbol{R}_n$

Линейной комбинацией заданных m векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$ называется всякий вектор, представимый в виде

$$a = \lambda_1 a^{(1)} + \lambda_2 a^{(2)} + \ldots + \lambda_m a^{(m)}. \tag{21}$$

Например, из формулы (1) мы знаем, что любой вектор из $\boldsymbol{R}_n$ является линейной комбинацией n координатных ортов.

Множество $\boldsymbol{L}$ всех векторов вида (21) называется *подпространством* пространства $\boldsymbol{R}_n$, порожденным векторами $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$. Легко видеть, что сумма любых двух векторов из $\boldsymbol{L}$ и произведение любого вектора из $\boldsymbol{L}$ на число также входят в $\boldsymbol{L}$.

Среди векторов, образующих подпространство $\boldsymbol{L}$, есть нулевой вектор. Он получается из формулы (21) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. Может случиться, что $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^{(i)} = \theta$ и при некотором другом наборе коэффициентов λ_i, среди которых имеется по крайней мере один, отличный от нуля. В этом случае векторы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$ называются *линейно зависимыми*. Если же равенство $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^{(i)} = \theta$ имеет место только, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, векторы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$ называются *линейно независимыми*. Так, например, n координатных ортов линейно независимы, а векторы

$$a^{(1)} = e_1, \quad a^{(2)} = e_2, \quad a^{(3)} = 2e_1 + e_2$$

линейно зависимы; между ними имеется зависимость

$$-2a^{(1)}-a^{(2)}+a^{(3)}=\theta.$$

Линейная зависимость векторов означает, что, по крайней мере, один из них является линейной комбинацией остальных. Если $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a^{(i)}=\theta$ и, например, $\lambda_m\neq 0$, то

$$a^{(m)}=-\frac{\lambda_1}{\lambda_m}a^{(1)}-\frac{\lambda_2}{\lambda_m}a^{(2)}-\ldots-\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}a^{(m-1)}.$$

Обратно, если, например, $a^{(m)}=\lambda_1 a^{(1)}+\lambda_2 a^{(2)}+\ldots+\lambda_{m-1}a^{(m-1)}$, то имеет место зависимость

$$\lambda_1 a^{(1)}+\ldots+\lambda_{m-1}a^{(m-1)}-a^{(m)}=\theta \text{ или } \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a^{(i)}=\theta,$$

где $\lambda_m=-1$.

Очевидно, что любые векторы, выделенные из некоторого набора линейно независимых векторов, также линейно независимы. Заметим также, что среди линейно независимых векторов ни один не может равняться θ, так как, в противном случае, один из этих векторов — нулевой — можно было бы представить в виде линейной комбинации остальных (с коэффициентами, равными нулю).

Возвращаемся к подпространству L, порождаемому векторами $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$. Все эти векторы считаем отличными от нулевого *). Допустим, что они линейно зависимы, например, $a^{(m)}$ — линейная комбинация остальных:

$$a^{(m)}=\sum_{i=1}^{m-1}\mu_i a^{(i)}.$$

Подставляя это выражение в формулу (21), получаем

$$a=\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i a^{(i)}+\lambda_m a^{(m)}=\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i a^{(i)}+\lambda_m\sum_{i=1}^{m-1}\mu_i a^{(i)}=\sum_{i=1}^{m-1}(\lambda_i+\lambda_m\mu_i)a^{(i)}.$$

Следовательно, каждый вектор (21) представляется также в виде линейной комбинации векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m-1)}$. Обратно, всякая линейная комбинация векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m-1)}$ может быть записана и в форме (21), если положить $\lambda_m=0$. Таким образом, если вектор $a^{(m)}$ есть линейная комбинация векторов

*) Ясно, что нулевой вектор можно было бы выбросить из порождающей системы и после этого порождаемое подпространство осталось бы прежним.

$a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m-1)}$, то подпространство, порождаемое векторами $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$, совпадает с подпространством, порождаемым векторами $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m-1)}$. Следовательно, не изменяя подпространства, можно исключить из системы порождающих его векторов всякий вектор, являющийся линейной комбинацией остальных. Произведя такое исключение последовательно надлежащее количество раз, можно добиться того, чтобы из заданной системы векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$ остались только линейно независимые, порождающие то же подпространство $\boldsymbol{L}$. Таким образом, при определении подпространства всегда можно считать, что порождающие его векторы линейно независимы.

Одно и то же подпространство может порождаться различными системами линейно независимых векторов. Например, системы $a^{(1)} = e_1$, $a^{(2)} = e_2$ и $b^{(1)} = e_1 + e_2$, $b^{(2)} = e_1 - e_2$ порождают одно и то же подпространство. Если рассматривается трехмерное эвклидово пространство, а e_1 и e_2 — орты по осям OX и OY, то порождаемое обеими указанными системами подпространство состоит из всех векторов, лежащих в плоскости XY. Однако мы докажем следующую важную теорему:

Теорема 1.11.1. *Число линейно независимых векторов, порождающих заданное подпространство, при любом их выборе — одно и то же.*

Доказательство *). Пусть подпространство $\boldsymbol{L}$ порождается двумя системами линейно независимых векторов

$$a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)} \quad \text{и} \quad b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(p)}.$$

Допустим, что $p < m$, и рассмотрим векторы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$. Как всякий вектор из $\boldsymbol{L}$, $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ являются линейными комбинациями векторов второй системы:

$$a^{(i)} = \sum_{k=1}^{p} \gamma_{ik} b^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \tag{22}$$

Каждое из этих векторных равенств может быть заменено равносильной системой n координатных равенств

$$a_l^{(i)} = \sum_{k=1}^{p} \gamma_{ik} b_l^{(k)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, p; \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{22a}$$

Покажем, что определитель D, составленный из коэффициентов γ_{ik} формул (22), отличен от нуля. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ удовлетворяют

*) В доказательстве мы используем общие теоремы о системах p линейных алгебраических уравнений с p неизвестными. Читатель, изучавший ранее лишь системы из двух или трех уравнений, может для понимания идеи доказательства допустить, что p равно 2 или 3.

однородной системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{p} \gamma_{ik}\lambda_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{23}$$

или, в развернутом виде,

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{11}\lambda_1 + \gamma_{21}\lambda_2 + \ldots + \gamma_{p1}\lambda_p = 0,\\ &\gamma_{12}\lambda_1 + \gamma_{22}\lambda_2 + \ldots + \gamma_{p2}\lambda_p = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\gamma_{1p}\lambda_1 + \gamma_{2p}\lambda_2 + \ldots + \gamma_{pp}\lambda_p = 0. \end{aligned}\right\}$$

Из (23) следует, что

$$\sum_{k=1}^{p} b^{(k)} \Big(\sum_{i=1}^{p} \gamma_{ik}\lambda_i \Big) = \theta.$$

Но по (22)

$$\sum_{k=1}^{p} b^{(k)} \Big(\sum_{i=1}^{p} \gamma_{ik}\lambda_i \Big) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{k=1}^{p} \gamma_{ik} b^{(k)} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a^{(i)}.$$

Следовательно, если λ_i удовлетворяют системе (23), то $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a^{(i)} = \theta$, а тогда, благодаря линейной независимости векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$, непременно $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$. Итак, система (23) имеет только нулевое решение, а тогда ее определитель отличен от нуля. Но матрица коэффициентов системы (23) получается из матрицы коэффициентов формул (22) транспонированием, следовательно их определители равны и $D \neq 0$.

Так как $D \neq 0$, из системы (22) можно получить выражение векторов $b^{(k)}$ через $a^{(i)}$ (по известным формулам Крамера)

$$b^{(k)} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{p} D_{ik} a^{(i)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{24}$$

где D_{ik} — алгебраическое дополнение элемента γ_{ik} *). Но, аналогично формулам (22), векторы $a^{(p+1)}, \ldots, a^{(m)}$ также

*) Чтобы убедиться в том, что правило Крамера применимо и к векторным системам уравнений, достаточно решить по этому правилу каждую из «координатных» систем (22а); тогда мы получим

$$b_l^{(k)} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{p} D_{ik} a_l^{(i)} \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, p; \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

а эти равенства равносильны (24). Впрочем, правило Крамера можно вывести обычным путем и непосредственно для векторных систем.

БИБЛИОТЕКА Колхоза "Оскорка"
Инв № 33

представляются в виде линейных комбинаций векторов $b^{(k)}$:

$$a^{(j)} = \sum_{k=1}^{p} \gamma_{jk} b^{(k)} \qquad (j = p+1, \ldots, m).$$

Подставляя сюда (24), получим

$$a^{(j)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\gamma_{jk}}{D} \sum_{i=1}^{p} D_{ik} a^{(i)} = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{D} \sum_{k=1}^{p} \gamma_{jk} D_{ik} \right) a^{(i)},$$

откуда следует, что векторы $a^{(p+1)}, \ldots, a^{(m)}$ суть линейные комбинации векторов $a^{(1)}, \ldots, a^{(p)}$. Это противоречит линейной независимости всех этих векторов. Полученное противоречие доказывает невозможность неравенства $p < m$. Аналогично, невозможно и обратное неравенство $m < p$, следовательно, непременно должно быть $m = p$. Теорема доказана.

Доказанная теорема применима и ко всему $\boldsymbol{R}_n$. Так как $\boldsymbol{R}_n$ совпадает с подпространством, порождаемым n координатными ортами (так что подпространством в частном случае может быть и всё $\boldsymbol{R}_n$), то и любая система линейно независимых векторов, порождающих всё R_n, должна содержать n векторов. Подпространство, порождаемое одним вектором a, т. е. множество всех векторов вида λa $(-\infty < \lambda < +\infty)$, называется *прямой*, проходящей через нулевой вектор.

Определение. *Размерностью* подпространства называется число порождающих его линейно независимых векторов. Любая система линейно независимых векторов, порождающих данное подпространство, называется его *базисом*.

Так, размерность всего $\boldsymbol{R}_n$ равна n, размерность прямой равна единице. К подпространствам причисляется и множество, состоящее из одного нулевого вектора, и его размерность считается равной нулю *). Из доказательства теоремы 1.11.1 следует, что в подпространстве размерности m вообще не существует системы из более чем m линейно независимых векторов.

Пусть $\boldsymbol{L}$ — подпространство в $\boldsymbol{R}_n$ размерности m, векторы $b^{(1)}$, $b^{(2)}, \ldots, b^{(m)}$ — какой-нибудь его базис. Тогда $\boldsymbol{L}$ состоит из всех векторов, имеющих вид

$$b = \sum_{i=1}^{m} \beta_i b^{(i)}. \qquad (25)$$

*) Если в соответствии с общим определением образовать подпространство, порождаемое нулевым вектором, то оно как раз и будет состоять из одного этого вектора (так как $a = \lambda\theta = \theta$). Однако нулевой вектор не подходит под определение базиса, так как равенство $\lambda\theta = \theta$ имеет место при любом λ. Таким образом, в подпространстве размерности нуль нет базиса.

При этом *коэффициенты* β_i *в разложении* (25) *определяются единственным образом*. Действительно, если

$$b = \sum_{i=1}^{m} \beta_i b^{(i)} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i b^{(i)},$$

то $\sum_{i=1}^{m} (\beta_i - \gamma_i)\, b^{(i)} = \theta$ и, благодаря линейной независимости векторов $b^{(i)}$, $\beta_i = \gamma_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, m$.

Каждому вектору b из $\boldsymbol{L}$ сопоставим вектор $a = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ из m-мерного эвклидова пространства $\boldsymbol{R}_m$. Тогда мы получим взаимнооднозначное соответствие между векторами из $\boldsymbol{L}$ и из $\boldsymbol{R}_m$, т. е. каждому b из $\boldsymbol{L}$ соответствует только один a из R_m и, обратно, каждый вектор a из $\boldsymbol{R}_m$ оказывается сопоставленным только одному вектору b из $\boldsymbol{L}$. Можно сказать, что указанным соответствием определен оператор $a = Ab$, отображающий $\boldsymbol{L}$ на $\boldsymbol{R}_m$. Этот оператор $\boldsymbol{A}$, очевидно, аддитивен и однороден, т. е.

$$A(b + c) = Ab + Ac, \qquad A(\lambda b) = \lambda (Ab).$$

Действительно, если, например, $b = \sum_{i=1}^{m} \beta_i b^{(i)}$, $c = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i b^{(i)}$, то

$$A(b + c) = (\beta_1 + \gamma_1, \beta_2 + \gamma_2, \ldots, \beta_m + \gamma_m) =$$
$$= (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) + (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = \boldsymbol{Ab} + \boldsymbol{Ac}.$$

Таким образом, взаимнооднозначное соответствие, установленное между $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{R}_m$, обладает тем свойством, что алгебраическим операциям (сложению и умножению на число) над векторами из $\boldsymbol{L}$ соответствуют те же операции над их образами в $\boldsymbol{R}_m$. Такое взаимнооднозначное соответствие называется *алгебраическим изоморфизмом*, а подпространство $\boldsymbol{L}$ и m-мерное векторное пространство $\boldsymbol{R}_m$ называются *алгебраически изоморфными*. Однако при установленном алгебраическом изоморфизме в общем случае могут не совпадать нормы векторов из $\boldsymbol{L}$ и их образов из $\boldsymbol{R}_m$. В следующем параграфе мы увидим, каким условиям достаточно подчинить базис в $\boldsymbol{L}$ для того, чтобы такое равенство норм имело место.

1.12. Ортогональный базис

Прежде всего докажем, что если векторы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{a^{(m}}$ попарно ортогональны и отличны от θ, то они линейно независимы.

Действительно, пусть имеет место равенство $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^{(i)} = \theta$. Умножим обе части равенства скалярно на $a^{(k)}$. Благодаря

дистрибутивности скалярного произведения

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a^{(i)}, a^{(k)}) = \Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^{(i)}, a^{(k)}\Big)$$

и, таким образом, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a^{(i)}, a^{(k)}) = (\theta, a^{(k)}) = 0$. Но $a^{(i)} \perp a^{(k)}$ при $i \neq k$, т. е. $(a^{(i)}, a^{(k)}) = 0$, следовательно, из предыдущего равенства получается $\lambda_k (a^{(k)}, a^{(k)}) = 0$, или $\lambda_k \| a^{(k)} \|^2 = 0$. Так как $a^{(k)} \neq \theta$, то $\lambda_k = 0$. Это рассуждение справедливо для любого $k = 1, 2, \ldots, m$, следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, и векторы $a^{(i)}$ линейно независимы.

Определение. Базис подпространства, состоящий из попарно ортогональных векторов, называется *ортогональным*. Если нормы всех векторов, составляющих ортогональный базис, равны единице, то базис называется *ортонормированным*.

Примером ортонормированного базиса в $\boldsymbol{R}_n$ может служить совокупность всех координатных ортов.

Теорема 1.12.1. *Если в подпространстве $\boldsymbol{L}$ размерности m выбран ортонормированный базис, то при алгебраическом изоморфизме между $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{R}_m$, установленном в предыдущем параграфе посредством оператора A, для любых векторов b и c из $\boldsymbol{L}$*

$$(Ab, Ac) = (b, c);$$

в частности, $\| Ab \| = \| b \|$.

Доказательство. Пусть векторы $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(m}$ образуют ортонормированный базис в $\boldsymbol{L}$ и пусть

$$b = \sum_{i=1}^{m} \beta_i b^{(i)}, \qquad c = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i b^{(i)}.$$

Тогда $Ab = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, $Ac = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$. Следовательно, по определению скалярного произведения в $\boldsymbol{R}_m$,

$$(Ab, Ac) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \gamma_i.$$

С другой стороны,

$$(b, c) = \Big(\sum_{i=1}^{m} \beta_i b^{(i)}, \sum_{j=1}^{m} \gamma_j b^{(j)}\Big) = \sum_{i,j=1}^{m} \beta_i \gamma_j (b^{(i)}, b^{(j)}) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \gamma_i (b^{(i)}, b^{(i)}),$$

так как $b^{(i)} \perp b^{(j)}$ при $i \neq j$. Кроме того, $(b^{(i)}, b^{(i)}) = \| b^{(i)} \|^2 = 1$, а потому

$$(b, c) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \gamma_i = (Ab, Ac).$$

В частности,

$$\| b \| = \sqrt{(b, b)} = \sqrt{(Ab, Ab)} = \| Ab \|.$$

Теорема доказана.

Взаимнооднозначное соответствие $a = Ab$ между векторами из $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{R}_m$, для которого $\| Ab \| = \| b \|$ при всех b из $\boldsymbol{L}$, называется *изометричным*.

Теперь покажем, что во всяком подпространстве (с размерностью, большей нуля) существует ортонормированный базис. Именно, если $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$ — произвольный базис подпространства $\boldsymbol{L}$, то в $\boldsymbol{L}$ существует ортонормированный базис, состоящий из векторов вида

$$\begin{aligned} b^{(1)} &= \mu_{11} a^{(1)}, \\ b^{(2)} &= \mu_{21} a^{(1)} + \mu_{22} a^{(2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b^{(m)} &= \mu_{m1} a^{(1)} + \mu_{m2} a^{(2)} + \ldots + \mu_{mm} a^{(m)}. \end{aligned}$$

Сначала построим ортогональный базис в $\boldsymbol{L}$ из векторов вида

$$c^{(1)} = a^{(1)}, \quad c^{(i)} = a^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} c^{(k)} \quad \text{при} \quad i = 2, 3, \ldots, m,$$

которые определяются последовательно. Для этого нужно подобрать коэффициенты λ_{ik} так, чтобы было соблюдено требование ортогональности векторов $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(m)}$. Если коэффициенты в выражениях векторов $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(i-1)}$, т. е. $\lambda_{21}, \lambda_{31}, \lambda_{32}, \ldots, \lambda_{i-1,1}, \lambda_{i-1,2}, \ldots, \lambda_{i-1,i-2}$ уже выбраны так, что $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(i-1)}$ попарно ортогональны, то при $k < i$ имеем

$$(c^{(i)}, c^{(k)}) = \Big(a^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} c^{(j)}, c^{(k)}\Big) = (a^{(i)}, c^{(k)}) - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} (c^{(j)}, c^{(k)}) =$$

$$= (a^{(i)}, c^{(k)}) - \lambda_{ik} (c^{(k)}, c^{(k)}) = (a^{(i)}, c^{(k)}) - \lambda_{ik} \| c^{(k)} \|^2.$$

Если последовательно подставить выражение $c^{(1)}$ в $c^{(2)}$, $c^{(1)}$ и $c^{(2)}$ в $c^{(3)}$ и т. д., мы увидим, что каждый вектор $c^{(i)}$ есть линейная комбинация линейно независимых векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(i)}$, причем коэффициент при $a^{(i)}$ равен единице. Поэтому, каждый $c^{(i)} \neq 0$ *). Тогда из условия $(c^{(i)}, c^{(k)}) = 0$ находим

$$\lambda_{ik} = \frac{(a^{(i)}, c^{(k)})}{\| c^{(k)} \|^2}.$$

Итак, если все коэффициенты λ_{ik} определить по этой формуле, векторы $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(m)}$ будут попарно ортогональны.

*) Все векторы $a^{(i)} \neq 0$, как линейно независимые. Поэтому, в частности, $c^{(1)} \neq 0$.

Положим

$$b^{(i)} = \frac{1}{\| c^{(i)} \|} c^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ясно, что эти векторы также попарно ортогональны, $\| b^{(i)} \| = 1$ и каждый $b^{(i)}$ есть линейная комбинация векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(i)}$. Из определения векторов $c^{(i)}$ видно, что

$$a^{(i)} = c^{(i)} + \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} c^{(k)} = \| c^{(i)} \| b^{(i)} + \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} \| c^{(k)} \| b^{(k)}.$$

Так как каждый вектор из L есть линейная комбинация векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$, то, с помощью предыдущих формул, его можно представить и как линейную комбинацию векторов $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(m)}$ *), следовательно, эти векторы образуют в L ортонормированный базис требуемого вида. Мы не останавливаемся на составлении явных выражений для коэффициентов μ_{ik}.

Описанный процесс построения векторов $c^{(1)}, \ldots, c^{(m)}$ или $b^{(1)}, \ldots, b^{(m)}$ называется *ортогонализацией* системы векторов $a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$.

Поясним изложенное на простом примере в трехмерном пространстве. Пусть

$$a^{(1)} = (1, 1, 0), \quad a^{(2)} = (0, 1, 1), \quad a^{(3)} = (1, 1, 1)$$

(читатель может непосредственно убедиться в линейной независимости этих векторов). Согласно общему методу полагаем

$$c^{(1)} = a^{(1)} = (1, 1, 0);$$

при этом $\| c^{(1)} \| = \sqrt{2}$. Далее

$$\lambda_{21} = \frac{(a^{(2)}, c^{(1)})}{\| c^{(1)} \|^2} = \frac{1}{2}$$

и

$$c^{(2)} = a^{(2)} - \lambda_{21} c^{(1)} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right), \qquad \| c^{(2)} \| = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

---

*) Мы пользуемся очевидным свойством линейных комбинаций: если вектор a есть линейная комбинация векторов $a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$, $a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^{(i)}$, а каждый $a^{(i)}$ есть линейная комбинация векторов $b^{(1)}, \ldots, b^{(p)}$, $a^{(i)} = \sum_{k=1}^{p} \mu_{ik} b^{(k)}$, то

$$a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{k=1}^{p} \mu_{ik} b^{(k)} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mu_{ik} \right) b^{(k)},$$

следовательно, a — тоже линейная комбинация векторов $b^{(k)}$.

Наконец,

$$\lambda_{31}=\frac{(a^{(3)},\ c^{(1)})}{\|c^{(1)}\|^2}=1, \qquad \lambda_{32}=\frac{(a^{(3)},\ c^{(2)})}{\|c^{(2)}\|^2}=\frac{2}{3}$$

и

$$c^{(3)}=a^{(3)}-\lambda_{31}c^{(1)}-\lambda_{32}c^{(2)}=\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right), \qquad \|c^{(3)}\|=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Теперь осталось нормировать построенные векторы, т. е. заменить векторы $c^{(i)}$ векторами $b^{(i)}$. Получим

$$b^{(1)}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right), \qquad b^{(2)}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right),$$

$$b^{(3)}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Эти векторы образуют ортонормированный базис в $\boldsymbol{R}_3$, полученный методом ортогонализации первоначально заданных векторов.

Поскольку в любом подпространстве (с размерностью большей нуля) существует ортонормированный базис, то алгебраический изоморфизм между подпространством $\boldsymbol{L}$ размерности m и пространством $\boldsymbol{R}_m$ всегда можно построить так, чтобы он был изометричным. В связи с этим подпространство $\boldsymbol{L}$ и пространство $\boldsymbol{R}_m$ тоже называются *изометричными*.

1.13. Собственные числа и собственные векторы

Для оператора $T=\lambda I$ (где I — тождественный оператор, определяемый единичной матрицей) любой вектор a из $\boldsymbol{R}_n$ удовлетворяет соотношению

$$Ta=\lambda a. \tag{26}$$

В то же время существуют операторы, для которых равенство (26) с любым λ не имеет места ни при одном $a\neq 0$. Таков, например, оператор вращения плоскости, рассмотренный в начале 1.5. Для произвольного линейного преобразования T в $\boldsymbol{R}_n$ вводим:

О п р е д е л е н и е. Всякое число λ, для которого существует вектор $a\neq 0$, удовлетворяющий условию (26), называется *собственным числом* оператора T, а упомянутый вектор a называется *собственным вектором* оператора T. Про этот вектор говорят, что он соответствует собственному числу λ.

Покажем, как находить собственные числа. Используя формулы (10), перепишем условие (26) в виде

$$\begin{aligned}
t_{11}a_1+t_{12}a_2+\ldots+t_{1n}a_n&=\lambda a_1,\\
t_{21}a_1+t_{22}a_2+\ldots+t_{2n}a_n&=\lambda a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t_{n1}a_1+t_{n2}a_2+\ldots+t_{nn}a_n&=\lambda a_n
\end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned}(t_{11}-\lambda)\,a_1+t_{12}a_2+\ldots+t_{1n}a_n&=0,\\ t_{21}a_1+(t_{22}-\lambda)\,a_2+\ldots+t_{2n}a_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ t_{n1}a_1+t_{n2}a_2+\ldots+(t_{nn}-\lambda)\,a_n&=0.\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

Системой уравнений (27) определяются координаты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ собственных векторов a. Но так как у собственного вектора по крайней мере одна из координат отлична от нуля, то число λ будет собственным тогда и только тогда, когда система (27) имеет ненулевое решение. А для этого необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (27) был равен нулю. Следовательно, собственные числа оператора T находятся как корни уравнения

$$\begin{vmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & \ldots & t_{1n}\\ t_{21} & t_{22}-\lambda & \ldots & t_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.\tag{28}$$

Это уравнение называется *характеристическим* (или вековым) уравнением оператора или матрицы T *).

Уравнение (28)— алгебраическое уравнение n-й степени. Если оно имеет вещественные корни, то оператор имеет собственные числа; при этом различных собственных чисел оператор T может иметь не более n.

Матрица сопряженного оператора T^* получается из матрицы T транспонированием, а при транспонировании характеристическое уравнение (28) не изменяется. Поэтому собственные числа операторов T и T^* — одни и те же. Однако собственные векторы операторов T и T^*, соответствующие одному и тому же собственному числу, могут быть различными.

Если a — собственный вектор оператора T, соответствующий числу λ, то, вследствие однородности T, всякий вектор βa при $\beta \neq 0$ тоже — собственный вектор, соответствующий тому же λ:

$$T(\beta a)=\beta(Ta)=\beta(\lambda a)=\lambda(\beta a).$$

Полагая $\beta=\frac{1}{\|a\|}$, мы получим собственный вектор $\frac{1}{a}\|a\|$ с нормой, равной единице.

Если оператор T самосопряжен, то его собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

*) Название этого уравнения —«вековое» вошло в математику из астрономии.

Действительно, пусть $Ta = \lambda a$, $Tb = \mu b$ и $\lambda \neq \mu$. Тогда с помощью формулы (20) имеем

$$\lambda (a, b) = (\lambda a, b) = (Ta, b) = (a, Tb) = (a, \mu b) = \mu (a, b)$$

или $(\lambda - \mu)(a, b) = 0$. Но $\lambda - \mu \neq 0$, следовательно, $(a, b) = 0$ *).

Докажем, что у *самосопряженного оператора T в $\boldsymbol{R}_n$ всегда существует по крайней мере одно собственное число.*

Характеристическое уравнение (28), как всякое алгебраическое уравнение, имеет по крайней мере один комплексный корень $\lambda = \mu + i\nu$. При подстановке этого значения λ в систему (27) последняя будет иметь ненулевое комплексное решение

$$a_1 = b_1 + ic_1, \quad a_2 = b_2 + ic_2, \quad \ldots, \quad a_n = b_n + ic_n,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} t_{jk} (b_k + ic_k) = (\mu + i\nu)(b_j + ic_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Отделяя в этих равенствах вещественные и мнимые части, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} t_{jk} b_k = \mu b_j - \nu c_j; \qquad \sum_{k=1}^{n} t_{jk} c_k = \mu c_j + \nu b_j \qquad (29)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Введем векторы $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Так как хоть одно из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots, c_n$ отлично от нуля, то по крайней мере один из векторов b или c отличен от θ, а потому $\| b \|^2 + \| c \|^2 > 0$.

Используя обозначение оператора T, мы можем записать равенства (29) в виде

$$Tb = \mu b - \nu c; \qquad Tc = \mu c + \nu b.$$

Вследствие самосопряженности оператора T, $(Tb, c) = (b, Tc)$. Но

$$(Tb, c) = (\mu b - \nu c, c) = \mu (b, c) - \nu (c, c),$$
$$(b, Tc) = (b, \mu c + \nu b) = \mu (b, c) + \nu (b, b).$$

Приравнивая правые части, находим

$$-\nu (c, c) = \nu (b, b),$$

или $-\nu \| c \|^2 = \nu \| b \|^2$, откуда

$$\nu (\| b \|^2 + \| c \|^2) = 0.$$

*) В общем случае аналогично доказывается ортогональность собственных векторов операторов T и T^*, соответствующих различным собственным числам.

Так как $\| b \|^2 + \| c \|^2 > 0$, то непременно $\nu = 0$, а это и означает, что рассматриваемый корень λ характеристического уравнения — вещественный и, следовательно, является собственным числом. Фактически мы доказали, что *для самосопряженного оператора уравнение* (28) *имеет только вещественные корни.*

Если характеристическое уравнение для самосопряженного оператора имеет n различных (простых) корней, то оператор имеет n попарно ортогональных собственных векторов и, следовательно, в $\boldsymbol{R}_n$ можно построить ортонормированный базис из собственных векторов. Можно доказать, что этот результат верен для любого самосопряженного оператора в $\boldsymbol{R}_n$, независимо от характера корней векового уравнения.

Приведем пример. Пусть все координатные орты $e_1, e_2, \ldots, e_n$— собственные векторы оператора T, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (среди которых могут быть и равные). Тогда для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ будет $Te_k = \lambda_k e_k$, следовательно, в k-м столбце матрицы T элемент $t_{kk} = \lambda_k$, а прочие элементы равны нулю. Таким образом, матрица T имеет диагональный вид:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Оператор T в этом случае самосопряженный.

Рассмотрим теперь более общий случай. Именно, пусть в $\boldsymbol{R}_n$ имеется ортонормированный базис из собственных векторов $b^{(1)}$, $b^{(2)}, \ldots b^{(i)}$ оператора T, соответствующих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Каждый вектор b из $\boldsymbol{R}_n$ представим в виде $b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b^{(i)}$. Исходя из этого представления, как показано в 1.11 и 1.12, можно построить изометрическое отображение пространства $\boldsymbol{R}_n$ на другой экземпляр $\boldsymbol{R}_n$ (обозначим его $\boldsymbol{R}'_n$), полагая

$$Ab = a, \text{ где } a = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

При этом отображении векторам $b^{(i)}$ из $\boldsymbol{R}_n$ соответствуют координатные орты e_i из $\boldsymbol{R}'_n$. Оператор T порождает линейное преобразование T' пространства $\boldsymbol{R}'_n$, если положить для всякого a из $\boldsymbol{R}'_n$

$$T'a = A(Tb),$$

где b — вектор из $\boldsymbol{R}_n$, определяемый соотношением $Ab = a$. Иными словами, для любого b из $\boldsymbol{R}_n$

$$T'(Ab) = A(Tb).$$

Аддитивность и однородность преобразования T' вытекает из наличия этих свойств у операторов T и A.

Легко видеть, что координатные орты e_i из $\boldsymbol{R}'_n$ — собственные векторы оператора T'. Действительно,

$$T'e_i = A\,(Tb^{(i)}) = A\,(\lambda_i b^{(i)}) = \lambda_i\,(Ab^{(i)}) = \lambda_i e_i.$$

На основании разобранного выше примера, матрица T' — диагональная, а оператор T' — самосопряженный. Так как по теореме 1.12.1 оператор A сохраняет без изменения величину скалярного произведения, то и оператор T — самосопряженный. В самом деле, для любых b и c из $\boldsymbol{R}_n$ имеем

$$(Tb,\ c) = (A\,(Tb),\ Ac) = (T'\,(Ab),\ Ac) =$$
$$= (Ab,\ T'\,(Ac)) = (Ab,\ A\,(Tc)) = (b,\ Tc),$$

т. е. $(Tb,\ c) = (b,\ Tc)$, а этим свойством и характеризуются самосопряженные операторы.

Таким образом, мы показали, что если линейный оператор в $\boldsymbol{R}_n$ имеет n попарно ортогональных собственных векторов, то он — самосопряженный. Кроме того, мы видим, что, используя собственные векторы самосопряженного оператора для составления базиса, мы можем сводить изучение этого оператора к изучению более простого оператора, записываемого матрицей диагонального вида. Более подробно на вопросе о структуре матрицы T' при различных выборах базиса в $\boldsymbol{R}_n$ мы не останавливаемся.

1.14. Комплексное n-мерное эвклидово пространство

Изложенное в этой главе может быть обобщено на случай векторов с комплексными координатами. *Комплексным вектором* называется совокупность n комплексных чисел $a = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$. Алгебраические операции для комплексных векторов определяются так же, как в 1.2, но произведение λa теперь имеет смысл для любого комплексного числа λ. Сохраняется в силе основная группа алгебраических законов. Множество всех комплексных векторов (при фиксированном n) называется *n-мерным комплексным векторным пространством*. Обозначим его $\widetilde{\boldsymbol{R}}_n$.

Норма вектора в $\widetilde{\boldsymbol{R}}_n$ определяется формулой

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2},$$

частным случаем которой является формула (2), данная выше для $\boldsymbol{R}_n$. При таком определении нормы пространство $\widetilde{\boldsymbol{R}}_n$ называется *n-мерным комплексным эвклидовым пространством*.

Скалярное произведение векторов a и b определяется в $\widetilde{R}_n$ следующим обобщением формулы (5):

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}\ ^*).$$

Норма и скалярное произведение в $\widetilde{R}_n$ обладают теми же свойствами, что и в R_n, включая неравенство треугольника для нормы и неравенство Коши (7) для скалярного произведения **), кроме коммутативности скалярного произведения, которая заменяется в $\widetilde{R}_n$ тем, что

$$(a, b) = \overline{(b, a)},$$

т. е. при перестановке сомножителей скалярное произведение принимает сопряженное значение. Ассоциативность по отношению к умножению на число принимает вид:

$$(\lambda a, b) = \lambda (a, b); \quad (a, \lambda b) = \overline{\lambda}\,(a, b).$$

Определение ортогональности векторов в $\widetilde{R}_n$ вводится так же, как в R_n: $a \perp b$, если $(a, b) = 0$.

Теми же формулами (10), что и в R_n, можно определить линейное преобразование в $\widetilde{R}_n$, допуская, однако, при этом в качестве коэффициентов t_{ik} любые комплексные числа. Таким образом, линейные операторы в $\widetilde{R}_n$ описываются матрицами с комплексными элементами. Установленные в 1.5—1.8 свойства линейных операторов сохраняются и в $\widetilde{R}_n$. Для нормы оператора получается оценка

$$\|T\| \leqslant \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} |t_{ik}|^2}.$$

Сопряженный оператор T^* определяется матрицей, элементы которой t^*_{ik} связаны с элементами исходной матрицы соотношениями

$$t^*_{ik} = \overline{t_{ki}} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

---

*) Черта означает переход к сопряженному комплексному числу.

**) Для сумм комплексных чисел неравенство Коши имеет вид:

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big|^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\Big).$$

Это неравенство легко получается из неравенства Коши, установленного для вещественных чисел, а именно:

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big|^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\,|b_i|\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\Big).$$

При этом получается прежнее равенство (19), которым оператор T^* полностью характеризуется. Оператор самосопряжен тогда и только тогда, когда $t_{ik} = \overline{t_{ki}}$ при всех $i, k = 1, 2, \ldots, n$. В частности, диагональные элементы t_{ii} должны быть вещественными.

Так же, как в 1.11, вводится понятие подпространства, причем в определении линейной комбинации векторов по формуле (21) коэффициенты могут быть любыми комплексными числами.

Собственные числа и собственные векторы определяются так же, как в 1.13, посредством равенства (26), однако здесь допускается, что собственное значение может быть любым комплексным числом. Для нахождения собственных чисел по-прежнему получается характеристическое уравнение (28). Но так как алгебраическое уравнение всегда имеет по крайней мере один комплексный корень, то всякий линейный оператор T в $\tilde{R}_n$ имеет по крайней мере одно собственное число. Каждому собственному числу λ оператора T отвечает сопряженное собственное число оператора T^*.

Хотя, в общем случае, собственными числами могут быть любые комплексные числа, но все собственные числа самосопряженного оператора T в $\tilde{R}_n$ вещественны. Этот результат по существу уже доказан в 1.13 для того частного случая, когда все элементы матрицы T вещественны. Проведем доказательство, применимое для любого самосопряженного оператора T в $\tilde{R}_n$. Пусть λ — собственное число и a — соответствующий ему собственный вектор. Тогда

$$\lambda(a, a) = (\lambda a, a) = (Ta, a) = (a, Ta) = (a, \lambda a) = \overline{\lambda}(a, a).$$

Отсюда, так как $a \neq 0$, следует $\lambda = \overline{\lambda}$, и, таким образом, λ — вещественное *).

Для самосопряженного оператора собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

*) Значительное упрощение этого доказательства по сравнению с рассуждением из 1.13 объясняется переходом к рассмотрению пространства комплексных векторов.

ГЛАВА II

БЕСКОНЕЧНО-МЕРНОЕ ЭВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

2.1. Векторы с бесконечным множеством координат

В настоящей главе мы будем изучать пространство более сложной структуры, чем конечно-мерное эвклидово, но все же во многом сходное с ним по своим свойствам. Это пространство состоит из векторов, определяемых бесконечным множеством координат. Как и в гл. I, основное изложение будем вести для векторов с вещественными координатами.

Определение. *Вектором с бесконечным множеством координат* (в дальнейшем часто будем говорить просто — вектор) называется бесконечная последовательность вещественных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$. Как и раньше, будем обозначать вектор одной буквой и писать, например, так:

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots).$$

Члены последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ назовем *координатами* вектора a.

Вектор, все координаты которого равны нулю, как и в гл. I, называется *нулевым* и обозначается θ.

Равенство векторов, их сложение и умножение на вещественное число определим по тому же принципу, что и в R_n. Именно, если $a = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots)$, то

$$a = b \text{ означает, что } a_i = b_i \text{ при всех } i = 1, 2, \ldots;$$

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_i + b_i, \ldots);$$

$$\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_i, \ldots).$$

Как и в R_n, сложение векторов с бесконечным множеством координат и их умножение на число удовлетворяют основной группе алгебраических законов (см. 1.2). Так же, как в R_n, можно определить вычитание векторов, и действие вычитания оказывается обратным сложению.

Множество всех векторов с бесконечным множеством координат будем обозначать s. По аналогии с R_n его следовало бы назвать

бесконечно-мерным векторным пространством. Однако, как мы увидим дальше, представляет интерес не только всё s, но и некоторые его части, которые также могут быть названы бесконечномерными векторными пространствами и которые по своим свойствам ближе к пространствам R_n. Поэтому мы будем называть s просто *пространством всех числовых последовательностей.*

Координатными ортами в s назовем векторы, у которых одна из координат равна единице, а все остальные равны нулю. Таким образом, если, как в 1.6, $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то орт e_i определяется как следующая числовая последовательность:

$$e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{ii}, \ldots).$$

Однако в этом параграфе мы не имеем возможности дать формулу разложения произвольного вектора по координатным ортам. Действительно, если вектор имеет бесконечное множество отличных от нуля координат, то он не представим никакой линейной комбинацией конечного числа ортов

$$\lambda_1 e_{i_1} + \lambda_2 e_{i_2} + \ldots + \lambda_n e_{i_n}.$$

Следовательно, формула разложения в прежнем виде невозможна. Ниже мы установим ее обобщение.

2.2. Пространство l^2

Выделим из s множество векторов более близкое по своим свойствам к конечно-мерному эвклидову пространству. Именно, обозначим через l^2 множество всех векторов a из s, для которых

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty$$

(т. е. ряд, составленный из квадратов координат, сходится).

Ясно, что если a входит в l^2, то и λa входит в l^2 при любом λ. Менее очевидно, что и операция сложения векторов не выводит из l^2. Докажем это.

Пусть a и b — два вектора из l^2. При любом натуральном n по неравенству треугольника, доказанному в 1.3,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \right)^2.$$

Тем более,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2} \right)^2.$$

Так как в правой части неравенства стоит постоянная, а для положительных рядов ограниченность частичных сумм влечет сходимость ряда, то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)^2$$

сходится и при этом

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2}.$$

Тем самым доказано, что вектор $a + b$ входит в l^2, а заодно неравенство треугольника обобщено на бесконечные суммы.

Поскольку сложение векторов из l^2 и умножение вектора из l^2 на число не выводят из l^2, в этом множестве также выполнены все алгебраические законы основной группы, справедливые, как мы отмечали, и во всем s.

Теперь для векторов из l^2 определим норму по формуле

$$\| a \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}. \tag{1}$$

Эта норма, очевидно, обладает тремя основными свойствами, перечисленными в 1.3. Неравенство треугольника для нормы есть другая запись только что доказанного неравенства треугольника для бесконечных сумм.

Определение. Множество l^2, в котором по формуле (1) определена норма вектора, называется *бесконечно-мерным эвклидовым пространством.*

В дальнейшем множество l^2 всегда рассматривается как эвклидово пространство.

2.3. Скалярное произведение векторов из l^2

По аналогии с понятием скалярного произведения векторов из R_n определим скалярное произведение (a, b) двух векторов a и b из l^2 по формуле

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i. \tag{2}$$

Чтобы это определение имело смысл, нужно показать, что ряд в правой части (2) сходится.

По неравенству Коши, установленному в 1.3, имеем при любом натуральном n

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| |b_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Заменяя в правой части n на ∞ и рассуждая так же, как в предыдущем параграфе при обобщении неравенства треугольника на случай бесконечных сумм, получим, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i||b_i|$ сходится и что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i||b_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2}.$$

Тем самым доказана абсолютная сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$, а *неравенство Коши* также распространено и на бесконечные суммы:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\right). \tag{3}$$

Итак, скалярное произведение имеет смысл для любых двух векторов из l^2. При этом из неравенства Коши (3), как и в $\boldsymbol{R}_n$, вытекает, что

$$|(a, b)| \leqslant \|a\|\,\|b\|. \tag{4}$$

Последнее соотношение также называют *неравенством Коши*.

Отмеченные в 1.4 свойства скалярного произведения в $\boldsymbol{R}_n$: коммутативность, ассоциативность по отношению к умножению на число, дистрибутивность относительно сложения, очевидно, сохраняются и в l^2. Между нормой и скалярным произведением существует прежняя зависимость

$$\|a\| = \sqrt{(a, a)}.$$

Так же, как в $\boldsymbol{R}_n$, определяем понятие ортогональности векторов:

$$a \perp b, \text{ если } (a, b) = 0.$$

Это определение позволяет и в l^2 дать то обобщение теоремы Пифагора, которое было получено в 1.4.

Таким образом, нам уже удалось перенести в l^2 ряд основных определений, введенных ранее в $\boldsymbol{R}_n$, с сохранением многих основных свойств последнего.

2.4. Сходимость последовательности векторов

Как и в $\boldsymbol{R}_n$, будем говорить, что последовательность векторов $a^{(m)}$ из l^2 сходится к вектору a из l^2, $(a^{(m)} \to a)$, если

$$\|a^{(m)} - a\| \to 0. \tag{5}$$

Вводя в рассмотрение координаты векторов $a^{(m)}$ и a, именно,

записывая эти векторы в виде

$$a^{(m)} = (a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots, a_i^{(m)}, \ldots), \quad a = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots),$$

можно представить условие (5), в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(m)} - a_i)^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Отсюда ясно, что если $a^{(m)} \to a$, то

$$a_i^{(m)} \to a_i \text{ при всех } i = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Однако, в отличие от R_n, в l^2 уже нельзя сделать обратного заключения, т. е. сходимость последовательности векторов содержит в себе более сильное требование, чем просто сходимость по координатам.

Поясним сказанное на примере. Пусть $a^{(m)} = e_m$ (e_m — координатный орт), $a = 0$. При каждом i будет $a_i^{(m)} = \delta_{mi}$, следовательно, $a_i^{(m)} = 0$ при $m > i$, а так как $a_i = 0$ при всех i, то (6) выполнено. Однако

$$\| a^{(m)} - a \| = \| e_m \| = 1,$$

следовательно, $a^{(m)}$ не стремится к a *).

Для вещественных чисел известен следующий признак сходимости (Больцано — Коши): для того чтобы последовательность вещественных чисел x_m имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы

$$x_m - x_p \to 0 \quad \text{при} \quad m, p \to \infty.$$

Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое M, что $|x_m - x_p| < \varepsilon$ при $m, p \geqslant M$ **). Покажем, что аналогичным свойством обладает и сходимость в l^2: *для того чтобы последовательность векторов $a^{(m)}$ из l^2 сходилась к некоторому вектору (из l^2), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\| a^{(m)} - a^{(p)} \| \to 0 \quad \textit{при} \quad m, p \to \infty.$$

Пусть $a^{(m)} \to a$. Так как из равенства

$$a^{(m)} - a^{(p)} = (a^{(m)} - a) + (a - a^{(p)})$$

следует, что

$$\| a^{(m)} - a^{(p)} \| \leqslant \| a^{(m)} - a \| + \| a^{(p)} - a \|,$$

а при $m, p \to \infty$ правая часть стремится к нулю, то и

$$\| a^{(m)} - a^{(p)} \| \to 0.$$

---

*) Из этого рассуждения также сразу следует, что последовательность ортов $\{e_m\}$ вообще не имеет никакого предела.

**) См., например, Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, т. I, стр. 107.

Несколько сложнее доказывается обратное. Пусть последовательность векторов $a^{(m)}$ такова, что $\| a^{(m)} - a^{(p)} \| \to 0$ при $m, p \to \infty$. Так как

$$\| a^{(m)} - a^{(p)} \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(m)} - a_i^{(p)})^2,$$

а при каждом i

$$(a_i^{(m)} - a_i^{(p)})^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(m)} - a_i^{(p)})^2,$$

то и $a_i^{(m)} - a_i^{(p)} \to 0$ при каждом $i = 1, 2, \ldots$ По признаку Больцано — Коши для вещественных чисел отсюда следует, что при каждом i существует конечное $a_i = \lim\limits_{m\to\infty} a_i^{(m)}$. Составим вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$ из пространства s. Докажем, что он входит в l^2 и что $a = \lim a^{(m)}$.

Согласно данному условию, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое M, что при $m, p \geqslant M$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(m)} - a_i^{(p)})^2 = \| a^{(m)} - a^{(p)} \|^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Оставляя в сумме лишь конечное число слагаемых, имеем тем более при любом n и при $m, p \geqslant M$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(m)} - a_i^{(p)})^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Фиксируя m и переходя к пределу при $p \to \infty$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(m)} - a_i)^2 \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Так как это неравенство верно при любом натуральном n, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (a_i^{(m)} - a_i)^2$ сходится и

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(m)} - a_i)^2 \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2 < \varepsilon^2.$$

Тем самым доказано, что вектор $a^{(m)} - a$ входит в l^2 и $\| a^{(m)} - a \| < \varepsilon$ при $m \geqslant M$. Но тогда, по доказанному в 2.2, и вектор $a = a^{(m)} - (a^{(m)} - a)$ входит в l^2 и при этом $a^{(m)} \to a$.

Таким образом, в указанном обобщенном виде признак Больцано — Коши верен и в l^2. Читатель, конечно, заметил, что проведенное рассуждение, с надлежащими упрощениями, справедливо и в R_n, следовательно, признак Больцано — Коши верен также и в R_n.

Обратимся теперь к рассмотрению бесконечных рядов, составленных из векторов, входящих в l^2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b^{(k)},$$

где $b^{(k)}$ — векторы из l^2.

Сумма такого ряда определяется, аналогично сумме числового ряда, как предел последовательности частичных сумм: $\sigma = \lim \sigma_m$, где $\sigma_m = \sum_{k=1}^{m} b^{(k)}$ (здесь σ_m и σ — векторы из l^2). Если такой предел существует, то ряд называется *сходящимся*, в противном случае говорят, что ряд *расходится*.

Рассмотрение рядов позволяет и в l^2 дать формулу разложения произвольного вектора по координатным ортам. Именно, для произвольного вектора a положим $\sigma_m = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$. Тогда

$$\sigma_m = (a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots),$$

$$a - \sigma_m = (0, 0, \ldots, 0, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots)$$

и

$$\| \sigma_m - a \| = \sqrt{\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i^2} \to 0,$$

так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ сходится. Таким образом, $a = \lim \sigma_m$, или

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i. \tag{7}$$

Коэффициенты этого разложения имеют тот же вид, что и в R_n: $a_i = (a, e_i)$.

Если векторный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b^{(k)}$ таков, что сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \| b^{(k)} \|$, то и данный векторный ряд тоже сходится и называется *абсолютно сходящимся*. Действительно, обозначим через σ_m и s_m частичные суммы указанных рядов, векторного и числового

(соответственно). Тогда, при $m > p$,

$$\| \sigma_m - \sigma_p \| = \| b^{(p+1)} + b^{(p+2)} + \ldots + b^{(m)} \| \leqslant$$
$$\leqslant \| b^{(p+1)} \| + \| b^{(p+2)} \| + \ldots + \| b^{(m)} \| \text{*)} = s_m - s_p$$

и так как $s_m - s_p \to 0$ при $m, p \to \infty$, то и $\| \sigma_m - \sigma_p \| \to 0$. Но тогда существует $\sigma = \lim \sigma_m$, т. е. данный векторный ряд сходится.

2.5. Непрерывность нормы и скалярного произведения

Покажем теперь, что норма вектора и скалярное произведение двух векторов из l^2 непрерывны в следующем смысле:

если $a^{(m)} \to a$, то $\| a^{(m)} \| \to \| a \|$;

если $a^{(m)} \to a$, $b^{(m)} \to b$, то $(a^{(m)}, b^{(m)}) \to (a, b)$.

Хотя первое утверждение получается из второго, если положить $b^{(m)} = a^{(m)}$ при всех m, все же удобнее сначала доказать первое.

Пусть $a^{(m)} \to a$. Из равенств

$$a^{(m)} = a + (a^{(m)} - a), \quad a = (a - a^{(m)}) + a^{(m)}$$

имеем

$$\| a^{(m)} \| \leqslant \| a \| + \| a^{(m)} - a \|, \quad \| a \| \leqslant \| a^{(m)} - a \| + \| a^{(m)} \|.$$

Решая второе неравенство также относительно $\| a^{(m)} \|$ и объединяя с первым, получаем

$$\| a \| - \| a^{(m)} - a \| \leqslant \| a^{(m)} \| \leqslant \| a \| + \| a^{(m)} - a \|.$$

Отсюда и видно, что $\| a^{(m)} \| \to \| a \|$. Так как сходящаяся числовая последовательность ограничена, то из доказанной непрерывности нормы вытекает, что нормы векторов, образующих сходящуюся последовательность, в совокупности ограничены.

Возвращаясь к абсолютно сходящемуся ряду $\sum_{k=1}^{\infty} b^{(k)}$, рассмотренному в конце предыдущего параграфа, запишем сначала неравенство

$$\| \sigma_m \| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \| b^{(k)} \|.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ и используя непрерывность

*) Неравенство треугольника для нормы по индукции, очевидно, обобщается на любое конечное число слагаемых.

нормы, получаем для суммы ряда неравенство

$$\|\sigma\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|b^{(k)}\|.$$

Таким образом, на абсолютно сходящиеся ряды распространяется неравенство треугольника:

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} b^{(k)} \Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|b^{(k)}\|.$$

Переходим к непрерывности скалярного произведения. Пусть $a^{(m)} \to a$, $b^{(m)} \to b$. Имеем тождество

$$(a^{(m)}, b^{(m)}) - (a, b) = (a^{(m)}, b^{(m)}) - (a, b^{(m)}) + (a, b^{(m)}) - (a, b) =$$
$$= (a^{(m)} - a, b^{(m)}) + (a, b^{(m)} - b).$$

По доказанному $\|b^{(m)}\| \leqslant C$ при всех m, где C — некоторая постоянная. С помощью неравенства Коши (4) имеем:

$$|(a^{(m)} - a, b^{(m)}| \leqslant \|a^{(m)} - a\| \|b^{(m)}\| \leqslant C \|a^{(m)} - a\| \to 0,$$
$$|(a, b^{(m)} - b)| \leqslant \|a\| \|b^{(m)} - b\| \to 0,$$

откуда $(a^{(m)}, b^{(m)}) \to (a, b)$.

Непрерывность скалярного произведения позволяет установить, что оно обладает свойством дистрибутивности и по отношению к сложению бесконечного множества слагаемых. Именно, пусть a и b — два вектора, причем $b = \sum_{k=1}^{\infty} b^{(k)}$, т. е. $b = \lim \sigma_m$, где $\sigma_m = \sum_{k=1}^{m} b^{(k)}$. Тогда

$$(a, b) = \lim (a, \sigma_m) = \lim \Big(a, \sum_{k=1}^{m} b^{(k)}\Big) = \lim \sum_{k=1}^{m} (a, b^{(k)}) = \sum_{k=1}^{\infty} (a, b^{(k)}).$$

Отсюда, в частности, следует, что если вектор $a \perp b^{(k)}$ при любом $k = 1, 2, \ldots$, то $a \perp b$.

Теперь мы можем дать и обобщение теоремы Пифагора для бесконечных сумм. Пусть $b = \sum_{k=1}^{\infty} b^{(k)}$ и векторы $b^{(k)}$ попарно ортогональны. Тогда

$$\|b\|^2 = (b, b) = \Big(b, \sum_{k=1}^{\infty} b^{(k)}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} (b, b^{(k)}).$$

Но так как $b^{(l)} \perp b^{(k)}$ при $l \neq k$, то

$$(b, b^{(k)}) = \Big(\sum_{l=1}^{\infty} b^{(l)}, b^{(k)}\Big) = \sum_{l=1}^{\infty} (b^{(l)}, b^{(k)}) = (b^{(k)}, b^{(k)}) = \|b^{(k)}\|^2;$$

следовательно,

$$\| b \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \| b^{(k)} \|^2.$$

Очевидно, что все сказанное в этом параграфе справедливо и в пространстве R_n.

2.6. Линейные функционалы

Рассмотрим скалярное произведение (a, c), считая c заданным вектором из l^2, a — произвольным. Тем самым, каждому вектору a из l^2 сопоставляется вещественное число (a, c), и мы можем сказать, что выражение (a, c) представляет функционал от a:

$$f(a) = (a, c). \tag{8}$$

В развернутом виде

$$f(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i. \tag{8а}$$

Из свойств скалярного произведения вытекает, что функционал f аддитивен, однороден и непрерывно зависит от a. Как и в R_n, этот функционал f называют линейным.

Так же, как в 1.9, из неравенства Коши следует, что

$$| f(a) | \leqslant \| a \| \| c \|$$

и что $\| c \|$ — наименьшая из постоянных M, для которых при любом a имеет место неравенство

$$| f(a) | \leqslant M \| a \|. \tag{9}$$

Эта наименьшая из постоянных M называется нормой функционала f (обозначается $\| f \|$). Свойство, выраженное неравенством (9), называется *ограниченностью* функционала f. Заметим, что это свойство не означает, что множество в с е х значений функционала $f(a)$ ограничено. Из неравенства (9) вытекает лишь то, что для любого множества векторов a, нормы которых в совокупности ограничены, множество значений $f(a)$ тоже ограничено.

При исследовании функционалов в l^2 свойство ограниченности играет более существенную роль, чем в R_n. В отличие от функционалов в R_n, если в l^2 задан произвольный аддитивный и однородный функционал, т. е. каждому вектору a из l^2 сопоставлено вещественное число $f(a)$, причем

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \qquad f(\lambda a) = \lambda f(a),$$

то нельзя утверждать, что этот функционал представим по формуле (8). К формуле (8) сводятся лишь те аддитивные и однород-

ные функционалы в l^2, которые удовлетворяют условию ограниченности (9), а класс всех аддитивных и однородных функционалов в l^2 оказывается более широким.

Итак, пусть f — произвольный аддитивный и однородный функционал, заданный в l^2 и удовлетворяющий условию (9) *). Прежде всего заметим, что из этих свойств функционала f вытекает его непрерывность. Именно, если $a^{(m)} \to a$, то

$$|f(a^{(m)}) - f(a)| = |f(a^{(m)} - a)| \leqslant M \|a^{(m)} - a\| \to 0,$$

т. е. $f(a^{(m)}) \to f(a)$. Далее, положим $c_i = f(e_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где e_i — координатные орты. Используя формулу разложения (7), имеем для любого a из l^2

$$f(a) = f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = f\Big(\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} a_i e_i\Big) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} f\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\Big) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} a_i f(e_i) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} a_i c_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i,$$

и формула (8а) получена. Однако, чтобы записать $f(a)$ в виде скалярного произведения вектора a на постоянный вектор из l^2, нужно показать, что вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots)$ входит в l^2.

С этой целью, при произвольном натуральном n возьмем вектор a, у которого

$$a_i = c_i \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n; \quad a_i = 0 \text{ для } i > n.$$

Тогда по (8а) $f(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$. С другой стороны, по неравенству (9), $|f(a)| \leqslant M \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leqslant M \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$, откуда $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2} \leqslant M$, или

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leqslant M^2.$$

Так как это верно при любом натуральном n, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ сходится, а это и означает принадлежность вектора c к l^2.

В точности так же, как в 1.9 для функционалов в пространстве R_n, доказывается, что вектор c, с помощью которого функционал $f(a)$ представляется по формуле (8),— единственный.

*) Можно показать, что однородность вытекает из аддитивности и ограниченности. Это будет сделано в более общем случае в гл. VIII.

2.7. Линейные операторы

С целью распространения на l^2 понятия линейного преобразования, введенного в 1.5, составим бесконечную систему формул

$$\left.\begin{aligned} a'_1 &= t_{11}a_1 + t_{12}a_2 + \ldots + t_{1k}a_k + \ldots \\ a'_2 &= t_{21}a_1 + t_{22}a_2 + \ldots + t_{2k}a_k + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_i &= t_{i1}a_1 + t_{i2}a_2 + \ldots + t_{ik}a_k + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

[краткая запись:

$$a'_i = \sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}a_k \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots)\Big].$$

Как и раньше, коэффициенты t_{ik} предполагаются вещественными. Однако, если аналогичными формулами (10) из 1.5 при любой матрице T коэффициентов t_{ik} определялось линейное преобразование пространства $\boldsymbol{R}_n$ в $\boldsymbol{R}_n$, то сейчас, чтобы формулы (10) определяли преобразование пространства l^2 в l^2, на таблицу коэффициентов, которую мы назовем *бесконечной матрицей*, нужно наложить некоторые ограничения.

Если мы потребуем, чтобы все формулы (10) имели смысл для любого вектора a из l^2, то при каждом i ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} t_{ik}a_k$ должен быть сходящимся, как только $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty$. При этом условии формулами (10) каждому вектору a из l^2 сопоставляется вектор $a' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_i, \ldots)$ из s, т. е. определен оператор $a' = Ta$, который, очевидно, аддитивен и однороден. Если же мы потребуем, чтобы для любого a из l^2 его образ также входил в l^2, т. е. имело место неравенство $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i'^2 < +\infty$, то это накладывает еще дополнительное ограничение на матрицу T и получается, что для любого вектора a из l^2 должно выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}a_k\Big)^2 > +\infty. \qquad (11)$$

Мы не будем выяснять, каким более простым свойствам матрицы T равносильно это, не легко проверяемое условие (11), а ограничимся рассмотрением одного частного случая, когда

условие (11) заведомо будет выполнено. Именно, пусть матрица T такова, что

$$M^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}^2 < +\infty. \tag{12}$$

Тогда, с помощью неравенства Коши, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i'^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}a_k\Big)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}^2\Big)\|a\|^2 = M^2\|a\|^2\ *).$$

Тем самым доказано, что (11) выполнено для любого a из l^2 и, следовательно, $a' = Ta$ тоже входит в l^2. При этом $\|Ta\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i'^2$, а потому

$$\|Ta\| \leqslant M\|a\|. \tag{13}$$

Как и для функционалов, мы назовем такое соотношение условием *ограниченности* оператора T. Однако постоянная

$$M = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}^2}$$

может не быть наименьшей возможной постоянной в условии (13). Если, как и в 1.7, наименьшую из таких постоянных обозначить $\|T\|$ (ее также называют нормой оператора T), то

$$\|T\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}^2}.$$

Покажем теперь, что если каким угодно способом задан аддитивный и однородный оператор $a' = Ta$, преобразующий l^2 в l^2, удовлетворяющий условию ограниченности (13) (такие операторы и называют *линейными*), то это преобразование может быть записано формулами (10). Но матрица T при этом может и не удовлетворять условию (12).

Так же, как в 2.6 для функционалов, проверяется, что из сделанных предположений вытекает непрерывность оператора T, т. е. $a^{(m)} \to a$ влечет $Ta^{(m)} \to Ta$.

---

*) Как мы видели в 2.3, из сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} t_{ik}a_k$.

Пусть, теперь, t_{ik} — i-я координата вектора Te_k, т. е.

$$Te_k = (t_{1k}, t_{2k}, \ldots, t_{ik}, \ldots). \tag{14}$$

Тогда для любого a из l^2

$$a' = Ta = T\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\Big) = T\Big(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k e_k\Big) = \lim_{m\to\infty} T\Big(\sum_{k=1}^{m} a_k e_k\Big) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k (Te_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (Te_k). \tag{15}$$

Благодаря дистрибутивности скалярного произведения,

$$a'_i = (a', e_i) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (Te_k, e_i) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{ik} a_k.$$

Представление преобразования T по формулам (10) получено. При этом установлен тот же геометрический смысл элементов столбцов матрицы T, что и для линейных преобразований в R_n.

Рассмотрение сопряженных операторов, а также собственных чисел и векторов мы отложим до гл. X, где эти вопросы будут изучены в более общем виде. Заметим лишь, что если непосредственно искать числа λ и векторы a, удовлетворяющие условию $Ta = \lambda a$, то из (10) мы получим бесконечную систему уравнений с бесконечным множеством неизвестных

$$\left.\begin{aligned}
&(t_{11} - \lambda) a_1 + t_{12} a_2 + \ldots + t_{1k} a_k + \ldots = 0,\\
&t_{21} a_1 + (t_{22} - \lambda) a_2 + \ldots + t_{2k} a_k + \ldots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&t_{k1} a_1 + t_{k2} a_2 + \ldots + (t_{kk} - \lambda) a_k + \ldots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}$$

Решение таких систем представляет значительно бо́льшие трудности, чем решение конечных систем линейных алгебраических уравнений. Некоторые результаты о бесконечных системах будут установлены в гл. VIII.

2.8. Подпространства в l^2

Вследствие того, что l^2 состоит из векторов с бесконечным множеством координат, понятие подпространства в l^2 формулируется несколько сложнее, чем в R_n. Предварительно введем понятие замыкания для произвольного множества E векторов из l^2. Именно *замыканием* множества E называется множество всех векторов из l^2, представимых в виде предела какой-нибудь последовательности векторов из E. В частности, само множество E входит в свое

замыкание, так как если a — вектор из E, то представляя его в виде $a = \lim a^{(m)}$, где все $a^{(m)} = a$, мы сразу заключаем, что a входит и в замыкание множества E.

Для векторов из l^2 сохраняем то определение линейной комбинации конечного числа векторов, которое дано в 1.11. Рассмотрим конечную или бесконечную систему векторов из l^2

$$a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}, \ldots \tag{16}$$

Эти векторы называются *линейно независимыми*, если ни один из них не является линейной комбинацией конечного числа других векторов из данной системы. Рассуждения, проведенные в начале 1.11, справедливые и для векторов с бесконечным множеством координат, показывают, что для конечных систем приведенное здесь определение равносильно данному в 1.11.

Множество E всех линейных комбинаций любого конечного числа векторов из системы (16) называется *линейной оболочкой* этой системы. Замыкание $\boldsymbol{L}$ линейной оболочки E называется *подпространством* пространства l^2, порожденным системой векторов (16). Итак, $\boldsymbol{L}$ состоит из всех векторов вида $\lambda_1 a^{(m_1)} + \lambda_2 a^{(m_2)} + \ldots + \lambda_n a^{(m_n)}$ и пределов всех сходящихся последовательностей векторов такого вида.

Подпространство $\boldsymbol{L}$ обладает следующими свойствами:

а) если a и b входят в $\boldsymbol{L}$, то и $a + b$ входит в $\boldsymbol{L}$;

б) если a входит в $\boldsymbol{L}$, то и λa входит в $\boldsymbol{L}$ при любом λ.

Действительно, для линейной оболочки E эти свойства очевидны. Переход же к $\boldsymbol{L}$ осуществляется так: имеем $a = \lim a^{(m)}$, $b = \lim b^{(m)}$, где $a^{(m)}$ и $b^{(m)}$ входят в E. Тогда

$$\| (a^{(m)} + b^{(m)}) - (a + b) \| \leqslant \| a^{(m)} - a \| + \| b^{(m)} - b \| \to 0,$$

$$\| \lambda a^{(m)} - \lambda a \| = |\lambda| \, \| a^{(m)} - a \| \to 0,$$

а так как $a^{(m)} + b^{(m)}$ и $\lambda a^{(m)}$ входят в E, то $a + b$ и λa входят в $\boldsymbol{L}$.

Приведем пример. Пусть задана система координатных ортов: $a^{(m)} = e_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Тогда линейная оболочка E состоит из всех векторов, у которых имеется лишь конечное число отличных от нуля координат, а подпространство $\boldsymbol{L}$ совпадает со всем l^2, так как каждый вектор a из l^2 имеет вид $a = \lim\limits_{m \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{m} a_k e_k$.

Таким же рассуждением, что и в 1.11, легко показать, что если в системе (16) есть вектор, представляющийся в виде линейной комбинации некоторых других векторов этой системы, и этот вектор исключить из системы (16), то это не отразится на линейной оболочке E, а следовательно, и на подпространстве $\boldsymbol{L}$. Однако в случае, если система (16) — бесконечная, повторяя последовательно такое исключение конечное число раз, мы можем еще не получить системы

линейно независимых векторов. Такую систему линейно независимых векторов можно выделить из (16) следующим путем.

Будем считать, что если в системе (16) встречались векторы, равные θ, то мы их уже выбросили, и что теперь все $a^{(m)} \neq \theta$. Перебирая поочередно все векторы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}, \ldots$, мы относительно каждого будем решать, сохраняется ли он в системе или исключается. Именно, вектор $a^{(1)}$ мы непременно сохраним и обозначим его теперь $b^{(1)}$. Далее действуем по индукции. Пусть уже перебраны векторы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$ и из них оставлены линейно независимые векторы $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(n)}$ (ясно, что $n \leqslant m$); тогда вопрос относительно очередного вектора $a^{(m+1)}$ решается так: если векторы $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(n)}, a^{(m+1)}$ линейно независимы, то вектор $a^{(m+1)}$ сохраняется и обозначается $b^{(n+1)}$, если же векторы $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(n)}, a^{(m+1)}$ линейно зависимы, то $a^{(m+1)}$ исключается. Таким образом, по построению векторы

$$b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(n)}, \ldots \tag{17}$$

линейно независимы. Чтобы доказать, что их линейная оболочка — та же, что у системы (16) (а тогда совпадают и порождаемые подпространства), достаточно показать, что любой исключенный вектор — линейная комбинация конечного числа векторов из системы (17). Пусть вектор $a^{(m+1)}$ был исключен. Это значит, что существует соотношение вида

$$\lambda_1 b^{(1)} + \ldots + \lambda_n b^{(n)} + \mu a^{(m+1)} = \theta,$$

в котором хоть один из коэффициентов отличен от нуля. Если бы было $\mu = 0$, то мы бы получили равенство

$$\lambda_1 b^{(1)} + \ldots + \lambda_n b^{(n)} = \theta,$$

в котором тоже не все коэффициенты равны нулю, а это противоречит линейной независимости векторов $b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}$. Следовательно, $\mu \neq 0$ и

$$a^{(m+1)} = -\frac{\lambda_1}{\mu} b^{(1)} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\mu} b^{(n)}.$$

Итак, при определении подпространства всегда можно считать, что порождающая его система состоит из линейно независимых векторов. Если эта система состоит из конечного числа векторов, то подпространство называется *конечно-мерным*, а порождающая его система векторов называется *базисом*. При этом, точно так же, как в R_n (см. 1.11), доказывается, что число векторов во всех базисах данного подпространства — одно и то же. Его называют размерностью подпространства. Если же порождающая

система содержит бесконечное множество векторов, то подпространство называется *бесконечно-мерным*.

В следующем параграфе мы покажем, что для конечно-мерных подпространств линейная оболочка базиса совпадает с самим подпространством, т. е. конечно-мерные подпространства в l^2 можно определять так же, как в R_n.

2.9. Ортогональный базис

Точно так же, как в 1.12 для R_n, доказывается, что если в l^2 конечная или бесконечная система состоит из векторов, попарно ортогональных и отличных от нуля, то эти векторы линейно независимы.

Если система векторов, порождающих подпространство L, состоит из попарно ортогональных векторов (отличных от нуля), то такая система называется *ортогональным базисом* подпространства L *). Если все векторы, составляющие ортогональный базис, имеют норму, равную единице, то базис называется *ортонормированным*.

Если в конечно-мерном или бесконечно-мерном подпространстве L пространства l^2 задана произвольная порождающая L система линейно независимых векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}, \ldots$, то тем же процессом ортогонализации, который был изложен в 1.12 (для бесконечной системы он будет состоять из бесконечного множества последовательных шагов), можно построить в L ортонормированный базис $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(m)}, \ldots$ так, что каждый вектор $b^{(m)}$ есть линейная комбинация первых m векторов первой системы. Одновременно векторы $a^{(m)}$ будут линейными комбинациями векторов второй системы. Совпадение подпространств, порождаемых обеими системами, вытекает из совпадения их линейных оболочек.

Ортонормированные (и вообще ортогональные) базисы обладают некоторыми дополнительными свойствами, благодаря которым они часто оказываются, при исследовании подпространств, более удобными по сравнению с произвольными порождающими системами. В частности, удается установить формулу разложения произвольного вектора из подпространства по векторам его ортонормированного базиса.

Лемма 2.9.1. *Пусть L — подпространство, порождаемое произвольной системой векторов $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(m)}, \ldots$ Если некоторый вектор c из l^2 ортогонален каждому из векторов $b^{(m)}$, то он ортогонален и любому вектору a из L.*

---

*) Общее определение базиса, без требования ортогональности, для бесконечно-мерных пространств будет дано в гл. V.

Доказательство. Если a входит в линейную оболочку E заданной системы векторов, т. е. если $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b^{(m_i)}$, то

$$(c, a) = \left(c, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b^{(m_i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (c, b^{(m_i)}) = 0.$$

Если же a — произвольный вектор из $\boldsymbol{L}$, то $a = \lim a^{(n)}$, где $a^{(n)}$ входят в E, и, по непрерывности скалярного произведения и доказанной ортогональности c и $a^{(n)}$,

$$(c, a) = \lim (c, a^{(n)}) = 0.$$

Следствие. *Если вектор a из $\boldsymbol{L}$ ортогонален каждому из векторов $b^{(m)}$ порождающей системы, то $a = 0$.*

Действительно, вектор a должен быть ортогонален каждому вектору из $\boldsymbol{L}$, в частности самому себе, а тогда

$$\| a \| = \sqrt{(a, a)} = 0.$$

Выведем теперь одно важное неравенство. Пусть $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(m)}, \ldots$ — любые попарно ортогональные векторы с нормой, равной единице. Для произвольного вектора a из l^2 положим

$$\beta_m = (a, b^{(m)}) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

и образуем векторы

$$a^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} \beta_m b^{(m)}. \tag{18}$$

Подсчитаем $\| a^{(n)} - a \|^2$. Имеем

$$\| a^{(n)} - a \|^2 = (a^{(n)} - a, a^{(n)} - a) =$$
$$= (a^{(n)}, a^{(n)}) - (a, a^{(n)}) - (a^{(n)}, a) + (a, a) =$$
$$= \| a^{(n)} \|^2 - 2 (a, a^{(n)}) + \| a \|^2. \tag{19}$$

По обобщенной теореме Пифагора

$$\| a^{(n)} \|^2 = \sum_{m=1}^{n} \| \beta_m b^{(m)} \|^2 = \sum_{m=1}^{n} \beta_m^2 \| b^{(m)} \|^2 = \sum_{m=1}^{n} \beta_m^2,$$

затем

$$(a, a^{(n)}) = \left(a, \sum_{m=1}^{n} \beta_m b^{(m)}\right) = \sum_{m=1}^{n} \beta_m (a, b^{(m)}) = \sum_{m=1}^{n} \beta_m^2.$$

Подставляя в (19), получим

$$\| a^{(n)} - a \|^2 = \| a \|^2 - \sum_{m=1}^{n} \beta_m^2. \tag{20}$$

Так как левая часть, очевидно, не отрицательна, то

$$\sum_{m=1}^{n} \beta_m^2 \leqslant \| a \|^2. \tag{21}$$

Если данная система векторов $b^{(m)}$ бесконечная, то в неравенстве (21) n может быть любым натуральным числом. Тогда из (21) вытекает сходимость ряда $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2$ и так называемое *неравенство Бесселя*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 \leqslant \| a \|^2. \tag{22}$$

Если же векторов $b^{(m)}$ конечное число n, то неравенством Бесселя называют установленное выше неравенство (21).

Теперь переходим к основной теореме этого параграфа.

Т е о р е м а 2.9.1. *Для того чтобы вектор a из l^2 входил в подпространство $\boldsymbol{L}$ с ортонормированным базисом $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, ... , $b^{(m)}$, . . ., необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде*

$$a = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m b^{(m)}; \tag{23}$$

при таком представлении непременно $\beta_m = (a, b^{(m)})$ при всех m и, следовательно, такое представление единственно.

Мы проведем все доказательство, предполагая базис бесконечным. Но читатель легко проследит, что все рассуждения, с соответствующими упрощениями, справедливы и при конечном базисе, причем бесконечный ряд из формулы (23) в этом случае, естественно, заменяется конечной суммой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть представление (23) имеет место. Тогда, вследствие ортонормированности базиса,

$$(a, b^{(m)}) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k b^{(k)}, b^{(m)}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (b^{(k)}, b^{(m)}) = \beta_m \| b^{(m)} \|^2 = \beta_m.$$

Кроме того, частичные суммы ряда (23) входят в линейную оболочку базиса, а тогда вектор a, как предел последовательности частичных сумм, входит в $\boldsymbol{L}$.

б) Н е о б х о д и м о с т ь. Возьмем вектор a из $\boldsymbol{L}$, положим $\beta_m = (a, b^{(m)})$ при $m = 1, 2, \ldots$ и составим векторы $a^{(n)}$ по формуле (18). Покажем, что для последовательности векторов $a^{(n)}$ выполнено условие Больцано — Коши.

Действительно, при $p > n$

$$a^{(p)} - a^{(n)} = \sum_{m=n+1}^{p} \beta_m b^{(m)},$$

а потому, вследствие сходимости ряда из (22),

$$\| a^{(p)} - a^{(n)} \|^2 = \sum_{m=n+1}^{p} \beta_m^2 \xrightarrow[n,\ p\to\infty]{} 0.$$

Но тогда существует вектор из l^2

$$b = \lim_{n\to\infty} a^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \beta_m b^{(m)} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m b^{(m)},$$

который по доказанному в а) входит в $\boldsymbol{L}$; при этом $\beta_m = (b,\ b^{(m)})$.

По общим свойствам подпространства вектор $a - b$ также входит в подпространство $\boldsymbol{L}$. При этом, при любом $m = 1, 2, \ldots$

$$(a - b,\ b^{(m)}) = (a,\ b^{(m)}) - (b,\ b^{(m)}) = \beta_m - \beta_m = 0.$$

Отсюда с помощью доказанного выше следствия из леммы получаем, что $a - b = \theta$, т. е.

$$a = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m b^{(m)}.$$

Это и есть требуемая формула разложения. Теорема доказана.

По ходу доказательства мы установили, что если вектор a входит в $\boldsymbol{L}$, то $a = \lim a^{(n)}$, а тогда из (20) следует, что

$$\| a \|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \beta_m^2$$

или

$$\| a \|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2. \tag{24}$$

Равенство (24) называют *уравнением замкнутости*.

Обратно, если (24) выполнено, то из (20) следует, что $\| a^{(n)} - a \| \to 0$ и, так как все $a^{(n)}$ входят в линейную оболочку данного базиса, то a входит в подпространство $\boldsymbol{L}$. Таким образом, равенство (24) является условием, необходимым и достаточным для того, чтобы вектор a входил в подпространство $\boldsymbol{L}$. Значит, для векторов, не входящих в $\boldsymbol{L}$, в неравенстве Бесселя имеет место строгое неравенство, т. е. стоит знак $<$.

Приведем пример. Пусть задана система, состоящая из всех координатных ортов с четными номерами, $b^{(m)} = e_{2m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Подпространство $\boldsymbol{L}$, порождаемое этим ортонормированным

базисом, состоит из всех векторов, допускающих разложение вида

$$a = \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} e_{2m},$$

т. е. векторов вида $a = (0, a_2, 0, a_4, \ldots)$, у которых все координаты с нечетными номерами равны нулю. При этом

$$\beta_m = (a, b^{(m)}) = (a, e_{2m}) = a_{2m}.$$

Для векторов a из $\boldsymbol{L}$, очевидно $\|a\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2$. Если же вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$ из l^2 не входит в $\boldsymbol{L}$, то у него, по крайней мере одна из координат a_{2m-1} (с нечетным номером) отлична от нуля и

$$\|a\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}^2 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m-1}^2 > \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2.$$

Читатель безусловно заметил большую аналогию между проведенными в этом параграфе построениями и теорией рядов Фурье. В последующем, в гл. VI, мы специально остановимся на этой аналогии, рассмотрев теорию ортогональных разложений в более общем виде.

Теперь докажем результат, упомянутый в предыдущем параграфе.

Теорема 2.9.2. *Конечно-мерное подпространство $\boldsymbol{L}$ пространства l^2 (с размерностью, большей нуля) совпадает с линейной оболочкой своего базиса.*

Доказательство. Так как при ортогонализации произвольного базиса получается базис, имеющий ту же линейную оболочку, то мы сразу можем считать, что заданный в подпространстве $\boldsymbol{L}$ базис $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(m)}$ — ортонормированный. Тогда, по теореме 2.9.1, каждый вектор a из $\boldsymbol{L}$ представим в виде $a = \sum_{k=1}^{m} \beta_k b^{(k)}$, т. е. входит в линейную оболочку базиса.

2.10. Комплексное бесконечно-мерное эвклидово пространство

Теория, изложенная в настоящей главе, распространяется и на пространство, составленное из векторов с комплексными координатами, подобно тому, как это намечено в 1.14 для конечно-мерных эвклидовых пространств. *Комплексное бесконечно-мерное эвклидово пространство* $\tilde{l}^2$ определяется как множество всех комплексных векторов $a = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$ с бесконечным мно-

Инв № 33

БИБЛИОТЕКА Колхоза "Оскорка"

жеством координат, значениями которых могут быть любые комплексные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < +\infty$, при следующем определении нормы вектора:

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2}.$$

Скалярное произведение двух векторов a и b из $\tilde{l}^2$ определяется формулой

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \bar{b}_i.$$

Алгебраические операции вводятся так же, как и в l^2, но в $\tilde{l}^2$ имеет смысл умножение вектора на любое комплексное число.

Норма и скалярное произведение в $\tilde{l}^2$ обладают свойствами, отмеченными в $\tilde{R}_n$, а также свойствами непрерывности, установленными выше в l^2. В бо́льшие подробности здесь мы входить не будем.

ГЛАВА III

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

3.1. Некоторые понятия теории множеств

В настоящей главе мы перейдем к изучению значительно более общего понятия пространства по сравнению с теми эвклидовыми пространствами, которым были посвящены первые две главы. В связи с этим нам будут полезны некоторые понятия и обозначения из общей теории множеств.

Само понятие множества является настолько общим, что было бы затруднительно дать для него формальное определение. Но в таком определении и нет необходимости. Мы и так совершенно свободно оперируем понятием множества и в повседневных житейских разговорах и в научной литературе. Так, каждому ясно, что́ понимать под множеством тех или иных предметов, находящихся в его квартире, например, под множеством книг, стоящих в книжном шкафу, или, что понимать под множеством людей, живущих в данном городе. Также у нашего читателя, очевидно, не возникало никаких вопросов, когда мы определяли в предыдущих главах эвклидовы пространства как множества тех или иных векторов. Часто вместо термина «множество» употребляется равносильный термин «совокупность».

Говоря о некотором множестве, мы называем его *элементами* те предметы или математические объекты, из которых оно составлено. Если множество обозначено буквой A, а общее обозначение произвольного его элемента x, то пишут $A = \{x\}$. Далее, если нужно указать, что какой-нибудь объект a есть один из элементов множества A, то употребляют так называемый *знак включения* $\in$ и пишут $a \in A$ [читается: a включается (входит) или содержится в A]. Если же объект a не встречается среди элементов множества A, то пишут $a \notin A$ [читается: a не включается (не входит) или не содержится в A]. Например, пусть A — множество всех четных (положительных) чисел. Так как общий вид любого четного числа $2n$ (n — натуральное), то можно записать $A = \{2n\}$. Далее можно, например, записать, что $24 \in A$, а $25 \notin A$.

Пусть рассматриваются два множества A и B. Если каждый элемент множества B входит также и в множество A, то говорят, что B есть часть или *подмножество* множества A. Для обозначения этого факта употребляют несколько иной знак включения $\subset$ и пишут $B \subset A$ (читается так же, как и запись со знаком $\in$). Например, множество l^2 есть подмножество множества s: $l^2 \subset s$. Важно отметить, что соотношение $B \subset A$ не исключает и совпадения B с A, т. е. само множество A включается в число его подмножеств.

Иногда знаки включения записывают и так:

$$A \ni a \quad \text{вместо} \quad a \in A,$$

$$A \supset B \quad \text{вместо} \quad B \subset A.$$

Равными (пишут $A = B$) называются одинаковые множества, т. е. множества, состоящие из одних и тех же элементов. Заметим, что если относительно двух множеств A и B установлено, что одновременно $B \subset A$ и $A \subset B$, то это и означает, что $A = B$.

Если x и y — элементы каких-нибудь множеств, то знак равенства между ними, $x = y$, также используется для обозначения их совпадения.

Иногда, определяя какое-нибудь множество, мы можем еще не знать, содержит ли это множество по крайней мере один элемент. Например, нас может интересовать множество вещественных корней того или иного алгебраического уравнения, но дальнейшее исследование может показать, что данное уравнение совсем не имеет вещественных корней. В связи с этим вводится понятие *пустого* множества. Так называется множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество обозначается Λ и, следовательно, запись $A = \Lambda$ будет говорить, что A — пустое множество.

Определим некоторые операции, которые часто приходится производить над множествами.

Суммой двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cup B$, которое состоит из всех элементов, входящих, по крайней мере, в одно из множеств A или B. Аналогично определяется сумма любого количества множеств. При этом, если заданные множества обозначены A_α (значок α может при этом сам пробегать какое угодно множество; это не обязательно — порядковый номер), то их сумма обозначается $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ и, по определению, эта сумма состоит из всех элементов, входящих по крайней мере в одно из множеств A_α *). Пусть, например, множество A состоит

*) Мы будем считать, что если под знаком суммы не указана область изменения значка α, то значит суммирование распространяется на все значения, которые α может принимать в рассматриваемой задаче. То же относится и к вводимому ниже знаку пересечения.

из всех четных чисел, множество B состоит из всех натуральных чисел, делящихся на 3, и множество C состоит из всех нечетных чисел, не делящихся на 3: $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$, $C = \{1, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$. Тогда их сумма $A \cup B \cup C$ есть множество всех натуральных чисел.

Пересечением двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cap B$, состоящее из всех элементов, которые входят и в A и в B. Аналогично определяется пересечение $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ любого

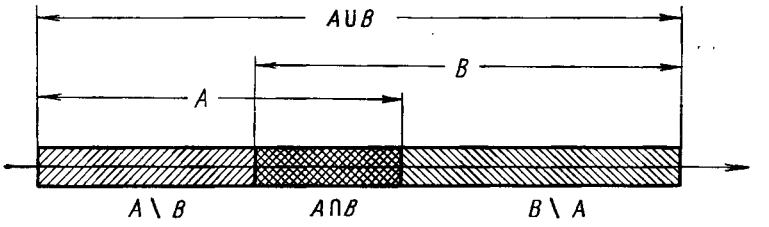

Рис. 3.

количества множеств A_α: это есть множество всех элементов, входящих во все A_α. Для множеств A и B из предыдущего примера их пересечение состоит из всех чисел, кратных 6. Если $B \subset A$, то $A \cup B = A$, $A \cap B = B$.

Разность $A \setminus B$ определяется как подмножество множества A, состоящее из всех его элементов, не входящих в B. Предоставляем читателю самому убедиться, что $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ *).

Все три понятия проиллюстрированы на рис. 3, где под A и B понимаются множества всех точек соответствующих промежутков.

Введем еще одно понятие. Пусть A — некоторое множество, а B — произвольное его подмножество. Тогда множество $A \setminus B$ называется *дополнением* к множеству B (относительно множества A). Ясно, что дополнение к $A \setminus B$ есть само множество B. Отметим одно важное свойство дополнений: если B_α — произвольные подмножества множества A, а C_α — их дополнения, т. е. $C_\alpha = A \setminus B_\alpha$, то

$$A \setminus \bigcup_{\alpha} B_\alpha = \bigcap_{\alpha} C_\alpha; \quad A \setminus \bigcap_{\alpha} B_\alpha = \bigcup_{\alpha} C_\alpha \tag{1}$$

(*дополнение к сумме подмножеств равно пересечению их дополнений, а дополнение к пересечению подмножеств равно сумме их дополнений*).

*) В определении разности $A \setminus B$ не требуется, чтобы $B \subset A$.

Докажем первую формулу; вторая — доказывается аналогично. Требуемое равенство мы установим с помощью двух противоположных включений. Пусть $x \in A \setminus \bigcup_\alpha B_\alpha$. Это значит, что $x \in A$, но $x \overline{\in} \bigcup_\alpha B_\alpha$. Тогда, по определению суммы, $x \overline{\in} B_\alpha$ ни при одном α, следовательно, $x \in C_\alpha$ при всех α и $x \in \bigcap_\alpha C_\alpha$. Таким образом, $(A \setminus \bigcup_\alpha B_\alpha) \subset \bigcap_\alpha C_\alpha$.

Обратно, пусть $x \in \bigcap_\alpha C_\alpha$. Это значит, что $x \in C_\alpha$ при всех α, следовательно, $x \in A$, но $x \overline{\in} B_\alpha$ ни при одном α. Тогда $x \overline{\in} \bigcup_\alpha B_\alpha$ и, тем самым, $x \in A \setminus \bigcup_\alpha B_\alpha$. Таким образом, $\bigcap_\alpha C_\alpha \subset (A \setminus \bigcup_\alpha B_\alpha)$. Из двух доказанных включений и следует, что

$$A \setminus \bigcup_\alpha B_\alpha = \bigcap_\alpha C_\alpha.$$

3.2. Определение метрического пространства

Пространства, рассмотренные нами в первых двух главах, составлялись из некоторых конкретных математических объектов — векторов с тем или иным множеством координат. Это уже было обобщением того понятия пространства, которое изучалось в элементарной геометрии. Сейчас мы сделаем значительно больший шаг в направлении обобщения понятия пространства. Именно, мы назовем пространством произвольное множество, состоящее из элементов какой угодно природы, на которое накладывается только одно требование: должно быть определено понятие расстояния между его элементами, подчиненное некоторым условиям *). Дадим точное определение.

Определение. *Метрическим пространством* называется всякое множество E, в котором для любых двух его элементов x и y определено вещественное неотрицательное число, называемое *расстоянием* между x и y, обозначаемое $\rho(x, y)$, причем должны выполняться следующие требования:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);

3) для любых трех элементов x, y и z

$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Элементы метрического пространства чаще называют его *точками*.

*) В пределах настоящей книги это будет наиболее общим понятием пространства. Однако в математике изучаются и еще более общие понятия пространства, например, топологические пространства.

Перечисленные требования вполне согласуются с нашими житейскими представлениями о расстоянии: расстояние всегда неотрицательно; расстояние равно нулю только между совпадающими точками; обе точки, между которыми определяется расстояние, совершенно равноправны («расстояние от x до y» равно «расстоянию от y до x»); наконец, аксиома треугольника выражает тот факт, что, говоря образно, прямой путь из x в y не должен быть длиннее, чем путь из x в y через третью точку z. Всеми этими свойствами обладает, в частности, расстояние на плоскости и в трехмерном эвклидовом пространстве. Однако при определении общего понятия метрического пространства все перечисленные требования не выводятся из каких-то ранее установленных фактов, а формулируются в виде аксиом. В дальнейшем эту группу условий мы и будем называть *системой аксиом метрического пространства*. Приведем некоторые примеры.

1. В эвклидовом пространстве $\boldsymbol{R}_n$ расстояние между двумя векторами определяем по формуле

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Получаем, очевидно, метрическое пространство. В частности, выполнение аксиомы треугольника вытекает из неравенства треугольника, установленного в 1.3 для нормы вектора, если записать $x - y = (x - z) + (z - y)$.

Заметим, что если при $n = 3$ элементы $x = (x_1, x_2, x_3)$ пространства $\boldsymbol{R}_3$ изображать в виде точек в прямоугольной системе координат, то для расстояния получится элементарная формула: расстояние между двумя точками равно длине разности их радиусов-векторов. То же имеем и при $n = 2$. А при $n = 1$ картина еще проще: одномерное эвклидово пространство $\boldsymbol{R}_1$ есть не что иное, как совокупность вещественных чисел с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$.

2. Бесконечно-мерное эвклидово пространство l^2 при том же определении расстояния, что в $\boldsymbol{R}_n$, также будет метрическим пространством.

3. Пусть множество l состоит из всех бесконечных числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots)$ (или векторов с бесконечным множеством координат), удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < +\infty$. Положим для любых двух элементов $x = \{\xi_i\}$ и $y = \{\eta_i\}$ из l:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|.$$

Выполнение первых двух аксиом метрического пространства оче-

видно [$\rho(x, y)=0$ равносильно $\xi_i=\eta_i$ при всех i, т. е. $x=y$]. Аксиома треугольника тоже почти очевидна: для $x=\{\xi_i\}$, $y=\{\eta_i\}$ и $z=\{\zeta_i\}$ имеем

$$\rho(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}(|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\zeta_i|+\sum_{i=1}^{\infty}|\zeta_i-\eta_i|=\rho(x, z)+\rho(z, y).$$

Таким образом, l — метрическое пространство.

4. m — метрическое пространство, состоящее из всех ограниченных бесконечных числовых последовательностей с расстоянием, определяемым для $x=\{\xi_i\}$ и $y=\{\eta_i\}$ по формуле

$$\rho(x, y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i|\ ^*).$$

Проверим выполнение аксиомы треугольника. Берем $x=\{\xi_i\}$, $y=\{\eta_i\}$, $z=\{\zeta_i\}$. При любом $i=1, 2, \ldots$

$$|\xi_i-\eta_i|\leqslant|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|\leqslant\sup_i|\xi_i-\zeta_i|+\sup_i|\zeta_i-\eta_i|=$$

$$=\rho(x, z)+\rho(z, y).$$

А тогда, по определению точной верхней границы,

$$\rho(x, y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i|\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y).$$

5. В множестве s всех бесконечных числовых последовательностей (рассмотренном уже в гл. II) определяем расстояние, полагая для $x=\{\xi_i\}$ и $y=\{\eta_i\}$

$$\rho(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}.$$

Сходимость последнего ряда обеспечена, так как его i-й член меньше, чем $\frac{1}{2^i}$. Выполнение первых двух аксиом метрического пространства здесь очевидно. Несколько сложнее, чем в предыдущих примерах, проверяется аксиома треугольника.

Установим предварительно вспомогательное неравенство. Пусть $0\leqslant\alpha\leqslant\beta$. Тогда $\alpha+\alpha\beta\leqslant\beta+\alpha\beta$. Деля обе части

---

*) Так как по условию ξ_i в совокупности ограничены, $|\xi_i|\leqslant K$, и, аналогично, $|\eta_i|\leqslant L$, то $|\xi_i-\eta_i|\leqslant K+L$, т. е. и разности $\xi_i-\eta_i$ в совокупности ограничены. А тогда среди верхних границ множества чисел $|\xi_i-\eta_i|$ существует наименьшая: $\sup|\xi_i-\eta_i|$

на $(1+\alpha)(1+\beta)$, получим

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \leqslant \frac{\beta}{1+\beta}. \tag{2}$$

Теперь при любых $x=\{\xi_i\}$, $y=\{\eta_i\}$, $z=\{\zeta_i\}$ из s для каждого $i=1, 2, \ldots$ $|\xi_i-\eta_i| \leqslant |\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|$, а потому с помощью неравенства (2) имеем

$$\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|} \leqslant \frac{|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|} =$$

$$= \frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|} + \frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|} + \frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}.$$

Умножая крайние члены на 2^{-i} и суммируя по i, получим

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z)+\rho(z, y).$$

Итак, s — метрическое пространство.

Заметим, что во всех рассмотренных примерах можно ограничиваться последовательностями, состоящими только из вещественных чисел, а можно рассматривать и аналогичные комплексные пространства последовательностей, допуская, что их членами могут быть и не вещественные числа.

Рассмотрим еще примеры метрических пространств, составленных из непрерывных функций.

6. C — множество всех непрерывных функций $x(t)$, заданных на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, причем для любых двух элементов $x, y \in C$ расстояние определено по формуле

$$\rho(x, y) = \max |x(t)-y(t)| \text{ *)}.$$

Таким образом, *расстояние в C есть максимальное отклонение одной функции от другой.*

Ясно, что $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x(t) \equiv y(t)$; аксиома симметрии очевидна. Аксиома треугольника для любых трех функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ из C проверяется так:

$$|x(t)-y(t)| \leqslant |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \max|x(t)-z(t)|+\max|z(t)-y(t)| =$$

$$= \rho(x, z)+\rho(z, y).$$

Так как это верно при любом $t \in [a, b]$, то, в частности, то же неравенство получается и для $\rho(x, y) = \max|x(t)-y(t)|$.

*) Из курса математического анализа известно, что функция, непрерывная на отрезке, имеет наибольшее и наименьшее значения (теорема Вейерштрасса).

Таким образом, C — метрическое пространство.

7. Рассмотрим то же множество функций, что и в предыдущем примере, но расстояние определим иначе:

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt.$$

Предоставляем читателю самому убедиться, что все аксиомы метрического пространства выполнены. Таким образом, мы имеем метрическое пространство, составленное из тех же элементов, что и C, но с другим определением расстояния. Так как определение расстояния входит в качестве весьма существенной части в определение метрического пространства, то метрические пространства, хотя и составленные из одних и тех же элементов, но с различными определениями расстояния, следует считать различными. Пространство, определенное в настоящем примере, обозначим C_L.

Если дано какое-нибудь множество, то сама операция определения в этом множестве расстояния между элементами, удовлетворяющего всем аксиомам метрического пространства, называется введением метрики в данном множестве (или его *метризацией*). Можно сказать, что в примерах 6 и 7 мы в одном и том же множестве непрерывных функций ввели метрику двумя способами.

8. В том же множестве непрерывных функций, что и в двух предыдущих примерах, определим метрику еще одним способом, полагая

$$\rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2\, dt}. \tag{3}$$

Из аксиом метрического пространства не очевидно только выполнение аксиомы треугольника. Для ее проверки выведем сначала интегральное неравенство Буняковского*), аналогичное неравенству Коши для сумм, которое было доказано в 1.3.

Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — две функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$. Вводим вспомогательную функцию $\varphi(x)$ от вещественной переменной x:

$$\varphi(x) = \int_a^b [xf(t) + g(t)]^2\, dt =$$

$$= x^2 \int_a^b f^2(t)\, dt + 2x \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt + \int_a^b g^2(t)\, dt.$$

*) В. Я. Буняковский (1804—1889) — выдающийся русский математик

Так как $\varphi(x) \geqslant 0$ при всех x (как интеграл от неотрицательной функции), то дискриминант квадратного трехчлена должен быть неположительным, а потому

$$\left(\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\, dt \int_a^b g^2(t)\, dt. \tag{4}$$

Это и есть *неравенство Буняковского.*

Теперь, аналогично тому, как это сделано в 1.3, извлекая из обеих частей неравенства Буняковского квадратные корни, удваивая эти корни и прибавляя к ним

$$\int_a^b f^2(t)\, dt + \int_a^b g^2(t)\, dt,$$

мы получим

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]^2\, dt \leqslant \left(\sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)\, dt}\right)^2$$

или

$$\sqrt{\int_a^b [f(t)+g(t)]^2\, dt} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)\, dt}. \tag{5}$$

Это — *интегральная форма неравенства треугольника.*

Аксиома треугольника для расстояния, определенного формулой (3), проверяется теперь сразу, если при заданных $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ положить в неравенстве (5)

$$f(t) = x(t) - z(t), \qquad g(t) = z(t) - y(t).$$

Построенное в этом примере метрическое пространство обозначим C_{L^2}.

9. Используя понятие интеграла Лебега *), можно построить еще некоторые функциональные метрические пространства. Именно, зададим число $p \geqslant 1$ и обозначим через L^p множество всех

*) Введенное французским математиком А. Лебегом (1875—1941) понятие интеграла имеет смысл для функций значительно более широкого класса, чем интеграл Римана, т. е. интеграл, изучаемый обычно в общем курсе математического анализа. Подробное изложение теории интеграла Лебега можно найти, например, в книгах: И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной или Б. З. Вулих, Краткий курс теории функций вещественной переменной. В частности, в этих книгах можно найти и некоторые сведения о разбираемых ниже пространствах L^p.

функций $x(t)$, заданных и измеримых на отрезке $[a, b]$ и таких, что

$$\int_a^b |x(t)|^p\, dt < +\infty.$$

Про такие функции говорят, что они *суммируемы с p-й степенью*. При этом условимся отождествлять друг с другом эквивалентные между собой функции, т. е. считать их одним и тем же элементом множества L^p *). Таким образом, каждый элемент множества L^p изображается не одной определенной, а любой функцией из целого класса эквивалентных между собой функций.

Введем метрику в множестве L^p, полагая

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3а)\ **)$$

Чтобы проверить, что введенное таким способом расстояние удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства, следует воспользоваться одним неравенством, которое называется *неравенством Минковского* и которое мы приведем без доказательства ***). Именно, для любых двух измеримых функций $f(t)$ и $g(t)$

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из этого неравенства, в частности, следует, что если функции $x, y \in L^p$, то и их сумма $x + y \in L^p$. Заменяя y на $-y$, мы получим, что и разность $x - y \in L^p$. А тогда расстояние, определенное выше, имеет конечное значение для любых $x, y \in L^p$. Заметим, что неравенство Минковского при $p = 2$ превращается в то неравенство (5), которое уже встречалось выше.

Если $\rho(x, y) = 0$, то из свойств интеграла вытекает, что $x(t) = y(t)$ почти всюду, т. е. x и y равны, как элементы множества L^p. Выполнение аксиомы симметрии очевидно. Наконец, аксиома треугольника — простое следствие из неравенства Минковского и получается из него, если положить, как мы только что делали в пространстве C_{L^2},

$$f(t) = x(t) - z(t), \quad g(t) = z(t) - y(t).$$

---

*) Напомним, что две функции $x(t)$ и $y(t)$ называются *эквивалентными*, если $x(t) = y(t)$ почти всюду, т. е. если множество тех точек, где $x(t) \neq y(t)$, имеет меру 0.

**) Формула (3а) очевидным образом обобщает формулу (3).

***) Г. Минковский (1864—1909) — немецкий математик и физик. Доказательство неравенства Минковского см., например, в только что цитированной книге автора, стр. 260—261.

Таким образом, L^p при $p \geqslant 1$ — метрические пространства.

Наиболее простым среди пространств L^p является то, которое получается при $p = 1$, т. е. пространство всех функций, суммируемых на отрезке $[a, b]$. Его обозначают просто L. В этом пространстве неравенство Минковского тривиально, а расстояние определяется по той же формуле, что и в пространстве C_L. Тем самым, C_L можно рассматривать как подмножество в L *). Аналогично, пространство C_{L^2} можно рассматривать как подмножество в L_2 **).

Как мы увидим ниже, среди всех L^p наиболее широкие применения находит пространство L^2, и потому этим пространством мы займемся подробно ниже (в гл. VII). В частности, там будет более простым способом доказано, что сумма двух функций из L^2 тоже принадлежит L^2.

Можно доказать (ср. 9.3), что с возрастанием индекса p пространство L^p по своему составу убывает, т. е. что $L^p \supset L^q$, если $q > p$. Таким образом, самым обширным среди L^p по составу элементов является пространство L, все прочие — его подмножества.

Неравенство Минковского перестает выполняться, если $p < 1$. Поэтому пространства L^p с метрикой, вводимой по формуле (3а), рассматриваются только при $p \geqslant 1$.

10. По аналогии с пространством L^p можно рассмотреть пространство l^p $(p \geqslant 1)$, состоящее из всех бесконечных последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots)$, для которых справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty.$$

В пространстве l^p расстояние определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{здесь } x = \{\xi_i\},\ y = \{\eta_i\}).$$

Частным случаем таких пространств являются рассмотренные выше l и l^2. При проверке неравенства треугольника в l^p

*) Следует заметить, что если две непрерывные функции отличаются друг от друга хотя бы в одной точке, то они отличаются и в некоторой окрестности этой точки, а потому не эквивалентны. Таким образом, две непрерывные функции совпадают как элементы пространства L только в том случае, если они тождественно равны друг другу.

**) Можно по аналогии с C_{L^2} определить и пространство C_{L^p} $(p > 1)$, составив его только из непрерывных функций и введя в нем метрику из пространства L^p.

используется неравенство Минковского для последовательностей:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i+\beta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Понятие метрического пространства введено в науку в начале XX столетия современным французским математиком М. Фреше.

3.3. Сходимость в метрическом пространстве

Наличие расстояния позволяет определить в метрическом пространстве понятие предела.

О п р е д е л е н и е. Точка x метрического пространства E называется *пределом* бесконечной последовательности точек $x_n \in E$ (пишем $x_n \to x$ или $x = \lim x_n$), если $\rho(x_n, x) \to 0$.

Определенную таким образом сходимость последовательности точек будем иногда называть *сходимостью по расстоянию* (или *по метрике* пространства E).

Докажем, что *у данной последовательности точек может существовать только один предел*. Пусть $x_n \to x$ и $x_n \to y$. По аксиоме треугольника $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y)$. Но правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, а левая неотрицательна, следовательно, $\rho(x, y) = 0$ и $x = y$.

Установим еще одно неравенство, верное для любых четырех точек x, y, z, u из E:

$$|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u). \tag{6}$$

Действительно, из аксиомы треугольника следует, что

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, u) + \rho(u, y),$$

откуда

$$\rho(x, y) - \rho(z, u) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u). \tag{7}$$

Но в этом неравенстве x и y можно поменять местами с z и u (соответственно), и потому

$$\rho(z, u) - \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u). \tag{8}$$

Так как для любого числа a имеет место или $|a| = a$ или $|a| = -a$, то из неравенств (7) и (8) и вытекает (6).

В качестве следствия из неравенства (6) сразу можно получить, что расстояние $\rho(x, y)$ — *непрерывная функция* от x и y в том смысле, что если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

Действительно с помощью (6) имеем

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0.$$

Заметим также, что если $x_n \to x$, то и любая частичная последовательность точек x_{n_k} $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots)$, выделенная из $\{x_n\}$, тоже сходится к x. Это очевидно, так как из $\rho(x_n, x) \to 0$ следует, что и $\rho(x_{n_k}, x) \to 0$.

Если $x_n = x$ при всех n, то и $\lim x_n = x$.

Выясним конкретный смысл сходимости в тех метрических пространствах, которые приведены в качестве примеров в предыдущем параграфе.

В пространствах R_n и l^2 определение сходимости по расстоянию совпадает с тем, которое уже давалось в гл. I и II. Там же было выяснено, что сходимость в R_n есть сходимость по координатам, а сходимость в l^2 влечет сходимость по координатам, но не равносильна ей. Последнее справедливо и для пространства l, причем установить, что в l сходимость по координатам не влечет сходимости по расстоянию, можно с помощью того же примера, который рассмотрен с этой же целью в l^2 (см. 2.4). В пространстве R_1 сходимость по расстоянию есть обычная сходимость числовой последовательности к пределу.

Обратимся к пространству m. Пусть $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$, $x = \{\xi_i\}$. Тогда сходимость $x_n \to x$ означает, что

$$\sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

т. е. каково бы ни было $\varepsilon > 0$, неравенство $|\xi_i^{(n)}| - \xi_i| < \varepsilon$ выполнено, начиная с некоторого n, при всех $i = 1, 2, \ldots$. В этом случае говорят, что $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$ *равномерно* относительно i. Итак, сходимость в m означает равномерную сходимость по координатам.

В связи с тем, что и в l^2, и в l, и в m сходимость по расстоянию содержит в себе более сильные требования, чем сходимость по координатам, особый интерес представляет метрика пространства s. Именно, мы покажем, что в s *сходимость по расстоянию совпадает со сходимостью по координатам.*

Предварительно отметим следующее вспомогательное предложение: если $\beta_n = \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n} \to 0$ $(\alpha_n \geqslant 0)$, то и $\alpha_n \to 0$. Это сразу вытекает из соотношения $\alpha_n = \frac{\beta_n}{1-\beta_n}$.

Пусть $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$, $x = \{\xi_i\}$ суть точки из s и $x_n \to x$. Из определения расстояния в s сразу следует, что

$$\frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

при каждом i. На основании отмеченного выше вспомогательного

предложения отсюда вытекает, что $|\xi_i^{(n)} - \xi_i| \to 0$, т. е. $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$ при каждом i. Следовательно, сходимость по расстоянию в s влечет сходимость по координатам.

Обратно, пусть $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$ при каждом i. Зададим число $\varepsilon > 0$ и подберем p так, что $\sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, для конечного числа индексов $i = 1, 2, \ldots, p$ подбираем общий номер N так, что

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant N, \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Тогда, при $n \geqslant N$, имеем

$$\rho(x_n, x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} + \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ *)} = \varepsilon,$$

значит, $x_n \to x$. Таким образом, и сходимость по координатам влечет в s сходимость по расстоянию, следовательно, эти две сходимости в s совпадают.

В C сходимость по расстоянию равносильна равномерной сходимости функций, т. е. $x_n \to x$ в C означает, что

$$\max |x_n(t) - x(t)| \to 0.$$

Сходимость в C_L и C_{L^2} накладывает значительно менее тяжелые требования на функции; последовательность функций может даже не сходиться ни в одной точке. Мы ограничимся более простым примером, именно построим последовательность непрерывных функций $x_n(t)$ на отрезке $[0, 1]$, сходящуюся по расстоянию к $x(t) \equiv 1$ и в C_L и в C_{L^2}, но не стремящуюся к единице при $t = 0$. Для этого положим (рис. 4)

$$x_n(t) = \begin{cases} nt & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{при} \quad \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

*) Напоминаем, что $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$.

Тогда, например, в метрике пространства C_L, при $x(t) \equiv 1$.

$$\rho(x_n, x) = \int_0^1 [x(t) - x_n(t)]\, dt = \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nt)\, dt =$$

$$= \left(t - \frac{nt^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n} \to 0.$$

Аналогично подсчитывается, что и в метрике пространства C_{L^2} $\rho(x_n, x) = \frac{1}{\sqrt{3n}} \to 0$. В то же время $x_n(0) = 0$ при всех n.

Определение расстояния в C_L и C_{L^2} связано с часто используемыми в приближенных вычислениях мерами отклонения одной функции от другой. Именно, для функций $f(t)$ и $g(t)$, заданных на отрезке $[a, b]$, следующие величины называются *средними отклонениями* одной функции от другой: среднее отклонение 1-го порядка

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt,$$

среднее квадратическое отклонение

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(t) - g(t)]^2\, dt}.$$

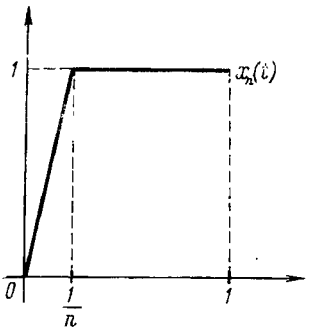

Рис. 4.

Сходимость по расстоянию в C_L и C_{L^2} равносильна стремлению к нулю последовательности соответствующих средних отклонений. В связи с этим сходимость по расстоянию в C_L и C_{L^2} называется *сходимостью в среднем* 1-го или 2-го порядка (соответственно).

Для любых двух непрерывных функций $f(t)$ и $g(t)$ их средние отклонения друг от друга не превосходят величины максимального отклонения $f(t)$ от $g(t)$, т. е. $\max |f(t) - g(t)|$.

Действительно, если $M = \max |f(t) - g(t)|$, то

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{b-a} M(b-a) = M,$$

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(t) - g(t)]^2\, dt} \leqslant \sqrt{\frac{1}{b-a} M^2 (b-a)} = M.$$

Поэтому, *если последовательность непрерывных функций сходится к пределу по расстоянию в* C, *то она сходится к тому же пределу и в* C_L *и в* C_{L^2}. Обратное неверно.

В пространстве L^p сходимость по расстоянию называется *сходимостью в среднем p-го порядка.* В теории интеграла доказывается, что если последовательность функций сходится к некоторой предельной функции в среднем того или иного порядка, то предельная функция не единственна, а определяется лишь с точностью до значений на множестве меры 0. Таким образом, если задана последовательность функций из L^p и функция $x(t)$ (из L^p) — одна из предельных функций, то и любая ей эквивалентная — тоже предельная для данной последовательности (в смысле метрики того же пространства L^p). Это нисколько не противоречит единственности предела в метрическом пространстве. Ведь все эквивалентные между собой функции — это один и тот же элемент пространства L^p.

3.4. Замкнутые и открытые множества

Введем некоторые определения, важные в теории метрических пространств. Перенесем сначала из трехмерного эвклидова пространства в произвольное метрическое пространство E понятие шара. Для этого заметим, что шар состоит из всех точек, расстояние которых от его центра не превосходит радиуса (или меньше радиуса, если речь идет только о внутренних точках шара).

Определение. *Открытым шаром* с центром $a \in E$ и радиусом $r > 0$ называется множество $S(a, r)$ всех точек $x \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, a) < r$. Аналогично *замкнутым шаром* $S^*(a, r)$ $(r > 0)$ называется множество всех точек $x \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, a) \leqslant r$.

В R_1, т. е. на числовой прямой, открытый шар будет интервалом $(a - r,\ a + r)$, а замкнутый — отрезком $[a - r,\ a + r]$.

В C шар $S(y, r)$ состоит из всех функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $|x(t) - y(t)| < r$ на всем отрезке $[a, b]$, т. е. графики которых умещаются в полоске, показанной на рис. 5.

Понятие шара позволяет дать следующую характеристику предела сходящейся последовательности точек: *для того чтобы* $x = \lim x_n$, *необходимо и достаточно, чтобы, каков бы ни был шар* S (открытый или замкнутый) *с центром в точке* x, *существовало такое* N, *что* $x_n \in S$ *при* $n \geqslant N$.

Определение. Множество F, содержащееся в E $(F \subset E)$, называется *замкнутым*, если, какова бы ни была сходящаяся к пределу последовательность точек $x_n \in F$, ее предел тоже входит в F.

Из определения следует, что всё E замкнуто; пустое множество тоже считается замкнутым, так как из него вообще нельзя выделить никакой последовательности точек. Конечное множество $F = \{y_1, \ldots, y_k\}$ *) замкнуто, так как если последовательность $\{x_n\}$ состоит из точек этого множества, то по крайней мере одна из точек, пусть это будет y_i, повторяется среди x_n бесконечное множество раз, а тогда и предел (если он существует) должен совпасть с y_i. (Читатель легко сообразит, что в таком случае, начиная с некоторого n, все $x_n = y_i$.)

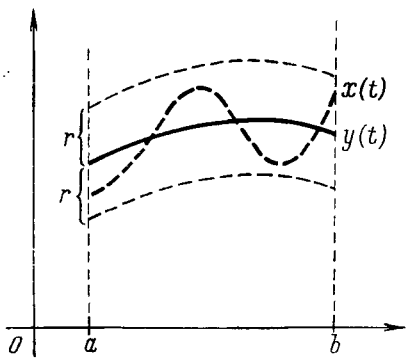

Рис. 5.

Примерами замкнутых множеств в R_1 могут также служить любой отрезок $a \leqslant x \leqslant b$, множества всех чисел $x \geqslant a$ или всех чисел $x \leqslant b$.

Покажем, что в любом метрическом пространстве замкнутый шар $S^*(a, r)$ всегда представляет замкнутое множество. Действительно, пусть $x_n \in S^*(a, r)$; тогда $\rho(x_n, a) \leqslant r$. Если при этом $x_n \to x$, то по непрерывности расстояния

$$\rho(x, a) = \lim \rho(x_n, a) \leqslant r,$$

следовательно, и $x \in S^*(a, r)$.

С понятием замкнутого множества тесно связано понятие предельной точки. Именно, пусть A — произвольное множество точек из E; точка $x \in E$ называется *предельной точкой* множества A, если существует такая последовательность точек $x_n \in A$, среди которых имеется бесконечное множество различных, что $x = \lim x_n$. Например, в R_1 точка $x = 0$ является предельной для интервала $0 < x < 1$, так как можно положить хотя бы $x_n = \frac{1}{2n}$, и тогда $0 < x_n < 1$ и $x_n \to 0$. Вообще предельными точками интервала $a < x < b$ являются все его точки и два конца $x = a$ и $x = b$.

Ясно, что замкнутое множество содержит все свои предельные точки. Однако в определении замкнутого множества мы говорили о любых сходящихся последовательностях, в которых допускаются какие угодно повторения точек. Предлагаем читателю проверить, что получится равносильное определение, если замкнутым назвать множество, содержащее все свои предельные точки.

*) Эта запись означает, что множество F состоит из точек $y_1, \ldots, y_k$.

В следующих двух теоремах устанавливаются основные свойства замкнутых множеств. При этом рассматриваются множества, содержащиеся в одном и том же метрическом пространстве E.

Теорема 3.4.1. *Сумма конечного числа замкнутых множеств также — замкнутое множество.*

Доказательство. Так как сумму любого конечного числа множеств можно образовать последовательным прибавлением по одному множеству, то достаточно доказать теорему для суммы двух множеств.

Пусть F_1 и F_2 — замкнутые множества, $F = F_1 \cup F_2$, $x_n \in F$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $x_n \to x$. В последовательности $\{x_n\}$ существует бесконечная частичная последовательность $\{x_{n_k}\}$, состоящая целиком из точек одного из данных множеств, например $x_{n_k} \in F_1$. Но x_{n_k} тоже стремится к x, и так как F_1 замкнуто, то $x \in F_1$, а потому $x \in F$.

Теорема 3.4.2. *Пересечение любого множества замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. Пусть $F = \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$ и все F_α замкнуты. Если $x_n \to x$ и $x_n \in F$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то все $x_n \in F_\alpha$ при любом α, а потому и $x \in F_\alpha$ при любом α. Следовательно, $x \in F$, и F замкнуто.

В дальнейшем важную роль будет играть операция замыкания произвольного множества $A \subset E$, заключающаяся в присоединении к множеству A пределов всех сходящихся последовательностей его точек. Получаемое таким способом множество обозначается $[A]$ и называется *замыканием* множества A *).

Таким образом, всегда $A \subset [A]$. Из определения замыкания сразу следует, что множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $A = [A]$.

В R_1 замыканием интервала (a, b) будет отрезок $[a, b]$. Однако в произвольном метрическом пространстве для замыкания открытого шара имеет место лишь включение $[S(a, r)] \subset S^*(a, r)$, но равенство не обязательно.

Лемма 3.4.1. *Всякая точка $x \in [A]$ представима в виде $x = \lim x_n$, где $x_n \in A$.*

Доказательство. Если $x \in A$, то можно положить $x_n = x$ при всех n. Если же $x \overline{\in} A$, то, по определению, включение $x \in [A]$ означает, что $x = \lim x_n$, где $x_n \in A$.

Лемма 3.4.2. *Для того чтобы $x \in [A]$, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существовала такая точка $x' \in A$, что $\rho(x', x) < \varepsilon$.*

*) Определение замыкания получится равносильное, если говорить о присоединении всех предельных точек множества A.

Доказательство. Необходимость условия доказана в предыдущей лемме. Если, наоборот, условие выполнено, то при каждом n существует такая точка $x_n \in A$, что $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$; тогда $x = \lim x_n$ и $x \in [A]$.

Теорема 3.4.3. *Замыкание любого множества замкнуто.*

Доказательство. Пусть $x_n \in [A]$ и $x_n \to x$. Согласно лемме 3.4.2 для каждого n можно подобрать $y_n \in A$ так, что $\rho(y_n, x_n) < \frac{1}{n}$. Тогда

$$\rho(y_n, x) \leqslant \rho(y_n, x_n) + \rho(x_n, x) < \frac{1}{n} + \rho(x_n, x) \to 0.$$

Следовательно, $y_n \to x$. Таким образом, $x \in [A]$ и $[A]$ замкнуто.

Теорема 3.4.4. *Замыкание $[A]$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A.*

Доказательство. Всякое замкнутое множество F, содержащее A, должно содержать и пределы всех сходящихся последовательностей точек из A. Следовательно, $[A] \subset F$. Но так как само $[A]$ замкнуто, то оно и есть наименьшее из всех замкнутых $F \supset A$.

Определение. Пусть A — произвольное множество точек из E. Точка $x \in A$ называется *внутренней точкой* множества A, если при некотором $\varepsilon > 0$ шар $S(x, \varepsilon) \subset A$. Множество $G \subset E$, все точки которого — внутренние, называется *открытым*.

Всё E — открытое множество; пустое множество также причисляется к открытым. В R_1 примерами открытого множества могут служить любой интервал $a < x < b$, множества, определяемые неравенствами $x > a$ или $x < b$.

Покажем, что в любом метрическом пространстве всякий открытый шар $S(a, r)$ — открытое множество. Действительно, пусть $x \in S(a, r)$. Это значит, что $\rho(x, a) < r$. Положим $\varepsilon = r - \rho(x, a)$. Если $y \in S(x, \varepsilon)$, т. е. если $\rho(y, x) < \varepsilon$, то $\rho(y, a) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, a) < r$, откуда $y \in S(a, r)$. Таким образом, весь шар $S(x, \varepsilon) \subset S(a, r)$, т. е. x — внутренняя точка множества $S(a, r)$.

Связь между открытыми и замкнутыми множествами устанавливается следующей важной теоремой:

Теорема 3.4.5. *Для того чтобы множество $G \subset E$ было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $F = E \setminus G$ было замкнутым.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть G открыто, а $x_n \in F$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $x_n \to x$. Если бы $x \in G$, то и некоторый шар $S(x, \varepsilon)$ входил бы в G и не содержал точек из F, что невозможно для предела последовательности точек $x_n \in F$. Следовательно, $x \in F$ и F замкнуто.

б) Достаточность. Пусть F замкнуто, а $x \in G$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, при котором шар $S(x, \varepsilon)$ не содержит ни одной точки множества F. В противном случае, по лемме 3.4.2, x входила бы в $[F]$, а так как $[F]=F$, то x входила бы и в F. Таким образом, весь шар $S(x, \varepsilon) \subset G$, x—внутренняя точка множества G и G—открыто.

Теорема 3.4.6. *Сумма любого множества открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств — также открытые множества.*

Доказательство. Пусть $G = \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ и все G_α открыты. Тогда $F_\alpha = \boldsymbol{E} \setminus G_\alpha$ замкнуты, а по свойству дополнений [см. формулу (1)] $\boldsymbol{E} \setminus G = \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$. Следовательно, по теореме 3.4.2, $\boldsymbol{E} \setminus G$ замкнуто, а по теореме 3.4.5 G открыто.

Аналогично, пусть $G = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ и G_i открыты. Тогда $F_i = E \setminus G_i$ замкнуты и $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ тоже замкнуто по теореме 3.4.1. Но $G = \boldsymbol{E} \setminus F$ по свойству дополнений, следовательно, G открыто.

3.5. Полные метрические пространства

В математическом анализе весьма важную роль играет то, что в совокупности вещественных чисел признак сходимости Больцано — Коши является не только необходимым, но и достаточным (это — так называемое свойство полноты множества вещественных чисел). В 2.4 мы видели, что этот признак в полном объеме верен и в эвклидовых пространствах $\boldsymbol{l}^2$ и $\boldsymbol{R}_n$. Однако в произвольном метрическом пространстве признак Больцано — Коши может оказаться неприменимым в части достаточности. Например, если в множестве всех рациональных чисел определить расстояние, по той же формуле, что и в $\boldsymbol{R}_1$, т. е. положить $\rho(x, y) = |x - y|$, то получится метрическое пространство. Но последовательность, составленная из рациональных чисел, может и не иметь в этом пространстве предела и, в то же время, удовлетворять условию Больцано — Коши; так будет в том случае, если пределом этой последовательности в $\boldsymbol{R}_1$ является иррациональное число. В настоящем параграфе мы выделим класс пространств, в которых признак Больцано — Коши остается в силе.

Определение. Последовательность точек x_n метрического пространства $\boldsymbol{E}$ называется *фундаментальной* (или *сходящейся в себе*), если $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Следующая теорема устанавливает, что в части необходимости признак Больцано — Коши действует в любом метрическом пространстве.

Теорема 3.5.1. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *сходится к пределу, то она фундаментальна.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x$. Тогда

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} 0.$$

Определение. Множество точек метрического пространства называется *ограниченным по расстоянию* (говорят и просто — ограниченным), если оно содержится в каком-нибудь шаре.

Для числовых множеств (т. е. множеств в R_1) это определение ограниченности совпадает с обычным.

Теорема 3.5.2. *Всякая фундаментальная последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N так, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m \geqslant N$. В частности, $\rho(x_n, x_N) < \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Теперь положим

$$r = \max[\varepsilon, \rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N), \ldots, \rho(x_{N-1}, x_N)].$$

Тогда уже при всех $n = 1, 2, \ldots$ $\rho(x_n, x_N) \leqslant r$, т. е. все $x_n \in S^*(x_N, r)$.

Заменяя r на $r' > r$, можно все x_n заключить и в открытый шар $S(x_N, r')$.

Дадим основное в теории метрических пространств определение.

Определение. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность имеет предел.

Большинство пространств, приведенных в качестве примеров в 3.2, полны. Относительно l^2, а также и R_n, мы уже знаем это из гл. II. Полнота l доказывается совершенно так же, как полнота l^2 (см. 2.4), если вместо нормы разности векторов писать расстояние между точками и учесть, что если l рассматривать как подмножество множества s, то сумма двух векторов из l также входит в l.

Проверим полноту C. Пусть $x_n(t)$ — функции из C и $\rho(x_n, x_m) \to 0$. Так как $\rho(x_n, x_m) = \max |x_n(t) - x_m(t)|$, то при каждом t последовательность значений $\{x_n(t)\}$ — фундаментальная. Следовательно, существует $x(t) = \lim x_n(t)$.

Теперь, по заданному $\varepsilon > 0$ находим N так, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m \geqslant N$, т. е.

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \qquad \text{при всех } t \text{ и при } n, m \geqslant N.$$

Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$, получим

$$|x_n(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{при всех } t \text{ и } n \geqslant N,$$

т. е. сходимость $x_n(t)$ к $x(t)$ — равномерная. А тогда $x(t)$ — непрерывная функция *), т. е. принадлежит C, и $\rho(x_n, x) \to 0$.

По аналогичной схеме доказывается полнота m. Еще проще доказывается полнота s. Если $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ образуют фундаментальную последовательность, то и координаты $\xi_i^{(n)}$ при каждом i образуют фундаментальную последовательность и, следовательно, существуют $\xi_i = \lim \xi_i^{(n)}$. Положим $x = \{\xi_i\}$. Это — элемент из s. А так как в s сходимость по расстоянию совпадает со сходимостью по координатам, то $\rho(x_n, x) \to 0$.

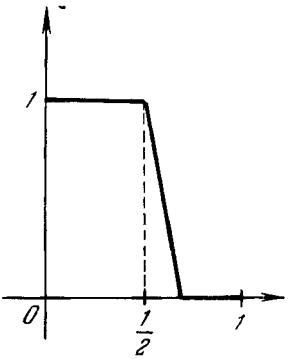

Рис. 6

Упомянем без доказательства, что пространства L^p и l^p при любом $p \geqslant 1$ полны**). В терминах сходимости в среднем это значит, что если последовательность функций $x_n(t)$ из L^p сходится в себе в среднем p-го порядка, т. е. если

$$\int_a^b |x_n(t) - x_m(t)|^p \, dt \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty,$$

то существует функция из L^p, к которой данная последовательность сходится (тоже в среднем p-го порядка).

Пространства C_L и C_{L^2} не полны. Приведем пример фундаментальной последовательности из C_L, не имеющей, однако, в C_L предела. Беря для простоты в качестве $[a, b]$ отрезок $[0, 1]$, рассмотрим функции (рис. 6)

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ n + 1 - 2nt & \text{при} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{при} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что в пространстве L эта последовательность сходится к функции

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \frac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

*) Известно, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций — непрерывная функция. См., например, Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, т. II, стр. 77.

**) По поводу полноты L^p см., например, Б. З. Вулих, Краткий курс теории функций вещественной переменной стр. 262. Полнота l^p доказывается по той же схеме, что и полнота l^2.

Действительно,

$$\rho(x_n, x) = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|\, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} x_n(t)\, dt;$$

так как $0 \leqslant x_n(t) \leqslant 1$, то $\rho(x_n, x) \leqslant \frac{1}{2n}$ и потому $x_n \to x$. Отсюда уже следует, что последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная *). Если бы она имела предел в пространстве C_L, то предельная функция должна была бы быть эквивалентной с $x(t)$, поскольку предел в L — единственный. Однако непрерывной функции, эквивалентной $x(t)$, не существует **). Поэтому последовательность $\{x_n\}$ предела в C_L не имеет.

Эта же последовательность $\{x_n\}$ оказывается фундаментальной и в пространстве C_{L^2}, но и в нем не имеет предела, что подтверждает неполноту C_{L^2}.

В математическом анализе часто используется теорема о последовательности вложенных друг в друга отрезков, доказательство которой опирается на полноту множества вещественных чисел. Покажем, как эта теорема переносится в любые полные метрические пространства.

Теорема 3.5.3. *Пусть $\{S_n\}$ — последовательность замкнутых шаров из полного метрического пространства E, причем $S_{n+1} \subset S_n$ при любом n, а радиус шара S_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Тогда шары S_n имеют непустое пересечение, состоящее из одной точки.*

Доказательство. Пусть $S_n = S^*(x_n, r_n)$ (x_n — центр, r_n — радиус шара). По условию, $r_n \to 0$. Далее, $x_m \in S_m \subset S_n$ при $m > n$, следовательно, $\rho(x_m, x_n) \leqslant r_n$, а потому последовательность центров x_n — фундаментальная. Вследствие полноты в E существует $x = \lim x_n$. Так как при любом n и при $m > n$ будет $x_m \in S_n$, то, вследствие замкнутости S_n, $x \in S_n$. Таким образом, x — общая точка всех шаров S_n.

Пусть точка y также входит во все шары S_n. Тогда при любом n:

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \leqslant 2r_n$$

---

*) Так как $x_n \to x$ в L, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в L. Но $\rho(x_n, x_m)$ имеет одно и то же значение и в L и в C_L, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и в C_L.

**) Если бы такая непрерывная функция существовала, она должна была бы принимать значение 1 на промежутке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и значение 0 на промежутке $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$, но это противоречит непрерывности.

и так как $r_n \to 0$, то $\rho(x, y) = 0$, т. е. $x = y$. Таким образом, пересечение $\bigcap_n S_n$ состоит только из одной точки x.

Всякое подмножество E_1 метрического пространства $\boldsymbol{E}$ может рассматриваться и как самостоятельное метрическое пространство, если для любых двух точек из E_1 сохранить то определение расстояния, которое было введено в $\boldsymbol{E}$. В связи с этим отметим одну полезную для дальнейшего теорему.

Т е о р е м а 3.5.4. *Всякое замкнутое подмножество F полного метрического пространства $\boldsymbol{E}$ само является полным метрическим пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_n \in F$ и образуют фундаментальную последовательность. Так как $\boldsymbol{E}$ полно, то в $\boldsymbol{E}$ существует $x = \lim x_n$. Но, вследствие замкнутости F, $x \in F$. Следовательно, всякая фундаментальная последовательность точек из F сходится в F к пределу, что и означает полноту F.

В дальнейшем, когда какое-нибудь подмножество E_1 метрического пространства $\boldsymbol{E}$ рассматривается как пространство, то без специальных оговорок всегда будем считать, что определение расстояния в E_1 индуцировано (т. е. перенесено) из $\boldsymbol{E}$.

3.6. Счетные множества

Этот параграф посвящается еще одному из вопросов общей теории множеств. Если какое-нибудь множество состоит из конечного числа элементов (пусть их будет p), то мы всегда можем перенумеровать различными способами эти элементы, используя в качестве номеров натуральные числа 1, 2, . . ., p. Однако перенумеровать все элементы какого-нибудь бесконечного множества, даже с использованием в качестве номеров всевозможных чисел натурального ряда, уже не всегда возможно. Не приводя доказательства, отметим, например, что нельзя перенумеровать в с е вещественные числа. При этом заметим, что если бы речь шла о перенумеровании всех вещественных чисел, например, в порядке их возрастания, то невозможность этого была бы совершенно очевидна, так как в совокупности всех вещественных чисел нет наименьшего, которое мы должны были бы считать первым. Мы же утверждаем нечто более сильное, а именно, что вещественные числа нельзя перенумеровать, каким бы сложным способом мы ни попытались это сделать.

Если же элементы бесконечного множества могут быть перенумерованы с помощью всех натуральных чисел, т. е. могут быть расположены в виде некоторой бесконечной последовательности x_1, x_2, . . ., x_n, . . ., то такое множество называется *счетным*. Среди

различных бесконечных множеств счетные оказываются во многих отношениях наиболее простыми.

Приведем некоторые примеры счетных множеств.

1. Натуральный ряд чисел. Натуральные числа можно перенумеровать, например в порядке возрастания: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ..., $x_n = n$, ... Тогда номер каждого числа совпадает с его величиной.

2. Множество всех четных чисел. Четные числа тоже можно перенумеровать в порядке возрастания: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, ..., $x_n = 2n$, ...

3. Множество всех корней функции $\sin x$. Как известно, корни уравнения $\sin x = 0$ имеют вид $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Их не удается перенумеровать ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания, но можно это сделать, например, так:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \pi, \quad x_3 = -\pi, \quad x_4 = 2\pi,$$
$$x_5 = -2\pi, \quad \ldots, \quad x_{2n} = n\pi, \quad x_{2n+1} = -n\pi, \quad \ldots$$

Заметим, что таким же способом нумерации:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = -2, \quad \ldots$$

доказывается счетность множества всех целых чисел.

Установим некоторые свойства счетных множеств.

Теорема 3.6.1. *Из всякого бесконечного множества можно выделить счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть A — бесконечное множество. Возьмем любой его элемент и назовем его a_1. Кроме a_1, в A имеется еще бесконечное множество элементов. Возьмем любой из них и назовем его a_2. Кроме a_1 и a_2, в A опять имеется еще бесконечное множество элементов. Любой из них назовем a_3. Этот процесс можно продолжить до бесконечности. В результате из A будет выделено счетное подмножество элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Теорема 3.6.2. *Всякое бесконечное подмножество счетного множества тоже счетно.*

Доказательство. Пусть множество A счетно, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — его элементы, а B — бесконечное подмножество множества A. Располагая в порядке возрастания номеров все элементы, из которых состоит подмножество B,

$$x_{n_1}, \ x_{n_2}, \ \ldots, \ x_{n_k}, \ \ldots \qquad (n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots),$$

мы можем перенумеровать их заново всеми натуральными числами, взятыми по порядку. Следовательно, B счетно.

Теорема 3.6.3. *Сумма конечного числа счетных множеств — тоже счетное множество.*

Доказательство. Пусть множества $A_1, A_2, \ldots, A_p$ счетны, $A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$. Выпишем элементы данных множеств A_i в виде следующей таблицы:

$$\left.\begin{array}{ll} (A_1) & a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots \\ (A_2) & a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (A_p) & a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{pn}, \ldots \end{array}\right\}. \tag{9}$$

Здесь в обозначении элементов a_{in} первый индекс — номер множества A_i, из которого взят этот элемент, а второй — номер этого элемента внутри множества A_i. Теперь перенумеруем заново все элементы таблицы (9), располагая их, например, в виде последовательности

$$a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{p1}, a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{p2}, \ldots, a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{pn}, \ldots \tag{10}$$

Иными словами, сначала мы занумеруем все элементы первого столбца таблицы (9), следующими натуральными числами занумеруем элементы второго столбца и продолжаем далее в том же порядке. Если множества A_i содержат некоторые общие элементы, то один и тот же элемент может повториться в последовательности (10) несколько раз. Однако мы нумеруем его, естественно, только один раз, например тогда, когда этот элемент впервые встретится в последовательности (10); при последующих же встречах с этим элементом мы просто пропускаем его. Таким образом, все элементы множества A могут быть перенумерованы, т. е. A — счетно.

Обратим внимание читателя, что, доказывая счетность множества A, мы должны были найти такой «путь» для перенумерования элементов таблицы (9), двигаясь по которому, мы можем ручаться, что до любого элемента таблицы мы дойдем после конечного числа шагов. Это и гарантирует, что к а ж д ы й элемент получит номер. Поэтому нельзя было нумеровать элементы таблицы (9), например, по строкам, так как уже первая строка содержит бесконечное множество элементов и за конечное число шагов мы никогда не доберемся до элементов второй строки; все номера будут использованы на одну первую строку.

Теорема 3.6.4. *Сумма счетного множества счетных множеств — тоже счетное множество.*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ и каждое множество A_i — счетное. Возможность занумеровать сами множества A_i и означает, что множество этих множеств — тоже счетное. Докажем, что и A счетно.

Выпишем элементы множеств A_i в виде таблицы, которая отличается от (9) тем, что в ней бесконечное множество строк:

$$\left.\begin{array}{ll} (A_1) & a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n},\ \ldots \\ (A_2) & a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n},\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (A_i) & a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{in},\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Элементы таблицы (11) можно перенумеровать, но уже не по столбцам, так как каждый столбец содержит бесконечное множество элементов, а, например, по диагоналям, т. е. в таком порядке: a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, . . . Повторяющиеся элементы нумеруем по одному разу, так же, как и при перенумеровании элементов таблицы (9). Таким образом, множество A счетно.

Ясно, что если из таблицы (9) или (11) некоторые элементы вычеркнуть, например оставить в некоторых строках лишь конечное число элементов, то это не помешает перенумеровать остальные элементы в том же порядке, как это сделано выше. Поэтому теоремы 3.6.3 и 3.6.4 остаются верными и в том случае, когда некоторые из складываемых множеств (но не все) конечны. Если же они все конечны, то сумма может быть или конечной или счетной. Объединяя все эти замечания с теоремами 3.6.3 и 3.6.4, мы можем сформулировать следующий общий результат:

Т е о р е м а 3.6.5. *Сумма конечного или счетного множества множеств, каждое из которых конечно или счетно, есть конечное или счетное множество.*

Важную роль в функциональном анализе играет следующая теорема:

Т е о р е м а 3.6.6. *Множество всех рациональных чисел счетно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждое рациональное число, отличное от нуля, можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где n — натуральное, а m — целое, положительное или отрицательное *). При заданном n множество всех дробей $\frac{m}{n}$ (m — целое) — счетно (см. замечание к примеру 3). Тогда и множество A_n несократимых дробей вида $\frac{m}{n}$ также счетно по теореме 3.6.2 **).

*) Целые числа $m \neq 0$ для единообразия представляются в виде дробей $\frac{m}{1}$.

**) Несократимых дробей с заданным знаменателем — бесконечное множество.

По теореме 3.6.4 множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ счетно. Но множество D всех рациональных чисел получится сложением A с множеством, состоящим из одного числа нуль. По теореме 3.6.5 и D — счетно.

Из теорем 3.6.2 и 3.6.6 следует, что *множество всех рациональных чисел, содержащихся в любом заданном промежутке на числовой оси* ($[a, b]$ или (a, b) при $a < b$) *также счетно.*

Заметим, что рациональные числа, находящиеся в каком-нибудь промежутке, конечно, нельзя перенумеровать в порядке возрастания. Это следует хотя бы из того, что за любым рациональным числом нет ближайшего большего. Способ нумерации может быть найден из доказательств самой теоремы 3.6.6 и предыдущих, на которые опирается эта теорема.

Т е о р е м а 3.6.7. *Пусть элементы множества A характеризуются конечным числом параметров, каждый из которых независимо от остальных может принимать значения из некоторой счетной совокупности. Тогда множество A счетно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем элементы множества A в виде $a_{p_1}, \ldots, p_k$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — параметры *). Пусть все возможные значения каждого параметра p_i перенумерованы: $p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in}, \ldots$ Будем вести доказательство индукцией по k, т. е. по числу параметров.

Если $k = 1$, то элементы множества A могут быть перенумерованы в порядке значений единственного имеющегося параметра p_1:

$$x_1 = a_{p_{11}}, \quad x_2 = a_{p_{12}}, \quad \ldots, \quad x_n = a_{p_{1n}}, \quad \ldots,$$

следовательно, A счетно.

Пусть теорема уже доказана, если число параметров $k - 1$. Докажем, что она верна и для k параметров. Разобьем множество A на подмножества A_n, относя в A_n все элементы, для которых параметр p_k имеет фиксированное значение p_{kn}. Тогда $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. С другой стороны, внутри каждого из множеств A_n элементы различаются значениями параметров $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$, поскольку значение параметра p_k для элементов каждого из этих множеств зафиксировано. По индуктивному предположению теорема справедлива для $k - 1$ параметров, а потому каждое из множеств A_n счетно. Тогда и A, как их сумма, тоже счетно.

Дадим одно важное применение доказанной теоремы.

---

*) Хотя мы записываем параметры в виде индексов, но они могут иметь какой угодно смысл; например, в следующей теореме это будут коэффициенты в выражении полинома.

Теорема 3.6.8. *Множество $\mathcal{P}$ всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами счетно.*

Доказательство. Рассмотрим сначала множество $\mathcal{P}_n$ всех полиномов фиксированной степени n с рациональными коэффициентами:

$$P(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n \qquad (c_0 \neq 0).$$

Эти полиномы характеризуются $n + 1$ коэффициентами, каждый из которых, по условию, может принимать только рациональные значения. Таким образом, совокупность значений каждого из коэффициентов — счетная. Коэффициенты и играют роль параметров из предыдущей теоремы, и по этой теореме множество $\mathcal{P}_n$ счетно. Но показатель степени n может принимать счетное множество различных значений: $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $\mathcal{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$. Тогда по теореме 3.6.4 и множество всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами счетно *).

3.7. Сепарабельные пространства

В множестве всех вещественных чисел $\boldsymbol{R}_1$ подмножество D всех рациональных чисел обладает следующим важным свойством: каждое вещественное число представимо как предел последовательности рациональных чисел **). Таким образом, замыкание $[D] = \boldsymbol{R}_1$. Это свойство называют плотностью множества рациональных чисел в $\boldsymbol{R}_1$. Перенесем понятие плотности в произвольные метрические пространства.

Определение. Множество A точек метрического пространства $\boldsymbol{E}$ называется *всюду плотным* (в $\boldsymbol{E}$), если $[A] = \boldsymbol{E}$.

Согласно леммам 3.4.1 и 3.4.2, равенство $[A] = \boldsymbol{E}$ означает, что каждый $x \in \boldsymbol{E}$ представим в виде $x = \lim x_n$, где $x_n \in A$, или что для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ по любому $\varepsilon > 0$ можно найти $x' \in A$ так, что $\rho(x, x') < \varepsilon$ ***). Если же сказанное сейчас верно только для тех x, которые принадлежат некоторому открытому или замкнутому шару $S \subset \boldsymbol{E}$, то говорят, что A *плотно* в S.

---

*) Множество полиномов, коэффициентами которых могут быть любые вещественные числа, уже не счетно.

**) Если данное число иррационально, то требуемые рациональные числа можно получить, взяв, например, десятичные приближения к нему с недостатком или с избытком. Так, для $\sqrt{2}$ можно положить $r_1 = 1{,}4$; $r_2 = 1{,}41$; $r_3 = 1{,}414$; $r_4 = 1{,}4142$ и т. д.

***) В этом условии, очевидно, строгое неравенство $\rho(x, x') < \varepsilon$ можно заменить и таким: $\rho(x, x') \leqslant \varepsilon$.

О п р е д е л е н и е. Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное или конечное всюду плотное подмножество.

Так как конечное множество замкнуто, то его замыкание совпадает с ним самим (см. 3.4). Поэтому наличие в пространстве конечного всюду плотного подмножества означает, что все пространство состоит из конечного числа точек. Сепарабельность же пространства, содержащего бесконечное множество точек, означает, что в этом пространстве существует именно с ч е т н о е всюду плотное подмножество.

Большинство пространств, рассмотренных выше в качестве примеров, сепарабельны.

В R_n каждый вектор представим в виде предела последовательности векторов с рациональными координатами. А векторы с рациональными координатами образуют счетное множество по теореме 3.6.7 (координаты и представляют те параметры, о которых говорится в этой теореме). Следовательно, R_n — сепарабельно.

Установим сепарабельность l^2. Рассмотрим $x \in l^2$, пусть $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots)$. Положим $x_n = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$. Тогда $x_n \to x$ по определению сходимости в l^2. Заменим каждый вектор x_n на $x_n' = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots)$ с рациональными координатами так, что

$$|r_i - \xi_i| < \frac{1}{n^{3/2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\ ^*);$$

тогда

$$\rho(x_n', x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (r_i - \xi_i)^2} < \sqrt{n \cdot \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\rho(x_n', x) \leqslant \rho(x_n', x_n) + \rho(x_n, x) < \frac{1}{n} + \rho(x_n, x) \to 0$$

и $x_n' \to x$.

Множество D_n векторов вида $(r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots)$ с рациональными координатами по теореме 3.6.7 счетно при каждом фиксированном $n = 1, 2, \ldots$ Сумма $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ тоже счетна и, как мы уже показали, всюду плотна в l^2. Следовательно, l^2 сепарабельно.

Сепарабельность пространств l^p при любом $p \geqslant 1$ и s устанавливается аналогично. Без доказательства отметим, что пространство m не сепарабельно.

---

*) Каждое r_i зависит, конечно, не только от i, но и от n. Однако мы не отражаем этого в обозначениях.

Пространство C сепарабельно. В нем счетным всюду плотным множеством является, например, множество $\mathcal{P}$ всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами.

Действительно, по доказываемой в математическом анализе теореме Вейерштрасса каждая непрерывная на отрезке функция $x(t)$ представима как предел равномерно сходящейся последовательности полиномов $Q_n(t)$ *). Равномерная сходимость и есть сходимость в метрике пространства C, т. е. $Q_n \to x$. Заменяя все коэффициенты каждого из полиномов $Q_n(t)$ достаточно близкими рациональными, мы найдем полиномы $P_n(t)$ из множества $\mathcal{P}$ так, что

$$|P_n(t) - Q_n(t)| < \frac{1}{n}$$

на всем отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ **). Тогда $\rho(P_n, Q_n) < \frac{1}{n}$, откуда уже будет следовать, что $P_n \to x$ по расстоянию в C. Тем самым доказано, что множество $\mathcal{P}$ всюду плотно в C.

Так как сходимость по расстоянию в C влечет сходимость в C_L и C_{L^2} (см. 3.3), то множество $\mathcal{P}$ всюду плотно и в C_L и в C_{L^2}, а потому и эти пространства сепарабельны.

Докажем две общие теоремы.

Теорема 3.7.1. *Всякое подмножество E_1 сепарабельного метрического пространства E само является сепарабельным пространством.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — счетное всюду плотное в E множество его точек ***). Возьмем любые два натуральных числа n и k. Если существуют такие точки $x \in E_1$, для которых $\rho(x, x_n) < \frac{1}{k}$, то выберем какую-нибудь одну из них и обозначим ее $x_n^{(k)}$. Множество всех определенных таким образом точек $x_n^{(k)}$ обозначим через A; $A \subset E_1$. По теореме 3.6.7, если бы точки $x_n^{(k)}$ (с двумя параметрами k и n) были определены и различны при всех n, $k = 1, 2, \ldots$, то их множество было бы счетным. Тем более счетно (или, может быть, конечно) множество A.

---

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, стр. 441.

**) Пусть $P(t) = c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \ldots + c_m$, а $Q(t) = d_0 t^m + d_1 t^{m-1} + \ldots + d_m$. Тогда

$$|P(t) - Q(t)| \leqslant |c_0 - d_0|\,|t^m| + |c_1 - d_1|\,|t^{m-1}| + \ldots + |c_m - d_m| < (m+1)M\varepsilon,$$

если $|c_i - d_i| < \varepsilon$ при всех $i = 0, 1, \ldots, m$, а M — наибольшее из чисел $\max_{a \leqslant t \leqslant b} |t^i|$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$.

***) Если E состоит из конечного числа точек, то теорема становится тривиальной.

Покажем, что A всюду плотно в E_1. Пусть $x \in E_1$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем натуральное k так, что $\frac{1}{k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Так как множество $\{x_n\}$ всюду плотно в E, то существует n_0, при котором $\rho(x_{n_0}, x) < \frac{1}{k}$. А раз при $n = n_0$ существует $x \in E_1$, удовлетворяющий последнему неравенству, то существует и $x_{n_0}^{(k)} \in A$, причем $\rho(x_{n_0}^{(k)}, x_{n_0}) < \frac{1}{k}$. Но тогда

$$\rho(x_{n_0}^{(k)}, x) \leqslant \rho(x_{n_0}^{(k)}, x_{n_0}) + \rho(x_{n_0}, x) < \frac{2}{k} \leqslant \varepsilon.$$

Вследствие произвольности ε отсюда следует, что A всюду плотно в E_1, и сепарабельность E_1 доказана.

Теорема 3.7.2. *Если всюду плотное подмножество E_1 метрического пространства E является сепарабельным пространством, то и E сепарабельно.*

Доказательство. Пусть A — счетное (или конечное) всюду плотное подмножество в E_1. Возьмем $x \in E$ и зададим $\varepsilon > 0$. Так как E_1 всюду плотно в E, то существует такой $x' \in E_1$, что $\rho(x, x') < \frac{\varepsilon}{2}$; а так как A всюду плотно в E_1, то существует такой $x'' \in A$, что $\rho(x', x'') < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что $\rho(x, x'') < \varepsilon$ и, вследствие произвольности ε, это означает, что A всюду плотно в E.

С помощью теоремы 3.7.2 легко доказывается сепарабельность пространств L^p. Именно, в теории интеграла устанавливается, что множество непрерывных функций всюду плотно в любом из пространств L^p ($p \geqslant 1$) *). Но это множество с метрикой из любого L^p само представляет сепарабельное пространство (выше это отмечено по отношению к C_L и C_{L2}, но это справедливо и при любом $p \geqslant 1$). А тогда сепарабельность L^p — прямое следствие теоремы 3.7.2.

3.8. Компактные множества

Одной из важных теорем математического анализа является теорема Больцано — Вейерштрасса: из всякой ограниченной бесконечной последовательности чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ можно выделить частичную $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k} \ldots$ ($n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$), сходящуюся к конечному пределу. Если A — произвольное ограниченное множество чисел, то теорема Больцано — Вейерштрасса применима к любой последовательности,

*) Для пространства L^2 см., например, И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, стр. 188 (по изданию 1957 г.).

составленной из чисел множества A. С другой стороны, если A не ограничено, то из него можно выделить последовательность, стремящуюся к ∞, а из такой последовательности нельзя выделить никакой частичной, сходящейся к конечному пределу. Таким образом, в пространстве R_1 можно сформулировать следующий результат. Пусть множество $A \subset R_1$. Для того чтобы из любой последовательности $\{x_n\}$, все члены которой $x_n \in A$, можно было выделить частичную сходящуюся к конечному пределу, необходимо и достаточно, чтобы множество A было ограничено. Однако при переходе в произвольные метрические пространства мы уже не получим такого простого результата и, чтобы выделить тот класс множеств, в которых справедливо заключение теоремы Больцано — Вейерштрасса, введем следующее определение:

Определение. Множество A, содержащееся в метрическом пространстве E, называется *компактным*, если из любой бесконечной последовательности точек $x_n \in A$ можно выделить частичную последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots)$, сходящуюся в E к некоторому пределу *). В частности, если само пространство E обладает этим свойством, то оно называется *компактным пространством*.

Из сказанного выше ясно, что в R_1 свойство компактности равносильно ограниченности множества.

Заметим, что всякое конечное множество точек метрического пространства компактно. Действительно, пусть $A = \{y_1, \ldots, y_p\}$, а $\{x_n\}$ — любая последовательность, состоящая из точек множества A. Но тогда по крайней мере одна из точек y_i повторяется среди x_n бесконечное множество раз, например при некотором i

$$x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = x_{n_k} = \ldots = y_i,$$

и частичная последовательность $x_{n_k} \to y_i$.

Отметим некоторые простые свойства компактных множеств.

Теорема 3.8.1. *Компактное множество ограничено по расстоянию* (определение ограниченности множества дано в 3.5).

Доказательство. Пусть множество A не ограничено. Возьмем любую его точку и назовем ее x_1. Положим $r_1 = 1$. Так как A не ограничено, то оно не может целиком содержаться в шаре $S(x_1, r_1)$. Возьмем любую точку из A, не входящую в этот шар, и назовем ее x_2. Тогда $\rho(x_1, x_2) \geqslant r_1$. Положим $r_2 = \rho(x_1, x_2) + 1$. Так как A не может содержаться в $S(x_1, r_2)$, то можно найти некоторую его точку x_3, не входящую в этот шар; $\rho(x_1, x_3) \geqslant r_2$. Полагаем $r_3 = \rho(x_1, x_3) + 1$ и продолжаем этот процесс до бесконечности. В результате строятся последовательность точек $x_n \in A$ и возрастающая последовательность чисел r_n так, что

*) Этот предел может и не принадлежать множеству A.

при всех $n = 2, 3, \ldots$

$$\rho(x_1, x_n) = r_n - 1 \geqslant r_{n-1}.$$

Теперь при любых $n > m \geqslant 2$

$$\rho(x_1, x_n) = r_n - 1 \geqslant r_{n-1} \geqslant r_m; \quad \rho(x_1, x_m) = r_m - 1.$$

Поэтому из неравенства

$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \rho(x_1, x_m) + \rho(x_m, x_n)$$

вытекает, что $r_m \leqslant (r_m - 1) + \rho(x_m, x_n)$, откуда $\rho(x_m, x_n) \geqslant 1$. Следовательно, никакая частичная последовательность, выделенная из $\{x_n\}$, не может быть фундаментальной и, тем более, не может сходиться к пределу. Значит, A не компактно.

Обратное заключение неверно, например, в l^2. Действительно, в l^2 все координатные орты e_m находятся на расстоянии единица от нулевого вектора, следовательно, образуют ограниченное множество. С другой стороны, $\rho(e_m, e_p) = \sqrt{2}$ при $m \neq p$, а потому из последовательности $\{e_m\}$ нельзя выделить частичной сходящейся.

Теперь покажем, что в пространстве $\boldsymbol{R}_n$ теорема Больцано — Вейерштрасса сохраняет силу и, следовательно, получается следующий критерий компактности: *для того чтобы множество $A \subset \boldsymbol{R}_n$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным по расстоянию.*

Необходимость условия доказана в теореме 3.8.1 для любого метрического пространства. Докажем его достаточность.

Каждый шар $S(a, r)$ в пространстве $\boldsymbol{R}_n$ состоит из всех точек $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, для которых

$$\rho(x, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - a_i)^2} < r$$

(здесь a_i суть координаты a). Таким образом, если $x \in S(a, r)$, то $|\xi_i - a_i| < r$ при каждом i или $a_i - r < \xi_i < a_i + r$. Следовательно, координаты точек, образующих ограниченное множество в $\boldsymbol{R}_n$, в совокупности ограничены *).

Пусть $A \subset \boldsymbol{R}_n$ и A ограничено. Берем любую последовательность точек $x_m \in A$: $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$. Так как числовая последовательность $\{\xi_1^{(m)}\}$ ограничена, то по теореме Больцано — Вейерштрасса из нее можно выделить частичную, сходящуюся к конечному пределу, $\xi_1^{(m_k)} \to \xi_1$. Теперь из данной последовательности точек x_m сохраняем только точки x_{m_k} с выделившимися

*) Предлагаем читателю проверить, что обратное заключение тоже верно.

выше номерами m_k. Эта частичная последовательность точек обладает тем свойством, что последовательность их первых координат сходится. Рассматривая последовательность вторых координат $\{\xi_2^{(m_k)}\}$ точек x_{m_k}, мы можем выделить из последовательности $\{x_{m_k}\}$ новую частичную, еще более «редкую», для которой будет сходиться к конечному пределу последовательность вторых координат. При этом свойство сходимости последовательности первых координат не нарушится. Повторяя такое постепенное «просеивание» заданной последовательности точек n раз, мы получим частичную последовательность точек, для которых последовательности всех координат сходятся к конечным пределам. А так как сходимость в $\boldsymbol{R}_n$ есть сходимость по координатам, то выделенная частичная последовательность точек имеет предел в $\boldsymbol{R}_n$. Тем самым компактность A доказана.

Заметим, что в пространстве $\boldsymbol{s}$ предыдущий критерий компактности неверен. Действительно, в $\boldsymbol{s}$ расстояние между двумя точками всегда меньше единицы, поэтому $\boldsymbol{s}$ совпадает с шаром $S(a, 1)$ каков бы ни был центр a; следовательно, $\boldsymbol{s}$ ограничено. С другой стороны, в $\boldsymbol{s}$ легко указать последовательность точек, из которой нельзя выделить сходящуюся частичную; например, можно взять с этой целью $x_n = (n, 0, 0, \ldots)$. Критерий компактности в $\boldsymbol{s}$ мы выведем после доказательства еще некоторых общих теорем.

Сформулируем в явном виде то обобщение теоремы Больцано — Вейерштрасса, которое мы фактически и вывели по ходу доказательства критерия компактности в $\boldsymbol{R}_n$: *из всякой бесконечной последовательности точек n-мерного векторного пространства, все координаты которых в совокупности ограничены, можно выделить частичную последовательность, сходящуюся по координатам.*

Определение. Пусть $A \subset \boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{E}$ — метрическое пространство) и $\varepsilon > 0$ — заданное число. Множество $B \subset \boldsymbol{E}$ называется *ε-сетью* множества A, если для любого $x \in A$ существует такая точка $y \in B$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Теорема 3.8.2. *Всякое компактное множество при любом $\varepsilon > 0$ имеет содержащуюся в нем самом конечную ε-сеть* (т. е. ε-сеть состоящую из конечного числа точек).

Доказательство. Пусть A компактно, но допустим, что при некотором $\varepsilon > 0$ конечной ε-сети в нем не существует. Возьмем любую точку $x_1 \in A$. Тогда существует такая точка $x_2 \in A$, для которой $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. В противном случае уже одна точка x_1 образовывала бы ε-сеть в A. Пусть уже определены точки $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ так, что $\rho(x_i, x_k) \geqslant \varepsilon$ при $i, k = 1, 2, \ldots, n$ и $i \neq k$. Так как, по предположению, конечное множество точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не может составлять ε-сеть для множества A, то существует такая точка $x_{n+1} \in A$, что $\rho(x_1, x_{n+1}) \geqslant \varepsilon$, $\rho(x_2, x_{n+1}) \geqslant \varepsilon$, ..., $\rho(x_n, x_{n+1}) \geqslant \varepsilon$. Продолжая этот процесс мы

строим такую бесконечную последовательность точек $x_n \in A$, что $\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon$ при любых $n \neq m$. Но из такой последовательности нельзя выделить частичную сходящуюся, а это противоречит компактности A.

Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ в A существует конечная ε-сеть.

Следствие. *Компактное пространство сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{E}$ — компактное метрическое пространство. Полагая $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, мы найдем в $\boldsymbol{E}$ конечные ε_n-сети B_n. Множество $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ конечно или счетно. В то же время оно всюду плотно в $\boldsymbol{E}$. Действительно, для любого $x \in \boldsymbol{E}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ подбираем сначала натуральное n так, что $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$, а затем $y \in B_n$ так, что $\rho(x, y) < \varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Тем самым $y \in B$, а $\rho(x, y) < \varepsilon$; множество B всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{E}$.

Теперь докажем теорему, обратную по отношению к предыдущей, которая верна, однако, лишь в полных метрических пространствах.

Теорема 3.8.3. *Если для множества A, содержащегося в полном метрическом пространстве $\boldsymbol{E}$, при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть, то A компактно.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность точек $x_n \in A$ и покажем, что из нее можно выделить частичную, сходящуюся в $\boldsymbol{E}$ к некоторому пределу.

Зададим $\varepsilon_1 = 1$ и по этому ε_1 выделим в $\boldsymbol{E}$ конечную ε_1-сеть для множества A. Пусть она состоит из точек a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Около каждой из этих точек опишем шар радиуса единица. По определению ε-сети каждая точка множества A, в частности каждая точка x_n, отстоит по крайней мере от одной из точек a_i на расстоянии, меньшем единицы. Следовательно, каждая точка x_n попадает по крайней мере в один из построенных шаров. Но так как этих шаров — конечное число, то по крайней мере один из них, назовем его S_1, содержит бесконечное множество членов последовательности $\{x_n\}$ *). В противном случае вся последовательность $\{x_n\}$ состояла бы из конечного числа членов. Те точки x_n, которые входят в S_1, расположим в виде частичной

*) Когда мы говорим «бесконечное множество членов последовательности $\{x_n\}$», мы имеем в виду члены с бесконечным множеством различных номеров. Однако не исключено, что некоторые из этих членов могут представляться одинаковыми точками, т. е. не исключено, что $x_n = x_m$ при некоторых $n \neq m$.

последовательности, но занумеруем их заново и обозначим $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots$

Теперь зададим $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$. Исходя из уже выделенной последовательности $\{x_n^{(1)}\}$ и рассуждая совершенно аналогично, мы установим с помощью конечной ε_2-сети существование шара S_2 радиуса $\frac{1}{2}$, в котором содержится бесконечная частичная последовательность $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots$, выделенная из первой частичной последовательности.

Этот процесс постепенного «просеивания» частичных последовательностей, в отличие от похожего конечного процесса, примененного выше в R_n, продолжим до бесконечности. Именно, если уже выделена частичная последовательность, содержащаяся в шаре S_n радиуса $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, то, задавая $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ и используя конечную ε_{n+1}-сеть, мы сможем выделить из этой последовательности новую частичную, содержащуюся в шаре S_{n+1} радиуса $\frac{1}{n+1}$. Запишем все эти последовательности в виде следующей таблицы:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots \\ x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \ldots, x_n^{(3)}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (12)$$

В этой таблице каждая строка представляет частичную последовательность, выделенную из предыдущей строки. При этом n-я строка обладает тем свойством, что все ее элементы содержатся в шаре S_n $\left(\text{радиуса } \frac{1}{n}\right)$.

Далее воспользуемся часто применяемым в математике диагональным методом. Именно, образуем последовательность из всех точек, стоящих по диагонали таблицы (12):

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots \qquad (13)$$

По отношению к заданной вначале последовательности $\{x_n\}$ это — частичная *). Далее, каково бы ни было n, если из диаго-

*) Здесь следует иметь в виду, что каждая точка $x_n^{(n)}$ стоит и в $(n-1)$-й строке, причем находится там правее, чем $x_{n-1}^{(n-1)}$. Поэтому номер точки $x_n^{(n)}$, который она имеет в исходной последовательности $\{x_n\}$, больше, чем номер точки $x_{n-1}^{(n-1)}$ в той же последовательности.

нальной последовательности (13) отбросить $x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{n-1}^{(n-1)}$, то оставшиеся элементы будут входить в n-ю строку таблицы (12), а потому будут содержаться в S_n. Следовательно, если a — центр этого шара, то при любых $m, p \geqslant n$ имеем

$$\rho(x_m^{(m)}, a) < \frac{1}{n}, \quad \rho(x_p^{(p)}, a) < \frac{1}{n},$$

а потому

$$\rho(x_m^{(m)}, x_p^{(p)}) \leqslant \rho(x_m^{(m)}, a) + \rho(a, x_p^{(p)}) < \frac{2}{n}.$$

Таким образом, $\rho(x_m^{(m)}, x_p^{(p)}) \to 0$ при $m, p \to \infty$, т. е. диагональная последовательность (13) фундаментальна. Вследствие полноты пространства $\boldsymbol{E}$, последовательность (13) сходится к некоторому пределу. Тем самым, компактность множества A доказана.

Следствие. *Если множество A, содержащееся в полном метрическом пространстве $\boldsymbol{E}$, при любом $\varepsilon > 0$ имеет компактную ε-сеть (т. е. ε-сеть, являющуюся компактным множеством), то само A также компактно.*

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть множество $B \subset \boldsymbol{E}$ является компактной $\frac{\varepsilon}{2}$-сетью множества A. Вследствие компактности B, по теореме 3.8.2, в нем существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть. Пусть эта сеть состоит из точек $a_1, \ldots, a_k$. Берем любой $x \in A$. Так как B есть $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для A, то существует такой $y \in B$, что $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. А так как точки $a_1, \ldots, a_k$ образуют $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть в B, то по крайней мере для одной из них, пусть это будет a_i, $\rho(y, a_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда $\rho(x, a_i) < \varepsilon$. Таким образом, каждая точка $x \in A$ отстоит по крайней мере от одной из точек $a_1, \ldots, a_k$ на расстоянии, меньшем ε, т. е. точки $a_1, \ldots, a_k$ образуют конечную ε-сеть множества A. По теореме 3.8.3, вследствие произвольности ε, множество A компактно.

Теперь установим критерий компактности в пространстве $\boldsymbol{s}$: *для того чтобы множество $A \subset \boldsymbol{s}$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $i = 1, 2, \ldots$ совокупность A_i i-х координат ξ_i точек $x \in A$ была ограничена* *).

а) Необходимость. Так как сходимость в $\boldsymbol{s}$ есть сходимость по координатам, то из компактности множества A вытекает компактность каждого из числовых множеств A_i. Но тогда все эти множества ограничены.

*) Граница может зависеть от i: $|\xi_i| \leqslant C_i$.

б) Достаточность. Пусть множество A таково, что все A_i ограничены. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем p так, что $\sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^p} < \varepsilon$. Теперь каждой точке $x = \{\xi_i\} \in A$ сопоставим точку $y = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, 0, 0, \ldots\}$, у которой первые p координат — те же, что у x, а остальные равны нулю. Множество всех полученных таким образом точек y (для всевозможных $x \in A$) обозначим через B. Для каждого $x \in A$ и сопоставленного ему $y \in B$

$$\rho(x, y) = \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i|}{1+|\xi_i|} < \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

Следовательно, множество B составляет ε-сеть множества A.

Проверим компактность множества B. Возьмем последовательность точек $y_n \in B$. По условию, их координаты в совокупности ограничены. Если у каждого y_n отбросить все координаты, начиная с $(p+1)$-й (равные нулю), получится последовательность точек $\{y'_n\}$ p-мерного векторного пространства. По обобщенной теореме Больцано — Вейерштрасса из этой последовательности можно выделить частичную $\{y'_{n_k}\}$, сходящуюся по координатам. Но так как точки y_{n_k} отличаются от точек y'_{n_k} только нулевыми координатами, то и последовательность $\{y_{n_k}\}$ будет сходиться по всем координатам, т. е. в смысле сходимости по расстоянию в s. Таким образом, множество B компактно.

Теперь компактность A получается сразу на основании следствия из теоремы 3.8.3.

В пространстве l^2 сходимость по расстоянию, как мы знаем, не равносильна сходимости по координатам. Поэтому критерии компактности, установленные выше для R_n и s, неверны в l^2 *). Мы не будем выводить критерий компактности в l^2, а ограничимся кратким рассмотрением одного примера.

Основным параллелепипедом в l^2 называется множество I всех точек $x = \{\xi_i\} \in l^2$, для которых $|\xi_i| \leqslant \frac{1}{2^i}$ при всех i. Покажем, что I компактно

С этой целью зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем p так, что $\sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$.

Построив по I множество B так же, как это сделано по множеству A в предыдущем доказательстве, мы сразу увидим, что B — ε-сеть множества I. Компактность же B так же, как и выше, легко получается с помощью теоремы Больцано — Вейерштрасса **). Отсюда и будет вытекать компактность I.

*) То же относится и к l^p и к m.

**) Если отличные от нуля координаты встречаются только на первых p местах, то из сходимости последовательности точек $\{y_{n_k}\}$ по координатам легко следует сходимость $\{y_{n_k}\}$ по расстоянию в l^2.

3.9. Критерий компактности в пространстве C

Ввиду большой важности для дальнейшего пространства C, вопрос об условиях компактности в нем мы разберем полностью.

В математическом анализе доказывается следующая теорема о равномерной непрерывности функций: если функция $x(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что неравенство $|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant \varepsilon$ должно быть выполнено в любых двух точках t_1 и t_2 из $[a, b]$, для которых $|t_1 - t_2| < \delta$. Однако, если по одному и тому же $\varepsilon > 0$ искать соответствующее δ для разных функций, то и значения δ будут получаться, вообще, различные. Поэтому, если рассматривается бесконечное множество различных непрерывных функций, то вполне возможно, что по некоторому $\varepsilon > 0$ для них не удастся подобрать общего δ. В связи с этим введем

Определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ задано произвольное множество непрерывных функций $x(t)$. Эти функции называются *равностепенно непрерывными*, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что в любых двух точках t_1 и t_2 на отрезке $[a, b]$, для которых $|t_1 - t_2| < \delta$, неравенство $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ выполнено для любой из заданных функций.

Если заданных непрерывных функций — конечное число, то они обязательно равностепенно непрерывны, так как по любому $\varepsilon > 0$ сначала для каждой функции можно найти свое δ, а затем из всех этих δ (их конечное число!) взять наименьшее. Это и будет требуемое общее δ.

Определение. Пусть задано некоторое множество функций $x(t)$. Эти функции называются *равноограниченными*, если они все удовлетворяют неравенству $|x(t)| \leqslant M$ с некоторой общей постоянной M.

Критерий компактности множества в пространстве C дается следующей теоремой итальянского математика Ч. Арцела (1847—1912):

Теорема 3.9.1. *Для того чтобы множество $A \subset C$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы функции множества A были равноограничены и равностепенно непрерывны.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть A компактно. По теореме 3.8.1 оно ограничено в метрике C, т. е. $A \subset S(y, r)$ при надлежаще подобранных $y \in C$ и $r > 0$. Это значит, что каждая функция $x \in A$ удовлетворяет на всем отрезке $[a, b]$ неравенству

$$y(t) - r < x(t) < y(t) + r.$$

Положим $l = \min y(t)$, $L = \max y(t)$. Тогда

$$l - r < x(t) < L + r,$$

а это и означает равноограниченность функций из множества A. Если, например, положить $M = \max(|L + r|, |l - r|)$, то неравенство $|x(t)| < M$ будет выполнено для любой функции $x \in A$.

Теперь докажем равностепенную непрерывность функций множества A. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. По теореме 3.8.2 в пространстве C существует конечная $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть множества A. Пусть она состоит из функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_k(t)$. Так как этих функций — конечное число, то они равностепенно непрерывны, а потому существует такое $\delta > 0$, что при всех $i = 1, 2, \ldots, k$

$$|t_1 - t_2| < \delta \text{ влечет } |y_i(t_1) - y_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

($t_1, t_2 \in [a, b]$). Далее, для любой функции $x \in A$ по определению $\frac{\varepsilon}{3}$-сети можно найти такое i, что $\rho(x, y_i) < \frac{\varepsilon}{3}$, т. е. при всех $t \in [a, b]$

$$|x(t) - y_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда, используя это i, имеем при $|t_1 - t_2| < \delta$:

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant |x(t_1) - y_i(t_1)| + |y_i(t_1) - y_i(t_2)| + |y_i(t_2) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

Таким образом, найденное δ соответствует заданному ε для всех функций $x(t)$ из множества A. Вследствие произвольности ε, равностепенная непрерывность этих функций доказана.

б) Достаточность условия может быть выведена с помощью теоремы 3.8.3; однако мы предпочитаем дать прямое доказательство этой части теоремы Арцела.

Пусть функции множества A равноограничены и равностепенно непрерывны. Возьмем любую последовательность функций $x_n \in A$. Выделим в $[a, b]$ подмножество всех рациональных точек. Так как это подмножество — счетное, то все входящие в него точки можно перенумеровать: $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots$

При каждом n рассмотрим последовательность значений функции $\{x_n(t_i)\}_{i=1}^{\infty}$. Эти последовательности можно рассматривать как точки из пространства s. Вследствие равноограниченности функций из A последовательность i-х координат этих точек $\{x_n(t_i)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена при каждом i. Тогда, по признаку компактности в s, из $\{x_n\}$ можно выделить частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$ так, что при каждом i существует конечный $\lim x_{n_k}(t_i)$.

Докажем, что частичная последовательность функций $\{x_{n_k}(t)\}$ сходится по расстоянию в C. Сначала установим, что $x_{n_k}(t)$ стремится к конечному пределу в каждой точке $t \in [a, b]$. В рацио-

нальных точках это имеет место по построению. Пусть t иррационально и пусть задано $\varepsilon > 0$. По числу $\frac{\varepsilon}{3}$ находим δ из определения равностепенной непрерывности, общее для всех функций из A, а затем находим рациональную точку τ (это — одно из t_i), для которой $|t - \tau| < \delta$. Тогда при всех $k = 1, 2, \ldots$

$$|x_{n_k}(t) - x_{n_k}(\tau)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14}$$

Так как последовательность значений $x_{n_k}(\tau)$ имеет конечный предел по построению, то она — фундаментальная. Следовательно, существует такое K, что

$$|x_{n_k}(\tau) - x_{n_l}(\tau)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } k,\ l \geqslant K.$$

Отсюда и из (14) мы получаем, что при $k,\ l \geqslant K$:

$$|x_{n_k}(t) - x_{n_l}(t)| \leqslant |x_{n_k}(t) - x_{n_k}(\tau)| + \\ + |x_{n_k}(\tau) - x_{n_l}(\tau)| + |x_{n_l}(\tau) - x_{n_l}(t)| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{x_{n_k}(t)\}$ — фундаментальная. Следовательно, конечный $\lim x_{n_k}(t) = y(t)$ существует при всех $t \in [a, b]$.

Теперь докажем, что сходимость этой последовательности — равномерная. Зададим $\varepsilon > 0$ и воспользуемся тем общим δ, которое было выше подобрано по $\frac{\varepsilon}{3}$. Тогда при всех k

$$|t' - t''| < \delta \text{ влечет } |x_{n_k}(t') - x_{n_k}(t'')| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{15}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу, получим, что

$$|t' - t''| < \delta \text{ влечет } |y(t') - y(t'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

Отсюда, в частности, вытекает непрерывность функции $y(t)$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на конечное число частей с помощью точек $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = b$ так, чтобы длина каждой части была меньше δ. Так как точек τ_i — конечное число, то для них можно подобрать общее K таким образом, что

$$|x_{n_k}(\tau_i) - y(\tau_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } k \geqslant K,\quad i = 0, 1, \ldots, p. \tag{17}$$

Пусть, теперь, t — произвольная точка из отрезка $[a, b]$. Тогда $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$ при некотором i. Если обозначить это τ_i через τ, то $|t - \tau| < \delta$. Используя (15) — (17), имеем при $k \geqslant K$

$$|x_{n_k}(t) - y(t)| \leqslant |x_{n_k}(t) - x_{n_k}(\tau)| + \\ + |x_{n_k}(\tau) - y(\tau)| + |y(\tau) - y(t)| < \varepsilon,$$

что и доказывает равномерную сходимость $x_{n_k}(t)$ к $y(t)$. Иными словами, $x_{n_k} \to y$ по расстоянию в C. Компактность множества A доказана, чем и завершается доказательство теоремы Арцела.

Укажем один достаточный признак равностепенной непрерывности. Говорят, что функция $x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ *условию Липшица* с постоянной K, если для любых $t_1, t_2 \in [a, b]$ выполнено неравенство

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant K|t_1 - t_2|.$$

Лемма 3.9.1. *Функции $x(t)$, удовлетворяющие условию Липшица с общей постоянной K, равностепенно непрерывны.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ (не уменьшая общности, можно считать $K > 0$). Тогда, если $|t_1 - t_2| < \delta$, то для всех рассматриваемых функций

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant K|t_1 - t_2| < K\delta = \varepsilon$$

и их равностепенная непрерывность доказана.

В следующей главе мы дадим применение теоремы Арцела.

ГЛАВА IV

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

4.1. Основные определения

Уже в первых главах мы вводили понятие оператора и функционала в конечно-мерном и бесконечно-мерном эвклидовых пространствах.

В настоящей главе мы перенесем эти понятия в произвольные метрические пространства и придем, таким образом, к весьма широкому обобщению понятия функции. При этом мы будем рассматривать и такие операции, которые определяют преобразование или, как часто говорят, отображение одного метрического пространства не только в самого себя, но и в произвольное другое метрическое пространство.

Определение. Пусть $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ — метрические пространства, D — некоторое множество в пространстве $\boldsymbol{X}$. Если каждой точке $x \in D$ по определенному правилу сопоставлена некоторая точка $y \in \boldsymbol{Y}$, то говорят, что на множестве D задан *оператор* со значениями в пространстве $\boldsymbol{Y}$. Если этот оператор обозначен U, то самое соответствие между точками $x \in D$ и $y \in \boldsymbol{Y}$ записывается в виде $y = Ux$. Множество D называется *областью задания* (или определения) оператора U. Символ x, обозначающий переменную точку из множества D, называют *аргументом* оператора U.

Каждая точка $y \in \boldsymbol{Y}$, представляющаяся в виде $y = Ux$, называется *значением* оператора U или *образом* соответствующей точки $x \in D$. Относительно оператора U говорят, что он устанавливает отображение множества D в пространство $\boldsymbol{Y}$. Если совокупность значений оператора U совпадает со всем пространством $\boldsymbol{Y}$, то говорят также, что установлено отображение множества D на пространство $\boldsymbol{Y}$.

Пусть E — некоторое подмножество множества D. Совокупность всех значений $y = Ux$ оператора U, которые он принимает, когда $x \in E$, называется *образом множества* E и обозначается $U(E)$.

О п р е д е л е н и е. Оператор, заданный на некотором множестве в метрическом пространстве, значения которого суть вещественные или комплексные числа, называется *функционалом* *). В этой главе мы рассматриваем только функционалы с вещественными значениями и в дальнейшем не будем это оговаривать каждый раз.

Примером функционала в пространстве C может служить интеграл $\int_a^b x(t)\,dt$. Значение функции $x(t_0)$ в фиксированной точке t_0 также — функционал. Если каждой непрерывно-дифференцируемой функции из C (так называют функцию, имеющую непрерывную производную) сопоставить ее производную, то мы получим оператор, отображающий подмножество непрерывно-дифференцируемых функций из C на всё C **).

Иногда приходится рассматривать операторы с несколькими аргументами. Не приводя точных определений, которые читатель может сформулировать самостоятельно, укажем, например, что на расстояние $\rho(x, x')$ в метрическом пространстве X можно смотреть как на функционал с двумя аргументами, x и x', определенный для любой пары точек из пространства X.

4.2. Непрерывные операторы и функционалы

Изучая эвклидовы пространства, мы уже неоднократно пользовались термином «непрерывность», вкладывая в него тот же смысл, какой имеет это понятие для обычных функций. Дадим теперь общее определение непрерывности для операторов в произвольных метрических пространствах.

О п р е д е л е н и е. Оператор U, отображающий множество $D \subset X$ в пространство Y, называется *непрерывным в точке* $x_0 \in D$, если для любой последовательности точек $x_n \in D$, такой, что $x_n \to x_0$, имеет место соотношение $Ux_n \to Ux_0$. Оператор называется просто *непрерывным*, если он непрерывен в каждой точке того множества, на котором он задан.

Мы дали определение непрерывности оператора в точке x_0 на языке последовательностей. Можно сформулировать его и в других терминах. Именно, оператор U непрерывен в точке $x_0 \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in D$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0) < \delta$, имеет место неравенство

$$\rho(Ux, Ux_0) < \varepsilon.$$

*) Впрочем, такой оператор называют и просто функцией.

**) Известно, что всякая непрерывная функция есть производная своего интеграла, т. е. некоторой другой непрерывной функции.

Иными словами, последнее неравенство должно быть выполнено для всех точек множества D, входящих в открытый шар $S(x_0, \delta)$ радиуса δ с центром в x_0. Равносильность этого определения с первым, данным на языке последовательностей, устанавливается так же, как для обычных функций в математическом анализе *). Мы не останавливаемся на этом и в дальнейшем будем пользоваться первым определением.

Приведенные определения, конечно, имеют смысл и для функционалов как частного случая операторов.

Многие свойства вещественных непрерывных функций переносятся и на непрерывные операторы в произвольных метрических пространствах или, по крайней мере, на непрерывные функционалы. При этом те теоремы, где важную роль играет непрерывность функции именно на отрезке, обладающем, как известно, свойствами замкнутости и компактности на числовой прямой, остаются, как правило, верными в общих метрических пространствах, если область задания оператора — замкнутое компактное множество. Приведем одну такую теорему, обобщающую теорему Вейерштрасса о непрерывных функциях.

Теорема 4.2.1. *Непрерывный функционал $f(x)$, заданный на замкнутом компактном множестве $D \subset X$, ограничен и среди его значений есть наибольшее и наименьшее.*

Доказательство. Докажем, что функционал $f(x)$ ограничен снизу и имеет наименьшее значение. Аналогичным рассуждением устанавливается существование наибольшего значения.

Допустим, что $f(x)$ не ограничен снизу. Тогда для любого натурального n существует по крайней мере одна точка $x_n \in D$, в которой $f(x_n) < -n$. Отсюда следует, что $\lim f(x_n) = -\infty$. Вследствие компактности множества D из $\{x_n\}$ можно выделить частичную последовательность $\{x_{n_i}\}$, сходящуюся к некоторому пределу $x_0 \in X$. Так как D замкнуто, то $x_0 \in D$ и, по непрерывности функционала, $f(x_{n_i}) \to f(x_0)$. Но, с другой стороны, $f(x_{n_i}) \to -\infty$ и, так как $f(x_0)$ — число, а не $-\infty$, то мы пришли к противоречию. Тем самым, доказана ограниченность $f(x)$ снизу.

Теперь обозначим через m точную нижнюю границу значений $f(x)$ **) и докажем, что $f(x_0) = m$ в некоторой точке $x_0 \in D$. Это и будет означать, что m — наименьшее значение $f(x)$. Так как при любом натуральном n число $m + \frac{1}{n}$ уже не является нижней

*) См., например, Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, т. I, стр. 70.

**) Точной нижней границей ограниченного снизу множества чисел называется наибольшая из его нижних границ. Она обозначается inf (от латинского слова infimum — «наинизшее»).

границей для $f(x)$, то для каждого n можно подобрать точку $x_n \in D$, в которой $f(x_n) < m + \frac{1}{n}$. Из последовательности $\{x_n\}$ выделяем частичную подпоследовательность $x_{n_i} \to x_0$, где $x_0 \in D$. В неравенстве

$$m \leqslant f(x_{n_i}) < m + \frac{1}{n_i}$$

переходим к пределу и получаем, что $\lim f(x_{n_i}) = m$. Но тогда, вследствие непрерывности функционала, $f(x_0) = m$.

Заметим, что доказанная теорема верна, в частности, если множество D совпадает со всем пространством X и это пространство компактно.

4.3. Неподвижные точки. Метод последовательных приближений

Рассмотрим оператор U, отображающий метрическое пространство X или некоторое его подмножество в метрическое пространство Y. Если задать некоторый элемент $y \in Y$, то на соотношение $y = Ux$ можно смотреть как на уравнение с неизвестным x и может быть поставлена задача, определить все те точки x, в которых Ux принимает заданное значение y. В случае, когда элементами пространств X и Y являются те или иные функции, уравнение $Ux = y$ называют *функциональным*.

С функциональными уравнениями вида $Ux = y$ мы еще встретимся в последующих главах. Сейчас остановимся на уравнениях несколько иного вида.

Если U — оператор, отображающий пространство X или некоторое его подмножество в то же пространство, то точки $x \in X$, для которых $Ux = x$, называются *неподвижными* точками оператора U. На равенство $Ux = x$ можно также смотреть как на уравнение и решение этого уравнения и сводится к отысканию неподвижных точек оператора U *).

Для нахождения неподвижных точек часто применяется метод последовательных приближений. Мы изложим сейчас общую схему этого метода, а в следующем параграфе будут указаны некоторые условия, обеспечивающие его применимость.

Будем предполагать, что оператор U задан на некотором замкнутом подмножестве D пространства X и непрерывен и что все

*) Заметим, что оба указанных уравнения являются частными случаями уравнения более общего вида: $Ux = Vx$, где U и V — два оператора, отображающих некоторое подмножество пространства X в одно и то же пространство Y. В первом случае можно положить $Vx = y$, где y — постоянное, во втором нужно считать, что пространства X и Y совпадают, а $Vx = x$, т. е. V — тождественный оператор.

его значения также принадлежат множеству D. Возьмем произвольную точку $x_0 \in D$ и положим $x_1 = Ux_0$. Если бы точка x_0 была неподвижной, то мы бы получили, что $x_1 = x_0$; но при произвольном выборе x_0, как правило, будет $x_1 \neq x_0$. Далее, последовательно полагаем $x_2 = Ux_1$, $x_3 = Ux_2$, ... и, в общем виде,

$$x_{n+1} = Ux_n. \tag{1}$$

При этом, по условию, если $x_n \in D$, то и $x_{n+1} \in D$ и, следовательно, построение следующей точки x_{n+2} возможно. Продолжая этот процесс до бесконечности, строим последовательность точек $x_n \in D$. Если окажется, что существует $x^* = \lim x_n$ (в этом случае говорят, что процесс сходится), то, вследствие замкнутости D, $x^* \in D$. Переходя к пределу в (1) и пользуясь непрерывностью оператора U, получим, что $x^* = Ux^*$, т. е. что x^* — неподвижная точка.

Первый вопрос, который возникает в связи с описанным методом: будет ли процесс сходиться при произвольной начальной точке x_0 или начальную точку нужно подчинить каким-нибудь ограничениям. Далее, метод последовательных приближений может быть использован не только для доказательства существования неподвижной точки x^*, но и для ее приближенного нахождения. Именно, точки x_n, которые могут быть фактически найдены, если оператор U задан в каком-нибудь конкретном пространстве, и являются последовательными приближениями к x^*. Если, при этом, под погрешностью понимать расстояние $\rho(x_n, x^*)$, то сходимость процесса означает, что погрешность принципиально может быть сделана сколь угодно малой. Однако может потребоваться найти оценку погрешности, которая покажет, сколько приближений нужно построить, чтобы достичь заданной точности. Все эти вопросы могут быть решены, если будут известны надлежащие дополнительные сведения об операторе U.

4.4. Операторы сжатия

В настоящем параграфе мы рассмотрим операторы, для которых расстояние между образами любых двух различных точек меньше расстояния между самими этими точками, по крайней мере, в определенном отношении. Такие операторы будем называть операторами сжатия. Точнее, оператор U, заданный в метрическом пространстве X или некотором его подмножестве, называется *оператором сжатия*, если существует такая положительная постоянная $\alpha < 1$, что для любых x', x'' из области задания оператора U

$$\rho(Ux', Ux'') \leqslant \alpha\rho(x', x''). \tag{2}$$

Легко видеть, что оператор сжатия U всегда непрерывен. Действительно, если x_n и x_0 взяты из области задания оператора U

и $x_n \to x_0$, то из неравенства $\rho(Ux_n, Ux_0) \leqslant \alpha\rho(x_n, x_0)$ следует, что и $Ux_n \to Ux_0$.

Теорема 4.4.1 (С. Банах) *). *Если оператор сжатия U отображает полное метрическое пространство X в самого себя, то он имеет единственную неподвижную точку и эта точка может быть получена методом последовательных приближений при любой начальной точке $x_0 \in X$.*

Доказательство. Берем произвольно $x_0 \in X$. Из формулы (1) и условия сжатия (2) получаем при любом n

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Ux_n, Ux_{n-1}) \leqslant \alpha\rho(x_n, x_{n-1}).$$

В свою очередь, $\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \alpha\rho(x_{n-1}, x_{n-2})$ и т. д. Повторяя такую оценку n раз, находим

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \alpha^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n\rho(x_1, x_0).$$

Теперь покажем, что последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная. Пусть $m > n$; тогда

$$\begin{aligned}\rho(x_m, x_n) &\leqslant \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \\ &\leqslant (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \ldots + \alpha^n)\,\rho(x_1, x_0) \leqslant \\ &\leqslant \Big(\sum_{l=n}^{\infty} \alpha_l\Big)\,\rho(x_1, x_0) = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\rho(x_1, x_0). \qquad (3)\end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\rho(x_m, x_n) \to 0$ при $m, n \to \infty$. Так как пространство X полно, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу x^*, который, как мы знаем из предыдущего параграфа, и является неподвижной точкой.

Единственность неподвижной точки вытекает из условия сжатия: если x' и x'' — неподвижные точки, то

$$\rho(x', x'') = \rho(Ux', Ux'') \leqslant \alpha\rho(x', x''),$$

откуда $\rho(x', x'') = 0$, т. е. $x' = x''$.

Замечание 1. Если в неравенстве (3) перейти к пределу при $m \to \infty$, то получим

$$\rho(x^*, x_n) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\rho(x_1, x_0).$$

Это и есть оценка погрешности, получающейся при замене x^* на x_n. Эта погрешность убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем α. Кроме того, из найденной оценки видно, что при одном и том же n точность приближения, как правило, тем лучше, чем ближе x_1 к x_0. Поэтому, если положение x^* приблизительно известно, то для вычислений выгодно взять x_0 где-то

*) С. Банах (1892—1945) — выдающийся польский математик, один из основателей функционального анализа.

вблизи x^*. Тогда и $x_1 = Ux_0$ будет недалеко от x^*, а следовательно, и от x_0.

Замечание 2. Так как замкнутое подмножество F полного метрического пространства X по теореме 3.5.4 само является полным метрическим пространством, то теорема Банаха верна и для оператора сжатия, заданного не на всем X, а только на его замкнутом подмножестве F, если множество значений оператора также содержится в F. При этом за начальную точку процесса последовательных приближений можно принять любую точку $x_0 \in F$.

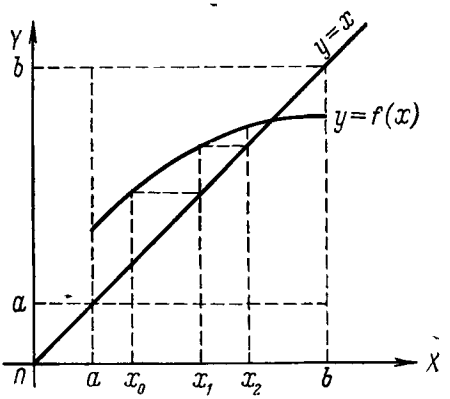

Рис. 7.

Приведем некоторые примеры применения теоремы Банаха.

1. Пусть $f(x)$ — вещественная дифференцируемая функция, заданная на отрезке $[a, b]$ числовой прямой, все значения которой также заключены в этом отрезке. Пусть требуется решить уравнение $f(x) = x$, т. е. найти точку пересечения графика $f(x)$ с прямой $y = x$ (рис. 7).

Рассмотрим функцию $f(x)$ как оператор, отображающий отрезок $[a, b]$, являющийся замкнутым подмножеством полного пространства R_1, в самого себя. Если $|f'(x)| \leqslant \alpha < 1$, то оператор f — оператор сжатия. Действительно, по формуле Лагранжа, для любых x', $x'' \in [a, b]$

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)(x' - x'')| \leqslant \alpha |x' - x''|$$

(ξ — точка между x' и x'').

А тогда теорема Банаха применима, следовательно, оператор f имеет единственную неподвижную точку, которая может быть получена методом последовательных приближений, начиная с произвольной точки $x_0 \in [a, b]$. Неподвижная точка оператора f и есть решение уравнения $f(x) = x$.

2. Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Перенося все члены с неизвестными направо и прибавляя к обеим частям первого уравнения по x_1, второго — по x_2 и т. д., получим равносильную систему

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (1-a_{11})\,x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1,\\ x_2 &= -a_{21}x_1 + (1-a_{22})\,x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n &= -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1-a_{nn})\,x_n + b_n. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Введем обозначения новых коэффициентов в правых частях уравнений системы (5); именно, положим

$$c_{ik} = -a_{ik} + \delta_{ik}, \text{ где } \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k,\\ 0 & \text{при } i \neq k, \end{cases}$$

и запишем систему (5) в сжатой форме:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_k + b_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (5а)$$

Беря произвольную точку $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ из пространства $\boldsymbol{R}_n$, определим отображение пространства $\boldsymbol{R}_n$ в самого себя $y = Ux$, задавая координаты y_i точки y формулами

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_k + b_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Решения системы (4) или равносильной ей системы (5а) суть неподвижные точки оператора U.

Укажем достаточное условие, при котором U — оператор сжатия. Для этого сравним оператор U с оператором C линейного преобразования, определяемого матрицей (c_{ik}):

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_k \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Именно, $Ux = Cx + b$, где $b = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$. Для любых двух точек x', $x'' \in \boldsymbol{R}_n$ имеем:

$$\rho(Ux',\ Ux'') = \|Ux' - Ux''\| = \|Cx' - Cx''\| = \|C(x' - x'')\|.$$

Пользуясь нормой оператора линейного преобразования в $\boldsymbol{R}_n$ [см. 1.7, формула (14а)], имеем

$$\|C(x' - x'')\| \leqslant \|C\|\ \|x' - x''\|,$$

или

$$\rho(Ux',\ Ux'') \leqslant \|C\|\,\rho(x',\ x'').$$

Следовательно, если $\|C\| < 1$, то U — оператор сжатия. Из оценки

нормы оператора, данной в 1.7, видно, что последнее неравенство имеет место, если, например,

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik}^2 < 1. \tag{6}$$

Итак, при выполнении условия (6) оператор U имеет единственную неподвижную точку, которая может быть найдена методом последовательных приближений.

Заметим, что условие (6) требует, чтобы коэффициенты системы (5) были не слишком большими по абсолютной величине, в частности, это относится и к диагональным коэффициентам, имеющим вид $1 - a_{ii}$; следовательно, коэффициенты a_{ii} должны быть (в среднем) близки к 1 *). Если бы оказалось, что все коэффициенты близки к -1, то следовало бы перед построением системы (5) изменить знаки во всех членах уравнений системы (4).

3. Аналогичный принцип может быть применен и к некоторым нелинейным системам. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \sin c_{ik} x_k + b_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{7}$$

и будем предполагать, что опять выполнено условие (6). Как и в предыдущем примере, обозначим через U тот оператор, приводящий R_n в R_n, который определяется правыми частями уравнений системы (7). Иными словами, $y = Ux$ означает, что

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \sin c_{ik} x_k + b_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(y_i — координаты точки y).

Проверим, что U — оператор сжатия. Для любых двух точек $x' = \{x_k'\}$, $x'' = \{x_k''\} \in R_n$ положим $y' = Ux'$, $y'' = Ux''$, и пусть y_i', y_i'' — координаты точек y', y'' (соответственно). Тогда

$$\rho(Ux',\ Ux'') = \rho(y',\ y'') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i' - y_i'')^2}. \tag{8}$$

Но

$$y_i' - y_i'' = \sum_{k=1}^{n} (\sin c_{ik} x_k' - \sin c_{ik} x_k'') \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

---

*) Эти замечания, конечно, не имеют точного математического характера.

Применяя к каждому слагаемому формулу Лагранжа, мы сразу найдем

$$y_i' - y_i'' = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} (\cos c_{ik} \xi_{ik}) (x_k' - x_k'')$$

(здесь ξ_{ik} — некоторое промежуточное число, заключенное между x_k' и x_k''). Отсюда сразу следует, что

$$|y_i' - y_i''| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_{ik}| \, |x_k' - x_k''| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Применяя неравенство Коши (формулу (3) из гл. I), получим

$$(y_i' - y_i'')^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} c_{ik}^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} (x_k' - x_k'')^2\Big) =$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{n} c_{ik}^2\Big) \|x' - x''\|^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} c_{ik}^2\Big) [\rho(x', x'')]^2.$$

С помощью этой оценки из (8) сразу вытекает, что

$$\rho(Ux', Ux'') \leqslant \sqrt{\sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik}^2}\, \rho(x', x'')$$

и благодаря условию (6) U — оператор сжатия. А тогда теорема Банаха обеспечивает существование и единственность решения системы (7), причем это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

4. Теперь покажем, как из теоремы Банаха можно получить теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

Рассмотрим уравнение 1-го порядка

$$y' = f(x, y) \tag{9}$$

с начальным условием

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{10}$$

Пусть в прямоугольнике $\Delta(|x - x_0| \leqslant a, \ |y - y_0| \leqslant b)$ функция $f(x, y)$ непрерывна и $|f(x, y)| < M$. Пусть, кроме того, существует такая постоянная $K > 0$, что

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant K |y_1 - y_2|$$

при любом x из промежутка $[x_0 - a, x_0 + a]$ и любых двух значениях y_1, y_2 из промежутка $[y_0 - b, y_0 + b]$. Последнее условие, как и для функций одной переменной, называется усло-

вием Липшица *). Докажем, что при этих условиях найдется такое достаточно малое положительное число h, что в промежутке $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ существует, и притом единственное, решение уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию (10).

Для доказательства придадим уравнению (9) другую — интегральную форму. Именно, считая y функцией от x, интегрируем обе части (9) от x_0 до переменного x. При этом благодаря начальному условию (10) $\int_{x_0}^{x} y'\,dx = y - y_0$, а потому мы приходим к уравнению

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\ y)\,dx. \tag{11}$$

Если уравнение (11) продифференцировать по x, то мы снова вернемся к уравнению (9); кроме того, непосредственно видно, что если функция y удовлетворяет уравнению (11), то $y = y_0$ при $x = x_0$. Таким образом, уравнение (11) равносильно дифференциальному уравнению (9), взятому вместе с начальным условием (10).

Примем за h любую положительную постоянную, меньшую, чем $\frac{1}{K}$, и не превосходящую a и $\frac{b}{M}$, и рассмотрим пространство C непрерывных функций, заданных на отрезке $\delta = [x_0 - h, x_0 + h]$. Обозначим через F подмножество пространства C, состоящее из всех функций $y = y(x)$, для которых при всех $x \in \delta$

$$y_0 - b \leqslant y(x) \leqslant y_0 + b\ **). \tag{12}$$

В пространстве C множество F — замкнутый шар радиуса b, центром которого является функция $y \equiv y_0$ (постоянная). Следовательно, F — замкнутое множество.

Рассмотрим оператор, заданный на F посредством правой части уравнения (11), т. е. для каждого $y \in F$ положим

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x,\ y(x)]\,dx \qquad (x \in \delta) \tag{13}$$

и запишем это соотношение коротко: $z = Uy$.

---

*) Условие Липшица, в частности, будет выполнено, если функция $f(x, y)$ имеет в Δ ограниченную частную производную по y: $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant K$.

**) Так как правая часть уравнения (9) задана в прямоугольнике Δ, то решение можно искать только среди функций, удовлетворяющих условию (12).

Проверим, что все значения оператора U входят в F и что U — оператор сжатия.

Если $y \in F$, то при любом $x \in \delta$ точка $(x, y(x)) \in \Delta$, следовательно, правая часть (13) имеет смысл и $z \in C$. Кроме того, $|f(x, y(x))| \leqslant M$, а потому при всяком $x \in \delta$

$$|z(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx \right| \leqslant M |x - x_0| \leqslant Mh \leqslant M \frac{b}{M} = b,$$

следовательно, $z \in F$.

Пусть $y, \tilde{y} \in F$, $z = Uy$, $\tilde{z} = U\tilde{y}$. Тогда при любом $x \in \delta$ с помощью условия Липшица получим

$$|z(x) - \tilde{z}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx - \int_{x_0}^{x} f(x, \tilde{y}(x))\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))|\, dx \leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} |y(x) - \tilde{y}(x)|\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant K \max_{x \in \delta} |y(x) - \tilde{y}(x)| \, |x - x_0| \leqslant K \rho(y, \tilde{y})\, h = \alpha \rho(y, \tilde{y}),$$

где $\alpha = Kh < 1$.

Отсюда

$$\rho(z, \tilde{z}) \leqslant \alpha \rho(y, \tilde{y}).$$

Таким образом, теорема Банаха, согласно замечанию 2, применима к оператору U и последний имеет единственную неподвижную точку, а это и есть единственное решение уравнения (11) в промежутке δ. Кроме того, теорема Банаха обеспечивает возможность получения этого решения методом последовательных приближений. За начальную функцию можно принять, например, $y \equiv y_0$.

Аналогичную теорему о существовании и единственности решения можно получить из теоремы Банаха и для системы дифференциальных уравнений.

Метод последовательных приближений был применен французским математиком Э. Пикаром (1856—1941) к уравнению (11) для непосредственного доказательства теоремы о существовании и единственности решения дифференциального уравнения, а также и к системам дифференциальных уравнений. Доказательство Пикара и послужило прототипом доказательства теоремы Банаха.

В следующем параграфе мы дадим еще некоторые применения теоремы Банаха.

4.5. Интегральные уравнения

В предыдущем параграфе мы уже встретили уравнение, в котором неизвестная функция содержалась под знаком интеграла. Это было уравнение (11), к которому привелось дифференциальное уравнение (9). Вообще уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла, называются интегральными. Основы теории интегральных уравнений были разработаны в конце XIX и начале XX столетий итальянским математиком В. Вольтерра (1860—1940) и шведским математиком Э. Фредгольмом (1866—1927). К интегральным уравнениям сводятся многие задачи математической физики. Развитие теории интегральных уравнений послужило одним из толчков к созданию функционального анализа, и некоторые важные результаты функционального анализа являются прямым обобщением теорем, относящихся к интегральным уравнениям.

Наиболее подробно изучены линейные интегральные уравнения, из которых мы остановимся на так называемых *уравнениях Фредгольма второго рода* в их простейшем виде:

$$x(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt + f(s). \tag{14}$$

Здесь искомая функция $x(s)$ должна быть определена на отрезке $[a, b]$, функция $K(s, t)$, называемая *ядром* уравнения, предполагается заданной в квадрате Δ, определяемом неравенствами $a \leqslant s,\ t \leqslant b$, а свободный член $f(s)$ задан на отрезке $[a, b]$: λ — параметр с числовыми значениями. Для простоты ограничимся случаем, когда все функции, входящие в уравнение, предполагаются вещественными и непрерывными, параметр λ также считаем вещественным.

Покажем, что при всех λ, достаточно малых по абсолютной величине, к уравнению (14) может быть применена теорема Банаха. Правую часть уравнения (14) при каждом фиксированном λ можно рассматривать как оператор Ux, определенный в пространстве C непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, со значениями в том же пространстве. Положим $M = \max |K(s, t)|$ в квадрате Δ*) и покажем, что, при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, U — оператор сжатия.

*) Непрерывная функция двух переменных, заданная в прямоугольнике, ограничена и имеет наибольшее и наименьшее значения (теорема Вейерштрасса).

Пусть $x,\ \widetilde{x} \in C,\ y = Ux,\ \widetilde{y} = U\widetilde{x}$. Тогда

$$y(s) = \lambda \int_a^b K(s,\ t)\, x(t)\, dt + f(s),$$

$$\widetilde{y}(s) = \lambda \int_a^b K(s,\ t)\, \widetilde{x}(t) dt + f(s),$$

откуда

$$y(s) - \widetilde{y}(s) = \lambda \int_a^b K(s,\ t)\, [x(t) - \widetilde{x}(t)]\, dt.$$

Следовательно, при всяком $s \in [a,\ b]$

$$|y(s) - \widetilde{y}(s)| \leqslant |\lambda| \int_a^b |K(s,\ t)|\, |x(t) - \widetilde{x}(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| M \max |x(t) - \widetilde{x}(t)| \cdot (b-a) = |\lambda| M (b-a)\, \rho(x,\ \widetilde{x}),$$

а потому и

$$\rho(y,\ \widetilde{y}) \leqslant \alpha \rho(x,\ \widetilde{x}), \text{ где } \alpha = |\lambda| M (b-a) < 1.$$

Так как нахождение решения уравнения (14) сводится к отысканию неподвижных точек оператора U, то, следовательно, при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ уравнение (14) имеет единственное решение при любом свободном члене и это решение может быть получено методом последовательных приближений. В гл. VII мы увидим, что промежуток значений λ, для которых верен этот результат, может быть расширен.

Остановимся еще на нелинейных интегральных уравнениях вида

$$x(s) = \lambda \int_a^b K(s,\ t,\ x(t))\, dt. \tag{15}$$

Ядро $K(s,\ t,\ x)$, рассматриваемое как функция трех переменных, предполагается заданным и непрерывным при $a \leqslant s,\ t \leqslant b$ и $|x| \leqslant H$, искомую функцию $x(s)$ также считаем непрерывной и пусть, кроме того, ядро удовлетворяет условию Липшица по аргументу x:

$$|K(s,\ t,\ x_1) - K(s,\ t,\ x_2)| \leqslant L |x_1 - x_2|.$$

Положим $M = \max |K(s,\ t,\ x)|$. Покажем, что если $|\lambda| <$

$< \frac{1}{L(b-a)}$ и одновременно $|\lambda| \leqslant \frac{H}{M(b-a)}$, то к уравнению (15) теорема Банаха применима.

Для этого из пространства C непрерывных функций $x(t)$, заданных на отрезке $[a, b]$, выделим подмножество F, состоящее из всех функций, удовлетворяющих неравенству $|x(t)| \leqslant H$. Иными словами, F — замкнутый шар радиуса H с центром $x(t) \equiv 0$. Оператор Ux, определяемый правой частью (15), отображает F в самого себя, так как для $y = Ux$, $x \in F$, имеем

$$|y(s)| = |\lambda| \left| \int_a^b K(s, t, x(t))\, dt \right| \leqslant |\lambda| M(b-a) \leqslant H.$$

Кроме того, U — оператор сжатия, так как для $y = Ux$, $\widetilde{y} = U\widetilde{x}$ $(x, \widetilde{x} \in F)$ имеем

$$|y(s) - \widetilde{y}(s)| \leqslant |\lambda| \int_a^b |K(s, t, x(t)) - K(s, t, \widetilde{x}(t))|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| L \int_a^b |x(t) - \widetilde{x}(t)|\, dt \leqslant |\lambda| L \rho(x, \widetilde{x}) \cdot (b-a),$$

откуда

$$\rho(y, \widetilde{y}) \leqslant \alpha \rho(x, \widetilde{x}), \quad \text{где} \quad \alpha = |\lambda| L(b-a) < 1.$$

Таким образом, уравнение (15) имеет при указанных условиях единственное непрерывное решение, такое, что $|x(t)| \leqslant H$, и процесс последовательных приближений сходится *). За начальную можно взять любую функцию, ограниченную той же постоянной H.

4.6. Теорема Пеано

В этом параграфе мы дадим одно приложение понятия компактности. Именно, мы приведем доказательство теоремы о существовании решения дифференциального уравнения (9) только при одном предположении непрерывности правой части (без требования выполнения условия Липшица). Такая теорема была доказана итальянским математиком Д. Пеано (1858—1932). Однако, в отличие от теоремы, полученной в 4.4 методом последовательных приближений, в теореме Пеано единственности решения, удовлетворяющие заданному начальному условию, может не быть, что подтверждается простыми примерами **).

Установим сначала лемму, используемую ниже.

*) Этот результат был установлен В. В. Немыцким.

**) Например, уравнение $y' = 3y^{2/3}$ имеет два решения, удовлетворяющих условию $y|_{x=0} = 0$: $y \equiv 0$ и $y = x^3$.

Лемма 4.6.1. *Если функция* $y = \varphi(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и ее график — ломаная, все прямолинейные звенья которой имеют угловые коэффициенты, заключенные между числами* α *и* β $(\alpha < \beta)$, *то для любых* $x', x'' \in [a, b]$ *при* $x' < x''$

$$\alpha(x'' - x') \leqslant \varphi(x'') - \varphi(x') \leqslant \beta(x'' - x'). \tag{16}$$

Доказательство. Пусть абсциссы вершин ломаной суть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, а данные точки x' и x'' расположены так, что $x_i \leqslant x' < x_{i+1}$, $x_j \leqslant x'' < x_{j+1}$ $(j \geqslant i)$. Если $j = i$, то формула (16) очевидна, так как точки с абсциссами x' и x'' лежат на одном звене ломаной. Пусть теперь $j > i$. Обозначим через γ_r угловой коэффициент того отрезка ломаной, который проектируется на $[x_r, x_{r+1}]$ $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x') = \gamma_i (x_{i+1} - x'),\\
&\varphi(x_{i+2}) - \varphi(x_{i+1}) = \gamma_{i+1} (x_{i+2} - x_{i+1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1}) = \gamma_{j-1} (x_j - x_{j-1}),\\
&\varphi(x'') - \varphi(x_j) = \gamma_j (x'' - x_j).
\end{aligned}$$

Так как при всех r $\alpha \leqslant \gamma_r \leqslant \beta$, то

$$\begin{aligned}
&\alpha(x_{i+1} - x') \leqslant \varphi(x_{i+1}) - \varphi(x') \leqslant \beta(x_{i+1} - x'),\\
&\alpha(x_{i+2} - x_{i+1}) \leqslant \varphi(x_{i+2}) - \varphi(x_{i+1}) \leqslant \beta(x_{i+2} - x_{i+1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha(x_j - x_{j-1}) \leqslant \varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1}) \leqslant \beta(x_j - x_{j-1}),\\
&\alpha(x'' - x_j) \leqslant \varphi(x'') - \varphi(x_j) \leqslant \beta(x'' - x_j).
\end{aligned}$$

Складывая почленно эти неравенства, получим (16).

Теорема 4.6.1. *Пусть правая часть уравнения* (9) $f(x, y)$ *непрерывна в прямоугольнике*

$$\Delta(|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b).$$

Тогда в промежутке $[x_0 - h, x_0 + h]$, *где* h *— достаточно малое положительное число, существует по крайней мере одно решение уравнения* (9), *удовлетворяющее начальному условию* (10).

Доказательство. Положим $M = \max |f(x, y)|$ в прямоугольнике Δ *) (рис. 8). Через точку (x_0, y_0) проведем две прямые (D_1) и (D_2) с угловыми коэффициентами M и $-M$ (соответственно). Затем возьмем любое $h > 0$, при котором прямые $x = x_0 + h$ и $x = x_0 - h$ пересекаются с прямыми (D_1) и (D_2) внутри или на контуре прямоугольника Δ. Построенные прямые ограничивают два треугольника ABC и AB_1C_1 с общей вершиной $A(x_0, y_0)$.

*) Мы считаем дальше, что $M > 0$. Если $M = 0$, то теорема тривиальна.

Далее строим так называемые ломаные Эйлера. Для этого берем любое натуральное n и полагаем

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{n}, \quad x_2 = x_0 + \frac{2h}{n}, \ \ldots, \ x_r = x_0 + \frac{rh}{n}, \ \ldots, \ x_n = x_0 + h;$$

$$x_{-1} = x_0 - \frac{h}{n}, \quad x_{-2} = x_0 - \frac{2h}{n}, \ \ldots, \ x_{-r} = x_0 - \frac{rh}{n}, \ \ldots, \ x_{-n} = x_0 - h.$$

Затем из точки (x_0, y_0) проводим прямолинейный отрезок с угловым коэффициентом, равным $f(x_0, y_0)$, до пересечения с прямой $x = x_1$. Пусть y_1 — ордината точки пересечения. Тогда из точки (x_1, y_1) проводим прямолинейный отрезок с угловым коэффициентом, равным $f(x_1, y_1)$, до пересечения с прямой $x = x_2$, и это построение продолжаем до пересечения с прямой $x = x_0 + h$. В процессе этого построения в каждой уже полученной вершине ломаной (x_r, y_r) угловой коэффициент следующего отрезка берется равным $f(x_r, y_r)$. Так как $|f(x, y)| \leqslant M$ во всем прямоугольнике Δ, то угловой коэффициент каждого отрезка заключен между $-M$ и M, а потому вся ломаная будет лежать между прямыми (D_1) и (D_2) и, следовательно, не выйдет из треугольника ABC. Аналогичное построение проделаем и налево от точки (x_0, y_0) в треугольнике AB_1C_1 и объединяем обе ломаные в одну, которую обозначим (L_n). Эту ломаную будем рассматривать как график некоторой непрерывной функции $\varphi_n(x)$, заданной на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$. Придавая n различные значения, получим бесконечную последовательность таких функций.

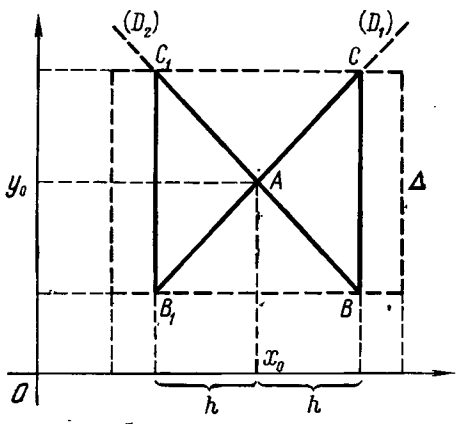

Рис. 8.

Функции $\varphi_n(x)$ равноограничены, так как все их значения удовлетворяют неравенству

$$y_0 - b \leqslant \varphi_n(x) \leqslant y_0 + b.$$

Кроме того, по лемме, при любых x', $x'' \in [x_0 - h, x_0 + h]$ $(x' < x'')$

$$-M(x'' - x') \leqslant \varphi_n(x'') - \varphi_n(x') \leqslant M(x'' - x'),$$

следовательно, при любых x', $x'' \in [x_0 - h, x_0 + h]$:

$$|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| \leqslant M|x' - x''|, \tag{17}$$

т. е. функции $\varphi_n(x)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной M. Тогда по лемме 3.9.1, функции $\varphi_n(x)$ равностепенно непрерывны. По теореме Арцела (3.9.1) множество функций $\varphi_n(x)$ компактно в C, следовательно, некоторая частичная последовательность $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ равномерно сходится к какой-то непрерывной функции $\varphi(x)$. При этом, по построению, все $\varphi_n(x_0) = y_0$, следовательно, и $\varphi(x_0) = y_0$, т. е. $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (10).

Докажем, что $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (9). Возьмем любой $\bar{x}$ из отрезка $[x_0 - h, x_0 + h]$ и положим $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$. Нужно доказать, что $\varphi'(\bar{x}) = f(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$, т. е. что

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{\varphi(x) - \varphi(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{y}). \tag{18}$$

Зададим $\varepsilon > 0$. По непрерывности функции $f(x, y)$ в прямоугольнике Δ, в частности в точке $(\bar{x}, \bar{y})$, существует такое $\eta > 0$, что

$$f(\bar{x}, \bar{y}) - \varepsilon < f(x, y) < f(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon, \tag{19}$$

если $|x - \bar{x}| < \eta$, $|y - \bar{y}| < \eta$ и точка $(x, y) \in \Delta$. Далее возьмем $\delta = \min\left(\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{4M}\right)$. Пользуясь сходимостью $\varphi_{n_k}(\bar{x})$ к $\varphi(\bar{x})$, подберем N так, что при $k \geqslant N$

$$|\varphi_{n_k}(\bar{x}) - \bar{y}| < \frac{\eta}{2}. \tag{20}$$

При этом мы будем считать, что $N \geqslant \frac{h}{\delta}$. Тогда при $n \geqslant N$ разность между абсциссами соседних вершин ломаной (L_n) будет $\frac{h}{n} \leqslant \frac{h}{N} \leqslant \delta$. В частности, это имеет место при $n = n_k$, если $k \geqslant N$ (так как для частичной последовательности всегда $n_k \geqslant k$). Следовательно, для каждой точки ломаной (L_n) (при $n \geqslant N$), абсцисса которой x удовлетворяет условию $|x - \bar{x}| < \delta$, соседние с ней вершины ломаной имеют абсциссы, удовлетворяющие неравенству $|x - \bar{x}| < 2\delta \leqslant \eta$. Если же $|x - \bar{x}| < 2\delta$, то по (17)

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(\bar{x})| < 2M\delta \leqslant \frac{\eta}{2}.$$

Тогда при $k \geqslant N$ вследствие (20) имеем

$$|\varphi_{n_k}(x) - \bar{y}| \leqslant |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_k}(\bar{x})| + |\varphi_{n_k}(\bar{x}) - \bar{y}| < \eta.$$

Таким образом, угловые коэффициенты всех тех звеньев ломаной (L_{n_k}) $(k \geqslant N)$, которыми соединяются точки этой ломаной с абсциссами $\bar{x}$ и x, если $|x - \bar{x}| < \delta$, вычисляются в вершинах, коорди-

наты которых удовлетворяют условиям $|x-\bar{x}|<\eta$, $|y-\bar{y}|<\eta$, а потому все эти угловые коэффициенты удовлетворяют неравенству (19). Тогда, по лемме, считая для определенности $x>\bar{x}$, имеем

$$[f(\bar{x}, \bar{y})-\varepsilon](x-\bar{x})<\varphi_{n_k}(x)-\varphi_{n_k}(\bar{x})<[f(\bar{x}, \bar{y})+\varepsilon](x-\bar{x})$$

(при $x<\bar{x}$ получим обратное неравенство). Переходя к пределу при $k\to\infty$ и деля на $x-\bar{x}$, получаем, что при $|x-\bar{x}|<\delta$

$$f(\bar{x}, \bar{y})-\varepsilon\leqslant\frac{\varphi(x)-\varphi(\bar{x})}{x-\bar{x}}\leqslant f(\bar{x}, \bar{y})+\varepsilon.$$

Тем самым равенство (18) доказано, а вместе с ним доказана и теорема.

Уравнение (9) можно записать и с помощью операторов.

Для этого обозначим через U оператор, определяемый правой частью уравнения (9), который каждой функции $y(x)$ из C (на отрезке $[x_0-h, x_0+h]$) со значениями, входящими в промежуток $[y_0-b, y_0+b]$, сопоставляет функцию $f(x, y(x))$ тоже из C. Если через D обозначить оператор дифференцирования, сопоставляющий каждой непрерывно дифференцируемой функции y из C ее производную y', т. е. тоже точку из C (этот оператор не непрерывен в метрике C), то уравнение (9) можно записать в виде $Dy=Uy$.

ГЛАВА V

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

5.1. Линейные системы

В метрических пространствах мы занимались изучением вопросов, связанных, главным образом, с понятиями расстояния, сходимости, непрерывности. Уже эти вопросы, как мы имели возможность убедиться в предыдущей главе, находят важные применения в различных разделах математики. Однако, с другой стороны, в гл. I—II мы видели, что в эвклидовых пространствах весьма существенную роль играют и алгебраические операции, которые можно производить над векторами. Те же алгебраические операции сложения и умножения на число часто приходится производить в математике и над другими объектами, например над функциями. Поэтому представляет интерес изучить эти операции с общей точки зрения, изучить те общие законы, которым подчиняются эти операции во многих конкретных случаях. Естественно ожидать, что для таких пространств, в которых, помимо метрики, определены еще и алгебраические операции, в какой-то степени согласованные с метрикой, можно построить более содержательную теорию, имеющую значительно более широкие приложения по сравнению с общей теорией метрических пространств.

Начнем с введения некоторых алгебраических понятий. Будем рассматривать множество $\boldsymbol{E}$, состоящее из произвольных элементов, и предположим, что в этом множестве определены две операции: сложение элементов и умножение элемента на число. Именно, мы считаем, что для любых двух элементов x, $y \in \boldsymbol{E}$ однозначно определен элемент из $\boldsymbol{E}$, называемый их *суммой* и обозначаемый $x + y$; далее, для любого $x \in \boldsymbol{E}$ и любого числа λ однозначно определен элемент $\lambda x \in \boldsymbol{E}$, называемый *произведением* элемента x на число λ. При этом, возможно, что умножение определено только на вещественные числа, но бывает также, что произведение имеет смысл и при любых комплексных λ.

Определение. Множество $\boldsymbol{E}$ называется *линейной системой*, если в нем определены в том смысле, как указано выше,

операции сложения элементов и умножения элемента на число, причем выполнены следующие условия (здесь x, y, z обозначают элементы, λ, μ — числа):

1) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);

3) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ } (дистрибутивность умножения отно-

4) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$ } сительно сложения);

5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x$ (ассоциативность умножения);

6) существует такой элемент $\theta \in \boldsymbol{E}$, называемый *нулевым*, что $0x = \theta$ для любого $x \in \boldsymbol{E}$ (произведение любого элемента на число нуль равно нулевому элементу);

7) $1x = x$ для любого $x \in \boldsymbol{E}$ (произведение любого элемента на число единицу равно тому же элементу).

Таким образом, мы включили в определение линейной системы всю ту основную группу алгебраических законов, выполнение которых мы уже отмечали в конечно-мерных эвклидовых пространствах (1.2), в $\boldsymbol{s}$ (2.1) и в бесконечно-мерном эвклидовом пространстве l^2 (2.2) *). Следовательно, $\boldsymbol{R}_n$, $\boldsymbol{s}$ и l^2 — линейные системы. Элементы линейных систем часто называют векторами. Если умножение элементов линейной системы определено только на вещественные числа, то система называется *вещественной*, если же умножение определено на любые комплексные числа, то система называется *комплексной*.

Установим некоторые следствия из аксиом линейной системы. Введем одно общее понятие. Если в каком-нибудь множестве $\boldsymbol{E}$ определено коммутативное действие сложения, то говорят, что некоторый элемент $\theta_1 \in \boldsymbol{E}$ есть *нуль сложения*, если $x + \theta_1 = x$ для любого $x \in \boldsymbol{E}$.

а) В линейной системе $\boldsymbol{E}$ нулевой элемент, и только он один, является нулем сложения.

Действительно, для любого $x \in \boldsymbol{E}$, по 6), 7) и 4), $x + \theta = 1x + 0x = (1 + 0) x = 1x = x$, т. е. θ — нуль сложения.

Если θ_1 — какой-то нуль сложения, то $\theta + \theta_1 = \theta$. Но так как, по доказанному, θ — тоже нуль сложения, то $\theta_1 + \theta = \theta_1$. Отсюда, вследствие коммутативности сложения, $\theta_1 = \theta$, т. е. единственность нуля сложения доказана.

Для каждого x из линейной системы $\boldsymbol{E}$ определим элемент $-x$, полагая $-x = (-1) x$. Тогда имеет место

б) $x + (-x) = \theta$.

Действительно, по 7), 4) и 6)

$$x + (-x) = 1x + (-1) x = (1 - 1) x = 0x = \theta.$$

*) Некоторые авторы называют линейные системы линейными или векторными пространствами. Мы предпочитаем сохранить термин «пространство» для таких множеств, в которых определено понятие сходимости.

Отметим также, что $-(-x) = x$ [следует из 5) и 7)].

Теперь, исходя из действия сложения, определим в линейной системе $\boldsymbol{E}$ *разность* двух элементов, полагая

$$x - y = x + (-y).$$

Тем самым мы определили в $\boldsymbol{E}$ действие вычитания.

Из самого определения разности следует, что

$$(x - y) + y = x.$$

Следующее предложение показывает, что вычитание есть действие, обратное сложению.

в) При любых $x, y \in \boldsymbol{E}$ уравнение $y + z = x$ с неизвестным z имеет единственное решение $z = x - y$. Иными словами, слагаемые можно переносить из одной части равенства в другую, заменяя их при этом на элементы, противоположные по знаку.

Для доказательства в) заметим, что, с одной стороны, как мы уже видели, $z = x - y$ является решением данного уравнения. С другой стороны, если какой-то элемент z удовлетворяет данному уравнению, то, прибавляя к обеим его частям по $-y$, имеем

$$-y + y + z = x - y, \text{ т. е. } \theta + z = x - y \text{ или } z = x - y.$$

Из б) следует, что $x - x = \theta$. Верно и обратное, а именно:

г) если $x - y = \theta$, то $x = y$.

Действительно, равенство $x - y = \theta$ означает, что x — решение уравнения $z + (-y) = \theta$. Тогда по в) $x = \theta - (-y) = \theta + y = y$.

Перейдем теперь к некоторым следствиям из аксиом линейной системы, связанным с действием умножения.

Заметим, что законы дистрибутивности умножения 3) и 4) справедливы и относительно вычитания. Действительно,

$$\lambda(x - y) = \lambda[x + (-y)] = \lambda x + \lambda(-1)y = \lambda x + (-1)\lambda y = \lambda x - \lambda y;$$

$$(\lambda - \mu)x = [\lambda + (-\mu)]x = \lambda x + (-1)\mu x = \lambda x - \mu x.$$

Далее, отметим следующие свойства:

д) $\lambda\theta = \theta$ при любом λ;

е) если $\lambda x = \theta$, то или $\lambda = 0$ или $x = \theta$;

ж) если $\lambda x = \lambda y$, то или $\lambda = 0$ или $x = y$;

з) если $\lambda x = \mu x$, то или $\lambda = \mu$ или $x = \theta$.

Доказательство. д) Имеем $0\theta = \theta$, а потому, по 5),

$$\lambda\theta = \lambda(0\theta) = (\lambda 0)\,\theta = 0\theta = \theta.$$

е) По 6) равенство $\lambda x = \theta$ выполняется для любого $x \in \boldsymbol{E}$, если $\lambda = 0$. Если же $\lambda \neq 0$, то из равенства $\lambda x = \theta$ имеем с помощью 7), 5) и д):

$$x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\theta = \theta.$$

ж) Из равенства $\lambda x = \lambda y$, благодаря дистрибутивности умножения, следует, что $\lambda(x-y) = \lambda x - \lambda y = \theta$. А тогда, по е), или $\lambda = 0$ или $x - y = \theta$, т. е. $x = y$.

з) По дистрибутивности умножения

$$(\lambda - \mu)\, x = \lambda x - \mu x = \theta,$$

а тогда, по е), или $\lambda - \mu = 0$ или $x = \theta$.

Таким образом, обе алгебраические операции, определенные в линейных системах, обладают многими обычными свойствами сложения и умножения чисел.

Все метрические пространства, рассмотренные в качестве примеров в 3.2, легко превращаются в линейные системы. Мы уже отмечали выше, что $\boldsymbol{R}_n$, $\boldsymbol{s}$ и l^2 при том определении сложения векторов и их умножения на число, которое уже было дано в гл. I—II,— линейные системы. Если определение сложения и умножения из пространства $\boldsymbol{s}$ перенести в $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{m}$, то ясно, что последние также будут линейными системами. Во всех этих пространствах нулевым элементом является последовательность, все члены которой равны нулю.

Наконец, в $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}_L$ и $\boldsymbol{C}_{L^2}$ и во всех пространствах $\boldsymbol{L}^p$ сумма и произведение определяются, как обычно для функций:

$$z = x + y \text{ означает, что } z(t) = x(t) + y(t),$$

$$z = \lambda x \text{ означает, что } z(t) = \lambda x(t).$$

Нулевым элементом является, очевидно, функция, тождественно равная нулю *). Читатель легко убедится, что и здесь выполнены все аксиомы линейной системы.

В дальнейшем все перечисленные пространства мы будем рассматривать как линейные системы, считая, что сложение и умножение определено в них так, как это было сейчас указано.

5.2. Нормированные пространства

Во многих линейных системах удается ввести метрику тем же способом, как это было сделано в эвклидовых пространствах. С этой целью, обобщая понятие нормы вектора в эвклидовых пространствах, введем это понятие в произвольной линейной системе.

Определение. Линейная система $\boldsymbol{E}$ называется *нормированным пространством*, если для каждого элемента $x \in \boldsymbol{E}$ опре-

*) В $\boldsymbol{L}^p$ нулевой элемент изображается любой функцией, которая эквивалентна нулю (ср. 3.2).

делено вещественное число, называемое его *нормой* и обозначаемое $\| x \|$, причем выполнены следующие условия:

I. $\| x \| \geqslant 0$ для любого $x \in \boldsymbol{E}$; $\| x \| = 0$ только для $x = \theta$;

II. $\| \lambda x \| = | \lambda | \, \| x \|$ для любого $x \in \boldsymbol{E}$ и любого числа λ;

III. $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ для любых $x, y \in \boldsymbol{E}$ (аксиома треугольника).

Иными словами, норма есть функционал, заданный на линейной системе и удовлетворяющий перечисленным выше трем аксиомам. Эти аксиомы совпадают с теми основными свойствами нормы вектора в эвклидовых пространствах, которые отмечались в 1.3 и 2.2.

Элементы нормированного пространства называют как точками, так и векторами.

Нормированное пространство называется *вещественным* или *комплексным* в зависимости от того, вещественной или комплексной является система $\boldsymbol{E}$.

Определим теперь расстояние в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, полагая для любых $x, y \in \boldsymbol{E}$

$$\rho(x, y) = \| x - y \| \tag{1}$$

— *расстояние между двумя элементами равно норме их разности.* Из этого определения следует, так как $x - \theta = x$, что

$$\| x \| = \| x - \theta \| = \rho(x, \theta),$$

т. е. *норма любого элемента равна его расстоянию от* θ.

Проверим, что в $\boldsymbol{E}$ выполнены все аксиомы метрического пространства.

Если $x \neq y$, то $x - y \neq \theta$, а тогда, по аксиоме I из настоящего параграфа, $\| x - y \| > 0$; если же $x = y$, то $x - y = \theta$ и, следовательно, $\| x - y \| = 0$.

Далее, $x - y = (-1)(y - x)$, а потому, на основании аксиомы II, $\| x - y \| = \| y - x \|$, т. е. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Наконец, неравенство треугольника для расстояния вытекает из аксиомы треугольника для нормы:

$$\rho(x, y) = \| x - y \| = \| (x - z) + (z - y) \| \leqslant \| x - z \| + \| z - y \| = \\ = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Таким образом, нормированные пространства — частный случай метрических пространств.

В качестве примеров нормированных пространств приведем все пространства, рассмотренные в 3.2 и в предыдущем параграфе кроме $\boldsymbol{s}$. В $\boldsymbol{R}_n$ и $\boldsymbol{l}^2$ норма уже была определена в гл. I—II

и там же были проверены основные свойства нормы. Используя обозначения из 3.2, положим:

в l: $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|$,

в m: $\|x\| = \sup |\xi_i|$,

в C: $\|x\| = \max |x(t)|$,

в C_L и в L: $\|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt$,

в C_{L^2} и в L^2: $\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt}$.

в L^p при произвольном $p > 1$: $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)^p|\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

Пространства l^p при произвольном $p > 1$ также оказываются линейными системами, если в них перенести определение сложения и умножения из пространства s. Норму в l^p можно ввести по формуле

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

и тогда l^p становится нормированным пространством. При этом во всех перечисленных пространствах норма и ранее определенное расстояние связаны формулой (1).

Выполнение первых двух аксиом нормы во всех этих случаях очевидно. Неравенство треугольника для нормы вытекает из аксиомы треугольника для расстояния, уже проверенной для этих пространств в гл. III. Именно, учитывая формулу (1), получаем

$$\|x+y\| = \rho(x+y, \theta) \leqslant \rho(x+y, y) + \rho(y, \theta) = \\ = \|(x+y)-y\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|^{*}).$$

О невозможности (в некотором смысле) превратить s в нормированное пространство мы скажем несколько слов ниже. Во всяком случае заметим, что, в отличие от всех других рассмотренных пространств, величина $\rho(x, \theta)$ не может быть принята в s за норму, так как для нее нарушается аксиома II.

*) Фактически в этом параграфе доказано, что если в линейной системе определены расстояние и норма, связанные между собой формулой (1), то выполнение аксиомы треугольника для одного из них автоматически влечет выполнение той же аксиомы для другого.

Отметим одно неравенство, вытекающее из аксиомы треугольника:

$$\| x+y \| \geqslant \| x \| - \| y \|. \tag{2}$$

Чтобы получить его, достаточно представить x в виде $x = (x + y) - y$ и записать, что по аксиоме треугольника, а также вследствие аксиомы II,

$$\| x \| \leqslant \| x+y \| + \| -y \| = \| x+y \| + \| y \|.$$

После переноса $\| y \|$ в левую часть, получим (2).

Если применить общее определение сходимости, данное в метрических пространствах, к нормированному пространству, то получим:

$$x_n \to x \text{ означает, что } \| x_n - x \| \to 0.$$

Эту сходимость мы будем иногда называть *сходимостью по норме*. Далее, по общим свойствам расстояния в метрических пространствах $\| x - y \|$ — непрерывная функция своих аргументов, т. е. если $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $\| x_n - y_n \| \to \| x - y \|$ (см. 3.3). В частности, полагая все $y_n = \theta$, получаем, что $\| x_n \| \to \| x \|$ при $x_n \to x$ (непрерывность нормы).

Теперь можно пояснить сказанное выше о пространстве s. Именно, мы докажем, что в s никаким способом нельзя определить норму так, чтобы сходимость по норме совпала с ранее определенной в s сходимостью по метрике, т. е. со сходимостью по координатам.

Рассуждая от противного, допустим, что такая норма в s существует. Пусть e_n есть n-й координатный орт в s, т. е. вектор, у которого n-я координата равна 1, а все остальные равны 0. Так как $e_n \neq \theta$, то $\| e_n \| > 0$.

Положим $x_n = \dfrac{1}{\| e_n \|} e_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда, по аксиоме II,

$$\| x_n \| = \frac{1}{\| e_n \|} \| e_n \| = 1.$$

При любом натуральном k последовательность k-х координат элементов x_n имеет вид

$$0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{\| e_k \|}, 0, 0, \ldots$$

и тем самым стремится к 0. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ сходится к θ по координатам. С другой стороны, $\| x_n \| \not\to 0$, и мы приходим к противоречию с предположением, что сходимость по введенной норме совпадает со сходимостью по координатам.

Покажем, что основные алгебраические операции в нормированном пространстве непрерывны.

а) Если $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $x_n + y_n \to x + y$.
Действительно,

$$\| (x_n + y_n) - (x + y) \| = \| (x_n - x) + (y_n - y) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| x_n - x \| + \| y_n - y \| \to 0.$$

б) Если $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$.
Действительно, учитывая, что λ_n в совокупности ограничены (поскольку $\{\lambda_n\}$ стремится к конечному пределу), имеем

$$\| \lambda_n x_n - \lambda x \| = \| \lambda_n (x_n - x) + (\lambda_n - \lambda) x \| \leqslant$$
$$\leqslant | \lambda_n | \, \| x_n - x \| + | \lambda_n - \lambda | \, \| x \| \to 0.$$

Для ограниченности множества в нормированном пространстве можно дать более простое определение, равносильное тому определению ограниченности по расстоянию, которое было введено в произвольных метрических пространствах (см. 3.5): множество A *ограничено по норме* (в дальнейшем мы часто говорим просто ограничено), если нормы всех его элементов в совокупности ограничены. Действительно, если A ограничено по расстоянию, то оно содержится в некотором шаре, $A \subset S^*(a, r)$. Следовательно, $\| x - a \| \leqslant r$ для $x \in A$. А тогда

$$\| x \| = \| (x - a) + a \| \leqslant \| x - a \| + \| a \| \leqslant r + \| a \|;$$

это и означает ограниченность норм $\| x \|$, так как в правой части стоит некоторая постоянная.

Обратно, если $\| x \| \leqslant R$ для всех $x \in A$, то $A \subset S^*(\theta, R)$ и A ограничено по расстоянию.

Фундаментальные последовательности $\{ x_n \}$ в нормированном пространстве в соответствии с определением расстояния характеризуются условием:

$$\| x_n - x_m \| \to 0 \text{ при } n, \ m \to \infty.$$

Так как, по теореме 3.5.2, фундаментальная последовательность ограничена по расстоянию, то и *нормы элементов всякой фундаментальной последовательности в совокупности ограничены.*

Применяя определение полноты, данное для произвольного метрического пространства, мы называем нормированное пространство *полным*, если всякая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел.

Теория нормированных пространств построена, главным образом, С. Банахом в 20-х годах нашего столетия. Многие важные результаты этой теории получены венгерским математиком Ф. Риссом (1880—1956). В связи с тем, что наибольшее внимание Банах уделял п о л н ы м нормированным пространствам, последние называют также *банаховыми.*

Как и для векторов в эвклидовом пространстве, можно рассматривать ряды, составленные из элементов произвольного нормированного пространства: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (ср. 2.4). При этом сумма ряда определяется обычным способом, как предел последовательности частичных сумм, и если этот предел существует, то ряд называется сходящимся. В 2.4 мы видели, что с помощью признака Больцано — Коши, дающего в l^2 достаточное условие сходимости, можно было из сходимости ряда норм $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|$ вывести сходимость ряда самих элементов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Тем самым в l^2 было обосновано понятие абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Так как признак Больцано — Коши дает достаточное условие сходимости в любом полном пространстве, то проведенные в 2.4 рассуждения справедливы во всяком полном нормированном пространстве. Таким образом, понятие абсолютной сходимости ряда переносится и в любые банаховы пространства: если сходится ряд норм $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|$, то и ряд элементов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ тоже сходится и называется *абсолютно сходящимся*. При этом $\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|$ (ср. 2.5).

В дальнейшем мы будем рассматривать почти исключительно вещественные нормированные пространства. По этому поводу не будем делать специальных указаний в каждом изучаемом вопросе. В тех немногих случаях, когда будут рассматриваться комплексные пространства, это обстоятельство будет особо оговорено.

5.3. Конечно-мерные пространства *)

Понятие линейной независимости векторов эвклидова пространства, введенное в 1.11, может быть обобщено на элементы произвольного нормированного пространства E. При этом, как и раньше, *линейной комбинацией* элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называем всякий элемент, представимый в виде $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Определение. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ называются *линейно независимыми*, если для линейной комбинации этих

*) Перед чтением этого параграфа особо рекомендуем читателю восстановить в памяти все содержание 1.11.

элементов равенство $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \theta$ выполняется только когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. В противном случае элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *линейно зависимыми*.

Совершенно так же, как в 1.11, можно установить, что:

а) элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда по крайней мере один из этих элементов представляется в виде линейной комбинации остальных;

б) если элемент $x \in \boldsymbol{E}$ представляется в виде линейной комбинации линейно независимых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, то коэффициенты λ_k в этой формуле определяются единственным образом *).

Заметим также, что если элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независимы, то они все отличны от θ. Действительно, если бы, например, $x_n = \theta$, то имелось бы представление $x_n = 0x_1 + \ldots + 0x_{n-1}$, что, согласно а), противоречит линейной независимости $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Нормированное пространство $\boldsymbol{E}$ называется *конечно-мерным*, если в нем существует конечное число элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, через которые любой $x \in \boldsymbol{E}$ выражается в виде их линейной комбинации. При этом если элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы, то исключая из них последовательно, как в 1.11, те, которые представляются в виде линейной комбинации остальных, можно добиться, чтобы оставшаяся система состояла из линейно независимых элементов, и при этом каждый $x \in \boldsymbol{E}$ все же представлялся в виде их линейной комбинации. Поэтому мы с самого начала будем считать, что элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уже линейно независимы. Тогда совокупность их называется *базисом* пространства $\boldsymbol{E}$ **).

Если же в нормированном пространстве существует сколь угодно большое число линейно независимых элементов, то пространство называется *бесконечно-мерным*.

В конечно-мерном пространстве $\boldsymbol{E}$ по заданному базису $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мы получаем для каждого $x \in \boldsymbol{E}$ единственное представление вида

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k. \tag{3}$$

*) Определение линейной независимости бесконечного множества векторов, данное в 2.8, позднее (5.6) тоже будет распространено и на элементы произвольного нормированного пространства.

**) К конечно-мерным пространствам относится и нормированное пространство, состоящее из одного нулевого элемента θ. В нем нет базиса (ср. примечание в 1.11).

Обратно, по любым $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ найдется $x \in \boldsymbol{E}$, имеющий вид (3) *).

По аналогии с координатами вектора назовем числа λ_k *координатами* элемента x. Сопоставляя каждому $x \in \boldsymbol{E}$ вектор l из $\boldsymbol{R}_n$ с координатами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, мы установим, как и в 1.11, алгебраический изоморфизм между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{R}_n$. При этом, так как элементу $\theta \in \boldsymbol{E}$ соответствует нулевой вектор из $\boldsymbol{R}_n$, а алгебраическим операциям над элементами из $\boldsymbol{E}$ соответствуют те же операции над их образами в $\boldsymbol{R}_n$ и обратно, то линейно независимым элементам из $\boldsymbol{E}$ соответствуют линейно независимые векторы из $\boldsymbol{R}_n$; в частности, заданному базису $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствует в $\boldsymbol{R}_n$ базис из координатных ортов.

Помимо заданного базиса в $\boldsymbol{E}$, можно найти и многие другие базисы. При уже установленном по первому заданному базису алгебраическом изоморфизме между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{R}_n$ каждому базису из $\boldsymbol{E}$ будет соответствовать некоторый базис в $\boldsymbol{R}_n$. По теореме 1.11 все базисы в $\boldsymbol{R}_n$ содержат n векторов. Следовательно, таково же число элементов и в любом базисе в $\boldsymbol{E}$. Таким образом, число элементов во всех базисах конечно-мерного нормированного пространства одно и то же **). Это число называется *размерностью* пространства $\boldsymbol{E}$. Если размерность равна n, то пространство $\boldsymbol{E}$ называется *n-мерным* ***).

Теперь мы исследуем изоморфизм, установленный выше между n-мерным пространством $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{R}_n$ по заданному в $\boldsymbol{E}$ базису $x_1, x_2, \ldots, x_n$, с другой, метрической, стороны. Именно, мы докажем, что сходимость по норме в $\boldsymbol{E}$ равносильна сходимости по координатам. Попутно докажем, что тот критерий компактности, который был установлен в 3.8 для множеств в пространстве $\boldsymbol{R}_n$, верен в любом конечно-мерном нормированном пространстве.

Лемма 5.3.1. *Сходимость по координатам влечет сходимость по норме. Именно, пусть* $x^{(m)} \in \boldsymbol{E}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *и* $x^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(m)} x_k$. *Если* $\lambda_k^{(m)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_k$ *при каждом* $k = 1, 2, \ldots, n$, *а* $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, *то* $x^{(m)} \longrightarrow x$.

---

*) Так как $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{E}$, а $\boldsymbol{E}$ — линейная система, то в $\boldsymbol{E}$ определен элемент $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

**) Этот результат можно установить и без ссылки на $\boldsymbol{R}_n$, проведя доказательство теоремы 1.11.1 непосредственно для пространства $\boldsymbol{E}$.

***) Все сказанное до сих пор в этом параграфе может быть отнесено не только к пространствам, но и к линейным системам.

Доказательство этой леммы вытекает сразу из непрерывности суммы и произведения в нормированных пространствах:

$$\lambda_k^{(m)} x_k \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_k x_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(m)} x_k \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Лемма 5.3.2. *Для любого $x \in E$ все его координаты λ_k удовлетворяют неравенству $|\lambda_k| \leqslant H \|x\|$, где H — постоянная, зависящая только от выбора базиса в E.*

Доказательство. Обозначим через S множество всех векторов $l = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ из R_n с нормой, равной единице (S можно назвать поверхностью единичного шара). Так как S ограничено, то оно компактно (см. 3.8). Если $l^{(m)} \in S$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и $l^{(m)} \to l$, то, благодаря непрерывности нормы, $\|l\| = 1$, т. е. и $l \in S$. Таким образом, S замкнуто.

Каждому $l = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in S$ сопоставляем элемент $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, который обозначим $x(l)$. Вследствие линейной независимости элементов x_k и условия $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = 1$, $x(l) \neq \theta$. Будем рассматривать норму $\|x(l)\|$ как функционал, заданный на S.

Пусть $l^{(m)} \in S$ $(m = 1, 2, \ldots)$, $l^{(m)} \to l$. Так как сходимость в R_n совпадает со сходимостью по координатам, а координаты каждого $l \in S$ совпадают с координатами $x(l)$, то по лемме 5.3.1 $x(l^{(m)}) \to x(l)$. Отсюда, по непрерывности нормы, следует, что $\|x(l^{(m)})\| \to \|x(l)\|$, т. е. $\|x(l)\|$ — непрерывный функционал на S. Тогда по теореме 4.2.1 $\|x(l)\|$ имеет на S наименьшее значение m, причем, так как $\|x(l)\| > 0$ при всех $l \in S$, то и $m > 0$. Таким образом, $\|x\| \geqslant m$, если $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ и $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = 1$.

Положим $H = \frac{1}{m}$. Пусть $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ — произвольный элемент из E, отличный от θ. Возьмем элемент

$$x' = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2}}\, x = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k,$$

где

$$\mu_k = \frac{\lambda_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2}}.$$

Так как $\sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 = 1$, то $\|x'\| \geqslant m$. Тогда

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2}\,\|x'\| \geqslant m \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2}. \tag{4}$$

Отсюда, при любом $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$|\lambda_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2} \leqslant \frac{1}{m}\|x\| = H\|x\|.$$

Теорема 5.3.1. *В конечно-мерном нормированном пространстве сходимость по норме совпадает со сходимостью по координатам.*

Доказательство. Благодаря лемме 5.3.1 осталось доказать, что сходимость по норме влечет сходимость по координатам. Пусть, по-прежнему, пространство E n-мерно, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — его базис. Возьмем $x^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(m)} x_k$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и допустим, что $x^{(m)} \to x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Из равенства

$$x^{(m)} - x = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{(m)} - \lambda_k)\, x_k$$

следует, что разности $\lambda_k^{(m)} - \lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ суть координаты элемента $x^{(m)} - x$. Тогда, по лемме 5.3.2,

$$|\lambda_k^{(m)} - \lambda_k| \leqslant H\|x^{(m)} - x\|,$$

следовательно, $\lambda_k^{(m)} \to \lambda_k$ при всех k.

Теорема 5.3.2. *В конечно-мерном нормированном пространстве всякое ограниченное подмножество компактно.*

Доказательство. Пусть M — ограниченное подмножество n-мерного пространства E, т. е. существует такая постоянная C, что $\|x\| \leqslant C$ для всех $x \in M$. Как и выше, каждому $x \in M$ сопоставляем вектор $l = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in R_n$, координаты которого λ_k равны соответствующим координатам элемента x. Тогда, по неравенству (4):

$$\|l\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2} \leqslant \frac{1}{m}\|x\| = H\|x\| \leqslant HC. \tag{5}$$

Возьмем любую последовательность элементов $x^{(m)} \in M$. Так как по (5) соответствующие этим элементам векторы $l^{(m)}$ образуют

ограниченное множество, а в R_n ограниченные множества компактны, то из последовательности $\{l^{(m)}\}$ можно выделить частичную $\{l^{(m_i)}\}$, сходящуюся к некоторому пределу. Сходимость в R_n есть сходимость по координатам, следовательно, и последовательность $\{x^{(m_i)}\}$ сходится по координатам. Но тогда, по лемме 5.3.1, последовательность $\{x^{(m_i)}\}$ сходится к некоторому пределу и по норме. Тем самым компактность множества M доказана.

Теорема 5.3.3. *Конечно-мерное нормированное пространство E полно.*

Доказательство. Возьмем фундаментальную последовательность элементов $x^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(m)} x_k \in E$ $(m = 1, 2, \ldots)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — базис пространства E. По лемме 5.3.2 при любом $k = 1, 2, \ldots, n$

$$|\lambda_k^{(m)} - \lambda_k^{(p)}| \leqslant H \| x^{(m)} - x^{(p)} \| \underset{m,\, p \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, благодаря полноте множества вещественных чисел, существуют конечные $\lambda_k = \lim\limits_{m \to \infty} \lambda_k^{(m)}$. Тогда, по лемме 5.3.1, $x^{(m)} \to x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, т. е. полнота E доказана.

Теорема 5.3.4. *Конечно-мерное нормированное пространство сепарабельно.*

Доказывается в точности так же, как сепарабельность пространства R_n (см. 3.7).

5.4. Подпространства

В линейных системах важную роль играют подмножества, обладающие тем свойством, что применение к элементам такого подмножества основных алгебраических операций не выводит из него. Именно, дадим следующее определение:

Определение. Подмножество E_1 элементов линейной системы E называется *линейным*, если из $x, y \in E_1$ следует, что $x + y \in E_1$, и из $x \in E_1$ следует, что $\lambda x \in E_1$ при любом λ.

Как следствие из этого определения вытекает, что если E_1 — линейное подмножество и $x, y \in E_1$, то $\lambda x + \mu y \in E_1$, при любых λ и μ. Распространяя это свойство по индукции на любое конечное число слагаемых, видим, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E_1$, то и любая их линейная комбинация входит в E_1. Заметим также, что $\theta \in E_1$ (если $E_1 \neq \Lambda$), так как, взяв любой $x \in E_1$, мы можем представить θ в виде $\theta = 0x$.

Если в линейной системе E задано произвольное подмножество A, то легко видеть, что совокупность E_1 всех элементов,

представимых в виде линейных комбинаций элементов из A,

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \qquad (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in A),$$

представляет линейное множество. Действительно, если $x \in E_1$, то и

$$\mu x = \sum_{k=1}^{n} (\mu\lambda_k)\, x_k \in E_1;$$

если же взять еще элемент

$$y = \sum_{k=n+1}^{p} \lambda_k x_k \qquad (x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots,\ x_p \in A),$$

то

$$x + y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \in E_1.$$

Такое множество E_1 называется *линейной оболочкой* множества A (ср. 2.8).

Линейное подмножество E_1 линейной системы $\boldsymbol{E}$ с теми алгебраическими операциями, которые определены во всей системе $\boldsymbol{E}$, само представляет линейную систему. Если линейное подмножество E_1 выделено в нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$, то и E_1, с уже определенной в нем нормой, представляет нормированное пространство. Выделяя среди линейных подмножеств замкнутые, введем следующее определение:

Определение. *Подпространством* нормированного пространства называется всякое его замкнутое линейное подмножество.

Повторяя дословно рассуждение, проведенное в 2.8, мы увидим, что замыкание линейной оболочки произвольного множества A есть линейное множество; следовательно, будучи замкнутым, оно является подпространством. Ясно, что это — наименьшее подпространство, содержащее множество A (см. теорему 3.4.4). Мы будем называть его *подпространством, порожденным множеством* A. В частности, если само A — линейное множество, то его замыкание и есть порождаемое им подпространство.

Теорема 5.4.1. *Всякое конечно-мерное линейное подмножество E_1 нормированного пространства $\boldsymbol{E}$ — подпространство.*

Доказательство. Пусть E_1 n-мерно. Возьмем $x^{(m)} \in E_1$ ($m = 1, 2, \ldots$) и допустим, что $x^{(m)} \to x$ ($x \in E$). Тогда последовательность $\{x^{(m)}\}$ является в E_1, во всяком случае, фундаментальной. По теореме 5.3.3 существует такой $x' \in E_1$, что $x^{(m)} \to x'$. Но так как во всем пространстве $\boldsymbol{E}$ предел сходящейся последова-

тельности — единственный, то $x = x'$ и, следовательно, $x \in E_1$, и E_1 замкнуто.

В конечно-мерном пространстве всякое линейное подмножество конечно-мерно, а следовательно, является подпространством. Таким образом, чтобы в эвклидовом пространстве R_n получить определение подпространства, равносильное данному в этом параграфе, достаточно было, как мы и сделали в гл. I (1.11), брать линейную оболочку заданной системы векторов.

Примеры подпространств, конечно-мерных и бесконечно-мерных, мы уже встречали в эвклидовых пространствах в гл. I—II. Совокупность всех дифференцируемых функций из пространства C представляет, очевидно, линейное множество, но не замкнутое, так как предел равномерно сходящейся последовательности дифференцируемых функций может не быть дифференцируемой функцией.

Определение. Пусть задано конечное или счетное множество подпространств E_k нормированного пространства E. Если для каждого $x \in E$ существует единственное представление $x = \sum\limits_k x_k$, где $x_k \in E_k$, то говорят, что подпространства E_k образуют *разложение* пространства E.

Приведем пока только один пример; другие будут позднее. Если пространство E n-мерно, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — его базис, то одномерные пространства E_k, состоящие из всех элементов вида λx_k *), образуют разложение пространства E, так как каждый $x \in E$ имеет единственное представление вида $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, а $\lambda_k x_k \in E_k$.

5.5. Задача о наилучшем приближении

Во многих вопросах математики приходится рассматривать задачу о наилучшем в том или ином смысле приближенном представлении заданной функции с помощью функций определенного класса. При этом обычно весьма полезно знать, что это наилучшее приближение существует. Вопрос о существовании наилучшего приближения может быть изложен в произвольном нормированном пространстве в весьма общих терминах, а получаемые таким способом результаты находят применение в различных конкретных задачах.

Пусть E — нормированное пространство, E_1 — его конечномерное подпространство. Возьмем некоторый элемент $x \in E$, не

*) Такое подпространство E_k называют *прямой*, порожденной элементом x_k.

входящий в E_1. Тогда для каждого $y \in E_1$ величину $\| y - x \|$ назовем отклонением элемента y от элемента x. Докажем, что среди элементов y подпространства E_1 существует такой, для которого отклонение $\| y - x \|$ имеет наименьшее значение. Этот элемент y называют *элементом наилучшего приближения* (в подпространстве E_1) к элементу x. Впрочем, понятие элемента наилучшего приближения можно сформулировать и без требования, чтобы E_1 было конечно-мерным. Но тогда уже нельзя будет гарантировать его существование. Можно распространить понятие элемента наилучшего приближения и на тот случай, когда $x \in E_1$. Тогда, очевидно, наименьшее отклонение $\| y - x \|$ равно нулю и оно достигается при $y = x$, т. е. сам x и будет элементом наилучшего приближения.

Теорема 5.5.1. *Для любого $x \in E$ в конечно-мерном подпространстве E_1 существует элемент наилучшего приближения.*

Доказательство. Из сказанного выше видно, что в доказательстве достаточно рассмотреть только случай, когда $x \overline{\in} E_1$. Будем считать x фиксированным. Возьмем любой $y_0 \in E_1$ и обозначим через δ его отклонение от x: $\delta = \| y_0 - x \|$. Ясно, что элемент наилучшего приближения следует искать среди тех элементов $y \in E_1$, для которых $\| y - x \| \leqslant \delta$. Из этого неравенства следует, что

$$\| y \| \leqslant \| y - x \| + \| x \| \leqslant \| x \| + \delta.$$

Положим $M = \| x \| + \delta$ и обозначим через F множество всех элементов $y \in E_1$, для которых $\| y \| \leqslant M$. В F входят, в частности, все $y \in E_1$, для которых $\| y - x \| \leqslant \delta$, поэтому элемент наилучшего приближения достаточно искать во множестве F. Как замкнутый шар в E_1 (с центром θ), множество F замкнуто, а будучи ограниченным, F компактно по теореме 5.3.2.

Теперь будем рассматривать отклонение $\| y - x \|$ как функционал, определенный для всех $y \in F$, т. е. на замкнутом компактном множестве в пространстве E_1. Если $y_p \in F$ и $y_p \to y$ (тогда и $y \in F$), то $y_p - x \to y - x$ в смысле сходимости по норме в E_1 (или в E) и по непрерывности нормы $\| y_p - x \| \to \| y - x \|$, т. е. функционал $\| y - x \|$ непрерывен на F. По теореме 4.2.1 существует такой $y^* \in F$, что $\| y - x \|$ имеет наименьшее значение при $y = y^*$. Этот y^* и есть элемент наилучшего приближения. Теорема доказана.

Пусть подпространство E_1 порождено n линейно независимыми элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. представляет их линейную оболочку; тогда задача о наилучшем приближении сводится к нахождению таких коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, при которых $\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k - x \|$ имеет наименьшее значение. Иными словами, разы-

скивается та линейная комбинация элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, отклонение которой от заданного элемента x — наименьшее. Доказанная теорема гарантирует существование такой комбинации. Ее единственность может быть доказана лишь при некоторых дополнительных условиях, но на этом вопросе мы не останавливаемся.

Рассматривая конкретные функциональные пространства с различными определениями нормы в них, мы можем теперь устанавливать факт существования наилучшего приближения к заданной функции при различных способах оценки точности приближения. Остановимся на классической задаче о наилучшем равномерном приближении полиномами (заданной степени) к произвольной непрерывной функции. Эту задачу еще в середине XIX столетия изучал знаменитый русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894) *).

Будем называть полиномом n-й степени всякий полином

$$P(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n = \sum_{r=0}^{n} c_r t^r,$$

не требуя, чтобы непременно $c_n \neq 0$, т. е. $P(t)$ может быть полиномом как точно n-й степени, так и более низкой. Коэффициенты c_r считаем вещественными. Если на отрезке $[a, b]$ задана вещественная непрерывная функция $f(t)$, то отклонением полинома $P(t)$ от функции $f(t)$ назовем $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |P(t) - f(t)|$, т. е. норму $\|P - f\|$ в пространстве C, построенном на отрезке $[a, b]$. В классе полиномов заданной степени *полиномом наилучшего приближения* к функции $f(t)$ называется тот, для которого отклонение $\|P - f\|$ имеет наименьшее значение.

Сам Чебышев не ставил вопроса о существовании полиномов наилучшего приближения и занимался изучением их свойств, считая эти полиномы уже данными. Существование полинома наилучшего приближения любой степени для произвольной непрерывной функции было доказано позднее, в начале XX столетия, французским математиком Э. Борелем (1871—1956).

Покажем, что теорема Бореля вытекает сразу из общей теоремы 5.5.1.

В пространстве C множество всех полиномов n-й степени есть линейная оболочка E_1 следующего множества функций: постоянной (например, $f(t) \equiv 1$), $t, t^2, \ldots, t^n$. Эти функции линейно независимы, так как известно, что если их линейная комбинация

*) Работы П. Л. Чебышева о полиномах наилучшего приближения послужили основой для развития в дальнейшем новой математической дисциплины — конструктивной теории функций.

$\sum_{r=0}^{n} c_r t^r$, т. е. полином, равна тождественно нулю на некотором отрезке, то все $c_r = 0$ *). Таким образом, E_1 — $(n+1)$-мерное подпространство пространства C. А тогда полином наилучшего приближения n-й степени к заданной непрерывной функции $f(t)$ и есть элемент наилучшего приближения в подпространстве E_1 к элементу $f \in C$; существование же такого элемента наилучшего приближения доказано в теореме 5.5.1.

Ниже, в гл. VII, мы увидим, как решается задача о наилучшем среднем квадратическом приближении функций.

5.6. Пространства со счетным базисом

Теперь мы распространим понятие базиса, введенное в 5.3 только для конечно-мерных пространств, и на случай бесконечномерных пространств. В этом случае базис уже не может быть конечным, но мы ограничимся рассмотрением лишь таких пространств, базис которых состоит из счетного множества элементов.

Определение. Счетное множество элементов x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ нормированного пространства E называется его *базисом*, если каждый $x \in E$ допускает единственное представление вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \text{ **)}. \tag{6}$$

При наличии такого базиса в пространстве E последнее называют *пространством со счетным базисом*.

Можно также сказать, что E — пространство со счетным базисом $\{x_n\}$, если одномерные подпространства, порождаемые элементами x_n, образуют разложение пространства E (определение разложения дано в 5.4).

Распространяя определение линейной независимости, данное в 5.3, на произвольное множество элементов нормированного пространства, будем называть их *линейно независимыми*, если ни один из них не выражается в виде линейной комбинации конечного числа других элементов того же множества (ср. 2.8). Как и выше, среди линейно независимых элементов ни один не может быть нулевым.

Из определения базиса сразу следует, что образующие его элементы линейно независимы. Действительно, если бы, например,

$$x_{n_0} = c_1 x_{n_1} + \ldots + c_p x_{n_p} \qquad (n_1, \ldots, n_p \neq n_0),$$

*) Полином n-й степени, у которого хоть один из коэффициентов отличен от нуля, не может иметь более, чем n различных корней.

**) Эту сумму нужно понимать как сумму ряда (см. 5.2).

то для x_{n_0} мы бы получили два разных представления вида (6):

$$x_{n_0} = 0x_1 + \ldots + 0x_{n_0-1} + 1x_{n_0} + 0x_{n_0+1} + \ldots,$$

$$x_{n_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n, \quad \text{где} \quad \lambda_n = \begin{cases} c_i \text{ при } n = n_i \ (i = 1, 2, \ldots, p), \\ 0 \text{ при прочих } n \text{ (в частности, } \lambda_{n_0} = 0), \end{cases}$$

что невозможно.

Теорема 5.6.1. *Всякое пространство со счетным базисом сепарабельно.*

Доказательство. Покажем, что в пространстве E со счетным базисом $\{x_n\}$ существует счетное всюду плотное множество. Именно, таким множеством будет множество A всех элементов вида $\sum_{n=1}^{p} r_n x_n$, где p — любое натуральное, а коэффициенты r_n — рациональные числа.

Действительно, обозначим через A_p множество всех элементов вида $\sum_{n=1}^{p} r_n x_n$, где коэффициенты r_n — любые рациональные числа, но число слагаемых p — фиксированное. Элементы множества A_p определяются p параметрами $r_1, r_2, \ldots, r_p$, каждый из которых принимает значения из счетной совокупности (рациональных чисел). Тогда, по теореме 3.6.7, A_p счетно. Но $A = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p$, следовательно, по теореме 3.6.4, и A счетно.

Каждый $x \in E$ представим по формуле (6) в виде $x = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} \lambda_n x_n$. Для любого p подбираем рациональные числа $r_n^{(p)}$ $(n = 1, 2, \ldots, p)$ так, что

$$|r_n^{(p)} - \lambda_n| < \frac{1}{p^2 \| x_n \|},$$

и полагаем

$$x^{(p)} = \sum_{n=1}^{p} r_n^{(p)} x_n.$$

Тогда $x^{(p)} \in A_p \subset A$ и

$$\left\| x^{(p)} - \sum_{n=1}^{p} \lambda_n x_n \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{p} (r_n^{(p)} - \lambda_n) x_n \right\| < p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Следовательно,

$$\| x^{(p)} - x \| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| x^{(p)} - \sum_{n=1}^{p} \lambda_n x_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{p} \lambda_n x_n - x \right\| < \frac{1}{p} + \left\| \sum_{n=1}^{p} \lambda_n x_n - x \right\|_{p \to \infty} \to 0,$$

откуда $x = \lim x^{(p)}$. Тем самым доказано, что A всюду плотно, а $\boldsymbol{E}$ сепарабельно.

В пространствах $\boldsymbol{l}^2$ и $\boldsymbol{l}$ базисом является совокупность координатных ортов. Действительно, если $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in \boldsymbol{l}$, а e_n — координатные орты, то положим

$$x^{(k)} = \sum_{n=1}^{k} \xi_n e_n = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, 0, 0, \ldots).$$

Тогда

$$\| x^{(k)} - x \| = \sum_{n=k+1}^{\infty} | \xi_n | \to 0,$$

следовательно, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$. Обратно, если для того же x дано представление $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, то легко видеть, что $\lambda_n = \xi_n$ при всех n. Таким образом, каждый $x \in \boldsymbol{l}$ допускает единственное разложение вида (6) по координатным ортам, т. е. совокупность ортов $\{e_n\}$ — базис. Аналогичное рассуждение справедливо и для $\boldsymbol{l}^2$ (ср. 2.4).

Однако те же координатные орты в пространстве $\boldsymbol{m}$ уже не образуют базиса. Это вытекает из того, что если для $x \in \boldsymbol{m}$ взять построенные выше элементы $x^{(k)}$, то

$$\| x^{(k)} - x \| = \sup_{n > k} | \xi_n |$$

может не стремиться к нулю при $k \to \infty$, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ может не сходиться к x по норме в пространстве $\boldsymbol{m}$. Так как $\boldsymbol{m}$ не сепарабельно (3.7), то оно вообще не может быть пространством со счетным базисом.

В пространстве $\boldsymbol{C}$ базис строится сложнее, чем в $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{l}^2$, и мы не будем останавливаться на его конструкции. О базисах в $\boldsymbol{C}_L$ и $\boldsymbol{C}_{L^2}$ будет сказано в гл. VII. Заметим, что до сих пор не выяснено, не будет ли вообще всякое сепарабельное банахово пространство пространством со счетным базисом.

ГЛАВА VI

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

6.1. Скалярное произведение

В предыдущих главах мы уже перенесли некоторые понятия, установленные предварительно в эвклидовых пространствах, на более общие образования и рассмотрели сначала весьма широкий класс метрических пространств, а затем более узкий класс, но зато состоящий из пространств, обладающих рядом алгебраических свойств,— класс нормированных пространств. В этих последних пространствах, помимо некоторых алгебраических операций над элементами, было введено понятие нормы. Однако мы еще не распространили на более общие пространства понятие скалярного произведения векторов, определенное в эвклидовых пространствах. Изучению нормированных пространств с определенным в них скалярным произведением и будет посвящена настоящая глава. Как мы увидим в последующих главах, такие пространства имеют весьма большое значение для многих приложений функционального анализа. Как и выше, мы будем вести основное изложение для вещественных пространств.

О п р е д е л е н и е. Пусть E — вещественная линейная система и пусть любым двум ее элементам x и y (в частности, может быть $x = y$) сопоставлено вещественное число, обозначаемое (x, y), причем выполнены следующие свойства:

а) $(x, y) = (y, x)$;

б) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

в) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$;

г) $(x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in E$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

При выполнении условий а) — г) число (x, y) называется *скалярным произведением* элементов x и y; иными словами, скалярное произведение есть функционал с двумя аргументами $(x, y \in E)$, обладающий перечисленными свойствами. При рассмотрении скалярного произведения (x, y) сами элементы x и y часто будут называться его *сомножителями*.

Таким образом, в общее определение скалярного произведения мы включили в виде аксиом ряд основных свойств, которые в гл. I (1.4) были отмечены для скалярного произведения в эвклидовом пространстве.

Выведем некоторые простейшие следствия из этой системы аксиом. Благодаря своей коммутативности, скалярное произведение обладает свойствами б) и в) не только по отношению к первому сомножителю, но также и по отношению ко второму. Проверим это, например, для свойства дистрибутивности (свойства б).

Действительно, благодаря данным выше а) и б) имеем

$$(x, y+z) = (y+z, x) = (y, x) + (z, x) = (x, y) + (x, z).$$

Если один из сомножителей равен θ, то скалярное произведение равно нулю: $(\theta, x) = (0x, x) = 0\,(x, x) = 0$.

Однако (как мы знаем, например, в эвклидовом пространстве) обратное заключение неверно, т. е. скалярное произведение может быть равно нулю и тогда, когда оба сомножителя отличны от θ.

Теперь, используя скалярное произведение, определим норму элемента в системе $\boldsymbol{E}$. Именно положим

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)}, \tag{1}$$

где в правой части стоит арифметический корень из (x, x). Проверим, что при таком определении нормы система $\boldsymbol{E}$ оказывается нормированным пространством.

Из определения нормы и свойства г) скалярного произведения следует, что $\| x \| \geqslant 0$ и что $\| x \| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$. Далее,

$$\| \lambda x \| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \, \| x \|.$$

Прежде чем проверять неравенство треугольника, докажем, что для любых $x, y \in \boldsymbol{E}$ справедливо следующее неравенство, которое уже было доказано в гл. I — II под названием неравенства Коши для векторов в эвклидовом пространстве [см. 1.4, формула (7) и 2.3, формула (4)]:

$$|(x, y)| \leqslant \| x \| \, \| y \|. \tag{2}$$

Неравенство (2) мы будем называть в общем случае *неравенством Коши — Буняковского*, так как установленное в 3.2 [формула (4)] интегральное неравенство Буняковского, как мы увидим ниже (в гл. VII), также представляет частный случай неравенства (2).

Для доказательства рассмотрим квадратный трехчлен от вещественного аргумента λ:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y,\ \lambda x + y) = \lambda^2 (x, x) + 2\lambda (x, y) + (y, y) = \\ = \| x \|^2 \lambda^2 + 2 (x, y) \lambda + \| y \|^2.$$

Так как $\varphi(\lambda) = \| \lambda x + y \|^2 \geqslant 0$ при всех λ, то, как указано в 1.3, дискриминант трехчлена не положителен, т. е. $(x, y)^2 - \| x \|^2 \| y \|^2 \leqslant 0$. Отсюда и вытекает неравенство (2).

Теперь для любых $x, y \in \boldsymbol{E}$ имеем

$$\| x + y \|^2 = \varphi(1) = \| x \|^2 + 2 (x, y) + \| y \|^2.$$

Поэтому, в силу неравенства Коши — Буняковского,

$$\| x + y \|^2 \leqslant \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2.$$

Извлекая корни из обеих частей неравенства, получаем неравенство треугольника

$$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|.$$

Отметим, что, как и в эвклидовом пространстве, скалярное произведение непрерывно по обоим аргументам, т. е. если $x_n \to x$, $y_n \to y$ (в смысле сходимости по норме), то $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Для доказательства нужно дословно повторить рассуждение, проведенное с этой же целью в 2.5, сославшись при этом на неравенство Коши — Буняковского, а также на тот факт, что нормы всякой сходящейся последовательности элементов ограничены в совокупности.

Отсюда, так же как и в 2.5, вытекает, что скалярное произведение обладает свойством дистрибутивности и по отношению к сложению бесконечного множества слагаемых.

6.2. Определение гильбертова пространства

Будем говорить, что норма в нормированном пространстве *порождена* скалярным произведением, если в этом пространстве задано скалярное произведение любых двух его элементов, а норма выражается через скалярное произведение по формуле (1).

Определение. *Гильбертовым пространством* (вещественным) называется полное нормированное вещественное пространство $\boldsymbol{H}$, в котором норма порождена скалярным произведением.

Так как, по доказанному в 6.1, норма, определенная через скалярное произведение по формуле (1), удовлетворяет всем аксиомам нормированного пространства, то можно дать и другое, равносильное определение: вещественная линейная система $\boldsymbol{H}$

со скалярным произведением называется гильбертовым пространством, если в отношении нормы, порождаемой этим скалярным произведением, пространство H оказывается полным. Заметим, что это требование полноты является весьма существенным для всей теории гильбертова пространства. Элементы гильбертова пространства часто называют векторами.

Иногда в определение гильбертова пространства включается еще требование, чтобы оно было бесконечно-мерным. Мы такого требования не ставим и тем самым не исключаем случай конечномерного гильбертова пространства. Примером конечно-мерных гильбертовых пространств являются конечно-мерные эвклидовы пространства. Бесконечно-мерное пространство l^2 также гильбертово. Действительно, в главе II (2.3) определено скалярное произведение в l^2, норма в l^2 порождается этим скалярным произведением, а в 2.4 доказана полнота l^2 (ср. также 3.5).

Гильбертово пространство получило свое название по имени знаменитого немецкого математика Д. Гильберта (1862—1943). Гильберт в своих работах по теории интегральных уравнений рассматривал некоторые конкретные пространства, составленные из последовательностей (l^2) и из функций, послужившие образцом при построении в дальнейшем более общей теории пространств, названных его именем. В нашем изложении мы сразу дали общее аксиоматическое определение гильбертова пространства, не конкретизируя тех элементов, из которых оно может быть составлено. Иногда, чтобы подчеркнуть отличие общего понятия гильбертова пространства от тех конкретных пространств, которые рассматривал Гильберт, гильбертово пространство, определенное аксиоматически, называют абстрактным.

6.3. Понятие ортогональности

Понятие ортогональности имеет исключительно важное значение для всей теории гильбертова пространства. Основное определение формулируется так же, как в эвклидовых пространствах.

Определение. Два элемента x и y гильбертова пространства H называются *ортогональными* (обозначается $x \perp y$), если $(x, y) = 0$.

Из свойств скалярного произведения непосредственно вытекает:

1) нулевой элемент θ ортогонален любому $x \in H$;

2) $x \perp x$ только в том случае, когда $x = \theta$;

3) если $x \perp y_1, y_2, \ldots, y_n$, то $x \perp \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$ при любых λ_i;

иными словами, если x ортогонален каждому элементу некото-

рого множества $A \subset H$, то x ортогонален и любому элементу линейной оболочки множества A.

Отметим еще некоторые предложения.

4) Если $x \perp y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $y_n \to y$, то $x \perp y$. Это вытекает из непрерывности скалярного произведения.

5) Если множество A всюду плотно в H, а x ортогонален каждому элементу из A, то $x = \theta$. Действительно, по определению плотности множества, $x = \lim x_n$, где $x_n \in A$. Так как, по условию, $x \perp x_n$ при всех n, то по предложению 4) $x \perp x$, откуда и следует, что $x = \theta$.

В гильбертовом пространстве верна обобщенная теорема Пифагора:

Если

$$x = \sum_n x_n$$

(сумма может быть как конечной, так и бесконечной), *и все слагаемые попарно ортогональны, то*

$$\| x \|^2 = \sum_n \| x_n \|^2.$$

Действительно, благодаря дистрибутивности скалярного произведения, справедливой по отношению и к конечным суммам и к бесконечным рядам, имеем:

$$\| x \|^2 = (x, x) = \Big(x, \sum_n x_n\Big) = \sum_n (x, x_n) = \sum_n \Big(\sum_m x_m, x_n\Big) = \sum_n \sum_m (x_m, x_n).$$

Но $(x_m, x_n) = 0$ при $m \neq n$, а потому

$$\| x \|^2 = \sum_n (x_n, x_n) = \sum_n \| x_n \|^2.$$

Теорема 6.3.1. *Для того чтобы ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *составленный из попарно ортогональных элементов, сходился* (в смысле сходимости по норме, см. 5.2), *необходимо и достаточно, чтобы сходился числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^2$.

Доказательство. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, то и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^2$ сходится по теореме Пифагора.

Обратно, пусть сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^2$. Положим $s_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$. При $m > p$

$$s_m - s_p = \sum_{n=p+1}^{m} x_n$$

и по теореме Пифагора

$$\| s_m - s_p \|^2 = \sum_{n=p+1}^{m} \| x_m \|^2.$$

А тогда из сходимости ряда квадратов норм x_n следует, что $\| s_m - s_p \| \to 0$ при $m,\ p \to \infty$, т. е. что последовательность $\{s_m\}$ — фундаментальная. Вследствие полноты пространства $\boldsymbol{H}$ существует $\lim s_m$, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится.

Определение. Элемент y называется *ортогональным подпространству* $\boldsymbol{H}_1 \subset \boldsymbol{H}$ (пишем $y \perp \boldsymbol{H}_1$), если y ортогонален каждому $x \in \boldsymbol{H}_1$. Два подпространства $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$ называются *ортогональными* (пишем $\boldsymbol{H}_1 \perp \boldsymbol{H}_2$), если $x \perp y$, каковы бы ни были $x \in \boldsymbol{H}_1$, $y \in \boldsymbol{H}_2$.

Из последнего определения сразу вытекает, что два ортогональных подпространства имеют единственный общий элемент — нулевой *).

6.4. Проекция элемента на подпространство

Если в трехмерном эвклидовом пространстве будут заданы какое-нибудь подпространство, например плоскость P (проходящая через начало координат O), и какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, не лежащий в этой плоскости, то мы всегда можем представить вектор $\overrightarrow{OM}$ в виде суммы $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}$, где вектор $\overrightarrow{ON}$ лежит в плоскости P, а вектор $\overrightarrow{NM}$ перпендикулярен этой плоскости. При этом длина вектора $\overrightarrow{NM}$ есть кратчайшее расстояние от M до точек плоскости P, а точка N есть проекция точки M на плоскость P. Аналогичную задачу можно решить в произвольном гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$.

Сначала выведем одно вспомогательное соотношение. Пусть $u,\ v \in \boldsymbol{H}$. Тогда

$$\| u+v \|^2 + \| u-v \|^2 = (u+v,\ u+v) + (u-v,\ u-v) = (u,\ u) + \\ + 2(u,\ v) + (v,\ v) + (u,\ u) - 2(u,\ v) + (v,\ v) = 2(\| u \|^2 + \| v \|^2),$$

*) Нулевой элемент ортогонален любому подпространству

т. е.

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2(\|u\|^2+\|v\|^2)\text{ *)}. \tag{3}$$

Теорема 6.4.1. *Пусть L — подпространство гильбертова пространства H. Тогда любой элемент $x \in H$ представим единственным образом в виде $x = y + z$, где $y \in L$, $z \perp L$.*

Доказательство. Если $x \in L$, то требуемое представление мы получим, полагая $y = x$, $z = 0$. Если же $x \notin L$, то попытаемся определить y как такой элемент из L, для которого расстояние до x, т. е. норма $\|x - y\|$, имеет наименьшее значение; существование такого y нужно будет доказать.

Положим

$$d = \inf_{y \in L} \|x - y\|\text{ **)}$$

(точная нижняя граница расстояния определяется здесь по всему множеству элементов $y \in L$). Зададим числа $d_n = d + \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Из определения точной нижней границы следует, что при каждом n существует $y_n \in L$, для которого

$$\|x - y_n\| < d_n. \tag{4}$$

Теперь, беря любые n и m, положим $u = x - y_n$, $v = x - y_m$ и используем равенство (3). Получим

$$\|2x - (y_n + y_m)\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2). \tag{5}$$

Так как $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in L$, то

$$\left\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\right\| \geqslant d,$$

или

$$\|2x - (y_n + y_m)\|^2 = 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\right\|^2 \geqslant 4d^2.$$

Тогда из (5), с помощью (4), находим

$$\|y_m - y_n\|^2 < 2(d_n^2 + d_m^2) - 4d^2.$$

Но d_m, $d_n \to d$, а потому $\|y_m - y_n\| \underset{m,\, n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, т. е. последовательность $\{y_n\}$ — фундаментальная. Вследствие полноты H существует $y = \lim y_n$, а так как множество L замкнуто (по

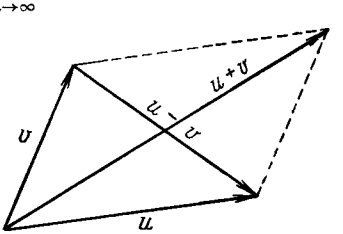

Рис. 9.

*) Равенство (3) является, очевидно, обобщением элементарной геометрической теоремы: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон (рис. 9). Можно доказать, что если норма в банаховом пространстве удовлетворяет условию (3), то такая норма порождается скалярным произведением, т. е. данное пространство — гильбертово.

**) Напоминаем, что inf — обозначение точной нижней границы.

определению подпространства), то $y \in \boldsymbol{L}$. При этом $\|x-y\| = \lim \|x-y_n\|$, и из (4) следует, что $\|x-y\| \leqslant d$; но так как знак $<$ невозможен, то $\|x-y\| = d$.

Теперь положим $z = x-y$ и докажем, что $z \perp \boldsymbol{L}$, т. е. что z ортогонален любому $u \in \boldsymbol{L}$. При любом вещественном λ элемент $y+\lambda u \in \boldsymbol{L}$, а потому

$$\|x-y-\lambda u\|^2 \geqslant d^2. \tag{6}$$

С другой стороны, имеем

$$\|x-y-\lambda u\|^2 = (z-\lambda u,\ z-\lambda u) = \|z\|^2 - 2\lambda(z, u) + \lambda^2 \|u\|^2 = \\ = d^2 - 2\lambda(z, u) + \lambda^2 \|u\|^2,$$

следовательно, благодаря (6), получаем $\lambda^2 \|u\|^2 - 2\lambda(z, u) \geqslant 0$.

Отсюда, при любом положительном λ получаем $(z, u) \leqslant \frac{\lambda}{2} \|u\|^2$ и, так как правая часть за счет λ может быть сделана сколь угодно малой, то $(z, u) \leqslant 0$. Поскольку это верно при произвольном $u \in \boldsymbol{L}$, то, в частности, неравенство сохраняется и после замены u на $-u$, т. е. $(z, -u) \leqslant 0$. Но $(z, -u) = -(z, u)$, а потому $(z, u) \geqslant 0$. Отсюда уже следует, что $(z, u) = 0$, и тем самым доказано, что $z \perp \boldsymbol{L}$. Требуемое представление $x = y + z$, где $y \in \boldsymbol{L}$, $z \perp \boldsymbol{L}$, получено.

Докажем единственность этого представления. Пусть имеем еще одно равенство $x = y_1 + z_1$, где $y_1 \in \boldsymbol{L}$, $z_1 \perp \boldsymbol{L}$. Тогда $y + z = y_1 + z_1$ или $y - y_1 = z_1 - z$. Но $y - y_1 \in \boldsymbol{L}$, а $z_1 - z$ ортогонален любому элементу из $\boldsymbol{L}$ [см. 6.3, свойство 3) ортогональных элементов]; в частности, $(z_1 - z) \perp (y - y_1)$, т. е. $(z_1 - z) \perp (z_1 - z)$, а тогда $z_1 - z = 0$, или $z_1 = z$; следовательно, и $y_1 = y$. Теорема доказана.

Теперь мы можем дать следующее определение:

Определение. Для любого элемента $x \in \boldsymbol{H}$ и подпространства $\boldsymbol{L}$ элемент $y \in \boldsymbol{L}$ такой, что $x - y \perp \boldsymbol{L}$, называется *проекцией* элемента x на подпространство $\boldsymbol{L}$ и обозначается $Pr_L x$. Таким образом, $x = Pr_L x + z$, где $z \perp \boldsymbol{L}$.

В теореме 6.4.1 доказаны существование и единственность проекции. По ходу доказательства теоремы 6.4.1 установлено, что $Pr_L x$ есть элемент наилучшего приближения в подпространстве $\boldsymbol{L}$ к элементу x. В подпространстве гильбертова пространства можно доказать и единственность элемента наилучшего приближения (фактически это сделано в доказательстве предыдущей теоремы). Мы вернемся еще раз к этому вопросу в случае, когда $\boldsymbol{L}$ — конечно-мерно.

Из определения проекции следует, что $Pr_L x = 0$ тогда и только тогда, когда $x \perp L$.

Возьмем в качестве L одномерное подпространство, порождаемое элементом $e \in H$ с $\| e \| = 1$. Тогда L состоит из всех элементов вида λe, следовательно, и $Pr_L x$ имеет такой же вид: $Pr_L x = \lambda_0 e$, т. е. $x = \lambda_0 e + z$, где $z \perp L$. Чтобы вычислить λ_0, умножим скалярно обе части последнего равенства на e. Так как $z \perp e$, то $(x, e) = \lambda_0 (e, e)$ или $\lambda_0 = (x, e)$. Аналогичным образом вычисляется и проекция вектора на координатный орт в аналитической геометрии, с той лишь разницей, что там принято называть проекцией число, равное скалярному произведению вектора на орт, а в гильбертовом пространстве проекция — элемент:

$$Pr_L x = (x, e) e. \tag{7}$$

6.5. Ортогональные разложения гильбертова пространства

В 5.4 мы определяли, что понимается под разложением нормированного пространства на подпространства. *Разложение* гильбертова пространства на подпространства, попарно ортогональные, называется *ортогональным*. Начнем с построения ортогонального разложения гильбертова пространства на два подпространства.

Определение. Если L — подпространство гильбертова пространства H, то *ортогональным дополнением* к L называется совокупность M всех элементов из H, ортогональных к L.

Из определения проекции вытекает, что если $L \neq H$, то M содержит элементы, отличные от θ.

Докажем, что M — также подпространство. Из 6.3 [свойство 3)] вытекает, что M — линейное подмножество пространства H. Нужно проверить, что M замкнуто. Пусть $z_n \in M$ и $z_n \to z$. Так как $z_n \perp y$, каков бы ни был $y \in L$, то, по свойству 4) из 6.3, и $z \perp y$, а потому $z \in M$.

Если теперь взять любой $x \in H$, то по теореме 6.4.1 он представим единственным образом в виде $x = y + z$, где $y \in L$, $z \in M$, т. е. подпространства L и M образуют разложение пространства H. Это разложение ортогонально.

Перейдем к рассмотрению более общих ортогональных разложений.

Лемма 6.5.1. *Пусть задано конечное или счетное множество попарно ортогональных подпространств L_n и пусть некоторый $x \in H$ представим в виде $x = \sum_n y_n$, где $y_n \in L_n$. Тогда такое представление единственно и $y_n = Pr_{L_n} x$.*

Доказательство. Так как, каково бы ни было n, $y_m \perp L_n$ при $m \neq n$, то и $z = \sum_{m \neq n} y_m \perp L_n$ [для конечной суммы

это вытекает из предложения 3), 6.3, а для бесконечной — оттуда же с учетом еще и 4)]. Таким образом, $x = y_n + z$, где $y_n \in \boldsymbol{L}_n$, $z \perp \boldsymbol{L}_n$, т. е. $y_n = Pr_{L_n} x$, а

$$x = \sum_n Pr_{L_n} x. \tag{8}$$

Однако мы не можем утверждать, что любой $x \in \boldsymbol{H}$ представим по формуле (8), т. е. что подпространства $\boldsymbol{L}_n$ образуют ортогональное разложение пространства H.

Выведем теперь одно важное неравенство. Возьмем любой $x \in \boldsymbol{H}$ и положим $y_n = Pr_{L_n} x$, где $\boldsymbol{L}_n$, как и выше,— ортогональные подпространства. Если подпространств $\boldsymbol{L}_n$ всего конечное число, скажем, m, то представим x в виде

$$x = \sum_{n=1}^{m} y_n + z \tag{9}$$

и докажем, что $z \perp y_n$, при всех $n = 1, 2, \ldots, m$.

Действительно, поскольку $y_n = Pr_{L_n} x$ при любом $n = 1, 2, \ldots, m$, то из равенства

$$x = y_n + \Big(\sum_{k \neq n} y_k + z\Big)$$

вытекает, что $\sum\limits_{k \neq n} y_k + z \perp L_n$. С другой стороны, каждый y_k при $k \neq n$ ортогонален подпространству $\boldsymbol{L}_n$, а потому $\sum\limits_{k \neq n} y_k \perp \boldsymbol{L}_n$. Следовательно, и $z \perp \boldsymbol{L}_n$ (в частности, $z \perp y_n$) при всех $n = 1, 2, \ldots, m$.

Теперь из (9) по теореме Пифагора следует, что

$$\| x \|^2 = \sum_{n=1}^{m} \| y_n \|^2 + \| z \|^2,$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{m} \| y_n \|^2 \leqslant \| x \|^2.$$

Если же подпространств $\boldsymbol{L}_n$ — счетное множество, то последнее неравенство справедливо при любом натуральном m, а тогда оно справедливо и при замене m на ∞. Итак, в обоих случаях

$$\sum_n \| Pr_{L_n} x \|^2 \leqslant \| x \|^2, \tag{10}$$

где суммирование распространяется на все номера данных подпространств $\boldsymbol{L}_n$.

Из неравенства (10) по теореме 6.3.1 следует, что сумма $\sum_n Pr_{L_n} x$ имеет смысл для любого $x \in H$ и в том случае, когда слагаемых бесконечное множество.

Определение. Система ортогональных подпространств L_n называется *полной*, если в H не существует элемента, отличного от 0, ортогонального всем L_n.

Теорема 6.5.1. *Для того чтобы ортогональные подпространства L_n образовывали разложение пространства H, необходимо и достаточно, чтобы система подпространств L_n была полной.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть подпространства L_n образуют ортогональное разложение пространства H. Допустим, что система подпространств L_n не полна. Тогда существует $x \neq 0$, ортогональный всем L_n. При этом по формуле (8) должно иметь место равенство $x = \sum_n Pr_{L_n} x$, что, однако, невозможно, так как все $Pr_{L_n} x = 0$.

б) Достаточность. Пусть система подпространств L_n полна. Возьмем любой $x \in H$ и положим $y = \sum_n Pr_{L_n} x$. Как указано выше, эта сумма имеет смысл. Далее, положим $z = x - y$. При каждом n имеем $x = Pr_{L_n} x + z_n$, $y = Pr_{L_n} y + z'_n$, где $z_n, z'_n \perp L_n$. Но из определения элемента y по лемме 6.5.1 следует, что $Pr_{L_n} x = Pr_{L_n} y$, а потому $z = z_n - z'_n$ и, следовательно, $z \perp L_n$. Вследствие полноты системы подпространств L_n, $z = 0$, а $x = y$, т. е. x представим по формуле (8). Тем самым доказано, что подпространства L_n образуют разложение пространства H.

6.6. Ортогональные системы элементов

Предыдущие построения приобретают весьма простой геометрический смысл в случае, когда подпространства L_n — одномерные. В этом случае изучение ортогональных разложений приводит к весьма общей теории рядов Фурье, содержащей, в частности, те результаты, которые были получены для пространства l^2 в 2.9.

Определения. Конечная или счетная система элементов h_n гильбертова пространства H называется *ортогональной*, если $h_n \perp h_m$ при $n \neq m$. Если, кроме того, $\| h_n \| = 1$ при всех n, то система называется *ортонормированной*. Ортогональная система элементов называется *полной*, если в H не существует элемента, отличного от 0 и ортогонального всем элементам системы.

Рассуждая, как в 1.12, легко проверить, что *элементы всякой ортогональной системы, если они отличны от 0, линейно независимы.*

Примером полной ортонормированной системы в l^2 может служить система всех координатных ортов.

Заметим, что если все элементы ортогональной системы $h_n \neq \theta$, то, изменяя данные элементы только за счет введения некоторых числовых множителей, именно, полагая $g_n = \frac{h_n}{\|h_n\|}$ *), мы получим ортонормированную систему. Будем дальше считать, что уже сами элементы h_n образуют ортонормированную систему.

Возьмем любую ортонормированную систему элементов h_n. Порождаемые элементами h_n одномерные подпространства $\boldsymbol{L}_n$ тоже ортогональны. По формуле (7)

$$Pr_{L_n} x = \alpha_n h_n, \text{ где } \alpha_n = (x, h_n).$$

Числа $\alpha_n = (x, h_n)$ называются *коэффициентами Фурье* элемента x относительно системы элементов h_n.

Из леммы 6.5.1 вытекает следующая теорема:

Теорема 6.6.1. *Если элемент $x \in \boldsymbol{H}$ представим в форме $x = \sum_n \lambda_n h_n$, то это представление единственно и коэффициенты λ_n равны коэффициентам Фурье α_n элемента x.*

Действительно, если указанное представление имеет место, то по лемме 6.5.1 $\lambda_n h_n = Pr_{L_n} x = \alpha_n h_n$, откуда $\lambda_n = \alpha_n$ и

$$x = \sum_n \alpha_n h_n. \tag{11}$$

Формула (11) называется *разложением Фурье* (или *ортогональным разложением*) элемента x по элементам h_n.

Так как система подпространств $\boldsymbol{L}_n$, очевидно, полна тогда и только тогда, когда полна ортонормированная система элементов h_n, то из теоремы 6.5.1 вытекает следующий основной результат.

Теорема 6.6.2. *Для того чтобы любой элемент $x \in \boldsymbol{H}$ был представим своим разложением Фурье по элементам h_n ортонормированной системы, необходимо и достаточно, чтобы эта система была полной.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что в n-мерном гильбертовом пространстве полная ортонормированная система должна состоять из n элементов. С другой стороны, если в n-мерном гильбертовом пространстве задан произвольный базис, состоящий из попарно ортогональных элементов, то из теоремы 6.6.2 вытекает, что эта система полна.

Теперь для произвольного гильбертова пространства дадим следующее определение:

*) Для краткости мы часто будем писать $\frac{x}{\alpha}$ вместо $\frac{1}{\alpha} x$.

О п р е д е л е н и е. Полная ортонормированная система элементов называется *ортонормированным базисом* гильбертова пространства.

Из возможности и единственности разложения любого $x \in \boldsymbol{H}$ по элементам ортонормированного базиса вытекает, что и в случае, если этот базис — конечный, и тогда, когда он — счетный, ортонормированный базис представляет частный случай того общего понятия базиса, которое было введено в любых нормированных пространствах (5.3 и 5.6).

Из теорем 5.3.4 и 5.6.1 следует, что ортонормированный базис (конечный или счетный) может существовать только в сепарабельном гильбертовом пространстве. Ниже будет установлено, что такой базис в сепарабельном гильбертовом пространстве непременно существует. С другой стороны, можно доказать, что если в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ существует бесконечное, но не счетное множество попарно ортогональных элементов, отличных от θ, то $\boldsymbol{H}$ не сепарабельно. В этой книге мы не будем приводить примеров не сепарабельных гильбертовых пространств.

Снова не предполагаем ортонормированную систему элементов $\{h_n\}$ полной. Так как $Pr_{L_n} x = \alpha_n h_n$ и $\| h_n \| = 1$, то неравенство (10), применительно к рассматриваемым подпространствам L_n, принимает вид $\sum\limits_n \alpha_n^2 \leqslant \| x \|^2$ (α_n, как и выше, — коэффициенты Фурье элемента x). Последнее неравенство, как и неравенства (21) и (22) в гл. II, называется *неравенством Бесселя.*

Из неравенства Бесселя следует, что даже если система $\{h_n\}$ — бесконечная, все же ряд квадратов коэффициентов Фурье для любого $x \in \boldsymbol{H}$ сходится. Соотношение

$$\sum_n \alpha_n^2 = \| x \|^2, \tag{12}$$

получаемое из неравенства Бесселя, если в нем имеет место знак равенства, называется *уравнением замкнутости.* Уравнение замкнутости и в общем случае играет ту же роль, что в пространстве l^2. Именно, мы установим следующую теорему:

Т е о р е м а 6.6.3. *При произвольно заданной ортонормированной системе $\{h_n\}$ следующие три утверждения относительно элемента $x \in \boldsymbol{H}$ равносильны:*

1) *для элемента $x \in \boldsymbol{H}$ справедливо разложение Фурье* (11);

2) *элемент $x \in \boldsymbol{H}$ входит в подпространство, порожденное множеством элементов $\{h_n\}$* *);

3) *для элемента $x \in \boldsymbol{H}$ выполнено уравнение замкнутости* (12).

*) Понятие подпространства, порожденного некоторым множеством, определено в 5.4.

Доказательство. Если для $x \in \boldsymbol{H}$ справедливо разложение (11), то по теореме Пифагора $\| x \|^2 = \sum\limits_n \| \alpha_n h_n \|^2 = \sum\limits_n \alpha_n^2$, т. е. для этого элемента выполнено уравнение (12).

Пусть теперь дано, что для некоторого $x \in \boldsymbol{H}$ выполнено уравнение замкнутости. Обозначим через $\boldsymbol{L}$ подпространство, порожденное множеством элементов h_n, и докажем, что $x \in \boldsymbol{L}$. Представим x в виде $x = y + z$, где $y = Pr_L x$, а $z \perp \boldsymbol{L}$, и потому $z \perp h_n$ при всех n. Тогда $(x, h_n) = (y, h_n)$, т. е. элемент y имеет те же коэффициенты Фурье α_n, что и x. По теореме Пифагора $\| x \|^2 = \| y \|^2 + \| z \|^2$, а с помощью неравенства Бесселя для элемента y имеем

$$\sum_n \alpha_n^2 \leqslant \| y \|^2 \leqslant \| y \|^2 + \| z \|^2 = \| x \|^2.$$

Так как для x выполнено уравнение замкнутости, то в последней цепочке соотношений всюду должен стоять знак равенства, в частности, $\| y \|^2 = \| y \|^2 + \| z \|^2$, т. е. $z = 0$. А тогда $x = y$ и, следовательно, $x \in \boldsymbol{L}$.

Пусть, наконец, дано, что $x \in \boldsymbol{L}$. Покажем, что тогда справедливо разложение (11). Положим $y = \sum\limits_n \alpha_n h_n$, где α_n — коэффициенты Фурье элемента x. Как отмечено в 6.5 (для проекций на любые ортогональные подпространства), такая сумма имеет смысл и в том случае, когда слагаемых — бесконечное множество *). По теореме 6.6.1 коэффициенты Фурье элемента y равны α_n, а потому

$$(x - y, h_n) = (x, h_n) - (y, h_n) = \alpha_n - \alpha_n = 0,$$

т. е. $x - y \perp h_n$ при всех n. Отсюда следует, что $x - y$ ортогонален любой линейной комбинации элементов h_n, а значит, и всему подпространству $\boldsymbol{L}$. Но $x \in \boldsymbol{L}$ — по условию, а $y \in \boldsymbol{L}$ — вследствие того, что он представляется как линейная комбинация элементов h_n или как предел таких линейных комбинаций. Следовательно, и $x - y \in \boldsymbol{L}$, а тогда $x - y$ ортогонален самому себе, что возможно лишь при $x - y = 0$. Таким образом, $x = y = \sum\limits_n \alpha_n h_n$, т. е. для x справедливо разложение Фурье по элементам h_n.

Таким образом, мы показали, что из трех утверждений, сформулированных в теореме: 1) влечет 3), 3) влечет 2), а 2) снова

*) Впрочем, сходимость ряда $\sum\limits_n \alpha_n h_n$ вытекает и непосредственно из неравенства Бесселя и теоремы 6.3.1.

влечет 1). Цепь рассуждений замыкается, что и доказывает равносильность всех этих трех утверждений.

Следствие. Сопоставляя теоремы 6.6.2 и 6.6.3, можно сделать простой, но весьма важный вывод: *для того чтобы ортонормированная система была полной, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $x \in \boldsymbol{H}$ *выполнялось уравнение замкнутости.*

Следующая теорема представляет обобщение той части теоремы 6.6.3, где говорится, что из утверждения 1) вытекает 3).

Теорема 6.6.4. *Если элемент* $x \in \boldsymbol{H}$ *представим своим разложением Фурье* (11) *по элементам ортонормированной системы* $\{h_n\}$, *а* y — *произвольный элемент из* $\boldsymbol{H}$, *причем* α_n — *коэффициенты Фурье элемента* x, *а* β_n — *коэффициенты Фурье элемента* y *относительно системы* $\{h_n\}$, *то*

$$(x,\ y) = \sum_n \alpha_n \beta_n.$$

Действительно, по дистрибутивности скалярного произведения из разложения (11) следует, что

$$(x,\ y) = \sum_n \alpha_n\,(h_n,\ y) = \sum_n \alpha_n \beta_n.$$

Если элементы $f_n \in \boldsymbol{H}$ образуют полную ортогональную систему, но еще не нормированную, и если все $f_n \neq 0$, то, полагая $h_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}$, мы построим полную ортонормированную систему. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{H}$ справедливо разложение (11). При этом $\alpha_n = (x, h_n) = \frac{1}{\|f_n\|}(x, f_n)$ откуда $\alpha_n h_n = \frac{(x, f_n)}{\|f_n\|^2} f_n$, и разложению (11) можно придать вид:

$$x = \sum_n \beta_n f_n, \text{ где } \beta_n = \frac{(x, f_n)}{\|f_n\|^2}. \tag{13}$$

Это представление также называют *ортогональным разложением* или *разложением Фурье* элемента x по элементам f_n.

В гл. VII мы поясним, какой смысл приобретают установленные результаты, если их применить к обычным функциональным рядам Фурье.

6.7. Ортогонализация системы линейно независимых элементов

Пусть в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ задана конечная или счетная система линейно независимых элементов $g_1, g_2, g_3, \ldots$ Обобщая процесс ортогонализации, изложенный в 1.12, мы можем по заданным элементам $g_1, g_2, g_3, \ldots$ построить ортонормированную систему элементов $h_1, h_2, h_3, \ldots$ так, что каждый h_n

имеет вид:

$$h_n = \mu_{n1} g_1 + \mu_{n2} g_2 + \ldots + \mu_{nn} g_n \tag{14}$$

и, обратно, каждый g_n имеет вид:

$$g_n = \nu_{n1} h_1 + \nu_{n2} h_2 + \ldots + \nu_{nn} h_n. \tag{15}$$

Так как требуемые для этого построения выкладки ничем не отличаются от проведенных в 1.12, то мы ограничимся кратким повторением схемы процесса, пропуская промежуточные преобразования.

Сначала строим ортогональную систему элементов $f_1, f_2, f_3, \ldots$, полагая последовательно $f_1 = g_1$, $f_n = g_n - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{nk} f_k$; коэффициенты λ_{nk} определяются из условий ортогональности: $f_n \perp f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$. Произведя вычисления, мы найдем, что при $k < n$

$$(f_n, f_k) = (g_n, f_k) - \lambda_{nk} \| f_k \|^2.$$

Так как из построения видно, что каждый f_k представляет линейную комбинацию элементов $g_1, g_2, \ldots, g_k$, причем коэффициент при g_k равен единице, то $f_k \neq 0$. А тогда из условия $(f_n, f_k) = 0$ находим

$$\lambda_{nk} = \frac{(g_n, f_k)}{\| f_k \|^2}.$$

Далее полагаем $h_n = \frac{1}{\| f_n \|} f_n$. Как и f_n, каждый элемент h_n есть линейная комбинация элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$, т. е. имеет требуемый вид (14), и h_n образуют ортонормированную систему. Кроме того, из определения элементов f_n видно, что каждый g_n есть линейная комбинация элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$, а следовательно, и $h_1, h_2, \ldots, h_n$, т. е. имеет вид (15). Таким образом, описанный процесс приводит к поставленной цели. При этом, если исходная система была бесконечной, то и процесс состоит из бесконечного множества шагов, а система элементов h_n также бесконечная. Если же элементов g_n было конечное число, то элементов h_n будет столько же.

Заметим, что условия (14) и (15) влекут совпадение линейных оболочек систем элементов $\{g_n\}$ и $\{h_n\}$.

Если, например, L — конечно-мерное подпространство пространства H, а $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — какой-нибудь его базис, то, применяя к этой системе процесс ортогонализации, мы построим ортонормированный базис подпространства L.

6.8. Задача о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве

Вернемся к той задаче о наилучшем приближении, которую мы рассматривали выше (5.5) в произвольных нормированных пространствах. Если там мы могли лишь доказать существование решения этой задачи, то в гильбертовом пространстве мы установим эффективный способ нахождения решения, который связан с одним важным свойством коэффициентов Фурье.

Итак, пусть L — конечно-мерное подпространство гильбертова пространства H. Учитывая замечание, сделанное в конце предыдущего параграфа, мы можем считать, что в L нам известен ортонормированный базис, состоящий из элементов $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Следовательно, каждый $y \in L$ имеет вид $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k$. Пусть x — произвольный элемент из H.

Теорема 6.8.1. *Для любого $x \in H$ в L существует единственный элемент наилучшего приближения, а именно $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k$, где α_k — коэффициенты Фурье элемента x относительно системы элементов базиса $h_1, h_2, \ldots, h_n$.*

Доказательство. Возьмем произвольный $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k \in L$ и вычислим $\| y - x \|^2$. Имеем

$$\| y-x \|^2 = (y-x, y-x) = \| y \|^2 - 2(y, x) + \| x \|^2.$$

По теореме Пифагора $\| y \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$; кроме того,

$$(y, x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k, x\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (h_k, x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k.$$

Следовательно,

$$\| y-x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k + \| x \|^2.$$

Прибавляя к правой части и вычитая $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$, получаем

$$\| y-x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \alpha_k)^2 + \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2.$$

Последние два члена правой части от y не зависят. Первый же

член, будучи неотрицательным, имеет очевидное наименьшее значение нуль, которое достигается только при $\lambda_k = \alpha_k$. Следовательно, элемент наилучшего приближения — только один и это есть $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k$.

6.9. Изоморфизм произвольного сепарабельного гильбертова пространства с пространством l^2

В этом параграфе существенную роль играет требование, чтобы рассматриваемое гильбертово пространство было сепарабельным.

Теорема 6.9.1. *В сепарабельном гильбертовом пространстве* $\boldsymbol{H}$, *содержащем элементы, отличные от* θ, *существует конечный или счетный ортонормированный базис.*

Доказательство. По определению сепарабельности в $\boldsymbol{H}$ существует счетное всюду плотное множество A. Перенумеруем все элементы множества A. Повторяя построение, проведенное в 2.8, выделим из A конечную или счетную систему B линейно независимых элементов, линейная оболочка которой совпадает с линейной оболочкой множества A. При этом все выброшенные из A элементы суть линейные комбинации элементов системы B. Систему B подвергнем процессу ортогонализации и построим конечную или счетную ортонормированную систему элементов h_n. Докажем, что она полна.

Пусть $x \in \boldsymbol{H}$ и x ортогонален всем h_n. Так как элементы системы B суть линейные комбинации элементов h_n, то x ортогонален всем элементам системы B. Множество A отличается от B тем, что оно содержит еще некоторые элементы, представляющиеся в виде линейных комбинаций элементов системы B. Поэтому x ортогонален всем элементам множества A. Но так как A всюду плотно в H, то $x = \theta$ [см. 6.3, предложение 5)]. Тем самым полнота системы элементов h_n доказана.

Перенесем определения алгебраического изоморфизма и изометрии, данные в 1.11—12 для эвклидовых пространств, в любые нормированные пространства. Именно, два нормированных пространства $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}_1$ называются *алгебраически изоморфными и изометричными*, если между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие так, что:

а) алгебраическим операциям над элементами из $\boldsymbol{E}$ соответствуют те же операции над их образами в $\boldsymbol{E}_1$; б) нормы соответствующих друг другу элементов из $\boldsymbol{E}$ и из $\boldsymbol{E}_1$ равны.

Теперь сформулируем основную теорему этого параграфа.

Теорема 6.9.2. *Всякое бесконечно-мерное сепарабельное гильбертово пространство* $\boldsymbol{H}$ *алгебраически изоморфно и изометрично пространству* l^2.

Доказательство. По теореме 6.9.1 в H существует счетный ортонормированный базис: $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ По теореме 6.6.2 для любого $x \in H$ справедливо разложение в ряд Фурье: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n h_n$. Теперь каждому $x \in H$ сопоставим последовательность его коэффициентов Фурье $\{\alpha_n\}$, т. е. вектор с бесконечным множеством координат. Обозначим его через a. Как мы знаем, благодаря неравенству Бесселя, $a \in l^2$. Более того, по следствию из теоремы 6.6.3 для любого $x \in H$ выполнено уравнение замкнутости, а потому

$$\| a \| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2} = \| x \|. \tag{16}$$

Вектор a и будем называть образом элемента x.

Если α_n суть коэффициенты Фурье элемента x, а β_n — коэффициенты Фурье элемента y, то для коэффициентов Фурье элемента $x + y$ находим $(x+y, h_n) = (x, h_n) + (y, h_n) = \alpha_n + \beta_n$; поэтому образ элемента $x + y$ равен сумме образов элементов x и y. Аналогично проверяется, что если a — образ элемента x, то λa — образ элемента λx. Значит, алгебраическим операциям над элементами из H соответствуют те же операции над их образами в l^2.

Покажем, что каждый вектор $a = \{\alpha_n\} \in l^2$ является образом некоторого $x \in H$. Для этого по заданному a составим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n h_n$. Так как члены ряда попарно ортогональны, а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \alpha_n h_n \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < +\infty,$$

то по теореме 6.3.1 ряд сходится. Если через x обозначить его сумму, то по теореме 6.6.1 α_n будут коэффициентами Фурье этого x, следовательно, заданный вектор a будет его образом.

Теперь проверим, что установленное соответствие между элементами из H и векторами из l^2 взаимнооднозначно. Действительно, если векторы a и b — образы элементов x и y, соответственно, то, по доказанному, $a - b$ есть образ элемента $x - y$ и по (16) $\| a - b \| = \| x - y \|$. Поэтому, если $x \neq y$, то и $a \neq b$ *).

Таким образом, мы установили соответствие между элементами из H и векторами из l^2, которое представляет алгебраический изоморфизм и, по (16), изометрично. Теорема доказана.

Теперь докажем, что изоморфизм между H и l^2 установлен также и с сохранением величины скалярного произведения.

*) Иными словами, если ортонормированная система полна, а два элемента x и y имеют соответственно одинаковые коэффициенты Фурье, то $x = y$. Для неполной системы это неверно.

Т е о р е м а 6.9.3. *При изоморфизме между пространствами* H *и* l^2, *установленном в теореме* 6.9.2, *скалярное произведение любых двух элементов из* H *равно скалярному произведению их образов в* l^2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть векторы a и b суть образы элементов x и y, соответственно, $a = \{\alpha_n\}$, $b = \{\beta_n\}$. Тогда $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n h_n$, $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n h_n$. Учитывая теорему 6.6.4 и определение скалярного произведения в l^2, находим

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n = (a, b).$$

Благодаря установленному изоморфизму мы можем элементы произвольного абстрактного бесконечно-мерного, сепарабельного гильбертова пространства изображать в виде точек пространства l^2. При этом изображении сохраняются алгебраические и метрические свойства элементов, а также свойство ортогональности. Такое представление называют *координатной реализацией* гильбертова пространства. Читатель легко сообразит, что для конечно-мерного гильбертова пространства аналогичным образом устанавливается его алгебраический изоморфизм с конечномерным эвклидовым пространством R_n, также с сохранением нормы и скалярного произведения.

6.10. Комплексное гильбертово пространство

В комплексной линейной системе E скалярное произведение (x, y) определяется как комплексный функционал, обладающий теми же свойствами б), в) и г), что и в вещественной системе (см. 6.1), и свойством а) в измененной форме: $(y, x) = \overline{(x, y)}$. Отсюда следует, что $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}\,(x, y)$. Норма в такой системе определяется, как и в вещественной системе, по формуле (1). Остается в силе неравенство Коши — Буняковского, но его доказательство становится немного сложнее; комплексная линейная система со скалярным произведением оказывается комплексным нормированным пространством. Если это пространство полно, то оно называется *комплексным гильбертовым пространством*.

Для комплексного сепарабельного гильбертова пространства тем же способом, что и для вещественного, устанавливается его изоморфизм с комплексным пространством $\tilde{l}^2$ или $\tilde{R}_n$. При этом следует учесть, что в комплексном гильбертовом пространстве коэффициенты Фурье, определяемые той же формулой, что и в вещественном пространстве, могут иметь любые комплексные значения.

ГЛАВА VII

ПРОСТРАНСТВО L^2

7.1. Основные свойства пространства L^2

Мы уже встречались в предыдущих главах с банаховыми пространствами L^p $(p \geqslant 1)$. Для многих приложений особый интерес представляет случай, когда $p = 2$. Это объясняется тем, что пространство L^2 — единственное из пространства L^p, которое оказывается гильбертовым. Таким образом, в пространстве L^2 можно использовать весь тот специальный аппарат, который был изучен в предыдущей главе. Ввиду особой важности пространства L^2 мы остановимся сначала несколько подробнее на некоторых из тех элементарных фактов, которые уже упоминались выше по отношению к любым пространствам L^p.

Итак, пусть L^2 означает совокупность всех вещественных измеримых функций $x(t)$, заданных и суммируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$. Суммируемость с квадратом означает, что

$$\int_a^b x^2(t)\,dt < \infty,$$

т. е. что функция $x^2(t)$ должна быть суммируемой. Эквивалентные функции отождествляются. Ясно, что в L^2 входят, в частности, все ограниченные измеримые функции, заданные на $[a, b]$, тем более входят все непрерывные функции *).

Прежде всего проверим, что при естественном определении алгебраических операций *множество* L^2 *— линейная система.* Действительно, сразу ясно, что если функция $x(t)$ входит в L^2, то и всякая функция вида $cx(t)$, где c — любая постоянная, тоже входит в L^2. Менее очевидно, что если $x(t)$ и $y(t)$ входят в L^2, то и их сумма тоже входит в L^2. Этот факт проверяется так.

*) Вместо отрезка $[a, b]$ можно рассматривать любое измеримое множество с конечной мерой в любом эвклидовом пространстве R_n. Если же строить пространство L^2 из функций на множестве с бесконечной мерой, то в последующем потребуются некоторые небольшие изменения.

Прежде всего замечаем, что сумма $x(t)+y(t)$ — измеримая функция. Кроме того, справедливо очевидное неравенство

$$|x(t)\,y(t)|\leqslant x^2(t)+y^2(t).$$

Правая часть как сумма двух суммируемых функций тоже суммируема, а тогда и произведение $x(t)\,y(t)$, будучи измеримым, суммируемо. Теперь из равенства

$$[x(t)+y(t)]^2=x^2(t)+2x(t)\,y(t)+y^2(t)$$

сразу следует, что функция $(x(t)+y(t))^2$ суммируема, т. е. $x+y\in \boldsymbol{L}^2$.

Попутно мы доказали, что произведение любых двух функций из $\boldsymbol{L}^2$ суммируемо. Беря, в частности, $y(t)\equiv 1$, мы видим, что любая функция $x(t)$ из $\boldsymbol{L}^2$ суммируема, т. е. что $\boldsymbol{L}^2\subset \boldsymbol{L}$. Этим включением оправдывается термин —«функции, суммируемые с квадратом».

Заметим, что *произведение двух функций из* $\boldsymbol{L}^2$, будучи всегда суммируемым, *может, однако, не входить в* $\boldsymbol{L}^2$. Например, пусть в качестве $[a, b]$ взят отрезок $[0, 1]$, а $x(t)=t^{-1/4}$. Тогда

$$\int_0^1 x^2(t)\,dt=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}\,\Big|_0^1=2.$$

Таким образом, функция $x\in \boldsymbol{L}^2$. Однако произведение ее самой на себя, т. е. x^2, уже не суммируемо с квадратом (так как $x^4\notin \boldsymbol{L}$):

$$\int_0^1 x^4(t)\,dt=\int_0^1\frac{dt}{t}=\infty.$$

Дословно повторяя те рассуждения, которые были проведены в 3.2, мы можем для любых двух функций из $\boldsymbol{L}^2$ получить неравенство Буняковского

$$\Big(\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\Big)^2\leqslant\int_a^b x^2(t)\,dt\cdot\int_a^b y^2(t)\,dt \tag{1}$$

и вытекающее из него неравенство

$$\sqrt{\int_a^b[x(t)+y(t)]^2\,dt}\leqslant\sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt}+\sqrt{\int_a^b y^2(t)\,dt}. \tag{2}$$

Как и раньше, норму в L^2 вводим по формуле

$$\| x \| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)\, dt}.$$

Мы уже знаем, что все аксиомы нормы при таком определении выполнены; в частности, неравенство (2) и есть неравенство треугольника. Таким образом, L^2 — *нормированное пространство*. Кроме того, мы знаем, что это пространство — *банахово*, и притом *сепарабельное*.

Для любого элемента $x \in L^2$ можно одновременно рассматривать его нормы в пространствах L^2 и L: $\| x \|_{L^2}$ и $\| x \|_L$ (значки указывают те пространства, в которых вычислены эти нормы). Заменяя в неравенстве (1) $x(t)$ на $|x(t)|$ и полагая там $y(t) \equiv 1$, мы сразу получим

$$\| x \|_L \leqslant \sqrt{b-a}\, \| x \|_{L^2}.$$

В частности, если за $[a, b]$ принят отрезок $[0, 1]$, то $\| x \|_L \leqslant \| x \|_{L^2}$.

Из неравенства Буняковского также следует: если $|y(t)| \leqslant M$, то

$$\left| \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt \right| \leqslant M \sqrt{b-a}\, \| x \| \tag{3}$$

(здесь норма взята снова в пространстве L^2).

7.2. Скалярное произведение

Покажем, что в L^2 можно определить скалярное произведение так, что L^2 оказывается гильбертовым пространством. С этой целью для любых $x, y \in L^2$ положим скалярное произведение (x, y) равным интегралу от произведения этих функций по всему отрезку $[a, b]$:

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt. \tag{4}$$

В предыдущем параграфе было доказано, что этот интеграл имеет конечное значение для любых $x, y \in L^2$.

Формулу (4) можно рассматривать как аналог тех формул, по которым определялось скалярное произведение в R_n или в l^2, получаемый за счет замены конечного или счетного множества координат векторов несчетным множеством значений функций, а суммы — интегралом.

Все требования, входящие в общее определение скалярного произведения (см. 6.1), очевидно, выполнены. Кроме того ясно, что норма и скалярное произведение в $\boldsymbol{L}^2$ связаны соотношением

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)},$$

т. е. норма в $\boldsymbol{L}^2$ порождена скалярным произведением. Следовательно, поскольку пространство $\boldsymbol{L}^2$ полно и сепарабельно, оно является *сепарабельным гильбертовым пространством*. Кроме того, оно бесконечно-мерно. Действительно, бесконечное множество линейно независимых элементов из $\boldsymbol{L}^2$ можно найти уже среди непрерывных функций, взяв, например, функции вида t^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

Резюмируя все сказанное, мы приходим к следующему выводу: $\boldsymbol{L}^2$ — *вещественное, бесконечно-мерное, сепарабельное, гильбертово пространство.*

Можно рассматривать аналогичное пространство, составленное из функций, суммируемых с квадратом и допускающих комплексные значения. Чтобы превратить такое пространство в комплексное гильбертово пространство, скалярное произведение нужно ввести по формуле

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt.$$

Заметим, что после введения в $\boldsymbol{L}^2$ скалярного произведения неравенство (1) становится частным случаем общего неравенства Коши — Буняковского (см. формулу (2) из гл. VI).

К пространству $\boldsymbol{L}^2$ применима теорема 6.9.2. По этой теореме $\boldsymbol{L}^2$ изоморфно и изометрично пространству $\boldsymbol{l}^2$, причем при осуществлении этого изоморфизма можно исходить из любого ортонормированного базиса в $\boldsymbol{L}^2$, сопоставляя его элементы координатным ортам в $\boldsymbol{l}^2$. При этом по теореме 6.9.3 сохраняется и величина скалярного произведения. Но так как любое абстрактное сепарабельное бесконечно-мерное гильбертово пространство $\boldsymbol{H}$ изоморфно $\boldsymbol{l}^2$, то, сопоставляя каждому элементу $h \in \boldsymbol{H}$ вместо надлежащего элемента из $\boldsymbol{l}^2$ соответствующий последнему элемент из $\boldsymbol{L}^2$, мы установим алгебраический изоморфизм между $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{L}^2$ с сохранением величины нормы и скалярного произведения *). Таким образом, можно говорить, что *пространство* $\boldsymbol{L}^2$ *представляет функциональную реализацию абстрактного сепарабельного бесконечно-мерного гильбертова пространства.*

*) Так как в абстрактном гильбертовом пространстве произведение элемента на элемент не определено, то, говоря об алгебраическом изоморфизме между $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{L}^2$, мы имеем в виду, как и в 6.9, соответствие для элементов из $\boldsymbol{H}$ и их образов из $\boldsymbol{L}^2$ лишь операций сложения и умножения на число.

Обратим внимание читателя на то, что хотя и в пространстве C_{L^2} определено скалярное произведение (порождающее норму, как и во всем L^2), однако непосредственное применение теории гильбертова пространства к C_{L^2} невозможно, поскольку последнее не полно. Этим и объясняется тот факт, что часто при применении методов функционального анализа в таких задачах, постановка которых возможна в пространстве C_{L^2}, для решения задачи приходится привлекать пространство L^2.

7.3. Ортогональные ряды

Понятие ортогональности элементов уже было введено в 6.3 в абстрактном гильбертовом пространстве. Если его применить к элементам из L^2, то ортогональность функций $x(t)$ и $y(t)$ будет означать по (4), что

$$\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt = 0.$$

Таким образом, мы приходим к тому же понятию ортогональности, которое уже известно читателю из математического анализа по крайней мере для непрерывных функций.

В случае, если в качестве $[a, b]$ взят отрезок $[-\pi, \pi]$, то примером ортогональной системы элементов из L^2 может служить известная тригонометрическая система функций

$$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ \ldots,\ \cos nt,\ \sin nt,\ \ldots \qquad (5)$$

Ее нормировка приводит к ортонормированной системе

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\ \ldots \qquad (5a)$$

Приведем другой важный для приложений пример ортогональной системы функций на отрезке $[-1, 1]$. Для этого возьмем сначала систему линейно независимых функций

$$g_0(t) = 1,\ g_1(t) = t,\ g_2(t) = t^2,\ \ldots,\ g_n(t) = t^n,\ \ldots$$

и применим к ней процесс ортогонализации, указанный в 6.7. В результате получим ортогональную систему полиномов

$$h_n(t) = \mu_{n0} + \mu_{n1}t + \mu_{n2}t^2 + \ldots + \mu_{nn}t^n$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots),$$

в которой $h_n(t)$ — полином в точности n-й степени. Не требуя, чтобы эта система была нормированной, примем $h_0(t) \equiv 1$ и покажем, как последовательно могут быть вычислены $h_1(t)$, $h_2(t)$ и т. д.

Полагая $h_1(t) = \mu_{10} + \mu_{11} t$, ставим условие: $h_1 \perp h_0$, т. е. требуем, чтобы

$$\int_{-1}^{1} (\mu_{10} + \mu_{11} t)\, dt = 0.$$

Вычисляя интеграл, получим, что $2\mu_{10} = 0$, т. е. $\mu_{10} = 0$, а μ_{11} остается произвольным. Беря, например, $\mu_{11} = 1$, найдем, что $h_1(t) = t$.

Теперь положим $h_2(t) = \mu_{20} + \mu_{21} t + \mu_{22} t^2$ и поставим два условия: $h_2 \perp h_0$, $h_2 \perp h_1$ или

$$\int_{-1}^{1} (\mu_{20} + \mu_{21} t + \mu_{22} t^2)\, dt = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} (\mu_{20} + \mu_{21} t + \mu_{22} t^2)\, t\, dt = 0.$$

Тем самым мы получим систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$2\mu_{20} + \frac{2}{3}\mu_{22} = 0, \qquad \frac{2}{3}\mu_{21} = 0.$$

Выбирая, например, $\mu_{22} = 1$, находим $\mu_{20} = -\frac{1}{3}$, $\mu_{21} = 0$ и тогда $h_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$.

Аналогично находим $h_3(t) = t^3 - \frac{3}{5} t$ и т. д.

Полученная ортогональная система полиномов легко может быть нормирована. Если же при указанном процессе построения ортогональных полиномов мы вместо $\mu_{nn} = 1$ будем выбирать μ_{nn} так, чтобы все полиномы принимали значение 1 при $t = 1$, то получим так называемые *полиномы Лежандра**):

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2},$$

$$P_3(t) = \frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2}, \ \ldots,$$

отличающиеся от полиномов $h_n(t)$ лишь постоянными множителями.

---

*) А. М. Лежандр (1752—1833)—крупный французский математик.

Приведем без доказательства общую формулу, по которой вычисляются полиномы Лежандра любой степени:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n].$$

Теорема 7.3.1. *Тригонометрическая система* (5) *полна в пространстве* L^2, *построенном на отрезке* $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Возьмем любой $x \in L^2$, зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $y \in C_{L^2}$ так, что $\|x-y\| < \frac{\varepsilon}{3}$*). Пусть при этом $|y(t)| \leqslant M$, где $M > 0$. Возьмем положительное число $\delta < \frac{\varepsilon^2}{36M^2}$ и такое, что одновременно $\delta < 2\varepsilon$. Введем непрерывную функцию $z(t)$, полагая

$$z(t) = y(t) \text{ при } -\pi \leqslant t \leqslant \pi - \delta,$$
$$z(\pi) = z(-\pi) = y(-\pi),$$

и определяя $z(t)$ на промежутке $\pi - \delta \leqslant t \leqslant \pi$ по закону линейного интерполирования. Тогда и $|z(t)| \leqslant M$, а

$$\|y-z\| = \sqrt{\int_{\pi-\delta}^{\pi} [y(t)-z(t)]^2\,dt} \leqslant \sqrt{4M^2\delta} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{9}} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

По теореме Вейерштрасса существует тригонометрический полином $g(t)$, для которого $|z(t)-g(t)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$ на всем отрезке $[-\pi, \pi]$**). Тогда

$$\|z-g\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [z(t)-g(t)]^2\,dt} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{9\cdot 2\pi} 2\pi} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из полученных оценок следует, что $\|x-g\| < \varepsilon$, следовательно, множество всех тригонометрических полиномов всюду плотно в L^2.

Если некоторый $x \in L^2$ ортогонален всем функциям системы (5), то он ортогонален и любой их линейной комбинации,

---

*) Это возможно, поскольку непрерывные функции образуют множество, всюду плотное в L^2 (ср. 3.7).

**) См. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, n° 154. Благодаря условию $z(\pi) = z(-\pi)$ функция $z(t)$ может быть распространена на всю ось $-\infty < t < +\infty$ по закону 2π-периодичности с сохранением непрерывности, а потому к $z(t)$ применима теорема Вейерштрасса на всей оси, и в частности на промежутке $[-\pi, \pi]$.

т. е. любому тригонометрическому полиному, а тогда, согласно предложению 5) из 6.3, $x = 0$.

Теорема 7.3.2. *Система полиномов Лежандра полна в пространстве* L^2, *построенном на отрезке* $[-1, 1]$.

Доказательство аналогично предыдущему. Пусть $x \in L^2$. По произвольному $\varepsilon > 0$ найдется такой $y \in C_{L^2}$, что $\| x - y \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, по теореме Вейерштрасса о приближении алгебраическими полиномами, найдется алгебраический полином $g(t)$, для которого $| y(t) - g(t) | < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$ при $-1 \leqslant t \leqslant 1$, и потому $\| y - g \| < \frac{\varepsilon}{2}$, а $\| x - g \| < \varepsilon$. Следовательно, множество всех алгебраических полиномов всюду плотно в L^2.

Из самого процесса ортогонализации (ср. 6.7) следует, что каждая из функций t^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) представима в виде линейной комбинации некоторых полиномов Лежандра, следовательно, и всякий алгебраический полином есть линейная комбинация полиномов Лежандра. Поэтому, если x ортогонален всем полиномам Лежандра, то он ортогонален вообще всем алгебраическим полиномам, а тогда $x = 0$ по тем же соображениям, что и в доказательстве предыдущей теоремы.

Введем обозначения:

$$\varphi_0(t) = 1, \quad \varphi'_n(t) = \cos nt, \quad \varphi''_n(t) = \sin nt$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Так как тригонометрическая система (5) полна в L^2 (на отрезке $[-\pi, \pi]$), то, используя формулы (13) из 6.6, можно каждый $x \in L^2$ разложить в ряд Фурье по элементам этой системы. Запишем это разложение в виде

$$x = a_0\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\varphi'_n + b_n\varphi''_n), \tag{6}$$

где

$$a_0 = \frac{(x, \varphi_0)}{\| \varphi_0 \|^2}, \quad a_n = \frac{(x, \varphi'_n)}{\| \varphi'_n \|^2}, \quad b_n = \frac{(x, \varphi''_n)}{\| \varphi''_n \|^2} \tag{7}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Здесь

$$\| \varphi_0 \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dt = 2\pi,$$

$$\| \varphi'_n \|^2 = \| \varphi''_n \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nt\, dt = \pi$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Подставляя в (7) вместо скалярных произведений их выражения в виде интегралов, получаем

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt\,dt$$

$$(n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

т. е. коэффициенты разложения (6) вычисляются по известным формулам Эйлера — Фурье. Заменяя в (6) φ_0, φ_n', φ_n'' их выражениями, получим, что правая часть (6) имеет вид

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt), \tag{8}$$

и мы пришли к обычной форме тригонометрического ряда Фурье.

Однако даже в том случае, когда x есть непрерывная функция, равенство (6) означает лишь сходимость ряда (8) к функции $x(t)$ в смысле метрики пространства L^2, т. е. в среднем. Иными словами, если $S_n(t)$ — частичная сумма ряда (8),

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt + b_k\sin kt),$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi}[x(t) - S_n(t)]^2\,dt \to 0,$$

т. е. среднее квадратическое отклонение $x(t)$ от $S_n(t)$ стремится к нулю. Известно, что точечная сходимость тригонометрического ряда Фурье, т. е. равенство

$$x(t) = \lim S_n(t) \quad \text{при всех } t,$$

даже и для непрерывной функции не всегда имеет место.

Так как полнота системы (5) влечет полноту ортонормированной системы (5а), то из следствия из теоремы 6.6.3 вытекает, что для любого $x \in L^2$ по отношению к системе (5а) выполнено уравнение замкнутости. Это значит, что

$$\|x\|^2 = \left(x, \frac{\varphi_0}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(x, \frac{\varphi_n'}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + \left(x, \frac{\varphi_n''}{\sqrt{\pi}}\right)^2\right].$$

Отсюда с помощью формул (7) легко получаем

$$\| x \|^2 = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

В такой форме обычно и записывается уравнение замкнутости в теории тригонометрических рядов.

Теорема 6.8.1 о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве применительно к подпространству, состоящему из всех тригонометрических полиномов не выше, чем n-й степени, где n — произвольно фиксированное число, означает, что для любого $x \in \boldsymbol{L}^2$ наименьшее среднее квадратическое отклонение дает тот полином, который совпадает с частичной суммой $S_n(t)$ ряда Фурье элемента x.

Аналогичные результаты можно установить и для разложений по полиномам Лежандра.

Обратимся к вопросу о существовании счетного базиса в пространстве $\boldsymbol{C}_{L^2}$. Этот вопрос был оставлен в 5.6 открытым. Для простоты ограничимся случаем, когда за $[a, b]$ принят отрезок $[-\pi, \pi]$. Как мы видели, каждый $x \in \boldsymbol{L}^2$, в частности $x \in \boldsymbol{C}_{L^2}$, единственным образом раскладывается (в смысле сходимости в среднем) в тригонометрический ряд Фурье по функциям системы (5а). Но так как эти функции сами входят в $\boldsymbol{C}_{L^2}$, то они и составляют в нем счетный базис.

Можно доказать, что та же система функций (5а) представляет базис и в пространстве $\boldsymbol{C}_L$.

Приведем еще некоторые следствия из общих результатов гл. VI.

Т е о р е м а 7.3.3 (Ф. Рисс — Э. Фишер *)). *Если* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *произвольная ортонормированная система функций из* $\boldsymbol{L}^2$, *а числа* λ_n *таковы, что* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty$, *то*:

1) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n$ *сходится в среднем 2-го порядка к некоторой функции* x *из* $\boldsymbol{L}^2$;

2) λ_n *суть коэффициенты Фурье этой функции*;

3) *для* x *выполнено уравнение замкнутости.*

Действительно, так как члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n$ попарно ортогональны, а $\| \lambda_n \varphi_n \|^2 = \lambda_n^2$, то сходимость ряда вытекает из

*) Э. Фишер (1875—1954) — немецкий математик. Им, в частности, в начале XX столетия доказана полнота пространства $\boldsymbol{L}^2$.

теоремы 6.3.1; второе и третье утверждения вытекают из теорем 6.6.1 и 6.6.3.

Теорема 7.3.4. *Пусть* $\{\varphi_n\}$ — *произвольная ортонормированная система функций из* L^2, *а функция* $x \in L^2$ *представима своим разложением Фурье по элементам этой системы, т. е.* $x = \sum\limits_n \lambda_n \varphi_n$ *в смысле сходимости по норме. Тогда для любого измеримого множества* $e \subset [a, b]$

$$\int\limits_e x(t)\,dt = \sum_n \lambda_n \int\limits_e \varphi_n(t)\,dt. \tag{9}$$

Таким образом, *почленное интегрирование допустимо для разложения функции из* L^2 *в ряд Фурье даже при отсутствии не только равномерной, но и просто точечной сходимости.*

Доказательство. Пусть $y(t)$ — характеристическая функция множества e *). Тогда, как всякая ограниченная измеримая функция, $y \in L^2$. По дистрибутивности скалярного произведения

$$(x, y) = \sum_n \lambda_n (\varphi_n, y),$$

а это и есть иначе записанное равенство (9).

С доказанной теоремой интересно сопоставить тот факт, что, как устанавливается в теории тригонометрических рядов, тригонометрический ряд Фурье любой суммируемой (например, на промежутке $[-\pi, \pi]$) функции допускает почленное интегрирование лишь по любому промежутку, содержащемуся в $[-\pi, \pi]$, но не произвольному измеримому множеству **).

7.4. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма

Вернемся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода

$$x(s) = \lambda \int\limits_a^b K(s, t)\, x(t)\,dt + f(s), \tag{10}$$

уже рассматривавшимся в 4.5. По-прежнему предполагаем ядро $K(s, t)$ и свободный член $f(s)$ непрерывными. Пользуясь тео-

*) Это значит, что

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in e, \\ 0 & \text{при } t \in [a, b] \setminus e. \end{cases}$$

**) См., например, И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, стр. 320 (по изданию 1957 г.).

ремой Банаха об операторах сжатия и исходя из метрики пространства C, мы доказали в 4.5, что уравнение (10) имеет единственное непрерывное решение при любом свободном члене, если $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, где $M = \max |K(s, t)|$. Покажем теперь, пользуясь метрикой пространства L^2, что этот результат справедлив в более широком интервале значений параметра λ.

Лемма 7.4.1. *При любом $x \in L^2$ функция*

$$z(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$$

непрерывна.

Доказательство. Из равномерной непрерывности функции $K(s, t)$ в квадрате $a \leqslant s, t \leqslant b$ *) вытекает, что по любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что при $|s_1 - s_2| < \delta$

$$|K(s_1, t) - K(s_2, t)| < \varepsilon \text{ для всех } t \in [a, b].$$

А тогда с помощью неравенства (3) имеем

$$|z(s_1) - z(s_2)| = \left| \int_a^b [K(s_1, t) - K(s_2, t)]\, x(t)\, dt \right| \leqslant \varepsilon \sqrt{b-a}\, \|x\|. \qquad (11)$$

Вследствие произвольности ε отсюда вытекает непрерывность $z(s)$.

Из этой леммы видно, что правая часть уравнения (10) при любом $x \in L^2$ представляет непрерывную функцию; следовательно, должна быть непрерывна и левая часть. Таким образом, среди всех функций, входящих в L^2, решениями уравнения (10) могут быть только непрерывные функции.

Будем рассматривать правую часть уравнения (10) как оператор Ux, заданный в пространстве L^2 функций на отрезке $[a, b]$. Значения Ux будем считать элементами того же пространства, учитывая, что, по доказанному, они все входят в C_{L^2}. Положим

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, ds\, dt} \qquad (12)$$

и проверим, что, при $|\lambda| < \frac{1}{B}$, U — оператор сжатия.

*) В курсе математического анализа доказывается и для функций двух переменных, что если функция непрерывна в замкнутом прямоугольнике (или в какой-нибудь другой замкнутой ограниченной области), то она равномерно непрерывна.

Используя те же обозначения, что и в 4.5, $y = Ux$, $\tilde{y} = U\tilde{x}$ (x, $\tilde{x} \in L^2$) и полагая $\xi = x - \tilde{x}$, имеем

$$y(s) - \tilde{y}(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \xi(t)\, dt.$$

Отсюда по неравенству Буняковского

$$[y(s) - \tilde{y}(s)]^2 \leqslant \lambda^2 \int_a^b K^2(s, t)\, dt \,\|\xi\|^2,$$

а тогда

$$\|y - \tilde{y}\|^2 = \int_a^b [y(s) - \tilde{y}(s)]^2\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^2 \|\xi\|^2 \int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, ds\, dt = \lambda^2 B^2 \|x - \tilde{x}\|^2$$

Таким образом,

$$\|y - \tilde{y}\| \leqslant |\lambda|\, B \|x - \tilde{x}\|$$

и, при $|\lambda| < \frac{1}{B}$, U — оператор сжатия. Тем самым доказывается существование и единственность решения уравнения (10) при $|\lambda| < \frac{1}{B}$, причем решение автоматически оказывается непрерывным.

В то же время, очевидно, $B \leqslant M(b - a)$, причем равенство возможно лишь только, если $|K(s, t)| \equiv M$. Поэтому интервал $|\lambda| < \frac{1}{B}$ вообще шире, чем интервал $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$.

Следует, однако, заметить, что если λ удовлетворяет условию $\frac{1}{M(b-a)} \leqslant |\lambda| < \frac{1}{B}$ и при таком λ мы применим к уравнению (10) метод последовательных приближений, рассматривая оператор U в пространстве L^2, то вместо равномерной сходимости процесса, установленной в 4.5 $\left(\text{при } |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}\right)$, можно гарантировать лишь его сходимость в среднем.

Откажемся теперь от требования непрерывности ядра и свободного члена и будем предполагать, что ядро $K(s, t)$ измеримо в квадрате $a \leqslant s, t \leqslant b$, причем

$$\int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, ds\, dt = B^2 < +\infty,$$

и что $f \in L^2$. В этих условиях от решения уравнения (10) естественно требовать, чтобы после его подстановки в уравнение левая часть была равна правой при почти всех s из $[a, b]$. Будем искать решение среди функций из L^2. Точно так же, как и выше, мы сможем доказать, что, при $|\lambda| < \frac{1}{B}$, U — оператор сжатия, а потому уравнение (10) при $|\lambda| < \frac{1}{B}$ имеет в L^2 единственное решение. Однако на этот раз решение уже совсем не обязано быть непрерывной функцией, а его единственность означает лишь единственность «с точностью до перехода к эквивалентной функции». Конечно и выше, для уравнения с непрерывным ядром, единственность решения в пространстве L^2 имела тот же смысл. Однако там нас интересовали непрерывные решения, а непрерывных функций, удовлетворяющих уравнению (10), может быть только одна *).

7.5. Среднее значение функции

В последующих параграфах этой главы мы укажем другой подход к осуществлению функциональной реализации сепарабельного бесконечномерного гильбертова пространства **). Основную роль в последующем будут играть функции, задаваемые непривычным для читателя способом — не своими значениями в каждой точке, точечными значениями, а посредством средних значений.

Понятие среднего значения функции известно читателю из интегрального исчисления. Если, например, функция $x(t)$ непрерывна (или хотя бы интегрируема) ***) на отрезке $[a, b]$, то ее *среднее значение* на этом отрезке определяется формулой

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t)\, dt.$$

При этом $\int_a^b x(t)\, dt = \mu (b - a)$. Среднее значение функции можно определить не только на всем отрезке $[a, b]$, но и на любом отрезке Δ, содержащемся в $[a, b]$. Будем обозначать среднее значение функции $x(t)$ на отрезке Δ через $x(\Delta)$. Той же буквой Δ будем обозначать и длину отрезка Δ. Тогда

$$x(\Delta) = \frac{1}{\Delta} \int_\Delta x(t)\, dt \quad ****) \tag{13}$$

---

*) Следует заметить, что если две непрерывные функции равны между собой почти всюду на отрезке $[a, b]$, то они тождественно совпадают на всем отрезке.

**) При этом при самом построении мы не будем использовать понятие интеграла Лебега. Лишь в заключительных абзацах последнего параграфа интеграл Лебега будет привлечен для установления связи новой конструкции с пространством L^2.

***) Напоминаем читателю, что всякая функция, непрерывная на отрезке, ограничена и интегрируема.

****) $\int_\Delta$ обозначает интеграл по промежутку Δ.

или

$$\int_{\Delta} x(t)\,dt = x(\Delta)\,\Delta. \tag{14}$$

Если отрезок Δ разбит на два непересекающихся отрезка Δ_1 и Δ_2, то имеет место очевидное равенство

$$x(\Delta)\,\Delta = x(\Delta_1)\,\Delta_1 + x(\Delta_2)\,\Delta_2. \tag{15}$$

Это не что иное, как другая запись известного свойства аддитивности определенного интеграла:

$$\int_{\Delta} x(t)\,dt = \int_{\Delta_1} x(t)\,dt + \int_{\Delta_2} x(t)\,dt.$$

Приведем простой пример. Пусть $x(t) = t^2$ на отрезке $[0, 1]$. Если отрезок $\Delta = [\alpha, \beta] \subset [0, 1]$, то

$$x(\Delta) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} t^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2).$$

В частности, если, например, отрезок $[0, 1]$ разбит на n равных частей (см. рис. 10, на котором $n = 4$)

$$\Delta_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$x(\Delta_i) = \frac{3i^2 - 3i + 1}{3n^2}$$

так что

$$x(\Delta_1) = \frac{1}{3n^2}, \quad x(\Delta_2) = \frac{7}{3n^2} \text{ и т. д.}$$

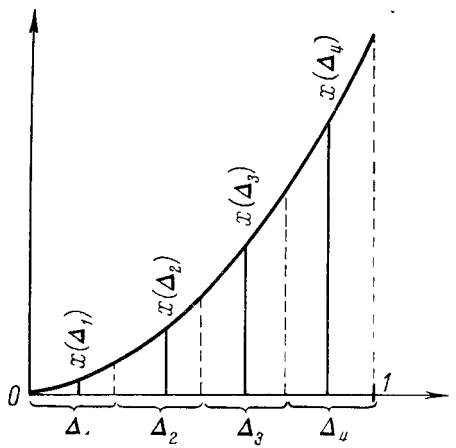

Рис. 10.

Из определения среднего значения сразу следует, что если $z(t) = x(t) + y(t)$, то $z(\Delta) = x(\Delta) + y(\Delta)$ для любого Δ; если $u(t) = \lambda x(t)$, то $u(\Delta) = \lambda x(\Delta)$. Однако для произведения функции на функцию среднее значение вообще не равно произведению средних значений сомножителей.

Мы подошли к понятию среднего значения, считая, что функция уже задана своими точечными значениями. Однако на практике часто встречается обратное положение, когда экспериментальным путем удается определить лишь средние значения функции, а ее значения в точках получаются как результат известной математической абстракции. Так, например, при исследовании неравномерного движения естественно определяется средняя скорость в произвольный промежуток времени и лишь с использованием

математического понятия предела вводится определение скорости в тот или иной момент. Поэтому представляет интерес изучение функций, заданных своими средними значениями.

Будем говорить, что на отрезке $[a, b]$ задана функция $x(\Delta)$, называемая *функцией промежутка*, если каждому отрезку $\Delta \subset [a, b]$ сопоставлено вещественное число $x(\Delta)$, причем при разбиении Δ на два непересекающихся отрезка Δ_1 и Δ_2 выполнено условие (15). Для любого отрезка $\Delta_0 \subset [a, b]$, по аналогии с формулой (14), произведение $x(\Delta_0)\,\Delta_0$ будем называть *интегралом* функции $x(\Delta)$ по промежутку Δ_0. Тогда условие (15), как и выше, выражает свойство аддитивности интеграла. Если какой-нибудь отрезок Δ имеет вид $\Delta = [\alpha, \beta]$, то иногда вместо $x(\Delta)$ будем писать $x([\alpha, \beta])$.

Суммой двух функций $x(\Delta)$ и $y(\Delta)$ назовем функцию

$$z(\Delta) = x(\Delta) + y(\Delta).$$

Аналогично функцию $u(\Delta) = \lambda x(\Delta)$ назовем *произведением* функции $x(\Delta)$ на число λ. Так как $x(\Delta)$ и $y(\Delta)$ удовлетворяют условию (15), то легко видеть, что и $z(\Delta)$ и $u(\Delta)$ тоже удовлетворяют этому условию, что и дает нам право называть их функциями.

В отличие от функций промежутка функции $x(t)$, определяемые своими точечными значениями, будем называть *функциями точки*.

Каждая непрерывная функция точки $x(t)$, заданная на отрезке $[a, b]$, порождает по формуле (13) функцию промежутка $x(\Delta)$. При этом $x(t)$ может быть восстановлена по своим средним значениям дифференцированием интеграла по верхнему пределу:

$$x(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t x(\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\{x([a, t])\,(t-a)\}$$

или

$$x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} x(\tau)\,d\tau = \lim_{\Delta t \to 0} x([t, t+\Delta t]). \tag{16}$$

Тем же способом и любая ограниченная функция $x(t)$ с конечным числом точек разрыва (а такая функция интегрируема) порождает функцию промежутка $x(\Delta)$ и может быть восстановлена по этой функции с помощью формулы (16) во всяком случае в точках непрерывности.

В дальнейшем непрерывные функции и ограниченные функции с конечным числом точек разрыва будем для краткости называть функциями класса K.

Однако не всякая функция промежутка приводит предельным переходом по формуле (16) к какой-нибудь функции точки, а тем более к ограниченной интегрируемой функции. Например, если $x(t)$ — неограниченная функция, для которой $\int_a^g x(t)\,dt$ существует как несобственный, то имеет смысл и $\int_\Delta x(t)\,dt$ по любому $\Delta \subset [a, b]$ и, следовательно, можно определить среднее значения $x(\Delta)$. Но тогда обратный переход по формуле (16) приведет нас снова к функции $x(t)$ в точках ее непрерывности, а $x(t)$ не ограничена.

Примером функции такого типа может служить $x(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ на отрезке $[0, 1]$*). Для любого $[\alpha, \beta]\subset[0, 1]$

$$x([\alpha, \beta])=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{2\sqrt{t}}{\beta-\alpha}\Bigg|_{\alpha}^{\beta}=2\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha}=\frac{2}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}.$$

В частности, если $[\alpha, \beta]=[t, t+\Delta t]$, то $x([t, t+\Delta t])=\frac{2}{\sqrt{t+\Delta t}+\sqrt{t}}$.

Отсюда в соответствии с формулой (16)

$$\lim_{\Delta t\to 0}x([t, t+\Delta t])=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{t}} & \text{при } t>0,\\ \infty & \text{при } t=0.\end{cases}$$

Можно построить и более сложные примеры функций промежутка $x(\Delta)$, для которых конечного $\lim\limits_{\Delta t\to 0}x([t, t+\Delta t])$ не существует ни при одном значении t. Таким образом, рассматриваемый класс функций $x(\Delta)$ содержит более разнообразные функции, чем те, которые порождаются интегрируемыми (в частности, непрерывными) функциями точки.

7.6. Определение пространства $\overline{L}^2$

Введем одно вспомогательное понятие. Пусть $x(\Delta)$ — функция промежутка, заданная на отрезке $[a, b]$. Возьмем произвольное разбиение этого отрезка на конечное число непересекающихся отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ и составим неотрицательную сумму

$$\sigma(x)=\sum_{i=1}^{p}[x(\Delta_i)]^2\,\Delta_i.$$

Эту сумму назовем *метрической суммой* для функции $x(\Delta)$.

Поясним смысл метрической суммы в частном случае, когда функция $x(\Delta)$ порождается непрерывной функцией точки $x(t)$. Из теоремы о среднем значении для определенного интеграла известно, что среднее значение непрерывной функции на любом отрезке совпадает с ее значением в некоторой точке этого отрезка. Поэтому на каждом Δ_i найдется по крайней мере одна такая точка t_i, что $x(\Delta_i)=x(t_i)$. Тогда $\sigma(x)=\sum\limits_{i=1}^{p}x^2(t_i)\,\Delta_i$, а это не что иное, как некоторая интегральная сумма для интеграла $\int\limits_a^b x^2(t)\,dt$.

---

*) В точке $t=0$ выражение $\frac{1}{\sqrt{t}}$ не имеет смысла. Поэтому можно считать нашу функцию просто не определенной в точке $t=0$, что не мешает рассматривать несобственный интеграл $\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}$.

Теперь через $\overline{L^2}$ обозначим множество всех тех функций промежутка $x(\Delta)$, заданных на отрезке $[a, b]$, для каждой из которых *метрические суммы* $\sigma(x)$, *составленные при всевозможных разбиениях отрезка* $[a, b]$, *в совокупности ограничены.*

Покажем, что этим свойством обладают, в частности, все функции $x(\Delta)$, порождаемые ограниченными интегрируемыми функциями точки $x(t)$. Действительно, если $|x(t)| \leqslant M$ при всех $t \in [a, b]$, то для любого $\Delta \subset [a, b]$

$$\left| \int_{\Delta} x(t)\, dt \right| \leqslant M\Delta,$$

а потому $|x(\Delta)| \leqslant M$. Тогда для любого разбиения

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{p} [x(\Delta_i)]^2 \Delta_i \leqslant M^2 \sum_{i=1}^{p} \Delta_i = M^2 (b - a).$$

Разобранная выше функция $x(\Delta)$, порожденная на отрезке $[0, 1]$ функцией точки $\frac{1}{\sqrt{t}}$, представляет пример функции, для которой метрические суммы не ограничены и которая, следовательно, не входит в множество $\overline{L^2}$ (построенное из функций на отрезке $[0, 1]$). Однако мы не будем проводить проверку этого утверждения, а рассмотрим похожий, но более легкий пример: функцию $x(\Delta)$, порожденную на том же отрезке $[0, 1]$ функцией $x(t) = t^{-3/4}$. Если взять отрезок $\Delta = [0, \delta]$, то

$$x(\Delta) = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} t^{-3/4}\, dt = 4\delta^{-3/4}.$$

Так как в любой метрической сумме $\sigma(x)$ имеется слагаемое $x^2(\Delta)\,\Delta$, соответствующее отрезку Δ, левый конец которого находится в точке $t = 0$, то $\sigma(x) \geqslant 16\,\delta^{-3/2}\,\delta = \frac{16}{\sqrt{\delta}}$. Следовательно, за счет уменьшения δ сумма $\sigma(x)$, может стать сколь угодно большой.

Аналогично можно убедиться, что функция промежутка, порождаемая на отрезке $[0, 1]$ функцией $x(t) = t^{-p}$ при любом p таком, что $\frac{1}{2} < p < 1$, не входит в $\overline{L^2}$. Если же $p \geqslant 1$, то $\int_0^1 \frac{dt}{t^p}$ расходится и функция t^{-p} не порождает функцию промежутка.

В множестве $\overline{L^2}$ определим операции сложения и умножения на вещественное число по правилу, введенному в 7.5 для произвольных функций промежутка. Ясно, что при умножении на число функции, входящей в $\overline{L^2}$, мы снова получим функцию из $\overline{L^2}$. Покажем, что и операция сложения не выводит из $\overline{L^2}$.

Пусть $z(\Delta) = x(\Delta) + y(\Delta)$, где $x,\ y \in \overline{L^2}$. Тогда для любого разбиения имеем с помощью неравенства Коши

$$\sum_{i=1}^{p} [z(\Delta_i)]^2 \Delta_i = \sum_{i=1}^{p} [x(\Delta_i)\sqrt{\Delta_i} + y(\Delta_i)\sqrt{\Delta_i}]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{p} [x(\Delta_i)]^2 \Delta_i} + \sqrt{\sum_{i=1}^{p} [y(\Delta_i)]^2 \Delta_i}\right]^2$$

или

$$\sigma(z) \leqslant [\sqrt{\sigma(x)} + \sqrt{\sigma(y)}]^2. \tag{17}$$

Так как $\sigma(x)$ и $\sigma(y)$ в совокупности ограничены, то ограничены и $\sigma(z)$.

Таким образом, $\overline{L^2}$ — линейное множество, в котором роль нулевого элемента играет функция $x(\Delta) \equiv 0$ (порожденная непрерывной функцией $x(t) \equiv 0$). При этом мы считаем, что $x = y$, т. е. x и y совпадают как элементы из $\overline{L^2}$ тогда и только тогда, когда $x(\Delta) = y(\Delta)$ при всех $\Delta \subset [a, b]$.

Отождествим функции точки $x(t)$ класса K с порождаемыми ими функциями промежутка $x(\Delta)$ и тем самым будем считать, что множество всех функций класса K, заданных на $[a, b]$, является подмножеством множества $\overline{L^2}$. При этом алгебраическим операциям — сложению и умножению на число — над функциями $x(t)$ (определяемым естественным образом, как, например, в пространстве C) соответствуют те же операции над порождаемыми функциями промежутка $x(\Delta)$. Однако, если две функции класса K равны между собой во всех точках, где они обе непрерывны, то они будут порождать одну и ту же функцию промежутка *). Поэтому такие две функции мы считаем совпадающими. Иными словами, функция с конечным числом точек разрыва считается определяемой своими значениями в точках непрерывности, а ее значения в точках разрыва не принимаются во внимание.

Введем норму в $\overline{L^2}$, полагая для любого $x \in \overline{L^2}$

$$\| x \| = \sqrt{\sup \sigma(x)} = \sup \sqrt{\sigma(x)}, \tag{18}$$

где точная верхняя граница метрических сумм вычисляется по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$. Покажем, что при таком определении нормы в $\overline{L^2}$ выполняются все аксиомы нормированного пространства.

Ясно, что всегда $\| x \| \geqslant 0$ и при этом $\| x \| = 0$ только для функции $x(\Delta) \equiv 0$. Далее, если $u = \lambda x$, то для любого разбиения $\sigma(u) = \lambda^2 \sigma(x)$, а потому $\sup \sigma(u) = \lambda^2 \sup \sigma(x)$ и $\| u \| = |\lambda| \| x \|$. Проверим аксиому треугольника.

Если $z = x + y$, то из (17) следует, что

$$\sigma(z) \leqslant (\| x \| + \| y \|)^2.$$

Так как это верно для любого разбиения отрезка $[a, b]$, то и

$$\| z \|^2 = \sup \sigma(z) \leqslant (\| x \| + \| y \|)^2$$

или $\| z \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.

---

*) Из интегрального исчисления известно, что изменение значений интегрируемой функции в любом конечном числе точек не влияет на ее средние значения. В то же время если две интегрируемые функции $x(t)$ и $y(t)$ отличны друг от друга в какой-нибудь точке t_0, где *они обе непрерывны*, то найдется окрестность точки t_0, в которой между значениями $x(t)$ и $y(t)$ можно вставить постоянную, например $x(t) < M < y(t)$, а тогда средние значения $x(\Delta)$ и $y(\Delta)$ для Δ, содержащихся в указанной окрестности, различны.

Итак, $\overline{L}^2$ — *нормированное пространство.* Множество непрерывных функций точки на $[a, b]$ с нормой, определенной по формуле (18), будучи линейным подмножеством пространства $\overline{L}^2$, само является нормированным пространством. Покажем, что это и есть пространство C_{L^2}, т. е. что для непрерывных функций $x(t)$ формула (18) сводится к равенству

$$\| x \| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)\, dt}. \tag{19}$$

С одной стороны, из неравенства Буняковского [см. 3.2, формула (4)] сразу следует, что

$$\left(\int_\Delta x(t)\, dt \right)^2 \leqslant \left(\int_\Delta x^2(t)\, dt \right) \Delta \text{ *)}.$$

Поэтому для любого разбиения

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{p} [x(\Delta_i)]^2 \Delta_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\Delta_i} \left(\int_{\Delta_i} x(t)\, dt \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{p} \int_{\Delta_i} x^2(t)\, dt = \int_a^b x^2(t)\, dt. \tag{20}$$

Отсюда по формуле (18)

$$\| x \|^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)\, dt. \tag{21}$$

С другой стороны, мы уже видели, что если $x(t)$ непрерывна, то каждая метрическая сумма $\sigma(x)$ есть интегральная сумма для интеграла $\int_a^b x^2(t)\, dt$. Но известно, что интеграл есть предел интегральных сумм при условии неограниченного дробления отрезка $[a, b]$. Следовательно, среди метрических сумм $\sigma(x)$ встречаются такие, которые сколько угодно мало отличаются от $\int_a^b x^2(t)\, dt$, т. е. при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma(x) > \int_a^b x^2(t)\, dt - \varepsilon$. Поэтому

$$\| x \|^2 = \sup \sigma(x) \geqslant \int_a^b x^2(t)\, dt.$$

Отсюда и из доказанного выше обратного неравенства (21) и вытекает формула (19).

*) Применяя здесь неравенство Буняковского, мы считаем второй множитель в подынтегральной функции равным единице.

Из формулы (19) следует, что если $x \in C_{L^2}$ и $|x(t)| \leqslant M$, то

$$\|x\| \leqslant M\sqrt{b-a}\ ^*). \tag{22}$$

Как и в пространстве L^2, сходимость по норме в пространстве $\overline{L}^2$ называется *сходимостью в среднем 2-го порядка*. Так как в этой главе сходимости в среднем других порядков не рассматриваются, то мы будем называть сходимость в $\overline{L}^2$ просто сходимостью в среднем. В 3.3 уже было отмечено, что если последовательность непрерывных функций $\{x_n(t)\}$ сходится равномерно к непрерывной функции $x(t)$ ($\max |x_n(t) - x(t)| \to 0$), то эта последовательность сходится к той же предельной функции и в среднем, т. е. $\|x_n - x\| \to 0$. Впрочем, этот факт есть очевидное следствие неравенства (22).

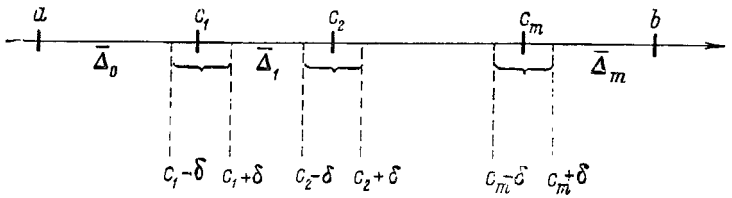

Рис. 11.

Покажем теперь, что формула (19) верна и для любой функции класса K.

Пусть $|x(t)| \leqslant M$ на отрезке $[a, b]$ и непрерывна всюду, за исключением точек $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ (рис. 11). Будем считать, что a и b не входят в число точек разрыва. Читатель поймет, как следует в противном случае слегка изменить дальнейшие рассуждения. Так как при доказательстве неравенства (21) непрерывность $x(t)$, по существу, не была использована **), то оно справедливо и сейчас. Остается получить обратное неравенство.

Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, чтобы интервалы $(c_j - \delta, c_j + \delta)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ не налегали друг на друга и содержались в $[a, b]$ и чтобы выполнялось неравенство $\delta < \dfrac{\varepsilon}{4mM^2}$. На каждом из отрезков функ-

$$\overline{\Delta}_0 = [a,\ c_1 - \delta],\quad \overline{\Delta}_1 = [c_1 + \delta,\ c_2 - \delta],\quad \ldots,\quad \overline{\Delta}_m = [c_m + \delta,\ b]$$

ция $x(t)$ непрерывна. Поэтому по доказанному для такого случая равенству (19) на каждом из этих отрезков $\overline{\Delta}_j$ интеграл $\int\limits_{\overline{\Delta}_j} x^2(t)\,dt$ равен точной верхней границе множества метрических сумм. Следовательно, для каждого из $\overline{\Delta}_j$ можно составить его разбиение на отрезки Δ_{ji} $(i = 1, 2, \ldots, p_j)$, при котором метрическая сумма

$$\sigma_j(x) = \sum_{i=1}^{p_j} [x(\Delta_{ji})]^2\,\Delta_{ji} > \int\limits_{\overline{\Delta}_j} x^2(t)\,dt - \frac{\varepsilon}{2(m+1)}$$

$$(j = 0, 1, \ldots, m).$$

*) Это неравенство вытекает, конечно, и из той оценки $\sigma(x)$, которая была проведена в начале параграфа для ограниченной интегрируемой функции.

**) Использованное по ходу доказательства неравенство Буняковского проверяется для функций класса K тем же элементарным рассуждением, которое было проведено в 3.2 для непрерывных функций.

Возьмем все отрезки Δ_{ji} и присоединим к ним отрезки $[c_j-\delta,\ c_j+\delta]$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$. Тогда получится некоторое разбиение отрезка $[a,\ b]$. Для соответствующей метрической суммы имеем

$$\sigma(x)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=1}^{p_j}[x(\Delta_{ji})]^2\Delta_{ji}+\sum_{j=1}^{m}[x([c_j-\delta,\ c_j+\delta])]^2\,2\delta\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{j=0}^{m}\sigma_j(x)>\sum_{j=0}^{m}\int\limits_{\Delta_j}x^2(t)\,dt-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Но

$$\sum_{j=0}^{m}\int\limits_{\Delta_j}x^2(t)\,dt=\int\limits_a^b x^2(t)\,dt-\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{c_j-\delta}^{c_j+\delta}x^2(t)\,dt.$$

При каждом $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$

$$\int\limits_{c_j-\delta}^{c_j+\delta}x^2(t)\,dt\leqslant 2\delta M^2<\frac{\varepsilon}{2m},$$

а потому

$$\sigma(x)>\int\limits_a^b x^2(t)\,dt-m\,\frac{\varepsilon}{2m}-\frac{\varepsilon}{2}=\int\limits_a^b x^2(t)\,dt-\varepsilon.$$

Тем более,

$$\|x\|^2>\int\limits_a^b x^2(t)\,dt-\varepsilon.$$

Вследствие произвольности ε отсюда и вытекает неравенство $\|x\|^2\geqslant$ $\geqslant\int\limits_a^b x^2(t)\,dt$. Тем самым доказательство закончено.

Переходим к установлению полноты пространства $\overline{L}^2$.

Лемма 7.6.1. *Если последовательность элементов $x_n\in\overline{L}^2$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ фундаментальна, то и для любого отрезка $\Delta\subset[a,\ b]$ последовательность значений $\{x_n(\Delta)\}$ тоже фундаментальна.*

Доказательство. Любой $\Delta\subset[a,\ b]$ можно рассматривать как один из отрезков Δ_i некоторого разбиения отрезка $[a,\ b]$. Так как

$$\sum_{i=1}^{p}[x_n(\Delta_i)-x_m(\Delta_i)]^2\Delta_i=\sigma(x_n-x_m)\leqslant\|x_n-x_m\|^2,$$

то, в частности, для $\Delta_i=\Delta$ имеем

$$|x_n(\Delta)-x_m(\Delta)|^2\Delta\leqslant\|x_n-x_m\|^2$$

и, следовательно,

$$|x_n(\Delta)-x_m(\Delta)|^2\to 0\qquad\text{при } n,\ m\to\infty,$$

а вместе с тем и

$$x_n(\Delta) - x_m(\Delta) \to 0 \quad \text{при } n, m \to \infty.$$

Теорема 7.6.1. *Пространство* $\overline{L}^2$ *полно.*

Доказательство. Возьмем фундаментальную последовательность элементов $x_n \in \overline{L}^2$. Тогда $\| x_n \| \leqslant C$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где C — постоянная (см. 5.2). Положим $x(\Delta) = \lim x_n(\Delta)$ для любого $\Delta \subset [a, b]$. Существование этого предела доказано в лемме 7.6.1. Так как каждая функция $x_n(\Delta)$ удовлетворяет условию (15), т. е.

$$x_n(\Delta)\,\Delta = x_n(\Delta_1)\,\Delta_1 + x_n(\Delta_2)\,\Delta_2,$$

то, переходя в этом равенстве к пределу, мы видим, что и $x(\Delta)$ удовлетворяет условию (15). Далее, для любого разбиения отрезка $[a, b]$

$$\sigma(x_n) = \sum_{i=1}^{p} [x_n(\Delta_i)]^2\,\Delta_i \leqslant \| x_n \|^2 \leqslant C^2,$$

а потому и

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{p} [x(\Delta_i)]^2 \Delta_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p} [x_n(\Delta_i)]^2 \Delta_i \leqslant C^2,$$

следовательно, $x \in \overline{L}^2$. Покажем, что $x = \lim x_n$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N так, что $\| x_n - x_m \| < \varepsilon$ при $n, m \geqslant N$. Тогда для любого разбиения отрезка $[a, b]$

$$\sigma(x_n - x_m) = \sum_{i=1}^{p} [x_n(\Delta_i) - x_m(\Delta_i)]^2 \Delta_i \leqslant \| x_n - x_m \|^2 < \varepsilon^2.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\sigma(x_n - x) = \sum_{i=1}^{p} [x_n(\Delta_i) - x(\Delta_i)]^2 \Delta_i \leqslant \varepsilon^2$$

или $\| x_n - x \| \leqslant \varepsilon$. Тем самым доказано, что $x_n \to x$, а вместе с тем доказана и полнота $\overline{L}^2$.

Следствие. Из проведенного рассуждения как следствие получается теорема о предельном переходе для средних значений: *если* $x_n \to x$, *то* $x_n(\Delta) \to x(\Delta)$ *при любом* $\Delta \subset [a, b]$.

7.7. Плотность множества непрерывных функций в пространстве $\overline{L}^2$

Установим сначала некоторое вспомогательное предложение. Будем говорить, что из двух разбиений отрезка $[a, b]$ второе *мельче* первого, если второе получено из первого дроблением некоторых из отрезков, составляющих первое разбиение. На рис. 12 верхнее разбиение (II) получено из нижнего (I) дроблением Δ_1, Δ_3 и Δ_4. Имея любые два разбиения (I) и (II) отрезка $[a, b]$, будем обозначать $\sigma_{\mathrm{I}}(x)$ и $\sigma_{\mathrm{II}}(x)$ метрические суммы элемента x, составленные для (I) и (II) разбиений соответственно.

Лемма 7.7.1. *Если разбиение* (II) *мельче разбиения* (I), *то* $\sigma_{\mathrm{II}}(x) \geqslant \sigma_{\mathrm{I}}(x)$ *для любого* $x \in \overline{L}^2$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда разбиение (II) получается из разбиения (I) делением только одного из его отрезков Δ на две части Δ' и Δ''. Общий случай, очевидно, сводится к этому частному, если такое дробление только одного отрезка на две части повторить надлежащее количество раз.

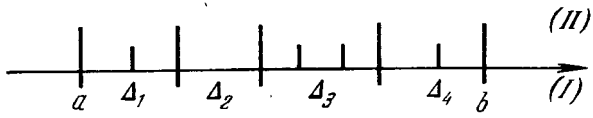

Рис. 12.

Так как слагаемые в метрических суммах $\sigma_{\mathrm{I}}(x)$ и $\sigma_{\mathrm{II}}(x)$, отвечающие всем неделящимся отрезкам разбиения (I), одинаковы, то остается сравнить слагаемые, отвечающие Δ (в $\sigma_{\mathrm{I}}(x)$) и Δ' и Δ'' (в $\sigma_{\mathrm{II}}(x)$), и доказать, что

$$[x(\Delta)]^2\Delta \leqslant [x(\Delta')]^2\Delta' + [x(\Delta'')]^2\Delta''.$$

На основании условия (15) это неравенство равносильно

$$[x(\Delta')\Delta' + x(\Delta'')\Delta'']^2 \leqslant \{[x(\Delta')]^2\Delta' + [x(\Delta'')]^2\Delta''\}\Delta. \tag{23}$$

Последнее неравенство проверяется совершенно элементарно, если рассмотреть разность между обеими его частями. Именно, так как $\Delta = \Delta' + \Delta''$, то

$$\begin{aligned}\{[x(\Delta')]^2\Delta' + [x(\Delta'')]^2\Delta''\}(\Delta' + \Delta'') - [x(\Delta')\Delta' + x(\Delta'')\Delta'']^2 = \\ = [x(\Delta')]^2\Delta'^2 + [x(\Delta'')]^2\Delta''^2 + \{[x(\Delta')]^2 + [x(\Delta'')]^2\}\Delta'\Delta'' - \\ - [x(\Delta')]^2\Delta'^2 - [x(\Delta'')]^2\Delta''^2 - 2x(\Delta')x(\Delta'')\Delta'\Delta'' = \\ = \{[x(\Delta')]^2 + [x(\Delta'')]^2 - 2x(\Delta')x(\Delta'')\}\Delta'\Delta'' = [x(\Delta') - x(\Delta'')]^2\Delta'\Delta'' \geqslant 0.\end{aligned}$$

Неравенство (23) доказано.

Теперь мы докажем две леммы о приближениях к элементам в пространстве $\overline{L^2}$.

Функция точки $y(t)$, заданная на $[a, b]$, называется *кусочно-постоянной*, если весь отрезок $[a, b]$ разбивается на конечное число непересекающихся промежутков Δ_i, на каждом из которых $y(t)$ равна некоторой постоянной. На концах промежутков Δ_i функцию $y(t)$ можно считать неопределенной. Кусочно-постоянные функции входят в класс K, а потому и в $\overline{L^2}$.

Лемма 7.7.2. *Для любого* $x \in \overline{L^2}$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая кусочно-постоянная функция* $y(t)$, *для которой*

$$\|x - y\| \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Прежде всего подберем разбиение $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ отрезка $[a, b]$ на отрезки $\Delta_i = [a_{i-1}, a_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (обозначим дальше это разбиение (δ), а соответствующую ему метрическую сумму $-\sigma_\delta(x)$), так что

$$\|x\|^2 - \sigma_\delta(x) < \varepsilon^2.$$

Тогда, по лемме 7.7.1, для любого разбиения, более мелкого, чем (δ), $\sigma_\delta(x) \leqslant \sigma(x) \leqslant \|x\|^2$, а потому

$$\sigma(x) - \sigma_\delta(x) < \varepsilon^2. \tag{24}$$

Положим (рис. 13)

$$y(t)=x(\Delta_i) \text{ при } a_{i-1}<t<a_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Докажем, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$ на отрезки $\overline{\Delta}_j$

$$\sqrt{\sigma(x-y)}<\varepsilon.$$

Если задать произвольное разбиение, то, перемешивая его точки деления с точками a_i, мы получим разбиение более мелкое по сравнению с данным

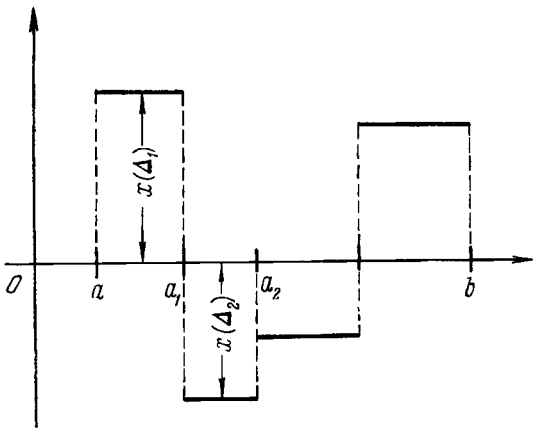

Рис. 13.

и с (δ). По лемме 7.7.1 метрическая сумма при этом не может уменьшиться, а потому достаточно доказать требуемое неравенство для метрических сумм, составленных по разбиениям более мелким, чем (δ).

Итак, пусть отрезки $\overline{\Delta}_j$ составляют разбиение отрезка $[a, b]$ более мелкое, чем (δ). Тогда

$$\sigma(x-y)=\sum_j [x(\overline{\Delta}_j)-y(\overline{\Delta}_j)]^2\overline{\Delta}_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\overline{\Delta}_j\subset\Delta_i}[x(\overline{\Delta}_j)-y(\overline{\Delta}_j)]^2\overline{\Delta}_j\ *).$$

Так как $y(t)$ равна постоянной на кажом $\overline{\Delta}_j$, именно $y(t)=x(\Delta_i)$, если $\overline{\Delta}_j\subset\Delta_i$, то и среднее значение $y(\overline{\Delta}_j)=x(\Delta_i)$ и потому

$$\sigma(x-y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\overline{\Delta}_j\subset\Delta_i}[x(\overline{\Delta}_j)-x(\Delta_i)]^2\overline{\Delta}_j.$$

*) Внутренняя сумма при каждом i распространяется на все те j, для которых $\overline{\Delta}_j\subset\Delta_i$. Так как взятое разбиение мельче (δ), то каждый $\overline{\Delta}_j$ входит целиком в один из Δ_i.

Преобразуя правую часть и используя по ходу вычислений условие (15)*) и неравенство (24), находим

$$\sigma(x-y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\overline{\Delta}_j\subset\Delta_i}[x(\overline{\Delta}_j)]^2\overline{\Delta}_j-$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}x(\Delta_i)\sum_{\overline{\Delta}_j\subset\Delta_i}x(\overline{\Delta}_j)\overline{\Delta}_j+\sum_{i=1}^{n}[x(\Delta_i)]^2\sum_{\overline{\Delta}_j\subset\Delta_i}\overline{\Delta}_j=$$

$$=\sigma(x)-2\sum_{i=1}^{n}[x(\Delta_i)]^2\Delta_i+\sum_{i=1}^{n}[x(\Delta_i)]^2\Delta_i=$$

$$=\sigma(x)-2\sigma_\delta(x)+\sigma_\delta(x)=\sigma(x)-\sigma_\delta(x)<\varepsilon^2.$$

Таким образом, $\sqrt{\sigma(x-y)}<\varepsilon$ и, переходя в левой части неравенства к точной верхней границе, получаем $\|x-y\|\leqslant\varepsilon$.

Лемма 7.7.3. *Для любой кусочно-постоянной функции* $y(t)$ (на отрезке $[a, b]$) *и любого* $\varepsilon>0$ *существует такая непрерывная функция* $z(t)$, *что* $\|y-z\|<\varepsilon$ (норма — в пространстве $\overline{L}^2$).

Доказательство. Пусть отрезок $[a, b]$ (рис. 14) с помощью точек $a=a_0<a_1<\ldots<a_n=b$ разбивается на такие промежутки $\Delta_i=(a_{i-1}, a_i)$, на каждом из которых $y(t)$ есть постоянная: $y(t)=c_i$ на Δ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Положим $M=\max|c_i|$ и подберем $\eta>0$ так, чтоб $\eta<\frac{\Delta_i}{2}$ при всех $i=1, 2, \ldots, n$ и $\eta<\frac{\varepsilon^2}{8M^2n}$**). Введем непрерывную функцию $z(t)$, полагая

$$z(t)=\begin{cases}c_1 & \text{при } a\leqslant t\leqslant a_1-\eta,\\ c_i & \text{при } a_{i-1}+\eta\leqslant t\leqslant a_i-\eta \quad (i=2, 3, \ldots, n-1),\\ c_n & \text{при } a_{n-1}+\eta\leqslant t\leqslant b\end{cases}$$

и определяя $z(t)$ в интервалах между этими промежутками по закону линейного интерполирования. Тогда $|z(t)|\leqslant M$ при всех t.

Теперь с помощью формулы (19) имеем

$$\|y-z\|^2=\int_a^b[y(t)-z(t)]^2\,dt=$$

$$=\int_{a_1-\eta}^{a_1}[c_1-z(t)]^2\,dt+\int_{a_1}^{a_1+\eta}[c_2-z(t)]^2\,dt+$$

$$+\int_{a_2-\eta}^{a_2}[c_2-z(t)]^2\,dt+\ldots+\int_{a_{n-1}}^{a_{n-1}+\eta}[c_n-z(t)]^2\,dt. \qquad (25)$$

*) Легко понять, что условие (15) распространяется по индукции на случай разбиения отрезка Δ на любое конечное число непересекающихся отрезков, так что, например,

$$x(\Delta_i)\,\Delta_i=\sum_{\overline{\Delta}_j\subset\Delta_i}x(\overline{\Delta}_j)\,\overline{\Delta}_j.$$

**) Если бы оказалось $M=0$, то, считая $y(a_i)=0$ при всех $i=0, 1, \ldots, n$, мы получили бы $y(t)\equiv 0$, т. е. уже $y(t)$ была бы непрерывной функцией.

В каждом из интегралов подынтегральная функция, очевидно, не превосходит $4M^2$ *), и потому каждый из интегралов не превосходит $4M^2\eta$, а вся сумма (25) не превосходит $2(n-1)\,4M^2\eta < 8(n-1)\,M^2\dfrac{\varepsilon^2}{8M^2n} = \dfrac{n-1}{n}\varepsilon^2 < \varepsilon^2$.

Таким образом, $\|y-z\| < \varepsilon$.

Переходим к основной теореме этого параграфа.

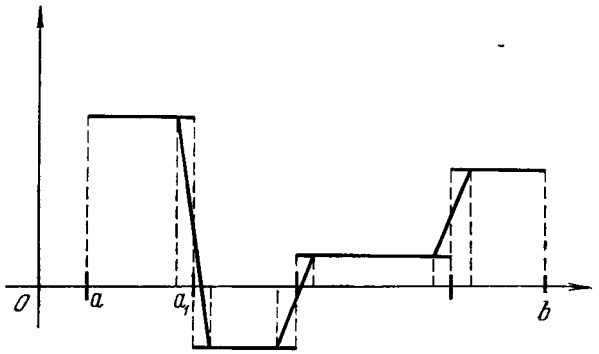

Рис. 14.

Теорема 7.7.1. *Множество* C_{L^2} *всюду плотно в пространстве* $\overline{L^2}$.

Иными словами, *каждый элемент* $x \in \overline{L^2}$ *может быть представлен как предел сходящейся в среднем последовательности непрерывных функций.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $x \in \overline{L^2}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $z(t)$, удовлетворяющая неравенству $\|x - z\| < \varepsilon$ (см. 3.7). По лемме 7.7.2 существует такая кусочно-постоянная функция $y(t)$, что $\|x - y\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, а по лемме 7.7.3 существует непрерывная функция $z(t)$, для которой $\|y - z\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\|x - z\| < \varepsilon$, и теорема доказана.

Теорема 7.7.2. *Пространство* $\overline{L^2}$ *сепарабельно.*

Эта теорема вытекает сразу из теорем 3.7.2 и 7.7.1, поскольку в 3.7 мы уже установили сепарабельность пространства C_{L^2}.

7.8. Умножение функций из $\overline{L^2}$

Введем определение произведения двух функций из $\overline{L^2}$ с таким расчетом, чтобы для функций, сводящихся к функциям точки, произведение имело бы обычный смысл. Произведение будет определено как функция промежутка, которая может и не входить в $\overline{L^2}$.

---

*) Можно доказать и более точную оценку: M^2.

О п р е д е л е н и е. Пусть $x, y \in \overline{L^2}$. Их *произведением* xy называется функция промежутка $z(\Delta)$, определяемая при любом $\Delta \subset [a, b]$ равенством

$$z(\Delta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_\Delta x_n(t)\, y_n(t)\, dt, \tag{26}$$

где $x_n, y_n \in C_{L^2}$ и $x_n \to x$, $y_n \to y$.

Чтобы оправдать это определение, покажем, что предел (26) существует и не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (стремящихся к x и y соответственно) и что $z(\Delta)$ удовлетворяет условию (15). Попутно мы покажем, что в формуле (26) получится тот же предел, если в качестве $x_n(t)$ и $y_n(t)$ взять любые функции класса K, сходящиеся в среднем к x и y соответственно.

Итак, пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$ и $x_n(t)$, $y_n(t)$ — функции класса K. Существование предела (26) будет следовать из того, что числовая последовательность $\left\{\int_\Delta x_n(t)\, y_n(t)\, dt\right\}$ фундаментальна. Действительно, из сходимости $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ вытекает, что $\|x_n\|, \|y_n\| \leqslant M$, где M — некоторая постоянная. Тогда, при любых n и m с помощью неравенства Буняковского и формулы (19) имеем

$$\left|\int_\Delta x_n(t)\, y_n(t)\, dt - \int_\Delta x_m(t)\, y_m(t)\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_\Delta [x_n(t) - x_m(t)]\, y_n(t)\, dt\right| + \left|\int_\Delta x_m(t)\, [y_n(t) - y_m(t)]\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_\Delta [x_n(t) - x_m(t)]^2\, dt}\, \sqrt{\int_\Delta y_n^2(t)\, dt} +$$

$$+ \sqrt{\int_\Delta x_m^2(t)\, dt}\, \sqrt{\int_\Delta [y_n(t) - y_m(t)]^2\, dt} \leqslant$$

$$\leqslant M \|x_n - x_m\| + M \|y_n - y_m\|,$$

а последнее выражение стремится к нулю при $n, m \to \infty$.

Теперь покажем, что предел (26) не зависит от выбора $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Достаточно рассмотреть случай, когда изменяется одна из этих последовательностей. Пусть, например, дана другая последовательность $x'_n \to x$ [$x'_n(t)$ — функции класса K]. Тогда, используя оценки, аналогичные только что проведенным, имеем

$$\left|\int_\Delta x_n(t)\, y_n(t)\, dt - \int_\Delta x'_n(t)\, y_n(t)\, dt\right| =$$

$$= \left|\int_\Delta [x_n(t) - x'_n(t)]\, y_n(t)\, dt\right| \leqslant M \|x_n - x'_n\|.$$

Но $x_n - x'_n \to 0$, а потому

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Delta x_n(t)\, y_n(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_\Delta x'_n(t)\, y_n(t)\, dt.$$

Наконец, если отрезок Δ разбит на два непересекающихся отрезка Δ' и Δ'', то

$$z(\Delta)\,\Delta = \lim_{n\to\infty} \int_{\Delta} x_n(t)\,y_n(t)\,dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\Delta'} x_n(t)\,y_n(t)\,dt + \lim_{n\to\infty} \int_{\Delta''} x_n(t)\,y_n(t)\,dt =$$

$$= z(\Delta')\,\Delta' + z(\Delta'')\,\Delta'',$$

т. е. $z(\Delta)$ удовлетворяет условию (15).

Остановимся на случае, когда один из сомножителей — непрерывная функция.

Лемма 7.8.1. *Если* $x \in \overline{L^2}$ *— произвольный, а* $y \in C_{L^2}$, *то* $z = xy \in \overline{L^2}$ и $\|z\| \leqslant M\|x\|$, *где* $M = \max|y(t)|$.

Доказательство. Возьмем $x_n \in C_{L^2}$, так что $x_n \longrightarrow x$, а все y_n берем равными y. Для любого разбиения отрезка $[a, b]$ метрическая сумма

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^{p} [z(\Delta_i)]^2\,\Delta_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\Delta_i}\left(\int_{\Delta_i} x_n(t)\,y(t)\,dt\right)^2.$$

Но по неравенству Буняковского, используя также формулу (19), имеем

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\Delta_i}\left(\int_{\Delta_i} x_n(t)\,y(t)\,dt\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\Delta_i} \int_{\Delta_i} x_n^2(t)\,dt \int_{\Delta_i} y^2(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M^2 \sum_{i=1}^{p} \int_{\Delta_i} x_n^2(t)\,dt = M^2 \int_a^b x_n^2(t)\,dt = M^2\|x_n\|^2.$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу и пользуясь непрерывностью нормы, находим, что $\sigma(z) \leqslant M^2\|x\|^2$. Таким образом, метрические суммы $\sigma(z)$ в совокупности ограничены, т. е. $z \in \overline{L^2}$. Кроме того, отсюда же следует, что

$$\|z\| = \sqrt{\sup \sigma(z)} \leqslant M\|x\|.$$

Лемма доказана.

Если $y(t) \equiv 1$ (тогда можно взять и $y_n(t) \equiv 1$), то из определения произведения и из теоремы о предельном переходе для средних значений (см. следствие из теоремы 7.6.1) сразу вытекает, что $xy = x$ при любом $x \in \overline{L^2}$. Вообще, если $y(t) \equiv \lambda$ есть постоянная, то $xy = \lambda x$, где правую часть нужно понимать как произведение на число (так, как это было определено в 7.5). Иными словами, умножение на функцию, равную постоянной, совпадает с умножением на число. В частности, $x\theta = \theta$ при любом $x \in \overline{L^2}$.

Из определения произведения сразу вытекает его коммутативность. Проверим его дистрибутивность относительно сложения. Пусть $y = y' + y''$, а $z = xy$, $z' = xy'$, $z'' = xy''$. Подберем $x_n, y_n', y_n'' \in C_{L^2}$ так, что $x_n \to x$, $y_n' \to y'$,

$y_n'' \to y''$. Тогда $y_n' + y_n'' \to y$ и, по определению,

$$z(\Delta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_\Delta x_n(t)\,[y_n'(t) + y_n''(t)]\,dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_\Delta x_n(t)\,y_n'(t)\,dt + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_\Delta x_n(t)\,y_n''(t)\,dt = z'(\Delta) + z''(\Delta);$$

т. е. $xy = x(y' + y'') = xy' + xy''$.

Вопрос об ассоциативности произведения в полном объеме не имеет смысла, так как произведение двух функций из $\overline{L^2}$ уже может не входить в $\overline{L^2}$, а тогда его произведение на третью функцию не определено. Ограничимся некоторыми замечаниями по этому вопросу.

Если λ — число, то, очевидно, $x(\lambda y) = \lambda(xy)$ при любых x, $y \in \overline{L^2}$ *). Покажем, что если $\varphi \in C_{L^2}$ — произвольная непрерывная функция, то $(\varphi x)\,y = x\,(\varphi y)$.

Положим сначала $z = (\varphi x)\,y$, $z_1 = x\,(\varphi y)$. Подберем x_n, $y_n \in C_{L^2}$ так, что $x_n \to x$, $y_n \to y$. Тогда, по лемме 7.8.1,

$$\| \varphi x_n - \varphi x \| = \| \varphi\,(x_n - x) \| \leqslant (\max |\,\varphi(t)\,|)\,\| x_n - x \|,$$

следовательно, $\varphi x_n \to \varphi x$; аналогично, $\varphi y_n \to \varphi y$. По определению произведения для любого $\Delta \subset [a, b]$

$$z(\Delta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_\Delta [\varphi(t)\,x_n(t)]\,y_n(t)\,dt,$$

$$z_1(\Delta) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_\Delta x_n(t)\,[\varphi(t)\,y_n(t)]\,dt,$$

и так как правые части одинаковы, то $z = z_1$.

Легко видеть, что если $x(t)$ и $y(t)$ — функции класса K, то произведение xy, определенное по формуле (26), совпадает с обычным, т. е. приводит к функции $z(t) = x(t)\,y(t)$. Действительно, в этом случае можно при всех n взять $x_n = x$, $y_n = y$. Тогда по формуле (26) для $z = xy$ имеем

$$z(\Delta) = \frac{1}{\Delta} \int_\Delta x(t)\,y(t)\,dt.$$

Восстанавливая по функции промежутка $z(\Delta)$ с помощью формулы (16) функцию точки $z(t)$, получим $z(t) = x(t)\,y(t)$ во всяком случае во всех точках, где $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны.

7.9. Скалярное произведение в $\overline{L^2}$

Покажем, что в $\overline{L^2}$ можно определить скалярное произведение так, что $\overline{L^2}$ оказывается гильбертовым пространством. С этой целью для любых x, $y \in \overline{L^2}$ положим *скалярное произведение* (x, y) *равным интегралу от произведения этих функций* (определенного в 7.8) *по всему отрезку* $[a, b]$. Иными

*) Здесь следует учесть, что если $y_n \in C_{L^2}$ и $y_n \to y$, то $\lambda y_n \in C_{L^2}$ и $\lambda y_n \to \lambda y$.

словами, если $z = xy$, то

$$(x, y) = z([a, b])(b - a). \tag{27}$$

Если $x_n, y_n \in C_{L^2}$ и $x_n \to x$, $y_n \to y$, то по формуле (26)

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\, y_n(t)\, dt.$$

В частности,

$$(x, x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n^2(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \| x_n \|^2$$

и вследствие непрерывности нормы

$$(x, x) = \| x \|^2. \tag{28}$$

Проверим, что (x, y) удовлетворяет всем условиям, определяющим скалярное произведение [условия а) — г) из 6.1]. Коммутативность выражения (x, y), очевидно, вытекает из его определения. По формуле (28) $(x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in \overline{L^2}$ и отсюда же видно, что $(x, x) = 0$ только при $x = 0$, т. е. выполнено условие г).

Для проверки дистрибутивности выражения (x, y) положим при произвольных $x, y, z \in \overline{L^2}$

$$u_1 = xz, \quad u_2 = yz, \quad u = (x + y)z.$$

Тогда благодаря дистрибутивности умножения функций $u = u_1 + u_2$ и

$$(x + y, z) = u([a, b])(b - a) = u_1([a, b])(b - a) + u_2([a, b])(b - a) = (x, z) + (y, z).$$

Аналогично, если $u = xy$, а $v = (\lambda x)y$, то $v = \lambda u$ и потому

$$(\lambda x, y) = v([a, b])(b - a) = \lambda u([a, b])(b - a) = \lambda(x, y).$$

Итак, функционал (x, y), определяемый формулой (27),— скалярное произведение. Кроме того, для любого $x \in \overline{L^2}$ выполнено равенство (28). Таким образом, норма в $\overline{L^2}$ порождается скалярным произведением, а потому $\overline{L^2}$, будучи по теореме 7.6.1 полным,— *гильбертово пространство*.

Итак, мы построили еще одно функциональное сепарабельное гильбертово пространство. Оно бесконечно-мерно, поскольку оно содержит все непрерывные функции, заданные на отрезке $[a, b]$. Следовательно, оно алгебраически изоморфно и изометрично пространству L^2 функций, суммируемых с квадратом. Как же установить этот изоморфизм наиболее естественным образом?

Используя теорию интеграла Лебега, можно доказать, что каждая функция промежутка $x(\Delta)$ из $\overline{L^2}$ порождается по формуле (13) некоторой функцией точки $x(t)$ из L^2 и притом единственной с точностью до значений на множестве меры нуль. Обратно, каждая функция точки из L^2 порождает по формуле (13) функцию промежутка, входящую в $\overline{L^2}$. При этом алгебраическим операциям сложения функций точки и умножения функции на число соответствуют те же операции над порожденными этими функциями точки функциями промежутка. Кроме того, если взять две функции $x(t)$ и $y(t)$ из L^2 (им соответствуют функции промежутка $x(\Delta)$ и $y(\Delta)$) и положить $z(t) = x(t)\, y(t)$ (как известно, $z \in L$), то $z(t)$ по формуле (13) тоже будет порождать некоторую функцию промежутка $z(\Delta)$. Это и будет та функция

промежутка, которая была определена в предыдущем параграфе как произведение функций $x(\Delta)$ и $y(\Delta)$. Этим лишний раз подтверждается целесообразность определения произведения, введенного в 7.8.

Формула (27), определяющая скалярное произведение в $\overline{L^2}$, может быть теперь переписана так:

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt \tag{29}$$

(здесь $x, y \in \overline{L^2}$, а $x(t)$ и $y(t)$ — порождающие их функции точки). Отсюда, в частности, вытекает, что для любого $x \in \overline{L^2}$

$$\|x\|^2 = \int_a^b x^2(t)\, dt.$$

Таким образом, соответствие между элементами из L^2 и $\overline{L^2}$, устанавливаемое формулой (13), и есть алгебраический изоморфизм и оно изометрично. Согласно формуле (29), это соответствие сохраняет и скалярное произведение.

В тех приложениях, рассматриваемых в последующих главах, где встречается функциональное гильбертово пространство, мы будем пользоваться терминологией, связанной с пространством L^2. При желании читатель легко сможет сам перейти к пространству $\overline{L^2}$. При этом заметим, что в большинстве разбираемых в книге приложений решение задачи оказывается непрерывной функцией и потому для понимания постановки задачи достаточно пользоваться классическим интегралом Римана. Однако для обоснования возможности применения общих теорем функционального анализа встречающиеся интегралы в ряде случаев следует понимать как интегралы Лебега или как значения функций промежутка, лишь записанные с помощью интегралов от функций точки.

ГЛАВА VIII

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

8.1. Аддитивные операторы

При изучении операторов в нормированных пространствах возникает ряд новых важных понятий и вопросов, которые связаны с алгебраическими операциями и с нормой и которые по этой причине не могли быть рассмотрены в общих метрических пространствах. В настоящей главе будет изучен наиболее важный и весьма широкий класс операторов в нормированных пространствах — линейные операторы. Такие операторы мы уже рассматривали в первых двух главах в эвклидовых пространствах и некоторые их свойства, установленные в гл. I — II, будут теперь доказаны заново в более общем виде. Начнем с некоторых понятий, относящихся к операторам в любых линейных системах.

Пусть X и Y — вещественные линейные системы, U — оператор, который каждому элементу $x \in X$ сопоставляет элемент $y \in Y$.

Определения. 1) Оператор U называется *аддитивным*, если

$$U(x_1 + x_2) = Ux_1 + Ux_2 \tag{1}$$

для любых x_1, $x_2 \in X$.

2) Оператор U называется *однородным*, если

$$U(\alpha x) = \alpha (Ux) \tag{2}$$

для любого $x \in X$ и любого числа α.

Отметим некоторые простые следствия из аддитивности оператора. Именно, *если оператор U аддитивен, то*:

а) $U\theta = \theta$ *);

б) $U(-x) = -Ux$ *для любого* $x \in X$;

в) *равенство* (2) *выполнено для рациональных* α.

---

*) Здесь одно и то же обозначение θ употребляется для нулевых элементов обеих систем X и Y. Это не приведет нас к каким-нибудь ошибкам, так как из контекста всегда будет ясно, к какой системе относится тот или иной знак θ. Точнее было бы писать, например, так: $U\theta_X = \theta_Y$, но мы не хотим усложнять обозначений.

Доказательство. а) Для любого $x \in X$

$$Ux = U(x+\theta) = Ux + U\theta,$$

а тогда $U\theta = \theta$.

б) Так как $x - x = \theta$, то, с помощью а), имеем

$$Ux + U(-x) = U(x-x) = U\theta = \theta,$$

а тогда $U(-x) = -Ux$.

в) Если n — натуральное, то

$$U(nx) = U(\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n \text{ слагаемых}}) = n(Ux).$$

Если $\alpha = \frac{1}{n}$, где n — натуральное, то

$$Ux = U\left(n \cdot \frac{1}{n} x\right) = nU\left(\frac{1}{n} x\right),$$

а отсюда

$$U\left(\frac{1}{n} x\right) = \frac{1}{n}(Ux).$$

Если $\alpha = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные, то, по предыдущему,

$$U(\alpha x) = U\left(m \cdot \frac{1}{n} x\right) = mU\left(\frac{1}{n} x\right) = m \cdot \frac{1}{n} U(x) = \frac{m}{n}(Ux) = \alpha(Ux).$$

Наконец, если α — отрицательное рациональное число, т. е. $\alpha = -r$, где r имеет вид $\frac{m}{n}$ (m, n — натуральные), то по уже доказанному для положительных рациональных чисел с помощью б) получаем:

$$U(\alpha x) = U(-rx) = -U(rx) = -r(Ux) = \alpha(Ux).$$

Если же $\alpha = 0$, то равенство (2) очевидно благодаря а).

Можно показать, что даже в простейшем случае, когда X и Y — множества вещественных чисел (а оператор U в этом случае превращается в обычную функцию), из аддитивности U не вытекает его однородность в полном объеме, т. е. выполнение равенства (2) при любых α.

Следующее предложение совершенно очевидно, но мы его формулируем ввиду того, что в дальнейшем будем им постоянно пользоваться.

г) Если оператор U аддитивен и однороден, то для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ и чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$U\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (Ux_k). \tag{3}$$

Это свойство называют свойством *дистрибутивности* оператора.

8.2. Линейные операторы

Теперь будем считать X и Y — нормированными пространствами. Используя общее понятие непрерывности оператора в метрических пространствах, данное в 4.2, введем следующее определение:

Определение. Оператор $y = Ux$ называется *линейным*, если он аддитивен и непрерывен.

В отличие от операторов в общих метрических пространствах, для которых мы сначала определяли непрерывность «в точке», а потом уже, «во всем пространстве», из класса аддитивных операторов в нормированных пространствах выделяются непрерывные сразу во всем пространстве. Это объясняется следующей теоремой:

Теорема 8.2.1. *Если аддитивный оператор U непрерывен в какой-нибудь одной точке $x_0 \in X$, то он непрерывен и в любой точке пространства X, т. е. линеен.*

Доказательство. Пусть $x_n \in X$ и $x_n \to x$. Тогда получим $x_n - x + x_0 \to x_0$. Вследствие непрерывности оператора U в точке x_0,

$$Ux_n - Ux + Ux_0 = U(x_n - x + x_0) \to Ux_0,$$

а тогда $Ux_n - Ux \to \theta$, или $Ux_n \to Ux$.

Благодаря этой теореме при доказательстве линейности какого-нибудь аддитивного оператора достаточно проверить его непрерывность, например, в точке θ. А так как для аддитивного оператора $U\theta = \theta$, то непрерывность U в точке θ означает, что если $x_n \to \theta$, то и $Ux_n \to \theta$.

Теорема 8.2.2. *Всякий линейный оператор однороден.*

Доказательство. В предыдущем параграфе мы показали, что для всякого аддитивного оператора U равенство (2) выполнено при рациональных α. Если α — иррациональное, то, как известно, всегда можно подобрать рациональные числа r_n так, что $r_n \to \alpha$. Тогда для любого $x \in X$ будет $r_n x \to \alpha x$ [см. 5.2, пункт б)], следовательно, по непрерывности U и по доказанному для рациональных множителей равенству (2)

$$U(\alpha x) = \lim U(r_n x) = \lim r_n (Ux) = \alpha (Ux).$$

Таким образом, однородность оператора U доказана.

Теорема 8.2.3. *В конечно-мерном нормированном пространстве всякий аддитивный и однородный оператор линеен.*

Доказательство. Пусть пространство X конечномерно, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ — его базис, а оператор U аддитивен

и однороден. Тогда всякий $x \in X$ имеет вид $x = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k$, а

$$Ux = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k (Ux_k).$$

Если теперь

$$x^{(n)} \to x, \quad \text{а} \quad x^{(n)} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^{(n)} x_k,$$

то по теореме 5.3.1, $\alpha_k^{(n)} \to \alpha_k$ при $n \to \infty$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$, а потому

$$Ux^{(n)} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^{(n)} (Ux_k) \to \sum_{k=1}^{p} \alpha_k (Ux_k) = Ux.$$

Непрерывность оператора U доказана.

В частном случае, для эвклидова пространства R_n, эта теорема была доказана в 1.8. Этой же теоремой объясняется и то, что в определение линейного оператора в R_n мы не включили требования непрерывности.

Для линейных операторов соотношение дистрибутивности (3) можно распространить и на бесконечные ряды: если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ сходится, то, используя непрерывность и свойство «конечной» дистрибутивности линейного оператора U, имеем

$$U\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k\Big) = U\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\Big) = \lim_{n\to\infty} U\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (Ux_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (Ux_k).$$

Понятия аддитивности, однородности и линейности, естественно, применяются и к функционалам как к частному случаю операторов.

8.3. Ограниченность линейных операторов

Для аддитивных операторов в нормированных пространствах свойство непрерывности оказывается равносильным другому важному свойству — ограниченности, которое определяется следующим образом:

О п р е д е л е н и е. Оператор U, заданный в пространстве X, называется *ограниченным*, если существует такая постоянная C, что

$$\|Ux\| \leqslant C\|x\| \tag{4}$$

для всех $x \in X$.

Т е о р е м а 8.3.1. *Для того чтобы аддитивный оператор U был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть оператор U линеен, но предположим, что он не ограничен, т. е. не существует такой постоянной C, чтобы неравенство (4) было выполнено для всех $x \in X$. Следовательно, для любого натурального n существует элемент $x_n \in X$, для которого

$$\| Ux_n \| > n \| x_n \|. \tag{5}$$

Так как из этого неравенства следует, что $Ux_n \neq \theta$, то и $x_n \neq \theta$. Положим $x_n' = \frac{x_n}{n \| x_n \|}$. Тогда $\| x_n' \| = \frac{1}{n} \to 0$, т. е. $x_n' \to \theta$. С другой стороны, вследствие однородности линейного оператора

$$Ux_n' = \frac{1}{n \| x_n \|} Ux_n$$

и из (5) вытекает, что $\| Ux_n' \| > 1$, а потому Ux_n' не стремится к θ, что противоречит непрерывности оператора U. Тем самым доказано, что U ограничен.

б) Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть аддитивный оператор U ограничен, т. е. выполнено условие (4). Если $x_n \to \theta$, т. е. $\| x_n \| \to 0$, то из (4) сразу следует, что и $\| Ux_n \| \to 0$, т. е. $Ux_n \to \theta$. А раз оператор U непрерывен в точке θ, то по теореме 8.2.1 он линеен.

Из этой теоремы и теоремы 8.2.2 следует, что из аддитивности и ограниченности оператора вытекает его однородность.

Теперь покажем, что *для того чтобы аддитивный оператор U удовлетворял во всем пространстве X неравенству* (4), *необходимо и достаточно, чтобы неравенство* $\| Ux \| \leqslant C$ (с той же постоянной C) *было выполнено для всех x с нормой* $\| x \| \leqslant 1$. Множество таких x будем называть *единичным шаром* пространства X.

Действительно, из неравенства (4) сразу следует, что $\| Ux \| \leqslant C$ при $\| x \| \leqslant 1$. Обратно, пусть $\| Ux \| \leqslant C$ при $\| x \| \leqslant 1$. Для любого $x \in X$ можно подобрать рациональные числа $r_n > \| x \|$ так, что $r_n \to \| x \|$. Положим $x_n' = \frac{x}{r_n}$. Тогда $\| x_n' \| < 1$, а потому $\| Ux_n' \| \leqslant C$. Но из аддитивности оператора вытекает его «однородность» относительно рациональных множителей, следовательно,

$$\| Ux \| = \| U(r_n x_n') \| = r_n \| Ux_n' \| \leqslant C r_n.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, получим соотношение (4).

Вследствие доказанного можно для аддитивного оператора дать и другое определение ограниченности: *аддитивный оператор*

называется ограниченным, если ограничена совокупность его значений на единичном шаре S^* пространства X *). Из доказанного также следует, что точная верхняя граница множества норм $\|Ux\|$, соответствующих всевозможным $x \in S^*$, есть наименьшая постоянная C, при которой неравенство (4) выполняется для всех $x \in X$.

Определение. Для линейного оператора U наименьшая постоянная C, при которой неравенство (4) выполняется для всех $x \in X$, называется *нормой* оператора U и обозначается $\|U\|$.

Таким образом,

$$\|U\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ux\|, \tag{6}$$

а

$$\|Ux\| \leqslant \|U\| \|x\| \quad \text{при всех } x \in X.$$

Вследствие однородности линейного оператора верна и такая формула:

$$\|U\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ux\|,$$

т. е. *при определении нормы* $\|U\|$ *достаточно вычислить точную верхнюю границу множества норм значений* Ux *только на «поверхности» шара* S^*. Проверку этой формулы предоставляем читателю.

Примеры линейных операторов и функционалов мы уже встречали в первых двух главах. Приведем еще некоторые примеры. Интегральный оператор из рассмотренного в 4.5 линейного интегрального уравнения Фредгольма с непрерывным ядром

$$y = Ux, \quad \text{где} \quad y(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

— линейный оператор, преобразующий пространство C в самого себя. Действительно, его аддитивность очевидна **), а ограниченность вытекает из оценки:

$$\|y\| = \max |y(s)| \leqslant M |\lambda| \int_a^b |x(t)|\, dt \leqslant M |\lambda| (b-a) \|x\|,$$

где $M = \max_{a \leqslant s,\, t \leqslant b} |K(s, t)|$. При этом $\|U\| \leqslant M |\lambda| (b-a)$. Впрочем, эта оценка нормы оператора U дана с большим запасом.

*) Ср. со сказанным в 2.6 об ограниченности линейного функционала в l^2.

**) Однако оператор, рассмотренный в 4.5 и включавший в себя свободный член уравнения, не аддитивен.

Легко получить, например, такую более точную оценку:

$$\| U \| \leqslant |\lambda| \max_s \int_a^b |K(s, t)|\, dt\ ^*).$$

Пусть $\boldsymbol{H}$ — гильбертово пространство, $\boldsymbol{L}$ — его подпространство. Для каждого $x \in \boldsymbol{H}$ полагаем $y = Pr_L x$. Тем самым мы определяем на $\boldsymbol{H}$ оператор со значениями в том же пространстве $\boldsymbol{H}$ (обозначим его через P), который называется *проектором*. Проверим его линейность.

Пусть $x_1, x_2 \in H$, $y_1 = Px_1$, $y_2 = Px_2$, $z_1 = x_1 - y_1$; $z_2 = x_2 - y_2$. Тогда $z_1, z_2 \perp \boldsymbol{L}$. Сумму $x_1 + x_2$ можно представить в виде $x_1 + x_2 = (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$, причем $y_1 + y_2 \in \boldsymbol{L}$, а $z_1 + z_2 \perp \boldsymbol{L}$. Следовательно, $y_1 + y_2 = Pr_L (x_1 + x_2)$, т. е. $P(x_1 + x_2) = Px_1 + Px_2$. Оператор P аддитивен.

Для любого $x \in \boldsymbol{H}$ имеем $x = Px + z$ и по теореме Пифагора $\| x\|^2 = \|Px\|^2 + \|z\|^2$, откуда $\| Px \| \leqslant \| x \|$. Следовательно, оператор P — линейный и $\| P \| \leqslant 1$. С другой стороны, $Px = x$ для $x \in \boldsymbol{L}$. Значит, если только подпространство $\boldsymbol{L}$ не нулевое, т. е. содержит элементы, отличные от θ, то существуют такие $x \neq \theta$, для которых $\| Px \| = \| x \|$. Таким образом, 1 — наименьшая постоянная в условии ограниченности оператора P, т. е. $\| P \| = 1$ **).

В качестве одного из применений теоремы 8.3.1 рассмотрим вопрос об эквивалентности норм.

О п р е д е л е н и е. Пусть в одной и той же линейной системе $\boldsymbol{E}$ определены две нормы $\| x \|_1$ и $\| x \|_2$, каждая из которых превращает $\boldsymbol{E}$ в нормированное пространство. Эти нормы называются *эквивалентными*, если сходимости по обеим нормам совпадают, т. е. из соотношения $x_n \to x$ в смысле сходимости по первой норме вытекает то же соотношение и по второй норме, и обратно.

Обозначим через $\boldsymbol{X}_1$ и $\boldsymbol{X}_2$ те нормированные пространства, которые получаются из $\boldsymbol{E}$ за счет введения первой и второй норм соответственно. По составу элементов $\boldsymbol{X}_1$ и $\boldsymbol{X}_2$ совпадают.

Т е о р е м а 8.3.2. *Для того чтобы нормы* $\| x \|_1$ *и* $\| x \|_2$, *заданные в линейной системе* $\boldsymbol{E}$, *были эквивалентными, необходимо*

*) Можно доказать, что на самом деле в этом соотношении имеет место точное равенство.

**) В теории операторов в гильбертовом пространстве обычно употребляется несколько иная терминология. Линейным называется всякий аддитивный оператор. Линейные в нашем смысле операторы называются ограниченными линейными, а кроме того, рассматриваются и неограниченные линейные операторы, т. е. аддитивные и однородные, но не непрерывные. Однако в дальнейшем мы и в гильбертовом пространстве будем придерживаться определений, введенных в этой главе.

и достаточно, чтобы существовали такие постоянные $M, m > 0$, *что*

$$m \| x \|_1 \leqslant \| x \|_2 \leqslant M \| x \|_1 \tag{7}$$

для всех $x \in E$.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть заданные нормы эквивалентны. Обозначим через A тождественный оператор, отображающий X_1 на $X_2 : x = Ax$. Ясно, что этот оператор аддитивен, а из определения эквивалентности норм следует, что если $x_n \to x$ в смысле сходимости по первой норме, то $Ax_n \to Ax$ по второй норме *). Таким образом, оператор A линеен, а тогда, по предыдущей теореме, он ограничен. Следовательно, существует такая постоянная $M > 0$, что $\| Ax \|_2 \leqslant M \| x \|_1$ для всех $x \in E$ **), а это и есть правая часть неравенства (7).

Аналогично, рассматривая тождественное отображение пространства X_2 на X_1, мы получим неравенство $\| x \|_1 \leqslant C \| x_2 \|$ $(C > 0)$, и, полагая $m = \frac{1}{C}$, мы придем к левой части неравенства (7).

б) Достаточность. Пусть выполнено условие (7). Если $x_n \to x$ по первой норме, т. е. $\| x_n - x \|_1 \to 0$, то

$$\| x_n - x \|_2 \leqslant M \| x_n - x \|_1 \to 0,$$

и потому $x_n \to x$ и по второй норме. Аналогично выводится обратное утверждение и, таким образом, сходимости по обеим нормам совпадают, т. е. нормы эквивалентны.

Пусть теперь нормы $\| x \|_1$ и $\| x \|_2$ в E таковы, что из соотношения $x_n \to x$ в смысле сходимости по первой норме вытекает то же соотношение и по второй норме, но обратное не предполагается. Этот факт, как видно из доказательства предыдущей теоремы, равносилен существованию такой постоянной M, для которой при всех $x \in E$ выполнена правая часть неравенства (7):

$$\| x \|_2 \leqslant M \| x \|_1. \tag{8}$$

При выполнении условия (8) будем говорить, что *вторая норма мажорируется первой*. Таким образом, *эквивалентность двух норм означает, что каждая из них мажорирует другую*.

Предлагаем читателю проверить, что норма в пространстве C_1 мажорируется нормой в пространстве C.

---

*) Ax_n и Ax это — те же элементы, что и сами x_n и x (соответственно), но рассмотренные как элементы пространства X_2.

**) Постоянную в условии ограниченности (4) всегда можно считать большей нуля.

Интересно отметить, что *если пространства* X_1 *и* X_2 (полученные, как указано выше, из системы E) *полны и одна из норм* $\|x\|_1$ *и* $\|x\|_2$ *мажорирует другую, то эти нормы эквивалентны* *).

8.4. Распространение линейных операторов

Введем понятие о распространении операторов. Пусть X — нормированное пространство, а E — некоторое его подпространство или даже просто линейное подмножество. Тогда E — тоже нормированное пространство. Пусть на E задан линейный оператор U со значениями в нормированном пространстве Y. Если существует линейный оператор V со значениями в том же Y, определенный на всем X и такой, что $Vx = Ux$ для всех $x \in E$, то оператор V называется *распространением* оператора U с пространства E на пространство X.

Так как $\|U\|$ — наименьшее значение постоянной C, при котором неравенство (4) выполнено для всех $x \in E$, то ясно, что при расширении области задания оператора норма не может уменьшиться и $\|V\|$, как наименьшая постоянная C, при которой неравенство (4) будет выполнено на всем X, должна удовлетворить условию $\|V\|_X \geqslant \|U\|_E$ **). Если же $\|V\|_X = \|U\|_E$, то говорят, что распространение осуществлено с сохранением нормы.

Сначала рассмотрим один случай, когда распространение с сохранением нормы всегда осуществимо.

Теорема 8.4.1. *Пусть* X *— нормированное пространство,* E *— всюду плотное в* X *линейное подмножество,* $y = Ux$ *— линейный оператор, заданный на* E*, со значениями в банаховом пространстве* Y***). *Тогда оператор* U *допускает единственное распространение на всё* X *и притом с сохранением нормы.*

Доказательство. Каждый $x \in X$ представим в виде $x = \lim x_n$, где $x_n \in E$. Так как последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, то $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Из ограниченности оператора U вытекает, что

$$\|Ux_n - Ux_m\| = \|U(x_n - x_m)\| \leqslant \|U\| \, \|x_n - x_m\|,$$

а потому последовательность $\{Ux_n\}$ тоже фундаментальна. Вследствие полноты пространства Y существует $y = \lim Ux_n$. Покажем,

*) См., например, Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, стр. 426.

**) Индексы при нормах поставлены, чтобы подчеркнуть, что оператор U задан только на E, а оператор V — на всем X.

***) Напоминаем, что банаховыми называются полные нормированные пространства (5.2).

что этот элемент y не зависит от выбора последовательности элементов $x_n \in \boldsymbol{E}$, стремящейся к x. Действительно, если дана еще последовательность $x'_n \to x$, $x'_n \in \boldsymbol{E}$, то $x'_n - x_n \to 0$, а тогда и $Ux'_n - Ux_n = U(x'_n - x_n) \to 0$ по непрерывности оператора U; следовательно, $\lim Ux'_n = \lim Ux_n$.

Теперь мы определим оператор V на всем пространстве $\boldsymbol{X}$, полагая для любого $x \in \boldsymbol{X}$

$$Vx = \lim Ux_n, \tag{9}$$

где $x_n \in \boldsymbol{E}$ и $x_n \to x$. Покажем, что это и есть требуемое распространение оператора U.

Так как для $x \in \boldsymbol{E}$ можно положить все $x_n = x$, то по формуле (9) $Vx = Ux$. Аддитивность оператора V проверяется так. Если $x, z \in \boldsymbol{X}$, $x_n \to x$, $z_n \to z$, где $x_n, z_n \in \boldsymbol{E}$, то $x_n + z_n \to x + z$ и

$$V(x+z) = \lim U(x_n + z_n) = \lim (Ux_n + Uz_n) =$$
$$= \lim Ux_n + \lim Uz_n = Vx + Vz.$$

Наконец проверим, что оператор V — линейный и что $\|V\| = \|U\|$. Пусть $x \in \boldsymbol{X}$, $x_n \in \boldsymbol{E}$ и $x_n \to x$. Переходя к пределу в неравенстве $\|Ux_n\| \leqslant \|U\| \|x_n\|$ и учитывая непрерывность нормы, получим

$$\|Vx\| \leqslant \|U\| \|x\|.$$

Таким образом, аддитивный оператор V ограничен, а следовательно, линеен, а так как $\|V\|$ — наименьшая постоянная в условии ограниченности оператора V, то $\|V\| \leqslant \|U\|$. Но неравенство в этом соотношении невозможно; тем самым доказано равенство норм.

Единственность распространения почти очевидна. Пусть W — какой-нибудь линейный оператор, представляющий распространение оператора U на всё $\boldsymbol{X}$. Если $x \in \boldsymbol{X}$, $x_n \in \boldsymbol{E}$ и $x_n \to x$, то, по непрерывности W,

$$Wx = \lim Wx_n = \lim Ux_n = Vx,$$

т. е. оператор W совпадает с V.

Замечание. Тем же рассуждением, которым доказана в предыдущей теореме единственность распространения, устанавливается следующее предложение. *Пусть в нормированном пространстве $\boldsymbol{X}$ заданы два линейных оператора U и W со значениями в одном и том же нормированном* (не обязательно банаховом) *пространстве $\boldsymbol{Y}$. Если $Vx = Wx$ для любого x из некоторого множества $\boldsymbol{E}$, всюду плотного в $\boldsymbol{X}$, то $Vx = Wx$ при всех $x \in \boldsymbol{X}$* *).

*) В этом предложении $\boldsymbol{E}$ может не быть линейным множеством.

В гильбертовом пространстве распространение линейного оператора (с сохранением нормы) возможно с любого линейного подмножества.

Теорема 8.4.2. *Пусть* H *— гильбертово пространство,* E *— его линейное подмножество,* $y = Ux$ *— линейный оператор, заданный на* E*, со значениями в банаховом пространстве* Y*. Тогда оператор* U *допускает распространение на всё* H *с сохранением нормы.*

Доказательство. Обозначим через L замыкание множества E; L — подпространство пространства H. Так как E плотно в L, то распространение оператора U на L с сохранением нормы возможно по предыдущей теореме. Поэтому, не уменьшая общности, можно с самого начала считать, что E — подпространство.

Обозначим через P оператор проектирования пространства H на подпространство L и положим для любого $x \in H$

$$Vx = U(Px).$$

Тогда аддитивность оператора V вытекает из аддитивности U и P, а

$$\|Vx\| \leqslant \|U\| \|Px\| \leqslant \|U\| \|P\| \|x\| = \|U\| \|x\|$$

(так как $\|P\| = 1$, см. 8.3). Отсюда, как и в доказательстве предыдущей теоремы, следует, что оператор V линеен, а $\|V\| = \|U\|$.

Благодаря тому, что в формулировке теоремы множество E не предполагается всюду плотным в H, распространение оператора U в этой теореме может быть осуществимо не единственным способом.

В следующей главе мы увидим, что для линейных функционалов теорема 8.4.2 справедлива в любом нормированном пространстве.

8.5. Последовательности линейных операторов

Для многих приложений весьма важную роль играет изучение последовательностей линейных операторов, к которому мы сейчас и переходим. Пространства X и Y считаем нормированными.

Определение. Пусть в пространстве X заданы операторы U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ и U, отображающие X в одно и то же пространство Y. Последовательность $\{U_n\}$ называется *точечно сходящейся* к оператору U, если

$$Ux = \lim U_n x$$

для любого $x \in X$.

Лемма 8.5.1. *Если последовательность линейных операторов* $\{U_n\}$ *точечно сходится к некоторому оператору* U *и нормы* $\|U_n\|$ *в совокупности ограничены, то предельный оператор* U *тоже линейный.*

Доказательство. Аддитивность U вытекает из следующих соотношений, верных для любых x, $z \in X$:

$$U(x+z) = \lim U_n(x+z) = \lim (U_n x + U_n z) =$$
$$= \lim U_n x + \lim U_n z = Ux + Uz.$$

Далее, по условию, $\|U_n\| \leqslant C$ при всех n, где C — некоторая постоянная. Переходя к пределу в неравенстве $\|U_n x\| \leqslant C\|x\|$, получим $\|Ux\| \leqslant C\|x\|$ для любого $x \in X$. Следовательно, оператор U линейный.

В полных пространствах ограниченность норм операторов вытекает из точечной сходимости, и доказанный результат значительно усиливается. Предварительно введем следующее:

Определение. Последовательность $\{U_n\}$ операторов, отображающих пространство X в одно и то же пространство Y, называется *точечно ограниченной*, если в каждой точке $x \in X$ последовательность значений $\{U_n x\}$ ограничена.

Теорема 8.5.1. (С. Банах — Г. Штейнгауз). *Если пространство* X *полно, а последовательность линейных операторов* U_n, *отображающих* X *в* Y, *точечно ограничена, то нормы* $\|U_n\|$ *ограничены в совокупности. Если*, в частности, *последовательность линейных операторов* U_n *точечно сходится к оператору* U **), то оператор* U *линейный.*

Доказательство. Достаточно доказать, что из точечной ограниченности последовательности $\{U_n\}$ вытекает ограниченность норм $\|U_n\|$. Остальное будет следовать из леммы. Допустим, что $\|U_n\|$ не ограничены в совокупности, и покажем прежде всего, что тогда, каков бы ни был замкнутый шар $S^* \subset X$, множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n(S^*)$ (сумма образов шара S^*) не ограничено. Действительно, если бы для некоторого шара $S^* = S^*(x_0, r)$ это множество было бы ограничено, то имело бы место неравенство

$$\|U_n x\| \leqslant C \text{ при всех } x \in S^* \text{ и } n = 1, 2, \ldots,$$

где C — некоторая постоянная. Для любого x с нормой $\|x\| \leqslant 1$ положим $x' = x_0 + rx$. Так как $\|x' - x_0\| = r\|x\| \leqslant r$, то $x' \in S^*$, а тогда из равенства

$$U_n x = U_n\left(\frac{x' - x_0}{r}\right) = \frac{1}{r}(U_n x' - U_n x_0)$$

вытекает, что для любого x с нормой $\|x\| \leqslant 1$

$$\|U_n x\| \leqslant \frac{1}{r}(\|U_n x'\| + \|U_n x_0\|) \leqslant \frac{2C}{r};$$

*) Ясно, что из точечной сходимости последовательности операторов вытекает ее точечная ограниченность.

это же означает, что $\| U_n \| \leqslant \frac{2C}{r}$ (см. 8.3) вопреки предположению о неограниченности норм $\| U_n \|$.

Возьмем произвольный замкнутый шар $S_0^* \subset X$ радиуса r. Вследствие неограниченности множества образов элементов этого шара найдутся номер n_1 и элемент $x_1 \in S_0^*$, для которых $\| U_{n_1} x_1 \| > 1$. Не уменьшая общности, можно считать x_1 внутренней точкой шара S_0^*, так как всегда можно сначала взять шар с радиусом меньшим, чем радиус шара S_0^*, а затем искать требуемую точку x_1 в уменьшенном шаре *). Вследствие непрерывности оператора U_{n_1} существует замкнутый шар $S_1^* = S^*(x_1, r_1)$, во всех точках которого $\| U_{n_1} x \| \geqslant 1$ **). При этом, уменьшая r_1 в случае необходимости, мы можем считать, что уже $r_1 \leqslant \frac{r}{2}$. Кроме того, так как x_1 — внутренняя точка шара S_0^*, то можно считать, что r_1 взято настолько малым, что $S_1^* \subset S_0^*$.

Последовательность норм $\| U_n \|$, где $n > n_1$, тоже не ограничена, а потому не ограничено множество $\bigcup_{n=n_1+1}^{\infty} U_n (S_1^*)$. Следовательно, аналогично предыдущему найдутся номер $n_2 > n_1$ и внутренняя точка x_2 шара S_1^*, для которых $\| U_{n_2} x_2 \| > 2$. После этого можно найти замкнутый шар $S_2^* \subset S_1^*$, во всех точках которого $\| U_{n_2} x \| \geqslant 2$, а радиус которого $r_2 \leqslant \frac{r_1}{2} \leqslant \frac{r}{2^2}$.

Продолжая этот процесс до бесконечности, мы получим последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров S_m^* с радиусами r_m, причем $r_m \to 0$, и последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots < n_m < \ldots$ таких, что $\| U_{n_m} x \| \geqslant m$ для всех $x \in S_m^*$. Так как X полно, то, по теореме 3.5.3, существует общая точка x^* всех шаров S_m^*. В этой точке мы имеем $\| U_{n_m} x^* \| \geqslant m$ при любом m, т. е. последовательность $\{U_n x^*\}$ оказывается неограниченной, что противоречит точечной ограниченности последовательности операторов U_n.

Полученное противоречие и доказывает теорему.

В следующей теореме существенна полнота пространства Y.

Теорема 8.5.2. *Если U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — линейные операторы, отображающие пространство X в полное пространство Y, причем:*

---

*) Заметим, что если $r' < r$, то замкнутый шар $S^*(x_0, r')$ содержится в открытом шаре $S(x_0, r)$, а все точки открытого шара суть внутренние точки последнего и потому они будут также внутренними точками замкнутого шара $S^*(x_0, r)$.

**) Это получается сразу из второго определения непрерывности оператора, приведенного в 4.2. Однако для линейного оператора это заключение можно установить так. Положим $\alpha = \| U_{n_1} x_1 \| - 1$ и $r_1 = \frac{\alpha}{\| U_{n_1} \|}$. Тогда, если $\| x - x_1 \| \leqslant r_1$, то с помощью неравенства (2) из 5.2 получаем

$$\| U_{n_1} x \| = \| U_{n_1} x_1 + U_{n_1} (x - x_1) \| \geqslant \| U_{n_1} x_1 \| - \| U_{n_1} (x - x_1) \| \geqslant \| U_{n_1} x_1 \| - \| U_{n_1} \| r_1 = \| U_{n_1} x_1 \| - \alpha = 1.$$

1) *для всех x из некоторого множества A, всюду плотного в X, существует* $\lim U_n x$;

2) $\|U_n\| \leqslant C$ *при всех* n, *где* $C > 0$ — *постоянная, то* $\lim U_n x$ *существует для всех* $x \in X$, *т. е. последовательность* $\{U_n\}$ *точечно сходится к некоторому оператору.*

При этом *предельный оператор линеен* по лемме 8.5.1.

Доказательство. Возьмем $x \in X$ и зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как множество A всюду плотно в X, то найдется такой $x' \in A$, что $\|x' - x\| < \frac{\varepsilon}{3C}$. По условию $\lim U_n x'$ существует; следовательно, последовательность $\{U_n x'\}$ фундаментальная, а потому существует такое N, что при $n, m \geqslant N$

$$\|U_n x' - U_m x'\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь легко находим, что при $n, m \geqslant N$

$$\begin{aligned}\|U_n x - U_m x\| = \\ = \|U_n(x - x') + U_n x' - U_m x' + U_m(x' - x)\| \leqslant \\ \leqslant \|U_n(x - x')\| + \|U_n x' - U_m x'\| + \|U_m(x' - x)\| \leqslant \\ \leqslant \|U_n\| \|x - x'\| + \|U_n x' - U_m x'\| + \|U_m\| \|x' - x\| < \\ < C\frac{\varepsilon}{3C} + \frac{\varepsilon}{3} + C\frac{\varepsilon}{3C} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{U_n x\}$ тоже фундаментальная, а тогда вследствие полноты Y существует $\lim U_n x$. Предельный оператор U и определяется равенством

$$Ux = \lim U_n x.$$

8.6. Пространство линейных операторов

Пусть X и Y — нормированные пространства. Обозначим через $\mathfrak{L}$ множество всех линейных операторов, отображающих X в Y. Два оператора U и V (из $\mathfrak{L}$) считаем равными и пишем $U = V$, если они совпадают на всем X, т. е. $Ux = Vx$ для всех $x \in X$. В этом же смысле мы будем понимать равенство между операторами и в дальнейшем, когда будут встречаться и не линейные операторы.

Определим в $\mathfrak{L}$ алгебраические операции, чтобы превратить $\mathfrak{L}$ в линейную систему. Именно, для любых $U, V \in \mathfrak{L}$ назовем суммой этих операторов и обозначим через $U + V$ оператор W, определяемый формулой

$$Wx = Ux + Vx.$$

Аналогично произведением αU для любого оператора $U \in \mathcal{L}$ и вещественного числа α называем оператор W, определяемый формулой

$$Wx = \alpha (Ux).$$

Легко видеть, что операторы $U + V$ и αU оказываются линейными. Так, если $W = U + V$, то аддитивность и ограниченность W вытекает из следующих соотношений:

$$W(x_1 + x_2) = U(x_1 + x_2) + V(x_1 + x_2) =$$
$$= Ux_1 + Ux_2 + Vx_1 + Vx_2 = Wx_1 + Wx_2;$$
$$\| Wx \| = \| Ux + Vx \| \leqslant \| Ux \| + \| Vx \| \leqslant$$
$$\leqslant \| U \| \| x \| + \| V \| \| x \| = (\| U \| + \| V \|) \| x \|; \quad (10)$$

если же $W = \alpha U$, то аналогично

$$W(x_1 + x_2) = \alpha U (x_1 + x_2) = \alpha (Ux_1) + \alpha (Ux_2) = Wx_1 + Wx_2;$$
$$\| Wx \| = |\alpha| \| Ux \| \leqslant (|\alpha| \| U \|) \| x \|. \quad (11)$$

Совершенно элементарно проверяется, что при введенных определениях суммы и произведения множество $\mathcal{L}$ оказывается линейной системой. Предоставляем эту проверку читателю. Заметим лишь, что нулевым элементом Θ в $\mathcal{L}$ будет «нулевой» оператор, определяемый формулой $\Theta x = 0$ при всех $x \in X$.

Для каждого оператора U, входящего в линейную систему $\mathcal{L}$, в 8.3 уже определена норма $\| U \|$. Проверим, что она удовлетворяет трем аксиомам нормы из 5.2.

Действительно, если $U = \Theta$, то $\| U \| = 0$; обратно, если $\| U \| = 0$, то и $\| Ux \| = 0$ при всех $x \in X$, т. е. $U = \Theta$. Аксиома II при $\alpha = 0$ очевидна. Если же $\alpha \neq 0$, то, с одной стороны, из неравенства (11) вытекает, что $\| \alpha U \| \leqslant |\alpha| \| U \|$; с другой стороны, заменяя в этом последнем неравенстве U на αU, а α на $\frac{1}{\alpha}$, имеем $\| U \| \leqslant \frac{1}{|\alpha|} \| \alpha U \|$, или $\| \alpha U \| \geqslant |\alpha| \| U \|$. Сопоставляя оба неравенства, получим $\| \alpha U \| = |\alpha| \| U \|$. Наконец, неравенство треугольника $\| U + V \| \leqslant \| U \| + \| V \|$ вытекает из неравенства (10). Таким образом, $\mathcal{L}$ — нормированное пространство.

Как во всяком нормированном пространстве, в $\mathcal{L}$ имеет смысл сходимость по норме, т. е. мы будем писать, как обычно, $U_n \to U$, если $\| U_n - U \| \to 0$. В отличие от рассматривавшейся в предыдущем параграфе точечной сходимости последовательности операторов, сходимость по норме называют также *равномерной*. Подчеркиваем, что обозначение $U_n \to U$ мы используем только для сходимости по норме.

Ясно, что *сходимость по норме влечет точечную.* Действительно, если $U_n \to U$, то при любом $x \in X$

$$\| U_n x - Ux \| = \| (U_n - U) x \| \leqslant \| U_n - U \| \| x \| \to 0,$$

и потому $U_n x \to Ux$. Обратное заключение неверно даже для функционалов. Пример, подтверждающий это замечание, мы приведем ниже, в 9.9.

Сходимость по норме $U_n \to U$ влечет также и равномерную сходимость последовательности $\{U_n x\}$ к Ux на произвольном ограниченном множестве $E \subset X$. Этим и объясняется название «равномерная» для сходимости по норме. Действительно, если $\| x \| \leqslant C$ для всех $x \in E$, а $\| U_n - U \| < \frac{\varepsilon}{C}$ при $n \geqslant N$, то из приведенных выше оценок сразу следует, что $\| U_n x - Ux \| < \varepsilon$ при всех $x \in E$ (и $n \geqslant N$). Предлагаем читателю доказать обратный результат: *если операторы U_n — линейные и последовательность $\{U_n x\}$ равномерно сходится хотя бы на единичном шаре, то точечная сходимость к некоторому оператору $U_n x \to Ux$ имеет место на всем X, предельный оператор U линеен и $U_n \to U$ по норме.*

Следующая теорема дает условие, при котором пространство $\mathfrak{L}$ оказывается банаховым.

Теорема 8.6.1. *Если пространство Y полно, то и пространство $\mathfrak{L}$ полно.*

Доказательство. Возьмем фундаментальную последовательность операторов $U_n \in \mathfrak{L}$. Так как при любом $x \in X$

$$\| U_n x - U_m x \| = \| (U_n - U_m) x \| \leqslant \| U_n - U_m \| \| x \|,$$

а $\| U_n - U_m \| \to 0$ при $n, m \to \infty$, то и последовательность $\{U_n x\}$ фундаментальная. Вследствие полноты пространства Y существует $\lim U_n x$. Кроме того, так как последовательность $\{U_n\}$ фундаментальна, а всякая фундаментальная последовательность ограничена, то и последовательность норм $\| U_n \|$ ограничена, а тогда, по лемме 8.5.1, оператор U, определяемый формулой

$$Ux = \lim U_n x,$$

отображающий X в Y, тоже линейный, т. е. $U \in \mathfrak{L}$.

Покажем, что $U_n \to U$ по норме. По произвольно заданному $\varepsilon > 0$ можно подобрать N так, что $\| U_n - U_m \| < \varepsilon$ при $n, m \geqslant N$. Это неравенство означает, что

$$\| U_n x - U_m x \| \leqslant \varepsilon \| x \| \text{ при всех } x \in X.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\| U_n x - Ux \| \leqslant \varepsilon \| x \|,$$

откуда следует, что $\| U_n - U \| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Тем самым доказано, что $U_n \to U$, а вместе с этим доказана и полнота $\mathfrak{L}$.

Введем и операцию *умножения* (или *суперпозиции*) операторов, которую мы уже рассматривали в эвклидовых пространствах. Если U — оператор, отображающий пространство $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$, а V — оператор, отображающий $\boldsymbol{Y}$ в пространство $\boldsymbol{Z}$, то через VU обозначается оператор, отображающий $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Z}$, определяемый формулой

$$z = V(Ux).$$

Ясно, что если операторы U и V аддитивны, то и VU аддитивен. Если же U и V линейны *), то и оператор VU линейный и при этом

$$\| VU \| \leqslant \| V \| \| U \|. \tag{12}$$

Действительно, для любого $x \in \boldsymbol{X}$

$$\| (VU)x \| = \| V(Ux) \| \leqslant \| V \| \| Ux \| \leqslant \| V \| \| U \| \| x \|.$$

Ясно, что операция умножения обладает свойствами ассоциативности и дистрибутивности:

$$W(VU) = (WV)U;$$
$$V(U_1 + U_2) = VU_1 + VU_2;$$
$$(V_1 + V_2)U = V_1U + V_2U.$$

Если пространства $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ совпадают, то операция умножения двух операторов из $\mathfrak{L}$ приводит снова к оператору из $\mathfrak{L}$. При этом, как мы уже видели в гл. I, операция умножения не коммутативна, т. е. может иметь место неравенство $VU \neq UV$. Оператор VU, получаемый в результате умножения, называют *произведением* операторов V и U. Если операторы U и V равны между собой, то их произведение UU обозначают U^2. Аналогично определяют и более высокие «*степени*» оператора: $U^n = UU^{n-1} = \underbrace{UU \ldots U}_{n \text{ раз}}$. При этом из формулы (12) следует, что

$$\| U^n \| \leqslant \| U \|^n. \tag{13}$$

8.7. Обратные операторы

Понятие обратного оператора связано с решением уравнений вида $Ux = y$, где U — оператор, отображающий одно пространство в другое. Если решение оказывается единственным, то,

*) Пространства $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ предполагаются, конечно, нормированными.

сопоставляя каждому y, для которого уравнение разрешимо, соответствующее ему решение x, мы определим некоторый оператор $x = Vy$, являющийся обратным по отношению к оператору U. Дадим точное определение.

Определение. Пусть $y = Ux$ — оператор, заданный в пространстве $\boldsymbol{X}$, со значениями в пространстве $\boldsymbol{Y}$, и пусть $\boldsymbol{Y}_1 = U(\boldsymbol{X})$ — совокупность его значений. Если каждому $y \in \boldsymbol{Y}_1$ соответствует только один $x \in \boldsymbol{X}$, для которого $Ux = y$ *), то этим соответствием определяется оператор, заданный на множестве $\boldsymbol{Y}_1$ с областью значений $\boldsymbol{X}$. Этот оператор называется *обратным* для оператора U и обозначается U^{-1}.

Таким образом, для любого $x \in \boldsymbol{X}$

$$U^{-1}(Ux) = x.$$

Если через I обозначить тождественный оператор в пространстве $\boldsymbol{X}$, т. е. $Ix = x$ для всех $x \in \boldsymbol{X}$, то предыдущее соотношение можно записать с помощью операции суперпозиции в виде $U^{-1}U = I$. Однако оператор U^{-1} задан только на $\boldsymbol{Y}_1$; поэтому если V — оператор, заданный на всем $\boldsymbol{Y}$ и отображающий $\boldsymbol{Y}$ в $\boldsymbol{X}$, и при этом $VU = I$, то отсюда не следует, что непременно V совпадает с U^{-1}. Именно, если $\boldsymbol{Y}_1 \neq \boldsymbol{Y}$ то область определения оператора V шире, чем область определения U^{-1}.

Теорема 8.7.1. *Если область значений $\boldsymbol{Y}_1$ оператора U совпадает со всем пространством $\boldsymbol{Y}$, а оператор V отображает $\boldsymbol{Y}$ в $\boldsymbol{X}$ и при этом $VU = I$, то $V = U^{-1}$.*

Доказательство. Так как $\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{Y}$, то уравнение $Ux = y$ имеет решение при всяком $y \in \boldsymbol{Y}$. Это решение легко выразить через y, а именно:

$$x = Ix = (VU)x = V(Ux) = Vy.$$

Отсюда и вытекает, что вследствие однозначности оператора V решение единственно и что $U^{-1} = V$.

Изложенное до сих пор в этом параграфе имеет смысл в произвольных метрических пространствах (и даже в множествах без метрики). Теперь же будем считать $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ нормированными пространствами и установим сначала несколько простых предложений **).

а) *Если оператор U аддитивен и однороден, то $\boldsymbol{Y}_1 = U(\boldsymbol{X})$ — линейное множество.*

Действительно, если $y_1, y_2 \in \boldsymbol{Y}_1$, то $y_1 = Ux_1$, $y_2 = Ux_2$, где $x_1, x_2 \in \boldsymbol{X}$. Но тогда и $y_1 + y_2 = U(x_1 + x_2)$ тоже входит в $\boldsymbol{Y}_1$.

*) В этом случае говорят, что оператор U устанавливает взаимно-однозначное отображение пространства $\boldsymbol{X}$ на множество $\boldsymbol{Y}_1$.

**) Предложения а) — г), в которых не используется понятие непрерывности, верны, очевидно, и в любых линейных системах.

Так же, если $y \in \boldsymbol{Y}_1$, т. е. $y = Ux$ для некоторого $x \in \boldsymbol{X}$, то и $\alpha y = U(\alpha x) \in \boldsymbol{Y}_1$.

б) *Если оператор U аддитивен и однороден и существует обратный оператор U^{-1}, то он тоже аддитивен и однороден.*

Действительно, пусть $y_1, y_2 \in \boldsymbol{Y}_1$, $x_1 = U^{-1}y_1$, $x_2 = U^{-1}y_2$. Тогда $Ux_1 = y_1$, $Ux_2 = y_2$ и $U(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$. Но последнее и означает, что $x_1 + x_2 = U^{-1}(y_1 + y_2)$, т. е. оператор U^{-1} аддитивен. Аналогично доказывается, что если $y \in \boldsymbol{Y}_1$ и $x = U^{-1}y$, то $\alpha x = U^{-1}(\alpha y)$ при любом α.

в) *Для того чтобы аддитивный оператор U имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы $Ux = \theta$ только при $x = \theta$.*

Действительно, если $Ux = \theta$ только при $x = \theta$, то имеем $U(x_1 - x_2) \neq \theta$ при $x_1 \neq x_2$, а тогда $Ux_1 \neq Ux_2$. Следовательно, уравнение $Ux = y$ имеет единственное решение при каждом $y \in \boldsymbol{Y}_1$. Обратно, если U^{-1} существует, то уравнение $Ux = \theta$ должно иметь только одно решение, которым и будет $x = \theta$.

г) *Если пространство $\boldsymbol{X}$ содержит элементы, отличные от θ, а оператор U* (не обязательно — аддитивный) *имеет обратный, то U^{-1} не может совпасть с нулевым оператором Θ.*

Действительно, если $x_0 \neq \theta$ и $y_0 = Ux_0$, то для обратного оператора $U^{-1}y_0 = x_0$.

Сопоставляя все сказанное, мы заключаем, что если U — линейный оператор, отображающий нормированное пространство $\boldsymbol{X}$ в нормированное пространство $\boldsymbol{Y}$, то для существования обратного оператора U^{-1} необходимо и достаточно, чтобы равенство $Ux = \theta$ выполнялось только при $x = \theta$; при этом обратный оператор оказывается аддитивным и однородным, отличным от нулевого (если пространство $\boldsymbol{X}$ не состоит из одного элемента θ), но может не быть линейным. В связи с этим представляет интерес следующая теорема, справедливая в любых нормированных пространствах.

Т е о р е м а 8.7.2. *Для того чтобы обратный оператор U^{-1} существовал и был линейным* (как оператор в пространстве $\boldsymbol{Y}_1$), *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная $m > 0$, что для всех $x \in \boldsymbol{X}$*

$$\| Ux \| \geqslant m \| x \|. \tag{14}$$

При этом $\| U^{-1} \| \leqslant \frac{1}{m}$ *).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если оператор $x = U^{-1}y$ линейный, то $\| x \| \leqslant \| U^{-1} \| \, \| y \|$, где $y = Ux$. При этом $\| U^{-1} \| \neq 0$ (если бы пространство $\boldsymbol{X}$ состояло только из нулевого элемента,

*) В этой теореме U может быть любым аддитивным и однородным оператором.

то теорема была бы тривиальной). Полагая $m = \frac{1}{\|U^{-1}\|}$, мы получим неравенство (14).

Обратно, если (14) выполнено, то из $Ux = \theta$ следует, что и $x = \theta$, а тогда обратный оператор U^{-1} существует. Полагая $y = Ux$ (тогда $x = U^{-1}y$), мы получаем из (14) $\|U^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{m}\|y\|$, следовательно, оператор U^{-1} линеен и $\|U^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}$.

В случае, когда пространства $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ банаховы, можно доказать, что *если линейный оператор $y = Ux$ устанавливает взаимно-однозначное отображение пространства $\boldsymbol{X}$ на всё пространство $\boldsymbol{Y}$, то обратный оператор U^{-1} непременно линейный.*

Определение. Линейный оператор U, отображающий $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$ ($\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ — любые нормированные пространства), называется *обратимым*, если область его значений $\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{Y}$ (т. е. он отображает $\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{Y}$) и существует линейный обратный оператор U^{-1}.

Укажем некоторые признаки обратимости линейных операторов в банаховых пространствах. При этом линейность обратного оператора мы будем проверять непосредственно, не ссылаясь на сделанное выше общее замечание.

Теорема 8.7.3. *Если U — линейный оператор, отображающий банахово пространство $\boldsymbol{X}$ в самого себя, с нормой $\|U\| < 1$, а I — тождественный оператор, заданный в пространстве $\boldsymbol{X}$, то оператор $I - U$ обратим. Если при этом число q таково, что $\|U\| \leqslant q < 1$, то $\|(I-U)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q}$.*

Доказательство. Пусть $\|U\| < 1$. Возьмем любое число q, удовлетворяющее неравенству $\|U\| \leqslant q < 1$. Тогда для каждого $x \in \boldsymbol{X}$

$$\|(I-U)x\| = \|Ix - Ux\| = \|x - Ux\| \geqslant$$

$$\geqslant \|x\| - \|Ux\| \geqslant \|x\| - q\|x\| = (1-q)\|x\|.$$

Следовательно, по теореме 8.7.2, обратный оператор $(I-U)^{-1}$ существует и линеен, а $\|(I-U)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q}$.

Остается доказать, что совокупность значений оператора $I - U$ совпадает с $\boldsymbol{X}$. Для этого возьмем любой $y \in \boldsymbol{X}$ и составим оператор $Vx = Ux + y$ (если $y \neq \theta$, то оператор V — нелинейный). Тогда для любых $x', x'' \in \boldsymbol{X}$

$$\|Vx' - Vx''\| = \|Ux' - Ux''\| = \|U(x' - x'')\| \leqslant q\|x' - x''\|,$$

следовательно, V — оператор сжатия. По теореме Банаха (4.4.1) оператор V имеет единственную неподвижную точку, т. е.

существует $x \in X$, для которого $x = Ux + y$ или

$$(I - U)\, x = y. \tag{15}$$

Таким образом, произвольно взятый $y \in X$ входит в совокупность значений оператора $I - U$. Теорема доказана.

Та же теорема Банаха гарантирует, что решение уравнения (15), т. е. неподвижная точка оператора V, может быть найдено методом последовательных приближений. Примем за начальное приближение $x_0 = y$. Тогда

$$\begin{aligned}
x_1 &= Vx_0 \quad = Ux_0 + y = Uy + y,\\
x_2 &= Vx_1 \quad = Ux_1 + y = U^2y + Uy + y,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n &= Vx_{n-1} = Ux_{n-1} + y = U^ny + U^{n-1}y + \ldots + y,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Полученные последовательные приближения суть частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U^n y$ *). Из сходимости метода последовательных приближений вытекает, что последовательность частичных сумм этого ряда сходится к решению уравнения (15), т. е. сам ряд сходится и

$$(I - U)^{-1} y = \sum_{n=0}^{\infty} U^n y. \tag{16}$$

Предлагаем читателю непосредственными оценками проверить абсолютную сходимость ряда (16) (учитывая, что $\| U^n \| \leqslant q^n$) и подстановкой в уравнение (15) (не опираясь на метод последовательных приближений) доказать, что сумма ряда есть $(I - U)^{-1} y$.

Теорема 8.7.4. *Пусть линейный оператор U отображает банахово пространство X* (содержащее элементы $x \neq 0$) *на банахово пространство Y и обратим. Тогда каждый линейный оператор V, отображающий X в Y и удовлетворяющий условию* $\| V - U \| < \dfrac{1}{\| U^{-1} \|}$, *тоже обратим. Если при этом число q таково, что* $\| V - U \| \, \| U^{-1} \| \leqslant q < 1$, то $\| V^{-1} \| \leqslant \dfrac{1}{1-q} \| U^{-1} \|$**).

Доказательство. Возьмем оператор V, удовлетворяющий указанному условию, и положим $W = U - V$. Если

*) Мы считаем $U^0 = I$.

**) Если $Y = X$, а за U принять оператор I, то из этой теоремы как частный случай получится теорема 8.7.3.

q таково, что $\| V - U \| \| U^{-1} \| \leqslant q < 1$, то $\| W \| \leqslant \frac{q}{\| U^{-1} \|}$. К обеим частям равенства $W = U - V$ применим оператор U^{-1}. Получим

$$U^{-1}W = I - U^{-1}V,$$

где все три оператора $U^{-1}W$, I и $U^{-1}V$ отображают X в X. При этом из неравенства (12) следует, что $\| U^{-1}W \| \leqslant q$. Тогда к оператору $U^{-1}V = I - U^{-1}W$ применима теорема 8.7.3, т. е. существует линейный оператор $T = (U^{-1}V)^{-1}$, определенный на всем X, с нормой $\| T \| \leqslant \frac{1}{1-q}$.

Так как оператор U^{-1} устанавливает взаимно-однозначное соответствие между элементами пространств Y и X, а совокупность значений оператора $U^{-1}V$ благодаря его обратимости есть всё X, то совокупность значений оператора V должна совпадать с Y *). Введем линейный оператор S в пространстве Y со значениями в X, полагая $S = TU^{-1}$. Тогда

$$SV = TU^{-1}V = (U^{-1}V)^{-1}(U^{-1}V) = I$$

и по теореме 8.7.1 $S = V^{-1}$. Тем самым доказана обратимость оператора V. При этом

$$\| V^{-1} \| = \| S \| \leqslant \| T \| \| U^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1-q} \| U^{-1} \|.$$

В гл. XII будет указано, каково значение последней теоремы для приближенных вычислений.

8.8. Матричные линейные операторы

Для многих приложений важную роль играют операторы, задаваемые в пространствах числовых последовательностей посредством бесконечных матриц. Мы уже встречались с такими операторами в пространстве l^2 (2.7).

Итак, рассмотрим оператор $y = Ux$, сопоставляющий числовой последовательности $x = \{x_k\}$ числовую последовательность $y = \{y_i\}$, определяемый с помощью матрицы $(a_{ik})_{i,k=1,2,\ldots}$ бесконечной системой равенств

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots); \tag{17}$$

*) Если допустить, что некоторый $y_0 \in Y$ не входит в совокупность значений оператора V, то, полагая $x_0 = U^{-1}y_0$, мы получим, что x_0 не входит в совокупность значений оператора $U^{-1}V$, что невозможно.

развернутая запись:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots,$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Такой оператор U мы и будем называть *матричным*. Область задания этого оператора может содержать лишь те последовательности $x = \{x_k\}$, для которых ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k$ сходится при любом $i = 1, 2, \ldots$ В дальнейшем нас часто будет интересовать случай, когда область задания матричного оператора U есть одно из пространств m, l, l^2. Значения оператора U всегда можно считать элементами пространства s, но при определенных условиях они также могут попасть в одно из перечисленных выше пространств.

Пусть X — любое пространство, элементами которого служат числовые последовательности и в котором алгебраические операции определены так же, как в s (например, s, m, l, l^2); матричный оператор U, заданный в таком пространстве X и отображающий его в одно из таких же пространств, очевидно, всегда аддитивен и однороден. Однако, для того чтобы он оказался непрерывным, могут потребоваться некоторые дополнительные условия. Так, в 2.7 мы видели, что если $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}^2 < +\infty$, то оператор, определяемый формулами (17), является линейным оператором, отображающим l^2 в l^2.

В 2.7 было также доказано, что любой линейный оператор, отображающий l^2 в l^2, представим в матричной форме (17). При этом из свойства ограниченности линейного оператора вытекает наличие такой постоянной C, что $\| y \|^2 \leqslant C \| x \|^2$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k \Big)^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

при любом $x \in l^2$. Ясно, что это последнее неравенство является условием, необходимым и достаточным для того, чтобы матричный оператор, заданный в l^2 формулами (17), отображал l^2 в l^2 и был линейным.

Приведем еще один пример. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 \leqslant M \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

Тогда при любом $x \in l^2$ все ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k$ сходятся и при этом, по неравенству Коши,

$$|y_i| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \leqslant \sqrt{M}\,\|x\|.$$

Следовательно, $y \in m$ и из предыдущего неравенства получаем

$$\|y\| = \sup|y_i| \leqslant \sqrt{M}\,\|x\|.$$

Таким образом, матричный оператор U при условии (18) оказывается линейным оператором, отображающим l^2 в m, и при этом $\|U\| \leqslant \sqrt{M}$.

Другие примеры встретятся ниже.

8.9. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений

В 4.4 мы рассматривали вопрос о решении конечной системы линейных алгебраических уравнений и привели там достаточное условие для разрешимости такой системы, полученное с помощью метрики эвклидова пространства. Заметим, что тем же методом, но используя другие возможные способы метризации или нормировки конечно-мерного пространства, можно получить и более широкие условия разрешимости рассматривавшейся системы уравнений. Сейчас же мы перейдем к рассмотрению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений с бесконечным множеством неизвестных.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Решением такой системы называется всякая последовательность чисел $\{x_k\}$, при подстановке которых в уравнения системы (19) все ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k$ оказываются сходящимися, а их суммы совпадают со свободными членами b_i. Решение $\{x_k\}$ называется *ограниченным*, если числа x_k образуют ограниченную последовательность.

Проделав то же преобразование, что в 4.4, мы можем привести систему (19) к виду

$$x_i - \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}x_k = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{20}$$

(где $c_{ik} = -a_{ik} + \delta_{ik}$).

Укажем один класс систем (20), для которых можно с помощью теоремы 8.7.3 дать простое условие их разрешимости.

Определение. Система (20) называется *вполне регулярной*, если существует такая положительная постоянная $q < 1$, что при всех $i = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}| \leqslant q.$$

Считая систему (20) вполне регулярной, определим с помощью матрицы (c_{ik}) матричный оператор $y = Ux$ в пространстве m:

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Тогда для любого $x \in m$ также и $y \in m$ и оператор U линеен. Действительно, при всяком i

$$|y_i| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}|\,|x_k| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}|\Big)\|x\| \leqslant q\|x\|.$$

Таким образом, последовательность $\{y_i\}$ ограничена, т. е. $y \in m$, и

$$\|y\| = \sup |y_i| \leqslant q\|x\|.$$

Тем самым установлена линейность оператора U и при этом $\|U\| \leqslant q < 1$.

Будем считать, что свободные члены системы (20) в совокупности ограничены. Обозначим через I тождественный оператор в пространстве m, а через b — элемент пространства m, определяемый свободными членами, $b = \{b_i\}$. Тогда мы можем записать систему (20) в сжатом виде

$$(I - U)x = b.$$

Если искать только ограниченные решения системы (20), то ее разрешимость при любых свободных членах (ограниченных в совокупности) и единственность решения будут обеспечены, если оператор $I - U$ обратим. А так как $\|U\| < 1$, то применима теорема 8.7.3 и, следовательно, оператор $I - U$, действительно, обратим и при этом $\|(I - U)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q}$. Таким образом, получается следующая теорема:

Теорема 8.9.1. *Вполне регулярная система* (20) *имеет единственное ограниченное решение* $\{x_i\}$ *при любой ограниченной совокупности свободных членов. При этом если* $|b_i| \leqslant B$ *при всех* $i = 1, 2, \ldots$, *то*

$$|x_i| \leqslant \frac{B}{1-q} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Решение, существование которого уже установлено, можно получить из формулы (16) для обратного оператора, а именно

$$x = (I - U)^{-1} b = \sum_{n=0}^{\infty} U^n b. \tag{21}$$

Вычисление по этой формуле равносильно применению метода последовательных приближений к нашему уравнению, записанному в форме

$$x = Ux + b, \tag{22}$$

если за начальное приближение принять $x_0 = b$. Из теоремы Банаха вытекает, что метод последовательных приближений применим к уравнению (22) и при любом начальном приближении $x_0 \in m$.

Заметим, что если отказаться от требования, чтобы решение системы (20) было ограниченным, то единственность решения вполне регулярной системы уже не будет иметь места. Например, система

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} x_2, \\ x_2 &= \frac{1}{2} x_3, \\ &\dots\dots\dots \\ x_i &= \frac{1}{2} x_{i+1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

очевидно, вполне регулярна $\left(\text{за } q \text{ можно принять } \frac{1}{2}\right)$, все свободные члены равны нулю, но она имеет бесконечное множество решений: нулевое ($x_1 = x_2 = \dots = x_i = \dots = 0$), которое является ограниченным, и неограниченные решения вида $x_i = \lambda 2^i$, где λ — любое число, отличное от нуля.

Вернемся теперь к конечным системам

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k + b_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{23}$$

Такую систему можно свести к бесконечной системе (20), если принять, что $c_{ik} = 0$, когда хоть один из индексов i или k больше n, и $b_i = 0$ при $i > n$. При этом все уравнения, начиная с $(n+1)$-го, сводятся к равенствам $x_{n+1} = 0$, $x_{n+2} = 0$, ...

Таким образом, всякое решение построенной бесконечной системы может содержать лишь конечное число неизвестных, отличных от нуля, а потому будет ограниченным. Свободные

члены по той же причине образуют ограниченную последовательность. Условие вполне регулярности построенной бесконечной системы сводится к неравенствам

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{ik}| < q < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Поскольку это условие должно быть выполнено лишь для конечного числа сумм, то оно может быть записано в более простой форме:

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{ik}| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{24}$$

(так как при выполнении последнего условия за q можно принять наибольшую из сумм $\sum_{k=1}^{n} |c_{ik}|$). Следовательно, при условии (24) для системы (23) справедлив результат теоремы 8.9.1; а так как неограниченные решения в нашем случае невозможны, то получается, что при выполнении условия (24) система (23) имеет единственное решение при любых свободных членах. Условие (24) менее тяжелое, чем то условие (6), которое было приведено в 4.4.

8.10. Некоторые интегральные операторы

Среди простейших примеров линейных операторов, приведенных в 8.3, мы уже встречались с интегральным оператором, преобразующим пространство C в самого себя. В этом параграфе мы рассмотрим интегральные операторы, задаваемые той же формулой, но при гораздо более слабых ограничениях, накладываемых на ядро.

Именно, будем предполагать, что функция $K(s, t)$ измерима в квадрате $a \leqslant s, t \leqslant b$ и для некоторого $p > 1$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b |K(s, t)|^p \, ds \leqslant M \text{ при почти всех } t \tag{25}$$

(M — постоянная). Покажем, что при выполнении этого условия формула

$$y(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) \, dt \tag{26}$$

определяет линейный оператор, переводящий L в L^p. В частности, это верно для интегрального оператора, у которого ядро — непрерывная или хотя бы ограниченная почти всюду (в квадрате) измеримая функция.

Проверим, что для любого $x \in L$ при выполнении условия (25) функция $y(s)$, определяемая формулой (26), принадлежит L^p. При этом нам придется воспользоваться так называемым *неравенством Гельдера*, устанавливаемым

в теории интеграла *). Именно, *если* $\varphi \in L^p$, *а* $\psi \in L^q$, *причем* p *и* q *связаны соотношением*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{27}$$

то произведение $\varphi\psi$ *суммируемо и при этом*

$$\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt \Big| \leqslant \left(\int_a^b |\varphi(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |\psi(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Из (27) следует, что $q=\dfrac{p}{p-1}>1$. В частности, если $p=2$, то и $q=2$, и неравенство Гельдера превращается в неравенство Буняковского.

Используя неравенство Гельдера, проводим при почти всех s следующую оценку:

$$|y(s)| \leqslant \int_a^b |K(s,t)|\,|x(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^b \left[|K(s,t)|\,|x(t)|^{\frac{1}{p}}\right] |x(t)|^{\frac{1}{q}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |K(s,t)|^p\,|x(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |x(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_a^b |K(s,t)|^p\,|x(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \|x\|^{\frac{1}{q}}.$$

Возводя обе части полученного неравенства в степень с показателем p, а затем интегрируя почленно по s и изменяя при этом порядок интегрирования в правой части **), мы получим:

$$\int_a^b |y(s)|^p\,ds \leqslant \int_a^b |x(t)|\,dt \int_a^b |K(s,t)|^p\,ds\,\|x\|^{\frac{p}{q}} \leqslant M\|x\|^{1+\frac{p}{q}}.$$

С помощью (27) легко подсчитывается, что $1+\dfrac{p}{q}=p$, следовательно,

$$\int_a^b |y(s)|^p\,ds \leqslant M\|x\|^p.$$

---

*) О. Л. Гельдер (1859—1937) — немецкий математик. Вывод неравенства Гельдера см., например, в книге: Б. З. Вулих, Краткий курс теории функций вещественной переменной, стр. 259—260.

**) Это делается на основании теоремы Фубини из теории интеграла

Тем самым доказано, что $y \in L^p$. При этом для нормы элемента y в пространстве L^p мы нашли оценку

$$\| y \| \leqslant M^{\frac{1}{p}} \| x \|.$$

Следовательно, оператор (26) ограничен, а вместе с тем и линеен.

Заметим, что доказанный результат верен и при $p = 1$, только проведенное нами рассуждение в этом случае значительно упрощается.

Рассмотрим теперь ядро специального вида

$$K(s, t) = \frac{A(s, t)}{|s - t|^{\lambda}}, \tag{28}$$

где $A(s, t)$ — функция, непрерывная в квадрате $a \leqslant s, t \leqslant b$. Такого типа ядра часто встречаются в математической физике и их называют *ядрами типа потенциала*. Будем считать, что $0 < \lambda < 1$. Покажем, что если $p > 1$ таково, что $\lambda p < 1$, то ядро (28) удовлетворяет условию (25).

Действительно, функция $A(s, t)$, будучи непрерывной, ограничена на всем квадрате: $|A(s, t)| \leqslant C$, а тогда

$$\int_a^b |K(s, t)|^p \, ds \leqslant C^p \int_a^b \frac{ds}{|s - t|^{\lambda p}}.$$

Справа стоит сходящийся интеграл (так как показатель $\lambda p < 1$), т. е. подынтегральная функция суммируема. Производя подстановку $s - t = u$, получим

$$\int_a^b \frac{ds}{|s - t|^{\lambda p}} = \int_{a-t}^{b-t} \frac{du}{|u|^{\lambda p}}.$$

Отрезок $[a - t, b - t]$ содержится в отрезке $[-l, l]$, где $l = b - a$, не зависящем от t, и мы получаем окончательную оценку:

$$\int_a^b |K(s, t)^p \, ds \leqslant C^p \int_{-l}^{l} \frac{du}{|u|^{\lambda p}} = \frac{2C^p}{1 - \lambda p} l^{1 - \lambda p} < +\infty.$$

Таким образом, условие (25) для ядра (28) выполнено.

Отметим, что весьма подробное исследование интегральных операторов проведено в уже цитированной книге Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова *).

8.11. Линейные дифференциальные операторы в пространстве дифференцируемых функций

Рассмотрим множество C_l всех непрерывных функций $x(t)$, заданных на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ и имеющих непрерывные производные до l-го порядка включительно, где l — заданное нату-

*) См. также недавно вышедшую книгу: М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник и П. Е. Соболевский, Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, «Наука», 1966

ральное число. C_l является подмножеством пространства C всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$. Ясно, что C_l — линейное подмножество. При этом C_l всюду плотно в C, так как в C_l входят все алгебраические полиномы, а полиномы уже образуют в C всюду плотное множество. Однако если пользоваться в C_l той нормой, которая определена во всем C, то сходимость по норме будет означать лишь равномерную сходимость последовательности самих функций, но ничего не будет давать в отношении сходимости последовательности производных. Между тем в некоторых задачах из области дифференциальных уравнений, например при приближенном решении последних, представляет интерес такая сходимость, которая означает не только равномерную сходимость последовательности самих функций, но и равномерную сходимость последовательностей некоторых их производных. Такую сходимость можно представить как сходимость по норме, если C_l рассмотреть как самостоятельное нормированное пространство с нормой, отличной от нормы в C.

Итак, определим норму в C_l по формуле

$$\| x \| = \sum_{k=0}^{l} \max | x^{(k)}(t) |$$

[здесь $x^{(0)}(t) = x(t)$]. Легко проверить, что все аксиомы нормы выполнены. Например, аксиома треугольника проверяется так. Если $x,\ y \in C_l$, то при любом $k = 0, 1, \ldots, l$

$$| x^{(k)}(t) + y^{(k)}(t) | \leqslant | x^{(k)}(t) | + | y^{(k)}(t) | \leqslant$$

$$\leqslant \max | x^{(k)}(t) | + \max | y^{(k)}(t) |,$$

а тогда и

$$\max | x^{(k)}(t) + y^{(k)}(t) | \leqslant \max | x^{(k)}(t) | + \max | y^{(k)}(t) |.$$

Следовательно,

$$\| x + y \| = \sum_{k=0}^{l} \max | x^{(k)}(t) + y^{(k)}(t) | \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{l} \max | x^{(k)}(t) | + \sum_{k=0}^{l} \max | y^{(k)}(t) | = \| x \| + \| y \|.$$

Ясно, что в C_l сходимость по норме $x_n \to x$ означает, что

$$x_n^{(k)}(t) \underset{n \to \infty}{\to} x^{(k)}(t)$$

равномерно при $k = 0, 1, \ldots, l$.

Проверим, что пространство C_l банахово. Пусть последовательность элементов $x_n \in C_l$ фундаментальная. Так как при всяком $k = 0, 1, \ldots, l$

$$| x_n^{(k)}(t) - x_m^{(k)}(t) | \leqslant \| x_n - x_m \|,$$

то все последовательности $\{x_n^{(k)}(t)\}$ равномерно сходятся к некоторым непрерывным предельным функциям $\varphi_k(t)$ ($k = 0, 1, \ldots, l$). В математическом анализе доказывается, что если функции $f_n(t)$ имеют на некотором отрезке непрерывные производные 1-го порядка и если $f_n(t) \to f(t)$, а $f_n'(t) \to g(t)$ равномерно, то $g(t) = f'(t)$ *). На основании этой теоремы

$$\varphi_1(t) = \lim x_n'(t) = \frac{d}{dt}[\lim x_n(t)] = \varphi_0'(t),$$

$$\varphi_2(t) = \lim x_n''(t) = \frac{d}{dt}[\lim x'(t)] = \varphi_1'(t) = \varphi_0''(t),$$

. . . . . .

$$\varphi_l(t) = \lim x_n^{(l)}(t) = \frac{d}{dt}[\lim x_n^{(l-1)}(t)] = \varphi_{l-1}'(t) = \varphi_0^{(l)}(t).$$

Следовательно, $\varphi_0 \in C_l$ и $x_n \to \varphi_0$ по норме в пространстве C_l.

Приведем пример линейного оператора в пространстве C_l. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение l-го порядка:

$$a_0(t)\,x(t) + a_1(t)\,x'(t) + \ldots + a_l(t)\,x^{(l)}(t) = f(t), \tag{29}$$

в котором все коэффициенты и свободный член предполагаются непрерывными на отрезке $[a, b]$. Левая часть уравнения определяет некоторый оператор L, имеющий смысл, во всяком случае, для любой функции $x \in C_l$. Значения оператора L суть функции из C, а само уравнение (29) может быть записано в форме

$$Lx = f$$

(где мы рассматриваем только $x \in C_l$ **)).

Проверим, что оператор L — линейный. Его аддитивность очевидна. Чтобы доказать его ограниченность, положим $M_k = \max |a_k(t)|$ ($k = 0, 1, \ldots, l$), а $M = \max(M_0, M_1, \ldots, M_l)$. Тогда, если $y = Lx$, то

$$|y(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{l} |a_k(t)|\,|x^{(k)}(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{l} M_k\,|x^{(k)}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{k=0}^{l} |x^{(k)}(t)| \leqslant M \sum_{k=0}^{l} \max |x^{(k)}(t)| = M\,\|x\|,$$

откуда

$$\|y\| = \max |y(t)| \leqslant M\,\|x\|.$$

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 1, п° 145.

**) Если $a_l(t) \neq 0$, то, как легко видеть, всякая функция $x(t)$, удовлетворяющая уравнению (29), входит в C_l.

ГЛАВА IX

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

9.1. Линейный функционал как частный случай линейного оператора

В этой главе, как и почти во всей книге, мы ограничиваемся рассмотрением функционалов с вещественными значениями. Некоторые замечания о комплексных функционалах будут сделаны в последнем параграфе главы. Как уже отмечалось в гл. VIII, для функционалов $f(x)$, заданных в произвольном нормированном пространстве X, имеют смысл определения аддитивности, однородности, линейности. Так как множество вещественных чисел R_1, в котором за норму принята абсолютная величина числа, представляет нормированное пространство, то линейный функционал в пространстве X представляет частный случай линейного оператора, отображающего X в какое-то нормированное пространство Y.

Все общие теоремы, доказанные в предыдущей главе для линейных операторов, верны и для линейных функционалов. В настоящей главе мы рассмотрим некоторые специфические вопросы, решение которых для функционалов оказывается значительно более простым, чем для произвольных линейных операторов.

Предварительно остановимся на формуле (6) из гл. VIII для нормы линейного оператора. Применительно к линейному функционалу f она может быть записана так:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|. \tag{1}$$

Покажем, что для функционалов справедливо и следующее соотношение:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} f(x) \tag{2}$$

(здесь в правой части отсутствует знак абсолютной величины).

Действительно, так как всегда $f(x) \leqslant |f(x)|$, то

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} f(x) \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \|f\|.$$

С другой стороны, согласно формуле (1), по любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такой x из единичного шара, что

$$|f(x_0)| > \|f\| - \varepsilon.$$

Но если $\|x_0\| \leqslant 1$, то и $\|-x_0\| \leqslant 1$, а одно из значений $f(x_0)$ и $f(-x_0)$ совпадает с $|f(x_0)|$. Поэтому в единичном шаре существует такой элемент x (это будет один из элементов x_0 или $-x_0$), что

$$f(x) \geqslant \|f\| - \varepsilon.$$

Отсюда уже следует, что

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} f(x) \geqslant \|f\| - \varepsilon$$

а вследствие произвольности ε

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} f(x) \geqslant \|f\|.$$

Из двух противоположных неравенств вытекает формула (2).

В некоторых случаях формула (2) оказывается более удобной, чем формула (1).

9.2. Общие формы линейных функционалов в некоторых пространствах

Для линейных функционалов во многих пространствах довольно просто решается следующая важная задача: найти общее выражение линейных функционалов в заданном пространстве. В 1.9 мы уже решили такую задачу в R_n. Именно, мы показали, что если c — фиксированный элемент из R_n, то скалярное произведение (x, c) представляет линейный функционал в R_n и, обратно, для любого линейного функционала $f(x)$ в R_n существует такой элемент $c \in R_n$ и притом единственный, что $f(x) = (x, c)$. При этом $\|f\| = \|c\|$. Таким образом, формулой

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k \qquad (x = \{\xi_k\}_{k=1, 2, \ldots, n}),$$

где числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ могут быть любыми, и дается *общее выражение линейных функционалов в R_n* *). Напомним, что в гл. 1

*) В частности, общий вид линейных функционалов в R_1, т. е. аддитивных и непрерывных функций вещественной переменной, дается формулой $f(x) = cx$. Этот результат был установлен еще Коши.

(1.5) мы также установили и общий вид линейных операторов, отображающих R_n в R_n. Однако в бесконечно-мерных пространствах получение общих форм линейных операторов оказывается значительно более сложной задачей и потому мы ограничимся сейчас отысканием в таких пространствах общих форм линейных функционалов.

В 2.6 была найдена общая форма линейного функционала в l^2, также в виде скалярного произведения: $f(x) = (x, c)$, причем, как и в R_n, $\|f\| = \|c\|$, а элемент c определяется единственным образом. Иными словами, *общий вид линейных функционалов в* l^2 *дается формулой*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k,$$

где $x = \{\xi_k\}$, *а числа* c_k *должны удовлетворять условию* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$. При этом $\|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2}$.

Если H — произвольное бесконечно-мерное, сепарабельное гильбертово пространство, то, как мы знаем из 6.9, оно изоморфно пространству l^2, причем изоморфизм может быть установлен с сохранением нормы и скалярного произведения. Тогда каждый линейный функционал в H может быть интерпретирован как линейный функционал (с той же нормой) в l^2 и доказанная общая форма линейных функционалов в l^2 тем самым переносится и в H. Таким образом, *формула*

$$f(x) = (x, c)$$

дает общий вид линейных функционалов в H, причем $\|f\| = \|c\|$. Этот результат может быть установлен и непосредственно, без использования координатной реализации пространства H и без предположения о его сепарабельности *).

Напомним еще раз, что элемент c из пространства H по заданному функционалу f определяется единственным образом, и покажем, как это можно установить, опираясь на общую аксиоматику гильбертова пространства. Пусть $f(x) = (x, c) = (x, c_1)$ при всех x, где $c, c_1 \in H$. Тогда $(x, c - c_1) \equiv 0$. Полагая, в частности, $x = c - c_1$, имеем $(c - c_1, c - c_1) = 0$, следовательно, $c - c_1 = 0$, т. е. $c = c_1$.

---

*) Для пространства L^2, представляющего функциональную реализацию пространства H, общий вид линейных функционалов был установлен в 1907 г. М. Фреше и Ф. Риссом.

Перейдем к пространству l. В l совокупность координатных ортов e_k образует базис. При этом каждый $x = \{\xi_k\} \in l$ имеет вид $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$. Пусть f — линейный функционал в l. Положим $c_k = f(e_k)$. Тогда по дистрибутивности линейного функционала, имеющей место и для бесконечных рядов (см. 8.2),

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k.$$

При этом $|c_k| \leqslant \|f\| \|e_k\| = \|f\|$, следовательно, числа c_k образуют ограниченную последовательность и

$$\sup |c_k| \leqslant \|f\|. \tag{3}$$

Обратно, пусть задана произвольная ограниченная последовательность чисел c_k. Тогда для любого $x = \{\xi_k\} \in l$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$ абсолютно сходится, и если в l определить функционал

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k, \tag{4}$$

то для него получится следующая оценка:

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |\xi_k| \leqslant (\sup |c_k|) \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = (\sup |c_k|) \|x\|.$$

Таким образом, функционал (4) имеет смысл для всех $x \in l$ и ограничен. Аддитивность его очевидна, следовательно, он линеен и

$$\|f\| \leqslant \sup |c_k|. \tag{5}$$

Итак, *формула* (4) *при условии, что последовательность* $\{c_k\}$ *ограничена, дает общий вид линейного функционала в* l. Сопоставляя неравенства (3) и (5), мы заключаем, что

$$\|f\| = \sup |c_k|.$$

Заметим, что в пространстве m, где координатные орты не образуют базиса, общая форма линейного функционала оказывается значительно более сложной. Легко видеть (см. также 9.11), что если $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < +\infty$, то ряд (4) представляет линейный функционал в m; однако не всякий линейный функционал в m представим в форме ряда (4).

9.3. Линейные функционалы в пространствах суммируемых функций

Применяя к пространству L^2 сказанное в предыдущем параграфе по поводу функционалов в гильбертовом пространстве, мы сразу увидим, что *общий вид линейных функционалов в пространстве* L^2 (на промежутке $[a, b]$) *дается формулой*

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt, \tag{6}$$

где $y(t)$ *— любая функция из* L^2 *). При этом

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b y^2(t)\, dt}.$$

Далее мы увидим, что та же формула (6) дает общий вид линейных функционалов и в любом из пространств L^p $(p \geqslant 1)$, только в зависимости от p будут меняться условия, накладываемые на функции $y(t)$.

1°. Сначала будем рассматривать случай, когда $p > 1$. Существенную роль в последующем будет играть неравенство Гельдера, уже использованное в 8.10. Именно, *если* $\varphi \in L^p$, $\psi \in L^q$ *и* p *и* q *связаны соотношением*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{7}$$

то произведение $\varphi\psi \in L$ *и*

$$\left| \int_a^b \varphi(t)\, \psi(t)\, dt \right| \leqslant \left(\int_a^b |\varphi(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |\psi(t)|^q\, dt \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{8}$$

В пределах этого параграфа q все время будет обозначать число, связанное с p равенством (7). Иногда в этом случае q называют показателем, *сопряженным с* p.

Из неравенства Гельдера выводится и тот факт, что если $1 \leqslant r < s$, то $L^s \subset L^r$ (это отмечалось в 3.2). Действительно, положим $p = \frac{s}{r}$. Тогда $q = \frac{s}{s-r}$. Если $x \in L^s$, то функция $|x(t)|^r$ входит в L^p **). Положим

$$\varphi(t) = |x(t)|^r, \qquad \psi(t) \equiv 1.$$

*) Варьируя функцию $y(t)$, мы будем получать различные функционалы f.

**) $(|x(t)|^r)^p = |x(t)|^s$, а последняя функция суммируема, поскольку $x \in L^s$.

Тогда $\psi \in L^q$, следовательно, произведение $\varphi\psi$, совпадающее с $|x(t)|^r$, суммируемо, т. е. функция $x \in L^r$. Таким образом, $L^s \subset L^r$.

Кроме самого включения, из неравенства Гельдера следует, что

$$\int_a^b |x(t)|^r\,dt \leqslant \Big(\int_a^b |x(t)|^s\,dt\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^b 1^q\,dt\Big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= (b-a)^{\frac{s-r}{s}} \Big(\int_a^b |x(t)|^s\,dt\Big)^{\frac{r}{s}}.$$

Отсюда, возводя обе части в степень с показателем $\frac{1}{r}$, получаем, что

$$\|x\|_{L^r} \leqslant (b-a)^{\frac{s-r}{rs}} \|x\|_{L^s} *).$$

Таким образом, если в пространстве L^s (с бо́льшим индексом) рассмотреть две нормы — его основную $\|x\|_{L^s}$ и индуцированную из L^r, то первая будет мажорировать вторую (ср. 8.3).. Следовательно, из сходимости в L^s по его норме вытекает сходимость по норме, индуцированной из L^r **).

Из неравенства Гельдера сразу следует, что функционал f, определенный в пространстве L^p по формуле (6) (такой функционал, очевидно, аддитивен) при любой функции $y \in L^q$ будет линейным, причем

$$|f(x)| \leqslant \Big(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\Big)^{\frac{1}{q}} \|x\|,$$

т. е.

$$\|f\| \leqslant \Big(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{9}$$

Заметим, что если две функции y, $z \in L^q$ не эквивалентны, то определяемые ими функционалы различны. Действительно, пусть e_1 и e_2 — множества тех точек, где $y(t) > z(t)$ и $y(t) < z(t)$ соответственно. Положим

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in e_1, \\ -1, & \text{если } t \in e_2, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

*) Индекс при норме обозначает то пространство, в котором вычисляется эта норма.

**) В частности, в пространстве L^2 из сходимости в среднем 2-го порядка вытекает сходимость в среднем 1-го порядка.

Тогда

$$\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt - \int_a^b x(t)\,z(t)\,dt =$$

$$= \int_{e_1 \cup e_2} x(t)\,[y(t) - z(t)]\,dt = \int_{e_1 \cup e_2} |y(t) - z(t)|\,dt > 0,$$

поскольку по крайней мере одно из множеств e_1 или e_2 имеет меру, большую 0. Таким образом, существует $x \in L^p$, для которого

$$\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt \neq \int_a^b x(t)\,z(t)\,dt.$$

Ф. Рисс доказал в 1910 г., что *формула* (6) *при* $y \in L^q$ *и дает общий вид линейных функционалов в* L^p, *причем*

$$\|f\| = \left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{10}$$

Чтобы несколько упростить доказательство, мы ограничимся значениями $p < 2$, т. е. будем дальше считать, что $1 < p < 2$, однако сформулированный сейчас результат верен при любом $p > 1$ *).

Пусть f — произвольный линейный функционал, заданный на L^p. Так как по сделанному выше замечанию $L^2 \subset L^p$, функционал f можно рассматривать и на L^2. Благодаря отмеченному ранее соотношению между нормами в L^2 и L^p функционал f будет также линейным и на L^2, если это пространство рассматривать с его обычной нормой. Но тогда существует такая функция $y \in L^2$, что для всех $x \in L^2$ функционал $f(x)$ представим по формуле (6). Нужно показать, что эта формула справедлива и на всем L^p и что $y \in L^q$ **).

Сначала проверим последнее включение. При этом естественно ограничиться предположением, что $y(t)$ не эквивалентна 0. Введем обозначение, используемое здесь и в дальнейшем: для произвольного вещественного числа α полагаем

$$\operatorname{sign}\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha > 0, \\ -1, & \text{если } \alpha < 0, \\ 0, & \text{если } \alpha = 0 \text{ ***}). \end{cases}$$

*) На случае, когда $p = 2$, мы остановились в начале параграфа.

**) Так как $p < 2$, то $q > 2$ и включение $y \in L^q$ представляет более тяжелое требование, чем включение $y \in L^2$.

***) Обозначение sign происходит от латинского слова signum — знак.

Тогда при любом α имеем $\alpha \operatorname{sign} \alpha = |\alpha|$. Теперь для любого натурального n определим функцию

$$y_n(t) = \begin{cases} y(t), & \text{если } |y(t)| \leqslant n, \\ n \operatorname{sign} y(t), & \text{если } |y(t)| > n \text{ *}). \end{cases}$$

Функции $y_n(t)$ измеримы, ограничены и

$$|y_n(t)| \leqslant |y(t)| \tag{11}$$

при всех t. Далее положим

$$x_n(t) = |y_n(t)|^{q-1} \operatorname{sign} y(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Эти функции тоже ограничены и измеримы **), следовательно, $x_n \in L^p$ и при этом

$$\| x_n \|_{L^p} = \left(\int_a^b |y_n(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поскольку $x_n(t)$ ограничена (а тогда $x_n \in L^2$), $f(x_n)$ вычисляется по формуле (6), т. е.

$$f(x_n) = \int_a^b x_n(t) y(t) \, dt = \int_a^b |y_n(t)|^{q-1} |y(t)| \, dt.$$

Отсюда благодаря неравенству (11) вытекает, что

$$f(x_n) \geqslant \int_a^b |y_n(t)|^q \, dt.$$

Так как, с другой стороны, $f(x_n) \leqslant \| f \| \, \| x_n \|$, то

$$\int_a^b |y_n(t)|^q \, dt \leqslant \| f \| \left(\int_a^b |y_n(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Раз мы предположили, что $y(t)$ не эквивалентна 0, $y_n(t)$ тоже не эквивалентна 0, а тогда, деля обе части последнего неравенства на интеграл, стоящий справа, мы находим

$$\left(\int_a^b |y_n(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \| f \|.$$

---

*) Функции $y_n(t)$ называются *срезками* функции $y(t)$.

**) Измеримость функции $\operatorname{sign} y(t)$ очевидным образом вытекает из измеримости функции $y(t)$.

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\left(\int_a^b |y(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|. \tag{12}$$

Тем самым доказано, что $y \in L^q$.

Теперь уже нетрудно получить для функционала f формулу (6) в полном объеме. С одной стороны, мы имеем линейный функционал f, заданный на всем L^p и представимый по формуле (6) для $x \in L^2$. С другой стороны, введем еще один линейный функционал g, определенный на всем L^p формулой

$$g(x) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt.$$

Эти два функционала совпадают на L^2, т. е. $f(x) = g(x)$ при $x \in L^2$. Но L^2 составляет множество, всюду плотное в L^p *). Тогда по замечанию к теореме 8.4.1 $f(x) = g(x)$ на всем L^p. Представление функционала f по формуле (6) на всем L^p доказано, а из неравенств (9) и (12) вытекает формула (10) для нормы функционала f.

2°. Случай, когда $p = 1$. На функционалах в пространстве L остановимся короче. Используем следующее понятие, вводимое в теории функций вещественной переменной. Говорят, что функция $\varphi(t)$ ограничена почти всюду на промежутке $[a, b]$, если существует такая постоянная C, что $|\varphi(t)| \leqslant C$ почти всюду на $[a, b]$. Легко доказывается, что если функция $\varphi(t)$ ограничена почти всюду, то среди постоянных C, обладающих указанным свойством, существует наименьшая **). Эта наименьшая постоянная называется *существенной точной верхней границей функции* $\varphi(t)$ и обозначается

$$\text{vrai sup}\,|\varphi(t)|\ ***).$$

Ясно, что если $x \in L$, а функция $y(t)$ измерима и ограничена почти всюду на $[a, b]$, то произведение xy суммируемо и формула (6) определяет аддитивный функционал на L. Этот функционал линеен, что сразу вытекает из оценки:

$$|f(x)| \leqslant (\text{vrai sup}\,|y(t)|)\int_a^b |x(t)|\, dt = (\text{vrai sup}\,|y(t)|)\,\|x\|.$$

---

*) L^2 содержит все непрерывные на $[a, b]$ функции, а уже множество непрерывных функций всюду плотно в L^p.

**) См., например, Б. З. Вулих, Краткий курс теории функций вещественной переменной, стр. 228.

***) vrai — французское слово, означающее «истинный».

При этом ясно, что

$$\| f \| \leqslant \operatorname{vrai\,sup} | y(t) |. \tag{13}$$

Верно и обратное заключение, т. е. *формула* (6) *дает общий вид линейного функционала в пространстве* L, *если в качестве* $y(t)$ *брать любую измеримую функцию, ограниченную почти всюду на* $[a, b]$. При этом справедливо точное равенство:

$$\| f \| = \operatorname{vrai\,sup} | y(t) | \text{ *}). \tag{14}$$

Обратный результат можно доказать по той же схеме, что и для пространств L^p при $1 < p < 2$. Сначала так же, как и там, доказывается, что если f — линейный функционал, заданный на L, то $f(x)$ представимо по формуле (6) при $x \in L^2$. Далее следует проверить, что на этот раз $y(t)$ ограничена почти всюду. С этой целью зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначим через e_ε множество тех точек из $[a, b]$, где $| y(t) | \geqslant \| f \| + \varepsilon$. Затем рассмотрим на $[a, b]$ функцию

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} y(t) & \text{при } t \in e_\varepsilon, \\ 0 & \text{при } t \bar{\in} e_\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда, поскольку $x \in L^2$,

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt = \int_{e_\varepsilon} | y(t) |\, dt \geqslant (\| f \| + \varepsilon)\, m e_\varepsilon \text{ **}).$$

С другой стороны, $\| x \| = m e_\varepsilon$ и потому

$$f(x) \leqslant \| f \|\, m e_\varepsilon.$$

Одновременное выполнение обоих неравенств для $f(x)$ возможно лишь при $m e_\varepsilon = 0$. Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$, $| y(t) | < \| f \| + \varepsilon$ почти всюду на $[a, b]$. Вследствие произвольности ε отсюда сразу вытекает, что

$$| y(t) | \leqslant \| f \| \text{ почти всюду на } [a, b] \text{ ***}).$$

Таким образом, $y(t)$ ограничена почти всюду и

$$\operatorname{vrai\,sup} | y(t) | \leqslant \| f \|. \tag{15}$$

Теперь представимость функционала f по формуле (6) для всех

*) Общий вид линейных функционалов в L найден современным польским математиком Г. Штейнгаузом.

**) Буква m обозначает лебегову меру.

***) Чтобы прийти к этому выводу, достаточно задать последовательность значений $\varepsilon_n \to 0$ и рассмотреть сумму множеств e_{ε_n}. Эта сумма имеет меру 0, а на дополнении $| y(t) | < \| f \|$.

$x \in L$ устанавливается совершенно так же, как в пространстве L^p. Попутно из неравенств (13) и (15) вытекает формула (14).

В пространствах l^p устанавливаются аналогичные результаты. Общий вид линейного функционала в пространстве l уже найден в 9.2 с помощью формулы (4). Если же $p > 1$, то *общий вид линейного функционала в* l^p *дается той же формулой* (4), *где последовательность* $\{c_k\} \in l^q$. При этом

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

9.4. Распространение линейных функционалов

В 8.4 мы установили некоторые общие результаты о распространении линейных операторов. Сейчас рассмотрим этот вопрос специально для функционалов. Основным результатом здесь является следующая теорема С. Банаха и Г. Гана *) о распространении линейного функционала с сохранением нормы с любого линейного подмножества на все пространство:

Теорема 9.4.1. *Пусть* X — *нормированное пространство*, E — *его линейное подмножество*, $f(x)$ — *линейный функционал, заданный на* E. *Тогда функционал* f *допускает распространение с сохранением нормы на все пространство* X.

Доказательство. Мы ограничимся доказательством этой теоремы для сепарабельного пространства X. Доказательство для произвольного пространства требует привлечения идей, выходящих за рамки настоящей книги.

Распространение функционала f осуществим постепенно. Опишем подробно первый шаг. Возьмем некоторый фиксированный $y \in X$, но не входящий в E. Рассмотрим множество E_1, состоящее из всех элементов вида $x' = x + \alpha y$, где $x \in E$. Ясно, что E_1 — линейное множество. Например, если $x_1' = x_1 + \alpha_1 y$, $x_2' = x_2 + \alpha_2 y$, $x_1', x_2' \in E_1$ $(x_1, x_2, \in E)$, то и их сумма

$$x_1' + x_2' = (x_1 + x_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)\, y \tag{16}$$

имеет ту же структуру, а потому $x_1' + x_2' \in E_1$. Аналогично проверяется, что если $x' \in E_1$, то и $\lambda x' \in E_1$ при любом λ.

Заметим также, что каждый x' из E_1 допускает единственное представление вида $x' = x + \alpha y$, где $x \in E$. Действительно, если бы $x' = x + \alpha y = x_1 + \alpha_1 y$, где $x, x_1 \in E$ и $\alpha \neq \alpha_1$, то из равенства $x - x_1 = (\alpha_1 - \alpha)\, y$ мы бы получили, что $y = \frac{x - x_1}{\alpha_1 - \alpha}$. Тогда, вследствие линейности множества E, $y \in E$, что неверно. Таким образом, $\alpha_1 = \alpha$, а тогда и $x_1 = x$.

*) Г. Ган (1879—1934) — австрийский математик.

Множество $E \subset E_1$. Именно, каждый $x \in E$ может быть представлен в виде $x = x + \alpha y$, где $\alpha = 0$, а потому входит в E_1.

Выведем теперь некоторое вспомогательное неравенство. Возьмем любые два элемента $x_1, x_2 \in E$. Тогда

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) \leqslant |f(x_1 - x_2)| \leqslant \|f\| \, \|x_1 - x_2\|.$$

Но

$$\|x_1 - x_2\| = \|(x_1 + y) - (x_2 + y)\| \leqslant \|x_1 + y\| + \|x_2 + y\|,$$

а потому

$$f(x_1) - f(x_2) \leqslant \|f\| (\|x_1 + y\| + \|x_2 + y\|).$$

Отсюда

$$-\|f\| \, \|x_2 + y\| - f(x_2) \leqslant \|f\| \, \|x_1 + y\| - f(x_1).$$

Если, фиксируя сначала x_1, взять точную верхнюю границу левой части неравенства по всевозможным $x_2 \in E$ (обозначим ее m), а затем, рассматривая всевозможные $x_1 \in E$, взять точную нижнюю границу правой части (обозначим ее M), мы получим

$$m = \sup_{x_2 \in E} [-\|f\| \, \|x_2 + y\| - f(x_2)] \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{x_1 \in E} [\|f\| \, \|x_1 + y\| - f(x_1)] = M.$$

Так как x_1 и x_2 независимы друг от друга, то можно заменить их произвольным $x \in E$ и записать, что

$$\left.\begin{aligned} m &= \sup_{x \in E} [-\|f\| \, \|x + y\| - f(x)], \\ M &= \inf_{x \in E} [\|f\| \, \|x + y\| - f(x)]. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Наконец, приступим к распространению функционала f с E на E_1. С этой целью возьмем какое-нибудь число c, заключенное между m и M, $m \leqslant c \leqslant M$, и для любого $x' = x + \alpha y \in E_1$ ($x \in E$) определим функционал $\varphi(x')$ по формуле

$$\varphi(x') = f(x) + \alpha c \text{ *)}.$$

Вследствие единственности представления x' в указанном виде функционал $\varphi(x')$ определяется для каждого $x' \in E_1$ однозначно. При этом для $x' \in E$, как мы знаем, $\alpha = 0$ и из представления $x' = x' + 0y$ следует, что $\varphi(x') = f(x')$.

Аддитивность φ проверяется с помощью формулы (16):

$$\varphi(x_1' + x_2') = f(x_1 + x_2) + (\alpha_1 + \alpha_2) c =$$

$$= [f(x_1) + \alpha_1 c] + [f(x_2) + \alpha_2 c] = \varphi(x_1') + \varphi(x_2').$$

*) Если $m < M$, то числу c можно придать бесчисленное множество различных значений и за счет этого получить бесчисленное множество различных распространений функционала f на E_1.

Аналогично проверяется однородность: если $x' = x + \alpha y \in \boldsymbol{E}_1$, то $\lambda x' = \lambda x + (\lambda\alpha) y$ и $\varphi(\lambda x') = f(\lambda x) + (\lambda\alpha) c = \lambda [f(x) + \alpha c] = \lambda\varphi(x')$.

Теперь докажем, что функционал φ линейный. Пусть сначала $x' \in \boldsymbol{E}_1$ таков, что для него $\alpha = 1$, т. е. $x' = x + y$, где $x \in \boldsymbol{E}$. Тогда

$$\varphi(x') = f(x) + c \leqslant f(x) + M.$$

Но по (17), $M \leqslant \|f\| \|x + y\| - f(x)$, а потому

$$\varphi(x') \leqslant \|f\| \|x + y\| = \|f\| \|x'\|. \tag{18}$$

С другой стороны,

$$\varphi(x') = f(x) + c \geqslant f(x) + m,$$

а по (17) $m \geqslant -\|f\| \|x + y\| - f(x)$ и потому

$$\varphi(x') \geqslant -\|f\| \|x + y\| = -\|f\| \|x'\|. \tag{19}$$

Сопоставляя (18) и (19), получаем

$$|\varphi(x')| \leqslant \|f\| \|x'\|. \tag{20}$$

Для $x' = x + \alpha y \in \boldsymbol{E}_1$ с произвольным $\alpha \neq 0$ введем $x_1' = \frac{x'}{\alpha} = \frac{x}{\alpha} + y$. По уже доказанному $|\varphi(x_1')| \leqslant \|f\| \|x_1'\|$, а тогда вследствие однородности φ

$$|\varphi(x')| = |\varphi(\alpha x_1')| = |\alpha| |\varphi(x_1')| \leqslant |\alpha| \|f\| \|x_1'\| = \|f\| \|x'\|,$$

и мы также получаем неравенство (20).

Наконец, если $x' \in \boldsymbol{E}_1$, таков, что $\alpha = 0$, то $x' \in \boldsymbol{E}$ и $\varphi(x') = f(x')$, и неравенство (20) сводится к условию ограниченности функционала f. Следовательно, $\varphi(x')$ удовлетворяет неравенству (20) при всех $x' \in \boldsymbol{E}_1$. Таким образом, функционал φ линейный и $\|\varphi\|_{\boldsymbol{E}_1} = \|f\|_{\boldsymbol{E}}$*).

Осталось показать, как осуществить распространение функционала f с $\boldsymbol{E}$ на всё X. Так как мы предполагаем X сепарабельным, то в нем существует всюду плотное счетное множество A, элементы которого выпишем в виде последовательности $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$ Обозначим через y_1 первый из элементов множества A, который не входит в $\boldsymbol{E}$. Полагая $y = y_1$, строим множество $\boldsymbol{E}_1$. Затем принимаем за y_2 первый из остальных элементов множества A, который не входит в $\boldsymbol{E}_1$, и, исходя из $\boldsymbol{E}_1$, строим множество $\boldsymbol{E}_2$, состоящее из всех элементов вида $x' = x + \alpha y_2$ ($x \in \boldsymbol{E}_1$). Этот процесс продолжаем и далее. Если после конечного числа шагов мы построим такое линейное множество $\boldsymbol{E}_n$, что уже $A \subset \boldsymbol{E}_n$, то процесс остановится. В противном

*) В 8.4 мы видели, что при распространении норма не может уменьшиться.

случае процесс построения множеств E_n будет продолжаться до бесконечности. По уже доказанному мы можем получить распространение заданного функционала f с сохранением нормы с E на E_1, затем продолжить распространение (тоже с сохранением нормы) с E_1 на E_2 и т. д. Если общее число шагов было конечным (равным n), то в результате мы получим распространение функционала f с сохранением нормы на множество E_n. Если же процесс был бесконечным, то мы осуществим распространение функционала f с сохранением нормы на множество, равное $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *), которое, как легко видеть, линейно **). И в том и в другом случае мы осуществим распространение функционала f на линейное множество, содержащее в себе множество A и, следовательно, всюду плотное в X ***). Тогда по теореме 8.4.1 (справедливой для функционалов, поскольку множество вещественных чисел полно) существует распространение функционала f с сохранением нормы и на всё X.

Следствие. *Каков бы ни был элемент $x_0 \neq \theta$ нормированного пространства X, на X существует такой линейный функционал f, что*

а) $\| f \| = 1$; б) $f(x_0) = \| x_0 \|$ ****).

Доказательство. Примем за E множество всех элементов вида λx_0. Это множество — линейное. Зададим на нем функционал $f(\lambda x_0) = \lambda \| x_0 \|$. Ясно, что этот функционал аддитивен, $f(x_0) = \| x_0 \|$, а из равенства $| f(\lambda x_0) | = \| \lambda x_0 \|$ вытекает, что f линеен и $\| f \| = 1$. По теореме Банаха — Гана существует распространение функционала f с сохранением нормы на всё пространство X, а это распространение и будет линейным функционалом на X, удовлетворяющим а) — б).

Итак, в нормированном пространстве для любого элемента $x_0 \neq \theta$ существует такой линейный функционал f, что $f(x_0) \neq 0$. Имея в виду этот факт, принято говорить, что *во всяком нормированном пространстве существует достаточное множество линейных функционалов.*

---

*) Здесь следует иметь в виду, что при каждом следующем шаге в построении распространения мы не меняем значений функционала, уже определенных на предыдущем множестве. Поэтому если распространение все время обозначать через φ, то для каждого $x' \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ получается неравенство (20).

**) Например, если $x_1' \in E_{n_1}$, $x_2' \in E_{n_2}'$, то $x_1' + x_2' \in E_n$ при $n = \max(n_1, n_2)$.

***) Если с самого начала в A не было ни одного элемента, не входящего в E, то это значит, что уже E всюду плотно в X.

****) Ясно, что если $x_0 = \theta$, то в X имеются элементы, отличные от нулевого, то это предложение тоже справедливо, так как $f(\theta) = 0$ для любого линейного функционала f.

9.5. Линейные функционалы в пространстве непрерывных функций

Общую форму линейного функционала в пространстве C непрерывных функций $x(t)$, заданных на отрезке $[a, b]$, можно получить с помощью теоремы 9.4.1 о распространении линейных функционалов. Для распространения мы используем пространство B, состоящее из всех ограниченных вещественных функций $x(t)$, заданных на том же отрезке $[a, b]$. Алгебраические операции в пространстве B мы считаем определенными по тем же правилам, что и в C, а норму вводим по формуле

$$\|x\| = \sup |x(t)|.$$

То, что B действительно является нормированным пространством (и притом полным), проверяется так же, как и для C.

Если $x \in C$, то по теореме Вейерштрасса $\sup |x(t)| = \max |x(t)|$ *), т. е. для $x \in C$ нормы, заданные в C и в B, совпадают. Поэтому пространство C — линейное подмножество пространства B **).

Дадим определение одного важного класса функций.

Определение. Функция $g(t)$, заданная на $[a, b]$, называется функцией *ограниченной вариации*, если существует такая постоянная M, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$ на конечное число отрезков с помощью чисел $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \leqslant M.$$

Величина суммы, стоящей слева, зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$. Но если множество всех таких сумм ограничено, то оно имеет конечную точную верхнюю границу, которая называется *полной вариацией* функции $g(t)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\operatorname{Var}_a^b g(t)$.

Простейшим примером функции ограниченной вариации является любая монотонная функция. Действительно, если, например, $g(t)$ — неубывающая функция на отрезке $[a, b]$, то

---

*) Если среди чисел некоторого множества есть наибольшее, то оно и является точной верхней границей этого множества.

**) Легко видеть, что C — подпространство пространства B.

для любого разбиения этого отрезка

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} [g(t_{i+1}) - g(t_i)] =$$
$$= [g(t_1) - g(a)] + [g(t_2) - g(t_1)] + \cdots +$$
$$+ [g(b) - g(t_{n-1})] = g(b) - g(a).$$

Таким образом, все суммы, входящие в определение функции ограниченной вариации, имеют для неубывающей функции одно и то же значение $g(b) - g(a)$ и тем самым в совокупности ограничены; при этом $\operatorname{Var}_a^b g(t) = g(b) - g(a)$.

Легко проверить, что сумма и разность двух функций ограниченной вариации тоже являются функциями ограниченной вариации. Действительно, если $g(t) = g_1(t) \pm g_2(t)$, где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — функции ограниченной вариации, то для любого разбиения отрезка $[a, b]$

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |[g_1(t_{i+1}) - g_1(t_i)] \pm [g_2(t_{i+1}) - g_2(t_i)]| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} [|g_1(t_{i+1}) - g_1(t_i)| + |g_2(t_{i+1}) - g_2(t_i)|] =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} |g_1(t_{i+1}) - g_1(t_i)| + \sum_{i=0}^{n-1} |g_2(t_{i+1}) - g_2(t_i)| \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Var}_a^b g_1(t) + \operatorname{Var}_a^b g_2(t),$$

т. е. требуемая ограниченность сумм для функции $g(t)$ установлена.

Отсюда как следствие получается, что *разность двух неубывающих функций есть функция ограниченной вариации.*

Несколько сложнее доказывается обратный результат: *всякая функция ограниченной вариации может быть представлена в виде разности двух неубывающих функций.* На доказательстве этого предложения мы не останавливаемся.

Теперь переходим к отысканию общей формы линейного функционала в пространстве C. Пусть $f(x)$ — такой функционал. По теореме 9.4.1 существует его распространение с сохранением нормы на пространство B *). Обозначим это распространение

*) Хотя мы ограничились доказательством теоремы 9.4.1 для сепарабельного пространства, однако пространство B не сепарабельно, и поэтому здесь нам приходится использовать теорему 9.4.1 в полном объеме. В гл. XIV (14.5) будет дан другой вывод общей формы линейного функционала в C, который опирается на теорему Банаха — Гана лишь для сепарабельного пространства.

той же буквой f. Для любого τ из промежутка $a < \tau \leqslant b$ рассмотрим функцию

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0 & \text{при} \quad \tau < t \leqslant b. \end{cases}$$

Так как $x_\tau \in \boldsymbol{B}$, то $f(x_\tau)$ имеет смысл и представляет некоторую функцию от τ, которую мы обозначим $g(\tau)$. Дополнительно определим функцию $g(\tau)$ при $\tau = a$, полагая $g(a) = 0$. Таким образом,

$$g(\tau) = \begin{cases} f(x_\tau) & \text{при} \quad a < \tau \leqslant b, \\ 0 & \text{при} \quad \tau = a. \end{cases}$$

Докажем, что $g(\tau)$ — функция ограниченной вариации. Возьмем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ на конечное число частей с помощью чисел $a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = b$ и составим кусочно-постоянную функцию

$$x(t) = \begin{cases} \beta_0 & \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant \tau_1, \\ \beta_i & \text{при} \quad \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1} \\ (i = 1, 2, \ldots, n-1), \end{cases} \tag{21}$$

где при каждом $i = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\beta_i = \operatorname{sign}[g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i)]\ ^*).$$

Из определения функции $x(t)$ ясно, что в пространстве $\boldsymbol{B}$ норма $\|x\| \leqslant 1$, следовательно, $f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|$. Из определения же введенных выше функций x_τ следует, что если $a < \tau' < \tau''$, то разность $x_{\tau''} - x_{\tau'}$ есть функция, равная единице в промежутке $\tau' < t \leqslant \tau''$ и равная нулю при прочих t из $[a, b]$. Поэтому из (21) вытекает, что

$$x = \beta_0 x_{\tau_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i (x_{\tau_{i+1}} - x_{\tau_i}),$$

а тогда

$$f(x) = \beta_0 f(x_{\tau_1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i [f(x_{\tau_{i+1}}) - f(x_{\tau_i})] =$$

$$= \beta_0 g(\tau_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i [g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i)].$$

Учитывая, что $g(\tau_0) = g(a) = 0$, предыдущее выражение можно

*) См. обозначение, введенное в 9.3.

преобразовать так:

$$f(x)=\beta_0[g(\tau_1)-g(\tau_0)]+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i[g(\tau_{i+1})-g(\tau_i)]=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i[g(\tau_{i+1})-g(\tau_i)]=\sum_{i=0}^{n-1}|g(\tau_{i+1})-g(\tau_i)|.$$

Последнее равенство вытекает из определения чисел β_i. Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{n-1}|g(\tau_{i+1})-g(\tau_i)|=f(x)\leqslant\|f\|.$$

Тем самым благодаря произвольности разбиения отрезка $[a, b]$ доказано, что $g(\tau)$ — функция ограниченной вариации и что $\operatorname{Var}_a^b g(\tau)\leqslant\|f\|$.

Теперь переходим уже непосредственно к получению аналитического выражения для функционала f. Возьмем произвольный $x\in C$ и зададим $\varepsilon>0$. Благодаря свойству равномерной непрерывности функции $x(t)$ существует такое $\delta>0$, что если взять любое разбиение отрезка $[a, b]$ с помощью чисел $a=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n=b$ на конечное число отрезков, длины которых меньше δ, то

$$|x(t')-x(t'')|<\varepsilon$$

для любых двух точек t', t'', принадлежащих одному и тому же отрезку $[\tau_i, \tau_{i+1}]$.

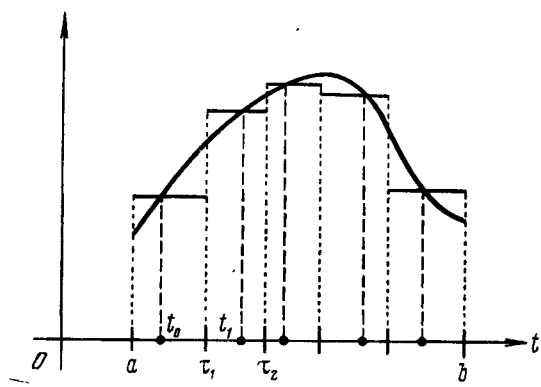

Рис. 15.

На каждом из отрезков $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ берем произвольную точку t_i $(\tau_i\leqslant t_i\leqslant\tau_{i+1})$ и составляем кусочно-постоянную функцию $y\in B$ (рис. 15), полагая

$$y(t)=\begin{cases} x(t_0) & \text{при } a\leqslant t\leqslant\tau_1,\\ x(t_i) & \text{при } \tau_i\leqslant t\leqslant\tau_{i+1} \quad (i=1, 2, \ldots, n-1).\end{cases}$$

Так как, каково бы ни было $t\in[a, b]$, $y(t)=x(t_i)$ при некотором i, причем t и t_i входят в один и тот же из отрезков $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, то из условия, которому мы подчинили разбиение отрезка $[a, b]$,

вытекает, что

$$|x(t)-y(t)|=|x(t)-x(t_i)|<\varepsilon.$$

Следовательно, $\|x-y\|\leqslant\varepsilon$ *) и

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\|f\|\varepsilon. \tag{22}$$

Но

$$y=x(t_0)\,x_{\tau_1}+\sum_{i=1}^{n-1}x(t_i)\,(x_{\tau_{i+1}}-x_{\tau_i}),$$

а потому

$$f(y)=x(t_0)\,f(x_{\tau_1})+\sum_{i=1}^{n-1}x(t_i)\,[f(x_{\tau_{i+1}}-f(x_{\tau_i})]=$$

$$=x(t_0)\,g(\tau_1)+\sum_{i=1}^{n-1}x(t_i)\,[g(\tau_{i+1})-g(\tau_i)]=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}x(t_i)\,[g(\tau_{i+1})-g(\tau_i)]$$

[напоминаем, что $g(\tau_0)=g(a)=0$]. Таким образом, из неравенства (22) вследствие произвольности ε вытекает, что

$$f(x)=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}x(t_i)\,[g(\tau_{i+1})-g(\tau_i)]. \tag{23}$$

Сумма, стоящая в правой части, называется *интегральной*. Предел нужно понимать в том смысле, что разность между $f(x)$ и интегральной суммой оказывается по абсолютной величине меньше произвольно малого заданного числа, если только сумма составлена для разбиения отрезка $[a, b]$ на отрезки с длинами, меньшими надлежащим образом подобранного $\delta>0$, причем промежуточные точки t_i на соответствующих участках взяты совершенно произвольно. Указанный предел называют *интегралом Стилтьеса* от функции $x(t)$ по функции $g(t)$ и обозначают

$$\int_a^b x(t)\,dg(t)\ **). \tag{24}$$

Таким образом, формулу (23) можно переписать так:

$$f(x)=\int_a^b x(t)\,dg(t). \tag{25}$$

Итак, для каждого линейного функционала f в пространстве C

*) Легко проверить, что $\|x-y\|<\varepsilon$.

**) Т. И. Стилтьес (1856—1894) — голландский математик.

можно подобрать функцию ограниченной вариации $g(t)$ так, что функционал f представим по формуле (25) в виде интеграла Стилтьеса.

Перейдем теперь к установлению обратного результата: какова бы ни была функция ограниченной вариации $g(t)$, интеграл Стилтьеса (24) существует для любой функции $x \in C$ и представляет линейный функционал в C. Основная трудность заключается в доказательстве существования интеграла, т. е. в доказательстве существования предела интегральной суммы в том смысле, как это определено в связи с формулой (23). При этом, если воспользоваться представлением функции ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих функций, то и интегральная сумма разобьется на две и, таким образом, достаточно доказать существование интеграла Стилтьеса от непрерывной функции по неубывающей функции. Это может быть сделано почти дословно так же, как в курсе математического анализа доказывается существование определенного интеграла от непрерывной функции. Однако, поскольку доказательство существования определенного интеграла проводится лишь в более подробных курсах математического анализа *), мы даем ниже полное доказательство существования интеграла Стилтьеса $\int_a^b x(t)\,dg(t)$, считая сразу $g(t)$ произвольной функцией ограниченной вариации.

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, что

$$|x(t') - x(t'')| < \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{Var}_a^b g(t)} \quad \text{при} \quad |t' - t''| < \delta **). \tag{26}$$

Теперь возьмем любые два разбиения отрезка $[a, b]$ на части с длинами, меньшими δ, и по ним с помощью произвольных точек составим интегральные суммы s' и s''. Докажем, что $|s' - s''| < \varepsilon$. Пусть первое разбиение получено с помощью чисел $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ и

$$s' = \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\,[g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i)],$$

где $\tau_i \leqslant t_i \leqslant \tau_{i+1}$. Если все точки, посредством которых получено второе

*) См., например, Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, т. I, стр. 323—327.

**) Если $\operatorname{Var}_a^b g(t) = 0$, то $g(t)$ есть постоянная, а тогда интеграл $\int_a^b x(t)\,dg(t)$ существует и равен нулю для любой $x \in C$.

разбиение, перемешать с точками деления первого разбиения, то получится третье, «более мелкое», дробление отрезка $[a, b]$. Для точек деления этого разбиения введем следующие обозначения:

$$a = \tau_0 = \tau_0^{(0)} < \tau_0^{(1)} < \ldots < \tau_0^{(m_0)} = \tau_1 = \tau_1^{(0)} < \tau_1^{(1)} < \ldots <$$
$$< \tau_1^{(m_1)} = \tau_2 = \tau_2^{(0)} < \ldots < \tau_{n-2}^{(m_{n-2})} = \tau_{n-1} =$$
$$= \tau_{n-1}^{(0)} < \tau_{n-1}^{(1)} < \ldots < \tau_{n-1}^{(m_{n-1})} = \tau_n = b.$$

Выбирая на каждом из участков $[\tau_i^{(j)}, \tau_i^{(j+1)}]$ произвольную точку $t_i^{(j)}$, составим новую интегральную сумму

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_i-1} x(t_i^{(j)}) [g(\tau_i^{(j+1)}) - g(\tau_i^{(j)})].$$

Оценим разность $s - s'$. Так как уже при первом разбиении длины всех участков были меньше δ, то при любых i и j

$$|x(t_i^{(j)}) - x(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2 \operatorname*{Var}_a^b g(t)}.$$

С помощью этого неравенства имеем

$$|s - s'| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_i-1} x(t_i^{(j)}) [g(\tau_i^{(j+1)}) - g(\tau_i^{(j)})] - \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i) [g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i)] \right| =$$
$$= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{m_i-1} x(t_i^{(j)}) [g(\tau_i^{(j+1)}) - g(\tau_i^{(j)})] - x(t_i) [g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i)] \right\} \right| =$$
$$= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{m_i-1} x(t_i^{(j)}) [g(\tau_i^{(j+1)}) - g(\tau_i^{(j)})] - x(t_i) \sum_{j=0}^{m_i-1} [g(\tau_i^{(j+1)} - g(\tau_i^{(j)})] \right\} \right| =$$
$$= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_i-1} [x(t_i^{(j)}) - x(t_i)] [g(\tau_i^{(j+1)}) - g(\tau_i^{(j)})] \right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2 \operatorname*{Var}_a^b g(t)} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_i-1} |g(\tau_i^{(j+1)}) - g(\tau_i^{(j)})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \operatorname*{Var}_a^b g(t)} \operatorname*{Var}_a^b g(t) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как разбиение, для которого составлена сумма s, получено перемешиванием точек деления первых двух разбиений, то оно является «более

мелким» и по отношению ко второму из них, для которого составлена сумма s'', а потому совершенно аналогично $|s - s''| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда

$$|s' - s''| \leqslant |s' - s| + |s - s''| < \varepsilon.$$

Зададим убывающую последовательность чисел $\varepsilon_n \to 0$. Для каждого ε_n подбираем соответствующее ему δ, обозначая его δ_n, так, чтобы при $\varepsilon = \varepsilon_n$ и $\delta = \delta_n$ было выполнено (26). При этом, так как δ, найденное по заданному ε, всегда можно уменьшить, не нарушая требуемого от него свойства, мы можем предполагать, что δ_n образуют тоже монотонную последовательность, $\delta_{n+1} \leqslant \delta_n$. При каждом n берем какое-нибудь разбиение отрезка $[a, b]$ на части с длинами, меньшими δ_n, и с его помощью составляем какую-нибудь интегральную сумму, которую обозначим s_n. Покажем, что последовательность $\{s_n\}$ — фундаментальная. Если $m > n$, то длины всех отрезков m-го и n-го разбиений (для которых составлены суммы s_m и s_n соответственно) меньше δ_n, а потому, по доказанному выше, $|s_m - s_n| < \varepsilon_n$. Вследствие полноты множества вещественных чисел отсюда следует, что существует конечный $\lim s_n$.

Обозначим его через I и покажем, что

$$I = \lim_{\delta \to 0} s, \tag{27}$$

где s обозначает произвольную интегральную сумму, а предел понимается в том смысле, как указано выше.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем N так, что $|s_n - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant N$. Затем найдем некоторое $n_0 \geqslant N$ так, что $\varepsilon_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем любую интегральную сумму s, составленную для разбиения на отрезки с длинами меньшими δ_{n_0}. Так как и сумма s_{n_0} составлена для некоторого разбиения, удовлетворяющего тому же условию, то, по доказанному, $|s - s_{n_0}| < \varepsilon_{n_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда

$$|s - I| \leqslant |s - s_{n_0}| + |s_{n_0} - I| < \varepsilon.$$

Тем самым (27) доказано, т. е. доказано существование интеграла (24).

Ясно, что, как и все известные читателю интегралы, интеграл Стилтьеса от суммы двух функций вычисляется почленно, т. е.

$$\int_a^b [x_1(t) + x_2(t)]\, dg(t) = \int_a^b x_1(t)\, dg(t) + \int_a^b x_2(t)\, dg(t),$$

если оба интеграла в правой части существуют. Поэтому если фиксировать функцию ограниченной вариации $g(t)$ и рассматривать интеграл (24) при $x \in C$ как функционал, заданный на C, то этот функционал аддитивен. Проверим его ограниченность.

Для любой интегральной суммы имеем очевидную оценку:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\,[g(\tau_{i+1})-g(\tau_i)]\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |x(t_i)|\,|g(\tau_{i+1})-g(\tau_i)| \leqslant$$

$$\leqslant (\max|x(t)|)\sum_{i=0}^{n-1}|g(\tau_{i+1})-g(\tau_i)| \leqslant (\operatorname*{Var}_a^b g(t))\,\|x\|.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве (при $\delta \to 0$), получим ту же оценку и для интеграла:

$$\left|\int_a^b x(t)\,dg(t)\right| \leqslant (\operatorname*{Var}_a^b g(t))\,\|x\|. \tag{28}$$

Таким образом, интеграл (24) представляет линейный функционал в пространстве C и его норма не превосходит $\operatorname*{Var}_a^b g(t)$.

Заметим, не входя в подробности, что по заданному в C линейному функционалу f функция ограниченной вариации $g(t)$, с помощью которой функционал f представляется по формуле (25), определяется не единственным образом. Поэтому в общем случае, согласно (28), можно лишь утверждать, что $\|f\| \leqslant \operatorname*{Var}_a^b g(t)$. Однако для функции $g(t)$, построенной в начале этого параграфа, мы имели и обратное неравенство и, следовательно, для этой функции $\|f\| = \operatorname*{Var}_a^b g(t)$. Таким образом, мы доказали теорему, впервые установленную в 1909 г. Ф. Риссом.

Теорема 9.5.1. *Общая форма линейного функционала $f(x)$ в пространстве C дается формулой* (25) *в виде интеграла Стилтьеса, где $g(t)$ — функция ограниченной вариации, а $\|f\| \leqslant \operatorname*{Var}_a^b g(t)$. При этом функция $g(t)$ может быть подобрана и так, что $\|f\| = \operatorname*{Var}_a^b g(t)$.*

В заключение настоящего параграфа укажем один случай, когда интеграл Стилтьеса (24) сводится к определенному интегралу (Римана), изучаемому в курсе математического анализа. Именно, пусть $g(t)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную. Положим $M = \max|g'(t)|$. Для любого разбиения отрезка $[a, b]$ посредством чисел $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ имеем по теореме Лагранжа при всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$

$$g(\tau_{i+1})-g(\tau_i) = g'(t_i)\,(\tau_{i+1}-\tau_i),$$

где $\tau_i \leqslant t_i \leqslant \tau_{i+1}$. Отсюда

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |g'(t_i)| (\tau_{i+1} - \tau_i) \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{i=0}^{n-1} (\tau_{i+1} - \tau_i) = M(b-a),$$

следовательно, $g(t)$ — функция ограниченной вариации *).

Используя именно те точки t_i, которые получились по формуле Лагранжа, составим интегральную сумму s; получим

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i) [g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i) g'(t_i) (\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Сумма, стоящая справа, стремится при неограниченном дроблении отрезка $[a, b]$ (т. е. при $\delta \to 0$) к $\int_a^b x(t) g'(t)\, dt$. С другой стороны, интегральная сумма s стремится при том же условии к интегралу (24) (здесь существенно, что интеграл есть предел интегральной суммы, не зависящий от выбора точек t_i). Поэтому

$$\int_a^b x(t)\, dg(t) = \int_a^b x(t) g'(t)\, dt.$$

9.6. Гиперплоскости

В этом параграфе мы укажем некоторый геометрический подход к изучению линейных функционалов.

Определение. Пусть X — нормированное пространство, f — аддитивный и однородный функционал, отличный от нулевого ($f \neq \Theta$), заданный на X, c — любая постоянная. Множество P всех элементов $x \in X$, где $f(x) = c$, называется *гиперплоскостью в* X. Иначе можно сказать, что P — множество, определяемое уравнением $f(x) = c$ **).

Из аддитивности и однородности функционала f сразу следует, что гиперплоскость P_0, определяемая уравнением $f(x) = 0$, — линейное множество. Всякая другая гиперплоскость P с уравнением $f(x) = c$ ($c \neq 0$) получается из P_0 переносом на какой-нибудь из векторов $y \in P$ (последнее включение означает, что

*) Заметим, что при доказательстве этого факта нам недостаточно было опираться только на непрерывность самой $g(t)$ и не всякая непрерывная функция будет функцией ограниченной вариации.

**) В этом определении X может быть любой линейной системой.

$f(y) = c$), т. е. P совпадает с совокупностью всех элементов вида $x = z + y$, где $z \in P_0$.

Действительно, если $x \in P$, то $f(x) = c$. Положим $z = x - y$. Тогда $f(z) = f(x) - f(y) = 0$, т. е. $z \in P_0$. Следовательно, каждый $x \in P$ представим в виде $x = z + y$, где $z \in P_0$. Обратно, всякий элемент $x \in X$, имеющий вид $x = z + y$, где $z \in P_0$, принадлежит P, так как $f(x) = f(z) + f(y) = c$.

Лемма 9.6.1. *Если хоть одна из гиперплоскостей $f(x) = c$ (при некотором c) — замкнутое множество в X, то и все эти гиперплоскости* (при любом c) *замкнуты.*

Доказательство. Рассмотрим две гиперплоскости $P : f(x) = c$ и $P' : f(x) = c'$ и допустим, что P замкнута. Фиксируем некоторые элементы $y \in P$ и $y' \in P'$. Из предыдущего замечания сразу следует, что гиперплоскость P_0 получается из P переносом на вектор $-y$, а тогда P' получается из P переносом на вектор $y' - y$.

Пусть $x'_n \in P'$ ($n = 1, 2, \ldots$) и $x'_n \to x'$. Тогда существуют такие $x_n \in P$, что $x'_n = x_n + y' - y$. При этом

$$x_n = x'_n - y' + y \to x' - y' + y.$$

Но так как гиперплоскость P замкнута, то $x = x' - y' + y \in P$, следовательно, $x' = x + y' - y \in P'$. Тем самым, замкнутость P' доказана.

Теорема 9.6.1. *Для того чтобы аддитивный и однородный функционал f, отличный от нулевого, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы гиперплоскости $f(x) = c$ были замкнутыми.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть функционал f, заданный на X, линеен, а P — гиперплоскость $f(x) = c$. Если $x_n \in P$ и $x_n \to x$, то $f(x_n) = c$ при всех n, а потому по непрерывности функционала f и $f(x) = c$, т. е. $x \in P$. Таким образом, гиперплоскость P замкнута.

б) Достаточность. Пусть гиперплоскости $f(x) = c$ замкнуты. Допустим, что функционал f не линеен, а тогда он не может быть непрерывным ни в одной точке, в частности в нулевой. Следовательно, существует такая последовательность $x_n \to \theta$, что $f(x_n) \not\to 0$. Из последнего соотношения вытекает, что при некотором $\varepsilon > 0$ неравенство $|f(x_n)| \geqslant \varepsilon$ выполнено для бесконечного множества значений индекса n. Переходя в случае необходимости к частичной последовательности, можно считать, что это неравенство выполнено при всех n.

Положим $x'_n = \dfrac{x_n}{f(x_n)}$. Тогда

$$\|x'_n\| = \frac{\|x_n\|}{|f(x_n)|} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|x_n\| \to 0.$$

т. е. $x'_n \to \theta$. С другой стороны, $f(x'_n) = 1$ при всех n, т. е. все

x_n' принадлежат гиперплоскости P с уравнением $f(x) = 1$. Но тогда вследствие замкнутости этой гиперплоскости $\theta \in P$, что невозможно, так как $f(\theta) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

В следующей теореме вскрывается некоторый геометрический смысл нормы линейного функционала.

Т е о р е м а 9.6.2. *Пусть f — линейный функционал, заданный в нормированном пространстве X и отличный от нулевого, а P — гиперплоскость $f(x) = 1$. Тогда*

$$\| f \| = \frac{1}{d}, \qquad (29)$$

где $d = \inf\limits_{x \ni P} \| x \|$ *).

Для любого $x \in X$ норма $\| x \|$ есть его расстояние от нулевого элемента θ. Тогда d можно рассматривать как «кратчайшее» расстояние от θ до гиперплоскости P **).

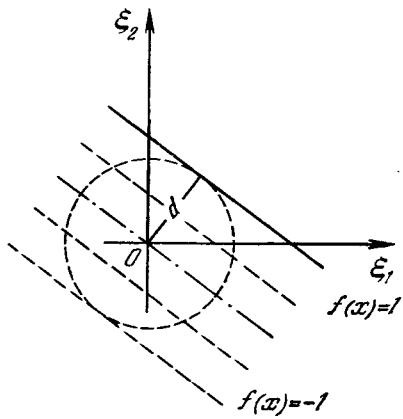

Рис. 16.

Проиллюстрируем сказанное на примере пространства R_2. Всякий линейный функционал в R_2 имеет вид

$$f(x) = c_1\xi_1 + c_2\xi_2.$$

Гиперплоскость P превращается в прямую $c_1\xi_1 + c_2\xi_2 = 1$, d — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую, $\| f \|$ — точная верхняя граница значений функционала f на единичном круге (в пространстве R_2 она достигается, и потому можно сказать «наибольшее значение»). Тогда 1 есть точная верхняя граница значений функционала f ва круге радиуса $\frac{1}{\| f \|}$. Из рис. 16 легко усмотреть, что радиус этого круга как раз и должен быть равен d.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства $|f(x)| \leqslant \| f \| \| x \|$ следует, что если $x \in P$, то $\| f \| \| x \| \geqslant 1$, т. е. $\| x \| \geqslant \frac{1}{\| f \|}$. Переходя в левой части к точной нижней границе, мы получим, что $d \geqslant \frac{1}{\| f \|}$ (тем самым, $d \neq 0$) или $\| f \| \geqslant \frac{1}{d}$.

---

*) Из формулы (29), в частности, видно, что $d \neq 0$. Предлагаем читателю вывести этот факт непосредственно из замкнутости гиперплоскости P.

**) Однако в отличие от эвклидова пространства в общем случае это кратчайшее расстояние может не достигаться, т. е. может не существовать точка $x \in P$, для которой $\| x \| = d$.

Пусть, теперь S^* обозначает замкнутый единичный шар в пространстве X. Покажем, что

$$f(x) \leqslant \frac{1}{d} \tag{30}$$

для любого $x \in S^*$. Допустим, что $f(x) > \frac{1}{d}$ для некоторого $x \in S^*$. Положим $x' = \frac{x}{f(x)}$. Тогда

$$\| x' \| = \frac{\| x \|}{f(x)} \leqslant \frac{1}{f(x)} < d.$$

С другой стороны, $f(x') = 1$ и потому $x' \in P$, а тогда $\| x' \| \geqslant d$. Полученное противоречие доказывает неравенство (30). Но тогда по формуле (2) $\| f \| \leqslant \frac{1}{d}$. Сопоставляя два противоположных неравенства для нормы $\| f \|$, приходим к равенству (29).

9.7. Сопряженное пространство

Множество всех линейных функционалов, заданных в нормированном пространстве X, можно рассматривать как частный случай того пространства $\mathscr{L}$ линейных операторов, отображающих X в некоторое заданное пространство Y, которое мы изучали в 8.6. Тем самым будем считать, что алгебраические операции в множестве линейных функционалов определены по тому правилу, как указано для $\mathscr{L}$. По доказанному в 8.6, множество всех линейных функционалов, заданных в пространстве X, само представляет нормированное пространство. Это пространство называется *сопряженным* к пространству X и обозначается X'*).

Теорема 9.7.1. *Каково бы ни было нормированное пространство X, сопряженное пространство X' полно.*

Действительно, в теореме 8.6.1 была доказана полнота пространства $\mathscr{L}$ в случае, если пространство Y полно, а для X' роль Y играет множество вещественных чисел, которое, как мы знаем, полно.

Нахождение общей формы линейных функционалов в конкретных пространствах позволяет получить конкретную реализацию их сопряженных пространств. Приведем некоторые примеры.

Из общей формы линейного функционала в R_n

$$f(x) = (x, c),$$

где $c \in R_n$ и $\| f \| = \| c \|$, причем элемент c по заданному функционалу f определяется однозначно, следует, что между линей-

*) В литературе часто встречаются и такие обозначения сопряженного пространства: X^* или $\overline{X}$.

ными функционалами f в R_n и элементами $c \in R_n$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие, представляющее алгебраический изоморфизм и сохраняющее норму. В связи с этим говорят, что пространство K_n реализуется в виде самого R_n.

Аналогичный результат имеет место для пространства l^2, а следовательно, и для произвольного бесконечно-мерного сепарабельного, гильбертова пространства H. Здесь мы также нашли общую форму линейных функционалов в виде скалярного произведения и между сопряженным пространством H' и самим H устанавливается алгебраический изоморфизм с сохранением нормы.

Впрочем, изоморфизм гильбертова пространства H с сопряженным пространством H' может быть установлен и без предположения о сепарабельности H.

Из общей формы линейного функционала в пространстве l следует, что сопряженное пространство l' реализуется в виде пространства m ограниченных последовательностей.

Наконец, из общей формы линейных функционалов в L^p вытекает, что при $p > 1$ сопряженное пространство к L^p реализуется в виде L^q, где q связано с p формулой (7). Аналогично сопряженное к пространству l^p реализуется при $p > 1$ в виде l^q. Пространство, сопряженное к L, реализуется в виде пространства измеримых, почти всюду ограниченных функций, в котором норма функции y определяется по формуле

$$\| y \| = \operatorname{vrai\,sup} | y(t) |.$$

Последнее пространство обычно обозначается через M. Естественно, что эквивалентные между собой функции в M отождествляются.

Заметим, что доказанная в 9.5 теорема Рисса об общей форме линейного функционала в пространстве C еще не дает конкретной реализации сопряженного пространства C' с помощью функций ограниченной вариации, так как функция $g(t)$ в формуле (25) определяется по заданному функционалу не единственным образом. Чтобы получить реализацию пространства C' посредством функций ограниченной вариации, нужно сначала указать некоторое правило, по которому для каждого функционала будет определяться единственная функция $g(t)$, но на этом мы не останавливаемся.

9.8. Второе сопряженное пространство

Беря произвольное нормированное пространство X и его сопряженное пространство X', мы можем рассмотреть в свою очередь линейные функционалы, заданные на X'. Эти линейные функционалы в совокупности образуют пространство, сопря-

женное к X'. Его обозначают X'', и оно называется *вторым сопряженным пространством* к пространству X. По теореме 9.7.1, как всякое сопряженное пространство, X'' банахово.

Среди линейных функционалов, заданных на X', выделяются некоторые функционалы специального вида. Именно, будем в выражении $f(x)$ считать x фиксированным элементом из X, а f пробегающим все пространство X'. Тогда выражение $f(x)$ будет представлять функционал, заданный в пространстве X'. Обозначим этот функционал через F_x, т. е. мы полагаем

$$F_x(f) = f(x). \tag{31}$$

Теорема 9.8.1. *При каждом фиксированном $x \in X$ формула* (31) *определяет линейный функционал F_x на X' и при этом*

$$\|F_x\| = \|x\|. \tag{32}$$

Доказательство. Аддитивность F_x вытекает из равенств

$$F_x(f_1+f_2) = (f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = F_x(f_1)+F_x(f_2).$$

Ограниченность F_x следует из оценки

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\|.$$

Таким образом, F_x — линейный функционал и $\|F_x\| \leqslant \|x\|$. Чтобы доказать, что здесь имеет место точное равенство, воспользуемся следствием из теоремы Банаха — Гана. Согласно этому следствию по заданному $x \neq \theta$ $(x \in X)$ найдется $f \in X'$ с $\|f\| = 1$, для которого

$$F_x(f) = f(x) = \|x\| = \|f\|\,\|x\|.$$

Таким образом, строгое неравенство $\|F_x\| < \|x\|$ невозможно и $\|F_x\| = \|x\|$. Если же $x = \theta$, то $F_x(f) = 0$ для всех $f \in X'$, т. е. $F_x = \Theta$, и опять $\|F_x\| = \|x\|$ $(= 0)$. Теорема доказана.

Рассмотрение функционалов вида (31) приводит к следующему новому понятию. Если множество всех линейных функционалов, заданных на X', исчерпывается функционалами F_x вида (31), пространство X называется *рефлексивным*. В этом случае самой формулой (31) устанавливается алгебраический изоморфизм с сохранением нормы между множеством X'' всех линейных функционалов, заданных на X', и пространством X.

Примерами рефлексивных пространств могут служить пространства L^p при $p > 1$. Действительно, общий вид линейных функционалов в пространстве L^p, даваемый формулой (6) (где $y \in L^q$), позволяет, как было отмечено в предыдущем параграфе, реализовать пространство, сопряженное к L^p, в виде L^q. При этом q связано с p равенством (7). Иными словами, линейные

функционалы f, заданные на L^p, можно отождествлять с функциями $y \in L^1$ (из формулы (6)), а второе сопряженное к L^p можно тем самым рассматривать как пространство линейных функционалов на L^q. Так как p и q входят в условие (7) симметрично, общий вид линейных функционалов $F \in (L')'$, будет даваться формулой

$$F(f) = F(y) = \int_a^b y(t)\, x(t)\, dt = f(x),$$

где $x \in L^p$. Следовательно, пространство $(L')'$ исчерпывается функционалами F_x вида (31), т. е. *пространство L^p рефлексивно.*

Аналогичным способом проверяется *рефлексивность пространств l^p при $p > 1$.*

Нетрудно доказать рефлексивность произвольного гильбертова пространства, в том числе и не сепарабельного.

С другой стороны, пространства L и l не рефлексивны. Так, например, пространство, сопряженное к l, реализуется в виде пространства m, а линейные функционалы в m не исчерпываются рядами (4). Пространство C тоже не рефлексивно.

Используем второе сопряженное пространство для вывода одного важного признака ограниченности множества элементов в произвольном нормированном пространстве.

Теорема 9.8.2. *Пусть X — произвольное нормированное пространство. Для того чтобы множество $E \in X$ было ограниченным* (по норме), *необходимо и достаточно, чтобы каждый линейный функционал f, заданный на X, был ограничен на множестве E, т. е. чтобы совокупность значений $f(x)$ при $x \in E$ была ограничена для каждого $f \in X'$.*

Доказательство. а) Необходимость почти очевидна. Действительно, если множество E ограничено по норме, $\|x\| \leqslant A$ для всех $x \in E$, то для любого $f \in X'$

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \|x\| \leqslant A \|f\|,$$

когда $x \in E$.

б) Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы, но при этом предположим, что множество E не ограничено. Тогда из E можно выделить последовательность элементов $\{x_n\}$ так, что $\|x_n\| \to +\infty$. Рассмотрим теперь функционалы $F_{x_n} \in X''$. Для каждого $f \in X'$ имеем

$$F_{x_n}(f) = f(x_n),$$

и по условию последовательность $\{f(x_n)\}$ ограничена. Таким образом, последовательность функционалов F_{x_n} точечно ограничена. Так как сопряженное пространство X' полно, то к функ-

ционалам F_{x_n} применима теорема Банаха — Штейнгауза (теорема 8.5.1). Следовательно, нормы $\| F_{x_n} \|$ должны быть в совокупности ограничены. Однако по формуле (32) $\| F_{x_n} \| = \| x_n \|$, и мы приходим к противоречию с нашим построением. Тем самым ограниченность множества доказана.

9.9. Слабая сходимость функционалов

Рассматривавшаяся в 8.5 точечная сходимость последовательности линейных операторов имеет специальное название слабой сходимости в том случае, когда речь идет о функционалах. Именно, введем следующее определение:

Определение. Последовательность линейных функционалов $\{f_n\}$, заданных в нормированном пространстве X, называется *слабо сходящейся* к линейному функционалу f (заданному в том же X), если $f_n(x) \to f(x)$ для любого $x \in X$.

Для обозначения слабой сходимости будем употреблять следующую запись:

$$f_n \overset{\text{сл.}}{\longrightarrow} f.$$

Общие теоремы о точечной сходимости, доказанные в 8.5, дают применительно к функционалам следующие результаты.

1. *В банаховом пространстве X всякая слабо сходящаяся последовательность линейных функционалов ограничена*, т. е. ограничены в совокупности нормы этих функционалов (теорема 8.5.1).

2. *Если X — произвольное нормированное пространство и если ограниченная* (по норме) *последовательность линейных функционалов точечно сходится на некотором множестве, всюду плотном в пространстве X, то эта последовательность слабо сходится к некоторому линейному функционалу* (теорема 8.5.2).

Объединяя эти результаты, мы получим следующий критерий слабой сходимости функционалов в банаховых пространствах:

Теорема 9.9.1. *Пусть X — банахово пространство, а f_n ($n = 1, 2, \ldots$) и f — линейные функционалы в X. Для того чтобы $f_n \overset{\text{сл.}}{\longrightarrow} f$, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *нормы $\| f_n \|$ были ограничены в совокупности;*

2) *$f_n(x) \to f(x)$ для всех x из некоторого множества A, всюду плотного в X.*

Действительно, необходимость условия 1) вытекает из теоремы 8.5.1, необходимость условия 2) тривиальна. Обратно, из условий 1) — 2) по теорема 8.5.2 вытекает, что последовательность $\{f_n\}$ слабо сходится к некоторому линейному функциона-

лу φ и $\varphi(x) = f(x)$ для $x \in A$. Тогда по замечанию к теореме 8.4.1 $\varphi(x) = f(x)$ для всех $x \in X$, т. е. $\varphi = f$ и $f_n \xrightarrow{\text{сл.}} f$.

Мы уже знаем из 8.6, что равномерная сходимость последовательности линейных функционалов (т. е. сходимость по норме) влечет слабую сходимость. Покажем на примере, что обратное неверно.

Рассмотрим в пространстве l функционалы $f_n(x) = \xi_n$, где ξ_n — n-я координата элемента x. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$ вытекает, что $\xi_n \to 0$, т. е. $f_n(x) \to 0$ для любого $x \in l$. Таким образом, $f_n \xrightarrow{\text{сл.}} \Theta$ *). Однако если представить функционал f_n по общей формуле (4), доказанной для l (9.2), то нужно взять $c_n = 1$ и $c_k = 0$ при $k \neq n$. Следовательно, $\|f_n\| = 1$ и f_n не стремится к Θ по норме.

Теперь укажем один случай, когда слабая сходимость совпадает с равномерной.

Теорема 9.9.2. *Для линейных функционалов в эвклидовом пространстве R_m слабая сходимость совпадает с равномерной.*

Доказательство. Нужно доказать лишь, что в R_m из слабой сходимости вытекает равномерная. Пусть $f_n \xrightarrow{\text{сл.}} f$, причем

$$f_n(x) = (x, c_n) = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(n)} \xi_k,$$

$$f(x) = (x, c) = \sum_{k=1}^{m} c_k \xi_k$$

[здесь $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, $c_n = (c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, \ldots, c_m^{(n)})$, $c = (c_1, \ldots, c_m)$].

Беря x равным любому из координатных ортов e_k, находим

$$c_k^{(n)} = f_n(e_k) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(e_k) = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Но в R_m сходимость по координатам равносильна сходимости по норме, следовательно, $c_n \to c$, а так как $(f_n - f)(x) = (x, c_n - c)$, то $\|f_n - f\| = \|c_n - c\|$ и $f_n \to f$ по норме.

Понятие слабой сходимости приводит еще к одному виду понятия компактности.

Определение. Множество E из пространства X' называется *слабо компактным*, если из всякой бесконечной последовательности функционалов $f_n \in E$ можно выделить частичную $\{f_{n_k}\}$, слабо сходящуюся к некоторому функционалу $f \in X'$.

---

*) В соответствии с обозначениями из 8.6 здесь Θ — нулевой элемент пространства l', т. е. функционал, тождественно равный нулю.

Т е о р е м а 9.9.3. *Если пространство X сепарабельно, то всякое ограниченное подмножество E пространства X' слабо компактно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вследствие сепарабельности X в нем существует счетное всюду плотное множество $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$. Так как E ограничено, то существует такая постоянная M, что $\| f \| \leqslant M$ для всех $f \in E$.

Каждому $f \in E$ сопоставим элемент y пространства s, представляемый следующей числовой последовательностью:

$$y = \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_i), \ldots\}.$$

Множество E_1 всех получаемых таким образом элементов y обладает тем свойством, что при каждом i совокупность $E_1^{(i)}$ i-х координат элементов $y \in E_1$ ограничена:

$$| f(x_i) | \leqslant \| f \| \, \| x_i \| \leqslant M \| x_i \|.$$

Поэтому, согласно критерию компактности множества в пространстве s (3.8), E_1 компактно. Следовательно, если взять любую последовательность функционалов $f_n \in E$, то из нее можно выделить частичную $\{f_{n_k}\}$ так, что соответствующие им элементы y_{n_k} образуют последовательность, сходящуюся по расстоянию в s, т. е. так, что при всех i существует конечный $\lim f_{n_k}(x_i)$. Тогда по теореме 8.5.2 последовательность $\{f_{n_k}\}$ слабо сходится к некоторому линейному функционалу. Тем самым слабая компактность множества E доказана.

9.10. Сходимость процесса механических квадратур

В качестве приложения критерия слабой сходимости 9.9.1 рассмотрим вопрос о приближенном вычислении определенных интегралов. Различные известные читателю способы приближенного вычисления определенных интегралов — способы прямоугольников, трапеций, параболический — и многие другие заключаются в том, что интеграл приближенно заменяется суммой произведений значений интегрируемой функции в некоторых точках на некоторые коэффициенты, причем точки и коэффициенты определяются по-разному в различных способах, но не зависят от функции.

Например, если $\int_a^b x(t)\,dt$ вычисляется по способу трапеций, то отрезок $[a, b]$ делится на n равных частей точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и вычисление производится по приближенной формуле

$$\int_a^b x(t)\,dt \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}x(t_0) + x(t_1) + \ldots + x(t_{n-1}) + \frac{1}{2}x(t_n)\right]$$

или

$$\int_a^b x(t)\,dt \approx \frac{b-a}{2n} x(t_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b-a}{n} x(t_k) + \frac{b-a}{2n} x(t_n).$$

Формулы трапеций и другие упомянутые выше формулы приближенного вычисления определенных интегралов или, как их называют иначе, *формулы механических квадратур* выводятся часто из геометрических соображений. Однако к составлению таких формул можно подойти и с другой точки зрения. Пусть для каждого натурального n заданы $n+1$ точек

$$a \leqslant t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \leqslant b,$$

называемых *узлами*, и числа $A_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Составим приближенные формулы

$$\int_a^b x(t)\,dt \approx \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{33}$$

Для того чтобы эти формулы представляли практический интерес, нужно иметь какие-нибудь сведения об их точности. Например, естественно требовать, чтобы точность улучшалась по мере увеличения n. Если для некоторой функции $x(t)$ погрешность формулы (33) стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е.

$$\int_a^b x(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}),$$

то говорят, что для этой функции *процесс механических квадратур*, определяемый формулами (33), *сходится*. Мы выясним некоторые условия, при которых формулы (33) определяют процесс, сходящийся для любой непрерывной функции.

Предварительно переведем поставленную задачу на язык функционального анализа. Ограничиваемся рассмотрением на отрезке $[a, b]$ непрерывных функций. Интеграл $\int_a^b x(t)\,dt$ представляет линейный функционал в пространстве C; обозначим его $f(x)$. Сумма $\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)})$ также является функционалом в пространстве C, который обозначим $f_n(x)$. Проверим, что и

функционал f_n — линейный. Действительно, если $x = x_1 + x_2$, то

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x_1(t_k^{(n)}) + \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x_2(t_k^{(n)}) =$$

$$= f_n(x_1) + f_n(x_2).$$

Ограниченность f_n вытекает из следующей оценки:

$$|f_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| |x(t_k^{(n)})| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|\right) \max |x(t)| = \left(\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|\right) \|x\|.$$

При этом $\|f_n\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|$.

Докажем, что здесь имеет место точное равенство. Для этого, фиксируя n, построим следующую функцию $x(t)$ (рис. 17): положим в узлах $x(t_k^{(n)}) = \operatorname{sign} A_k^{(n)}$. Затем будем считать $x(a) = 0$,

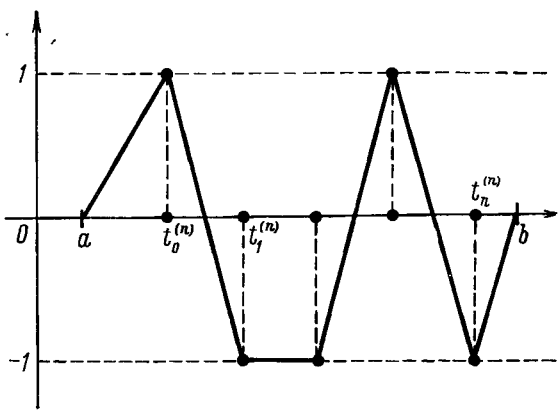

Рис. 17.

если точка a не входит в число узлов, и $x(b) = 0$, если точка b не входит в число узлов, а в промежутках $(a, t_0^{(n)})$, $(t_0^{(n)}, t_1^{(n)})$, ..., $(t_n^{(n)}, b)$ определяем $x(t)$ по закону линейного интерполирования. Таким образом, график $x(t)$ изображается ломаной линией, а $\max |x(t)| = 1$ (мы исключаем не представляющий интереса случай, когда все $A_k^{(n)} = 0$). Для построенной функции $x(t)$ имеем

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \operatorname{sign} A_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| = \left(\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|\right) \|x\|,$$

откуда следует, что $\| f_n \| \geqslant \sum_{k=0}^{n} | A_k^{(n)} |$. Вместе с обратным неравенством, установленным выше, это дает равенство

$$\| f_n \| = \sum_{k=0}^{n} | A_k^{(n)} |. \tag{34}$$

Сходимость процесса квадратур, определяемого формулами (33), для любой непрерывной функции означает, что в пространстве C $f_n \xrightarrow{\text{сл.}} f$.

Теперь поставим требование, чтобы при каждом n формула (33) оказывалась точной для всех алгебраических полиномов степени не выше n, т. е. чтобы $f(x) = f_n(x)$, если $x(t)$ — полином степени не выше n. Для этого достаточно, чтобы формула (33) была точной для функций $x_i(t) = t^i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, т. е. чтобы

$$f(x_i) = f_n(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{35}$$

Действительно, если (35) выполнено, то для всякого полинома вида

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i = \sum_{i=0}^{n} c_i x_i(t)$$

имеем

$$f(x) = f\Big(\sum_{i=0}^{n} c_i x_i\Big) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i f_n(x_i) = f_n\Big(\sum_{i=0}^{n} c_i x_i\Big) = f_n(x).$$

Таким образом, поставленное требование заключается в том, что при каждом n должны быть выполнены $(n + 1)$ условий (35). В то же время в правую часть формулы (33) входят $(2n + 2)$ параметров $A_k^{(n)}$ и $t_k^{(n)}$. Следовательно, некоторые из них можно задать произвольно. Зададим узлы $t_k^{(n)}$. Так как $x_i(t_k^{(n)}) = (t_k^{(n)})^i$, а функционал $f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$, то условия (35) сводятся к системе уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} (t_k^{(n)})^i = \int_a^b t^i\,dt \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{36}$$

из которых мы должны определить коэффициенты $A_k^{(n)}$.

Докажем, что определитель системы (36) отличен от нуля. Для этого составим однородную систему уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} \gamma_i (t_k^{(n)})^i = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{37}$$

с неизвестными $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Если числа γ_i удовлетворяют всем уравнениям системы (37), то это означает, что полином $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i t^i$ обращается в нуль при $t = t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}$. Но если полином степени не выше n имеет более чем n различных корней, то такой полином тождественно равен нулю, т. е. все его коэффициенты $\gamma_i = 0$. Таким образом, система (37) имеет только нулевое решение. Тогда по известному свойству однородных систем ее определитель должен быть отличен от нуля, а он лишь транспонированием отличается от определителя системы (36). Тем самым доказано, что и определитель системы (36) отличен от нуля.

Отсюда мы уже можем заключить, что система (36) имеет (единственное) решение, т. е. требуемые коэффициенты $A_k^{(n)}$ могут быть подобраны.

Теперь займемся исследованием сходимости процесса при условии, что формулы (33) удовлетворяют поставленному выше требованию.

Теорема 9.10.1 (Г. Пойа *)). *Пусть при каждом n формула* (33) *точна для всех полиномов степени не выше n. Тогда для того чтобы квадратурный процесс сходился для любой непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная M, что*

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant M \qquad \text{при всех } n. \tag{38}$$

Доказательство. Если $x(t)$ — полином какой угодно степени p, то $f_n(x) = f(x)$ при $n \geqslant p$. Поэтому $f_n(x) \to f(x)$ для всех полиномов и, следовательно, точечная сходимость $f_n(x) \to f(x)$ имеет место на множестве, всюду плотном в пространстве C. Тогда по теореме 9.9.1 для слабой сходимости последовательности $\{f_n\}$ к f необходимо и достаточно первое условие этой теоремы, т. е. ограниченность норм $\| f_n \|$. Остается применить равенство (34).

Если узлы таковы, что все коэффициенты $A_k^{(n)} \geqslant 0$, то сходимость квадратурного процесса обеспечивается без дополнительных условий.

Теорема 9.10.2. (В. А. Стеклов **)). *Пусть при каждом n формула* (33) *точна для всех полиномов степени не выше n и все*

*) Г. Пойя (Pólya) — современный американский математик.

**) В. А. Стеклов (1863—1926) — выдающийся русский математик, работавший преимущественно в области дифференциальных уравнений математической физики.

коэффициенты $A_k^{(n)} \geqslant 0$. *Тогда квадратурный процесс сходится для любой непрерывной функции.*

Доказательство. Проверим выполнение условия предыдущей теоремы. Если $x(t) \equiv 1$, то формула (33) должна быть точной при любом n *), следовательно, $b - a = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)}$. Таким образом, если положить $M = b - a$ и учесть, что $A_k^{(n)} \geqslant 0$, мы видим, что (38) выполнено и тем самым сходимость процесса доказана.

9.11. Линейные функционалы в пространстве сходящихся последовательностей

Имея в виду приложения, даваемые в следующем параграфе, рассмотрим еще одно пространство. Именно, обозначим через $\boldsymbol{c}$ подмножество пространства $\boldsymbol{m}$, состоящее из всех последовательностей $x = \{\xi_k\}$, сходящихся к конечному пределу. Ясно, что $\boldsymbol{c}$ — линейное подмножество; докажем, что оно замкнуто.

Пусть последовательность элементов $x_n = \{\xi_k^{(n)}\} \in \boldsymbol{c}$ сходится к некоторому $x = \{\xi_k\} \in \boldsymbol{m}$. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $n \geqslant N$, в частности при $n = N$. Следовательно, $|\xi_k^{(n)} - \xi_k| < \frac{\varepsilon}{3}$ при всех k. Далее, так как последовательность $\{\xi_k^{(N)}\}$ сходится, то, по признаку Больцано — Коши, существует такое k_0, что $|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $k, l \geqslant k_0$. Тогда, при $k, l \leqslant k_0$

$$|\xi_k - \xi_l| \leqslant |\xi_k - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| + |\xi_l^{(N)} - \xi_l| < \varepsilon$$

и, следовательно, по тому же признаку Больцано — Коши, последовательность $\{\xi_k\}$ — сходящаяся, т. е. $x \in \boldsymbol{c}$.

Таким образом, $\boldsymbol{c}$ — подпространство пространства $\boldsymbol{m}$. Так как пространство $\boldsymbol{m}$ полно, то по теореме 3.5.4 и $\boldsymbol{c}$ как самостоятельное нормированное пространство также полно.

Мы не будем ставить вопроса об общей форме линейных функционалов в $\boldsymbol{c}$ и ограничимся рассмотрением функционалов вида (4), т. е.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k. \tag{4}$$

Предположим, что этот ряд сходится для любого $x \in \boldsymbol{c}$. Тогда формулой (4) в $\boldsymbol{c}$ определяется аддитивный функционал. Дока-

*) Постоянная — полином нулевой степени.

жем, что он линеен, и выясним, какому условию должны удовлетворять числа c_k.

Введем функционалы

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k.$$

Так как

$$|f_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k||\xi_k| \leqslant (\sup |\xi_k|) \sum_{k=1}^{n} |c_k| = \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|\right) \|x\|,$$

то функционалы f_n — линейные. При этом вследствие сходимости ряда (4) $f_n(x) \to f(x)$ для каждого $x \in c$. По теореме 8.5.1 отсюда следует, что функционал f — тоже линейный.

Теперь, беря произвольное n, положим

$$\xi_k = \operatorname{sign} c_k \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\xi_k = 0 \quad \text{при} \quad k > n.$$

Тогда $x = \{\xi_k\} \in c$ и $\|x\| \leqslant 1$ *), а

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname{sign} c_k = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Отсюда $\sum_{k=1}^{n} |c_k| = f(x) \leqslant \|f\|$, а вследствие произвольности n и $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \leqslant \|f\|$. Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{n} |c_k|$ сходится.

Легко видеть, что верно и обратное: если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ сходится, то формула (4) определяет линейный функционал $f(x)$, заданный во всем c (и даже в m). Действительно, для любого $x \in c$

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k||\xi_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\right) \sup |\xi_k| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\right) \|x\|,$$

откуда и следует, что $f(x)$ имеет конечное значение (т. е. ряд (4) сходится) для любого $x \in c$ и что функционал f линеен.

Из сопоставления полученных неравенств следует также, что $\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$.

В проведенном рассуждении содержится доказательство следующей теоремы, используемой ниже:

*) Если $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, то и $\|x\| = 0$. В противном случае, если хоть одно из этих c_k отлично от нуля, $\|x\| = 1$.

Т е о р е м а 9.11.1. *Для того чтобы ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$ *сходился для любой последовательности* $\{\xi_k\} \in \boldsymbol{c}$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$.

9.12. Обобщенные методы суммирования рядов

Принятое в классическом анализе определение суммы бесконечного ряда применимо только к сходящимся рядам. Однако и расходящиеся ряды оказываются полезными в различных вопросах математики, например в теории рядов Фурье. Известно, что ряд Фурье непрерывной функции может оказаться расходящимся. В то же время венгерским математиком. Л. Фейером (1880—1959) в начале XX столетия установлен следующий замечательный результат: если $f(x)$ — любая непрерывная, 2π-периодическая функция, а $s_n(x)$ — частичные суммы ее ряда Фурье

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

то последовательность их средних арифметических

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n}$$

равномерно сходится к $f(x)$ на всей оси. Таким образом, и в этом случае можно говорить, что в некотором смысле ряд Фурье может быть «просуммирован» и его «суммой» оказывается функция $f(x)$.

Приведем некоторые общие определения. Пусть дан числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{39}$$

и s_k — его частичные суммы ($s_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$). Тогда $s = \lim s_k$ есть сумма ряда (39) в обычном смысле. Определение каждого обобщенного метода суммирования заключается в указании правила, согласно которому $\lim s_k$ заменяется некоторым другим выражением, могущим иметь смысл и тогда, когда $\lim s_k$ не существует, которое мы и называем обобщенной суммой. Укажем весьма широкий класс обобщенных методов суммирования. С этой целью зададим бесконечную матрицу $A = (a_{ik})$ и положим

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} s_k \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{40}$$

Если ряд (40) сходится (в обычном смысле) при каждом i и если существует конечный $\lim \sigma_i = \sigma$, то число σ и называется *обобщенной суммой* ряда (39), а ряд называется суммируемым данным методом. Сам метод будет обозначаться той же буквой, что и определяющая его матрица — метод A.

Обычный метод суммирования получается из этой схемы, если положить $a_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $a_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Тогда $\sigma_i = s_i$ при всех i и, следовательно, конечный $\lim \sigma_i$ существует тогда и только тогда, когда ряд (39) сходится в обычном смысле и при этом обобщенная сумма совпадает с обычной.

Использованный Фейером в теории рядов Фурье метод средних арифметических получается из той же общей схемы, если взять матрицу

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & \ldots \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \tag{41}$$

в которой $a_{ik} = \frac{1}{i}$ при $k \leqslant i$ и $a_{ik} = 0$ при $k > i$. Тогда

$$\sigma_i = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} s_k,$$

т. е. σ_i есть среднее арифметическое первых i частичных сумм s_k.

Приведем пример расходящегося числового ряда, для которого методом средних арифметических можно получить обобщенную сумму. Возьмем ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots;$$

тогда $s_1 = s_3 = s_5 = \ldots = 1$, $s_2 = s_4 = s_6 = \ldots = 0$. Полагая поочередно $i = 2n$ и $i = 2n+1$, находим

$$\sigma_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} s_k = \frac{1}{2n} (s_1 + s_3 + \ldots + s_{2n-1}) = \frac{1}{2},$$

$$\sigma_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} s_k = \frac{1}{2n+1} (s_1 + s_3 + \ldots + s_{2n+1}) = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Отсюда ясно, что $\sigma = \lim \sigma_i = \frac{1}{2}$.

Обобщенный метод суммирования называется *перманентным*, если всякий сходящийся ряд суммируем и этим методом и при этом обобщенная сумма совпадает с обычной. Естественно, что перманентные методы и представляют наибольший интерес.

Используя понятие слабой сходимости функционалов, выведем условия, при которых метод, определяемый матрицей A, перманентен.

Теорема 9.12.1 (О. Теплиц *)). *Для того чтобы метод A был перманентным, необходимо и достаточно, чтобы элементы матрицы A удовлетворяли следующим условиям*:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leqslant M$ $(i = 1, 2, \ldots)$ (M — постоянная, не зависящая от i);

2) $\lim\limits_{i\to\infty} a_{ik} = 0$ *при каждом* $k = 1, 2, \ldots$;

3) $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1$.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть метод A перманентен. Любая сходящаяся числовая последовательность $\{s_k\}$ может быть представлена как последовательность частичных сумм некоторого ряда (39). Для этого нужно положить $u_1 = s_1$, $u_2 = s_2 - s_1$, $\ldots$, $u_n = s_n - s_{n-1}$, $\ldots$ Так как конечный $\lim s_k$ существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а значит, он суммируем и по методу A. Следовательно, все ряды (40) тоже сходятся, существует конечный $\lim \sigma_i = \sigma$ и $\sigma = s = \lim s_k$.

По теореме 9.11.1 из сходимости рядов (40) для любой сходящейся последовательности $\{s_k\}$ вытекает, что при каждом i ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|$ сходится. Из 9.11 мы также знаем, что если последовательности $\{s_k\}$ рассматривать как элементы пространства c, $x = \{s_k\}$, то формула (40) определяет при каждом i линейный функционал $\sigma_i = f_i(x)$ в пространстве c, причем $\|f_i\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|$. Но мы уже видели, что для любого $x \in c$ существует конечное $\sigma = \lim f_i(x)$, а тогда по теореме 8.5.1 все $\|f_i\| \leqslant M$, где M — постоянная. Тем самым доказана необходимость условия 1).

Возьмем x равным координатному орту e_k (т. е. полагаем $s_k = 1$, $s_l = 0$ при $l \neq k$). Тогда $s = \lim s_l = 0$ и, следовательно, $\sigma = 0$. Но $\sigma = \lim \sigma_i$, а $\sigma_i = f_i(e_k) = a_{ik}$, значит, должно быть выполнено условие 2).

Наконец, возьмем $x = \{1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ (т. е. полагаем все $s_k = 1$). Тогда $s = \lim s_k = 1$, следовательно и $\sigma_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik} \to 1$, т. е. доказана необходимость условия 3).

*) О. Теплиц (1881—1940) — немецкий математик.

б) Достаточность. Пусть условия 1) — 3) выполнены. Из 1) вытекает, что формула (40) определяет при каждом i линейный функционал $\sigma_i = f_i(x)$ ($x = \{s_k\}$) в пространстве c с нормой $\|f_i\| \leqslant M$. С другой стороны, если $\{s_k\} \in c$, то $s = \lim s_k$ также представляет функционал $s = f(x)$ в c, аддитивность и ограниченность которого очевидны ($|f(x)| = |\lim s_k| \leqslant \sup |s_k| = \|x\|$).

Обозначим через E множество всех элементов $x = \{\xi_k\}$ из c, у которых все координаты, начиная с некоторой, равны между собой:

$$s_n = s_{n+1} = s_{n+2} = \ldots = s.$$

Если $x \in E$, то $f(x) = s$, а

$$f_i(x) = \sigma_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} s_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} s_k + s \sum_{k=n}^{\infty} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} (s_k - s) + s \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik},$$

и благодаря условиям 2) — 3)

$$f_i(x) \longrightarrow s = f(x).$$

Теперь покажем, что множество E всюду плотно в пространстве c. Если $x = \{s_k\}$ — любой элемент из c, $s = \lim s_k$, а $\varepsilon > 0$, то подбираем n так, что $|s_k - s| < \varepsilon$ при $k \geqslant n$, а затем образуем элемент

$$x' = \{s_1, \ldots, s_{n-1}, s, s, s, \ldots\} \in E.$$

Тогда

$$x - x' = \{0, \ldots, 0, s_n - s, s_{n+1} - s, \ldots\}$$

и $\|x - x'\| \leqslant \varepsilon$. Вследствие произвольности ε отсюда и следует, что E всюду плотно в c.

Из точечной сходимости $f_i(x)$ к $f(x)$ на множестве E и ограниченности норм $\|f_i\|$ по теореме 9.9.1 вытекает, что $f_i \overset{\text{сл.}}{\longrightarrow} f$. Тем самым доказано, что $\sigma_i \to s$ всегда, когда $s = \lim s_k$ существует, а это и означает перманентность метода A. Теорема доказана.

Легко видеть, что матрица (41) удовлетворяет всем условиям доказанной теоремы, следовательно, метод средних арифметических перманентен.

9.13. Линейные функционалы в комплексном нормированном пространстве

Теория линейных операторов и функционалов, развитая в двух последних главах, естественным образом переносится и в комплексные нормированные пространства. Сделаем несколько замечаний по поводу основных определений, относящихся к линейным функционалам.

В комплексном нормированном пространстве естественно рассматривать функционалы с комплексными значениями. Определение аддитивности и однородности функционала (и даже оператора), данное в 8.1, остается формально без изменения, однако свойство однородности заключается теперь в возможности выносить из-под знака функционала любой комплексный множитель. При этом оказывается, что теорема 8.2.2, в которой доказывается, что однородность есть следствие аддитивности и непрерывности, в комплексном пространстве уже не верна. Примером может служить функционал в комплексном гильбертовом пространстве, определяемый скалярным произведением $f(x) = (c, x)$, где c — постоянный элемент. Этот функционал аддитивен и непрерывен, но

$$f(\alpha x) = (c, \alpha x) = \bar{\alpha}(c, x) = \bar{\alpha} f(x).$$

В связи с указанным обстоятельством свойство однородности включается в определение линейного функционала. Таким образом, *в комплексном нормированном пространстве линейный функционал определяется как функционал аддитивный, однородный и непрерывный.* Учитывая, что в теореме 8.2.2. все же доказывается, что из аддитивности и непрерывности функционала вытекает возможность вынесения из-под его знака вещественного множителя, предлагаем читателю проверить, что для того, чтобы аддитивный и непрерывный функционал был однородным, необходимо и достаточно, чтобы $f(ix) = if(x)$ для любого x (i — мнимая единица). Сказанное о функционалах относится также и к понятию линейного оператора в комплексном пространстве.

Вещественность значений функционалов была существенно использована в этой главе лишь в теореме о распространении, где мы действовали с различными неравенствами, написанными для значений функционала, взятых без модуля. Однако и эта теорема переносится на линейные функционалы в комплексных пространствах.

ГЛАВА X

СОПРЯЖЕННЫЕ И САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

10.1. Сопряженные операторы

Понятие сопряженного оператора, введенное в гл. I для линейных операторов в эвклидовых пространствах, мы распространим теперь на случай операторов в произвольном гильбертовом пространстве. Это приведет нас естественным путем к выделению класса самосопряженных операторов, т. е. таких, которые совпадают со своими сопряженными. Изучение самосопряженных операторов и составит основное содержание настоящей главы. Понятие сопряженного оператора в еще более общем виде — в произвольных нормированных пространствах — в этой книге не рассматривается.

Пусть H обозначает в дальнейшем вещественное, сепарабельное, гильбертово пространство, а линейные операторы, рассматриваемые в H, имеют значения в том же пространстве H. Через f_y обозначим линейный функционал, определяемый на H формулой $f_y(x) = (x, y)$ (y — произвольный фиксированный элемент из H). Тогда $\| f_y \| = \| y \|$ (см. 9.2).

Лемма 10.1.1. *Для любого линейного оператора A, заданного на H, и любого элемента $y \in H$ существует единственный элемент $y^* \in H$ такой, что при всех $x \in H$*

$$(Ax, y) = (x, y^*), \tag{1}$$

причем $\| y^* \| \leqslant \| A \| \cdot \| y \|$.

Доказательство. При фиксированном y скалярное произведение (Ax, y) можно представить как «сложный» функционал от x: $(Ax, y) = f_y(Ax)$. Опираясь на общие сведения о суперпозиции операторов (8.6), мы сразу заключаем, что этот функционал — линейный и что его норма не превосходит $\| f_y \| \| A \|$ *). Согласно общему представлению линейных функ-

*) Впрочем, аддитивность и ограниченность скалярного произведения (Ax, y), как функционала от x, легко проверяется и непосредственно.

ционалов в H в виде скалярного произведения существует единственный элемент $y^* \in H$ такой, что выполнено равенство (1). При этом норма $\| y^* \|$ равна норме функционала $f_y(Ax)$ и, следовательно, $\| y^* \| \leqslant \| f_y \| \| A \| = \| A \| \| y \|$. Лемма доказана.

Если теперь каждому $y \in H$ сопоставить тот единственный элемент y^*, для которого равенство (1) выполнено при всех $x \in H$, то мы определим на H некоторый оператор: $y^* = A^* y$. С помощью этого оператора равенство (1) переписывается в виде

$$(Ax,\ y) = (x,\ A^* y). \tag{2}$$

Последнее равенство и кладется в основу определения сопряженного оператора.

Определение. Если A — линейный оператор, заданный на H, то оператор A^*, также заданный на H, для которого при всех $x,\ y \in H$ выполнено равенство (2), называется *сопряженным* к оператору A.

В лемме 10.1.1 мы уже доказали, что сопряженный оператор определен однозначно для всех $y \in H$.

Теорема 10.1.1. *Сопряженный оператор A^* — линейный и $\| A^* \| = \| A \|$.*

Доказательство. Аддитивность оператора A^* почти очевидна. Действительно, если $y,\ z \in H$, то по лемме существует такой элемент $(y + z)^*$ и притом единственный, что $(Ax,\ y + z) = (x,\ (y + z)^*)$ при всех $x \in H$. Тогда, по определению, $(y + z)^* = A^* (y + z)$. С другой стороны, с помощью формулы (2) имеем

$$(Ax,\ y + z) = (Ax,\ y) + (Ax,\ z) = (x,\ A^* y) + (x,\ A^* z) = \\ = (x,\ A^* y + A^* z),$$

т. е.

$$(y + z)^* = A^* y + A^* z,$$

откуда

$$A^* (y + z) = A^* y + A^* z.$$

Ограниченность A^* доказана в лемме: $\| A^* y \| \leqslant \| A \| \cdot \| y \|$. Таким образом, оператор A^* — линейный и

$$\| A^* \| \leqslant \| A \|. \tag{3}$$

У оператора A^*, в свою очередь, есть сопряженный — A^{**}, определяемый равенством, аналогичным (2),

$$(A^* y,\ x) = (y,\ A^{**} x). \tag{4}$$

Но так как отсюда $A^{**} x$ определяется для каждого x однозначно, то из сопоставления равенств (4) и (2) следует, что $A^{**} x = Ax$, т. е. $A^{**} = A$. Применяя доказанное выше неравенство (3) к A^*

и A^{**}, имеем $\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\|$, что вместе с (3) и дает требуемое равенство

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Отметим некоторые простые свойства сопряженных операторов. Если A и B — линейные операторы на $\boldsymbol{H}$, то:

а) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

б) $(\lambda A)^* = \lambda A^*$;

в) $(BA)^* = A^*B^*$.

Доказательство вытекает из следующих соотношений;

а) $((A+B)x,\ y) = (Ax,\ y) + (Bx,\ y) = (x,\ A^*y) + (x,\ B^*y) = (x,\ (A^* + B^*)y)$;

б) $((\lambda A)x,\ y) = \lambda(Ax,\ y) = \lambda(x,\ A^*y) = (x,\ (\lambda A^*)y)$;

в) $((BA)x,\ y) = (B(Ax),\ y) = (Ax,\ B^*y) = (x,\ A^*(B^*y)) = (x,\ (A^*B^*)y)$.

В 1.10 мы уже рассматривали сопряженные операторы в пространстве $\boldsymbol{R}_n$. При этом мы исходили из определения сопряженного оператора, как оператора, задаваемого транспонированной матрицей, но показали, что сопряженный оператор полностью характеризуется соотношением (2) [формулой (19) из гл. I]. Таким образом, для операторов в $\boldsymbol{R}_n$ определение сопряженного оператора, данное в 1.10, равносильно общему определению из этого параграфа.

Перейдем к пространству l^2. Если $z = Ax$ — произвольный линейный оператор, отображающий l^2 в l^2, то, как мы знаем из 2.7, он изображается с помощью некоторой бесконечной матрицы (a_{ik}) по формулам

$$z_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots)$$

(здесь $x = \{x_k\}$).

Пусть $y = \{y_i\}$ — произвольный элемент из l^2. Тогда

$$(Ax,\ y) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k y_i.$$

С другой стороны, пусть сопряженный оператор A^*, который, как мы знаем, тоже линеен, изображается с помощью матрицы (b_{ik}). Тогда

$$(x,\ A^*y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}y_k = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}x_i y_k.$$

Положим теперь $x = e_l$, $y = e_m$, где e_l и e_m — координатные орты. Тогда

$$x_l = 1, \quad x_k = 0 \quad \text{при } k \neq l,$$

$$y_m = 1, \quad y_i = 0 \quad \text{при } i \neq m.$$

Следовательно,

$$(Ae_l,\ e_m) = a_{ml},\quad (e_l,\ A^*e_m) = b_{lm}$$

и, благодаря условию (2), $b_{lm} = a_{ml}$. Таким образом, сопряженный оператор A^* определяется матрицей, транспонированной относительно матрицы оператора A.

10.2. Самосопряженные операторы

Определение. Линейный оператор A в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ называется *самосопряженным*, если он совпадает со своим сопряженным: $A^* = A$.

Иными словами, самосопряженный оператор A характеризуется условием

$$(Ax,\ y) = (x,\ Ay) \tag{5}$$

для любых $x,\ y \in \boldsymbol{H}$, т. е. самосопряженный оператор допускает внутри скалярного произведения «перекидку» от одного сомножителя к другому.

Из 10.1 сразу следует, что в $\boldsymbol{l}^2$ самосопряженные операторы характеризуются симметричными матрицами, т. е. матрицами, для которых $a_{ki} = a_{ik}$ при всех $i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots$

Любая линейная комбинация самосопряженных операторов $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n\ ^*)$$

также является самосопряженным оператором. Действительно, при любых $x,\ y \in \boldsymbol{H}$

$$(Ax,\ y) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k x,\ y\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,(A_k x,\ y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,(x,\ A_k y) =$$

$$= \Big(x,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k y\Big) = (x,\ Ay).$$

Таким образом, в линейном пространстве линейных операторов, отображающих $\boldsymbol{H}$ в $\boldsymbol{H}$, самосопряженные операторы составляют линейное подмножество. Кроме того, мы сейчас увидим, что это подмножество замкнуто и, следовательно, является подпространством. Иными словами, если операторы A_n — самосопряженные и $A_n \to A$ (по норме), то и оператор A — самосопряженный. Докажем даже более сильное утверждение: *если операторы A_n — самосопряженные и последовательность $\{A_n\}$ точечно сходится*

*) Так как мы рассматриваем вещественное гильбертово пространство, то и коэффициенты $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ нужно считать вещественными.

к оператору A, то A — тоже самосопряженный оператор *). Действительно, благодаря непрерывности скалярного произведения при любых $x, y \in \boldsymbol{H}$

$$(Ax, y) = (\lim A_n x, y) = \lim (A_n x, y) = \lim (x, A_n y) = (x, \lim A_n y) = (x, Ay).$$

Суперпозиция самосопряженных операторов может привести и не к самосопряженному оператору. Если операторы A и B — самосопряженные, то, как мы знаем из 10.1, $(BA)^* = A^*B^* = AB$. Следовательно, *для того чтобы оператор BA был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы, $AB = BA$*, т. е. *чтобы операторы A и B были перестановочны между собой.* В частности, *все степени A^n самосопряженного оператора A также — самосопряженные операторы* **).

Докажем одну важную формулу для нормы самосопряженного оператора.

Теорема 10.2.1. *Если оператор A — самосопряженный, то*

$$\| A \| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Доказательство. По неравенству Коши — Буняковского имеем, при $\| x \| = 1$,

$$|(Ax, x)| \leqslant \| Ax \| \| x \| \leqslant \| A \|.$$

Следовательно, если

$$C = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|,$$

то $C \leqslant \| A \|$.

Докажем обратное неравенство. Прежде всего заметим, что любой $z \in \boldsymbol{H}$ можно представить в виде $z = \| z \| z'$, где $\| z' \| = 1$ ***). Отсюда для любого $z \in \boldsymbol{H}$

$$|(Az, z)| = \| z \|^2 |(Az', z')| \leqslant C \| z \|^2. \tag{6}$$

Теперь для любых $x, y \in \boldsymbol{H}$, учитывая равенство $(Ay, x) = (Ax, y)$, имеем

$$(A(x+y), x+y) = (Ax, x) + 2(Ax, y) + (Ay, y),$$
$$(A(x-y), x-y) = (Ax, x) - 2(Ax, y) + (Ay, y)$$

---

*) Точечную сходимость линейных операторов в гильбертовом пространстве обычно называют *сильной* сходимостью.

**) Для A^2 это очевидно. Для более высоких степеней равенство $A(A^{n-1}) = (A^{n-1})A$ доказывается по индукции.

***) Если $z \neq 0$, то $z' = \dfrac{z}{\| z \|}$; если же $z = 0$, то за z' можно принять любой элемент с нормой, равной единице.

и, вычитая, находим

$$4(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y).$$

Отсюда, по (6),

$$|(Ax, y)| \leqslant \frac{1}{4} C (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$$

и по формуле (3) из гл. VI

$$|(Ax, y)| \leqslant \frac{1}{2} C (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Предполагая, что $Ax \neq \theta$ (а тогда и $x \neq \theta$), положим в последнем неравенстве $y = \frac{\|x\|}{\|Ax\|} Ax$. Тогда $\|y\| = \|x\|$, и мы получаем

$$\frac{\|x\|}{\|Ax\|} \|Ax\|^2 \leqslant C \|x\|^2$$

или $\|Ax\| \leqslant C\|x\|$. Это же неравенство верно и при $Ax = \theta$. Следовательно, $\|A\| \leqslant C$ и, тем самым, равенство $\|A\| = C$ доказано.

Следствие. *Если для самосопряженного оператора* A $(Ax, x) = 0$ *при всех* $x \in \boldsymbol{H}$, *то* $A = \Theta$.

Действительно, если $(Ax, x) = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{H}$, то, по теореме 10.2.1, $\|A\| = 0$; а потому $A = \Theta$.

Для самосопряженного оператора A вводится еще понятие его *границ — верхней и нижней*:

$$M_A = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x), \qquad m_A = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

Из теоремы 10.2.1 следует, что

$$\|A\| = \max(|M_A|, |m_A|)^*).$$

Из определения границ легко выводится, что для любого $x \in \boldsymbol{H}$

$$m_A \|x\|^2 \leqslant (Ax, x) \leqslant M_A \|x\|^2. \tag{7}$$

Действительно, для $x = \theta$ это соотношение тривиально. Если же $x \neq \theta$, то вводим $x' = \frac{x}{\|x\|}$. Тогда $\|x'\| = 1$ и $m_A \leqslant (Ax', x') \leqslant$

---

*) Мы пользуемся очевидной общей формулой: если какое-нибудь числовое множество E ограничено, а E_1 — множество абсолютных величин всех чисел из E, то

$$\sup E_1 = \max(|\sup E|, |\inf E|).$$

Предлагая читателю проверить эту формулу, рассматривая разные комбинации знаков $\sup E$ и $\inf E$, приведем один поясняющий пример: если на числовой прямой взять отрезок $E = [-5, 2]$, то $E_1 = [0, 5]$ и $\sup E = 2$, $\inf E = -5$, $\sup E_1 = 5$.

$\leqslant M_A$. Подставляя вместо x' его выражение, получим

$$m_A \leqslant \frac{1}{\|x\|^2}(Ax, x) \leqslant M_A,$$

что равносильно (7).

Самосопряженный оператор A называется *положительным*, если $(Ax, x) \geqslant 0$ для любого $x \in \boldsymbol{H}$. Заметим, что квадрат всякого самосопряженного оператора положителен. Действительно,

$$(A^2x, x) = (A(Ax), x) = (Ax, Ax) \geqslant 0.$$

Важным примером положительного самосопряженного оператора является оператор проектирования. Действительно, пусть P — оператор проектирования (проектор) пространства $\boldsymbol{H}$ на подпространство $\boldsymbol{L}$ (см. 8.3), а $\boldsymbol{M}$ — ортогональное дополнение к $\boldsymbol{L}$. Возьмем произвольные $x, y \in \boldsymbol{H}$ и представим их в виде $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, где $x_1 = Px$, $y_1 = Py$ ($x_1, y_1 \in \boldsymbol{L}$; $x_2, y_2 \in \boldsymbol{M}$). Тогда

$$(Px, y) = (x_1, y) = (x_1, y_1) + (x_1, y_2) = (x_1, y_1);$$
$$(x, Py) = (x, y_1) = (x_1, y_1) + (x_2, y_1) = (x_1, y_1);$$

следовательно, $(Px, y) = (x, Py)$. При этом

$$(Px, x) = (x_1, x) = (x_1, x_1) + (x_1, x_2) = (x_1, x_1) \geqslant 0.$$

По доказанному выше любая линейная комбинация проекторов также будет самосопряженным оператором, но уже не обязательно положительным.

В начале этого параграфа мы определили самосопряженный оператор как линейный оператор A, удовлетворяющий условию (5). Однако на самом деле непрерывность самосопряженного оператора может быть выведена из других его свойств, и, таким образом, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 10.2.2. *Если аддитивный оператор A задан на всем пространстве $\boldsymbol{H}$ и при любых $x, y \in \boldsymbol{H}$ удовлетворяет условию* (5), *то он самосопряжен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы доказать эту теорему, нужно установить, что оператор A ограничен. Допустим, что это не так. Тогда для любого натурального n существует такой $x_n \in \boldsymbol{H}$, что

$$\|x_n\| \leqslant 1, \qquad \|Ax_n\| > n. \tag{8}$$

Рассмотрим последовательность функционалов, задаваемых на $\boldsymbol{H}$ формулой

$$f_n(x) = (x, Ax_n).$$

Известно (см. 9.2), что эти функционалы линейны и что

$$\|f_n\| = \|Ax_n\|. \tag{9}$$

Из условия (5) следует, что

$$f_n(x) = (Ax,\ x_n),$$

и потому по неравенству Коши — Буняковского

$$|f_n(x)| \leqslant \|Ax\|\,\|x_n\| \leqslant \|Ax\|.$$

Таким образом, последовательность функционалов $\{f_n\}$ точечно ограничена, а тогда по теореме Банаха — Штейнгауза должны быть ограничены в совокупности и нормы $\|f_n\|$. Однако это последнее противоречит формулам (8) и (9). Полученное противоречие и доказывает теорему.

10.3. Инвариантные подпространства

Каждое подпространство $\boldsymbol{L}$ гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$ может рассматриваться как самостоятельное гильбертово пространство *). Однако, если на $\boldsymbol{H}$ задан линейный оператор A, то, рассматривая этот оператор только на подпространстве $\boldsymbol{L}$, мы получим, вообще говоря, линейный оператор, отображающий $\boldsymbol{L}$ не в самого себя, а в более широкое пространство $\boldsymbol{H}$. Если же оператор A отображает $\boldsymbol{L}$ в $\boldsymbol{L}$, то, рассматривая этот оператор только на $\boldsymbol{L}$, мы отделим от A некоторую его «часть», представляющую линейный оператор, заданный на $\boldsymbol{L}$ и имеющий значения в том же пространстве. В связи с этим вводится следующее определение:

Определение. Подпространство $\boldsymbol{L}$ называется *инвариантным* для оператора A, если $Ax \in \boldsymbol{L}$ при любом $x \in \boldsymbol{L}$.

Перейдем к случаю, когда оператор A — самосопряженный.

Теорема 10.3.1. *Если для самосопряженного оператора A подпространство $\boldsymbol{L}$ инвариантно, то и его ортогональное дополнение $\boldsymbol{M}$ тоже инвариантно для A.*

Доказательство. Пусть $x \in \boldsymbol{M}$, а y — произвольный элемент из $\boldsymbol{L}$. Тогда $(Ax, y) = (x, Ay) = 0$, так как $Ay \in \boldsymbol{L}$. Следовательно, $Ax \perp \boldsymbol{L}$, т. е. $Ax \in \boldsymbol{M}$.

Эта теорема показывает, что понятие инвариантного подпространства представляет особый интерес для самосопряженных операторов. Именно, если $\boldsymbol{L}$ — инвариантное подпространство для самосопряженного оператора A, то A как бы расщепляется на две самостоятельные части: оператор в пространстве $\boldsymbol{L}$ и оператор в пространстве $\boldsymbol{M}$. При этом основное равенство (5), характеризующее самосопряженные операторы, будучи выполнено для A во всем $\boldsymbol{H}$, выполнено, в частности, в $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$; следовательно «части» оператора A, рассматриваемые на каждом из подпространств $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$, также — самосопряженные операторы.

*) Так как $\boldsymbol{H}$ полно, а $\boldsymbol{L}$ — его замкнутое подмножество, то и как самостоятельное пространство $\boldsymbol{L}$ тоже полно.

Приведем пример в пространстве R_n. Пусть матрица линейного преобразования A имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1k}\ 0 \dots\dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1} \dots a_{kk}\ 0 \dots\dots\dots 0 \\ 0 \quad \dots 0 \quad a_{k+1,\,k+1} \dots a_{k+1,\,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \quad \dots 0 \quad a_{n,\,k+1} \dots\dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

(правый верхний и левый нижний квадраты сплошь заполнены нулями). Тогда подпространство L, порождаемое ортами $e_1, e_2, \dots e_k$ — инвариантно. Действительно, если $x \in L$, т. е. $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$, то $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$, а потому для $y = Ax$ имеем $y_i = 0$ при каждом $i = k+1, \dots, n$. Следовательно, $y \in L$. Аналогично, инвариантно подпространство M, порождаемое ортами $e_{k+1}, \dots, e_n$. Впрочем, если матрица A — симметричная и, следовательно, оператор A — самосопряженный, то инвариантность M вытекает из инвариантности L.

10.4. Собственные числа и собственные элементы самосопряженного оператора

Распространим на любые линейные операторы в гильбертовом пространстве определение, введенное в 1.13 для линейных операторов в R_n. Впрочем, это определение имеет смысл для операторов в любом линейном пространстве, если значения оператора принадлежат тому же пространству.

Все время будем предполагать, что пространство H содержит элементы, отличные от θ.

Определение. Число λ называется *собственным числом* линейного оператора A, если существует элемент $x \neq \theta$, для которого $Ax = \lambda x$ *). Такой элемент $x \neq \theta$ называется *собственным элементом* оператора A, соответствующим собственному числу λ.

Из этого определения следует, что число $\lambda = 0$ — собственное тогда и только тогда, когда существует $x \neq \theta$, для которого $Ax = 0x = \theta$, т. е. когда уравнение $Ax = \theta$ имеет решение, отличное от θ.

К понятию собственных чисел и элементов оператора A можно подойти, поставив вопрос об одномерных инвариантных подпространствах оператора A. Действительно, пусть подпространство L одномерно, т. е. состоит из элементов вида αx, где $x \neq \theta$ — фиксированный элемент, и пусть L инвариантно для линейного

*) Вместо «собственное число» часто говорят «собственное значение».

оператора A. Тогда $Ax \in \boldsymbol{L}$ и, следовательно, $Ax = \lambda x$ при некотором λ. Отсюда уже вытекает, что и при любом α будет $A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\lambda x = \lambda(\alpha x)$, т. е. все отличные от θ элементы подпространства $\boldsymbol{L}$ суть собственные, соответствующие собственному числу λ.

Теорема 10.4.1. *Если λ — собственное число линейного оператора A, то совокупность $\boldsymbol{L}$, состоящая из всех собственных элементов оператора A, соответствующих числу λ, и нулевого элемента θ — подпространство пространства $\boldsymbol{H}$.*

Доказательство. Условие $Ax = \lambda x$ выполнено, по определению, для всех собственных элементов оператора A, соответствующих числу λ, а кроме них только для $x = \theta$. Следовательно, этим условием полностью характеризуются все элементы $x \in \boldsymbol{L}$. Для любой линейной комбинации элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{L}$ имеем

$$A\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (Ax_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda\alpha_k x_k = \lambda \sum_{n=1}^{n} \alpha_k x_k,$$

а потому $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in \boldsymbol{L}$. Следовательно, $\boldsymbol{L}$ — линейное подмножество.

Если же $x_n \in \boldsymbol{L}$ и $x_n \to x$, то $Ax = \lim Ax_n = \lim \lambda x_n = \lambda x$, откуда $x \in \boldsymbol{L}$, т. е. $\boldsymbol{L}$ замкнуто. Таким образом, $\boldsymbol{L}$ — подпространство.

Определенное в теореме 10.4.1 подпространство $\boldsymbol{L}$ называется *собственным подпространством* оператора A, соответствующим числу λ. Ясно, что это подпространство инвариантно для оператора A.

Заметим, что собственное подпространство даже и для самосопряженного оператора может иметь любую размерность. Например, для тождественного оператора $Ix = x$ (I, очевидно,— самосопряжен) собственное подпространство, соответствующее числу $\lambda = 1$, есть всё $\boldsymbol{H}$.

Основное свойство собственных элементов самосопряженного оператора устанавливается следующей теоремой:

Теорема 10.4.2. *Для самосопряженного оператора A собственные подпространства $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$, соответствующие двум различным собственным числам λ и μ, ортогональны.*

Доказательство. Если $x \in \boldsymbol{L}$, $y \in \boldsymbol{M}$, то $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$. Отсюда

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y).$$

Но при $\lambda \neq \mu$ равенство $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$ возможно, только если $(x, y) = 0$, т. е. если $x \perp y$. Тем самым доказано, что $\boldsymbol{L} \perp \boldsymbol{M}$.

Теорема 10.4.3. *Все собственные числа самосопряженного оператора A заключены между его границами M_A и m_A.*

Доказательство. Пусть λ — собственное число, x — соответствующий ему собственный элемент с нормой $\| x \| = 1$ *). Тогда $(Ax, x) = \lambda (x, x) = \lambda$, следовательно, по определению границ (см. 10.2), $m_A \leqslant \lambda \leqslant M_A$.

Следствие. *Собственные числа положительного самосопряженного оператора A не отрицательны.*

Действительно, в этом случае нижняя граница $m_A \geqslant 0$, а потому и все собственные числа $\lambda \geqslant 0$.

Мы установили некоторые свойства, которыми обладают собственные числа и собственные элементы оператора в предположении, что они существуют. Однако не всякий, даже самосопряженный, оператор имеет собственные числа и вопрос о существовании собственных чисел представляет большой интерес и большие трудности. В 1.13 мы доказали, что самосопряженный оператор в R_n всегда имеет по крайней мере одно собственное число. В следующей главе мы рассмотрим важный класс самосопряженных операторов в произвольном гильбертовом пространстве, для которых существование собственного числа гарантировано.

10.5. Неограниченные симметричные операторы

В целях приложений к дифференциальным уравнениям распространим на более широкий класс операторов некоторые результаты, только что установленные для самосопряженных операторов.

Определение. Аддитивный и однородный оператор A, заданный на некотором линейном подмножестве D пространства H, называется *симметричным*, если для любых $x, y \in D$

$$(Ax, y) = (x, Ay) \text{ **)}.$$

Самосопряженный оператор представляет частный случай симметричного, именно, это — ограниченный симметричный оператор, для которого область задания $D = H$ ***). Более того, по

---

*) Такой элемент мы всегда можем найти, взяв произвольный собственный элемент x, соответствующий числу λ, и заменив его на $\frac{x}{\| x \|}$.

**) Обычно в литературе по теории операторов в гильбертовом пространстве в определение симметричного оператора включается требование, чтобы множество D было всюду плотным в H. Однако при том небольшом использовании, которое имеет понятие симметричного оператора в этой книге, в указанном требовании нет необходимости.

***) В общей теории операторов в гильбертовом пространстве рассматриваются и неограниченные самосопряженные операторы, которые также представляют частный случай симметричных.

теореме 10.2.2 *всякий симметричный оператор, у которого* $D = H$, *самосопряжен.* Но в общем случае симметричный оператор может и не быть ограниченным, а у неограниченного симметричного оператора область задания D обязательно отлична от H.

Определение собственных чисел и собственных элементов, данное в 10.4 для линейных операторов, можно распространить и на любые аддитивные и однородные операторы, в частности на симметричные. Собственные элементы симметричного оператора, естественно, должны принадлежать его области задания D. Результаты, установленные в 10.4 для собственных элементов самосопряженных операторов, переносятся на произвольные симметричные операторы в следующем виде:

Т е о р е м а 10.5.1. *Если* λ *— собственное число симметричного оператора* A, *то совокупность* L, *состоящая из всех собственных элементов оператора* A, *соответствующих числу* λ, *и нулевого элемента* 0,— *линейное подмножество множества* D.

Для доказательства этой теоремы нужно дословно повторить первую часть доказательства теоремы 10.4.1.

Т е о р е м а 10.5.2. *Если* x *— собственный элемент симметричного оператора* A, *соответствующий числу* λ, *а* y *— собственный элемент, соответствующий числу* μ, *и* $\lambda \neq \mu$, *то* $x \perp y$.

Доказывается так же, как теорема 10.4.2.

Вместо теоремы 10.4.3 установим следующее более простое предложение: *если* A *— симметричный оператор и* $(Ax, x) \geqslant 0$ *при всех* $x \in D$, *то всякое собственное число оператора* A *не отрицательно.* Действительно, если λ — собственное число, а x — соответствующий ему собственный элемент, то

$$\lambda \| x \|^2 = \lambda (x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) \geqslant 0,$$

откуда и следует, что $\lambda \geqslant 0$.

Докажем еще одну лемму, используемую в дальнейшем.

Л е м м а 10.5.1. *Если у симметричного оператора* A *существует обратный оператор* A^{-1}, *то этот оператор* A^{-1} *тоже симметричен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из общих свойств обратных операторов (см. 8.7, предложение б)) следует, что оператор A^{-1} аддитивен и однороден. Его областью задания служит линейное множество $A(D)$ (см. 8.7, предложение а)). Возьмем произвольные элементы $x, y \in A(D)$. Тогда существует такой $z \in D$, что $Az = y$ (или $z = A^{-1}y$). Используя симметричность оператора A и включение $A^{-1}x \in D$, мы сразу находим

$$(A^{-1}x, y) = (A^{-1}x, Az) = (AA^{-1}x, z) = (x, z) = (x, A^{-1}y).$$

Тем самым симметричность оператора A^{-1} доказана.

10.6. Спектр самосопряженного оператора

Понятие собственных чисел оператора A тесно связано с вопросом разрешимости уравнения

$$(A-\lambda I)\,x=y, \tag{10}$$

где I — тождественный оператор. При этом заметим, что если оператор A — самосопряженный, то и оператор $A-\lambda I$ при любом λ — тоже самосопряженный как линейная комбинация двух самосопряженных операторов.

Согласно предложению в) из 8.7 *для того чтобы существовал обратный оператор* $(A-\lambda I)^{-1}$, *необходимо и достаточно*, чтобы уравнение $(A-\lambda I)\,x=\theta$ или равносильное ему $Ax=\lambda x$ имело только нулевое решение $x=\theta$, т. е. *чтобы* λ *не было собственным числом оператора* A. В этом случае уравнение (10) имеет единственное решение x при каждом y из совокупности значений оператора $A-\lambda I$. Представляет интерес выяснить некоторые свойства этой совокупности. Будем обозначать ее через V_λ.

Лемма 10.6.1. *Пусть оператор* A — *самосопряженный. Если* λ *не является его собственным числом, то совокупность* V_λ *всюду плотна в* H. *Если же* λ — *собственное число оператора* A, *то совокупность* V_λ *не может быть всюду плотной в* H.

Доказательство. Пусть сначала λ — не собственное число оператора A. Если допустить, что замыкание $[V_\lambda]\neq H$, то существует элемент $h\neq\theta$, ортогональный к $[V_\lambda]$. Так как, при любом $x\in H$, $(A-\lambda I)\,x\in V_\lambda$, то $((A-\lambda I)\,x,\,h)=0$. Вследствие самосопряженности оператора $A-\lambda I$ отсюда следует, что $(x,\,(A-\lambda I)\,h)=0$, т. е. элемент $(A-\lambda I)\,h$ ортогонален любому x, следовательно, $(A-\lambda I)\,h=\theta$ или $Ah=\lambda h$. Последнее равенство невозможно, так как λ — не собственное число. Таким образом, $[V_\lambda]=H$, т. е. V_λ всюду плотно.

Наоборот, если λ — собственное число самосопряженного оператора A, то совокупность V_λ значений оператора $A-\lambda I$ не может быть всюду плотной. Действительно, пусть L — собственное подпространство оператора A, соответствующее числу λ. Тогда оператором $A-\lambda I$ оно отображается в нулевой элемент и, следовательно, инвариантно для этого оператора. По теореме 10.3.1 ортогональное дополнение M к подпространству L тоже инвариантно для оператора $A-\lambda I$. Любой $x\in H$ можно представить в виде $x=y+z$, где $y\in L$, $z\in M$, а отсюда

$$(A-\lambda I)\,x=(A-\lambda I)\,y+(A-\lambda I)\,z=(A-\lambda I)\,z\in M.$$

Следовательно, $V_\lambda\subset M$; тогда и $[V_\lambda]\subset M$, а потому $[V_\lambda]\neq H$.

Доказанную лемму можно переформулировать еще и так: *для того чтобы λ было собственным числом самосопряженного оператора A, необходимо и достаточно, чтобы совокупность V_λ значений оператора $A - \lambda I$ не была всюду плотной в $\boldsymbol{H}$.*

Введем некоторые важные определения. Пусть A — самосопряженный оператор. Среди вещественных λ, не являющихся его собственными числами, выделим те, для которых совокупность V_λ значений оператора $A - \lambda I$ совпадает с $\boldsymbol{H}$ и обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ линеен (иными словами, оператор $A - \lambda I$ обратим). Эти значения λ называются *регулярными*. Множество всех собственных чисел оператора A обозначим через S, множество регулярных чисел — через R, множество остальных вещественных чисел — через N. Сумма $S \cup N$ называется *спектром* оператора A.

Т е о р е м а 10.6.1. *Для того чтобы число λ было регулярным для самосопряженного оператора A, необходимо и достаточно, чтобы $V_\lambda = \boldsymbol{H}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия вытекает из определения регулярных чисел. Докажем его достаточность.

Если $V_\lambda = \boldsymbol{H}$, то по предыдущей лемме λ не может быть собственным числом. Тогда существует обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ и этот оператор по лемме 10.5.1 симметричен. Но так как $V_\lambda = \boldsymbol{H}$, то область определения оператора $(A - \lambda I)^{-1}$ совпадает с $\boldsymbol{H}$, а тогда по теореме 10.2.2 оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ линеен. Тем самым число λ регулярно.

Сопоставляя доказанную теорему с леммой, мы можем образовать следующую таблицу, показывающую, какому типу совокупности V_λ соответствует включение числа λ в множество R, S или N:

$V_\lambda = \boldsymbol{H}$	$\lambda \in R$
$[V_\lambda] \neq \boldsymbol{H}$	$\lambda \in S$
$V_\lambda \neq \boldsymbol{H}$, но $[V_\lambda] = \boldsymbol{H}$	$\lambda \in N$

Дадим еще некоторые определения. Если множество S пусто, то спектр называется *чисто непрерывным*. В случае же, когда $S \neq \Lambda$, рассмотрим множество всех собственных элементов оператора A и образуем порождаемое этим множеством подпространство $\boldsymbol{H}_1$ пространства $\boldsymbol{H}$. Если $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}$, спектр оператора A называется *чисто точечным*. Ниже мы увидим, что при чисто точечном спектре множество N не только не обязано быть пустым, но может быть даже несчетным.

Т е о р е м а 10.6.2. *Для любого самосопряженного оператора A существует такое разложение пространства $\boldsymbol{H}$ на два инвариантных ортогональных подпространства $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$, что на $\boldsymbol{H}_1$*

оператор A имеет чисто точечный спектр, а на H_2 — чисто непрерывный *).

Доказательство. Как и выше, обозначим через H_1 подпространство, порождаемое множеством собственных элементов оператора A, а через L — линейную оболочку того же множества **). Тогда $[L] = H_1$. Докажем, что H_1 инвариантно.

Если $x \in L$, то $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$, где x_i — собственные элементы. Пусть при этом x_i соответствует собственному числу λ_i. Тогда

$$Ax = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (Ax_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i x_i \in L.$$

Для произвольного $x \in H_1$ имеем $x = \lim x_n$, где $x_n \in L$, а $Ax = \lim Ax_n$. Но $Ax_n \in L$, а тогда $Ax \in H_1$.

По определению оператор A на H_1 имеет чисто точечный спектр. Обозначим через H_2 ортогональное дополнение к H_1. В H_2 у оператора A нет ни одного собственного элемента (так как они все входят в H_1), следовательно, на H_2 оператор A имеет чисто непрерывный спектр.

Теорема 10.6.3. *Спектр любого самосопряженного оператора — замкнутое множество.*

Доказательство. Докажем, что дополнительное к спектру множество R регулярных чисел — открытое. Пусть $\lambda_0 \in R$. Применим теорему 8.7.4 и положим $U = A - \lambda_0 I$, $V = A - \lambda I$. Тогда $\| V - U \| = |\lambda - \lambda_0| \, \| I \| = |\lambda - \lambda_0|$, следовательно, если $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\| (A-\lambda_0 I)^{-1} \|}$, то $V = A - \lambda I$ обратим, т. е. $\lambda \in R$. Таким образом, произвольная точка λ_0 из R оказывается его внутренней точкой, а это и означает, что R открыто.

Лемма 10.6.2. *Для того чтобы число λ было регулярным для самосопряженного оператора A, необходимо и достаточно существование такой постоянной $k > 0$, что при всех $x \in H$*

$$\| (A - \lambda I) x \| \geqslant k \| x \|. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость этого условия доказана в теореме 8.7.2. Докажем его достаточность, а для этого по теореме 10.6.1 достаточно показать, что $V_\lambda = H$.

---

*) Мы говорим, «оператор A на подпространстве H_1», понимая под этим тот оператор, который определится на H_1 (со значениями в H_1), если оператор A рассмотреть только на этом подпространстве.

**) Если собственных элементов у оператора A нет, то за H_1 принимается нулевое подпространство.

По той же теореме 8.7.2 из условия (11) вытекает, что обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует и линеен на множестве V_λ значений оператора $A - \lambda I$. Следовательно, λ — не собственное число и по лемме 10.6.1 V_λ всюду плотно в H. Докажем, что $V_\lambda = H$.

Возьмем произвольно $y \in H$. Тогда $y = \lim y_n$, где $y_n \in V_\lambda$, и, следовательно, существуют такие $x_n \in H$, что

$$y_n = (A - \lambda I)\, x_n.$$

Из (11) вытекает, что

$$\| x_n - x_m \| \leqslant \frac{1}{k} \| (A - \lambda I)(x_n - x_m) \| = \frac{1}{k} \| y_n - y_m \|,$$

и так как $\| y_n - y_m \| \to 0$ при $n, m \to \infty$, то и последовательность $\{ x_n \}$ — фундаментальная. Вследствие полноты H существует $x = \lim x_n$, а вследствие непрерывности оператора $A - \lambda I$

$$(A - \lambda I)\, x = \lim (A - \lambda I)\, x_n = \lim y_n = y,$$

и потому $y \in V_\lambda$. Лемма доказана.

Т е о р е м а 10.6.4. *Для того чтобы число λ принадлежало спектру самосопряженного оператора A, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность таких элементов $x_n \in H$ с нормой $\| x_n \| = 1$, для которых*

$$Ax_n - \lambda x_n \to \theta \text{ *}). \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для того чтобы λ принадлежало спектру, необходимо и достаточно, чтобы не существовало постоянной $k > 0$, удовлетворяющей при всех $x \in H$ условию (11). Но условие (11) равносильно

$$\| (A - \lambda I)\, x \| \geqslant k \quad \text{при} \quad \| x \| = 1 \text{ **}). \tag{13}$$

Нарушение же условия (13) и означает наличие такой последовательности элементов $x_n \in H$ с нормой $\| x_n \| = 1$, для которой $\| (A - \lambda I)\, x_n \| \to 0$, что равносильно (12).

Следующая теорема является обобщением теоремы 10.4.3.

Т е о р е м а 10.6.5. *Весь спектр самосопряженного оператора A заключен между его границами M_A и m_A.*

---

*) Для собственных значений λ это предельное соотношение переходит в равенство $Ax - \lambda x = \theta$, если все x_n взять равными, например, одному и тому же собственному элементу x.

**) (13) есть очевидное следствие из (11). Обратно, если (13) выполнено, то для любого $x \neq \theta$

$$\left\| (A - \lambda I) \left(\frac{x}{\| x \|} \right) \right\| \geqslant k,$$

а это и дает (11). Для $x = \theta$ неравенство (11) тривиально.

Доказательство. Докажем, что всякое число λ, лежащее вне отрезка $[m_A, M_A]$, регулярно. Пусть, например, $\lambda < m_A$. Имеем при $\|x\| = 1$

$$(Ax, x) \geqslant m_A, \qquad (\lambda I x, x) = \lambda (x, x) = \lambda,$$

а потому

$$((A - \lambda I) x, x) \geqslant m_A - \lambda.$$

Но по неравенству Коши—Буняковского

$$|((A - \lambda I) x, x)| \leqslant \|(A - \lambda I) x\| \|x\|,$$

следовательно, при $\|x\| = 1$

$$\|(A - \lambda I) x\| \geqslant m_A - \lambda,$$

т. е. выполнено (13) с постоянной $k = m_A - \lambda$. Условие (13) равносильно (11) и по лемме 10.6.2 λ регулярно. Аналогично рассматривается случай, когда $\lambda > M_A$.

Следующая теорема обеспечивает непустоту спектра самосопряженного оператора.

Теорема 10.6.6. *Границы M_A и m_A всякого самосопряженного оператора A входят в его спектр.*

Доказательство. Проведем рассуждение для верхней границы M_A. Аналогично доказывается, что и нижняя граница m_A принадлежит спектру.

Допустим сначала, что $\|A\| = M_A$. По определению M_A существуют элементы $x_n \in \boldsymbol{H}$ с нормой $\|x_n\| = 1$, для которых $(Ax_n, x_n) \to M_A$. Проверим, что

$$Ax_n - M_A x_n \to \theta. \tag{14}$$

Имеем

$$0 \leqslant \|Ax_n - M_A x_n\|^2 = \|(A - M_A I) x_n\|^2 =$$
$$= ((A - M_A I) x_n, (A - M_A I) x_n) = \|Ax_n\|^2 - 2M_A (Ax_n, x_n) + M_A^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2M_A^2 - 2M_A (Ax_n, x_n) \to 0,$$

откуда $\|Ax_n - M_A x_n\| \to 0$, т. е. доказано (14). Теперь уже из теоремы 10.6.4 сразу следует, что число M_A принадлежит спектру.

Переходим к общему случаю. Положим $B = A - m_A I$. Тогда при $\|x\| = 1$

$$(Bx, x) = ((A - m_A I) x, x) = (Ax, x) - m_A,$$

следовательно,

$$M_B = \sup_{\|x\|=1} (Bx, x) = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) - m_A = M_A - m_A,$$
$$m_B = \inf_{\|x\|=1} (Bx, x) = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x) - m_A = m_A - m_A = 0.$$

Таким образом, $\|B\| = M_B$ (см. 10.2) и, по доказанному, M_B входит в спектр оператора B, а тогда существует последовательность элементов $x_n \in M$ с нормой $\|x_n\| = 1$, для которой

$$Bx_n - M_B x_n \to \theta.$$

Но

$$Bx_n - M_B x_n = (A - m_A I)\, x_n - (M_A - m_A)\, x_n = Ax_n - M_A x_n,$$

и поэтому $Ax_n - M_A x_n \to \theta$, а тогда M_A входит в спектр оператора A.

Обратим внимание читателя на то, что из доказанной теоремы не следует существование собственных чисел. Спектр оператора может быть не пуст за счет множества N, и мы лишь доказали, что по крайней мере одно из множеств S или N не пусто.

Приведем некоторые примеры.

1°. Диагональный оператор в l^2. Рассмотрим линейный оператор A в l^2, определяемый матрицей, у которой $a_{ik} = 0$ всегда, когда $i \neq k$ [см. формулы (17) из 8.8]. Такие матрицы называют диагональными. Для элементов же a_{ii}, стоящих по диагонали, введем другое обозначение: $a_{ii} = \lambda_i$. Предположим, что множество чисел λ_i ограничено, и пусть $M = \sup \lambda_i$, $m = \inf \lambda_i$. Каждый элемент $x = \{x_i\} \in l^2$ переводится оператором A в элемент y с координатами

$$y_i = \lambda_i x_i. \tag{15}$$

При этом $y \in l^2$ и оператор A ограничен (а следовательно, и линеен), что вытекает из элементарных оценок:

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 x_i^2 \leqslant (\sup |\lambda_i|)^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = (\sup |\lambda_i|)^2 \|x\|^2.$$

Кроме того, из симметричности матрицы вытекает, что оператор A — самосопряженный.

Далее, при любом $x \in l^2$, $(Ax, x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i^2$, откуда

$$m \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leqslant (Ax, x) \leqslant M \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2,$$

а при $\|x\| = 1$ имеем $m \leqslant (Ax, x) \leqslant M$. При этом $(Ae_i, e_i) = \lambda_i$ (e_i есть i-й координатный орт). Следовательно, существуют элементы x с нормой $\|x\| = 1$, для которых (Ax, x) сколь угодно близко к M или к m, а потому

$$M_A = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) = M, \qquad m_A = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x) = m.$$

Для $x = e_i$ имеем по (15) $y_i = \lambda_i$, $y_j = 0$ при $j \neq i$, т. е. $Ae_i = \lambda_i e_i$. Таким образом, каждое из чисел λ_i — собственное число оператора A, а координатные орты — собственные элементы. Из формулы (15) ясно, что никакое число, отличное от всех λ_i, не является собственным. Таким образом, $S = \{\lambda_i\}$.

Так как спектр оператора A по теоремам 10.6.3 и 10.6.5— замкнутое множество и содержится в отрезке $[m, M]$, то:

1) все предельные точки множества S входят в спектр;

2) все числа, лежащие вне отрезка $[m, M]$, регулярны.

Покажем, что в нашем примере спектр совпадает с замыканием $[S]$. Пусть $\lambda \in [S]$. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что в интервале $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$ нет ни одного из чисел λ_i, т. е. $|\lambda - \lambda_i| \geqslant \delta$ при всех i. Раскладывая любой $x \in l^2$ и Ax по координатным ортам, имеем

$$(A - \lambda I)x = Ax - \lambda x = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i - \lambda \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda) x_i e_i,$$

откуда

$$\|(A - \lambda I)x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda)^2 x_i^2 \geqslant \delta^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = \delta^2 \|x\|^2$$

и λ по лемме 10.6.2 регулярно.

Так как все координатные орты — собственные элементы, то линейная оболочка множества собственных элементов всюду плотна в l^2, а потому спектр оператора A — чисто точечный.

Однако не исключена возможность, что спектр оператора A, будучи чисто точечным, заполняет весь отрезок $[m, M]$. Действительно, множество рациональных чисел, содержащихся в $[m, M]$, счетно; поэтому их можно перенумеровать. Пусть это и будут числа λ_i. В таком случае любая точка отрезка $[m, M]$ является предельной для множества S, следовательно, $[S] = [m, M]$. Множество N состоит при этом из всех иррациональных чисел отрезка $[m, M]$.

2°. Оператор умножения на независимую переменную в пространстве L^2.

Для простоты рассмотрим пространство L^2, составленное из функций, заданных на отрезке $[0, 1]$. Пусть B есть оператор умножения на t, т. е. $y = Bx$ означает, что $y(t) = tx(t)$. Ясно, что оператор B аддитивен, а значения $Bx \in L^2$ и $\|Bx\| \leqslant \|x\|$. Таким образом, оператор B — линейный

По определению скалярного произведения в L^2 имеем при любых $x, z \in L^2$

$$(Bx, z) = \int_0^1 [tx(t)]\, z(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, [tz(t)]\, dt = (x, Bz),$$

т. е. оператор B — самосопряженный. Кроме того, B — положительный

оператор. Действительно, для любого $x \in L^2$

$$(Bx,\ x) = \int_0^1 tx^2(t)\,dt \geqslant 0.$$

По неравенству Коши—Буняковского $(Bx,\ x) \leqslant \|Bx\|\,\|x\| \leqslant \|x\|^2$. следовательно, при $\|x\| = 1$

$$0 \leqslant (Bx,\ x) \leqslant 1,$$

откуда $0 \leqslant m_B \leqslant M_B \leqslant 1$. Покажем, что $m_B = 0$, $M_B = 1$.

Зададим $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$ и положим

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \varepsilon < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда $\|x\| = \sqrt{\int_0^1 x^2(t)\,dt} = 1$. Значение Bx есть функция

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\sqrt{\varepsilon}} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \varepsilon < t \leqslant 1, \end{cases}$$

а потому

$$(Bx,\ x) = \int_0^\varepsilon \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,dt = \frac{t^2}{2\varepsilon}\Big|_0^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вследствие произвольности ε отсюда выгекает, что $m_B = 0$.

Теперь положим

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant t < 1-\varepsilon, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & \text{при } 1-\varepsilon \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда опять, $\|x\| = 1$, а

$$(Bx,\ x) = \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,dt = \frac{t^2}{2\varepsilon}\Big|_{1-\varepsilon}^1 = \frac{1-(1-\varepsilon)^2}{2\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Снова вследствие произвольности ε заключаем, что $M_B = 1$.

Легко видеть, что оператор B не имеет собственных чисел, т. е. что его спектр — чисто непрерывный. Действительно, если при некотором λ для элемента $x \in L^2$ выполнено соотношение $Bx = \lambda x$, т. е.

$$tx(t) = \lambda x(t)$$

для почти всех $t \in [0, 1]$, то $x(t) = 0$ почти всюду, а это и значит, что $x = \theta$

По теореме 10.6.5 спектр оператора B содержится в отрезке $[m_B, M_B] = [0, 1]$. Покажем, что он заполняет весь этот отрезок. Для этого нужно установить, что если $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то число λ не регулярно. Последнее же будет вытекать из теоремы 10.6.1, если мы убедимся, что совокупность V_λ

значений оператора $B - \lambda I$ не совпадает с L^2. Проверим, что функция $y(t) \equiv 1$ не входит в V_λ. Действительно, если бы существовал такой $x \in L^2$, для которого $(B - \lambda I)x = y$, т. е.

$$(t - \lambda)\, x(t) = 1 \quad \text{почти всюду на } [0, 1],$$

то мы имели бы

$$x(t) = \frac{1}{t - \lambda}$$

почти всюду, а эта функция не принадлежит L^2 (она даже не суммируема).

Итак, λ не регулярно, т. е. входит в спектр. Таким образом, для оператора B множество $N = [0, 1]$ *).

10.7. Интегральные самосопряженные операторы

Обратимся снова к интегральному оператору вида

$$y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt, \tag{16}$$

входящему в интегральное уравнение Фредгольма. Этот оператор обозначим тоже буквой K, и тогда соотношение (16) примет вид $y = Kx$. Сначала предполагаем ядро $K(s, t)$ непрерывной функцией, определенной в квадрате $a \leqslant s,\ t \leqslant b$. Как и в 7.4, будем считать оператор K заданным в пространстве L^2 функций, определенных на отрезке $[a, b]$. При этом по лемме 7.4.1 значения Kx суть непрерывные функции, которые мы также можем считать элементами пространства L^2 (и тем самым $Kx \in C_{L^2}$).

Оператор K аддитивен. Докажем его ограниченность в пространстве L^2 **). Пусть $M = \max\limits_{a \leqslant s,\, t \leqslant b} |K(s, t)|$. Тогда по неравенству (3) из гл. VII

$$|y(s)| = \left| \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \right| \leqslant M \sqrt{b - a}\, \|x\| \tag{17}$$

и

$$\|y\|^2 = \int_a^b y^2(s)\, ds \leqslant M^2 (b - a)^2 \|x\|^2.$$

Следовательно, оператор K ограничен и $\|K\| \leqslant M(b - a)$.

---

*) В первом издании этой книги показано, как исследовать оператор умножения на независимую переменную, если опираться на конструкцию пространства L^2.

**) В 8.3 мы проверили линейность K как оператора, отображающего C в C.

Можно показать, что $\| K \| \leqslant B$, где B — постоянная, определенная в 7.4 (см. формулу (12) из гл. VII). Действительно, по неравенству Коши — Буняковского

$$| y(s) |^2 \leqslant \int_a^b K^2(s, t)\, dt \int_a^b x^2(t)\, dt = \int_a^b K^2(s, t)\, dt \cdot \| x \|^2,$$

а тогда

$$\| y \|^2 = \int_a^b y^2(s)\, ds \leqslant \int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, ds\, dt \cdot \| x \|^2 = B^2 \| x \|^2.$$

Эта оценка справедлива не только для оператора (16) с непрерывным ядром, но и при любом ядре, суммируемом с квадратом, т. е. таким, для которого $B < +\infty$. Таким образом, *всякий оператор* (16), *ядро которого суммируемо с квадратом,— линейный оператор, переводящий* L^2 *в самого себя.*

Ядро называется *симметричным*, если $K(t, s) = K(s, t)$. Покажем, что *оператор* K *с симметричным ядром — самосопряженный* *).

Для любых двух функций $x,\ z \in L^2$

$$(Kx, z) = \int_a^b \left(\int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \right) z(s)\, ds = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, z(s)\, ds\, dt,$$

где справа стоит двойной интеграл по квадрату $a \leqslant s,\ t \leqslant b$. С другой стороны, аналогично

$$(x, Kz) = (Kz, x) = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, z(t)\, x(s)\, ds\, dt.$$

Меняя между собою в последнем интеграле обозначения переменных s и t и учитывая, что $K(t, s) = K(s, t)$, получим

$$(x, Kz) = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, z(s)\, x(t)\, ds\, dt,$$

т. е. $(Kx, z) = (x, Kz)$.

В следующей главе будет доказано, что оператор K с симметричным ядром всегда имеет по крайней мере одно собственное число. При этом для собственных чисел $\lambda \neq 0$ собственные элементы удовлетворяют соотношению $x = \frac{1}{\lambda} Kx$. В случае, если ядро $K(s, t)$ непрерывно, элемент Kx есть непрерывная функция,

*) При этом достаточно потребовать выполнения равенства $K(t, s) = K(s, t)$ почти всюду в квадрате $a \leqslant s,\ t \leqslant b$. Однако если ядро непрерывно, то из выполнения этого равенства почти всюду уже будет следовать, что $K(t, s) = K(s, t)$ во всех точках квадрата.

а тогда и x оказывается непрерывной функцией. Таким образом, *для оператора* (16) *с непрерывным ядром собственные элементы, соответствующие числам* $\lambda \neq 0$, *суть непрерывные функции.*

Приведем нашу терминологию в соответствие с той, которая употребляется в теории интегральных уравнений. В этой теории однородное уравнение Фредгольма обычно записывается в такой форме:

$$x(s) = \mu \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$$

(μ — параметр). Это уравнение в наших операторных обозначениях имеет вид

$$x = \mu K x. \tag{18}$$

При $\mu = 0$ уравнение (18) имеет, очевидно, только нулевое решение $x = \theta$. Те значения μ (непременно отличные от нуля), при которых уравнение (18) имеет решения $x \neq \theta$, называются *характеристическими числами уравнения* (18). При $\mu \neq 0$ уравнение (18) может быть записано в равносильной форме:

$$Kx = \frac{1}{\mu} x,$$

следовательно, каждому характеристическому числу μ уравнения (18) отвечает собственное число $\frac{1}{\mu}$ оператора K и, обратно, каждому собственному числу $\lambda \neq 0$ оператора K отвечает характеристическое число $\frac{1}{\lambda}$ уравнения (18). При этом собственные элементы оператора K совпадают с ненулевыми решениями уравнения (18), которые и в теории интегральных уравнений тоже называются *собственными функциями.*

10.8. Дифференциальные симметричные операторы

При решении многих задач математической физики важную роль играют дифференциальные уравнения вида

$$-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}\right) - q(t)\, x(t) = \lambda x(t), \tag{19}$$

называемые *уравнениями Штурма — Лиувилля.* Функции $p(t)$ и $q(t)$ мы считаем непрерывными на отрезке $[a, b]$, причем $p(t)$ имеет непрерывную производную 1-го порядка, λ — вещественный параметр. Пусть искомая функция подчинена некоторым краевым условиям. Для простоты ограничимся условиями

$$x(a) = x(b) = 0. \tag{20}$$

Однако дальнейшие выводы справедливы и при некоторых других краевых условиях. Таким образом, решение уравнения (19) мы ищем среди функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ со своими производными 1-го и 2-го порядка и удовлетворяющих условиям (20). Множество таких функций обозначим через D и рассмотрим его как подмножество в пространстве L^2, построенном на отрезке $[a, b]$. Ясно, что подмножество D — линейное.

Левая часть уравнения (19) представляет результат применения к функции $x(t)$ некоторого дифференциального оператора. Обозначим этот оператор буквой U и будем считать, что он задан на множестве D. Значения оператора Ux — непрерывные функции, но мы будем считать их элементами пространства L^2. Уравнение (19) можно переписать в виде

$$Ux = \lambda x.$$

Ясно, что оператор U аддитивен и однороден. В 8.11 мы рассматривали дифференциальный оператор более общего вида и доказали его линейность. Но там мы рассматривали этот оператор в пространствах с другой нормировкой. В пространстве же D с метрикой, перенесенной из L^2, оператор U не обладает свойством непрерывности.

Покажем, что оператор U симметричен. При произвольных $x, y \in D$

$$(Ux, y) = -\int_a^b [(px')' + qx]\, y\, dt = -\int_a^b (px')'\, y\, dt - \int_a^b qxy\, dt. \quad (21)$$

Преобразуем первый интеграл посредством двукратного применения формулы интегрирования по частям. Учитывая краевые условия (20), которым удовлетворяют $x(t)$ и $y(t)$, получим

$$\int_a^b (px')'\, y\, dt = (px')\, y \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b (px')\, y'\, dt = -\int_a^b x'\, (py')\, dt =$$

$$= -x\,(py') \Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b x\,(py')'\, dt = \int_a^b x\,(py')'\, dt.$$

Отсюда

$$(Ux, y) = -\int_a^b x\,(py')'\, dt - \int_a^b qxy\, dt = -\int_a^b x\,[(py')' + qy]\, dt = (x, Uy).$$

Будем считать теперь, что $p(t) \geqslant 0$, а $q(t) \leqslant 0$. Вычислим (Ux, x) для произвольного $x \in D$, используя формулу (21) и одно-

кратное преобразование первого интеграла по формуле интегрирования по частям. Получим

$$(Ux,\ x) = -\int_a^b (px')'\,x\,dt - \int_a^b qx^2\,dt = \int_a^b px'^2\,dt - \int_a^b qx^2\,dt. \quad (22)$$

Отсюда следует, что

$$(Ux,\ x) \geqslant 0. \quad (23)$$

Из установленных свойств оператора U вытекает, что для него справедлива теорема 10.5.2, т. е. собственные элементы оператора U, соответствующие различным собственным числам, взаимно ортогональны. Кроме того, при сделанных предположениях относительно знаков функций $p(t)$ и $q(t)$, благодаря (23) можно утверждать, как это показано в 10.5, что все собственные числа оператора U не отрицательны. Но собственные числа оператора U и являются теми значениями параметра λ, при которых уравнение (19) имеет решения, отличные от нулевого и удовлетворяющие условиям (20), а собственные элементы суть эти решения. Таким образом, мы получили некоторые важные для математической физики свойства решений уравнения Штурма — Лиувилля. В конце следующей главы, определив обратный оператор U^{-1}, мы проведем более полное исследование собственных функций этого уравнения.

В качестве примера рассмотрим на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \pi$ уравнение

$$-x'' = \lambda x \quad (24)$$

с краевыми условиями $x(0) = x(\pi) = 0$. Это уравнение получается из (19), если положить $p(t) \equiv 1$, $q(t) \equiv 0$. Так как все собственные числа $\lambda \geqslant 0$, то, полагая $\lambda = \mu^2$, где $\mu \geqslant 0$, мы приведем уравнение (24) к виду

$$x'' + \mu^2 x = 0.$$

При $\mu > 0$ общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$x = C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t.$$

Так как $x(0) = C_1$, то по первому краевому условию $C_1 = 0$, следовательно, $x(t) = C_2 \sin \mu t$, а тогда $x(\pi) = C_2 \sin \mu\pi$, и по второму краевому условию $C_2 \sin \mu\pi = 0$. Но если положить $C_2 = 0$, то мы получим $x(t) \equiv 0$. Чтобы найти ненулевое решение задачи, оставим C_2 произвольным и потребуем, чтобы $\sin \mu\pi = 0$, а это возможно только, если μ равно любому натуральному числу n. Таким образом, собственные значения λ суть $\lambda_n = n^2$ и каждому

собственному числу можно сопоставить собственную функцию, т. е. решение, $x_n(t) = \sin nt$ (C_2 полагаем равным единице). Эти собственные функции образуют известную систему синусов, ортогональную на отрезке $[0, \pi]$.

Предоставляем читателю проверить, что $\lambda = 0$ не является в рассматриваемом примере собственным числом, т. е. что при $\lambda = 0$ среди решений уравнения (24) только нулевое удовлетворяет заданным краевым условиям.

Легко проверить, что оператор $Ux = -x''$, соответствующий уравнению (24), не ограничен. Действительно, для собственного элемента x_n имеем $Ux_n = n^2 x_n$, следовательно, $\| Ux_n \| = n^2 \| x_n \|$. Поэтому не существует такой постоянной C, чтобы неравенство $\| Ux \| \leqslant C \| x \|$ было выполнено при всех $x \in D$.

10.9. Самосопряженные операторы в комплексном гильбертовом пространстве

В комплексном гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$ самосопряженный оператор определяется так же, как и в вещественном; это — линейный (т. е. аддитивный, однородный и непрерывный) оператор A, для которого при любых $x, y \in \widetilde{H}$ выполнено равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$. В целом теория самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве сходна с их теорией в вещественном пространстве, однако в комплексном гильбертовом пространстве в этой теории появляются и новые принципиальные факты. Отметим некоторые из них.

Хотя в комплексном пространстве $\widetilde{H}$ скалярное произведение двух элементов может иметь любые комплексные значения, но если A — самосопряженный оператор, то (Ax, x) имеет вещественное значение при любом $x \in \widetilde{H}$. Действительно, с одной стороны, по свойствам скалярного произведения $(x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$, а, с другой, по определению самосопряженного оператора $(x, Ax) = (Ax, x)$, откуда $\overline{(Ax, x)} = (Ax, x)$, следовательно, (Ax, x) — вещественно. Более того, можно доказать, что вещественность (Ax, x) при любом $x \in \widetilde{H}$ является не только необходимым, но и достаточным условием для самосопряженности линейного оператора A.

В комплексном пространстве собственные числа линейного оператора могут быть любыми комплексными числами. Однако собственные числа самосопряженного оператора A непременно — вещественны *). Действительно, пусть $Ax = \lambda x$ и $x \neq \theta$. Тогда

*) В 1.14 это было доказано для самосопряженных операторов в комплексном пространстве $\widetilde{R}_n$.

$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda \| x \|^2$ и так как (Ax, x) вещественно, а $\| x \| > 0$, то λ тоже вещественно.

Произведение λA самосопряженного оператора A ($\neq \Theta$) на число λ остается самосопряженным только, если λ — вещественное. Действительно, при любых $x, y \in \tilde{H}$ имеем $(\lambda Ax, y) = \lambda (Ax, y)$, а $(x, \lambda Ay) = \bar{\lambda} (x, Ay)$, и так как $(Ax, y) = (x, Ay)$, то равенство $(\lambda Ax, y) = (x, \lambda Ay)$ выполняется только если $\lambda = \bar{\lambda}$, т. е. если λ вещественно. Следовательно, только относительно линейных комбинаций самосопряженных операторов с вещественными коэффициентами можно утверждать, что они также будут самосопряженными операторами.

Заметим еще, что если для любого линейного оператора A в $\tilde{H}$ так же, как в 10.1, определить понятие сопряженного оператора A^*, то легко проверить формулу

$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*.$$

ГЛАВА XI

ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

11.1. Определение и общие свойства

В ряде вопросов, относящихся к линейным операторам, наиболее законченные результаты удается получить в том случае, когда оператор обладает некоторым дополнительным свойством — полной непрерывности. Вполне непрерывные операторы представляют большой интерес и в произвольных нормированных пространствах, но в этом общем случае мы ограничимся лишь установлением некоторых основных фактов, а затем перейдем к рассмотрению вполне непрерывных операторов, преимущественно — самосопряженных, в гильбертовом пространстве.

Пусть X и Y — нормированные пространства, U — аддитивный оператор, отображающий X в Y.

Определение. Аддитивный оператор U называется *вполне непрерывным*, если образ любого ограниченного множества из пространства X — компактное множество в пространстве Y.

Предлагаем читателю убедиться, что для полной непрерывности аддитивного оператора достаточно, чтобы образ какого-нибудь одного шара из X, например единичного S^* ($\| x \| \leqslant 1$), был компактен.

Теорема 11.1.1. *Всякий вполне непрерывный оператор линеен.*

Доказательство. По теореме 3.8.1 компактное множество всегда ограничено. Поэтому если аддитивный оператор U вполне непрерывен, то образ единичного шара $S^* \subset X$ ограничен, что в свою очередь означает ограниченность оператора U (см. 8.3). Таким образом, оператор U линеен.

Если $y = Ux$ — произвольный линейный оператор, то из неравенства (4) гл. VIII следует, что образ любого ограниченного множества тоже ограничен. Поэтому если пространство Y таково, что в нем всякое ограниченное множество компактно, то и всякий линейный оператор, отображающий X в Y, вполне непрерывен. В частности, вполне непрерывными будут линейные функ-

ционалы, а также линейные операторы, совокупность значений которых конечно-мерна (см. теорему 5.3.2)*). Однако в общем случае при произвольных X и Y можно лишь утверждать, что вполне непрерывные операторы составляют часть класса линейных операторов. Например, в пространстве l^2 множество всех координатных ортов ограничено, но из него нельзя выделить сходящейся последовательности, так как расстояние между любыми двумя различными ортами равно $\sqrt{2}$. Из этого следует, что тождественный оператор в l^2 не будет вполне непрерывным.

Теорема 11.1.2. *Если U_1, U_2 — вполне непрерывные операторы, отображающие X в Y, а λ и μ — любые числа, то и оператор $U = \lambda U_1 + \mu U_2$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть множество $E \subset X$ ограничено. В его образе $U(E)$ возьмем произвольную последовательность элементов y_n. Тогда существуют $x_n \in E$, при которых $y_n = Ux_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Положим $y_n' = U_1 x_n$, $y_n'' = U_2 x_n$. При этом $y_n = \lambda y_n' + \mu y_n''$. Так как множество $U_1(E)$ компактно, а $y_n' \in U_1(E)$, то существует частичная последовательность $\{y_{n_k}'\}$, имеющая предел. Вследствие же компактности множества $U_2(E)$ из последовательности $\{y_{n_k}''\}$ тоже можно выделить частичную $\{y_{n_{k_l}}''\}$, имеющую предел. Но так как вместе с $\{y_{n_k}'\}$ сходится и последовательность $\{y_{n_{k_l}}'\}$, то существует $\lim y_{n_{k_l}}$, что и доказывает компактность множества $U(E)$. Следовательно, оператор U вполне непрерывен.

Доказанная теорема означает, что в пространстве линейных операторов, преобразующих X в Y, вполне непрерывные операторы составляют линейное подмножество. В следующей теореме будет доказано, что, при условии полноты пространства Y, это подмножество замкнуто, т. е. является подпространством.

Теорема 11.1.3. *Если $\{U_n\}$ — последовательность вполне непрерывных операторов, преобразующих X в Y, причем пространство Y полно, и $U = \lim U_n$**), *то и оператор U вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть множество $E \subset X$ ограничено. Как мы видели в 8.6, из определения сходимости по норме вытекает, что $U_n x \to Ux$ равномерно на множестве E. Следовательно, по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что $\| U_n x - Ux \| < \varepsilon$ для всех $x \in E$. Тем самым для каждого $y \in U(E)$ найдется такой

*) Совокупность значений линейного оператора, представляющую линейное подмножество пространства Y, можно рассматривать и как самостоятельное нормированное пространство, а потому, если эта совокупность конечно-мерна, то применима теорема 5.3.2.

**) Как подчеркивалось в 8.6, эта запись обозначает равномерную сходимость $\{U_n\}$ к U.

$y' \in U_n(E)$, что $\| y - y' \| < \varepsilon$, т. е. $U_n(E)$ — ε-сеть для $U(E)$. Но, благодаря полной непрерывности оператора U_n, множество $U_n(E)$ компактно, а тогда, вследствие произвольности ε, по следствию из теоремы 3.8.3 и $U(E)$ компактно. Тем самым доказано, что оператор U вполне непрерывен.

Мы уже отмечали, что если U — произвольный линейный оператор, преобразующий $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$, то образ всякого ограниченного множества из $\boldsymbol{X}$ ограничен в $\boldsymbol{Y}$. Поэтому, *если V — вполне непрерывный оператор, преобразующий $\boldsymbol{Y}$ в пространство $\boldsymbol{Z}$, то и оператор VU вполне непрерывен.* Предлагаем читателю доказать и что если U вполне непрерывен, а V — произвольный линейный оператор, то оператор VU также вполне непрерывен.

Приведем два примера.

1. Матричный оператор. Рассмотрим оператор $y = Ax$, преобразующий $\boldsymbol{l}^2$ в самого себя, задаваемый бесконечной системой равенств

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

при условии, что $\sum\limits_{i,\,k=1}^{\infty} a_{ik}^2 < +\infty$*). Мы знаем, что такой оператор линеен и что

$$\| A \| \leqslant \sqrt{\sum_{i,\,k=1}^{\infty} a_{ik}^2} \tag{2}$$

(см. 2.7). Докажем, что он вполне непрерывен.

Введем матричные линейные операторы A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ в пространстве $\boldsymbol{l}^2$, определяемые матрицами $(a_{ik}^{(n)})$,

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

где

$$a_{ik}^{(n)} = a_{ik} \text{ при } i \leqslant n, \quad a_{ik}^{(n)} = 0 \text{ при } i > n.$$

Иными словами, матрица $(a_{ik}^{(n)})$ получается из матрицы (a_{ik}), если в последней элементы всех ее строк, начиная с $(n+1)$-й, заменить нулями. Отсюда вытекает, что если $y = A_n x$, то, каков бы ни был

*) Как и выше, мы пишем $\sum\limits_{i,\,k=1}^{\infty}$ вместо $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty}$; однако можно показать, что для положительных рядов порядок суммирования по i и k безразличен.

$x \in l^2$, $y_i = 0$ при $i > n$. Следовательно, совокупность значений каждого из операторов A_n конечно-мерна, а потому операторы A_n вполне непрерывны. Представляя разность $A - A_n$ с помощью матрицы, мы сразу видим из оценки, аналогичной (2), что

$$\| A - A_n \| \leqslant \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

а тогда оператор A вполне непрерывен по теореме 11.1.3.

2. Интегральный оператор. Рассмотрим оператор K, определяемый равенством

$$y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \tag{3}$$

с непрерывным ядром $K(s, t)$. Как и в 10.7, будем считать этот оператор заданным в пространстве L^2 функций на отрезке $[a, b]$. Значения же оператора K, которые по лемме 7.4.1 являются непрерывными функциями, будем считать элементами пространства C. Покажем, что оператор K вполне непрерывен.

Пусть множество $E \subset L^2$ ограничено: $\| x \| \leqslant N$ при $x \in E$. Тогда, полагая $M = \max | K(s, t) |$, имеем для любого $x \in E$ и при любом s [см. неравенство (17) из гл. X]

$$| y(s) | \leqslant M \sqrt{b-a}\, \| x \| \leqslant MN \sqrt{b-a},$$

следовательно, функции, составляющие множество $K(E)$, равноограничены. Из аналогичной оценки, проведенной в доказательстве леммы 7.4.1 [см. неравенство (11) гл. VII] вытекает их равностепенная непрерывность. А тогда по теореме 3.9.1 множество $K(E)$ компактно и оператор K вполне непрерывен.

Равномерная сходимость непрерывных функций влечет их сходимость по норме в пространстве L^2. Поэтому, если некоторое множество непрерывных функций оказалось компактным в пространстве C, то оно будет компактным и в пространстве L^2. Отсюда следует, что *интегральный оператор K с непрерывным ядром, рассмотренный как оператор из L^2 в самого себя, также будет вполне непрерывным.*

Последний результат можно значительно усилить. Именно, пусть ядро $K(s, t)$ — любое, суммируемое с квадратом (ср. 10.7). Всякая функция, суммируемая с квадратом, допускает сколь угодно хорошее приближение в среднем 2-го порядка с помощью непрерывных функций *). Иными словами,

*) Множество непрерывных функций всюду плотно в пространстве L^2, построенном из функций с любым (конечным) числом аргументов, в частности из функций двух переменных.

существует такая последовательность функций $K_n(s, t)$, непрерывных в квадрате $a \leqslant s, t \leqslant b$, что

$$\int_a^b \int_a^b [K(s, t) - K_n(s, t)]^2 \, ds \, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Рассмотрим интегральные операторы K_n, определяемые в пространстве L^2 равенствами

$$y(s) = \int_a^b K_n(s, t) \, x(t) \, dt.$$

По доказанному выше эти операторы вполне непрерывны. Из оценки нормы интегрального оператора, проведенной в 10.7, видно, что

$$\| K - K_n \| \leqslant \sqrt{\int_a^b \int_a^b [K(s, t) - K_n(s, t)]^2 \, ds \, dt}.$$

Следовательно, $\| K - K_n \| \to 0$, а тогда оператор K вполне непрерывен по теореме 11.1.3.

11.2. Вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве

Для вполне непрерывных операторов, преобразующих гильбертово пространство H в самого себя, мы сможем дать другую характеристику. Для простоты будем предполагать пространство H сепарабельным. Однако все сказанное ниже может быть распространено и на случай произвольного гильбертова пространства.

Определение. Последовательность элементов $x_n \in H$ называется *слабо сходящейся* к элементу $x \in H$ ($x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x$), если

$$(x_n, h) \longrightarrow (x, h) \text{ при любом } h \in H. \tag{4}$$

Проверим единственность «слабого» предела. Действительно, если $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x$ и $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} y$, то $(x, h) = (y, h)$ при всех $h \in H$, или $(x - y, h) = 0$. Но если элемент $x - y$ ортогонален всему H, то $x - y = 0$ или $x = y$.

Из непрерывности скалярного произведения вытекает, что сходимость по норме влечет слабую сходимость к тому же пределу.

Каждое из скалярных произведений (x_n, h) и (x, h) есть линейный функционал в H с аргументом h. В соответствии с определением из 9.9, соотношение (4) означает слабую сходимость последовательности линейных функционалов (x_n, h) к функционалу (x, h). А так как норма линейного функционала в H совпадает с нормой порождающего его элемента, то, следовательно, всякая слабо сходящаяся последовательность элементов ограничена (см. 9.9, предложение 1).

Возьмем произвольную ограниченную последовательность элементов $x_n \in H$. Применение теоремы 9.9.3 к последовательности функционалов (x_n, h) показывает, что из всякой ограниченной последовательности элементов пространства H можно выделить частичную слабо сходящуюся. Иными

словами, *всякое ограниченное подмножество пространства* H *слабо компактно.*

Лемма 11.2.1. *Для любого линейного оператора* A, *преобразующего* H *в самого себя, из* $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x$ *вытекает, что* $Ax_n \xrightarrow{\text{сл.}} Ax$.

Доказательство. При любом $h \in H$ имеем $(Ax_n, h) = (x_n, A^*h)$, где A^* — сопряженный линейный оператор (см. 10.1). Так как $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x$, то

$$(x_n, A^*h) \to (x, A^*h) = (Ax, h)$$

а потому и $(Ax_n, h) \to (Ax, h)$, т. е. $Ax_n \xrightarrow{\text{сл.}} Ax$.

Следующая теорема дает характеристику вполне непрерывных операторов в пространстве H.

Теорема 11.2.1. *Для того чтобы аддитивный оператор* A, *отображающий* H *в самого себя, был вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы каждая слабо сходящаяся последовательность элементов переводилась оператором* A *в сходящуюся по норме, точнее, чтобы из* $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x$ *следовало* $Ax_n \to Ax$.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть оператор A вполне непрерывен и пусть $x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x$. По лемме $Ax_n \xrightarrow{\text{сл.}} Ax$. Допустим, что $Ax_n \not\to Ax$ (по норме). Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\| Ax_{n_k} - Ax \| > \varepsilon \tag{5}$$

для бесконечной последовательности индексов n_k. С другой стороны, так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то множество $\{Ax_n\}$ компактно, а потому из последовательности $\{Ax_{n_k}\}$ можно выделить частичную сходящуюся: $Ax_{n_{k_l}} \to y'$. При этом, из неравенства (5) следует, что $y' \neq Ax$. Из сходимости по норме вытекает слабая сходимость, а потому $Ax_{n_{k_l}} \xrightarrow{\text{сл.}} y'$. Таким образом, последовательность $\{Ax_{n_{k_l}}\}$ имеет два различных слабых предела, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что $Ax_n \to Ax$.

б) Достаточность. Возьмем аддитивный оператор A, удовлетворяющий условию теоремы. Пусть $E \subset H$ — произвольное ограниченное множество. Возьмем $y_n \in A(E)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и подберем $x_n \in E$ так, что $y_n = Ax_n$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а ограниченное множество слабо компактно, то из $\{x_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность: $x_{n_k} \xrightarrow{\text{сл.}} x$, где x — некоторый элемент из H. Тогда, по условию $Ax_{n_k} \to Ax$, т. е. последовательность $\{y_{n_k}\}$ сходится, что и доказывает компактность множества $A(E)$ и, вместе с тем, полную непрерывность оператора A.

11.3. Спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора

Перейдем к изучению вполне непрерывных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве H. При этом здесь мы уже ни в какой мере не будем опираться на предположение о сепарабельности H. Фундаментальным результатом всей теории вполне

непрерывных самосопряженных операторов является теорема о существовании у таких операторов собственных чисел. В частном случае, в пространстве $\boldsymbol{R}_n$, эта теорема была доказана в 1.13*). Предварительно докажем лемму.

Лемма 11.3.1. *Всякое число, отличное от нуля и входящее в спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора* A (заданного в пространстве $\boldsymbol{H}$), *является его собственным числом.*

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$ и принадлежит спектру оператора A. Тогда по теореме 10.6.4 существуют элементы $x_n \in \boldsymbol{H}$ с нормой $\| x_n \| = 1$, для которых

$$Ax_n - \lambda x_n \to \theta. \tag{6}$$

Так как множество $\{Ax_n\}$ компактно, то существует частичная последовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\{Ax_{n_k}\}$ сходится к некоторому пределу $y \in \boldsymbol{H}$. Тогда, благодаря (6),

$$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}[Ax_{n_k} - (Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k})] \to \frac{1}{\lambda} y.$$

Следовательно,

$$y = \lim Ax_{n_k} = A\left(\frac{1}{\lambda} y\right) = \frac{1}{\lambda} Ay$$

или $Ay = \lambda y$. Кроме того, так как $\|x_{n_k}\| = 1$, то и $\left\| \frac{1}{\lambda} y \right\| = 1$ или $\| y \| = |\lambda| > 0$. Таким образом, λ — собственное число, а y — соответствующий ему собственный элемент.

Теорема 11.3.1. *Всякий вполне непрерывный самосопряженный оператор* A, *заданный в пространстве* $\boldsymbol{H}$, *имеет по крайней мере одно собственное число***). *При этом, если* $A \neq \Theta$, *то он имеет собственное число, отличное от нуля.*

Доказательство. Если $A = \Theta$, то для любого $h \in \boldsymbol{H}$ будет $Ah = 0h$, т. е. 0 — собственное число оператора A и притом — единственное.

Если же $A \neq \Theta$, то по крайней мере одна из его границ M_A или m_A отлична от нуля (см., например, теорему 10.2.1). По теореме 10.6.6 обе границы принадлежат спектру оператора A, а тогда по лемме отличная от нуля граница — собственное число.

Чтобы лучше исследовать структуру спектра вполне непрерывного самосопряженного оператора, докажем еще одну лемму.

Лемма 11.3.2. *Пусть число* $\gamma > 0$ *и пусть* $\{h_n\}$ — *какая-нибудь ортонормированная система, состоящая из собственных*

*) Линейные операторы в $\boldsymbol{R}_n$ вполне непрерывны как операторы в конечно-мерном пространстве.

**) Здесь, конечно, существенно, чтобы $\boldsymbol{H}$ содержало элементы, отличные от θ.

*элементов вполне непрерывного самосопряженного оператора A, причем элемент h_n соответствует собственному числу λ_n и $|\lambda_n| \geqslant \gamma$ *) при всех n. Тогда заданная система $\{h_n\}$ состоит только из конечного числа элементов.*

Доказательство. Допустим, что заданная система $\{h_n\}$ бесконечна. При любых n и m ($n \neq m$) по теореме Пифагора имеем

$$\|Ah_n - Ah_m\| = \|\lambda_n h_n - \lambda_m h_m\| = \sqrt{\lambda_n^2 + \lambda_m^2} \geqslant \gamma\sqrt{2}.$$

Следовательно, из последовательности $\{Ah_n\}$ нельзя выделить частичной сходящейся. Но это невозможно, так как благодаря полной непрерывности оператора A множество $\{Ah_n\}$ должно быть компактным.

Теорема 11.3.2. *Собственное подпространство вполне непрерывного самосопряженного оператора, соответствующее отличному от нуля собственному числу, конечно-мерно.*

Доказательство. Допустим, что собственное подпространство $\boldsymbol{L}$, соответствующее числу $\lambda \neq 0$, бесконечно-мерно. Тогда в нем существует бесконечная система линейно независимых собственных элементов h_n, соответствующих числу λ. Применяя к системе $\{h_n\}$ общий процесс ортогонализации (6.7), можно построить бесконечную ортонормированную систему элементов подпространства $\boldsymbol{L}$, т. е. бесконечную ортонормированную систему собственных элементов, соответствующих числу λ. Существование же такой бесконечной системы невозможно по лемме 11.3.2.

Теорема 11.3.3. *Пусть число $\gamma > 0$. Для вполне непрерывного самосопряженного оператора A может существовать лишь конечное множество собственных чисел λ, для которых $|\lambda| \geqslant \gamma$.*

Доказательство. Предположим, что существует бесконечное множество собственных чисел λ_n оператора A, для которых $|\lambda_n| \geqslant \gamma$. Каждому λ_n соответствует некоторый собственный элемент h_n с нормой $\|h_n\| = 1$. По теореме 10.4.2 элементы h_n взаимно ортогональны, и мы снова получаем противоречие с леммой 11.3.2.

Этой теореме можно придать другую форму, если ввести следующее определение: пусть S — произвольное множество точек на вещественной оси и $\lambda_0 \in S$; λ_0 называется *изолированной* точкой множества S, если существует окрестность точки λ_0, не содержащая других точек множества S. Пусть теперь $\lambda_0 \neq 0$ — собственное число оператора A. По теореме 11.3.3 существует лишь конечное множество собственных чисел λ, имеющих тот же знак,

---

*) Среди чисел λ_n могут быть, конечно, и одинаковые.

что и λ_0, и для которых $|\lambda| \geqslant \frac{|\lambda_0|}{2}$. Пусть ε — расстояние от λ_0 до ближайшего из этих λ (если множество таких λ пусто, то за ε можно взять любое положительное число). Если положить $\delta = \min\left(\varepsilon, \frac{|\lambda_0|}{2}\right)$ (на рис. 18 $\delta = \varepsilon$), то ясно, что в интервале

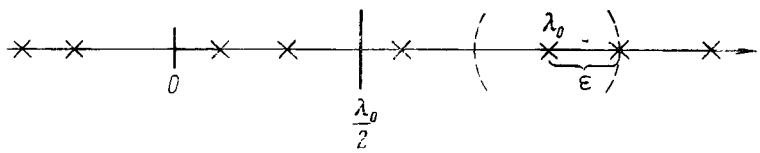

Рис. 18.

$(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ нет ни одного собственного числа, отличного от λ_0, а следовательно, благодаря лемме 11.3.1, и вообще нет других точек спектра оператора A. Таким образом, мы доказали, что *все отличные от нуля точки спектра вполне непрерывного самосопряженного оператора суть его изолированные точки.*

11.4. Разложение значений оператора по собственным элементам

Пусть A — вполне непрерывный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, причем $A \neq \Theta$. Расположим все отличные от нуля собственные числа λ оператора A в порядке убывания их абсолютных величин *). Это можно сделать, например, так. Сначала располагаем в указанном порядке все собственные числа λ, для которых $|\lambda| \geqslant 1$; таких чисел по теореме 11.3.3 может существовать лишь конечное число. Далее помещаем те собственные λ, для которых $\frac{1}{2} \leqslant |\lambda| < 1$, затем — те, для которых $\frac{1}{3} \leqslant |\lambda| < \frac{1}{2}$, и т. д. По теореме 11.3.1, хоть одно отличное от нуля собственное число существует. Если встречаются сколь угодно большие n, при которых существуют собственные числа, удовлетворяющие неравенству $\frac{1}{n+1} \leqslant |\lambda| < \frac{1}{n}$, то множество S всех собственных чисел счетно, а нуль — его предельная точка. Но не исключена возможность, что собственных чисел будет лишь конечное множество.

Каждому собственному числу $\lambda \neq 0$ соответствует конечно-мерное собственное подпространство. Выбирая в каждом из них какой-нибудь ортонормированный базис и объединяя выбран-

*) Если встречаются два собственных числа, отличающихся друг от друга только знаком, то порядок их следования для нас безразличен.

ные элементы в одну систему, получим некоторую счетную или конечную ортонормированную систему собственных элементов, которую назовем *фундаментальной*. По самому построению, не существует собственного элемента, соответствующего числу $\lambda \neq 0$, ортогонального всем элементам фундаментальной системы. Всякий собственный элемент, соответствующий числу $\lambda \neq 0$, есть линейная комбинация некоторых элементов фундаментальной системы.

Перенумеруем элементы фундаментальной системы: сначала занумеруем в любом порядке те собственные элементы, которые соответствуют наибольшему по абсолютной величине собственному числу, затем, продолжая нумерацию, занумеруем элементы, соответствующие следующему по порядку собственному числу, и т. д. Обозначим теперь элементы фундаментальной системы через h_n. Собственное число, которому соответствует элемент h_n, обозначим λ_n. При этом, так как несколько элементов h_n могут соответствовать одному и тому же λ, то возможно равенство нескольких соседних чисел λ_n между собой. Таким образом, фундаментальной системе собственных элементов $\{h_n\}$ соответствует последовательность собственных чисел $\{\lambda_n\}$, для которой

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots > 0.$$

Эта последовательность содержит все собственные числа оператора A, отличные от нуля, причем каждое такое число встречается в этой последовательности столько раз, какова размерность соответствующего ему собственного подпространства.

Заметим, что построенная нами последовательность собственных чисел $\{\lambda_n\}$ определяется по данному оператору однозначно с точностью до перестановки чисел, равных между собой по абсолютной величине (если такие есть). В то же время фундаментальная последовательность собственных элементов $\{h_n\}$ зависит от выбора базиса в каждом собственном подпространстве.

Обозначим через $\boldsymbol{L}$ подпространство пространства $\boldsymbol{H}$, порождаемое фундаментальной системой $\{h_n\}$, а через $\boldsymbol{M}$ — его ортогональное дополнение.

Лемма 11.4.1. *Подпространства $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$ суть инвариантные подпространства оператора $\boldsymbol{A}$.*

Доказательство. По теореме 10.3.1 достаточно доказать инвариантность $\boldsymbol{L}$. Пусть сначала элемент $x \in \boldsymbol{L}$ имеет вид

$$x = \sum_{k=1}^{l} a_k h_{n_k}. \tag{7}$$

Тогда

$$Ax = \sum_{k=1}^{l} a_k A h_{n_k} = \sum_{k=1}^{l} a_k \lambda_{n_k} h_{n_k} \in \boldsymbol{L}.$$

Если же x — произвольный элемент из $\boldsymbol{L}$, то $x = \lim x_p$, где x_p входят в линейную оболочку множества $\{h_n\}$, т. е. имеют вид (7). А тогда $Ax_p \in \boldsymbol{L}$ и $Ax = \lim Ax_p \in \boldsymbol{L}$.

Следующая теорема так же, как 11.3.1, является основной в теории вполне непрерывных самосопряженных операторов.

Т е о р е м а 11.4.1. *Для значений оператора Ax при любом $x \in \boldsymbol{H}$ справедливо разложение Фурье по собственным элементам фундаментальной системы*:

$$Ax = \sum_n c_n h_n, \text{ где } c_n = (Ax, h_n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о Рассмотрим оператор A на подпространстве $\boldsymbol{M}$, которое по лемме инвариантно. Ясно, что и на $\boldsymbol{M}$ оператор A — вполне непрерывный и самосопряженный. Если допустить, что на $\boldsymbol{M}$ оператор A не сводится к нулевому, то по теореме 11.3.1 в $\boldsymbol{M}$ существует собственный элемент оператора A, соответствующий отличному от нуля собственному числу. Но такого собственного элемента, ортогонального к $\boldsymbol{L}$ и, в частности, ко всем h_n, быть не может. Следовательно, $Ax = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{M}$.

Любой $x \in \boldsymbol{H}$ можно представить в виде $x = y + z$, где $y \in \boldsymbol{L}$, $z \in \boldsymbol{M}$. Тогда $Ax = Ay + Az = Ay$, а по лемме $Ay \in \boldsymbol{L}$. Следовательно, $Ax \in \boldsymbol{L}$ при всех $x \in H$. Теперь справедливость разложения Ax по элементам h_n вытекает из теоремы 6.6.3.

Для коэффициентов c_n, используя свойство самосопряженности оператора A, получаем следующие формулы:

$$c_n = (Ax, h_n) = (x, Ah_n) = (x, \lambda_n h_n) = \lambda_n (x, h_n). \tag{8}$$

Теперь мы сможем закончить исследование структуры спектра вполне непрерывного самосопряженного оператора $A \neq \Theta$.

Попутно мы уже доказали, что A — оператор с чисто точечным спектром.

Действительно, если $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{H}$, то это и значит, что подпространство, порождаемое фундаментальной системой собственных элементов, совпадает с $\boldsymbol{H}$. Если же $\boldsymbol{L} \neq \boldsymbol{H}$, то $\boldsymbol{M}$ — собственное подпространство оператора A, соответствующее числу $\lambda = 0$. Следовательно, и в этом случае подпространство, порождаемое множеством всех собственных элементов, совпадает с $\boldsymbol{H}$*).

Т е о р е м а 11.4.2. *Для того чтобы фундаментальная система собственных элементов $\{h_n\}$ была полна в $\boldsymbol{H}$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda = 0$ не было собственным числом оператора A.*

*) В частности, если пространство $\boldsymbol{H}$ сепарабельно, то из сказанного легко следует, что в нем можно построить ортонормированный базис, состоящий из собственных элементов оператора A. Этот результат отмечался в 1.13 для самосопряженных операторов в $\boldsymbol{R}_n$.

Доказательство. а) Необходимость. Если фундаментальная система $\{h_n\}$ полна, то $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{H}$, а подпространство $\boldsymbol{M}$ состоит из одного нулевого элемента. Но если бы $\lambda = 0$ было собственным числом, то соответствующие ему собственные элементы, будучи ортогональными всем h_n, входили бы в $\boldsymbol{M}$, что невозможно. Следовательно, число $\lambda = 0$ — не собственное.

б) Достаточность. По ходу доказательства теоремы 11.4.1 мы видели, что $Ax = \theta$ при всех $x \in \boldsymbol{M}$*). Следовательно, если $\lambda = 0$ — не собственное число, то $\boldsymbol{M}$ должно состоять только из нулевого элемента, а тогда $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{H}$, и фундаментальная система полна.

Теперь, учитывая все сказанное в этом и предыдущем параграфах о спектре оператора A, легко сделать следующие заключения:

1) если пространство $\boldsymbol{H}$ бесконечно-мерно, а оператор A имеет бесконечное множество собственных чисел, то $\lambda = 0$, как предельная точка этого множества, входит в спектр; однако при этом нуль может принадлежать множеству собственных чисел, а может и не принадлежать;

2) если пространство $\boldsymbol{H}$ бесконечно-мерно, но оператор A имеет лишь конечное множество собственных чисел, то фундаментальная система, будучи конечной, не может оказаться полной, а следовательно, 0 — собственное число; спектр совпадает с множеством собственных чисел;

3) если пространство $\boldsymbol{H}$ конечно-мерно, то оператор A имеет лишь конечное множество собственных чисел. В этом случае легко видеть, например, из матричного представления оператора в $\boldsymbol{E}_n$, что все числа λ, отличные от собственных, регулярны, следовательно, спектр опять совпадает с множеством собственных чисел; число 0 входит в спектр тогда и только тогда, когда оно является собственным **).

11.5. Решение уравнения $(A - \lambda I)x = y$

Считая по-прежнему оператор A вполне непрерывным и самосопряженным в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, рассмотрим уравнение

$$(A - \lambda I)x = y, \tag{9}$$

где I — тождественный оператор. Параметр λ будем считать

*) Впрочем, это вытекает и непосредственно из формулировки теоремы 11.4.1 и из того, что подпространство $\boldsymbol{M}$ инвариантно.

**) Это будет в том случае, когда число элементов фундаментальной системы меньше размерности пространства $\boldsymbol{H}$.

отличным от нуля. Тогда, по лемме 11.3.1, значения λ могут быть только регулярными или собственными числами оператора A.

Если λ — регулярное, то, по определению, совокупность V_λ значений оператора $A-\lambda I$ совпадает с $\boldsymbol{H}$ и существует обратный линейный оператор $(A-\lambda I)^{-1}$. Таким образом, уравнение (9) в этом случае имеет единственное решение при любом $y\in\boldsymbol{H}$. В частности, однородное уравнение

$$(A-\lambda I)\,x=\theta \tag{10}$$

имеет только очевидное нулевое решение.

Пусть λ — собственное число оператора A, $\boldsymbol{L}_\lambda$ — соответствующее ему собственное подпространство и $\boldsymbol{M}_\lambda$ — ортогональное дополнение к $\boldsymbol{L}_\lambda$. Подпространство $\boldsymbol{M}_\lambda$ (вместе с $\boldsymbol{L}_\lambda$) инвариантно для оператора A (см. 10.4). Но для оператора A, рассматриваемого в $\boldsymbol{M}_\lambda$, число λ уже не будет собственным, а следовательно, будет регулярным. Поэтому оператор $A-\lambda I$, рассмотренный на $\boldsymbol{M}_\lambda$, обратим и уравнение (9) имеет решение при любом $y\in\boldsymbol{M}_\lambda$. С другой стороны, для любого $x\in\boldsymbol{H}$ имеем $x=x_1+x_2$, где $x_1\in\boldsymbol{L}_\lambda$, $x_2\in\boldsymbol{M}_\lambda$, и так как $(A-\lambda I)\,x_1=Ax_1-\lambda x_1=\theta$, то $(A-\lambda I)\,x=(A-\lambda I)\,x_2\in\boldsymbol{M}_\lambda$. Поэтому уравнение (9) имеет решение только при $y\in\boldsymbol{M}_\lambda$. При этом решение оказывается не единственным. Именно, если x — какое-нибудь решение, соответствующее элементу y в правой части, то и при любом $h\in\boldsymbol{L}_\lambda$ $(A-\lambda I)(x+h)=y$, т. е. $x+h$ — тоже является решением. В частности, решением однородного уравнения (10) будет любой $x\in\boldsymbol{L}_\lambda$.

Таким образом, мы получили следующие две теоремы:

Теорема 11.5.1. *Для того чтобы уравнение* (9) *с* $\lambda\neq 0$ *имело единственное решение при любом* $y\in\boldsymbol{H}$, *необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение* (10) *имело только нулевое решение.*

Теорема 11.5.2. *Если* $\lambda\neq 0$—*собственное число оператора* A, *то для разрешимости уравнения* (9) *необходимо и достаточно, чтобы* y *был ортогонален собственному подпространству оператора* A, *соответствующему числу* λ,

Это — абстрактная форма теорем, доказанных Фредгольмом для интегральных уравнений.

Перейдем к самой технике решения уравнения (9) с помощью фундаментальной системы $\{h_n\}$ собственных элементов оператора A. Пусть, сначала, λ — не собственное число оператора A. По теореме 11.4.1 $Ax=\sum\limits_n c_n h_n$, где коэффициенты $c_n=\lambda_n(x,\,h_n)$ являются пока неизвестными. Из уравнения (9) $Ax=y+\lambda x$ или

$$x=\frac{1}{\lambda}(Ax-y)=\frac{1}{\lambda}\left(\sum_n c_n h_n-y\right). \tag{11}$$

Вследствие дистрибутивности скалярного произведения имеем при любом m

$$c_m = \lambda_m (x, h_m) = \frac{\lambda_m}{\lambda}\left[\sum_n c_n (h_n, h_m) - (y, h_m)\right] = \frac{\lambda_m}{\lambda}[c_m - (y, h_m)],$$

откуда

$$c_m = \frac{\frac{\lambda_m}{\lambda}(y, h_m)}{\frac{\lambda_m}{\lambda} - 1} = \frac{\lambda_m (y, h_m)}{\lambda_m - \lambda} *).$$

Подставляя найденные выражения коэффициентов в формулу (11), получим

$$x = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_n \frac{\lambda_n (y, h_n)}{\lambda_n - \lambda} h_n - y\right]. \tag{12}$$

Если же λ — собственное число, а $y \perp \boldsymbol{L}_\lambda$, то, записывая искомый x по формуле (11), мы тем же способом, что и выше, найдем коэффициенты c_n при всех n, для которых $\lambda_n \neq \lambda$. Коэффициенты же c_n при тех n, для которых $\lambda_n = \lambda$, остаются произвольными. Это согласуется с тем фактом, что, как показано выше, при собственном λ решение не может быть единственным.

11.6. Интегральные уравнения с симметричным ядром

В этом параграфе мы сможем, в известном смысле, завершить исследование интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(s) = \mu \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt + f(s). \tag{13}$$

Ядро $K(s,t)$ предполагаем непрерывным и симметричным. Тогда, как мы знаем из 10.7 и 11.1, интегральный оператор $\int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$, который мы обозначаем буквой K, — самосопряженный и вполне непрерывный в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}^2$. Уравнение (13) перепишем в виде

$$x = \mu K x + f.$$

Если $\mu \neq 0$, то это уравнение равносильно

$$Kx - \frac{1}{\mu} x = -\frac{1}{\mu} f.$$

*) Заметим, что $\lambda_m - \lambda \neq 0$ при всех m, так как λ не равно ни одному из собственных чисел.

Полагая $\lambda = \frac{1}{\mu}$, $y = -\frac{1}{\mu} f$, получаем уравнение

$$(K - \lambda I) x = y,$$

которое и было исследовано в предыдущем параграфе.

Будем считать, что оператор $K \neq \Theta$. Легко показать, что для этого достаточно (и необходимо), чтобы функция $K(s, t)$ не была тождественно равна нулю во всем квадрате. Действительно, пусть, например, $K(s_0, t_0) > 0$. Тогда, по непрерывности ядра существует такое $\delta > 0$, что $K(s_0, t) > 0$ при $t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$. Подберем непрерывную функцию $x(t)$ так, что $x(t) > 0$ при $t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$ и $x(t) = 0$ вне этого интервала. Тогда, если $y = Kx$, то

$$y(s_0) = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} K(s_0, t) x(t)\, dt > 0$$

и, следовательно, $y \neq \theta$.

В 10.7 мы специально останавливались на однородном интегральном уравнении Фредгольма. Там было показано, что характеристические числа интегрального уравнения с ядром $K(s, t)$ и собственные числа оператора K взаимно обратны, а собственные функции интегрального уравнения и собственные элементы интегрального оператора одинаковы. Используя результаты 11.4, можно построить фундаментальную систему собственных функций однородного интегрального уравнения $\{h_n(t)\}$. Соответствующие им характеристические числа интегрального уравнения суть $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$, где λ_n — собственные числа оператора K. При этом, так как λ_n перенумерованы в порядке убывания абсолютной величины, то

$$|\mu_1| \leqslant |\mu_2| \leqslant |\mu_3| \leqslant \ldots$$

По теореме 10.4.3 все собственные числа λ_n оператора K заключены между его границами M_K и m_K. Поэтому при всех n

$$|\lambda_n| \leqslant \max(|M_K|, |m_K|) = \|K\|.$$

Отсюда следует, что $|\mu_n| \geqslant \frac{1}{\|K\|}$ при всех n. Так как $\mu = 0$ не может быть характеристическим числом интегрального уравнения, то, таким образом, все характеристические числа интегрального уравнения удовлетворяют неравенству $|\mu| \geqslant \frac{1}{\|K\|}$.

Теоремы 11.3.2, 11.5.1 и 11.5.2, переформулированные применительно к интегральным уравнениям вида (13), носят название

основных теорем Фредгольма. При этом следует заметить, что хотя изложенные нами выше результаты применимы только к уравнениям с симметричным ядром, однако Фредгольм построил свою теорию для интегральных уравнений вида (13) с любым ядром. Чтобы получить методом функционального анализа теоремы Фредгольма для уравнений с несимметричными ядрами, нужно изучить собственные числа и собственные элементы вполне непрерывных операторов в произвольных банаховых пространствах. Такой общий подход к теории Фредгольма был дан в работах Ф. Рисса.

Так как по лемме 7.4.1 значения оператора Kx при всех $x \in \boldsymbol{L}^2$ суть непрерывные функции, то при непрерывном свободном члене $f(s)$ уравнения (13) и всякое решение последнего непрерывно. В частности, как мы знаем, все собственные функции непрерывны.

Теорема 11.4.1 означает, что всякая непрерывная функция $y(s)$, имеющая вид

$$y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt, \tag{14}$$

раскладывается в ряд Фурье по собственным функциям $h_n(t)$ фундаментальной системы

$$y = \sum_n c_n h_n, \tag{15}$$

причем ряд сходится в среднем. Однако для интегральных операторов вида (14) этот результат может быть усилен, а именно имеет место следующая теорема:

Теорема 11.6.1 (Д. Гильберт — Э. Шмидт) *). *Для всякой непрерывной функции* $y(s)$, *представимой по формуле* (14), *где* $x \in \boldsymbol{L}^2$, *справедливо разложение на отрезке* $[a, b]$ *в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье*

$$y(s) = \sum_n c_n h_n(s) \tag{16}$$

по собственным функциям интегрального оператора K **).

Доказательство. Возьмем произвольное s на отрезке $[a, b]$ и докажем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n h_n(s)|. \tag{17}$$

*) Э. Шмидт (1876—1959) — немецкий математик.

**) Ясно, что эта теорема представляет усиление теоремы 11.4.1 только, если фундаментальная система $\{h_n(t)\}$ бесконечна и именно этот случай мы дальше и будем иметь в виду.

По формуле (8) $c_n = \lambda_n (x, h_n)$ или $c_n = \lambda_n \alpha_n$, где через α_n обозначены коэффициенты Фурье элемента x относительно системы $\{h_n\}$. По определению собственных функций

$$\lambda_n h_n (s) = \int_a^b K (s, t) h_n (t)\, dt,$$

т. е. $\lambda_n h_n (s)$ при фиксированном s суть коэффициенты Фурье функции $K (s, t)$ как функции от аргумента t. По неравенству Бесселя (см. 6.6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leqslant \| x \|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 h_n^2 (s) \leqslant \int_a^b K^2 (s, t)\, dt.$$

Из сходимости двух последних рядов вытекает, как показано в 2.3, сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|\,|\lambda_n|\,|h_n (s)|$, т. е. ряда (17).

Теперь оценим остаток ряда (17). Если $M = \max |K (s, t)|$, то

$$\int_a^b K^2 (s, t)\, dt \leqslant M^2 (b - a).$$

По неравенству Коши имеем при любом p

$$\sum_{n=p}^{\infty} |c_n h_n (s)| = \sum_{n=p}^{\infty} |\alpha_n|\,|\lambda_n h_n (s)| \leqslant \sqrt{\sum_{n=p}^{\infty} \alpha_n^2} \sqrt{\sum_{n=p}^{\infty} \lambda_n^2 h_n^2 (s)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{n=p}^{\infty} \alpha_n^2} \sqrt{\int_a^b K^2 (s, t)\, dt} \leqslant M \sqrt{b - a} \sqrt{\sum_{n=p}^{\infty} \alpha_n^2}. \qquad (18)$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ сходится, то

$$\sum_{n=p}^{\infty} \alpha_n^2 \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

При этом правая часть (18) не зависит от s. Следовательно, остаток ряда (17), а вместе с ним и остаток ряда (16) равномерно стремится к нулю. Остается доказать, что $y (s)$ во всех точках совпадает с суммой ряда (16).

Действительно, если положить

$$z (s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n h_n (s),$$

то из равномерной сходимости ряда и непрерывности всех $h_n(s)$ будет вытекать непрерывность $z(s)$. Но так как равномерная сходимость влечет сходимость в среднем, то $z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n h_n$ и в смысле сходимости по норме в L^2. Сопоставляя это с (15), видим, что $y = z$, т. е. $y(s) \equiv z(s)$. Теорема доказана.

Теорема Гильберта — Шмидта вместе с теоремой 11.3.1 играет основную роль в теории интегральных уравнений с симметричным ядром.

Легко понять, что ряды в формулах (11) и (12), полученных в 11.5 для решения абстрактного уравнения (9), в случае построения их для интегрального уравнения (13) окажутся сходящимися равномерно и абсолютно.

11.7. Применение интегральных операторов к краевым задачам для уравнения Штурма — Лиувилля

На отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ рассмотрим неоднородное уравнение Штурма — Лиувилля

$$-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}\right) - q(t)x(t) - \lambda x(t) = f(t), \tag{19}$$

отличающееся от уравнения (19) из 10.8 только наличием свободного члена $f(t)$. Будем предполагать, что в отношении непрерывности и дифференцируемости $p(t)$ и $q(t)$ удовлетворяют условиям, указанным в начале 10.8, и что, кроме того, $p(t) > 0$ на всем отрезке $[a, b]$. Свободный член $f(t)$ также считаем непрерывным. Подчиним решения уравнения (19) тем же краевым условиям, что и в 10.8:

$$x(a) = x(b) = 0. \tag{20}$$

Используем обозначение оператора U, введенное в 10.8, считая этот оператор заданным по-прежнему на множестве D функций $x(t)$, имеющих на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные 1-го и 2-го порядка и удовлетворяющих краевым условиям (20) *). Тогда уравнение (19) можно переписать в виде

$$Ux - \lambda x = f. \tag{21}$$

Напомним, что значения оператора U суть непрерывные функции.

*) Так как из (19) следует, что

$$x''(t) = -\frac{p'(t)x'(t) + q(t)x(t) + \lambda x(t) + f(t)}{p(t)},$$

то на основании поставленных условий у всякой функции $x(t)$, удовлетворяющей уравнению (19), производная 2-го порядка $x''(t)$ должна не только существовать, но и быть непрерывной.

Поставим дополнительное условие, чтобы $\lambda = 0$ не было собственным числом оператора U. В этом случае оператор U называют *неособенным*. Это значит, что на множестве D равенство $Ux = \theta$ имеет место только при $x = \theta$*). Займемся сначала решением уравнения (21) при $\lambda = 0$, т. е. уравнения

$$Ux = f. \tag{22}$$

Так как $\lambda = 0$ — не собственное число оператора U, то на множестве значений последнего определен обратный оператор U^{-1} (см. 8.7, предложение в)). Следовательно, уравнение (22) при любом свободном члене не может иметь более одного решения. Мы покажем, что совокупность значений оператора U состоит из всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ и, таким образом, уравнение (22) при любом непрерывном свободном члене имеет единственное решение из множества D.

Обозначим через $u(t)$ и $v(t)$ решения однородного уравнения

$$-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}\right) - q(t)x(t) = 0, \tag{23}$$

отличные от тождественного нуля и удовлетворяющие условиям $u(a) = 0$ и $v(b) = 0$, соответственно **). Эти решения линейно независимы, так как, в противном случае, они отличались бы друг от друга постоянным множителем и мы имели бы, например, $u(b) = 0$. А тогда $u \in D$, $u \neq \theta$ и $Uu = \theta$, что невозможно, так как оператор U предположен неособенным. Вследствие линейной независимости u и v их вронскиан $w(t) \neq 0$. Вычислим $w(t)$, пользуясь формулой Остроградского — Лиувилля:

$$w(t) = w_0 e^{-\int \frac{p'(t)}{p(t)}\,dt} = w_0 e^{-\ln p(t)} = \frac{w_0}{p(t)}, \tag{24}$$

где w_0 — некоторая постоянная. При этом, так как $w(t) \neq 0$, то и $w_0 \neq 0$.

---

*) Последнее условие выполняется, например, если $q(t) \leqslant 0$. Действительно, из формулы (22) в 10.8 следует, что при $q(t) \leqslant 0$

$$(Ux, x) \geqslant \int_a^b px'^2\,dt.$$

Но если $x \neq \theta$, то из условий (20) следует, что $x(t)$ не может быть постоянной, а тогда $x'(t)$ не может быть тождественным нулем. Поэтому, благодаря условию $p(t) > 0$, интеграл $\int_a^b px'^2\,dt > 0$, следовательно, и $(Ux, x) > 0$, а поэтому равенство $Ux = \theta$ возможно только при $x = \theta$.

**) Наличие таких решений гарантируется теоремой о существовании решений для линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Теперь определим в квадрате $a \leqslant s,\ t \leqslant b$ функцию двух переменных, называемую *функцией Грина*, полагая

$$G(t,\ s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{w_0} u(t)\, v(s) & \text{при } t \leqslant s, \\ -\dfrac{1}{w_0} u(s)\, v(t) & \text{при } t \geqslant s. \end{cases}$$

Так как u и v суть непрерывные функции своих аргументов, а на диагонали квадрата, т. е. при $s = t$, оба выражения функции G совпадают, то функция Грина непрерывна во всем квадрате. Кроме того, $G(t,\ s) = G(s,\ t)$ при любых s и t. Действительно, если, например, $t \leqslant s$, то $G(t,\ s)$ вычисляется по первой формуле, а $G(s,\ t)$ — по второй (с перестановкой аргументов s и t), и в обоих случаях получается одно и то же.

Составим интегральный оператор Gf с функцией Грина в качестве ядра, полагая для любого $f \in \boldsymbol{L}^2$ (имеется в виду $\boldsymbol{L}^2$, построенное на $[a,\ b]$)

$$x(t) = \int_a^b G(t,\ s)\, f(s)\, ds; \tag{25}$$

назовем оператор G оператором Грина. Это — вполне непрерывный самосопряженный оператор того типа, который был исследован в предыдущем параграфе. Покажем, что если $f(s)$ — непрерывная функция, то $x = Gf \in D$ и удовлетворяет уравнению (22). Таким образом оператор Грина, рассмотренный только на подмножестве непрерывных функций из $\boldsymbol{L}^2$, и есть обратный оператор U^{-1}.

Так как, полагая поочередно $t = a$ и $t = b$, имеем за счет условий для u и v

$$G(a,\ s) = -\frac{1}{w_0} u(a)\, v(s) = 0,$$

$$G(b,\ s) = -\frac{1}{w_0} u(s)\, v(b) = 0,$$

то из (25) следует $x(a) = x(b) = 0$, т. е. $x(t)$ удовлетворяет краевым условиям (20).

Далее подставляя в (25) выражения функции Грина, имеем

$$x(t) = -\frac{1}{w_0}\left[v(t) \int_a^t u(s)\, f(s)\, ds + u(t) \int_t^b v(s)\, f(s)\, ds \right].$$

Дифференцируя по t, находим

$$x'(t) = -\frac{1}{w_0}\left[v'(t)\int_a^t u(s) f(s)\,ds + v(t) u(t) f(t) + \right.$$

$$\left. + u'(t)\int_t^b v(s) f(s)\,ds - u(t) v(t) f(t)\right]^{*)} =$$

$$= -\frac{1}{w_0}\left[v'(t)\int_a^t u(s) f(s)\,ds + u'(t)\int_t^b v(s) f(s)\,ds\right].$$

Так как $u'(t)$ и $v'(t)$ непрерывны, то из полученного выражения видно, что $x'(t)$ непрерывна. Далее, аналогичным образом находим

$$(p(t) x'(t))'_t = -\frac{1}{w_0}\left\{(p(t) v'(t))'\int_a^t u(s) f(s)\,ds + \right.$$

$$\left. + (p(t) u'(t))'\int_t^b v(s) f(s)\,ds + p(t) f(t)\,[v'(t) u(t) - u'(t) v(t)]\right\}.$$

В частности, из этой формулы можно найти выражение для $x''(t)$, из которого будет видно, что $x''(t)$ непрерывна, а потому $x \in D$. Теперь, вычисляя Ux, мы получим

$$-\frac{d}{dt}(p(t) x'(t)) - q(t) x(t) =$$

$$= \frac{1}{w_0}\left\{[(p(t) v'(t))' + q(t) v(t)]\int_a^t u(s) f(s)\,ds + \right.$$

$$+ [(p(t) u'(t))' + q(t) u(t)]\int_t^b v(s) f(s)\,ds +$$

$$\left. + p(t) f(t)\,[v'(t) u(t) - u'(t) v(t)]\right\}.$$

Так как $u(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют уравнению (23), то выражения в двух первых квадратных скобках обращаются в нуль.

*) Дифференцирование интеграла от непрерывной функции $\varphi(s)$ по нижнему пределу производится по формуле

$$\left(\int_t^b \varphi(s)\,ds\right)'_t = -\varphi(t).$$

В последних же квадратных скобках стоит вронскиан

$$w(t)=\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}$$

и потому, благодаря формуле (24),

$$-\frac{d}{dt}(p(t)x'(t))-q(t)x(t)=f(t),$$

т. е. $Ux=f$. Разрешимость уравнения (22) при любом непрерывном свободном члене доказана.

Перейдем к уравнению (19) или (21) с произвольным λ. Перенося член $-\lambda x$ к свободному члену, запишем уравнение (21) в виде

$$Ux=\lambda x+f. \tag{26}$$

Если $x\in D$ есть решение уравнения (26), то, по доказанному, $x=U^{-1}(\lambda x+f)$, т. е.

$$x=G(\lambda x+f), \tag{27}$$

и обратно, если x удовлетворяет уравнению (27), то $x\in D$ и является решением уравнения (26). Таким образом, отыскание решения уравнения (26), т. е. отыскание решения краевой задачи для уравнения (19) при условиях (20), равносильно нахождению решения уравнения (27). Последнее же можно записать в интегральной форме:

$$x(t)=\lambda\int_a^b G(t,\ s)x(s)\,ds+\varphi(t), \tag{28}$$

где

$$\varphi(t)=\int_a^b G(t,\ s)f(s)\,ds$$

играет роль известного свободного члена. При этом уравнения (26) и (28) оказываются однородными лишь одновременно. Именно, если $f=0$, то ясно, что $\varphi=0$. Если же, при условии непрерывности функции $f(s)$, $\varphi=0$, а по доказанному выше из $\varphi=Gf$ вытекает, что $f=U\varphi$, то и $f=0$. Отсюда следует, что собственные числа и соответствующие им собственные функции оператора Штурма — Лиувилля U совпадают с характеристическими числами и соответствующими им собственными функциями интегрального уравнения (28). Отличные же от нуля собственные числа оператора Грина получаются из собственных чисел оператора U переходом к обратным величинам. Впрочем, ниже будет

установлено, что таким путем получаются все собственные числа оператора Грина, так как $\lambda = 0$ не является его собственным числом.

Теперь докажем следующую теорему, установленную В. А. Стекловым в конце XIX столетия более сложным путем:

Теорема 11.7.1. *Всякая функция из множества D раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям оператора U.*

Доказательство. Пусть $x \in D$. Положим $Ux = f$. Тогда $f(t)$ — непрерывная функция, а $x = Gf$. Следовательно, по теореме Гильберта — Шмидта (11.6.1) функция $x(t)$ раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям оператора G. Так как при этом используются собственные функции, соответствующие отличным от нуля собственным числам, то они совпадают с собственными функциями оператора U, и теорема доказана.

Покажем, что *множество D всюду плотно в пространстве L^2*, построенном на отрезке $[a, b]$. Возьмем произвольный $x \in L^2$ и зададим $\varepsilon > 0$. Найдется такой $y \in C_{L^2}$, что $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3}$*). Пусть $M = \max |y(t)|$ на отрезке $[a, b]$. Подберем $\delta > 0$ $\left(\delta < \frac{b-a}{2}\right)$ так что $6M\sqrt{2\delta} < \varepsilon$, и положим

$$z(t) = y(t) \quad \text{при} \quad a + \delta \leqslant t \leqslant b - \delta,$$
$$z(a) = z(b) = 0,$$

а в промежутках $(a, a+\delta)$ и $(b-\delta, b)$ определим $z(t)$ по закону линейного интерполирования. Тогда $z(t)$ непрерывна, $|z(t)| \leqslant M$ и

$$\|y - z\| = \sqrt{\int_a^{a+\delta} [y(t) - z(t)]^2\, dt + \int_{b-\delta}^{b} [y(t) - z(t)]^2\, dt} \leqslant$$
$$\leqslant 2M\sqrt{2\delta} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

По теореме Вейерштрасса существует такой алгебраический полином $P(t)$, что на всем отрезке $a \leqslant t \leqslant b$

$$|z(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{6\sqrt{b-a}}.$$

Так как $z(a) = z(b) = 0$, то $|P(a)|, |P(b)| < \frac{\varepsilon}{6\sqrt{b-a}}$. Построим линейную функцию $g(t) = \alpha t + \beta$ так, что $g(a) = P(a)$,

*) Мы снова опираемся на тот факт, что множество непрерывных функций всюду плотно в пространстве L^2.

$g(b) = P(b)$. Тогда $|g(t)| < \frac{\varepsilon}{6\sqrt{b-a}}$ при всех $t \in [a, b]$. Если теперь положить $Q(t) = P(t) - g(t)$, то полином $Q(t)$ будет функцией из множества D и при этом

$$|z(t) - Q(t)| \leqslant |z(t) - P(t)| + |P(t) - Q(t)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{b-a}},$$

а тогда $\|z - Q\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Следовательно,

$$\|x - Q\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| + \|z - Q\| < \varepsilon,$$

что и доказывает плотность множества D.

Из доказанной плотности множества D в пространстве L^2 и из теоремы 11.7.1 следует, что линейная оболочка фундаментальной системы собственных функций оператора G (или, что — то же самое, оператора U) всюду плотна в L^2. Тогда подпространство, порождаемое фундаментальной системой, совпадает с L^2. Поэтому *система собственных функций неособенного оператора Штурма — Лиувилля полна в* L^2. Из этого же факта, по теореме 11.4.2, вытекает, что $\lambda = 0$ — не является собственным числом оператора Грина.

ГЛАВА XII

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

12.1. Замена точного уравнения «приближенным»

Одним из важных приложений функционального анализа является исследование приближенных методов решения различных уравнений, в первую очередь — дифференциальных, интегральных, в которых искомыми объектами являются функции, а также и других, например систем алгебраических уравнений. В настоящей главе рассмотрим некоторые методы приближенного решения функциональных уравнений. Для упрощения изложения мы в ряде теорем вводим дополнительные предположения, от которых можно было бы освободиться. Однако, несмотря на наличие таких дополнительных ограничений, мы все же сможем дать ряд интересных приложений общих теорем к конкретным уравнениям. Начнем с рассмотрения одного общего приема решения уравнений в банаховых пространствах, основанного на применении теоремы 8.7.4.

Пусть нам задано уравнение

$$(I-U)\,x=y, \tag{1}$$

где U — линейный оператор, отображающий банахово пространство X в самого себя, а I — тождественный оператор, заданный в том же пространстве. Как известно, в технике часто применяется следующий прием приближенного решения уравнений. Если данное уравнение слишком сложно, то его упрощают тем или иным способом, затем решают полученное таким образом «приближенное» уравнение, а решение последнего и принимают за приближенное решение исходного уравнения. Чтобы обосновать такой метод, рассмотрим второе уравнение

$$(I-V)\,x=y, \tag{2}$$

где V — тоже линейный оператор, отображающий X в X, которое и будет играть роль «приближенного» уравнения.

Будем считать, что

$$\|V-U\|\leqslant\delta,$$

где δ — некоторая постоянная.

Теорема 12.1.1. *Если оператор $I-U$ обратим, а*

$$\delta\|(I-U)^{-1}\|<1,$$

то оператор $I-V$ также обратим. При этом, если $x=(I-U)^{-1}y$, а $\bar{x}=(I-V)^{-1}y$ при одном и том же y, то

$$\|\bar{x}-x\|\leqslant\delta\|(I-V)^{-1}\|\,\|x\|. \tag{3}$$

Доказательство. Первая часть этой теоремы является почти дословным повторением теоремы 8.7.4 (с заменой U на $I-U$, V на $I-V$). Для доказательства неравенства (3) заметим, что

$$\bar{x}=(I-V)^{-1}y=(I-V)^{-1}(I-U)x=(I-V)^{-1}[(I-V)+(V-U)]x=$$
$$=(I-V)^{-1}(I-V)x+(I-V)^{-1}(V-U)x=$$
$$=x+(I-V)^{-1}(V-U)x.$$

Отсюда

$$\bar{x}-x=(I-V)^{-1}(V-U)x,$$

следовательно,

$$\|\bar{x}-x\|\leqslant\|(I-V)^{-1}\|\,\|V-U\|\,\|x\|\leqslant\delta\|(I-V)^{-1}\|\,\|x\|.$$

Доказанная теорема гарантирует существование решения уравнения (2) при любом y, если оператор V «достаточно близок» к U. Но эта теорема еще не дает возможности оценить погрешность, получающуюся при замене x на $\bar{x}$, так как в неравенство (3) входит норма $\|x\|$ неизвестного нам точного решения уравнения (1). Такую оценку дает следующая теорема:

Теорема 12.1.2. *При обозначениях, введенных в предыдущей теореме, если $\delta\|(I-V)^{-1}\|\leqslant q<1$, то*

$$\|\bar{x}-x\|\leqslant\frac{q}{1-q}\|\bar{x}\|. \tag{4}$$

Доказательство. С помощью неравенства (3) имеем

$$\|\bar{x}-x\|\leqslant q\|x\|\leqslant q(\|x-\bar{x}\|+\|\bar{x}\|)=q\|\bar{x}-x\|+q\|\bar{x}\|.$$

Отсюда $(1-q)\|\bar{x}-x\|\leqslant q\|\bar{x}\|$, что равносильно неравенству (4).

В следующих двух параграфах мы дадим приложения доказанных теорем.

Советским математиком Л. В. Канторовичем построена общая теория замены данного уравнения «приближенным», которое может быть задано и не в том же самом пространстве, где решается данное уравнение *).

12.2. Замена произвольного интегрального уравнения на уравнение с вырожденным ядром

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма

$$x(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt + f(s) \tag{5}$$

с непрерывным ядром и непрерывным свободным членом. Ядро $K(s, t)$ называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(s)\, \psi_i(t), \tag{6}$$

т. е. если оно представимо в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых есть произведение функции от одной переменной s на функцию от одной переменной t.

Решение уравнения с вырожденным ядром оказывается гораздо более простой задачей, чем решение уравнения с произвольным ядром. Именно, если функция $x(s)$ — решения уравнения (5), то подставляя (6) в (5), мы получим

$$x(s) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(s) \int_a^b \psi_i(t)\, x(t)\, dt + f(s)$$

или

$$x(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(s) + f(s), \tag{7}$$

где

$$\alpha_i = \int_a^b \psi_i(t)\, x(t)\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Формула (7) определяет структуру искомой функции $x(t)$, и задача сводится к отысканию n неизвестных коэффициентов α_i. Последние же могут быть найдены из некоторой системы линейных алгебраических уравнений. Мы не будем выводить эту систему в общем

*) См. Л. В. Канторович. Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи матем. наук III (1948), вып. 6, 89—185.

виде, а поясним ниже метод определения коэффициентов α_i на примере. Поскольку решение уравнения с вырожденным ядром сводится к алгебраической задаче, естественно использовать для приближенного решения интегрального уравнения с произвольным ядром метод его замены на уравнение с вырожденным ядром.

Пусть теперь ядро в уравнении (6) — произвольное непрерывное, а $K_1(s, t)$ — вырожденное ядро (тоже — непрерывное). Обозначая через K и K_1 интегральные операторы, определяемые ядрами $K(s, t)$ и $K_1(s, t)$, соответственно, запишем уравнение (5) в виде

$$x - Kx = f$$

и заменим его на уравнение

$$x - K_1 x = f.$$

В качестве пространства $\boldsymbol{X}$, в котором будут рассматриваться эти уравнения, берем $\boldsymbol{C}$.

Если $\max\limits_{a\leqslant s,\ t\leqslant b} |K(s, t) - K_1(s, t)| \leqslant \delta_1$, то (см. 8.3)

$$\|K_1 - K\| \leqslant \delta, \text{ где } \delta = \delta_1 (b - a). \tag{8}$$

Следовательно, если δ_1 достаточно мало, то при условии обратимости оператора $I - K$ мы сможем воспользоваться теоремами 12.1.1 и 12.1.2.

Возьмем в качестве примера уравнение

$$x(s) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(st)\, x(t)\, dt + 1 + \frac{1}{s}\left(\cos\frac{s}{2} - 1\right)^{*)}. \tag{9}$$

Так как $0 \leqslant \sin(st) \leqslant \sin\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$ при всех $0 \leqslant s,\ t \leqslant \frac{1}{2}$, то для интегрального оператора K с ядром $\sin(st)$ норма $\|K\| < \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Тогда по теореме 8.7.3 оператор $I - K$ обратим. При этом $\|(I-K)^{-1}\| < \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}$.

Разложим $\sin(st)$ в ряд Тейлора по степеням st:

$$\sin(st) = st - \frac{1}{6}s^3t^3 + \frac{1}{120}s^5t^5 - \ldots \tag{10}$$

---

*) Так как $\lim\limits_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\cos\frac{s}{2} - 1\right) = \lim\limits_{s\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{s}{4}}{s} = 0$, то мы считаем, что при $s = 0$ свободный член равен единице, что не нарушает его непрерывности.

и за приближенное представление ядра $\sin(st)$ примем первый член ряда, т. е. st. Ядро $K_1(s, t)=st$ — вырожденное. Так как ряд (10) — знакочередующийся с монотонно убывающим по абсолютной величине общим членом, то

$$|\sin(st)-st)| \leqslant \frac{1}{6}s^3t^3 \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{384}.$$

А тогда по (8)

$$\|K_1-K\| \leqslant \frac{1}{768}.$$

Беря $\delta=\frac{1}{768}$, имеем $\delta\,\|(I-K)^{-1}\| < \frac{1}{768}\cdot\frac{8}{7} < 1$, а потому применима теорема 12.1.1, и уравнение с вырожденным ядром $K_1(s, t)=st$

$$x(s)=\int_0^{\frac{1}{2}} stx(t)\,dt + f(s) \tag{11}$$

разрешимо при любом свободном члене.

Решаем уравнение (11). Переписывая его в виде

$$x(s)=s\int_0^{\frac{1}{2}} tx(t)\,dt + f(s)$$

и полагая $\alpha=\int_0^{\frac{1}{2}} tx(t)\,dt$, имеем

$$x(s)=\alpha s+f(s). \tag{12}$$

Для определения α подставим это выражение в уравнение (11). Получим

$$\alpha s+f(s)=s\int_0^{\frac{1}{2}} t[\alpha t+f(t)]\,dt + f(s),$$

откуда, после очевидных преобразований находим, что

$$\alpha=\frac{24}{23}\int_0^{\frac{1}{2}} tf(t)\,dt. \tag{13}$$

Формула (12) при найденном значении α и дает решение уравнения (11) и тем самым определяет оператор $(I-K_1)^{-1}$. Оценим его норму. Так как $|tf(t)| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, то из (13) имеем

$$|\alpha| \leqslant \frac{24}{23}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\|f\| = \frac{6}{23}\|f\|.$$

Поэтому, если $x=(I-K_1)^{-1}f$, то

$$|x(s)|\leqslant|\alpha|s+\|f\|\leqslant\frac{1}{2}\alpha+\|f\|\leqslant\frac{26}{23}\|f\|,$$

т. е. $\|x\|\leqslant\frac{26}{23}\|f\|$. Это и означает, что $\|(I-K_1)^{-1}\|\leqslant\frac{26}{23}$. Отсюда видно, что при оценке погрешности можно пользоваться теоремой 12.1.2.

При заданном свободном члене $f(t)=1+\frac{1}{t}\left(\cos\frac{t}{2}-1\right)$ легко вычислить, что $\alpha=0{,}126$ с точностью до 0,001. Тогда решение уравнения (11) примет вид

$$\bar{x}(s)=0{,}126s+1+\frac{1}{s}\left(\cos\frac{s}{2}-1\right).$$

Раскладывая $\cos\frac{s}{2}$ в ряд Тейлора, получим

$$\bar{x}(s)=1+0{,}001s+\frac{s^3}{16\cdot24}-\ldots$$

Если сохранить только первые два члена, то искомое приближенное решение примет вид

$$\bar{x}(s)\approx1+0{,}001s.$$

При этом погрешность, получаемая за счет отбрасывания остальных членов, не превосходит $\frac{1}{8\cdot16\cdot24}$, что $<\frac{1}{3000}$. Общая погрешность в выражении $\bar{x}(s)$, с учетом округления α, меньше 0,001. Так как второй член $0{,}001s\leqslant$ $\leqslant0{,}0005$, т. е. меньше, чем уже допущенная погрешность, то, если мы отбросим и этот член и положим $\bar{x}(s)\approx1$, то можно будет ручаться, что погрешность в последнем выражении $\bar{x}(s)$ меньше 0,0015. Отсюда следует, что $\|\bar{x}\|<$ $<1{,}0015$.

Теперь по неравенству (4) оценим отклонение приближенного решения $\bar{x}(s)$ от точного $x(s)$. В нашем примере можно взять $q=\frac{1}{768}\cdot\frac{26}{23}<0.0015$.

Тогда $\frac{q}{1-q}<\frac{1}{600}$ и $\|\bar{x}-x\|<0.002$, т. е. $|\bar{x}(s)-x(s)|<0{,}002$ при всех s *). Отсюда следует, что точное решение $x(s)$ уравнения (9) отличается от найденного с округлением решения $\bar{x}(s)\approx1$ уравнения с ядром st меньше чем на 0,0035, т. е.

$$0{,}9965<x(s)<1{,}0035.$$

Предлагаем читателю проверить непосредственной подстановкой, что $x(s)\equiv1$ является в действительности точным решением уравнения (9).

---

*) В этом неравенстве имеются в виду точные значения функции $\bar{x}(s)$, удовлетворяющей уравнению (11), без учета произведенного округления.

12.3. Решение бесконечных систем линейных алгебраических уравнений по методу редукции

Рассмотрим систему

$$\xi_i - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

с бесконечным множеством неизвестных ξ_i. Метод редукции заключается в том, что решаются усеченные конечные системы

$$\xi_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Если при любом достаточно большом n система (15) имеет единственное решение при заданных свободных членах η_i, а при $n \to \infty$ решение усеченной системы стремится по расстоянию в некотором пространстве числовых последовательностей к решению системы (14), то говорят, что в этом пространстве *метод редукции* для системы (14) *сходится*. В настоящем параграфе мы докажем одну теорему о сходимости метода редукции.

Будем считать, что свободные члены η_i образуют последовательность $y = \{\eta_i\} \in l^2$. Далее предположим, что матрица (a_{ik}) удовлетворяет условию

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} a_{ik}^2 < +\infty.$$

Тогда, как мы знаем из 11.1, эта матрица определяет вполне непрерывный матричный оператор A в l^2. Ограничиваясь отысканием решений $x = \{\xi_i\}$, также принадлежащих l^2, запишем систему (14) в виде

$$(I - A)\,x = y. \tag{16}$$

Предположим еще, что матрица (a_{ik}) симметрична. Тогда оператор A самосопряжен. Впрочем, доказываемая ниже теорема может быть установлена и без этого предположения.

Т е о р е м а 12.3.1. *Если при сделанных предположениях система* (14) *имеет в пространстве* l^2 *единственное решение при любом* $y = \{\eta_i\} \in l^2$, *то метод редукции для системы* (14) *сходится в этом пространстве.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как по условию системы (14) или, что то же самое, уравнение (16) имеет единственное решение при всяком $y \in l^2$, то число $\lambda = 1$ не может быть собственным числом оператора A (см., например, теорему 11.5.2). Тогда,

по лемме 11.3.1, оно регулярно, т. е. обратный оператор $(I-A)^{-1}$ задан на всем l^2 и линеен *).

Введем в пространстве l^2 линейные операторы A_n ($n=1, 2, \ldots$), уже рассмотренные в 11.1, определяемые формулами

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k \quad \text{при} \quad i=1, 2, \ldots, n,$$
$$\xi_i = 0 \quad \text{при} \quad i>n.$$

В 11.1 было доказано, что $A_n \to A$.

Если теперь задать любое $\delta>0$, то при всех достаточно больших n неравенство $\|A_n - A\| < \delta$ будет выполнено. Поэтому, если δ выбрано так, что $\delta\,\|(I-A)^{-1}\| \leqslant q < 1$, то к уравнению (16) можно применить теорему 12.1.1, приняв в качестве V любой A_n с достаточно большим номером n. При этом по теореме 8.7.4

$$\|(I-A_n)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q}\,\|(I-A)^{-1}\|. \tag{17}$$

Тогда, если при любом $y \in l^2$ положить $x=(I-A)^{-1}y$, а $x_n^* = (I-A_n)^{-1}y$, то по неравенству (3)

$$\|x_n^* - x\| \leqslant \delta\,\|(I-A_n)^{-1}\|\,\|x\| \leqslant \frac{\delta}{1-q}\,\|(I-A)^{-1}\|\,\|x\|$$

при всех достаточно больших n, следовательно, $x_n^* \to x$.

Теперь по заданному $y=\{\eta_i\}$ составим $y_n' = \{\eta_i^{(n)}\}$, где $\eta_i^{(n)} = \eta_i$ при $i=1, 2, \ldots, n$, $\eta_i^{(n)} = 0$ при $i>n$. Затем положим $x_n' = (I-A_n)^{-1}y_n'$. Тогда с помощью (17) имеем

$$\|x_n' - x_n^*\| \leqslant \|(I-A_n)^{-1}\|\,\|y_n' - y\| \leqslant \frac{1}{1-q}\,\|(I-A)^{-1}\|\,\|y_n' - y\|.$$

Но $y_n' \to y$, а следовательно, $x_n' - x_n^* \to 0$ и $x_n' \to x$.

Из определения x_n' следует, что его координаты получаются как решение системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \xi_i - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k = \eta_i \quad &\text{при} \quad i=1, 2, \ldots, n, \\ \xi_i = 0 \quad &\text{при} \quad i=n+1, n+2, \ldots, \end{aligned}\right\}$$

а эта система равносильна системе (15), дополненной уравнениями $\xi_i = 0$ при $i>n$.

---

*) Линейность оператора $(I-A)^{-1}$ может быть установлена более сложным путем и без предположения о самосопряженности оператора A. Поэтому теорема и оказывается справедливой без требования симметричности матрицы (a_{ik}).

Таким образом, если решения $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ усеченных систем (15) дополнить с помощью нулей до элементов $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$ из l^2, то получится последовательность элементов x_n', сходящаяся по норме к решению системы (14). Тем самым доказана сходимость метода редукции.

12.4. Метод Ритца

Вся остальная часть этой главы будет посвящена уравнениям в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. В данном параграфе мы займемся уравнениями вида

$$Ax = y. \tag{18}$$

Установим сначала предварительные результаты, позволяющие при определенных условиях сводить решение уравнения (18) к отысканию минимума некоторого функционала.

Самосопряженный оператор A называется *положительно определенным*, если его нижняя граница $m_A > 0$. По неравенству (7) из гл. X

$$(Ax, x) \geqslant m_A \| x \|^2, \tag{19}$$

поэтому при $m_A > 0$ равенство $(Ax, x) = 0$ (т. е. $Ax \perp x$) имеет место *только при* $x = 0$. Кроме того, из того же соотношения (19) с помощью неравенства Коши — Буняковского следует, что $m_A \| x \|^2 \leqslant \| Ax \| \| x \|$, откуда видно, что $\| Ax \| \geqslant m_A \| x \|$ при всех $x \in H$. Тогда из теоремы 10.6.5 следует, что для положительно определенного оператора A число $\lambda = 0$ регулярно, т. е. оператор A обратим, и при этом $\| A^{-1} \| \leqslant \frac{1}{m_A}$. В этом случае уравнение (18) имеет единственное решение при всяком $y \in \boldsymbol{H}$.

Фиксируя элемент y, определим в $\boldsymbol{H}$ функционал

$$F(x) = (Ax, x) - 2(x, y). \tag{20}$$

Теорема 12.4.1. *Пусть A — положительно определенный самосопряженный оператор. Для того чтобы при заданном $y \in \boldsymbol{H}$ элемент $x_0 \in \boldsymbol{H}$ был решением уравнения* (18), *необходимо и достаточно, чтобы функционал $F(x)$ имел при $x = x_0$ наименьшее значение.*

Доказательство. При любых $x_0, z \in \boldsymbol{H}$ и вещественном α

$$F(x_0 + \alpha z) = (A(x_0 + \alpha z), x_0 + \alpha z) - 2(x_0 + \alpha z, y) =$$
$$= (Ax_0, x_0) + \alpha(Az, x_0) + \alpha(Ax_0, z) + \alpha^2(Az, z) - 2(x_0, y) - 2\alpha(y, z).$$

Учитывая, что $(Az, x_0) = (Ax_0, z)$, имеем

$$F(x_0 + \alpha z) = F(x_0) + 2\alpha(Ax_0 - y, z) + \alpha^2(Az, z). \tag{21}$$

Если x_0 — решение уравнения (18), то из (21) при $\alpha = 1$ следует, что

$$F(x_0 + z) = F(x_0) + (Az, z) \geqslant F(x_0). \tag{22}$$

Но так как любой $x \in H$ можно представить в виде $x = x_0 + z$, то, тем самым, $F(x) \geqslant F(x_0)$ при всех $x \in H$.

Обратно, если $F(x)$ принимает наименьшее значение при $x = x_0$, то $F(x_0 + \alpha z) \geqslant F(x_0)$ при любых α и z, т. е. при каждом фиксированном z функционал $F(x_0 + \alpha z)$, как функция от α, имеет минимум при $\alpha = 0$. А тогда производная этой функции равна нулю при $\alpha = 0$. Но из (21) видно, что

$$\frac{d}{d\alpha} F(x_0 + \alpha z)\Big|_{\alpha=0} = 2(Ax_0 - y, z),$$

поэтому $Ax_0 - y \perp z$. Вследствие произвольности z отсюда вытекает, что $Ax_0 - y = 0$, т. е. x_0 — решение уравнения (18).

Итак, мы доказали, что единственным элементом, доставляющим функционалу (20) наименьшее значение, является решение уравнения (18).

Назовем последовательность элементов $\{x_n\}$ *минимизирующей* (для функционала F), если $F(x_n) \to \min F(x)$.

Теорема 12.4.2. *Если A — положительно определенный самосопряженный оператор, то всякая минимизирующая последовательность $\{x_n\}$ сходится к решению уравнения* (18).

Доказательство. Пусть x_0 — решение уравнения (18). Тогда, полагая в (22) $z = x_n - x_0$, имеем

$$F(x_n) = F(x_0) + (A(x_n - x_0), x_n - x_0).$$

Но $F(x_0) = \min F(x)$ и, так как последовательность $\{x_n\}$ — минимизирующая, то $F(x_n) \to F(x_0)$, т. е. $(A(x_n - x_0), x_n - x_0) \to 0$. По неравенству (19)

$$\|x_n - x_0\|^2 \leqslant \frac{1}{m_A}(A(x_n - x_0), x_n - x_0),$$

откуда и следует, что $x_n \to x_0$.

Для приближенного решения задачи о минимуме функционала $F(x)$ воспользуемся методом, предложенным немецким математиком В. Ритцем (1878—1909) *). В пространстве H выбираем произвольную систему линейно независимых элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, полную в том смысле, что если $x \in H$ и $x \perp \varphi_i$ при всех i, то $x = 0$ **). Далее фиксируем произвольное натуральное n и обра-

*) В. Ритц рассматривал более конкретные задачи на минимум функционалов. Абстрактное изложение метода и его теоретическое обоснование были даны позднее.

**) Мы считаем, что пространство H бесконечно-мерно и сепарабельно.

зуем конечно-мерное подпространство H_n, порождаемое элементами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. В подпространстве H_n находим элемент x_n, на котором функционал $F(x)$ в этом подпространстве имеет наименьшее значение. Так как все элементы $x \in H_n$ имеют вид $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$, то отыскание x_n сводится к алгебраической задаче нахождения n неизвестных коэффициентов α_i. Получаемый таким образом элемент x_n и принимается за приближенное решение уравнения (18).

Проведем вычисления по изложенной схеме. Будем считать, что оператор A — положительно определенный, самосопряженный.

Лемма 12.4.1. *В подпространстве H_n функционал $F(x)$ имеет наименьшее значение.*

Доказательство. Из определения $F(x)$ вытекает очевидная оценка:

$$F(x) \geqslant m_A \|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| = \|x\|(m_A\|x\| - 2\|y\|).$$

Поэтому, если $\|x\| > \frac{2\|y\|}{m_A}$, то $F(x) > 0$. С другой стороны, $F(\theta) = 0$. Следовательно, наименьшее значение функционала F в H_n, если оно существует, должно приниматься на каком-нибудь элементе замкнутого шара $S^* \subset H_n$, определяемого условиями:

$$x \in H_n, \ \|x\| \leqslant \frac{2\|y\|}{m_A}.$$

По теореме 5.3.2 этот шар компактен. В то же время из непрерывности оператора A и непрерывности скалярного произведения вытекает непрерывность функционала F. А тогда существование наименьшего значения $F(x)$ на S^*, а следовательно, и в H_n, вытекает из теоремы 4.2.1. Лемма доказана.

Так как каждый элемент $x \in H_n$ имеет вид $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$, то на H_n функционал $F(x)$ принимает вид

$$F(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (A\varphi_i), \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i\Big) - 2\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i, y\Big) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i \alpha_k (A\varphi_i, \varphi_k) - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\varphi_i, y),$$

т. е. превращается в функцию $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ от n переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тогда коэффициенты α_i того элемента x, который доставляет функционалу F наименьшее значение, должны

удовлетворять n условиям:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\ ^*).$$

Вычисляя эти производные и сокращая на 2, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (A\varphi_i, \varphi_k) - (y, \varphi_i) = 0\ ^{**}) \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_i, A\varphi_k) = (y, \varphi_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Таким образом, для определения коэффициентов α_k мы имеем систему (23) n линейных алгебраических уравнений. Проверим, что определитель системы (23) $\delta \neq 0$. Для этого достаточно показать, что соответствующая однородная система

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_i, A\varphi_k) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{24}$$

имеет только нулевое решение.

Действительно, переписывая каждое из уравнений системы (24) в виде

$$\Big(\varphi_i, A\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\Big)\Big) = 0,$$

мы видим, что если α_k представляют решение системы (24), то

$$A\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\Big) \perp \varphi_i \text{ при любом } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Но тогда $A\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\Big)$ ортогонален и всему H_n, в частности,

$$A\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\Big) \perp \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k.$$

---

*) Так как функция $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ определена и имеет непрерывные производные при любых значениях аргументов, то ее наименьшее значение будет одновременно и минимумом, а потому мы можем воспользоваться необходимым признаком экстремума функции нескольких переменных.

**) Поясним это дифференцирование на примере, когда $n = 2$. В этом случае

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = (A\varphi_1, \varphi_1)\alpha_1^2 + (A\varphi_1, \varphi_2)\alpha_1\alpha_2 + (A\varphi_2, \varphi_1)\alpha_2\alpha_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)\alpha_2^2 - 2(\varphi_1, y)\alpha_1 - 2(\varphi_2, y)\alpha_2.$$

Тогда, учитывая, что $(A\varphi_2, \varphi_1) = (A\varphi_1, \varphi_2)$, находим, например,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = 2(A\varphi_1, \varphi_1)\alpha_1 + (A\varphi_1, \varphi_2)\alpha_2 + (A\varphi_2, \varphi_1)\alpha_2 - 2(\varphi_1, y) = 2[(A\varphi_1, \varphi_1)\alpha_1 + (A\varphi_1, \varphi_2)\alpha_2 - (\varphi_1, y)].$$

По сделанному в начале параграфа замечанию отсюда следует, что $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k = \theta$, а тогда, вследствие линейной независимости φ_k, все $\alpha_k = 0$. Тем самым доказано, что $\delta \neq 0$.

Из доказанного следует, что система (23) имеет единственное решение $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_n^{(0)}$. Поскольку это решение — единственное, то оно и должно определить элемент $x_n = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(0)}\varphi_i$, доставляющий функционалу F в H_n наименьшее значение.

Придавая n всевозможные натуральные значения, мы построим последовательность приближенных решений x_n. Докажем сходимость метода.

Теорема 12.4.3. *При сделанных предположениях относительно оператора A последовательность элементов x_n, полученных по методу Ритца, сходится к решению x_0 уравнения* (18).

Доказательство. Согласно теореме 12.4.2, достаточно доказать, что последовательность $\{x_n\}$ — минимизирующая. Ортогонализуя систему $\{\varphi_i\}$, можно построить ортонормированный базис $\{h_i\}$. Полнота системы $\{h_i\}$ будет вытекать из полноты системы $\{\varphi_i\}$. Разложим решение x_0 по элементам базиса, $x_0 = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i h_i$, и положим $z_n = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i$. Тогда $z_n \in H_n$ *) и $z_n \to x_0$; следовательно, $F(z_n) \to F(x_0)$. Но так как

$$F(x_n) = \min_{x\in H_n} F(x), \quad F(x_0) = \min_{x\in H} F(x),$$

то

$$F(x_0) \leqslant F(x_n) \leqslant F(z_n),$$

а потому и $F(x_n) \to F(x_0)$. Теорема доказана.

Дадим оценку погрешности, получаемой при замене x_0 на x_n. Так как

$$x_n - x_0 = A^{-1}Ax_n - A^{-1}y = A^{-1}(Ax_n - y),$$

то

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \|A^{-1}\|\,\|Ax_n - y\| \leqslant \frac{1}{m_A}\|Ax_n - y\|. \tag{25}$$

Рассмотрим в качестве первого примера бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{26}$$

*) Подпространство, порождаемое элементами $h_1, h_2, \ldots, h_n$, совпадает с подпространством, порождаемым элементами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ (см. 6.7).

и покажем, что для такой системы метод Ритца может быть сведен к методу редукции. Мы будем считать, что допускаются только последовательности $\{\xi_k\} \in l^2$ и что оператор A, определяемый матрицей (a_{ik}),— линейный, отображающий l^2 в l^2. Чтобы оператор A был самосопряженным, матрица должна быть симметричной, а положительная определенность оператора A обеспечивается, если существует такая постоянная $d > 0$, что для любой последовательности $\{\xi_i\} \in l^2$

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant d \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2.$$

Функционал (20) $F(x)$ при $x = \{\xi_i\}$ и $y = \{\eta_i\}$ имеет вид

$$F(x) = \sum_{i,\,k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_i\xi_k - 2\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\eta_i.$$

В качестве $\{\varphi_i\}$ возьмем систему координатных ортов $\{e_i\}$. Тогда $x \in H_n$ имеет вид $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ и роль α_i играют координаты ξ_i. Так как $(e_i, Ae_k) = a_{ik}$, $(y, e_i) = \eta_i$, то система (23) совпадает с усеченной системой

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

получаемой из (26) отбрасыванием всех строк и столбцов с номерами, большими n.

12.5. Применение метода Ритца к решению дифференциальных уравнений Штурма — Лиувилля

Чтобы дать более важные применения метода Ритца, следует несколько обобщить результаты предыдущего параграфа. Будем считать, что оператор A в уравнении (18)— симметричный, может быть и неограниченный, заданный на линейном множестве D, всюду плотном в H. Предположим, что он положительно определенный в том же смысле, как это понималось в предыдущем параграфе. Иными словами, предположим, что существует такое число $d > 0$, что

$$(Ax, x) \geqslant d\|x\|^2 \qquad \text{при всех } x \in D.$$

Отсюда следует, что если $Ax = \theta$, то и $x = \theta$, а потому существует оператор A^{-1}. Уравнение (18) имеет единственное решение при всяком y из совокупности значений оператора A.

Функционал (20) $F(x)$ будем считать определенным для всех $x \in D$.

Теоремы 12.4.1 и 12.4.2 остаются в силе и при новых предположениях относительно оператора A, но $\min F(x)$ следует определять на множестве D. В доказательствах следует брать лишь элементы x_0, z, x из D, а вместо m_A использовать d.

При применении метода Ритца от выбираемой основной системы линейно независимых элементов $\{\varphi_i\}$ будем требовать, чтобы все $\varphi_i \in D$ и чтобы эта система была «полна» в D в следующем усиленном смысле: для любого $x \in D$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют n и такой элемент $\bar{x} \in H_n$ *), что

$$(A(\bar{x}-x), \bar{x}-x) < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства вытекает, что $\| \bar{x} - x \|^2 < \frac{\varepsilon}{d}$, следовательно, благодаря произвольности ε, каждый $x \in D$ входит в подпространство, порождаемое системой $\{\varphi_i\}$, а так как D всюду плотно, то это подпространство должно совпасть с H. Отсюда уже следует, что система $\{\varphi_i\}$ полна и в прежнем смысле.

Лемма 12.4.1 остается в силе. Хотя мы в ее доказательстве опирались на непрерывность оператора A, а сейчас оператор A на множестве D может не быть непрерывным, но в конечно-мерном пространстве H_n этот оператор все же непрерывен по теореме 8.2.3. Таким образом, в каждом из подпространств H_n мы можем решать задачу на минимум функционала F, что опять приведет нас к решению системы (23). Теорема 12.4.3 о сходимости метода также сохраняется, но несколько изменяется доказательство того, что последовательность $\{x_n\}$ — минимизирующая. Дадим новое доказательство этого факта.

Так как $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \ldots \subset D$, то

$$\min_{x \in H_1} F(x) \geqslant \min_{x \in H_2} F(x) \geqslant \min_{x \in H_3} F(x) \geqslant \ldots \geqslant \min_{x \in D} F(x),$$

т. е.

$$F(x_1) \geqslant F(x_2) \geqslant \ldots \geqslant F(x_n) \geqslant \ldots \geqslant F(x_0),$$

где x_0 — решение уравнения (18). Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем N и $\bar{x} \in H_N$ так, что

$$(A(\bar{x}-x_0), \bar{x}-x_0) < \varepsilon.$$

Полагая в (22) $z = \bar{x} - x_0$, мы находим, что

$$F(\bar{x}) < F(x_0) + \varepsilon.$$

Тогда, тем более,

$$F(x_N) < F(x_0) + \varepsilon.$$

*) H_n имеет здесь тот же смысл, что и в предыдущем параграфе.

Следовательно, при всех $n \geqslant N$

$$F(x_0) \leqslant F(x_n) < F(x_0) + \varepsilon,$$

откуда и вытекает, что $F(x_n) \longrightarrow F(x_0)$.

Следует заметить, что оценка погрешности по формуле (25) теперь мало интересна, так как Ax_n может не стремиться к y.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Штурма — Лиувилля

$$-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}\right) - q(t)\,x(t) = f(t) \tag{27}$$

с краевыми условиями

$$x(a) = x(b) = 0. \tag{28}$$

По-прежнему предполагаем, что $p(t)$, $p'(t)$ и $q(t)$ непрерывны на $[a, b]$.

В 10.8 мы уже изучали симметричный дифференциальный оператор U, определяемый левой частью уравнения, считая его заданным на множестве D функций, непрерывных на $[a, b]$ со своими производными 1-го и 2-го порядка и удовлетворяющих краевым условиям (28). Считая, что $p(t) > 0$, а $q(t) \leqslant 0$, докажем, что оператор U — положительно определенный.

Из формулы (22) гл. X следует, что для любого $x \in D$

$$(Ux, x) \geqslant \int_a^b px'^2\,dt.$$

Пусть $r = \min p(t)$; тогда $r > 0$ и

$$(Ux, x) \geqslant r\int_a^b x'^2\,dt,$$

откуда

$$\int_a^b x'^2\,dt \leqslant \frac{1}{r}(Ux, x).$$

Теперь, учитывая, что $x(a) = 0$, имеем

$$|x(t)|^2 = |x(t) - x(a)|^2 = \left|\int_a^t x'\,dt\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |x'|\,dt\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b x'^2\,dt\,^*) \leqslant \frac{b-a}{r}(Ux, x). \tag{29}$$

---

*) Здесь мы применяем неравенство Коши — Буняковского, считая второй сомножитель равным единице.

Отсюда

$$\| x \|^2 = \int_a^b x^2\, dt \leqslant \frac{(b-a)^2}{r} (Ux, x)$$

или

$$(Ux, x) \geqslant \frac{r}{(b-a)^2} \| x \|^2.$$

В конце 11.7 доказано, что множество D всюду плотно в пространстве L^2, построенном на отрезке $[a, b]$. Таким образом, к уравнению (27) применима вся изложенная выше теория метода Ритца, и сходимость метода обеспечена. Функционал (20) имеет в этом случае вид

$$F(x) = \int_a^b (px'^2 - qx^2 - 2xf)\, dt$$

[ср. формулу (22) из гл. X].

Чтобы обеспечить усиленную «полноту» системы функций $\varphi_i(x)$, которые сейчас нужно брать из множества D, достаточно выбрать их так, чтобы для любого $x \in D$ и любого $\varepsilon > 0$ можно было найти конечную линейную комбинацию функций $\varphi_i(t)$

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t),$$

для которой на всем отрезке $[a, b]$

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon, \quad |x'(t) - \bar{x}'(t)| < \varepsilon.$$

Действительно, в этом случае из формулы (22) гл. X имеем:

$$(U(\bar{x} - x), \bar{x} - x) = \int_a^b [p(\bar{x}' - x')^2 - q(\bar{x} - x)^2]\, dt <$$

$$< \varepsilon^2 (b-a) [\max p(t) + \max |q(t)|],$$

а за счет ε правая часть может быть сделана сколь угодно малой.

Не приводя доказательства, укажем два примера требуемых систем функций $\varphi_k(t)$:

$$1)\ \varphi_k(t) = (b-t)(t-a)^k; \quad 2)\ \varphi_k(t) = \sin \frac{k\pi (t-a)}{b-a} \qquad (30)$$

$$(k = 1, 2, \ldots)\ ^*).$$

*) См. Л. В. Канторович и В. И. Крылов. Приближенны методы высшего анализа. Гостехиздат, 1949, стр. 280—284.

Заметим, что для уравнения Штурма — Лиувилля результат теоремы 12.4.3 о сходимости метода Ритца может быть усилен. Именно, покажем, что в этом случае *минимизирующая последовательность* $\{x_n(t)\}$ *равномерно сходится к решению* $x_0(t)$ *уравнения* (27).

Действительно, из (29) следует, что

$$|x_n(t) - x_0(t)|^2 \leqslant \frac{b-a}{r}(U(x_n - x_0), x_n - x_0),$$

а последнее выражение стремится к нулю, как видно из доказательства теоремы 12.4.2.

Возьмем в качестве примера уравнение

$$-x'' - x = -t,$$

заданное на отрезке $[0, 1]$ при краевых условиях $x(0) = x(1) = 0$. Легко найти точное решение

$$x_0(t) = -\frac{e}{e^2 - 1}(e^t - e^{-t}) - t.$$

С другой стороны, применим метод Ритца, используя только одну функцию первой из систем (30)

$$\varphi_1(t) = t(1-t) \qquad (a = 0,\ b = 1).$$

Иными словами, будем искать первое приближение x_1 к точному решению среди функций вида $x = \alpha t(1-t)$. В нашем примере

$$F(x) = \int_0^1 (x'^2 - x^2 - 2tx)\,dt.$$

Подставляя $x = \alpha t(1-t)$, получим, что $F(x)$ превратится в функцию $\Phi(\alpha) = \frac{11}{30}\alpha^2 - \frac{1}{6}\alpha$. Далее, из уравнения $\Phi'(\alpha) = 0$ находим $\alpha = -\frac{5}{22}$ и, таким образом,

$$x_1(t) = -\frac{5}{22}t(1-t).$$

Для сравнения приведем значения решения $x_0(t)$ и первого приближения $x_1(t)$ в середине промежутка:

$$x_0\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}056, \quad x_1\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}057.$$

12.6. Применение метода Ритца к нахождению собственных значений

В этом параграфе мы рассмотрим другое применение метода Ритца — к нахождению собственных значений самосопряженного оператора. При этом ограничимся задачей отыскания наибольшего собственного числа.

Пусть A — вполне непрерывный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ и пусть его верхняя граница $M_A \neq 0$. Тогда по теореме 10.6.6 и лемме 11.3.1 M_A является собственным числом оператора A, а по теореме 10.6.5 это и есть наибольшее собственное число *).

Введем функционал $E(x) = (Ax, x)$. С одной стороны, $E(x) \leqslant M_A$ при $\| x \| = 1$. С другой, если x — собственный элемент с нормой $\| x \| = 1$, соответствующий собственному числу M_A, то $E(x) = M_A(x, x) = M_A$. Следовательно,

$$M_A = \max_{\|x\|=1} E(x).$$

Задача отыскания M_A сводится к нахождению наибольшего значения функционала $E(x)$ на «поверхности» единичного шара.

Для дальнейшего можно было бы использовать так же, как и в 12.4, полную систему любых линейно независимых элементов. Однако для некоторого упрощения выкладок будем исходить из ортонормированного базиса $\{h_i\}$. Как и раньше, через $\boldsymbol{H}_n$ обозначим подпространство, порождаемое элементами $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Представляя $x \in \boldsymbol{H}_n$ в виде $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$, мы можем свести функционал $E(x)$ в подпространстве $\boldsymbol{H}_n$ к функции n переменных:

$$E(x) = \left(A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i\right), \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i\right) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i \alpha_k (Ah_i, h_k) = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Множество Q_n тех элементов x из $\boldsymbol{H}_n$, для которых $\| x \| = 1$, замкнуто, как пересечение подпространства $\boldsymbol{H}_n$ с «поверхностью» всего единичного шара (т. е. множеством всех $x \in \boldsymbol{H}$ с $\| x \| = 1$, которое, очевидно, замкнуто). Кроме того, Q_n ограничено, а тогда и компактно, так как оно содержится в конечно-мерном подпространстве $\boldsymbol{H}_n$. Следовательно, непрерывный функционал $E(x)$ достигает на множестве Q_n наибольшего значения.

Пусть $\mu_n = \max_{x \in Q_n} E(x)$, а x_n — какой-нибудь элемент из Q_n, на котором реализуется значение μ_n, т. е. $E(x_n) = \mu_n$. Если взять любой $x \in \boldsymbol{H}_n$, отличный от θ, то $\frac{x}{\| x \|} \in Q_n$, а тогда

$$E\left(\frac{x}{\| x \|}\right) = \frac{1}{\| x \|^2} (Ax, x) \leqslant \mu_n.$$

*) Полная непрерывность оператора A использована только для этого заключения. Если же уже известно, что наибольшее собственное число некоторого оператора A равно M_A, то дальше достаточно предполагать A просто самосопряженным оператором.

Отсюда следует, что $E(x) \leqslant \mu_n \|x\|^2$ или

$$E(x) - \mu_n(x, x) \leqslant 0. \tag{31}$$

Это же соотношение выполняется и при $x = \theta$, так как тогда его левая часть равна нулю.

Возьмем теперь произвольный $z \in \boldsymbol{H}_n$ и положим $x = x_n + \gamma z$, где γ — любое вещественное число. Подставляя в (31), получим

$$(A(x_n + \gamma z), x_n + \gamma z) - \mu_n(x_n + \gamma z, x_n + \gamma z) \leqslant 0.$$

Раскрывая левую часть, используя самосопряженность оператора A, находим

$$(Ax_n, x_n) + 2\gamma(Ax_n, z) + \gamma^2(Az, z) - \mu_n(x_n, x_n) - \\ - 2\gamma\mu_n(x_n, z) - \gamma^2\mu_n(z, z) \leqslant 0.$$

Так как $(Ax_n, x_n) = E(x_n) = \mu_n$, а $(x_n, x_n) = 1$, то из предыдущего неравенства получаем

$$2\gamma[(Ax_n, z) - \mu_n(x_n, z)] + \gamma^2[(Az, z) - \mu_n(z, z)] \leqslant 0.$$

Рассматривая левую часть как функцию $f(\gamma)$ от γ, мы видим, что при $\gamma = 0$ она обращается в нуль, а следовательно, имеет при $\gamma = 0$ максимум. Тогда $f'(0) = 0$, что приводит нас к равенству

$$(Ax_n, z) - \mu_n(x_n, z) = 0, \tag{32}$$

которое должно выполняться при произвольном $z \in \boldsymbol{H}_n$. Подставляя в (32) поочередно $z = h_1, h_2, \ldots, h_n$, получим

$$(Ax_n, h_i) - \mu_n(x_n, h_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{33}$$

Так как $x_n \in \boldsymbol{H}_n$, то он имеет вид $x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k$. Подставляя в уравнения (33), приведем их к виду

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (Ah_k, h_i) - \mu_n \alpha_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{34}$$

Если рассмотреть систему уравнений с неизвестными α_k

$$\left.\begin{array}{l} [(Ah_1, h_1) - \mu]\alpha_1 + (Ah_2, h_1)\alpha_2 + \ldots + (Ah_n, h_1)\alpha_n = 0 \\ (Ah_1, h_2)\alpha_1 + [(Ah_2, h_2) - \mu]\alpha_2 + \ldots + (Ah_n, h_2)\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (Ah_1, h_n)\alpha_1 + (Ah_2, h_n)\alpha_2 + \ldots + [(Ah_n, h_n) - \mu]\alpha_n = 0 \end{array}\right\}, \tag{35}$$

содержащую параметр μ, то равенства (34) означают, что коэффициенты в выражении x_n представляют решение этой системы

при $\mu = \mu_n$. Так как $\| x_n \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$, то, следовательно, система (35) имеет при $\mu = \mu_n$ ненулевое решение. А тогда ее определитель должен быть равен нулю. Иными словами, μ_n должно быть корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} (Ah_1, h_1) - \mu & (Ah_2, h_1) & \dots & (Ah_n, h_1) \\ (Ah_1, h_2) & (Ah_2, h_2) - \mu & \dots & (Ah_n, h_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (Ah_1, h_n) & (Ah_2, h_n) & \dots & (Ah_n, h_n) - \mu \end{vmatrix} = 0. \qquad (36)$$

Так как матрица определителя из левой части (36) симметрична, то, как установлено в 1.13, все корни уравнения (36) — вещественные. Докажем, что μ_n — наибольший из них *). Пусть μ^* — какой-нибудь из корней этого уравнения. Подставим его вместо μ, в уравнения системы (35) и найдем какое-нибудь не нулевое ее решение: $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$. Это решение всегда можно подобрать так, что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{*2} = 1$ **), а тогда элемент $x^* = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* h_k \in Q_n$. Теперь равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* (Ah_k, h_i) - \mu^* \alpha_i^* = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

выражающие тот факт, что α_k^* определены из системы (35), запишем в равносильной форме

$$(Ax^*, h_i) - \mu^* \alpha_i^* = 0,$$

умножим каждое из них на соответствующее α_i^* и сложим. Получим

$$\left(Ax^*, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* h_i\right) - \mu^* \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{*2} = 0,$$

или $(Ax^*, x^*) = \mu^*$, т. е. $E(x^*) = \mu^*$. Отсюда видно, что все корни уравнения (36) встречаются среди значений функционала $E(x)$ на Q_n. Поэтому μ_n, как $\max E(x)$ на Q_n, и должен равняться наибольшему из корней уравнения (36).

---

*) Если не ссылаться на 1.13, то из дальнейшего будет, во всяком случае, вытекать, что μ_n — наибольший из вещественных корней уравнения (36).

**) Если первоначально взятое решение $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$ не удовлетворяет такому условию, то это решение нужно заменить на $\rho\alpha_1^*, \rho\alpha_2^*, \dots, \rho\alpha_n^*$, где $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{*2}}}$.

Числа μ_n мы и будем рассматривать как последовательные приближения к искомому числу M_A. Докажем, что $\mu_n \to M_A$ при $n \to \infty$. Пусть x_0 — собственный элемент с нормой $\| x_0 \| = 1$, соответствующей собственному числу M_A. Разложим x_0 в ряд Фурье по элементам базиса, $x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i h_i$, и положим $y_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i h_i$. Так как $y_n \to x_0$, то $\| y_n \| \to 1$ и при достаточно больших n будет $y_n \neq 0$. Тогда имеют смысл элементы $z_n = \frac{y_n}{\| y_n \|}$ и $z_n \in Q_n$. При этом $z_n \to x_0$, а потому и $E(z_n) \to E(x_0) = M_A$. Если задать $\varepsilon > 0$, то найдется такое N, что $E(z_n) > M_A - \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Но $E(z_n) \leqslant \mu_n = \max_{x \in Q_n} E(x)$, а тогда и $\mu_n > M_A - \varepsilon$. С другой стороны, $\mu_n \leqslant M_A = \max_{\|x\|=1} E(x)$ при всех n, следовательно, $\mu_n \to M_A$. Тем самым при сделанных предположениях *доказана сходимость метода Ритца в задаче отыскания наибольшего собственного значения.*

Замечания. 1. К уравнениям (35) можно прийти и другим, более коротким путем, однако не дающим строгого обоснования метода. Так как $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$ для любого $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i \in Q_n$, то отыскание μ_n есть задача на условный максимум для определенной выше функции $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ при наличии связи между аргументами: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$. Если решать эту задачу по методу неопределенных множителей Лагранжа, то нужно составить вспомогательную функцию

$$\Psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - \mu \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i \alpha_k (Ah_i, h_k) - \mu \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2,$$

где μ — неопределенный множитель. Вычисляя затем $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i}$ и приравнивая их нулю, мы получим, после сокращения на 2,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (Ah_i, h_k) - \mu \alpha_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что совпадает с уравнениями (35).

2. Если мы будем исходить не из базиса $\{h_i\}$, а из произвольной полной системы линейно независимых элементов $\{\varphi_i\}$, то также может быть применен метод неопределенных множителей,

но уравнение связи будет в этом случае сложнее:

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} \alpha_i \alpha_k (\varphi_i, \varphi_k) = 1.$$

Вместо системы (35) получится система несколько более сложных уравнений и наибольший из корней ее определителя будет, как и выше, равен μ_n.

3. Изложенный метод может быть применен и к нахождению других собственных чисел. Например, если A — вполне непрерывный, положительный, самосопряженный оператор, а

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \ldots$$

— последовательность его собственных чисел, построенная по фундаментальной системе $\{h_n\}$ собственных элементов, то чтобы получить λ_2, нужно искать максимум функционала $E(x)$ на множестве тех элементов поверхности единичной сферы, которые ортогональны к h_1.

Приведем пример. Рассмотрим интегральный оператор K

$$y(t) = \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds$$

с симметричным ядром

$$K(t, s) = \begin{cases} t(1-s) & \text{при } t \leqslant s, \\ s(1-t) & \text{при } t \geqslant s. \end{cases}$$

Оператор K — вполне непрерывный и самосопряженный (см. 10.7 и 11.1). Так как $K(t, s) > 0$ внутри всего квадрата $0 < t, s < 1$, то

$$(Kx, x) = \int_0^1 \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt > 0$$

для любой положительной функции ($x(t) > 0$). Следовательно, $M_K > 0$ и это и есть наибольшее собственное число оператора K.

Чтобы получить приближенное значение для M_K, возьмем систему из двух функций $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$. Хотя, согласно замечанию 2, можно решать задачу, пользуясь непосредственно этой системой функций, но поскольку мы ограничились подробным изложением метода лишь для случая, когда в основу положена ортонормированная система, ортогонализуем систему функций 1 и t. Получим $h_1(t) = 1$, $h_2(t) = 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)$.

Теперь будем искать $\max E(x) = \max (Kx, x)$ на множестве Q_2 функций вида $x = \alpha_1 h_1(t) + \alpha_2 h_2(t)$ при дополнительном условии $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$.

Каждый $x \in Q_2$ есть линейная функция от t, $x(t) = \beta + \gamma t$, где $\beta = \alpha_1 - \alpha_2\sqrt{3}$, $\gamma = 2\alpha_2\sqrt{3}$. Поэтому функционал $E(x) = (Kx, x)$ на Q_2

можно представить в форме

$$E(x) = \widetilde{\Phi}(\beta, \gamma) = \int_0^1 \int_0^1 K(t, s)(\beta + \gamma s)(\beta + \gamma t)\, ds\, dt =$$

$$= \int_0^1 (\beta + \gamma t)\left[(1-t)\int_0^t s(\beta + \gamma s)\, ds + t\int_t^1 (1-s)(\beta + \gamma s)\, ds\right] dt.$$

В результате элементарных вычислений находим

$$\widetilde{\Phi}(\beta, \gamma) = \frac{1}{12}\beta^2 + \frac{1}{12}\beta\gamma + \frac{1}{45}\gamma^2.$$

Подставляя значения β и γ, получим выражение $E(x)$ на Q_2 через α_1 и α_2:

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{12}\alpha_1^2 + \frac{1}{60}\alpha_2^2.$$

Согласно замечанию 1, решаем задачу на условный максимум для функции $\Phi(\alpha_1, \alpha_2)$, для чего составляем функцию

$$\Psi(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{12}\alpha_1^2 + \frac{1}{60}\alpha_2^2 - \mu(\alpha_1^2 + \alpha_2^2).$$

Тогда

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{6}\alpha_1 - 2\mu\alpha_1, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{30}\alpha_2 - 2\mu\alpha_2$$

и мы получим уравнения

$$\left(\frac{1}{12} - \mu\right)\alpha_1 = 0, \quad \left(\frac{1}{60} - \mu\right)\alpha_2 = 0.$$

Это и есть система (35) для данного примера. Приравнивая нулю ее определитель, составим уравнение (36)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{12} - \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{60} - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

которое имеет два корня: $\mu = \frac{1}{12}$ и $\mu = \frac{1}{60}$. Больший из них, $\mu = \frac{1}{12}$, и есть искомое приближение к M_K.

Иначе можно было бы сразу составить уравнение (36) в виде

$$\begin{vmatrix} (Kh_1, h_1) - \mu & (Kh_2, h_1) \\ (Kh_1, h_2) & (Kh_2, h_2) - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя элементы определителя, мы бы нашли, что

$$(Kh_1, h_1) = \frac{1}{12}, \quad (Kh_2, h_1) = (Kh_1, h_2) = 0, \quad (Kh_2, h_2) = \frac{1}{60}.$$

Однако эти выкладки были бы не короче, чем те, которые требуются по схеме отыскания условного максимума.

Предлагаем читателю проверить, что мы пришли бы к тем же значениям μ, если бы решали задачу на условный максимум непосредственно для функции $\widetilde{\Phi}(\beta, \gamma)$ при уравнении связи $\beta^2+\beta\gamma+\frac{1}{3}\gamma^2=1$, которое получается из условия $\|x\|^2 = \int_0^1 (\beta+\gamma t)^2\, dt = 1$.

Сравним найденное приближенное значение для наибольшего собственного числа оператора K с точным. Легко проверить, что заданный оператор K есть оператор Грина для дифференциального оператора Штурма — Лиувилля $Ux = -x''$, рассматриваемого при краевых условиях $x(0) = x(1) = 0$ (см. 11.7). Действительно, в этом случае функция Грина составляется с помощью двух решений u и v уравнения $x'' = 0$, удовлетворяющих условиям $u(0) = v(1) = 0$, а за такие решения можно принять $u(t) = t$, $v(t) = 1 - t$. Собственные числа оператора $Ux = -x''$ могут быть найдены так же, как это сделано для промежутка $[0, \pi]$ в 10.8, и мы получим, что наименьшее из них равно π^2. Так как собственные числа оператора Грина получаются из собственных чисел оператора U переходом к обратным величинам, то наибольшее собственное число оператора K равно $\frac{1}{\pi^2} \approx 0{,}101 \approx \frac{1}{10}$.

Мы же получили приближенное значение $\frac{1}{12}$, используя систему всего лишь из двух функций.

12.7. Понятие о методе Бубнова—Галеркина

Метод Ритца решения уравнения (18) $Ax = y$ был обобщен в 1913—1915 гг. И. Г. Бубновым и Б. Г. Галеркиным *). Решая по методу Ритца уравнение (18) с самосопряженным или симметричным оператором A, мы получили систему уравнений (23) для определения n-го приближения x_n к искомому решению. Система (23) может быть записана в виде

$$\left(A\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) - y,\ \varphi_i\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. элемент $x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ определяется из n условий ортогональности

$$Ax_n - y \perp \varphi_i \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Вот это требование, вытекавшее в методе Ритца из других исходных соображений, положено в основу метода Бубнова — Галеркина. При этом, поскольку указанные условия ортогональности

*) И. Г. Бубнов (1872—1919) и Б. Г. Галеркин (1871—1945) — крупные отечественные ученые. И. Г. Бубнов — специалист по строительной механике корабля, Б. Г. Галеркин — специалист по строительной механике и теории упругости.

имеют смысл для произвольного оператора A, в методе Бубнова — Галеркина можно отказаться от требования самосопряженности или симметричности оператора A. Таким образом, схема метода Бубнова — Галеркина заключается в следующем.

Дано уравнение (18) с произвольным оператором A, заданным на линейном множестве D, всюду плотном в гильбертовом пространстве H. Выбираем систему линейно независимых элементов $\{\varphi_i\}$ из D, удовлетворяющую требованию полноты в том или ином смысле. Если потребовать, чтобы при заданном y элемент $Ax - y$ был ортогонален в с е м φ_i, то благодаря условию полноты отсюда будет следовать, что $Ax - y = \theta$, т. е. что x — решение уравнения (18). Вместо этого вводим подпространство H_n, порождаемое элементами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, и ищем тот элемент $x \in H_n$, для которого

$$Ax - y \perp \varphi_i \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Это и приводит к решению системы (23).

Сходимость метода Бубнова — Галеркина может быть доказана для уравнений с операторами более широкого класса, чем это было сделано выше для метода Ритца. В частности, метод Бубнова — Галеркина может быть применен к решению дифференциальных уравнений более общего вида, чем уравнения Штурма — Лиувилля. Однако мы не останавливаемся на исследовании метода Бубнова — Галеркина. Такое исследование проведено подробно в книге С. Г. Михлина «Вариационные методы в математической физике».

ГЛАВА XIII

СЧЕТНО-НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

13.1. Полунормы и определение счетно-нормированного пространства

Далеко не во всех пространствах, важных для приложений, можно ввести норму так, чтобы сходимость по норме совпала с интересующей нас конкретной сходимостью. В качестве примера пространства, не допускающего нормировки, в 5.2 было указано s. В этой главе мы встретим еще ряд таких пространств. Чтобы иметь возможность изучить хотя бы некоторые из этих пространств методами, близкими к теории нормированных пространств, введем понятие полунормы, обобщающее понятие нормы. Для полунормы сохраним то же обозначение, которое использовалось до сих пор для нормы.

Определение. Вещественный функционал $\|x\|$, заданный на линейной системе E, называется *полунормой*, если он обладает следующими свойствами:

I. $\| x \| \geqslant 0$ для любого $x \in E$.

II. $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$ для любого $x \in E$ и любого числа λ.

III. $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ для любых x, $y \in E$ (неравенство треугольника).

Таким образом, по сравнению с определением нормы здесь отсутствует требование, чтобы $\| x \| = 0$ только для $x = \theta$, игравшее в теории нормированных пространств крайне существенную роль. Ясно, что $\| \theta \| = 0$, но не исключено, что $\| x \| = 0$ и для некоторого $x \neq \theta$.

Заметим, что для полунормы справедливо неравенство (2) из гл. V, которое выводится так же, как для нормы.

В скрытом виде мы уже встречались с полунормами. Так, например, если принять за E совокупность всех суммируемых функций, заданных на отрезке $[a, b]$, с естественным определением сложения и умножения на число, но не производить при этом никаких отождествлений, т. е. считать, что две функции из E различны, если они отличаются друг от друга хотя бы в одной

точке, а затем положить

$$\| x \| = \int_a^b | x(t) | \, dt,$$

то такой функционал будет полунормой в E. Пространство L получается из E за счет отождествления элементов, разности которых имеют полунорму, равную 0. Нетрудно понять, что и в общем случае, если на линейной системе E задана полунорма и мы отождествим элементы, разность которых имеет полунорму, равную нулю, то полунорма станет нормой, а E превратится в нормированное пространство; обозначим его через E^0. При этом следует учесть, что если x отождествляется с y, а y с z, т. е. если $\| x - y \| = \| y - z \| = 0$, то и $\| x - z \| = 0$, т. е. x отождествляется с z. Таким образом, каждый элемент пространства E^0 изображается целым классом отождествляемых между собой элементов системы E. В частности, все элементы из E, полунорма которых равна 0, будут изображать нулевой элемент пространства E^0. Вообще отождествляемые элементы имеют одну и ту же полунорму, которая и становится нормой после отождествления.

При определении суммы двух элементов из E^0 нужно сложить изображающие их элементы из E (аналогично тому, как определялась сумма в пространстве L). Легко видеть, что сумма как элемент из E^0 не будет зависеть от выбора изображающих элементов в пределах соответствующих классов *). То же замечание относится и к умножению на число.

Таким образом, линейная система с полунормой легко сводится к нормированному пространству.

Существенное и далеко идущее обобщение получается тогда, когда рассматриваются линейные системы, на которых задано счетное множество полунорм **).

Определение. Линейная система E называется *счетно-нормированным пространством*, если на E задано счетное множество полунорм

$$\| x \|_1, \ \| x \|_2, \ \ldots, \ \| x \|_p, \ \ldots$$

(некоторые из них могут быть и нормами), причем если $\| x \|_p = 0$ для некоторого $x \in E$ при всех $p = 1, 2, \ldots$, то $x = \theta$.

В счетно-нормированном пространстве определяется *«сходимость по полунормам»*. Именно, будем писать, что $x_n \to x$, если

*) Точно это значит, что если x отождествляется с y, а z с u, то $x + z$ отождествляется с $y + u$, т. е. $\| (x + z) - (y + u) \| = 0$.

**) Линейные системы с конечным множеством полунорм также не представляют значительного интереса, поскольку и они сводятся к нормированным пространствам.

$\| x_n - x \|_p \underset{n\to\infty}{\to} 0$ при всех $p = 1, 2, \ldots$ В частности, $x_n \to \theta$ означает, что $\| x_n \|_p \to 0$ при всех p.

Из определения сразу следует, что соотношения $x_n \to x$ и $x_n - x \to \theta$ равносильны. Таким образом, для выяснения смысла сходимости в конкретном счетно-нормированном пространстве достаточно рассматривать сходимость к θ.

Нормированное пространство представляет частный случай счетно-нормированного. Именно, это — такое счетно-нормированное, в котором все полунормы являются нормами и совпадают между собой. Тогда сходимость по полунормам превращается в сходимость по норме.

Проверим единственность предела в счетно-нормированном пространстве. Пусть $x_n \to x$ и одновременно $x_n \to y$. Тогда при любом p

$$\| x - y \|_p \leqslant \| x - x_n \|_p + \| x_n - y \|_p \to 0.$$

Следовательно, $\| x - y \|_p = 0$, т. е. $x - y = \theta$ по определению счетно-нормированного пространства, а потому $x = y$.

Далее, $\| x - y \|_p$ при каждом p — *непрерывная функция своих аргументов*. Действительно, пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$. Имеем (см. неравенство (2) из гл. V)

$$\| x_n - y_n \|_p - \| y - x \|_p \leqslant$$
$$\leqslant \| (x_n - x) + (y - y_n) \|_p \leqslant \| x_n - x \|_p + \| y - y_n \|_p.$$

Аналогично

$$\| y - x \|_p - \| x_n - y_n \|_p \leqslant \| x_n - x \|_p + \| y - y_n \|_p.$$

Таким образом,

$$| \| x_n - y_n \|_p - \| y - x \|_p | \leqslant \| x_n - x \|_p + \| y - y_n \|_p \to 0.$$

Следовательно,

$$\| x_n - y_n \|_p \to \| y - x \|_p = \| x - y \|_p \text{*)}.$$

В частности, полагая все $y_n = \theta$ (а тогда и $y = \theta$), получим, что если $x_n \to x$, то $\| x_n \|_p \to \| x \|_p$ при всех p (*непрерывность полунорм*).

Дословно повторяя рассуждения из 5.2, можно проверить непрерывность алгебраических операций в счетно-нормированном пространстве.

Распространим на счетно-нормированные пространства еще некоторые важные определения.

---

*) Этим рассуждением, в частности, проверяется непрерывность нормы в нормированных пространствах без ссылки на непрерывность расстояния в общих метрических пространствах.

Определения. Последовательность элементов $\{x_n\}$ из счетно-нормированного пространства называется *фундаментальной* (по полунормам), если для каждого $p = 1, 2, \ldots$

$$\| x_n - x_m \|_p \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

Счетно-нормированное пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел.

Ясно, что банаховы пространства — частный случай полных счетно-нормированных пространств.

Применим теперь к счетно-нормированным пространствам соображения, развитые в начале этого параграфа в связи с понятием полунормы. Для каждого натурального p назовем *p-эквивалентными* такие элементы x и y из счетно-нормированного пространства E, для которых $\| x - y \|_p = 0$. Отождествляя p-эквивалентные элементы между собой, мы получим нормированное пространство, которое обозначим через $E^{(p)}$ и в котором роль нормы будет играть p-я полунорма $\| x \|_p$. Заметим, что если $\| x \|_p$ было нормой уже в E, то $E^{(p)}$ по составу элементов совпадает с E. Но $E^{(p)}$ всегда рассматривается только с одной нормой $\| x \|_p$ *).

Пусть теперь A — произвольное множество из E. Обозначим через $A^{(p)}$ множество, которое получается из A за счет отождествления p-эквивалентных элементов. $A^{(p)}$ можно рассматривать как множество из $E^{(p)}$. Будем называть $A^{(p)}$ *образом* множества A в пространстве $E^{(p)}$. Это понятие будет неоднократно использовано в дальнейшем.

13.2. Примеры счетно-нормированных пространств

В этом параграфе мы приведем ряд примеров счетно-нормированных пространств. Некоторые из них, именно — различные пространства дифференцируемых функций, находят важные применения в теории дифференциальных уравнений.

1. Пространство s (определение см. в 2.1). Положим для любого $x = \{ \xi_i \} \in s$

$$\| x \|_p = | \xi_p | \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Легко видеть, что $\| x \|_p$ — полунормы, а s становится счетно-нормированным пространством. При этом соотношение

$$\| x_n - x \|_p \to 0 \quad (x_n = \{\xi_i^{(n)}\}, \; x = \{\xi_i\})$$

*) Отметим, что из полноты пространства E не вытекает полнота пространств $E^{(p)}$. Это может быть подтверждено примерами 4 и 5 из следующего параграфа.

означает, что $\xi_p^{(n)} \to \xi_p$, т. е. *сходимость по полунормам в* s *совпадает со сходимостью по координатам.* Последовательность $\{x_n\}$ из s фундаментальна по полунормам тогда и только тогда, когда она фундаментальна по координатам. Тем самым пространство s полно, как счетно-нормированное пространство, и его полнота в этом смысле означает то же самое, что полнота s как метрического пространства (ср. 3.5).

2. Пространство $C(-\infty, +\infty)$ или, короче, C^∞, состоящее из всех непрерывных функций $x(t)$, заданных на всей оси $-\infty < t < \infty$. Алгебраические операции определяются в C^∞ естественным образом, и C^∞ становится линейной системой. Нулевым элементом в C^∞ будет функция $x(t) \equiv 0$. Полунормы определим по формулам

$$\|x\|_p = \max_{-p \leqslant t \leqslant p} |x(t)| \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что это, действительно,— полунормы, но не нормы. В самом деле, если $\|x\|_p = 0$, то функция $x(t)$ все же может быть отличной от нуля вне отрезка $[-p, p]$. Однако если $\|x\|_p = 0$ при всех p, то это уже будет означать, что $x(t) \equiv 0$ на всей оси, т. е. $x = \theta$. Таким образом, C^∞ — счетно-нормированное пространство.

Выясним смысл сходимости в этом пространстве. При каждом фиксированном p соотношение $\|x_n\|_p \to 0$ означает, что $x_n(t) \to 0$ равномерно на отрезке $[-p, p]$, а тогда $x_n \to \theta$ означает в C^∞, что $x_n(t) \to 0$ *равномерно на любом конечном отрезке.*

Обратим внимание читателя на то, что из равномерной сходимости на любом конечном отрезке не вытекает равномерная сходимость на всей оси. Действительно, положим

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t = n, \\ 0 \text{ при } t \leqslant n-1 \text{ и } t \geqslant n+1 \end{cases}$$

и определим $x_n(t)$ в промежутках $(n-1, n)$ и $(n, n+1)$ по закону линейной интерполяции. Тогда для любого натурального p функции $x_n(t) = 0$ на отрезке $[-p, p]$, если $n \geqslant p+1$. Таким образом, $x_n(t) \to 0$ в каждой точке и равномерно на любом конечном отрезке, но поскольку $\max\limits_{-\infty < t < \infty} x_n(t) = 1$, сходимость $x_n(t)$ к 0 на всей оси не равномерна.

Проверим полноту пространства C^∞. Пусть $x_n - x_m \to \theta$ по полунормам. Это означает, что

$$x_n(t) - x_m(t) \to 0 \text{ равномерно на каждом отрезке } [-p, p].$$

Так как каждое вещественное число попадает внутрь некоторого из этих отрезков, последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится в каждой точке вещественной оси: $x_n(t) \to x(t)$. Кроме того, сходимость

в этом соотношении равномерна на каждом из отрезков $[-p, p]$ *), а тогда функция $x(t)$ непрерывна на каждом из отрезков $[-p, p]$ и тем самым непрерывна в каждой точке вещественной оси. Таким образом, $x \in C^\infty$, а $x_n \to x$ по полунормам в C^∞.

3. Пространство C_l^∞, состоящее из всех функций $x(t)$, заданных на всей оси и имеющих непрерывные производные до l-го порядка включительно (l — заданное натуральное число). Алгебраические операции определяются в C_l^∞ естественным образом, а полунормы вводятся по формулам

$$\|x\|_p = \sum_{k=0}^{l} \max_{-p \leqslant t \leqslant p} |x^{(k)}(t)|.$$

Получается счетно-нормированное пространство, представляющее аналог пространства C_l непрерывно дифференцируемых функций, рассмотренного в 8.11.

По аналогии с 8.11 и используя рассуждения, подробно проведенные при рассмотрении предыдущего примера, легко установить, что сходимость $x_n \to x$ в C_l^∞ означает, что

$$x_n^{(k)}(t) \to x^{(k)}(t) \text{ равномерно на каждом отрезке } [-p, p]$$

при $k = 0, 1, \ldots, l$. Иными словами, эта сходимость равномерна на любом конечном отрезке. Как и C_l, пространство C_l^∞ оказывается полным.

4. Пространство C_∞^∞, состоящее из всех функций $x(t)$, бесконечно дифференцируемых (т. е. имеющих непрерывные производные любого порядка) на всей оси, с естественным определением алгебраических операций. По составу элементов C_∞^∞ совпадает с пересечением всех пространств C_l^∞ ($l = 1, 2, \ldots$) из предыдущего примера. Полунормы в C_∞^∞ введем по формулам

$$\|x\|_p = \sum_{k=0}^{p} \max_{-p \leqslant t \leqslant p} |x^{(k)}(t)| \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, здесь при определении полунорм по мере увеличения номера p участвует все большее количество производных. Аналогично предыдущему примеру легко проверить, что $x_n \to x$ в C_∞^∞ означает, что

$$x_n^{(k)}(t) \to x^{(k)}(t)$$

равномерно на любом конечном отрезке при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ Пространство C_∞^∞ — полное.

*) Ср. с проверкой полноты пространства C в 3.5.

5. Пространство $\boldsymbol{D}$ бесконечно дифференцируемых функций с равноограниченными носителями. Пусть $[a, b]$ — заданный отрезок, а через $\boldsymbol{D}$ обозначено множество (очевидно — линейное) всех функций $x(t)$ из C_∞^∞, которые обращаются в 0 вне отрезка $[a, b]$ *). Из непрерывности самих этих функций и их производных следует, что

$$x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ясно, что $\boldsymbol{D}$, как подмножество из C_∞^∞, замкнуто в том смысле, что оно содержит пределы всех сходящихся последовательностей, которые можно образовать из элементов множества $\boldsymbol{D}$. Ту же сходимость, которая индуцируется в $\boldsymbol{D}$ из C_∞^∞, можно определить как сходимость по полунормам, вводимым несколько проще, чем в C_∞^∞, а именно:

$$\| x \|_p = \sum_{k=0}^{p} \max_{a \leq t \leq b} | x^{(k)}(t) | \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

При этом сходимость в $\boldsymbol{D}$ может быть охарактеризована как *равномерная сходимость функций и всех их производных на отрезке* $[a, b]$ **). Полнота пространства $\boldsymbol{D}$ вытекает уже из того, что $\boldsymbol{D}$ замкнуто в полном пространстве C_∞^∞.

Так как каждая функция из $\boldsymbol{D}$ обращается в 0 вне отрезка $[a, b]$, ясно, что если $\| x \|_p = 0$ при некотором p, то $x(t) \equiv 0$, т. е. $x = \theta$. Таким образом, каждая полунорма в $\boldsymbol{D}$ на самом деле является нормой. Однако сходимость по каждой из этих норм в отдельности отлична от той сходимости, которая описывается в $\boldsymbol{D}$ всей совокупностью норм $\| x \|_p$. По отношению к каждой норме в отдельности $\boldsymbol{D}$ даже не будет полным.

13.3. Эквивалентные системы полунорм

Одна и та же линейная система может быть превращена в счетно-нормированное пространство многими способами. В связи с этим введем следующее определение.

Определение. Пусть на одной и той же линейной системе $\boldsymbol{E}$ заданы две счетные системы полунорм, превращающие $\boldsymbol{E}$ в счетно-нормированное пространство. Эти две системы называются *эквивалентными*, если они определяют в $\boldsymbol{E}$ одну и ту же

*) Носителем непрерывной функции $x(t)$ называют замыкание того множества, где $x(t) \neq 0$. Таким образом, носители всех функций из $\boldsymbol{D}$ содержатся в $[a, b]$.

**) Отсюда уже следует и равномерная сходимость на любом конечном отрезке, поскольку носители всех функций из $\boldsymbol{D}$ содержатся в отрезке $[a, b]$.

сходимость (т. е. соотношение $x_n \to x$ по полунормам одной системы влечет то же соотношение и по полунормам другой системы и обратно).

Кроме того, систему полунорм $\| x \|_p$ будем называть *монотонной*, если

$$\| x \|_1 \leqslant \| x \|_2 \leqslant \ldots \leqslant \| x \|_p \leqslant \ldots$$

для любого $x \in E$.

Во всех примерах из 13.2, кроме первого (пространство s), указанные там системы полунорм монотонны.

Т е о р е м а 13.3.1. *В любом счетно-нормированном пространстве E существует монотонная система полунорм, эквивалентная первоначально заданной системе* $\{\| x \|_p\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $x \in E$ положим

$$\| x \|'_p = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \| x \|_i \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Легко видеть, что $\| x \|'_p$ — полунормы. Проверим, например, неравенство треугольника. Действительно, для люых $x, y \in E$

$$\| x + y \|'_p = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \| x + y \|_i \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant p} (\| x \|_i + \| y \|_i) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \| x \|_i + \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \| y \|_i = \| x \|'_p + \| y \|'_p.$$

Если $\| x \|'_p = 0$ при всех p, то тем более $\| x \|_p = 0$ при всех p, а тогда $x = 0$ по определению счетно-нормированного пространства. Таким образом, система E с новыми полунормами также является счетно-нормированным пространством. При этом система новых полунорм монотонна.

Теперь проверяем эквивалентность обеих систем полунорм. Если $x_n \to x$ по старым полунормам, т. е. $\| x_n - x \|_p \to 0$ при любом p, то

$$\| x_n - x \|'_p = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \| x_n - x \|_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \| x_n - x \|_i \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

т. е. $x_n \to x$ по новым полунормам. Обратно, из неравенства $\| x \|_p \leqslant \| x \|'_p$, справедливого для любого $x \in E$, сраэу видно, что из сходимости $\{x_n\}$ к x по новым полунормам вытекает сходимость к тому же пределу и по старым полунормам.

З а м е ч а н и е. Из доказательства теоремы легко видеть, что если в какой-нибудь системе полунорм любое конечное число их заменить по формуле (1) одной полунормой, то это не отразится на сходимости.

О п р е д е л е н и е. Пусть $\| x \|$ и $\| x \|'$ — две полунормы, заданные на одной и той же линейной системе E. Будем гово-

рить, что полунорма $\| x \|'$ *мажорируется* полунормой $\| x \|$, если существует такая постоянная M, что $\| x \|' \leqslant M \| x \|$ для любого $x \in E$.

Теорема 13.3.2. *Для того чтобы две монотонные системы полунорм* $\{\| x \|_p\}$ *и* $\{\| x \|'_p\}$ *в счетно-нормированном пространстве* E *были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы каждая полунорма из первой системы мажорировалась некоторой полунормой из второй системы и обратно.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть системы полунорм $\{\| x \|_p\}$ и $\{\| x \|'_p\}$ эквивалентны, и предположим, например, что полунорма $\| x \|_{p_0}$ не мажорируется ни одной из полунорм второй системы. Тогда для любого натурального n существует такой элемент $x_n \in E$, что

$$\| x_n \|_{p_0} > n \| x_n \|'_n. \tag{2}$$

Заменяя x_n на $\dfrac{1}{\| x_n \|_{p_0}} x_n$, можно сразу считать, что $\| x_n \|_{p_0} = 1$, следовательно, $x_n \not\to \theta$ по полунормам первой системы.

С другой стороны, проверим, что $x_n \to \theta$ по полунормам второй системы. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ и любого натурального p подбираем $N > \max\left(p, \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$. Тогда при $n \geqslant N$ имеем благодаря монотонности систем полунорм и неравенству (2)

$$\| x_n \|'_p \leqslant \| x_n \|'_n < \frac{1}{n} \| x_n \|_{p_0} = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Таким образом, $\| x_n \|'_p \to 0$ при любом p, и мы приходим к противоречию с условием эквивалентности данных систем полунорм.

б) Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы. Покажем, что если $x_n \to x$ по полунормам первой системы, то то же соотношение справедливо и по полунормам второй системы. Для любой полунормы $\| x \|'_p$ найдем мажорирующую ее полунорму $\| x \|_q$ из первой системы, а тогда существует такая постоянная M, что

$$\| x_n - x \|'_p \leqslant M \| x_n - x \|_q.$$

Но $\| x_n - x \|_q \to 0$ благодаря сходимости по полунормам первой системы, следовательно, и $\| x_n - x \|'_p \to 0$. Остается отметить, что это рассуждение справедливо при любом p.

Аналогично из сходимости по полунормам второй системы выводится сходимость по полунормам первой системы.

Заметим, что в доказательстве достаточности мы не опирались на условие монотонности систем полунорм и, таким образом, в части достаточности теорема верна для любых систем полунорм.

Из определения эквивалентности систем полунорм сразу следует, что если *из монотонной последовательности полунорм отбросить любое конечное число их или перейти от нее к любой ее частичной* (бесконечной) *подпоследовательности, то получится система полунорм, эквивалентная первоначальной.*

Поставим еще вопрос: в каком случае в счетно-нормированном пространстве E можно ввести эквивалентную н о р м у, т. е. такую, что сходимость по этой норме совпадет со сходимостью по заданным полунормам? Для простоты будем считать, что заданная в E система полунорм $\{\| x \|_p\}$ монотонна. Назовем полунорму $\| x \|_p$ *существенной*, если она не мажорируется ни одной из предыдущих (т. е. с номерами, меньшими p). В частности, существенной будет первая полунорма $\| x \|_1$.

Т е о р е м а 13.3.3. *Для того чтобы в счетно-нормированном пространстве E с монотонной системой полунорм существовала эквивалентная норма, необходимо и достаточно, чтобы в заданной системе полунорм было лишь конечное число существенных.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. От заданной системы полунорм сохраняем лишь существенные полунормы, записывая их в том порядке, в каком они входили в первоначальную систему. Из предыдущей теоремы сразу следует, что полученная таким образом монотонная система полунорм (она может быть как бесконечной, так и конечной) эквивалентна первоначальной. При этом ясно, что если для некоторого $x \in E$ все существенные полунормы равны 0, то и любая полунорма (за счет условия мажорирования) тоже равна 0, т. е. $x = \theta$ *).

Пусть $\{\| x \|_p\}$ — эта новая система, в которой существенные полунормы перенумерованы заново натуральными числами, взятыми по порядку: $p = 1, 2, \ldots$. Предположим, что эта система состоит из конечного числа r полунорм. Благодаря монотонности системы ясно, что сходимость по всем r полунормам равносильна сходимости по одной r-й полунорме. С другой стороны, если $\| x \|_r = 0$, то и $\| x \|_p = 0$ при $p < r$, а потому $x = \theta$. Таким образом, r-я полунорма является на самом деле нормой, и эта норма эквивалентна первоначально заданной системе полунорм. Достаточность условия теоремы доказана.

Обратно, пусть существует эквивалентная норма $\| x \|'$. По теореме 13.3.2 она должна мажорироваться некоторой полунормой $\| x \|_r$, т. е. существует такая постоянная M, что

$$\| x \|' \leqslant M \| x \|_r \quad \text{для любого } x \in E.$$

Покажем, что r и есть число существенных полунорм.

Допустим, что в системе существенных полунорм есть полунорма с номером $p > r$. По теореме 13.3.2 она должна мажорироваться нормой $\| x \|'$, т. е. существует такая постоянная N, что

$$\| x \|_p \leqslant N \| x \|' \quad \text{для любого } x \in E.$$

Но тогда $\| x \|_p \leqslant NM \| x \|_r$ для любого $x \in E$, т. е. полунорма $\| x \|_p$ мажорируется полунормой $\| x \|_r$ (с меньшим номером!) и потому не является существенной. Таким образом, существенных полунорм лишь конечное число. Теорема доказана.

---

*) Теорема 13.3.2, очевидно, остается в силе, если рассматриваемые системы состоят из конечного числа полунорм, в частности, если одна из систем сводится к одной норме. Заметим также, что если какая-нибудь полунорма мажорируется некоторой предыдущей, то она обязательно мажорируется и одной из существенных.

В 5.2 уже было доказано, что в пространстве s не существует нормы, которая описывала бы сходимость по координатам, т. е. нормы, эквивалентной заданной в s системе полунорм. Из теоремы 13.3.3 этот результат следует мгновенно, поскольку совершенно очевидно, что все полунормы в s существенны. Можно доказать, что и во всех других пространствах, приведенных в качестве примеров в 13.2, все полунормы существенны, а потому ни в одном из этих пространств нет эквивалентной нормы.

13.4. Введение метрики в счетно-нормированном пространстве

В гл. V мы видели, что нормированные пространства — частный случай метрических. Здесь мы покажем, что счетно-нормированные пространства тоже представляют частный случай метрических; однако на этот раз метрика вводится несколько более сложным способом. Именно, образцом для введения метрики в произвольном счетно-нормированном пространстве будет служить формула, по которой в 3.2 определялось расстояние в пространстве s.

Итак, пусть E — счетно-нормированное пространство с системой полунорм $\{\| x \|_p\}$. Определим расстояние в E, полагая для любых двух элементов $x, y \in E$

$$\rho(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{\| x - y \|_p}{1 + \| x - y \|_p}. \tag{3}$$

Проверка того, что при таком определении расстояния в E будут выполнены все аксиомы метрического пространства, производится совершенно так же, как это было сделано в 3.2 для пространства s. Так же как для s (см. 3.3), проверяется, что сходимость $x_n \to x$ по расстоянию в s равносильна выполнению при всех $p = 1, 2, \ldots$ условий $\| x_n - x \|_p \to 0$, т. е. *сходимость по расстоянию совпадает со сходимостью по полунормам.*

Остановимся на вопросе о полноте счетно-нормированного пространства. Пусть E — счетно-нормированное пространство и по формуле (3) в нем введена метрика. Выше (в 13.1) мы определили, что означает полнота счетно-нормированного пространства. С другой стороны, мы располагаем понятием полноты метрического пространства. Покажем, что в E оба эти понятия равносильны.

Пусть E полно как счетно-нормированное пространство, а последовательность $\{x_n\}$ элементов из E фундаментальна по метрике, т. е. $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$. Из формулы (3) сразу следует, что

$$\frac{\| x_n - x_m \|_p}{1 + \| x_n - x_m \|_p} \xrightarrow[n, m \to \infty]{} 0 \quad \text{при каждом } p.$$

Как и в s, отсюда следует, что

$$\|x_n - x_m\|_p \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} 0 \quad \text{при каждом } p,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна по полунормам. Но так как E — полное счетно-нормированное пространство, то $\{x_n\}$ сходится по полунормам к некоторому пределу x, а тогда и $\rho(x_n, x) \to 0$. Таким образом, E полно как метрическое пространство.

Обратно, пусть E полно как метрическое пространство, а последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна по полунормам. Проверим, что тогда она фундаментальна и по метрике. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем p_0 так, что $\sum_{p=p_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p_0}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Затем подбираем N так, что

$$\|x_n - x_m\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } n,\ m > N \text{ и } p = 1,\ 2,\ \ldots,\ p_0.$$

Теперь ясно, что при $n,\ m > N$

$$\rho(x_n,\ x_m) = \sum_{p=1}^{p_0} \frac{1}{2^p} \frac{\|x_n - x_m\|_p}{1 + \|x_n - x_m\|_p} + \sum_{p=p_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{\|x_n - x_m\|_p}{1 + \|x_n - x_m\|_p} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{p=1}^{p_0} \frac{1}{2^p} + \sum_{p=p_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна по расстоянию, и потому $\{x_n\}$ сходится по расстоянию к некоторому пределу x. Но тогда $x_n \to x$ и по полунормам.

Если линейная система E каким-то произвольным способом метризована, то это еще не означает, что E может быть превращено в счетно-нормированное пространство так, чтобы сходимость по метрике совпала со сходимостью по полунормам. Это следует хотя бы из того, что метрика, введенная с помощью формулы (3) по полунормам, обладает рядом дополнительных свойств, например свойством «инвариантности»: $\rho(x, y) = \rho(x - y, \theta)$, из которого уже вытекает, что

$$\rho(x_n,\ x) \to 0 \text{ равносильно } \rho(x_n - x,\ \theta) \to 0.$$

Тогда последним свойством должна обладать и всякая метрика, описывающая ту же самую сходимость. Но и условия инвариантности метрики тоже недостаточно для счетной нормируемости пространства E. Приводить необходимые и достаточные условия, при которых метрическое пространство, построенное на линей-

ной системе, может быть превращено в счетно-нормированное, мы здесь не будем *).

Рассмотрим счетно-нормированное пространство E с монотонной системой полунорм. Будем считать, что E метризовано по формуле (3). Если p — натуральное, а $\delta > 0$ — любое, обозначим через $V^*_{p,\delta}$ множество всех $x \in E$, для которых $\| x \|_p \leqslant \leqslant \delta$. Из непрерывности полунорм следует, что множества $V^*_{p,\delta}$ замкнуты. Действительно, если $x_n \in V^*_{p,\delta}$ и $x_n \to x$, то

$$\| x \|_p = \lim \| x_n \|_p \leqslant \delta,$$

и потому $x \in V^*_{p,\delta}$.

По аналогичным соображениям замкнуто и множество всех тех $x \in E$, для которых $\| x \|_p \geqslant \delta$, а тогда его дополнение, обозначим это дополнение через $V_{p,\delta}$, т. е. множество всех $x \in E$, для которых $\| x \|_p < \delta$, открыто. Таким образом, θ — внутренняя точка в $V_{p,\delta}$, тем более внутренняя точка в $V^*_{p,\delta}$ (заметим, что $V_{p,\delta} \subset V^*_{p,\delta}$).

Множества $V_{p,\delta}$ (соответственно $V^*_{p,\delta}$) будем называть открытыми (соответственно замкнутыми) *квазишарами* с центром в θ. Квазишары, для которых $\delta = 1$, будем называть *единичными*.

Лемма 13.4.1. *Пусть U — δ-окрестность нулевого элемента θ, т. е. открытый шар $S(\theta, \delta)$ с центром в θ и радиусом δ. Тогда существует такое натуральное q, что квазишар $V^*_{q,\frac{1}{q}} \subset U$.*

Доказательство. Пусть $q > \frac{2}{\delta}$. Тогда $\frac{1}{q} < \frac{\delta}{2}$ и

$$\sum_{p=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^q} < \frac{1}{q} < \frac{\delta}{2}.$$

Если $x \in V^*_{q,\frac{1}{q}}$, то $\| x \|_p \leqslant \frac{1}{q}$ при $p \leqslant q$. Следовательно,

$$\rho(x, \theta) = \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{2^p} \frac{\| x \|_p}{1 + \| x \|_p} + \sum_{p=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{\| x \|_p}{1 + \| x \|_p} <$$

$$< \frac{1}{q} \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{2^p} + \sum_{p=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^p} < \frac{1}{q} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Таким образом, $V^*_{q,\frac{1}{q}} \subset U$.

*) См., например, Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, стр. 368.

Замечание. Поскольку θ — внутренняя точка в $V^*_{q,\frac{1}{q}}$, у нулевого элемента существует некоторая шаровая окрестность W, которая содержится в $V^*_{q,\frac{1}{q}}$. Взаимное расположение множеств U, $V^*_{q,\frac{1}{q}}$ и W проиллюстрировано на рис. 19.

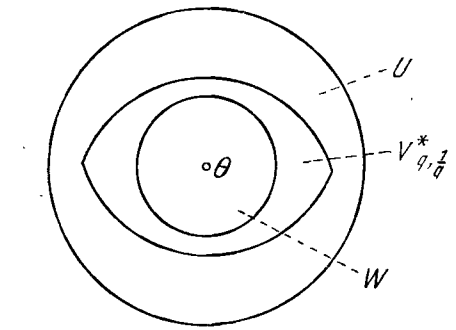

Рис. 19.

13.5. Ограниченные множества в счетно-нормированном пространстве

Пусть E — снова произвольное счетно-нормированное пространство. По аналогии с определением ограниченности множества в нормированном пространстве можно ввести понятие ограниченности по полунормам.

Определение. Множество $A \subset E$ называется *ограниченным по полунормам*, если существуют такие постоянные C_p ($p = 1, 2, \ldots$), что $\| x \|_p \leqslant C_p$ для каждого $x \in A$ и любого p.

Заметим, что, например, всякая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ ограничена по полунормам. Это сразу вытекает из неравенства

$$\| x_n \|_p \leqslant \| x_m \|_p + \| x_n - x_m \|_p,$$

в котором следует считать m фиксированным, а n пробегающим все значения от 1 до ∞ (ср. с доказательством теоремы 3.5.2).

Теорема 13.5.1. *Для того чтобы множество $A \subset E$ было ограниченным по полунормам, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующему условию: для любых $x_n \in A$ и любой последовательности чисел $\lambda_n \to 0$ последовательность $\lambda_n x_n \to \theta$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна, так как при любом p

$$\| \lambda_n x_n \|_p = | \lambda_n | \| x_n \|_p \leqslant | \lambda_n | C_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Проверяем его достаточность. Допустим, что условие теоремы выполнено, но при некотором p полунормы $\| x \|_p$ ($x \in A$) в совокупности не ограничены, т. е. существуют такие $x_n \in A$, что

$$\| x_n \|_p > n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда положим $\lambda_n = \frac{1}{n}$. По условию $\lambda_n x_n \to \theta$; однако $\frac{1}{n} \| x_n \|_p > 1$. Мы пришли к противоречию и тем самым теорема доказана.

Остановимся на одном из примеров, рассмотренных в 13.2, именно на пространстве $\boldsymbol{D}$, и покажем, что *в этом пространстве класс компактных множеств совпадает с классом множеств, ограниченных по полунормам* *).

Если множество $M \subset \boldsymbol{D}$ не ограничено по полунормам, то оно не может быть компактным. Действительно, если некоторая из полунорм, например p-я, принимает на элементах из M сколь угодно большие значения, то в M существует последовательность элементов $\{x_n\}$, для которой $\|x_n\|_p \to \infty$, а из такой последовательности нельзя выделить никакой сходящейся (по полунормам или, что то же самое, по метрике). Остается показать, что если $M \subset \boldsymbol{D}$ ограничено по полунормам, то оно компактно.

Пусть $x_n \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и тем самым $\| x_n \|_p \leqslant C_p$ при каждом $p = 1, 2, \ldots$. Из ограниченности последовательности $\| x_n \|_1$ вытекает, что сами функции $x_n(t)$ и их производные $x_n'(t)$ равноограничены на отрезке $[a, b]$:

$$| x_n(t) | \leqslant C_1, \quad | x_n'(t) | \leqslant C_1 \text{ при } a \leqslant t \leqslant b.$$

Из равноограниченности производных следует, что сами функции $x_n(t)$ удовлетворяют условию Липшица с общей постоянной C_1 **), а тогда по лемме 3.9.1 функции $x_n(t)$ равностепенно непрерывны. Следовательно, по теореме Арцела (теорема 3.9.1) из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить частичную, которая сходится по метрике пространства $\boldsymbol{C}$, т. е. равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. Запишем эту частичную последовательность в виде:

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots \tag{4}$$

Теперь из ограниченности вторых полунорм $(\| x_{1n} \|_2 \leqslant C_2)$ следует, что у функций $x_{1n}(t)$ равноограничены производные 1-го и 2-го порядков:

$$| x_{1n}'(t) | \leqslant C_2, \quad | x_{1n}''(t) | \leqslant C_2 \text{ при } a \leqslant t \leqslant b.$$

Тогда производные 1-го порядка $x_{1n}'(t)$ оказываются равностепенно непрерывными. Еще раз применяя теорему Арцела, мы сможем выделить из (4) новую частичную последовательность

$$x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots,$$

для которой последовательность производных 1-го порядка будет равномерно сходящейся на отрезке $[a, b]$.

*) В то же время в бесконечно-мерном нормированном пространстве совпадение классов компактных и ограниченных множеств невозможно.

**) Действительно, по формуле Лагранжа для любых t_1 и t_2 из $[a, b]$

$$| x_n(t_1) - x_n(t_2) | = | x_n'(\tau)(t_1 - t_2) | \leqslant C_1 | t_1 - t_2 |.$$

Продолжая этот процесс до бесконечности, мы построим таблицу функций

$$\begin{aligned} &x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{1n},\ \ldots,\\ &x_{21},\ x_{22},\ \ldots,\ x_{2n},\ \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &x_{n1},\ x_{n2},\ \ldots,\ x_{nn},\ \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

так, что каждая ее строка (начиная со второй) представляет частичную последовательность, выделенную из предыдущей строки, а функции, стоящие в n-й строке, обладают тем свойством, что последовательности

$$x_{n1}^{(k)}(t),\ x_{n2}^{(k)}(t),\ \ldots,\ x_{nn}^{(k)}(t),\ \ldots \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$

равномерно сходятся на отрезке $[a,\ b]$. Применяя известный читателю диагональный метод, мы выделим диагональную последовательность $\{x_{nn}\}$, которая и будет сходиться по полунормам в пространстве $\boldsymbol{D}$, так как для этих функций производные любого порядка образуют последовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[a,\ b]$. Тем самым доказана компактность множества M.

Будем далее считать, что система полунорм в счетно-нормированном пространстве $\boldsymbol{E}$ монотонна. Докажем, что *если пространство* $\boldsymbol{E}$ *не сводится к нормированному* (т. е. если в нем не существует эквивалентной нормы), *то ни один квазишар не может быть ограниченным множеством.*

Допустим, что квазишар $V^*_{p,\delta}$ ограничен *). Это значит, что при любом натуральном q существует такая постоянная C_q, что из неравенства $\|x\|_p \leqslant \delta$ вытекает $\|x\|_q \leqslant C_q$. Покажем, что тогда для любого $x \in \boldsymbol{E}$

$$\|x\|_q \leqslant \frac{C_q}{\delta}\|x\|_p. \tag{5}$$

Пусть сначала $\|x\|_p \neq 0$. Введем элемент $x' = \dfrac{\delta}{\|x\|_p}x$. Ясно, что $\|x'_p\| = \delta$, следовательно, $x' \in V^*_{p,\delta}$ и потому $\|x'\|_q \leqslant C_q$, а тогда

$$\|x\|_q = \frac{\|x\|_p}{\delta}\|x'\|_q \leqslant \frac{C_q}{\delta}\|x\|_p.$$

Если же $\|x\|_p = 0$, то и $\|nx\|_p = 0$ при любом натуральном n и потому $nx \in V^*_{p,\delta}$, а тогда $\|nx\|_q \leqslant C_q$, т. е. $\|x\|_q \leqslant \dfrac{1}{n}C_q$ при любом $n = 1, 2, \ldots$ Отсюда следует, что $\|x\|_q = 0$ и тем самым неравенство (5) выполнено.

*) Ясно, что наше рассуждение достаточно провести для замкнутых квазишаров.

Неравенство (5) означает, что q-я полунорма мажорируется p-й, и так как это справедливо при любом q, среди полунорм в пространстве E не может быть бесконечного множества существенных *). Последнее противоречит теореме 13.3.3, поскольку пространство E, по предположению, не сводится к нормированному **).

13.6. Линейные операторы в счетно-нормированных пространствах

Для упрощения ряда формулировок мы будем дальше, в этом и следующем параграфах, считать, что в рассматриваемых счетно-нормированных пространствах системы полунорм монотонны. Однако основные определения могут быть даны и в любых счетно-нормированных пространствах.

Перенесем в счетно-нормированные пространства некоторые понятия и результаты из гл. VIII.

Пусть X и Y — счетно-нормированные пространства. Как и раньше, оператор U, отображающий X в Y, называется линейным, если он аддитивен и непрерывен ***). Совершенно так же, как в нормированных пространствах, доказываются теоремы 8.2.1 и 8.2.2 и для операторов в счетно-нормированных пространствах. Именно, можно установить, что если аддитивный оператор непрерывен в какой-нибудь одной точке, то он линеен, и что всякий линейный оператор однороден. Перенос в счетно-нормированные пространства теоремы 8.2.3 не представляет интереса, так как можно показать, что во всяком конечно-мерном счетно-нормированном пространстве существует эквивалентная норма. Однако понятие ограниченности оператора при переносе в счетно-нормированные пространства нуждается в изменении.

Определение. Оператор U, заданный в пространстве X, называется *ограниченным*, если для любого натурального p существуют такое натуральное q и такая постоянная C_p, что

$$\|Ux\|_p \leqslant C_p \|x\|_q \tag{6}$$

для всех $x \in X$. В частности, если пространства X и Y нормированные, это определение ограниченности оператора сводится к тому, которое было дано в 8.3.

---

*) Не будут существенными во всяком случае все полунормы с номерами, бо́льшими p.

**) Неограниченность квазишаров можно вывести еще и из того, что если в счетно-нормированном пространстве существует хоть один ограниченный квазишар, то E должно быть нормируемо по одной теореме советского математика А. Н. Колмогорова. Точную формулировку этой теоремы А. Н. Колмогорова можно найти, например, в книге Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова, стр. 365.

***) Непрерывность оператора U, как и выше, означает, что если $x_n \to x$, то $Ux_n \to Ux$. Здесь, естественно, имеется в виду сходимость по полунормам.

Теорема 13.6.1. *Для того чтобы аддитивный оператор U был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.*

Доказательство*). а) **Необходимость.** Рассуждая от противного, допустим, что оператор U линеен, но что для некоторого p требуемой пары чисел q и C_p не существует. Следовательно, для любого натурального n существует такой элемент $x_n \in X$, для которого

$$\| Ux_n \|_p > n \| x_n \|_n \tag{7}$$

(в противном случае при некотором n мы имели бы для всех $x \in X$ неравенство $\| Ux \|_p \leqslant n \| x \|_n$, и мы могли бы взять $q = n$, $C_p = n$). Из неравенства (7) следует, что $\| Ux_n \|_p \neq 0$. Положим $x'_n = \frac{x_n}{\| Ux_n \|_p}$. Тогда $\| Ux'_n \|_p = 1$, следовательно, Ux'_n не стремится к θ. С другой стороны, из неравенства (7) вытекает, что

$$\| x'_n \|_n = \frac{\| x_n \|_n}{\| Ux_n \|_p} < \frac{1}{n}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого натурального q имеем при $n > \max\left(q, \frac{1}{\varepsilon}\right)$

$$\| x'_n \|_q \leqslant \| x'_n \|_n < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Таким образом, $\| x'_n \|_q \to 0$ при любом q, а это означает, что $x'_n \to \theta$. Полученное противоречие с непрерывностью оператора U и доказывает, что оператор U ограничен.

б) **Достаточность.** Пусть оператор U аддитивен и ограничен и пусть $x_n \to \theta$. Возьмем любое натуральное p и воспользуемся неравенством (6). Так как $\| x_n \|_q \to 0$, то и $\| Ux_n \|_p \to 0$, следовательно, $Ux_n \to \theta$. Тем самым непрерывность оператора U в точке $x = \theta$, а тогда и его линейность доказаны.

В точности так же, как в 8.3, доказывается, что для того, чтобы аддитивный оператор U удовлетворял во всем пространстве X неравенству (6), необходимо и достаточно, чтобы неравенство $\| Ux \|_p \leqslant C_p$ (с той же постоянной C_p) было выполнено для всех x из единичного квазишара $V^*_{q,1}$. Таким образом, *ограниченность аддитивного оператора U означает, что для любого натурального p найдется единичный квазишар в X, на котором совокупность значений оператора U «ограничена по p-й полунорме»*.

---

*) Приводимое ниже доказательство — непосредственное обобщение доказательства теоремы 8.3.1.

Из теоремы 13.6.1 легко выводится, что *линейный оператор* U *переводит всякое ограниченное* (по полунормам) *множество из* $\boldsymbol{X}$ *в ограниченное* (по полунормам) *множество в пространстве* $\boldsymbol{Y}$.

Действительно, пусть множество $A \subset \boldsymbol{X}$ ограничено, т. е. существуют такие постоянные M_q, что $\| x \|_q \leqslant M_q$ для всех $x \in A$. Возьмем $y \in U(A)$, т. е. $y = Ux$, где $x \in A$. Так как оператор U ограничен, то для любого p имеем по неравенству (6)

$$\| y \|_p \leqslant C_p \| x \|_q \leqslant C_p M_q.$$

Тем самым множество $U(A)$ тоже ограничено.

Заметим без доказательства, что справедливо и, в известном смысле, обратное заключение: *если аддитивный оператор* U *переводит всякое ограниченное* (по полунормам) *множество из* $\boldsymbol{X}$ *в ограниченное* (по полунормам) *множество в пространстве* $\boldsymbol{Y}$, *то оператор* U *линеен*. Приведем некоторые примеры.

В пространстве $\boldsymbol{C}^\infty$ рассмотрим оператор сдвига (со значениями в том же пространстве): $y = Ux$ означает, что $y(t) = x(t + h)$, где h — фиксированное число, отличное от 0. Ясно, что оператор U линеен. Его аддитивность очевидна, а непрерывность означает, что если $x_n(t) \to 0$ равномерно на любом конечном отрезке, то и $x_n(t + h) \to 0$ в том же смысле. Как линейный оператор, U ограничен. Проверим его ограниченность непосредственно, причем для простоты остановимся лишь на случае, когда $h = 1$.

Имеем при любом $p = 1, 2, \ldots$

$$\| Ux \|_p = \max_{-p \leqslant t \leqslant p} | x(t+1) | \leqslant \max_{-p-1 \leqslant t \leqslant p+1} | x(t) | = \| x \|_{p+1}.$$

Таким образом, для любого p в условии ограниченности (в неравенстве (6)) можно взять $q = p + 1$, $C_p = 1$.

В пространстве $\boldsymbol{D}$ (бесконечно дифференцируемых функций с равноограниченными носителями) рассмотрим оператор дифференцирования: $Ux = x'$. Линейность этого оператора очевидна. Предлагаем читателю самостоятельно проверить для него условие ограниченности.

Перейдем к последовательностям линейных операторов. Прежде всего ясно, что если $Ux = \lim U_n x$ при всех $x \in \boldsymbol{X}$, где все операторы U_n переводят $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$ и аддитивны, то и оператор U аддитивен.

Определение. Операторы U_n ($n = 1, 2, \ldots$), переводящие $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$, называются *равноограниченными*, если для любого натурального p существуют такое натуральное q и такая постоянная C_p, что

$$\| U_n x \|_p \leqslant C_p \| x \|_q \tag{8}$$

при всех $x \in \boldsymbol{X}$ и при всех $n = 1, 2, \ldots$

Совершенно так же, как лемма 8.5.1, доказывается, что *если последовательность линейных операторов* $\{U_n\}$ *точечно сходится к оператору* U *и операторы* U_n *равноограничены, то оператор* U *тоже линеен.* Мы покажем, что в полные счетно-нормированные пространства переносится теорема Банаха — Штейнгауза.

Т е о р е м а 13.6.2. *Пусть* U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *— линейные операторы, отображающие полное счетно-нормированное пространство* $\boldsymbol{X}$ *в какое-нибудь счетно-нормированное пространство* $\boldsymbol{Y}$. *Если в каждой точке* $x \in \boldsymbol{X}$ *совокупность значений* $\{U_n x\}$ *ограничена* (по полунормам в $\boldsymbol{Y}$), *то операторы* U_n *равноограничены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы доказать эту теорему, следует повторить с некоторыми изменениями доказательство теоремы 8.5.1. Мы покажем, как это делается, пропуская некоторые подробности.

Рассуждая от противного, допустим, что для некоторого натурального p пары чисел q и C_p, входящих в определение равноограниченности операторов U_n, не существует. Покажем, что тогда, каков бы ни был замкнутый шар $S^* \subset X$, множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n(S^*)$ не ограничено по p-й полунорме *). Действительно, иначе в некотором шаре $S^* = S^*(x_0, r)$ при всех $x \in S^*$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ выполнялось бы неравенство

$$\| U_n x \|_p \leqslant M$$

(M — постоянная). Пусть теперь W — открытый шар с центром θ и радиусом r. Если $x \in W$, то, полагая $x' = x_0 + x$, получим, что $x' \in S^*$, а тогда ясно, что

$$\| U_n x \|_p \leqslant 2M \text{ для всех } x \in W \text{ и } n = 1, 2, \ldots$$

По лемме 13.4.1 существует замкнутый квазишар $V^*_{q, \frac{1}{q}} \subset W$. Следовательно,

$$\text{если } \| x \|_q \leqslant \frac{1}{q}, \text{ то } \| U_n x \|_p \leqslant 2M \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Повторяя то рассуждение, с помощью которого в 13.5 было выведено неравенство (5), мы найдем, что для всех $x \in \boldsymbol{X}$

$$\| U_n x \|_p \leqslant 2Mq \| x \|_q \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, для данного p нашлась такая пара чисел q и $C_p = 2Mq$, что неравенство (8) выполнено, а это противоречит исходному предположению. Тем самым доказана неограниченность множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n(S^*)$ по p-й полунорме.

Возьмем произвольный замкнутый шар $S_0^* \subset \boldsymbol{X}$ радиуса r. Найдем номер n_1 и элемент $x_1 \in S_0^*$, для которого $\| U_{n_1} x_1 \|_p > 1$ (p — то, о котором идет речь в первой половине доказательства). Элемент x_1 можно считать внутренней точкой в шаре S_0^*. Благодаря непрерывности оператора U_{n_1}

*) Мы пользуемся той метрикой, которая вводится в пространстве $\boldsymbol{X}$ по формуле (3).

существует замкнутый шар $S_1^* = S^*(x_1, r_1)$, во всех точках которого $\| U_{n_1} x \|_p > 1$. Можно считать, что $r_1 \leqslant \frac{r}{2}$ и что $S_1^* \subset S_0^*$. Теперь снова найдутся номер n_2 и элемент $x_2 \in S_1^*$, для которого $\| U_{n_2} x_2 \|_p > 2$, причем x_2 можно считать внутренней точкой в шаре S_1^*. Продолжая это рассуждение, мы построим такую последовательность вложенных замкнутых шаров S_m^* с радиусами $r_m \to 0$ и такую последовательность индексов n_m, что $\| U_{n_m} x \|_p > m$ при всех $x \in S_m^*$. В частности, эти неравенства будут выполнены в точке x^*, общей для всех шаров S_m^*. Но тогда совокупность значений $\{U_n x^*\}$ не будет ограниченной по p-й полунорме, что противоречит условию теоремы. Тем самым теорема доказана.

Аналогом теоремы 8.5.2 служит теорема, доказательства которой мы не приводим ввиду его полного сходства с доказательством теоремы 8.5.2.

Теорема 13.6.3. *Если* U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — *линейные операторы, отображающие счетно-нормированное пространство* X *в полное счетно-нормированное пространство* Y, *причем:*

1) *для всех* x *из некоторого множества* A, *всюду плотного в* X, *существует* $\lim U_n x$;

2) *операторы* U_n *равноограничены,*

то последовательность $\{U_n\}$ *точечно сходится* (на всем X) *к некоторому линейному оператору.*

13.7. Линейные функционалы

Все сказанное в предыдущем параграфе применимо, в частности, к операторам, переводящим счетно-нормированное пространство в нормированное и, в еще более частном случае, к функционалам. Однако для функционалов можно установить и некоторые дополнительные результаты и поэтому вопрос о линейных функционалах мы рассмотрим более подробно.

Итак, пусть X — счетно-нормированное пространство, а f — функционал, заданный на X. Определение ограниченности, данное в 13.6 для оператора, применительно к функционалу означает, что *существуют такие натуральное* q *и постоянная* C, *что*

$$|f(x)| \leqslant C \| x \|_q \tag{9}$$

для всех $x \in X$. Это условие и является необходимым и достаточным для того, чтобы аддитивный функционал f был линейным. При выполнении неравенства (9) будем говорить, что функционал f *ограничен по отношению к* q*-й полунорме.*

В соответствии с 13.1 обозначим через $X^{(q)}$ то нормированное пространство, которое получается из X отождествлением q-эквивалентных между собой элементов *).

*) Напоминаем, что $\| x \|_q$ принимаются за норму в $X^{(q)}$.

Пусть на X задан линейный функционал f. Его ограниченность означает ограниченность по отношению к некоторой полунорме; q — номер этой полунормы. Тогда ясно, что если x и y q-эквивалентны, то $f(x) = f(y)$. Действительно,

$$|f(x) - f(y)| = |f(x-y)| \leqslant C \| x - y \|_q = 0.$$

Таким образом, функционал f можно рассматривать и как функционал на $X^{(q)}$, причем и там он, очевидно, будет аддитивным, а по условию (9) и ограниченным, следовательно, линейным.

Итак, каждый линейный функционал, заданный на X, есть линейный функционал на некотором из пространств $X^{(q)}$.

Обратно, если на некотором $X^{(q)}$ задан линейный функционал f, то f можно считать заданным и на всем X*). При этом условие ограниченности функционала f в пространстве $X^{(q)}$ перейдет в условие его ограниченности в пространстве X, т. е. f будет линейным функционалом и в X.

Таким образом, *совокупность всех линейных функционалов на X можно рассматривать как сумму* (в том смысле, как это было определено в 3.1 для множеств) *пространств, сопряженных к* $X^{(q)}$ $\left(\bigcup_{q=1}^{\infty} (X^{(q)})'\right)$.

На линейные функционалы в счетно-нормированных пространствах переносится теорема Банаха — Гана, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 13.7.1. *Пусть X — счетно-нормированное пространство, E — его линейное подмножество, f — линейный функционал, заданный на E* **). *Тогда функционал f допускает распространение с сохранением свойства линейности на всё X. При этом если f ограничен на E по отношению к q-й полунорме, то и распространение можно осуществить так, что полученный в результате распространения функционал оказывается ограниченным на X по отношению к той же полунорме* ***).

Доказательство. Пусть заданный на E линейный функционал f ограничен по отношению к q-й полунорме $\| x \|_q$. Используем пространство $X^{(q)}$ и обозначим (ср. 13.1) через $E^{(q)}$ образ множества E в пространстве $X^{(q)}$. Функционал f можно рассматривать как линейный на множестве $E^{(q)}$ и по теореме

---

*) При этом естественно следует считать, что на q-эквивалентных между собой элементах функционал f имеет одно и то же значение, а тогда функционал f, очевидно, аддитивен.

**) Как линейное подмножество из X множество E само является счетно-нормированным пространством.

***) Кроме того, из доказательства будет видно, что если функционал f удовлетворяет на множестве E условию $|f(x)| \leqslant C \| x \|_q$, то распространение можно осуществить с сохранением этого условия с той же постоянной C.

Банаха — Гана его можно распространить с сохранением линейности на $X^{(q)}$. Но тем самым получается функционал, ограниченный относительно q-й полунормы, который можно считать заданным на всем X. Это и есть требуемое распространение функционала f.

В теории нормированных пространств чрезвычайно важную роль играет полученное в гл. IX следствие из теоремы Банаха — Гана о том, что во всяком нормированном пространстве существует достаточное множество линейных функционалов (см. следствие из теоремы 9.4.1). Этим свойством обладают и счетно-нормированные пространства, именно и здесь можно установить следующее следствие из доказанной теоремы.

Следствие. *Каков бы ни был элемент $x_0 \neq 0$ счетно-нормированного пространства X, на X существует такой линейный функционал f, что $f(x_0) = 1$* *).

Доказательство. Существует натуральное q, при котором $\| x_0\|_q \neq 0$. Примем за E множество всех элементов вида λx_0 и положим $f(\lambda x_0) = \lambda$. Этот функционал ограничен по отношению к q-й полунорме. Действительно,

$$|f(\lambda x_0)| = |\lambda| = \frac{1}{\| x_0 \|_q} \| \lambda x_0 \|_q.$$

Тем самым функционал f линеен; кроме того, $f(x_0) = 1$. Распространяя его с сохранением линейности на всё X, мы и получим функционал, существование которого требовалось доказать.

Покажем еще, что и критерий ограниченности множества, установленный в гл. IX для нормированных пространств, переносится в счетно-нормированные пространства.

Теорема 13.7.2. *Если A — произвольное подмножество счетно-нормированного пространства X и для каждого линейного функционала f, заданного на X, совокупность $f(A)$ его значений на множестве A ограничена, то множество A ограничено по полунормам.*

Доказательство. Рассмотрим сначала все линейные функционалы на X, ограниченные по отношению к некоторой фиксированной полунорме $\| x \|_q$, т. е. функционалы, входящие в $(X^{(q)})'$. Вместо заданного множества A возьмем его образ $A^{(q)}$ в пространстве $X^{(q)}$. Из условия теоремы следует, что совокупность значений каждого функционала из $(X^{(q)})'$ ограничена на $A^{(q)}$. Поэтому по теореме 9.8.2 $A^{(q)}$ ограничено в $X^{(q)}$, т. е. существует такая постоянная C_q, что $\| x \|_q \leqslant C_q$ для любого $x \in A$. Поскольку это справедливо при любом q, множество A ограничено по полунормам в пространстве X.

*) За счет умножения функционала f на числовой множитель всегда можно добиться, чтобы $f(x_0)$ имело любое значение, в частности, любое отличное от нуля (именно это и представляет основной интерес).

13.8. Общие формы линейных функционалов в некоторых счетно-нормированных пространствах

Рассмотрим некоторые из пространств, приведенных в качестве примеров в 13.2.

1. Пространство s. При том способе введения в s полунорм, который был указан в 13.2, система полунорм в s не монотонна. Однако если воспользоваться доказательством теоремы 13.3.1, то сразу видно, что эквивалентная монотонная система полунорм может быть введена по формуле

$$\|x\|'_p = \max(|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_p|).$$

Всякий линейный функционал f в s ограничен по отношению к некоторой из полунорм $\|x\|'_p$, например относительно полунормы с номером q:

$$|f(x)| \leqslant C\|x\|'_q \tag{10}$$

для всех $x \in s$. Если элемент $x \in s$ таков, что $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_q = 0$, то $\|x\|'_q = 0$, а тогда из (10) следует, что и $f(x) = 0$. Положим

$$\alpha_p = f(e_p) \qquad (p = 1, 2, \ldots, q),$$

где e_p — тот элемент из s, у которого $\xi_p = 1$, а все прочие координаты равны 0. Ясно, что любой $x = \{\xi_m\} \in s$ можно представить в виде

$$x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_q e_q + y,$$

причем первые q координат элемента y равны 0. Тогда $f(y) = 0$ и потому

$$f(x) = \xi_1 f(e_1) + \ldots + \xi_q f(e_q) = \sum_{p=1}^{q} \alpha_p \xi_p.$$

С другой стороны, непосредственно ясно, что всякий функционал, заданный в s по формуле

$$f(x) = \sum_{p=1}^{q} \alpha_p \xi_p, \tag{11}$$

где q — любое заданное натуральное число, а α_p — произвольно заданные вещественные числа, линеен. Таким образом, *формула* (11) *дает общий вид линейных функционалов в* s.

2. Пространство C^∞. Пусть f — линейный функционал в C^∞, ограниченный относительно p-й полунормы. Будем его рассматривать в пространстве $(C^\infty)^{(p)}$, получающемся за счет отождествления p-эквивалентных элементов из C^∞. В про-

странстве $(C^\infty)^{(p)}$ отождествляются любые две функции из C^∞, которые совпадают друг с другом на отрезке $[-p, p]$. Иными словами, при рассмотрении элементов пространства $(C^\infty)^{(p)}$ мы пренебрегаем значениями функций вне отрезка $[-p, p]$. Но это равносильно тому, что элементы пространства $(C^\infty)^{(p)}$ можно интерпретировать как непрерывные функции на отрезке $[-p, p]$, т. е. пространство $(C^\infty)^{(p)}$ можно отождествить с пространством C непрерывных функций на отрезке $[-p, p]$. Таким образом, функционал f можно рассматривать как линейный функционал в пространстве C на отрезке $[-p, p]$, и согласно теореме Рисса (теорема 9.5.1) об общей форме линейного функционала в пространстве непрерывных функций на отрезке функционал f представим в виде

$$f(x) = \int_{-p}^{p} x(t)\, dg(t),$$

где $g(t)$ — функция ограниченной вариации.

С другой стороны, если $g(t)$ — любая функция ограниченной вариации, заданная на некотором отрезке $[a, b]$, то функционал f, определяемый формулой

$$f(x) = \int_{a}^{b} x(t)\, dg(t), \tag{12}$$

— линейный функционал в пространстве C^∞. Его аддитивность очевидна, а ограниченность проверяется так: подбираем настолько большое натуральное p, что $[a, b] \subset [-p, p]$. Тогда по неравенству (28) из гл. IX

$$|f(x)| \leqslant (\operatorname{Var}_a^b g(t)) \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \leqslant (\operatorname{Var}_a^b g(t))\, \|x\|_p.$$

Таким образом, *формула* (12), *где* $[a, b]$ — *любой отрезок*, *а* $g(t)$ — *любая функция ограниченной вариации на этом отрезке*, *дает общий вид линейных функционалов в пространстве* C^∞.

3. Пространство D. Как и в определении, данном в 13.2, будем считать, что пространство D «построено на отрезке $[a, b]$», т. е. что носители всех функций из D содержатся в $[a, b]$.

Рассмотрим линейный функционал f, заданный на D и ограниченный по отношению к p-й норме (напоминаем, что полунормы в D суть нормы). Построим аддитивный и однородный оператор A, отображающий пространство D на некоторое подмножество из пространства C, составленного из всех непре-

рывных функций на отрезке $[a, b]$. Именно, положим $Ax = x^{(p)}$, т. е. каждой функции $x \in \boldsymbol{D}$ сопоставим ее производную p-го порядка, рассмотренную только на отрезке $[a, b]$. Легко видеть, что отображение, устанавливаемое оператором A, взаимно-однозначно. Действительно, пусть $Ax = Ay$, т. е.

$$x^p(t) \equiv y^p(t) \quad \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Так как $x^{(p-1)}(a) = y^{(p-1)}(a) = 0$, то

$$x^{(p-1)}(t) = \int_a^t x^{(p)}(t)\,dt = \int_a^t y^{(p)}(t)\,dt = y^{(p-1)}(t)$$

при любом t из $[a, b]$. Аналогично мы установим, что $x^{(p-2)}(t) \equiv y^{(p-2)}(t)$ и, таким образом, по индукции мы получим, что $x(t) \equiv y(t)$ на отрезке $[a, b]$. Отсюда уже следует, поскольку $x, y \in \boldsymbol{D}$, что $x(t) \equiv y(t)$ на всей оси.

Обозначим через E совокупность значений оператора A ($E \subset \boldsymbol{C}$). По общим свойствам аддитивных и однородных операторов E — линейное множество (см. 8.7). Рассмотрим обратный оператор A^{-1}, отображающий E на $\boldsymbol{D}$. Однако мы будем считать, что значения оператора A^{-1} берутся из пространства $\boldsymbol{D}^{(p)}$. Это пространство по составу элементов не отличается от $\boldsymbol{D}$, но оно — нормированное и за норму в нем принята p-я норма из $\boldsymbol{D}$: $\|x\|_p$.

Докажем, что оператор A^{-1} как оператор, отображающий E на $\boldsymbol{D}^{(p)}$, линеен. С этой целью для любого $x \in \boldsymbol{D}^{(p)}$ положим $\varphi(t) = x^{(p)}(t)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда с помощью теоремы Лагранжа сразу находим

$$|x^{(p-1)}(t)| = |x^{(p-1)}(t) - x^{(p-1)}(a)| = \\ = |x^{(p)}(\xi)|\,(t-a) \leqslant \left(\max_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi(t)|\right)(t-a) \leqslant \|\varphi\|\,(b-a)$$

(здесь $\|\varphi\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi(t)|$, т. е. это — норма в пространстве $\boldsymbol{C}$). Аналогично

$$|x^{(p-2)}(t)| \leqslant \|\varphi\|\,(b-a)^2.$$

Продолжая дальше, мы найдем в конце концов, что

$$|x(t)| \leqslant \|\varphi\|\,(b-a)^p,$$

а отсюда уже вытекает, что

$$\|x\|_p \leqslant \|\varphi\| \sum_{k=0}^{p} (b-a)^k, \quad \text{или} \quad \|Ax\| \geqslant \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{p} (b-a)^k}\,\|x\|_p$$

(напоминаем, что $\varphi = Ax$). Теперь линейность оператора A^{-1} вытекает из теоремы 8.7.2.

Функционал f можно рассматривать как линейный на пространстве $\boldsymbol{D}^{(p)}$. Построим «сложный» функционал на множестве $\boldsymbol{E}$, полагая

$$F(\varphi) = f(A^{-1}\varphi) \qquad (\varphi \in \boldsymbol{E}). \tag{13}$$

Функционал F линеен как суперпозиция линейных операторов (см. 8.6), а тогда его можно распространить с сохранением линейности с множества $\boldsymbol{E}$ на всё пространство $\boldsymbol{C}$. Следовательно, существует такая функция ограниченной вариации $g(t)$ на отрезке $[a, b]$, что

$$F(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)\, dg(t) \text{ при всех } \varphi \in \boldsymbol{C}.$$

Но для любого $x \in \boldsymbol{D}^{(p)}$ существует такая $\varphi \in \boldsymbol{E}$, что $x = A^{-1}\varphi$ (или $\varphi = x^{(p)}$). Тогда по формуле (13) $f(x) = F(x^{(p)})$ и потому

$$f(x) = \int_a^b x^{(p)}(t)\, dg(t). \tag{14}$$

Обратно, всякий функционал f, заданный в пространстве $\boldsymbol{D}$ по формуле (14), где p — любое натуральное число, а $g(t)$ — любая функция ограниченной вариации, будет, очевидно, аддитивным и ограниченным по отношению к p-й норме. Следовательно, f — линейный функционал в $\boldsymbol{D}$. Таким образом, *формула* (14) *дает общий вид линейных функционалов в пространстве* $\boldsymbol{D}$.

Заметим, что функционал, заданный по формуле (14) при $p = 0$, также будет линейным в пространстве $\boldsymbol{D}$. Непосредственная проверка непрерывности такого функционала или проверка его ограниченности по отношению к любой норме очевидны. Таким образом, записывая по формуле (14) общий вид линейного функционала в пространстве $\boldsymbol{D}$, можно считать p любым целым неотрицательным числом.

Линейные функционалы в пространстве $\boldsymbol{D}$ называют также *обобщенными функциями*. Чтобы объяснить происхождение этого названия, рассмотрим линейный функционал, заданный в $\boldsymbol{D}$ по формуле

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, \psi(t)\, dt,$$

где функция $\psi(t)$ имеет непрерывную производную. Аддитивность и ограниченность функционала f проверяются непосредственно.

Чтобы представить его по формуле (14), нужно положить $p = 0$, а $g(t) = \int_a^t \psi(t)\,dt$ (ср. 9.5). Рассмотрим также линейный функционал, заданный аналогичным образом с помощью функции $\psi'(t)$:

$$h(x) = \int_a^b x(t)\,\psi'(t)\,dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $x(a) = x(b) = 0$, находим

$$h(x) = x(t)\,\psi(t)\Big|_a^b - \int_a^b x'(t)\,\psi(t)\,dt = -f(x').$$

Теперь, беря любой линейный функционал f в пространстве $\boldsymbol{D}$, положим по определению

$$f'(x) = -f(x')$$

и будем называть линейный функционал f' (его линейность очевидна), определяемый этой формулой, *производной от функционала* f, т. е. от обобщенной функции f. Опираясь на это определение, удается построить дифференциальное исчисление обобщенных функций, которое включает в себя дифференциальное исчисление обычных функций, но в некоторой степени оказывается проще: например, всякая обобщенная функция имеет производную! Можно построить также и обобщенные функции нескольких переменных. В настоящее время обобщенные функции широко используются в теории дифференциальных уравнений математической физики.

ГЛАВА XIV

ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

14.1. Линейные структуры

Теория нормированных пространств опирается на общие алгебраические и метрические свойства абстрактных линейных множеств, обобщающие соответствующие свойства совокупности вещественных чисел. Однако не все важные свойства вещественных чисел были перенесены в нормированные пространства. Именно, в теории этих пространств не нашло никакого обобщения свойство сравнимости или упорядоченности вещественных чисел, т. е. тот факт, что между любыми двумя числами a и b имеет место одно из трех соотношений: $a < b$, $a > b$ или $a = b$. В частности, не было обобщено понятие положительности. Между тем в классическом математическом анализе имеется немало вопросов, где упорядоченность совокупности вещественных чисел играет существенную роль: например, изучение монотонной последовательности, монотонных функций, теория рядов с положительными членами, различные оценки, даваемые в виде неравенств, и др. В приложениях нередко представляет интерес отыскание положительного решения той или иной задачи, например положительной функции, удовлетворяющей заданному уравнению.

Чтобы рассмотреть вопросы такого типа в общем виде, необходимо ввести понятие упорядоченности в абстрактных множествах. Однако, имея в виду использование упорядоченности в функциональном анализе, было бы нецелесообразным требовать в абстрактном множестве сравнимости любых двух его элементов. Например, при введении упорядочения в множество функций естественно считать одну функцию большей или равной другой, если значения первой функции во всех точках не меньше значений второй. Но тогда не всякие две функции будут сравнимы, так как одна из них может быть в одних точках больше, а в других — меньше, чем вторая. Поэтому для функционального

анализа более содержательной оказывается такая теория, которая вводит в абстрактном множестве лишь частичное упорядочение, дающее возможность сравнивать лишь некоторые пары элементов. Возникающая таким образом теория линейных частично упорядоченных (или полуупорядоченных) пространств с широкими применениями в функциональном анализе была построена Л. В. Канторовичем в 1935—1937 гг. *). Эта теория строилась совершенно независимо от теории нормированных пространств и лишь в некоторых своих частях соприкасалась с последней. Однако, ставя себе задачей дать в настоящей главе лишь некоторое представление об использовании идеи порядка в функциональном анализе, мы ограничимся здесь преимущественно частичным упорядочением в банаховых пространствах. Такое направление функционального анализа развивалось в течение ряда лет в работах советского ученого М. Г. Крейна.

Начнем с введения некоторых общих понятий. Пусть $\boldsymbol{E}$ — вещественная линейная система (см. 5.1) и в $\boldsymbol{E}$ указано, относительно каких именно элементов $x \in \boldsymbol{E}$ мы будем говорить «*x больше нуля*», что записывается в виде неравенства $x > \theta$. Все элементы, бóльшие нуля, а также и нулевой элемент назовем *положительными* **). Множество всех положительных элементов $x \in \boldsymbol{E}$ обозначим $\boldsymbol{E}_+$. Подчеркиваем, что самим характером элементов, из которых составлена система $\boldsymbol{E}$, смысл неравенства $x > \theta$ может быть еще не определен, и если мы хотим ввести в $\boldsymbol{E}$ частичное упорядочение, то и начинаем с того, что выделяем в $\boldsymbol{E}$ те элементы, которые будут считаться бóльшими нуля.

Теперь вводим понятие неравенства между двумя элементами $x, y \in \boldsymbol{E}$, полагая по определению $x > y$ (x *больше* y), если $x - y > \theta$. Тем самым мы определили сравнимость для некоторых пар элементов x и y. Неравенство $x > y$ будем записывать и в виде $y < x$. Как обычно, будем писать $x \geqslant y$ ($y \leqslant x$), если известно, что или $x > y$ или $x = y$. Тогда положительные элементы можно охарактеризовать соотношением $x \geqslant \theta$. Неравенство $x \geqslant y$ равносильно $x - y \geqslant \theta$.

Элементы $x \in \boldsymbol{E}$, удовлетворяющие соотношению $x \leqslant \theta$, назовем *отрицательными*. Нулевой элемент удовлетворяет этому соотношению и является, таким образом, одновременно и положительным и отрицательным элементом.

Теперь подчиним частичное упорядочение в системе $\boldsymbol{E}$ некоторым аксиомам. Именно, введем следующее определение:

---

*) Некоторое применение идей частичного упорядочения в функциональном анализе встречалось ранее в работах Ф. Рисса.

**) Здесь мы несколько расходимся с обычной терминологией, применяемой для чисел, так как термин «неотрицательный» будет иметь у нас другой смысл.

О п р е д е л е н и е. Вещественная линейная система E называется *линейной структурой*, если в E указано, какие элементы считаются бо́льшими нуля, причем выполняются следующие аксиомы:

I. Если $x > \theta$, то $x \neq \theta$ *).

II. Если $x > \theta$ и $y > \theta$, то и $x + y > \theta$.

III. Для любых двух элементов x, $y \in E$ существует элемент $z \in E$, обладающий свойствами:

α) $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$,

β) если элемент $u \in E$ таков, что $x \leqslant u$ и $y \leqslant u$, то и $z \leqslant u$.

IV. Если $x > \theta$ и число $\lambda > 0$, то и $\lambda x > \theta$.

Элемент z, вводимый в аксиоме III, обозначается $x \vee y$. При этом, свойство α) показывает, что, пользуясь обычной терминологией, элемент $x \vee y$ можно назвать верхней границей множества из двух элементов x и y **), а свойство β) означает, что это — наименьшая верхняя граница. Ее называют также *супремумом* (supremum). Заметим, что для множества из двух вещественных чисел, ввиду их сравнимости, супремумом будет большее из них. Однако в линейной структуре элемент $x \vee y$, как мы увидим ниже из примеров, может быть отличным и от x и от y. Если же, например, $x \geqslant y$ (x и y сравнимы), то $x \vee y = x$.

Отметим некоторые простые следствия из аксиом линейной структуры, обобщающие элементарные свойства числовых неравенств.

а) Если $x > y$, то $x \neq y$. Если же одновременно $x \geqslant y$ и $x \leqslant y$, то непременно $x = y$.

Действительно, если $x > y$, то $x - y > \theta$, следовательно, по аксиоме I, $x - y \neq \theta$, т. е. $x \neq y$. Если же допустить, что одновременно $x > y$ и $x < y$, то $x - y > \theta$ и $y - x > \theta$ и, по аксиоме II, мы получим, что $\theta = (x - y) + (y - x) > \theta$, что по аксиоме I невозможно.

Из второй части предложения а) следует, что *элемент* $z = x \vee y$, определяемый аксиомой III — *единственный*. Действительно, если, кроме z, дан еще элемент $z_1 \in E$, обладающий теми же свойствами α) и β), то, с одной стороны, по β), будет $z \leqslant z_1$, а с другой, $z_1 \leqslant z$, откуда $z_1 = z$.

Кроме того, из доказанного следует, что если одновременно $x \geqslant \theta$ и $x \leqslant \theta$, то $x = \theta$, т. е. в линейной структуре θ — един-

*) Это свойство нельзя вывести из данных выше определений, так как, пока на множество элементов $x > \theta$ не накладывалось никаких ограничений, можно было бы включить в это множество и сам элемент θ.

**) В линейной структуре определяется, как обычно, понятие верхней границы и для произвольного множества: если множество $M \subset E$, а элемент $z \in E$ обладает тем свойством, что $x \leqslant z$ для всех $x \in M$, то z и называется верхней границей множества M.

ственный элемент, одновременно — положительный и отрицательный.

б) Если $x \geqslant y$, а $y \geqslant z$, то и $x \geqslant z$ (транзитивность неравенства).

Действительно, $x - z = (x - y) + (y - z)$, а тогда с помощью аксиомы II сразу видно, что если $x - y \geqslant \theta$ и $y - z \geqslant \theta$, то и $x - z \geqslant \theta$.

Теперь легко установить существование наименьшей верхней границы для любого конечного множества элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{E}$. Для этого достаточно положить

$$z = [\ldots((x_1 \vee x_2) \vee x_3) \vee \ldots] \vee x_n.$$

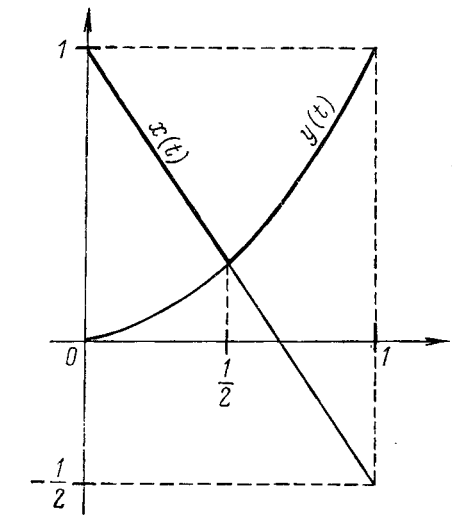

Рис. 20.

Из транзитивности неравенства сразу следует, что z — верхняя граница множества элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и легко видеть, что это — наименьшая верхняя граница или супремум.

в) Если $x \geqslant y$, а $z \geqslant u$, то $x + z \geqslant y + u$ (в частности, если $x \geqslant y$, то $x + z \geqslant y + z$ при любом $z \in \boldsymbol{E}$).

Действительно, $(x + z) - (y + u) = (x - y) + (z - u) \geqslant \theta$.

г) Если $x \geqslant y$, то $-x \leqslant -y$. В частности, если $x \geqslant \theta$, то $-x \leqslant \theta$ *). Действительно, $-y - (-x) = x - y \geqslant \theta$.

д) Если $x \geqslant y$, то $\lambda x \geqslant \lambda y$ при любом $\lambda \geqslant 0$. Действительно, $\lambda x - \lambda y = \lambda (x - y) \geqslant \theta$ благодаря аксиоме IV.

Простейшим примером линейной структуры является само множество вещественных чисел. Приведем другой пример. Пусть $\boldsymbol{F}$ — множество всех вещественных функций $x(t)$, заданных на отрезке $[a, b]$. Сложение элементов из $\boldsymbol{F}$ и их умножение на число определим так же, как в пространстве $\boldsymbol{C}$, а $x \in \boldsymbol{F}$ считаем бо́льшим нуля, если $x(t) \geqslant 0$ на всем отрезке и при этом хоть в одной точке $x(t) > 0$. Легко видеть, что $\boldsymbol{F}$ — линейная структура. При этом супремум в $\boldsymbol{F}$ вычисляется по значениям функций в каждой точке, т. е. равенство $z = x \vee y$ означает, что $z(t) = \max [x(t), y(t)]$.

*) Таким образом, при умножении на (—1) положительные элементы переходят в отрицательные и обратно.

Например, если отрезок $[a, b]$ есть $[0, 1]$, а $x(t) = t^2$, $y(t) = 1 - \frac{3}{2}t$, то (рис. 20)

$$z(t) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}t & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ t^2 & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t < 1. \end{cases}$$

Заметим, что в структуре $\boldsymbol{F}$ аналогичным образом можно было бы определить наименьшую верхнюю границу для любого конечного и даже ограниченного сверху (т. е. имеющего верхнюю границу) бесконечного множества ее элементов. Однако в произвольной линейной структуре супремум существует не для всякого ограниченного бесконечного множества.

Функция $x(t)$ из структуры $\boldsymbol{F}$, которая принимает как положительные, так и отрицательные значения, представляет пример не положительного, но и не отрицательного элемента. Таким образом, в линейных структурах «неотрицательный элемент» может в то же время не быть и положительным.

Возвращаясь к произвольной линейной структуре $\boldsymbol{E}$, назовем наибольшей нижней границей или *инфимумом* (infimum) множества из двух элементов $x, y \in \boldsymbol{E}$ элемент z, обладающий свойствами:

α') $x \geqslant z$ и $y \geqslant z$,

β') если элемент $u \in \boldsymbol{E}$ таков, что $x \geqslant u$ и $y \geqslant u$, то и $z \geqslant u$.

Такой элемент z обозначается $x \wedge y$. Однако требование его существования уже ненужно включать в аксиоматику линейной структуры, так как существование инфимума может быть теперь доказано.

Теорема 14.1.1. *Для любых $x, y \in \boldsymbol{E}$ элемент*

$$z = -[(-x) \vee (-y)]$$

является их инфимумом.

Доказательство. Так как $-x \leqslant (-x) \vee (-y)$, то, по г), $x \geqslant z$; аналогично, $y \geqslant z$. Если же $u \in \boldsymbol{E}$ таков, что $x \geqslant u$ и $y \geqslant u$, то $-x \leqslant -u$, $-y \leqslant -u$, а потому $(-x) \vee (-y) \leqslant -u$, откуда, снова по г), $z \geqslant u$.

Как и для супремума, из предложения а) легко вытекает единственность инфимума. Таким образом,

$$x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]. \tag{1}$$

Если $x \geqslant y$, то $x \wedge y = y$.

В структуре $\boldsymbol{F}$ равенство $z = x \wedge y$ означает, что

$$z(t) = \min[x(t), y(t)].$$

В примере, приведенном на рис. 20, $x \wedge y$ изображается функцией, равной

$$t^2 \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{3}{2}t \quad \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1.$$

Докажем еще две важные формулы, справедливые при любых $x, y, z \in \boldsymbol{E}$:

$$(x \vee y) + z = (x+z) \vee (y+z), \tag{2}$$

$$(x \wedge y) + z = (x+z) \wedge (y+z). \tag{3}$$

Действительно, пусть $u = x \vee y$. Тогда $x \leqslant u$, а потому, по в), $x + z \leqslant u + z$; аналогично, $y + z \leqslant u + z$, а потому

$$(x+z) \vee (y+z) \leqslant u+z.$$

Положим теперь $v = (x+z) \vee (y+z)$. Тогда $v \leqslant u + z$. Кроме того, $x + z \leqslant v$ или, по в), $x \leqslant v - z$; аналогично, $y \leqslant v - z$, следовательно, $u \leqslant v - z$, или $u + z \leqslant v$. Тем самым доказано, что $u + z = v$, т. е.

$$u + z = (x+z) \vee (y+z),$$

а это и есть равенство (2).

Формула (3) вытекает с помощью (1) и (2) из следующих соотношений:

$$(x \wedge y) + z = -[(-x) \vee (-y)] + z = -\{[(-x) \vee (-y)] + (-z)\} =$$
$$= -[(-x-z) \vee (-y-z)] = (x+z) \wedge (y+z).$$

Теперь докажем одну лемму, используемую в дальнейшем.

Лемма 14.1.1. *Если* $\theta \leqslant z \leqslant x + y$, *где* $x, y \geqslant \theta$, *то* z *можно представить в виде* $z = z_1 + z_2$, *где* $\theta \leqslant z_1 \leqslant x$, $\theta \leqslant z_2 \leqslant y$.

Доказательство. Положим $z_1 = z \wedge x$. Тогда z_1 удовлетворяет требуемым неравенствам. Затем положим $z_2 = z - z_1$. Тогда $z_2 \geqslant \theta$, $z = z_1 + z_2$ и остается доказать, что $z_2 \leqslant y$. Имеем

$$z_2 = z - z_1 = z - (z \wedge x) = z + [(-z) \vee (-x)] = \theta \vee (z - x).$$

Но $y \geqslant \theta$ и $y \geqslant z - x$, а потому

$$z_2 = \theta \vee (z-x) \leqslant y.$$

Приведем еще некоторые примеры линейных структур.

1) n-мерное векторное пространство $\boldsymbol{R}_n$, в котором мы считаем $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > \theta$, если все координаты $x_i \geqslant 0$ и, по крайней мере, одна из координат $x_i > 0$;

2) пространства l, l^2, m, s, в которых частичное упорядочение вводится по тому же правилу, что и в R_n;

3) пространство C непрерывных функций, в котором частичное упорядочение вводится по тому же правилу, как это сделано выше в линейной структуре F.

Проверка выполнения аксиом линейной структуры во всех этих пространствах не представляет труда. Остановимся лишь на проверке аксиомы III в пространстве C. Именно, нужно, очевидно, доказать, что если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны, то и $z(t) = \max[x(t), y(t)]$ — тоже непрерывна в любой точке. Если в точке t_0 будет $x(t_0) > y(t_0)$, то и в некоторой окрестности этой точки $x(t) > y(t)$, а тогда $z(t) = x(t)$ в этой окрестности и, следовательно, $z(t)$ вместе с $x(t)$ непрерывна в точке t_0. Если же $x(t_0) = y(t_0)$ (и равно $z(t_0)$), то по $\varepsilon > 0$ можно найти окрестность точки t_0, в которой обе функции $x(t)$ и $y(t)$ заключены между $z(t_0) - \varepsilon$ и $z(t_0) + \varepsilon$. Тогда в этой окрестности

$$z(t_0) - \varepsilon < z(t) < z(t_0) + \varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность $z(t)$ в точке t_0.

В дальнейшем мы неоднократно будем рассматривать пространство C как линейную структуру, подразумевая при этом, что частичное упорядочение в C введено указанным здесь способом *).

14.2. Положительная и отрицательная части элементов линейной структуры

В этом параграфе мы покажем, что всякий элемент линейной структуры E может быть представлен в виде разности двух положительных элементов.

Определение. Для любого $x \in E$ элемент $x_+ = x \vee \theta$ называется его *положительной частью*, элемент $x_- = (-x) \vee \theta$ — *отрицательной частью* и элемент $|x| = x_+ + x_-$ — *модулем элемента* x.

Из определения следует, что для любого $x \in E$ все три элемента x_+, x_- и $|x|$ положительны, причем $|x| \geqslant x_+ \geqslant x$. В частности, если $x \geqslant \theta$, то $x_+ = x$, а так как в этом случае $-x \leqslant \theta$, то $x_- = \theta$, и потому $|x| = x$. Положительная часть элемента x это — *наименьший положительный элемент* y, *для которого справедливо* неравенство $y \geqslant x$.

---

*) Пространство C представляет пример линейной структуры, в которой не всякое ограниченное сверху бесконечное множество имеет супремум.

В структурах $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{C}$ элементы x_+, x_- и $|x|$ суть функции, определяемые по $x(t)$ следующим образом (рис. 21):

$$x_+(t) = \begin{cases} x(t) & \text{в точках, где } x(t) \geqslant 0, \\ 0 & \text{в точках, где } x(t) < 0; \end{cases}$$

$$x_-(t) = \begin{cases} 0 & \text{в точках, где } x(t) > 0, \\ |x(t)| & \text{в точках, где } x(t) \leqslant 0; \end{cases}$$

$$|x|(t) = |x(t)| \quad \text{во всех точках.}$$

В структурах, перечисленных в конце 14.1 и составленных из последовательностей, чтобы получить из какого-нибудь x его

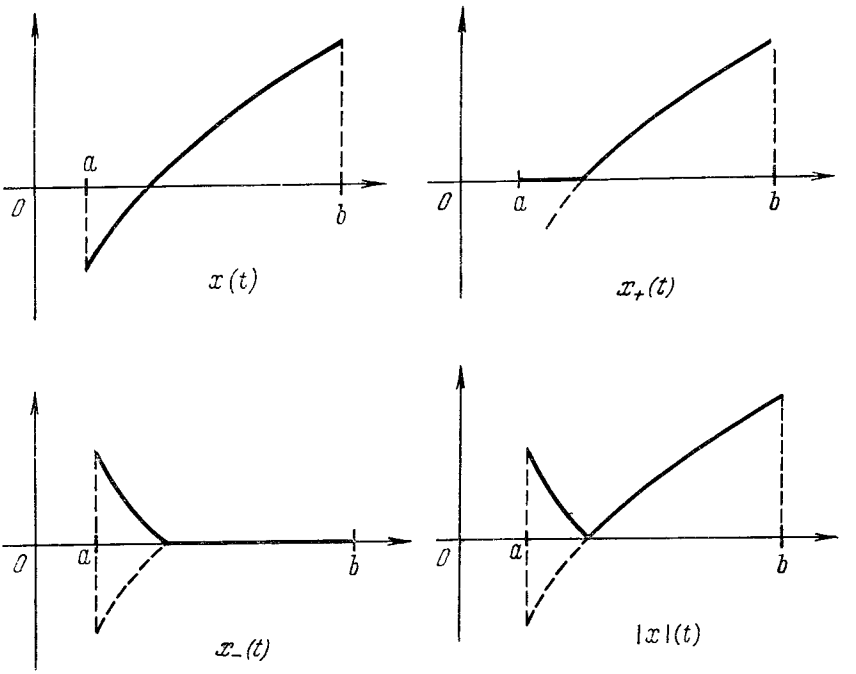

Рис. 21.

положительную часть x_+, нужно все отрицательные координаты заменить нулями, а чтобы получить $|x|$, нужно все координаты заменить их абсолютными величинами.

Теорема 14.2.1. *Для любого $x \in \boldsymbol{E}$ имеет место равенство $x = x_+ - x_-$.*

Доказательство. Вычислим $x + x_-$. С помощью (2) имеем $x + x_- = x + [(-x) \vee 0] = 0 \vee x = x_+$, следовательно, $x = x_+ - x_-$.

Отметим очевидное следствие: *если* $x_- = \theta$, *то* $x \geqslant \theta$.

Представление любого $x \in \boldsymbol{E}$ в виде разности двух положительных элементов не единственно. При этом справедлива

Лемма 14.2.1. *Если* $x = y - z$, *где* $y, z \geqslant \theta$, *то* $x_+ \leqslant y$.

Доказательство. Так как $y = x + z$, то $y \geqslant x$. Кроме того, $y \geqslant \theta$, а потому $y \geqslant x \vee \theta = x_+$.

Следующие теоремы выражают важные свойства положительной и отрицательной частей.

Теорема 14.2.2. $x_+ \wedge x_- = \theta$ *для любого* $x \in \boldsymbol{E}$.

Доказательство. Пусть $u = x_+ \wedge x_-$. Так как $x_+, x_- \geqslant \theta$, то и $u \geqslant \theta$. Положим $y = x_+ - u$, $z = x_- - u$. Тогда из определения u сразу видно, что $y, z \geqslant \theta$. При этом $y - z = x_+ - x_- = x$, следовательно, по лемме $x_+ \leqslant y$, а $u = x_+ - y \leqslant \theta$. Из двух противоположных неравенств следует, что $u = \theta$.

Теорема 14.2.3. $|x| = x \vee (-x)$ *для любого* $x \in \boldsymbol{E}$.

Доказательство. Имеем с помощью формулы (2) и теорем 14.2.1 и 14.1.1:

$$x \vee (-x) = |x| \dotplus [(x - |x|) \vee (-x - |x|)] =$$
$$= |x| + [(-2x_-) \vee (-2x_+)] = |x| - [(2x_-) \wedge (2x_+)].$$

Положим $y = (2x_+) \wedge (2x_-)$. Тогда $\theta \leqslant \frac{1}{2} y \leqslant x_+, x_-$ и из теоремы 14.2.2 вытекает, что $\frac{1}{2} y = \theta$. Следовательно, и $y = \theta$, и требуемое равенство доказано.

Из теоремы 14.2.3 моментально следует, что $|-x| = |x|$ для любого $x \in \boldsymbol{E}$. Впрочем, это равенство легко вывести и из определения модуля.

Доказанные теоремы читатель легко сможет проиллюстрировать самостоятельно на примере структуры функций, с помощью рис. 21.

Теорема 14.2.4. *Для любых* $x, y \in \boldsymbol{E}$

$$|x_+ - y_+| \leqslant |x - y|.$$

Доказательство. Из равенства $x = y + (x - y)$ и соотношений $y \leqslant y_+$ и $x - y \leqslant |x - y|$ сразу следует, что

$$x \leqslant y_+ + |x - y|.$$

Тогда из определения положительной части видно, что $x_+ \leqslant y_+ + |x - y|$ или

$$x_+ - y_+ \leqslant |x - y|.$$

Аналогично

$$y_+ - x_+ \leqslant |x - y|,$$

а теперь с помощью теоремы 14.2.3 имеем

$$|x_+ - y_+| = (x_+ - y_+) \vee (y_+ - x_+) \leqslant |x - y|.$$

Теорема 14.2.5. *Для любого* $x \in E$ *и любого числа* $\alpha > 0$

$$(\alpha x)_+ = \alpha x_+, \quad (\alpha x_-) = \alpha x_-, \quad |\alpha x| = \alpha |x|. \tag{4}$$

Доказательство. Положим $y = \alpha x$. Так как $x \leqslant x_+$, то $y \leqslant \alpha x_+$, а потому и $y_+ \leqslant \alpha x_+$. Аналогично, исходя из соотношения $x = \frac{1}{\alpha} y$, мы получим, что $x_+ \leqslant \frac{1}{\alpha} y_+$ или $\alpha x_+ \leqslant y_+$. Два противоположных неравенства и дают равенство $y_+ = \alpha x_+$. Совершенно так же доказывается вторая из формул (4), а тогда

$$|y| = y_+ + y_- = \alpha (x_+ + x_-) = \alpha |x|.$$

14.3. Полуупорядоченные банаховы пространства

Переходим к основному типу пространств, изучаемому в этой главе.

Определение. Полное нормированное (вещественное) пространство E называется *полуупорядоченным банаховым пространством* (или *банаховой структурой*), если E одновременно является линейной структурой и норма в E удовлетворяет условию «монотонности»:

из $|x| \leqslant |y|$ следует, что $\|x\| \leqslant \|y\|$.

Из последнего условия вытекает, что если $|x| = |y|$, то $\|x\| = \|y\|$. В частности, $\|x\| = \||x|\|$ (так как $|x| \geqslant \theta$, то модуль, составленный для $|x|$, равен $|x|$), т. е. *норма любого элемента равна норме его модуля.*

Пространства C, l, l^2, R_n, m с тем частичным упорядочением, которое введено в них в конце 14.1, представляют примеры полуупорядоченных банаховых пространств.

В банаховых полуупорядоченных пространствах справедливо следующее предложение, называемое *принципом Архимеда*:

Теорема 14.3.1. *Если* $x \geqslant \theta$, *а числа* $\lambda_n > 0$ *и* $\lambda_n \to +\infty$ *и при этом существует такой* y, *что* $\lambda_n x \leqslant y$ *при всех* n, *то* $x = \theta$.

Доказательство. Вследствие монотонности нормы имеем $\|\lambda_n x\| \leqslant \|y\|$, откуда $\|x\| \leqslant \frac{1}{\lambda_n} y$ при любом n, что возможно лишь при $\|x\| = 0$.

Доказанная теорема означает, что если элемент $x > \theta$ умножать на неограниченно возрастающие числовые множители λ_n, то получаемая таким образом последовательность элементов $\{\lambda_n x\}$ не может быть ограничена сверху каким-нибудь элемен-

том y пространства E. В перечисленных выше конкретных пространствах, например в C, это свойство совершенно очевидно.

Следствие. *Если x — произвольный элемент из E, а числа $\lambda_n > 0$ и $\lambda_n \to +\infty$ и при этом существует такой y, что $\lambda_n x \leqslant y$ при всех n, то $x \leqslant \theta$.*

Это предложение называют *принципом Архимеда в усиленной форме.*

Доказательство. Из данного неравенства следует, что $(\lambda_n x)_+ \leqslant y_+$, а тогда по теореме 14.2.5 $\lambda_n x_+ \leqslant y_+$ при всех n. Отсюда по теореме 14.3.1 вытекает, что $x_+ = \theta$, а это и означает, что $x = -x_- \leqslant \theta$.

Основным результатом этого параграфа будет теорема о предельном переходе в неравенстве. Предварительно докажем лемму.

Лемма 14.3.1. *Если $x_n \to x$, то $x_n^+ \to x_+$* *).

Доказательство. Из теоремы 14.2.4 и из монотонности нормы следует, что

$$\| x_n^+ - x_+ \| \leqslant \| x_n - x \| \to 0,$$

и потому $x_n^+ \to x_+$.

Теорема 14.3.2. *Если $x_n \geqslant y_n$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ и $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $x \geqslant y$.*

Доказательство. Так как $x_n - y_n \geqslant \theta$, то

$$(x_n - y_n)_+ = x_n - y_n \to x - y.$$

С другой стороны, по предыдущей лемме

$$(x_n - y_n)_+ \to (x - y)_+.$$

Таким образом, благодаря единственности предела, $x - y = (x - y)_+$, а это и значит, что $x - y \geqslant \theta$, т. е. $x \geqslant y$.

Следствие. *Если $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и все $x_n \geqslant \theta$, то $x \geqslant x_n$ при всех n.*

Доказательство. Фиксируя n, имеем при любом $m \geqslant n$

$$s_m = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \geqslant x_n.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, мы и получим, что $x \geqslant x_n$.

Заметим, что в этом параграфе мы не использовали полноты пространства E.

---

*) Как обычно, здесь имеется в виду сходимость по норме. Для удобства обозначений мы пишем x_n^+ вместо $(x_n)_+$.

14.4. Линейные функционалы в полуупорядоченных банаховых пространствах

Будем опять считать E полуупорядоченным банаховым пространством. Вещественный функционал $f(x)$, заданный на E, называется *положительным*, если $f(x) \geqslant 0$ для любого $x \geqslant \theta$.

Для аддитивных функционалов положительность равносильна следующему свойству *монотонности*: если $x \geqslant y$, то $f(x) \geqslant f(y)$.

Действительно, из $x \geqslant y$ следует, что $x = y + z$, где $z \geqslant \theta$. Поэтому, если f положителен, то $f(z) \geqslant 0$, а

$$f(x) = f(y) + f(z) \geqslant f(y).$$

Обратно, если f обладает свойством монотонности, то из $x \geqslant \theta$ вытекает, что $f(x) \geqslant f(\theta)$. Но из аддитивности следует, что $f(\theta) = 0$, а потому $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant \theta$.

Для аддитивного положительного функционала имеем

$$|f(x)| = |f(x_+ - x_-)| = |f(x_+) - f(x_-)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x_+)| + |f(x_-)| = f(x_+) + f(x_-) = f(x_+ + x_-) = f(|x|);$$

таким образом, для любого $x \in E$

$$|f(x)| \leqslant f(|x|). \tag{5}$$

Лемма 14.4.1. *Всякий аддитивный положительный функционал $f(x)$, заданный в E, линеен.*

Доказательство. Проверим непрерывность $f(x)$ при $x = \theta$ (см. теорему 8.2.1). Пусть $x_n \to \theta$, но при этом допустим, что $f(x_n)$ не $\to 0$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$|f(x_{n_k})| > \varepsilon \tag{6}$$

для некоторой частичной последовательности индексов n_k. Из последовательности $\{x_{n_k}\}$ выделяем новую частичную последовательность $\{x_{n_{k_m}}\}$ так, что $\|x_{n_{k_m}}\| \leqslant \frac{1}{m^3}$. Положим $y_m = |x_{n_{k_m}}|$. Так как числовой ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ сходится, то и ряд $\sum_{m=1}^{\infty} m y_m$ сходится (см. 5.2). Пусть y — его сумма. По следствию из теоремы 14.3.2 $m y_m \leqslant y$ при любом m, откуда $y_m \leqslant \frac{1}{m} y$ [см. предложение д)

из 14.1]. Тогда вследствие монотонности функционала f

$$0 \leqslant f(y_m) \leqslant f\left(\frac{1}{m} y\right) = \frac{1}{m} f(y)\ ^*),$$

откуда вытекает, что $f(y_m) \to 0$. Следовательно, по неравенству (5) и $f(x_{n_{km}}) \to 0$, что противоречит (6).

Теперь покажем, что *для положительного линейного функционала f норма может быть вычислена как точная верхняя граница множества его значений только на положительных элементах единичного шара*, т. е.

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1,\ x \geqslant \theta} f(x). \tag{7}$$

Действительно, для любого линейного функционала f

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

(см. 8.3). Поэтому если обозначить через M правую часть (7), то ясно, что $M \leqslant \|f\|$. С другой стороны, если $\|x\| \leqslant 1$, то и $\||x|\| \leqslant 1$, и по неравенству (5) $|f(x)| \leqslant f(|x|) \leqslant M$, следовательно, и $\|f\| \leqslant M$. Тем самым равенство (7) доказано.

Следующая лемма о распространении аддитивного функционала с множества E_+ положительных элементов на всё E справедлива в любой линейной структуре.

Лемма 14.4.2. *Если на E_+ задан функционал φ, обладающий свойством аддитивности, т. е. если $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для любых $x, y \in E_+$, то он может быть распространен на всё E с сохранением свойства аддитивности.*

Доказательство. Для любого $x \in E$ положим $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x_+) - \varphi(x_-)$. При этом, если $x \in E_+$, то $x = x_+$, а $x_- = \theta$, а потому на положительных элементах функционал $\overline{\varphi}(x)$ совпадает с $\varphi(x)$. Если $x = y - z$, где $y, z \geqslant \theta$, то по лемме 14.2.1 $= x_+ + u$, где $u \geqslant \theta$. Тогда из равенства $x_+ - x_- = y - z$ следует, что $z = x_- + u$. Теперь благодаря аддитивности φ имеем

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi(x_+) - \varphi(x_-) = \\ = [\varphi(x_+) + \varphi(u)] - [\varphi(x_-) + \varphi(u)] = \varphi(y) - \varphi(z). \tag{8}$$

Наконец, если $x = y + z$, где y, z — любые элементы из E, то $x = (y_+ + z_+) - (y_- + z_-)$, и по (8)

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi(y_+ + z_+) - \varphi(y_- + z_-) = \\ = [\varphi(y_+) - \varphi(y_-)] + [\varphi(z_+) - \varphi(z_-)] = \overline{\varphi}(y) + \overline{\varphi}(z).$$

---

*) Возможность выносить рациональный множитель из-под знака аддитивного оператора установлена в 8.1.

Аддитивность функционала $\overline{\varphi}$ доказана *).

Теперь мы сможем получить некоторую новую характеристику класса линейных функционалов в полуупорядоченном банаховом пространстве E.

Теорема 14.4.1. *Для того чтобы аддитивный функционал в полуупорядоченном банаховом пространстве E был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде разности двух аддитивных положительных функционалов.*

Доказательство. Достаточность условия вытекает сразу из леммы 14.4.1, так как разность двух линейных функционалов представляет также линейный функционал (см. 8.6). Докажем необходимость условия.

Пусть на E задан линейный функционал f. Возьмем любой $x \geqslant \theta$. Если $\theta \leqslant x' \leqslant x$, то $\| x' \| \leqslant \| x \|$, а потому $| f(x') | \leqslant \| f \| \| x \|$. Следовательно, множество значений $f(x')$ при $\theta \leqslant x' \leqslant x$ ограничено. Положим

$$\varphi(x) = \sup_{\theta \leqslant x' \leqslant x} f(x'). \tag{9}$$

Докажем, что $\varphi(x)$ обладает на E_+ свойством аддитивности.

Пусть $x = y + z$, где $y, z \geqslant \theta$. Для любых y' и z', удовлетворяющих условиям $\theta \leqslant y' \leqslant y$, $\theta \leqslant z' \leqslant z$, имеем $y' + z' \leqslant x$ и потому $f(y' + z') \leqslant \varphi(x)$ или $f(y') + f(z') \leqslant \varphi(x)$. Вследствие произвольности y' и z' в левой части можно перейти к точным границам и мы получим

$$\varphi(y) + \varphi(z) \leqslant \varphi(x) \text{ **)}. \tag{10}$$

Обратно, берем произвольный x', удовлетворяющий условию $\theta \leqslant x' \leqslant x = y + z$. По лемме 14.1.1 $x' = y' + z'$, где $\theta \leqslant y' \leqslant y$, $\theta \leqslant z' \leqslant z$, а потому

$$f(x') = f(y') + f(z') \leqslant \varphi(y) + \varphi(z).$$

Вследствие произвольности x' отсюда следует, что

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(y) + \varphi(z),$$

что вместе с (10) и дает равенство

$$\varphi(x) = \varphi(y) + \varphi(z).$$

---

*) Так как для аддитивного функционала f равенство $f(x) = f(x_+) - f(x_-)$ всегда имеет место, то построенное в лемме распространение $\overline{\varphi}$, обладающее свойством аддитивности,— единственное возможное.

**) Подробно это делается так. Фиксируем сначала z' и из неравенства $f(y') \leqslant \varphi(x) - f(z')$ получаем, что $\varphi(y) \leqslant \varphi(x) - f(z')$. После этого из неравенства $f(z') \leqslant \varphi(x) - \varphi(y)$, уже не считая z' фиксированным, находим $\varphi(z) \leqslant \varphi(x) - \varphi(y)$, что и дает (10).

По лемме 14.4.2 функционал φ распространяется на всё E с сохранением аддитивности. Пусть распространенный функционал обозначен той же буквой φ.

Так как в формуле (9) x' может совпасть с x или с θ, то при $x \in E_+$ имеем $\varphi(x) \geqslant f(x)$ и $\varphi(x) \geqslant f(\theta) = 0$. Последнее означает, что функционал φ положителен. Положим $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$. Тогда $\psi(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant \theta$ и, следовательно, $\psi(x)$ — тоже аддитивный положительный функционал, а $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$.

14.5. Другой вывод общей формы линейного функционала в пространстве непрерывных функций

При выводе в 9.5 общей формы линейного функционала в пространстве C в виде интеграла Стилтьеса мы использовали в полном объеме теорему 9.4.1 о распространении линейных функционалов, которая была доказана нами лишь в частном случае (для сепарабельного пространства). Сейчас дадим другой вывод общей формы линейного функционала в C, при котором теорема 9.4.1 будет использована лишь в том объеме, в каком она была доказана.

Будем считать уже известным, что интеграл Стилтьеса $\int_a^b x(t)\,dg(t)$ существует для любой непрерывной функции $x(t)$ и любой функции ограниченной вариации $g(t)$. Это было установлено по ходу доказательства теоремы 9.5.1, но с распространением функционалов это не связано. Заметим, что если $g(t) = g_1(t) \pm g_2(t)$ и каждая из функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — ограниченной вариации, то

$$\int_a^b x(t)\,dg(t) = \int_a^b x(t)\,dg_1(t) \pm \int_a^b x(t)\,dg_2(t).$$

Это получится сразу, если перейти к пределу в аналогичном равенстве для интегральных сумм:

$$\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\,[g(\tau_{i+1}) - g(\tau_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\,[g_1(\tau_{i+1}) - g_1(\tau_i)] \pm \sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\,[g_2(\tau_{i+1}) - g_2(\tau_i)].$$

Из пространства B всех ограниченных вещественных функций, заданных на $[a, b]$ (это пространство рассматривалось в 9.5), выделим некоторое линейное подмножество D, включающее

в себя пространство C. С этой целью перенумеруем все рациональные числа, содержащиеся внутри интервала (a, b); пусть это будут числа τ_p^*. Мы знаем, что множество рациональных чисел счетно. Далее, рассмотрим функции $x_\tau(t)$, определенные в 9.5, и положим $\tau = \tau_p^*$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Так как различные функции $x_{\tau_p^*}(t)$ имеют разрывы в различных точках τ_p^*, то они линейно независимы между собой и линейно независимы с любой непрерывной функцией, отличной от тождественного нуля. Теперь примем за D линейную оболочку множества, состоящего из всех $x \in C$ и всех $x_{\tau_p^*}$, и будем дальше рассматривать D как самостоятельное линейное нормированное пространство; C — его подпространство. В то же время C, как мы знаем,— полуупорядоченное банахово пространство. В D мы по тому же правилу, что и в C, выделим класс положительных элементов; однако не будем проверять, что D — линейная структура *).

Пусть $f(x)$ — положительный линейный функционал, заданный в C. Обозначим через $e(t)$ функцию, тождественно равную единице. Тогда для всякого положительного $x \in C$ с нормой $\|x\| \leqslant 1$ выполнено неравенство $\theta \leqslant x \leqslant e$, а потому $f(x) \leqslant f(e)$. Вследствие этого по формуле (7) $\|f\| = f(e)$.

Теперь по теореме 9.4.1 распространим функционал f с сохранением нормы с пространства C на пространство D. Так как при этом мы можем поочередно присоединять к области определения функционала элементы $x_{\tau_p^*}$, то процесс распространения потребует лишь счетной последовательности шагов, т. е. теорема 9.4.1 будет использована лишь в том виде, в каком она была доказана.

Проверим, что распространенный функционал, который мы обозначим той же буквой f, оказывается положительным в D. Если $x \in D$ и $x \geqslant \theta$, то $0 \leqslant x(t) \leqslant M$, где M — некоторая постоянная $(M > 0)$. Положим $y = e - \frac{x}{M}$. Тогда $\theta \leqslant y \leqslant e$, $\|y\| \leqslant 1$ и $|f(y)| \leqslant \|f\| = f(e)$. Следовательно, $f\left(\frac{x}{M}\right) = f(e) - f(y) \geqslant 0$, а тогда и $f(x) \geqslant 0$.

Теперь положим

$$g(a) = 0,\ g(\tau_p^*) = f(x_{\tau_p^*}) \qquad (p = 1, 2, \ldots),\ g(b) = f(e).$$

Так как $\theta < x_{\tau_p^*} < x_{\tau_q^*} \leqslant e$ при $\tau_p^* < \tau_q^*$, то $0 \leqslant g(\tau_p^*) \leqslant g(\tau_q^*) \leqslant g(b)$. Для прочих t из $[a, b]$ полагаем

$$g(t) = \sup_{\tau_p^* < t} g(\tau_p^*).$$

*) Заметим, что этот факт все же верен

Легко видеть, что функция $g(t)$ оказывается монотонной (неубывающей) на всем отрезке $[a, b]$; всякая же монотонная функция, как мы знаем (9.5), будет и функцией ограниченной вариации. Далее, повторяя дословно рассуждение, проведенное в 9.5, мы можем получить формулу (23) из гл. IX, выбирая точки деления τ_i среди τ_p^*, а так как предел, входящий в формулу (23) гл. IX, и есть интеграл Стилтьеса, о существовании которого нам уже известно, то приходим к равенству

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, dg(t). \tag{11}$$

При этом

$$\operatorname*{Var}_a^b g(t) = g(b) - g(a) = \|f\|.$$

Если $f(x)$ — произвольный линейный функционал в C, то представим его на основании теоремы 14.4.1 в виде разности двух положительных функционалов, $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$. По доказанному

$$\varphi(x) = \int_a^b x(t)\, dg_1(t), \qquad \psi(x) = \int_a^b x(t)\, dg_2(t),$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — неубывающие функции.

Положим $g(t) = g_1(t) - g_2(t)$. В 9.5 показано, что разность двух неубывающих функций есть функция ограниченной вариации. Для любого $x \in C$

$$\int_a^b x(t)\, dg(t) = \int_a^b x(t)\, dg_1(t) - \int_a^b x(t)\, dg_2(t) = \varphi(x) - \psi(x) = f(x),$$

и мы снова приходим к формуле (11).

Следуя этим же идеям, можно показать, что и для произвольного функционала f функция $g(t)$ в формуле (11) может быть выбрана так, что $\|f\| = \operatorname*{Var}_a^b g(t)$ *).

*) Для этого нужно функционалы φ и ψ определить именно так, как это сделано в доказательстве теоремы 14.4.1, а функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ построить по φ и ψ тем способом, каким выше для положительного функционала f построена функция $g(t)$.

14.6. Монотонные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве *)

Для операторов, отображающих банахово полуупорядоченное пространство X в пространство Y того же типа, так же как для функционалов, можно ввести понятие положительности: оператор U называется *положительным*, если $Ux \geqslant \theta$ для любого $x \geqslant \theta$. Для аддитивных операторов, как и для функционалов, это свойство равносильно *монотонности*: $Ux_1 \geqslant Ux_2$, если $x_1 \geqslant x_2$.

Если пространство $Y = X$, следовательно, имеют смысл степени U^n, то ясно, что для положительного оператора U и все его степени положительны.

Пусть теперь H — гильбертово пространство, в котором каким-нибудь способом введено частичное упорядочение так, что H одновременно — банахово полуупорядоченное пространство. Примером таких пространств могут служить l^2, R_n. Пусть A — вполне непрерывный самосопряженный оператор, заданный в H, и $A \neq \Theta$. Так как для самосопряженных операторов термин «положительный» уже употреблялся в другом смысле (см. 10.2), то если оператор A является положительным в смысле только что данного определения, мы будем называть его *монотонным*.

По теореме 10.4.3 все собственные числа оператора A заключены между его границами M_A и m_A. При этом из теоремы 10.6.6 и леммы 11.3.1 следует, что каждая из границ, отличная от нуля, является собственным числом. Тогда из формулы $\| A \| = \max (| M_A |, | m_A |)$ (см. 10.2) вытекает, что та из границ, абсолютная величина которой равна $\| A \|$, и есть наибольшее по абсолютной величине собственное число λ^* оператора A. Однако в общем случае нельзя утверждать, что это число λ^* положительно. Мы знаем лишь, что по крайней мере одно из чисел $\| A \|$ или $- \| A \|$ — собственное. Если же даже λ^* и будет положительным (как, например, для положительного в прежнем смысле вполне непрерывного самосопряженного оператора A), то нельзя утверждать, что среди соответствующих числу λ^* собственных элементов оператора A найдется положительный. В связи с этим представляет интерес следующая

Теорема 14.6.1. *Если A — монотонный, вполне непрерывный, самосопряженный оператор ($A \neq \Theta$), то $\| A \|$ является его (наибольшим) положительным собственным числом и этому*

*) В этом параграфе и в 14.8 излагаются в сильно упрощенном виде некоторые результаты, приведенные в обзорной статье М. Г. Крейна и М. А. Рутмана «Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха» [Успехи матем. наук III (1948), вып. 1, 3—95].

числу соответствует по крайней мере один положительный собственный элемент.

Доказательство. Положим $\lambda_0 = \|A\|$ и пусть уже известно, что λ_0 — собственное число оператора A. Докажем существование положительного собственного элемента, соответствующего числу λ_0.

Обозначим через $\boldsymbol{L}$ собственное подпространство оператора A, соответствующее числу λ_0, а через $\boldsymbol{M}$ — его ортогональное дополнение. Пусть P — оператор проектирования пространства $\boldsymbol{H}$ на подпространство $\boldsymbol{L}$. Покажем, что оператор P — монотонный.

Всякое число $\lambda > \lambda_0$ регулярно, т. е. на всем $\boldsymbol{H}$ определен линейный оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. При этом если $x \in \boldsymbol{L}$, то $(A - \lambda I)\, x = (\lambda_0 - \lambda)\, x$, а потому

$$R_\lambda y = \frac{y}{\lambda_0 - \lambda} \quad \text{на} \quad \boldsymbol{L}. \tag{12}$$

С другой стороны, так как подпространство $\boldsymbol{M}$ инвариантно для оператора A, то, рассматривая A только на $\boldsymbol{M}$ и учитывая регулярность λ, мы видим, что оператор R_λ, отображая всё $\boldsymbol{H}$ на $\boldsymbol{H}$, одновременно устанавливает отображение подпространства $\boldsymbol{M}$ на $\boldsymbol{M}$ *). Кроме того, для оператора A в подпространстве M число λ_0 уже не является собственным, следовательно, оно регулярно и на $\boldsymbol{M}$ определен линейный обратный оператор $R_{\lambda_0} = (A - \lambda_0 I)^{-1}$. Отсюда по теореме 8.7.4 следует, что при λ, достаточно близких к λ_0, нормы операторов R_λ, вычисленные в подпространстве $\boldsymbol{M}$, ограничены в совокупности. Поэтому в подпространстве $\boldsymbol{M}$ оператор $(\lambda_0 - \lambda)\, R_\lambda \to \Theta$ при $\lambda \to \lambda_0$.

Для любого $y \in \boldsymbol{H}$, полагая $y' = Py$, $y'' = y - y'$ $(y'' \in \boldsymbol{M})$, имеем с помощью (12)

$$(\lambda_0 - \lambda)\, R_\lambda y = (\lambda_0 - \lambda)\, R_\lambda y' + (\lambda_0 - \lambda)\, R_\lambda y'' = y' + (\lambda_0 - \lambda)\, R_\lambda y'' \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} y',$$

т. е.

$$Py = \lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda_0 - \lambda)\, R_\lambda y. \tag{13}$$

Если $x = R_\lambda y$, то $y = (A - \lambda I)\, x$ или $-\frac{1}{\lambda} y = \left(I - \frac{A}{\lambda}\right) x$, а так как $\left\| \frac{A}{\lambda} \right\| < 1$, то по формуле (16) из гл. VIII

$$x = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n} \left(\frac{1}{\lambda} y\right)$$

*) Если подпространство $\boldsymbol{M}$ — нулевое (а тогда $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{H}$), то утверждение о наличии положительного собственного элемента тривиально.

и

$$(\lambda_0 - \lambda) R_\lambda y = (\lambda - \lambda_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n y}{\lambda^{n+1}}.$$

Если $y \geqslant \theta$, то, благодаря монотонности оператора A (а вместе с ним и его степеней), по следствию из теоремы 14.3.2 $(\lambda_0 - \lambda) R_\lambda y \geqslant \theta$, а тогда из (13) и самой теоремы 14.3.2 вытекает, что $Py \geqslant \theta$, т. е. оператор P — монотонный.

Если бы $Py = \theta$ при всех $y \geqslant \theta$, то из формулы $Py = Py_+ - Py_-$ следовало бы, что $P = \Theta$, а это невозможно, так как $\boldsymbol{L}$ содержит элементы, отличные от θ. Таким образом, существует $y > \theta$, для которого $Py > \theta$. Но $Py \in \boldsymbol{L}$, следовательно, Py является положительным собственным элементом оператора A, соответствующим числу λ_0.

Пусть теперь известно, что $-\lambda_0$ — собственное число оператора A. Тогда для любого собственного элемента x_0, соответствующего числу $-\lambda_0$, имеем

$$A^2 x_0 = A(Ax_0) = A(-\lambda_0 x_0) = -\lambda_0 (Ax_0) = \lambda_0^2 x_0,$$

т. е. λ_0^2 — собственное число оператора A^2. Кроме того, оператор A^2 — самосопряженный (см. 10.2), монотонный как квадрат монотонного оператора, вполне непрерывен как результат суперпозиции двух вполне непрерывных операторов *) и

$$\|A^2\| = \sup_{\|x\|=1} (A^2 x, x) = \sup_{\|x\|=1} (Ax, Ax) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2 = \lambda_0^2.$$

Следовательно, для оператора A^2 и числа λ_0^2 справедлив результат, установленный в первой части доказательства, и, таким образом, существует $x_1 > \theta$, для которого $A^2 x_1 = \lambda_0^2 x_1$.

Положим $x_0 = Ax_1 + \lambda_0 x_1$. Тогда $x_0 \geqslant \lambda_0 x_1 > \theta$ и

$$Ax_0 = A^2 x_1 + \lambda_0 (Ax_1) = \lambda_0^2 x_1 + \lambda_0 (Ax_1) = \lambda_0 x_0,$$

т. е. λ_0 — также собственное число оператора A. Но этот случай уже разобран в первой части доказательства.

14.7. Частичное упорядочение пространства L^2

Чтобы дать применение к интегральным операторам теоремы, доказанной в предыдущем параграфе, введем частичное упорядочение в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}^2$. Именно, будем считать элемент $x \in \boldsymbol{L}^2$ большим нуля, если $x(t) \geqslant 0$ почти всюду на отрезке $[a, b]$ **) и при этом на множестве положительной меры

*) См. предложение, отмеченное в 11.1.

**) Как и выше, мы рассматриваем пространство $\boldsymbol{L}^2$, составленное из функций на отрезке $[a, b]$.

выполняется неравенство $x(t) > 0$. Ясно, что для непрерывной функции это условие равносильно тому, что функция всюду неотрицательна и по крайней мере в одной точке больше нуля. Поэтому для непрерывных функций из $\boldsymbol{L}^2$ неравенство $x > \theta$ имеет тот же смысл, что и в пространстве $\boldsymbol{C}$.

Покажем, что $\boldsymbol{L}^2$ — *полуупорядоченное банахово пространство*. Выполнение в $\boldsymbol{L}^2$ аксиом I, II и IV линейной структуры очевидно. Проверяем выполнение аксиомы III (существование супремума).

Если $x, y \in \boldsymbol{L}^2$, то положим

$$z(t) = \max[x(t), y(t)]. \tag{14}$$

Функция $z(t)$ измерима. Действительно, если A — любое вещественное число, то множество тех точек, где $z(t) > A$, есть сумма множеств, где $x(t) > A$ и где $y(t) > A$, а потому оно измеримо. Кроме того, из неравенства

$$|z(t)| \leqslant \max[|x(t)|, |y(t)|] \leqslant |x(t)| + |y(t)|$$

следует, что $z \in \boldsymbol{L}^2$.

Элемент z и есть искомый супремум: $z = x \vee y$. В самом деле, из определения неравенства в пространстве $\boldsymbol{L}^2$ следует, что $z \geqslant x$ и $z \geqslant y$. Пусть еще задан такой элемент $u \in \boldsymbol{L}^2$, что $u \geqslant x$ и $u \geqslant y$. Это означает, что $u(t) \geqslant x(t)$ и $u(t) \geqslant y(t)$ (t почти всюду на $[a, b]$, а тогда из (14) следует, что и $u(t) \geqslant z(t)$ тоже почти всюду, т. е. $u \geqslant z$. Таким образом, z удовлетворяет требованиям α) и β) из аксиомы III, т. е. $z = x \vee y$.

Итак, $\boldsymbol{L}^2$ — линейная структура. Из построения супремума в $\boldsymbol{L}^2$ видно, что для любого $x \in \boldsymbol{L}^2$ его положительная и отрицательные части, а также модуль определяются по тем же формулам, что и в структурах $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{C}$.

Монотонность нормы в $\boldsymbol{L}^2$ почти очевидна. Действительно, если $|x| \leqslant |y|$, то $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ почти всюду на $[a, b]$ и потому

$$\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt} \leqslant \sqrt{\int_a^b y^2(t)\,dt} = \|y\|.$$

Таким образом, $\boldsymbol{L}^2$ — полуупорядоченное банахово пространство *).

Заметим, что хотя пространства $\boldsymbol{L}^2$ и $\boldsymbol{l}^2$, как гильбертовы, изоморфны, однако частичное упорядочение мы ввели в этих

*) В первом издании этой книги показано, как ввести частичное упорядочение в функциональном гильбертовом пространстве, если исходить из его реализации с помощью функций промежутка, т. е. в пространстве $\overline{L^2}$.

пространствах по-разному и при изоморфизме между L^2 и l^2 классы положительных элементов этих пространств не будут соответствовать друг другу.

Рассмотрим теперь интегральный оператор в L^2

$$y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \tag{15}$$

с непрерывным ядром. Если это ядро $K(s, t) \geqslant 0$ во всем квадрате $a \leqslant s,\ t \leqslant b$, то $y(s) \geqslant 0$ для $x \geqslant \theta$ при всех s. Таким образом, *оператор оказывается монотонным* *). Если, кроме того, ядро симметрично и отлично от тождественного нуля, то к оператору (15) применима теорема 14.6.1, обеспечивающая, в частности, *существование положительных собственных функций.*

14.8. Сильно положительные линейные операторы

Имея в виду усилить предыдущий результат и доказать при некоторых условиях единственность (с точностью до постоянного сомножителя) положительной собственной функции интегрального оператора, введем еще один класс пространств.

О п р е д е л е н и е. Банахово полуупорядоченное пространство X называется *банаховым пространством ограниченных элементов*, если в X указан элемент $e > \theta$, обладающий следующим свойством: для каждого $x \geqslant \theta$ существует такое число C, что $x \leqslant Ce$.

Будем дальше считать X банаховым пространством ограниченных элементов. Элемент $x \in X$ назовем *сильно положительным* и записываем в этом случае $x \gg \theta$, если существует число $\delta > 0$, при котором $x \geqslant \delta e$.

Примером банахова пространства ограниченных элементов может служить пространство C, в котором в качестве e выбрана функция $e(t) \equiv 1$. Тогда сильно положительными элементами в C будут те функции, для которых $\min x(t) > 0$.

Заметим, что если x — произвольный элемент из X, то для него также при некотором C выполнено неравенство $x \leqslant Ce$. Действительно, по определению пространства ограниченных элементов неравенство $x_+ \leqslant Ce$ выполнено при некотором C, а $x \leqslant x_+$.

Л е м м а 14.8.1. *Если элемент x сильно положителен, а y — произвольный элемент из X, то существует такое $\alpha > 0$, что $y \leqslant \alpha x$.*

---

*) Напоминаем, что значения оператора (15) входят в C_{L^2}.

Доказательство. По определению пространства ограниченных элементов $y \leqslant Ce$ при некотором $C > 0$ *). С другой стороны, $x \geqslant \delta e$ при некотором $\delta > 0$, т. е. $e \leqslant \frac{1}{\delta} x$. Отсюда мы сразу заключаем, что

$$y \leqslant Ce \leqslant \frac{C}{\delta} x,$$

т. е. $\frac{C}{\delta}$ и можно принять за α.

Лемма 14.8.2. *Если* $x_0, x_1 \in X$, $x_0 > \theta$, *а* $x_1 \neq \theta$, *то существует число* t^*, *при котором элемент* $x_0 + t^* x_1$ *положителен, но не сильно положителен.*

Доказательство. Обозначим через T множество всех чисел t, для которых

$$x_0 + t x_1 \geqslant \theta. \tag{16}$$

Это множество не пусто, так как, например, $0 \in T$. Докажем, что T ограничено по крайней мере с одной стороны (сверху или снизу).

Допустим, что T не ограничено сверху, т. е. в T входят положительные, сколь угодно большие t. Тогда из неравенства (16) мы бы получили, что $t(-x_1) \leqslant x_0$ при сколь угодно больших t, и по принципу Архимеда в его усиленной форме (см. следствие из теоремы 14.3.1) отсюда следовало бы, что $-x_1 \leqslant \theta$, т. е. $x_1 \geqslant \theta$. Совершенно аналогично, допустив, что T не ограничено снизу, мы получим, что $x_1 \leqslant \theta$. Следовательно, если T не ограничено с обеих сторон, то $x_1 = \theta$, вопреки условию леммы. Таким образом, T ограничено с какой-нибудь стороны.

Предположим, для определенности, что T ограничено сверху, и пусть $t^* = \sup T$. Докажем, что t^* обладает требуемым свойством. Так как можно найти такие $t_n \in T$, что $t_n \to t^*$, то, переходя к пределу в неравенстве $x_0 + t_n x_1 \geqslant \theta$, мы получим, что $x_0 + t^* x_1 \geqslant \theta$. Допустим, что $x_0 + t^* x_1 \gg \theta$, т. е. что $x_0 + t^* x_1 \geqslant \geqslant \delta e$ при некотором $\delta > 0$. Так как $-x_1 \leqslant Ce$ при некотором $C > 0$, то $-\frac{\delta}{C} x_1 \leqslant \delta e$ или $-\frac{\delta}{C} x_1 \leqslant x_0 + t^* x_1$. Тогда $x_0 + \left(t^* + \frac{\delta}{C}\right) \geqslant \theta$, т. е. число $t^* + \frac{\delta}{C} \in T$, что противоречит определению t^*.

Аналогично разбирается случай, когда T ограничено снизу. Лемма доказана.

Определение. Положительный линейный оператор A, отображающий X в X, назовем *сильно положительным*, если

*) См. только что сделанное замечание.

для каждого $x > \theta$ существует натуральное n, при котором $A^n x \gg \theta$.

В частности, линейный оператор будет сильно положительным, если он сам переводит всякий элемент $x > \theta$ в сильно положительный элемент.

Заметим, что для сильно положительного оператора $Ax > \theta$ при всяком $x > \theta$. Действительно, если $x > \theta$, то $Ax \geqslant \theta$ вследствие положительности оператора A. Однако если бы $Ax = \theta$, то и $A^n x = \theta$ при всех n.

Лемма 14.8.3. *Если оператор A сильно положителен, то $Ax \gg \theta$ для любого $x \gg \theta$.*

Доказательство. Возьмем произвольный $x_0 > \theta$ и подберем натуральное n так, что $A^n x_0 \gg \theta$. Положим $y_0 = A^{n-1} x_0$. Тогда $y_0 > \theta$, а $Ay_0 \gg \theta$. Если $x \gg \theta$, то по лемме 14.8.1 $y_0 \leqslant \alpha x$ при некотором $\alpha > 0$. Тогда $Ay_0 \leqslant \alpha (Ax)$, откуда сразу видно, что

$$Ax \geqslant \frac{1}{\alpha} Ay_0 \gg \theta.$$

Таким образом, $Ax \gg \theta$.

Лемма 14.8.4. *Если оператор A сильно положителен, то оператор A^2 тоже сильно положителен.*

Доказательство. Берем произвольный $x > \theta$. Тогда $y = A^n x \gg \theta$ при некотором натуральном n. Применяя к y еще n раз оператор A, получим на основании предыдущей леммы, что и $A^{2n} x \gg \theta$. Но $A^{2n} = (A^2)^n$. Таким образом, $(A^2)^n x \gg \theta$, а это и означает, что оператор A^2 сильно положителен.

Лемма 14.8.5. *Если оператор A сильно положителен, а $x_0 > \theta$ — его собственный элемент, соответствующий собственному числу λ, то $x_0 \gg \theta$, а $\lambda > 0$. При этом собственное подпространство, соответствующее числу λ, одномерно.*

Доказательство. Так как $x_0 > \theta$, то по сделанному выше замечанию $Ax_0 > \theta$. Но $Ax_0 = \lambda x_0$, а потому $\lambda x_0 > \theta$, откуда и видно, что $\lambda > 0$.

Далее, $A^n x_0 \gg \theta$ при некотором n, т. е. $\lambda^n x_0 \gg \theta$ или $\lambda^n x_0 \geqslant \delta e$, где $\delta > 0$. Но тогда $x_0 \geqslant \frac{\delta}{\lambda^n} e$ и $x_0 \gg \theta$.

Допустим, что x_1 — собственный элемент оператора A, соответствующий тому же числу λ_0. Подберем число t^*, обладающее свойством, указанным в лемме 14.8.2. Тогда

$$A(x_0 + t^* x_1) = Ax_0 + t^*(Ax_1) = \lambda_0 x_0 + t^*(\lambda_0 x_1) = \lambda_0 (x_0 + t^* x_1).$$

Следовательно, если допустить, что $x_0 + t^* x_1 > \theta$, то $x_0 + t^* x_1$ был бы собственным элементом оператора A, а тогда по уже доказанному $x_0 + t^* x_1 \gg \theta$, что противоречит определению числа t^*.

Таким образом, $x_0 + t^* x_1 = \theta$ и тем самым элементы x_0 и x_1 линейно зависимы.

Лемма 14.8.6. *Если оператор A сильно положителен, а $x_0 > \theta$ — его собственный элемент, соответствующий собственному числу λ_0* (при этом $\lambda_0 > 0$ по лемме 14.8.5), *то у оператора A нет собственных чисел $\lambda > \lambda_0$.*

Доказательство. Допустим, что существует собственное число $\lambda_1 > \lambda_0$, а y — соответствующий ему собственный элемент. По лемме 14.8.5 $x_0 \gg \theta$, а тогда по лемме 14.8.1 $y \leqslant \alpha x_0$ при некотором $\alpha > 0$. Отсюда следует, что $A^n y \leqslant \alpha A^n x_0$ при любом натуральном n, т. е.

$$\lambda_1^n y \leqslant \alpha \lambda_0^n x_0$$

или

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n y \leqslant \alpha x_0.$$

Так как это неравенство справедливо при любом натуральном n, а $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} > 1$, то по следствию из теоремы 14.3.1 $y \leqslant \theta$.

С другой стороны, $-y$ тоже собственный элемент, соответствующий числу λ_1, а потому для $-y$ справедлив тот же вывод, что и для y, т. е. $-y \leqslant \theta$ или $y \geqslant \theta$. Отсюда уже вытекает, что $y = \theta$, что противоречит понятию собственного элемента. Тем самым доказано, что собственных чисел $\lambda > \lambda_0$ нет.

Теорема 14.8.1. *Если линейный оператор A, отображающий X в X, сильно положителен, а $x_0 > \theta$ — его собственный элемент, соответствующий собственному числу λ_0, то все прочие собственные числа оператора A удовлетворяют неравенству $|\lambda| < \lambda_0$* ($\lambda_0 > 0$ по лемме 14.8.5) *и у оператора A нет других положительных собственных элементов, линейно независимых с x_0.*

Доказательство. По лемме 14.8.6 у оператора A нет собственных чисел $\lambda > \lambda_0$. Остается доказать, что у оператора A нет также и отрицательных собственных чисел λ, для которых $|\lambda| \geqslant \lambda_0$.

Пусть собственное число λ записано в виде $\lambda = -\mu$, где $\mu > 0$, и пусть y — собственный элемент оператора A, соответствующий числу λ. Так как $\lambda \neq \lambda_0$, то y линейно независим с x_0 *). Из равенств

$$A^2 x_0 = \lambda_0^2 x_0, \qquad A^2 y = \mu^2 y$$

следует, что x_0 — собственный элемент оператора A^2, соответствующий числу λ_0^2, а μ^2 — тоже собственное число оператора

*) В противном случае x_0 должно было бы быть собственным элементом, соответствующим одновременно собственным числам λ и λ_0, что невозможно.

A^2. При этом по условию теоремы $x_0 > \theta$, а тогда $\mu^2 \neq \lambda_0^2$, так как в противном случае собственному числу λ_0^2 оператора A^2 соответствовали бы два линейно независимых собственных элемента x_0 и y, что невозможно по лемме 14.8.5. Неравенство $\mu^2 > \lambda_0^2$ невозможно по лемме 14.8.6. Тем самым доказано, что $\mu^2 < \lambda_0^2$, т. е. что $|\lambda| < \lambda_0$.

Теперь покажем, что у оператора A нет положительных собственных элементов, линейно независимых с x_0. По лемме 14.8.5 собственное подпространство оператора A, соответствующее числу λ_0, одномерно. Допустим, что у оператора A существует собственный элемент $x_1 > \theta$, соответствующий некоторому числу $\lambda_1 < \lambda_0$. (Неравенство $\lambda_1 > \lambda_0$ исключено по лемме 14.8.6.) При этом $\lambda_1 > 0$. Но тогда по той же лемме 14.8.6 невозможно существование собственного числа λ_0 большего, чем λ_1. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Вернемся к интегральному оператору K (15) с симметричным непрерывным ядром. Так как все его собственные функции, соответствующие числам $\lambda \neq 0$, непрерывны, то вывод, сделанный относительно этого оператора в конце предыдущего параграфа, остается в силе, если оператор K рассматривать в пространстве C, т. е. как отображение пространства C в C. Таким образом, если $K(s, t) \geqslant 0$, но не равно нулю тождественно, то оператор K имеет наибольшее положительное собственное число, которому соответствует по крайней мере одна положительная собственная функция.

Укажем дополнительные условия, при которых оператор K в пространстве C будет сильно положительным. Как мы отмечали в начале параграфа, C — банахово пространство ограниченных элементов. Если, например, $K(s, t) > 0$ при всех s, t, то для любого $x > \theta$ из C будет $y(s) > 0$ при всех s, а тогда, вследствие непрерывности $y(s)$, $\min y(s) > 0$ и $y \gg \theta$.

Чтобы найти более общие условия сильной положительности оператора K, выясним, какой вид имеет оператор K^2. Если $y = Kx$, а $z = Ky$, т. е. если

$$y(r) = \int_a^b K(r, t)\, x(t)\, dt, \qquad z(s) = \int_a^b K(s, r)\, y(r)\, dr,$$

то

$$z(s) = \int_a^b K(s, r)\, dr \int_a^b K(r, t)\, x(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(s, r)\, K(r, t)\, dr \right] x(t)\, dt;$$

таким образом, оператор K^2 есть также интегральный оператор с ядром

$$K_2(s, t) = \int_a^b K(s, r) K(r, t)\, dr.$$

Пусть $K(s, t) \geqslant 0$ во всем квадрате и при этом $K(s, t) > 0$ в некоторой полоске вдоль диагонали квадрата, например при $|s - t| \leqslant \gamma$. Тогда $K_2(s, t) \geqslant 0$, и легко видеть, что $K_2(s, t) > 0$ при $|s - t| \leqslant 2\gamma$. Аналогично, исходя из оператора K^2, мы увидим, что оператор K^4 — интегральный оператор с неотрицательным ядром $K_4(s, t)$, причем $K_4(s, t) > 0$ при $|s - t| \leqslant 4\gamma$. Если теперь натуральное n таково, что $b - a \leqslant 2^n\gamma$, то, полагая $m = 2^n$, мы увидим, что для оператора K^m его ядро $K_m(s, t) > 0$ во всем квадрате, а тогда $K^m x \gg \theta$ для любого $x > \theta$ ($x \in C$). Значит, и в этом случае оператор K сильно положителен.

Теперь на основании теоремы 14.8.1 можно утверждать, что при указанных дополнительных условиях оператор (15) имеет единственную с точностью до постоянного множителя положительную собственную функцию.

Заметим, что этот результат может быть обобщен и на уравнения с несимметричным ядром.

Различные приложения идеи частичного упорядочения к вопросам функционального анализа без использования при этом нормированных пространств можно найти в специальной литературе по теории полуупорядоченных пространств.

ЛИТЕРАТУРА ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, изд. 2, перераб., «Наука», 1966.

Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959.

Виленкин Н. Я. и др., Функциональный анализ, под ред. С. Г. Крейна (серия «Справочная математическая библиотека»), «Наука», 1964.

Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, 1961.

Гельфанд И. М., Райков Д. А. и Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, 1960.

Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций (серия «Обобщенные функции», вып. 2), Физматгиз, 1958.

Данфорд Н. и Шварц Дж., Линейные операторы, ИЛ, 1962.

Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, ИЛ, 1961.

Канторович Л. В. и Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

Канторович Л. В., Вулих Б. З. и Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950.

Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. МГУ, вып. I, 1954; вып. II, 1960.

Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, 1962.

Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, 1958.

Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, 1956.

Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, изд. 2, перераб., «Наука», 1965.

Морен К., Методы гильбертова пространства, «Мир», 1965.

Наймарк М. А., Нормированные кольца, Гостехиздат, 1956.

Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, «Наука», 1965.

Райков Д. А., Векторные пространства, Физматгиз, 1962.

Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.

Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.

Хилле Э. и Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962.

Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, Гостехиздат, 1956.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиома треугольника 71, 134
Алгебраически изоморфные пространства 35, 168
Алгебраический изоморфизм 35
Архимеда принцип 392
Арцела теорема 107

Базис 34, 61
— конечно-мерного пространства 139
— ортогональный 36, 62
— ортонормированный 36, 62, 163
Банаха — Гана теорема 244
Банаха — Штейнгауза теорема 214
Бесселя неравенство 64, 163
Больцано — Вейерштрасса теорема (обобщенная) 102
Больцано — Коши признак 50
Бубнова — Галеркина метод 353
Буняковского неравенство 76

Вектор 10
— комплексный 43
— нулевой 11
— с бесконечным множеством координат 46
Взаимно однозначное отображение (соответствие) 20, 220
Вполне регулярная система уравнений 227

Гельдера неравенство 229
Гильберта — Шмидта теорема 320
Гиперплоскость 257
Границы самосопряженного оператора 283
Грина функция 324

Диагональный метод 104
Дистрибутивность оператора 204
Дополнение (множества) 70

Замыкание 59, 85

Изометричное соответствие 37
Изометричные пространства 39, 168
Интеграл Стилтьеса 252
— функции промежутка 186
Интегральное уравнение Фредгольма (2-го рода) 123
Инфимум 387

Квазишар 367
Координатная реализация гильбертова пространства 170
Координаты элемента 140
Коши неравенство 13, 16, 49
Коши — Буняковского неравенство 152
Коэффициенты Фурье 162

Лежандра полиномы 176
Линейная комбинация 30, 138
— оболочка 60, 144
— система 130
— — вещественная 131
— — комплексная 131
— структура 385
Линейно зависимые векторы (элементы) 30, 139
— независимые векторы (элементы) 30, 60, 138, 148
Линейное преобразование в R_n 18
Липшица условие 110

Мажорирующая норма 210
— полунорма 363
Матрица 20
— бесконечная 57

Матрица симметричная 30
— транспонированная 29
Метризация 75
Метрическая сумма 187
Минимизирующая последовательность 338
Минковского неравенство 77
Множество всюду плотное 96
— замкнутое 83
— компактное 100
— ограниченное по норме 137
— — по полунормам 368
— — по расстоянию 88
— открытое 86
— плотное 96
— пустое 69
— слабо компактное 265
— счетное 91
Модуль элемента 389
Монотонная система полунорм 362

Непрерывность нормы 136
— преобразования (оператора) в R_n 26
Норма вектора (элемента) 12, 133
— оператора 25, 208
— функционала в R_n 28
Нуль сложения 131

Область задания оператора 111
Образ множества 111
— точки 111
Ограниченность точечная 214
— функционала в l^2 55
Оператор 17, 111
— аддитивный 203
— вполне непрерывный 305
— линейный 205
— — в счетно-нормированном пространстве 371
— — в l^2 58
— матричный 225
— монотонный 400
— неособенный (Штурма — Лиувилля) 323
— непрерывный 112
— нулевой 217
— обратимый 222
— обратный 220
— ограниченный 206
— — в счетно-нормированном пространстве 371
— — в l^2 58
— однородный 203

Оператор положительный 400
— самосопряженный 30, 281
— — положительно определенный 337
— — положительный 284
— сжатия 115
— сильно положительный 405
— симметричный 288
— сопряженный 29, 279
Операторы равноограниченные 373
Ортогонализация 38, 165
Ортогональная система элементов 161
— — — полная 161
Ортогональное дополнение 159
— разложение пространства 159
Ортогональные векторы (элементы) 15, 154
— подпространства 156
Ортогональный базис 36, 62
Ортонормированная система элементов 161
Ортонормированный базис 36, 62, 163
Отрицательная часть элемента 389

Пеано теорема 125
Пересечение множеств 70
Перманентный метод суммирования 274
Пифагора теорема обобщенная 16, 54, 155
Подмножество 69
— линейное 143
Подпространство 30, 60, 144
— бесконечно-мерное 62
— инвариантное 285
— конечно-мерное 61
— собственное 287
Полином наилучшего приближения 147
Полная вариация функции 248
— система ортогональных подпространств 161
Положительная часть элемента 389
Полунорма 355
— существенная 364
Предел в метрическом пространстве 79
Проектор 209
Проекция элемента на подпространство 158
Произведение матриц 23
— функций промежутка 198
Пространство банахово 137
— — ограниченных элементов 404

Пространство банахово полуупорядоченное 392
— векторное n-мерное 11
— — — комплексное 43
— второе сопряженное 262
— гильбертово 153
— — комплексное 170
— компактное 100
— метрическое 71
— — полное 88
— нормированное 133
— — бесконечно-мерное 139
— — вещественное 134
— — комплексное 134
— — конечно-мерное 139
— рефлексивное 262
— сепарабельное 97
— со счетным базисом 148
— сопряженное 260
— счетно-нормированное 356
— эвклидово бесконечно-мерное 48
— — — комплексное 66
— — n-мерное 15
— — — комплексное 43
Прямая 34, 145

Равенство множеств 69
Разложение нормированного пространства 145
— Фурье 162
Размерность (пространства, подпространства) 34, 140
Разность множеств 70
Распространение оператора 211
Расстояние в метрическом пространстве 71
Регулярное число 291
Редукции метод 335
Ритца метод 337

Система полунорм монотонная 362
Скалярное произведение 15, 151
Собственная функция интегрального уравнения 300
Собственное подпространство 287
— число оператора 39, 286
Собственный вектор 39
— элемент 286
Спектр 291
— чисто непрерывный 291
— — точечный 291
Среднее значение функции 184
— отклонение 82
Степень оператора 219
Структура банахова 392
— линейная 385
Сумма матриц 22
— множеств 69
— ряда обобщенная 274
Суперпозиция операторов 219
Супремум 385
Существенная точная верхняя граница 242
Сходимость в себе 87
— в среднем 82, 83, 191
— по норме 136
— по полунормам 356
— по расстоянию 79
— последовательности векторов в R_n 25
— равномерная (последовательности операторов) 217
— сильная 282
— слабая 264
— — в гильбертовом пространстве 309
— точечная 213

Точка внутренняя 86
— изолированная 312
— неподвижная 114
— предельная 84
Транзитивность неравенства 386

Умножение операторов 219
Уравнение замкнутости 65, 163

Фундаментальная последовательность 87
— — по полунормам 358
— система собственных элементов 314
Функции равноограниченные 107
— равностепенно непрерывные 107
Функционал 27, 112
Функциональная реализация гильбертова пространства 174
Функциональное уравнение 114
Функция кусочно-постоянная 194
— обобщенная 381
— ограниченной вариации 248
— промежутка 185

Характеристическое уравнение матрицы 40

Характеристическое число интегрального уравнения 300

Шар единичный 207
— замкнутый 83
— открытый 83
Штурма — Лиувилля дифференциальное уравнение 300

Эквивалентные нормы 209
— системы полунорм 361
Элемент множества 68
Элемент наилучшего приближения 146
— нулевой 131
— отрицательный 384
— положительный 384
— сильно положительный 404
— собственный 286
Элементы p-эквивалентные 358
ε-сеть 102

Ядро интегрального уравнения 123
— — — вырожденное 331
— — — симметричное 299

Борис Захарович Вулих

ВВЕДЕНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

М., 1967 г., 416 стр. с илл.

Редактор *В. М. Гринберг*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в набор 11/X 1966 г. Подписано к печати 3/IV 1967 г. Бумага 60 × 90¹/₁₆. Физ. печ. л. 26. Условн. печ. л. 26. Уч.-изд. л. 26,31. Тираж 25 000 экз. Т-01864. Цена книги 1 р. 86 к. Заказ № 689.

Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9.